

Elizabeth Lacerda Gomes

RESULTADOS DE CONTROLABILIDADE PARA EQUAÇÕES
PARABÓLICAS: EQUAÇÃO DO CALOR COMO LIMITE DA
EQUAÇÃO DA ONDA E EQUAÇÃO DE STOKES COM RESTRIÇÃO

João Pessoa - PB

2024

Universidade Federal da Paraíba
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Doutorado em Matemática

Elizabeth Lacerda Gomes

RESULTADOS DE CONTROLABILIDADE PARA EQUAÇÕES
PARABÓLICAS: EQUAÇÃO DO CALOR COMO LIMITE DA
EQUAÇÃO DA ONDA E EQUAÇÃO DE STOKES COM RESTRIÇÃO

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa
de Pós-Graduação em Matemática (PPGMat) da
UFPB como requisito parcial para a obtenção do
título de Doutora em Matemática.

João Pessoa - PB

2024

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

G633r Gomes, Elizabeth Lacerda.

Resultados de controlabilidade para equações parabólicas : equação do calor como limite da equação da onda e equação de Stokes com restrição / Elizabeth Lacerda Gomes. - João Pessoa, 2024.

144 f. : il.

Orientação: Fágner Dias Araruna.

Coorientação: Felipe Wallison Chaves Silva.

Tese (Doutorado) - UFPB/CCEN.

1. Controlabilidade - Matemática. 2. Observabilidade - Matemática. 3. Equação da onda dissipativa. 4. Equação do calor. 5. Equação de Stokes. I. Araruna, Fágner Dias. II. Silva, Felipe Wallison Chaves. III. Título.

UFPB/BC

CDU 681.5.075:51(043)



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
CAMPUS I – DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ATA DE DEFESA DE DOUTORADO JUNTO AO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA, REALIZADA NO DIA 29 DE FEVEREIRO DE 2024.

Ao vigésimo nono dia de fevereiro de dois mil e vinte e quatro, às 14:30 horas, no Departamento de Matemática/CCEN da Universidade Federal da Paraíba e por videoconferência, através do link: <https://meet.google.com/hmf-voai-khn>, foi aberta a sessão pública de defesa de Tese intitulada “**Resultados de controlabilidade para equações parabólicas: Equação do calor como limite equação da onda e equação de Stokes com restrição**”, da aluna **Elizabeth Lacerda Gomes** que havia cumprido, anteriormente, todos os requisitos para a obtenção do grau de Doutora em Matemática, sob a orientação do Prof. Dr. Fágner Dias Araruna e coorientação do Prof. Dr. Felipe Wallison Chaves Silva. A Banca Examinadora, indicada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática, foi composta pelos professores: Fágner Dias Araruna (Orientador), Felipe Wallison Chaves Silva (Coorientador), Bianca Morelli Rodolfo Calsavara (UNICAMP), Felipe Wergete Cruz (UFPE), Jefferson Abrantes dos Santos (UFCG) e Marko Antonio Rojas Medar (UTA/Chile). O professor Fágner Dias Araruna, em virtude da sua condição de orientador, presidiu os trabalhos e, depois das formalidades de apresentação, convidou a aluna a discorrer sobre o conteúdo da tese. Concluída a explanação, a candidata foi arguida pela banca examinadora que, em seguida, sem a presença da aluna, finalizando os trabalhos, reuniu-se para deliberar tendo concedido a menção: **APROVADA**. E, para constar, foi lavrada a presente ata que será assinada pelos membros da Banca Examinadora.

João Pessoa, 29 de fevereiro de 2024.

Fágner Dias Araruna

Felipe Wallison Chaves Silva

Bianca Morelli Rodolfo Calsavara

Felipe Wergete Cruz

Felipe Wergete Cruz

Documento assinado digitalmente

Jefferson Abrantes dos Santos

gov.br

JEFFERSON ABRANTES DOS SANTOS

Data: 04/03/2024 08:04:23-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Marko Antonio Rojas Medar

Marko Antonio Rojas Medar

Agradecimentos

Quando aprendi os números de 1 a 100, fiquei muito empolgada. A minha primeira memória referente à matemática é a de contá-los para o meu pai, que me ouvia também empolgado. Infelizmente, ele partiu dias antes da seleção do doutorado e eu sinto muito por não o ter neste momento, mas agradeço, entre tantas outras coisas, por ter me deixado essa memória tão afetiva dos meus primeiros contatos com a matemática.

O tempo passou e eu, agora adulta, estou concluindo mais uma etapa de aprendizagem. Nesse percurso muitas pessoas estiveram comigo e desempenharam importantes papéis. Por isso, fico feliz por ter este espaço para externar minha gratidão.

Agradeço, inicialmente, e não poderia ser de outra forma, à minha mãe e minha irmã por serem a minha base, meu sustento e meus grandes amores. Agradeço pela compreensão, pelo incentivo e por tão gentilmente entenderem a minha ausência. Saibam que eu as amo imensamente.

Levarei para sempre na lembrança e no coração os amigos queridos que fiz nessa jornada. Agradeço especialmente a Danilo, Janiely, Lindinês, Ivan, André, Anselmo, Ginaldo, Pedro, Carla, Cláudia e Marcos, por terem sido incríveis, acolhedores e divertidos. Passamos por vários obstáculos e estar com vocês tornou a carga mais leve.

Também não posso deixar de agradecer a Tuanny, minha querida amiga, por ter cuidado de mim tão habilmente quando eu não pude fazer isso. Eu estarei permanentemente em dívida com você, assim como estou com as inestimáveis Oslenne e Joseane, que sempre são abrigo, escuta, aconchego e boas doses de risos. Meninas, espero que vocês saibam o quanto são maravilhosas.

Ainda falando sobre amigos, preciso agradecer a meus amados Sérgio e Roberta,

companheiros de trabalho e de vida, e de quem senti imensa saudade enquanto estava fisicamente longe. Muito obrigada por todo carinho, apoio, encorajamento e cuidado. Eu me sinto mais feliz por ter vocês na minha vida.

Meus sinceros e profundos agradecimentos a Dr. Jaims Ribeiro por ser um profissional excelente, por todo zelo e generosidade. Foi muito importante nesse caminho, e o senhor sabe o quanto ele foi difícil, poder contar com sua tranquilidade, disponibilidade e sabedoria. Muito obrigada.

Aqui preciso, por todo conhecimento compartilhado, agradecer aos professores que contribuíram durante esse período de formação. Também agradeço aos membros da banca por aceitarem essa tarefa e por participarem dessa etapa de encerramento. Em especial, agradeço a meus orientadores por, além de toda competência, compromisso e dedicação, saberem ser humanos ao lidar com outro humano. A compreensão e acolhimento de vocês foi fundamental para que eu chegasse até aqui. Serei sempre grata.

Quero também agradecer à UFPE por ter permitido meu afastamento para cursar o doutorado e aos colegas de trabalho pelo incentivo. Em particular, agradeço a minha ex-chefe, Juliana Angeiras, por ter sido tão eficiente, por exercer tão bem sua função e por todo carinho. Você é uma profissional e pessoa ímpar, de quem sinto muito orgulho.

Por fim, mas de maneira alguma menos importante, agradeço a meus três pacotinhos puros e fofos de amor, Lai, Stephen e Zoé, por todo carinho, conforto emocional e felicidade que me trazem. Fico muito grata por ter recebido a honra de ser a guardiã de seres tão preciosos.

A todos que estiveram e estão comigo, muito obrigada.

Resumo

Nesta tese estudamos problemas de controle nulo relacionados às equações da onda, do calor e de Stokes. No primeiro deles, provamos a controlabilidade nula uniforme para uma equação da onda dissipativa e, em um processo de limite, obtemos a controlabilidade nula da equação do calor. Para isto, combinamos uma análise espectral dos sistemas e desigualdades de Carleman. No segundo problema, estamos interessados em garantir a controlabilidade nula da equação de Stokes sob certas restrições. Mais precisamente, desejamos levar a solução a zero mantendo-a ortogonal a um determinado espaço de dimensão finita.

Palavras-chave: controlabilidade, observabilidade, equação da onda dissipativa, equação do calor, equação de Stokes.

Abstract

In this thesis, we study null controllability problems related to the wave, heat, and Stokes equations. Firstly, we establish uniform null controllability for a dissipative wave equation, and as a limit, we achieve null controllability for the heat equation. To accomplish this, we combine a spectral analysis and Carleman inequalities. In the second problem, our focus is on null controllability for the Stokes equation under certain constraints. More specifically, we aim to drive the solution to zero while maintaining orthogonality to a given finite-dimensional space.

Keywords: controllability, observability, dissipative wave equation, heat equation, Stokes equation.

Sumário

Introdução	12
1 Equação do calor como limite da equação da onda	18
1.1 Espectro do sistema	20
1.2 Alguns resultados auxiliares	25
1.2.1 Projeções parabólicas	25
1.2.2 Projeções hiperbólicas	26
1.3 Desigualdades de Carleman	30
1.3.1 Desigualdade de Carleman com observação na fronteira	32
1.3.2 Desigualdade de Carleman com observação no interior	45
1.3.3 Desigualdade de Carleman: um resultado auxiliar	48
1.3.4 Desigualdade de Carleman	62
1.4 Controlabilidade no terceiro intervalo	65
1.4.1 Norma em $V'(0, 1)$	65
1.4.2 Desigualdade de observabilidade	67
1.4.3 Controlabilidade	75
1.5 Prova do Teorema 1.1	78
2 Equação de Stokes com Restrição	90
A Determinação dos Autovalores	113
B Problema de Minimização e Regularidade	120

Lista de Figuras

1.1	Comportamento das funções f e g	21
1.2	Comportamento das funções F e G	22
B.1	representação do conjunto $(0, 1) \times K^{(l)}$	121

Introdução

Algo que podemos perceber no mundo e naquilo que está presente nele é a existência de inúmeros sistemas atuando constantemente, sejam eles naturais, como os climáticos, físicos ou biológicos, ou sejam eles não naturais, como os econômicos, de transporte ou computacionais. Uma coisa interessante e importante em relação a esses sistemas é que em diversas ocasiões, por necessidade ou vontade, é preciso interferir sobre eles para que atuem de forma a satisfazer um determinado objetivo ou controlar uma situação.

O próprio corpo humano pode oferecer exemplo desse tipo de processo. Para seu bom funcionamento, a temperatura deve ser mantida estável. Quando ela aumenta, a transpiração é acionada. A água liberada pelo corpo, por estar mais fria do que ele, absorve o calor excedente e ocorre o equilíbrio térmico. A transpiração é, portanto, um mecanismo de controle da nossa temperatura.

A necessidade ou interesse em ter controle sobre o ambiente em que vivemos e o que acontece nele, em diferentes escalas e contextos, é muito comum ao ser humano e, em diversos casos, imperiosa. A pandemia mundial de Covid-19 ocorrida em 2020 é um forte exemplo de uma situação que exigiu a atuação de controles capazes de reduzir a disseminação do vírus ou o aumento do número de óbitos. Podemos também citar vários outros casos em que o homem usa instrumentos de controle: construções de diques e sangradouros, instalação de termostatos e disjuntores, aplicação de vacinas e insulina, entre outros.

A Teoria de Controle, que começou a ser formalmente desenvolvida no século XIX, desempenha o papel de uma importante ferramenta nas mais diversas áreas do conhecimento. Uma vez que possamos transcrever situações reais em equações matemáticas, o

estudo dessas formulações pode trazer soluções para problemas, melhorando a eficiência dos sistemas envolvidos ou a qualidade de vida das pessoas, por exemplo. Sem grande rigor, os problemas de controlabilidade lidam com sistemas onde uma das variáveis é o tempo. Conhecendo o estado inicial desse sistema e definindo o que esperamos como estado final, atuamos sobre ele durante o intervalo de tempo $(0, T)$ fazendo uso de um controle adequado de forma que a solução tenha em $t = 0$ o estado inicial dado e atinja em $t = T$ o estado final que escolhemos previamente.

Falar sobre a evolução dessa teoria não é uma tarefa simples. Em 1978, Russell em [32] comentou sobre a impossibilidade de traçar um esboço completo desse desenvolvimento. Nesse texto ele citou que as bibliografias listadas por Johnsson [15] e Robinson [31] com artigos escritos até 1971 já abrangiam várias centenas de títulos e que número comparável tinha surgido nos sete anos posteriores. Em 2003, Fernández-Cara e Zuazua [10], ao apresentarem a história, as conquistas e as perspectivas do tema, comentaram sobre a capacidade que a Teoria de Controle tem de fundir ideias e métodos matemáticos para produzir um novo e importante corpo matemático.

Essa é uma área que continua avançando e se mantém atual e valorizada, visto que alcançamos um ponto da história em que grande parte dos problemas mais relevantes são interdisciplinares e a Teoria de Controle, como mencionado anteriormente, tem a característica de poder ser aplicada em numerosos ramos, tais como engenharia, economia, ecologia, medicina, física, entre outras. Além disso, os conhecimentos já estabelecidos e a maior disponibilidade de recursos tecnológicos são propícios para o desenvolvimento da área.

Em termos matemáticos e de maneira geral, um problema de controle pode ser escrito como uma equação do tipo

$$A(y) = f(v) \tag{1}$$

Nessa notação a variável do sistema é representada por y , que pertence a um espaço vetorial Y . A variável v é o controle. Ela pode ser escolhida livremente no conjunto dos controles admissíveis $\mathcal{U}_{ad}$ e atua sobre a solução y com o objetivo de fazer com que se comporte da maneira que determinamos previamente.

Até o presente momento já dispomos de uma vasta e bem consolidada literatura sobre problemas de controle, tais como [6], [22], [32], [37] e [40]. Claramente, as técnicas e

resultados dependem das características da equação (1). Podemos, por exemplo, estar trabalhando com um sistema de dimensão finita ou infinita e com equações lineares ou não. O caso de dimensão finita está completamente compreendido quando a equação é linear e muito bem compreendido quando a equação é não linear. As referências [6], [16], [19], [20] e [34] abordam esses casos. Quando passamos a tratar de sistemas de dimensão infinita e de equações não lineares, o progresso é consideravelmente mais lento. No entanto, ainda assim, a teoria evoluiu expressivamente ao longo das décadas, veja [6], [22], [39] e [43].

Outro ponto que devemos considerar quando lidamos com controles é que eles podem ter diferentes classificações, afinal, a depender da situação, talvez não exista um controle que leve o sistema exatamente no estado final que desejamos. Para lidar com algumas possibilidades, classificamos os sistemas em *exatamente controlável*, *aproximadamente controlável*, *nulamente controlável* ou *controlável às trajetórias*. Sob determinadas condições, esses tipos de controles podem ser equivalentes. Não nos deteremos em fazer maiores observações sobre eles, apenas definiremos aquele que será utilizado nesta tese: dizemos que um sistema é nulamente controlável quando partindo de qualquer estado inicial a solução pode ser levada a zero. Mais informações sobre os tipos de controlabilidade estão disponíveis, por exemplo, em [4], [6] e [25].

Também é relevante mencionar que os interesses relacionados a controles ultrapassam a questão de garantir a existência de um deles. Devemos lembrar que em muitas ocasiões as equações matemáticas estão associadas a um problema real e que, portanto, é preciso saber se o controle obtido é viável e/ou se tem características desejáveis. Por exemplo, em aplicações na área de engenharia, a estética, segurança e os custos também são fatores importantes a serem avaliados. A intenção de obter um controle adequado gera uma conexão entre a Teoria de Controle e a de Otimização, ramo da matemática bastante vasto e sobre o qual indicamos as leituras [9], [30] e [33]. Em geral, encontrar o que chamamos de *controle ótimo* envolve a minimização de um funcional e a verificação de que ele possui certas propriedades. Dentre elas, esperamos que o funcional seja coercivo. A estratégia comumente utilizada para verificar se essa propriedade é válida é estabelecer o que denominamos de *desigualdade de observabilidade*, o que na maior parte das vezes não é simples. Uma ferramenta muito útil nesses casos é a *desigualdade de Carleman*,

desigualdade normalmente trabalhosa de ser obtida, porém, técnica. Leia mais sobre elas em [13], [14], [18], [29], [35] e [38].

Feitas essas breves apresentações sobre a Teoria de Controle, voltemos ao tema da temperatura mencionado no segundo parágrafo. No processo de fundição de metais, para que eles obtenham a qualidade e propriedades esperadas, a temperatura precisa ser cuidadosamente controlada. Esse também é o caso em laboratórios que lidam com determinadas amostras biológicas ou em museus na manutenção e preservação de obras de arte. Em nossos domicílios, aquecedores ou ares condicionados desempenham valioso papel na climatização do ambiente, auxiliando no controle da temperatura e proporcionando maior bem estar. Atualmente, em nível mundial, há uma preocupação imensa e urgente em controlar a temperatura da Terra, evitando que o planeta entre em colapso.

Acreditamos que os exemplos acima sejam suficientes para motivar o estudo do controle de sistemas associados à equação do calor. Sobre esse assunto dispomos de generosa bibliografia e resultados bem consolidados, como apresentados em [5], [7], [8], [11] e [26]. Algo que podemos citar sobre as equações do calor é que suas soluções dispõem de efeito regularizante, o que significa que elas pertencem à classe C^∞ quando um dado inicial é contínuo. Isso faz com que não se possa esperar controlabilidade exata. De fato, o estado final não pode ser escolhido arbitrariamente, uma vez que se aplicarmos o controle em uma pequena parte do domínio, no restante da região a solução será suave. No entanto, uma vantagem que as equações do calor têm é que as controlabilidade nula, aproximada e às trajetórias são alcançáveis para um tempo $T > 0$ qualquer.

Outro tipo de equação clássica sobre o qual dispomos de quantidade considerável de informação é a equação da onda. Seu estudo, se não apenas pelos propósitos puramente teóricos, são relevantes devido à sua aplicabilidade. No contexto de comunicações, por exemplo, elas são utilizadas por rádios, televisões digitais, GPS, telefonia móvel, satélites, radares, entre outros. Em nossas residências elas estão presentes no micro-ondas, aparelho que proporciona praticidade ao dia a dia. Além disso, podemos citar o seu uso na medicina, em exames como raio X e ressonância magnética, e nos tratamentos por radioterapia.

Assim como no caso da equação do calor, os estudos sobre controlabilidade de equações da onda são abundantes. Propomos como referências os textos [3], [17], [41] e [42]. Em

contraposição ao que temos para o calor, é possível obter controlabilidade exata para equações da onda graças à sua reversibilidade no tempo. Contudo, essa controlabilidade exige que um tempo mínimo transcorra antes que possa ser atingida.

Com essas informações postas, introduzimos o primeiro problema tratado nesta tese. No Capítulo 1, nosso propósito é estudar o controle desses dois tipos de equações concomitantemente. De maneira mais precisa, desejamos, a partir da controlabilidade nula da equação da onda unidimensional

$$\varepsilon u_{tt} - u_{xx} + u_t = h1_\omega, \quad (2)$$

garantir, em um processo de limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$, a controlabilidade nula da equação do calor

$$u_t - u_{xx} = h1_\omega. \quad (3)$$

Destacamos que em (2) e (3), u representa a solução, ou estado, dos sistemas, e h o controle. A motivação e inspiração para tratar esse problema vêm dos artigos [23] e [24]. Em nosso trabalho substituímos a condição de fronteira de Dirichlet, presente em [24], por uma condição de Robin no extremo superior do intervalo espacial $(0, 1)$:

$$\varepsilon u_x(1, t) + au(1, t) = 0 \quad \text{em} \quad (0, T), \quad (4)$$

com a sendo uma constante positiva.

Iniciamos o Capítulo 1 apresentando os detalhes do problema e como iremos abordá-lo. Resumidamente, o método consiste em dividir o intervalo de tempo em três subintervalos e tratar o sistema de forma conveniente em cada um deles. Nos dois primeiros subintervalos estamos especialmente interessados em controlar as partes parabólica e hiperbólica da solução. Para esse propósito, precisamos fazer uma análise espectral e escrever a solução em série de Fourier. Tal análise apresenta dificuldades geradas pela mudança na condição de fronteira, exigindo a verificação cuidadosa de diversos casos. Na Seção 1.1 estudamos aquele que fornece autovalores e entrelaçamos os dois tipos de equação, uma vez que obtemos as autofunções da equação da onda a partir das autofunções relacionadas ao calor. O controle das partes parabólica e hiperbólica, verificados, respectivamente, para o primeiro e o segundo subintervalos, é examinado na Seção 1.2.

Para garantir a controlabilidade no terceiro e último intervalo de tempo necessitamos de uma desigualdade de observabilidade. O processo para encontrá-la é mostrado na Seção 1.3 e consiste em, primeiramente, conseguir uma desigualdade de Carleman. Aqui

também surgem dificuldades decorrentes da mudança na condição de fronteira, sendo necessário fazer escolhas bastante assertivas para que possamos estabelecer a estimativa de Carleman. Após obtê-la, combinamos com desigualdades de energia e conseguimos a observabilidade. Na Seção 1.4 esse resultado é aplicado e provamos a controlabilidade no terceiro intervalo. Finalmente, na Seção 1.5 reunimos o que foi obtido nas anteriores e demonstramos nosso principal teorema.

No segundo capítulo temos uma nova questão de interesse. Nele passamos a estudar as equações de Stokes, que descrevem o escoamento de substâncias fluídas. Veja mais detalhes em [2], [28] e [36]. Sendo $T > 0$, avaliaremos o sistema

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + \nabla p = g1_\omega & \text{em } Q = \Omega \times (0, T), \\ \operatorname{div} y = 0 & \text{em } Q, \end{cases}$$

em que y é o estado, p é a pressão do fluido e g é o controle. Além disso, Ω e ω são conjuntos abertos, não vazios e limitados de $\mathbb{R}^N$, $\omega \subset \Omega$ e $N = 2, 3$. Inspirados por Mophou [27], nosso desejo é obter a controlabilidade nula do sistema, mas de forma que o estado atenda a algumas restrições. Mais precisamente, desejamos que a projeção ortogonal do estado y sobre um determinado espaço de dimensão finita seja nula.

O método utilizado, proposto em [27], se baseia em substituir o problema de controle do sistema com restrição no estado por um problema equivalente com um sistema que apresenta restrições no controle. É importante observar que o fato de termos substituído a equação em [27] por uma de Stokes, requer de nós que identifiquemos quais condições devemos impor sobre as funções geradoras do espaço de dimensão finita para que o nosso objetivo possa ser alcançado. Assim como foi necessário para o problema anterior, aqui também precisaremos de uma desigualdade de Carleman. Após concluirmos a controlabilidade desejada, encerramos o capítulo estabelecendo algum tipo de unicidade para o controle encontrado.

Para finalizar a tese, incluímos dois apêndices. No primeiro deles apresentamos os diversos casos que precisam ser analisados no estudo do espectro feito na Seção 1.1. No Apêndice B provamos um resultado de minimização e regularidade que se faz necessário na busca da desigualdade de Carleman da Seção 1.3.

Capítulo 1

Equação do calor como limite da equação da onda

Seja $l_1 < l_2$ e $\omega = (l_1, l_2)$ um subintervalo aberto não vazio de $(0, 1)$. Neste trabalho estudaremos propriedades de controlabilidade e limite assintótico para o sistema

$$\begin{cases} \varepsilon u_{tt} - u_{xx} + u_t = h 1_\omega & \text{em } Q := (0, 1) \times (0, T), \\ u(0, t) = 0 & \text{em } (0, T), \\ u_x(1) + a u(1) = 0 & \text{em } (0, T), \\ u(x, 0) = u^0(x), u_t(x, 0) = u^1(x) & \text{em } (0, 1), \end{cases} \quad (1.1)$$

no qual $\varepsilon \in (0, 1)$, $a > 0$ e (u^0, u^1) são dados iniciais em um espaço adequado. Aqui 1_ω representa a função característica do aberto ω e h é um controle em $L^2(Q)$.

Considere o espaço

$$V(0, 1) = \{v \in H^1(0, 1) \mid v(0) = 0\}$$

com a norma

$$\|u\|_{V(0,1)}^2 = \|u_x\|_{L^2(0,1)}^2 + a|u(1)|^2. \quad (1.2)$$

Para dados iniciais $u^0 \in V(0, 1)$ e $u^1 \in L^2(0, 1)$, o sistema (1.1) tem única solução na classe $\mathcal{C}([0, T]; L^2(0, 1)) \cap L^2(0, T; V(0, 1))$.

Formalmente, quando fazemos $\varepsilon \rightarrow 0$, o sistema (1.1) converge para

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t - u_{xx} = h1_\omega & \text{em } (0, 1) \times (0, T), \\ u(0) = 0 & \text{em } (0, T), \\ u_x(1) + au(1) = 0 & \text{em } (0, T), \\ u(0) = u^0 & \text{em } (0, 1). \end{array} \right. \quad (1.3)$$

É sabido que, para cada $\varepsilon > 0$, o sistema (1.1) é controlável a zero para um tempo suficientemente grande. Também, o sistema (1.3) é controlável em qualquer tempo $T > 0$. Neste capítulo, iremos provar que a controlabilidade nula do sistema (1.3) pode ser obtida como processo limite da controlabilidade nula do sistema (1.1). Mais precisamente, mostraremos que é possível construir, para cada $\varepsilon > 0$, um controle h_ε que leva a solução de (1.1) a zero. Garantiremos ainda que $(h_\varepsilon)_\varepsilon$ converge, em um sentido apropriado, para um controle nulo h de (1.3). Enunciamos abaixo o principal resultado deste capítulo.

Teorema 1.1 *Dado $T > 0$, existem $T_0 > 0$ e $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(T) > 0$, com ε_0 satisfazendo $T > \sqrt{\varepsilon_0} T_0$ e tal que para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ a solução u_ε do sistema (1.1) satisfaz*

$$u_\varepsilon(T) = (u_\varepsilon)_t(T) = 0.$$

Além disso, existe uma constante $C = C(T)$, independente de ε , que faz com que seja verdadeira a seguinte estimativa para o controle h_ε :

$$\|h_\varepsilon\|_{L^2(\omega \times (0, T))} \leq C(T) \|(u^0, \sqrt{\varepsilon} u^1)\|_{V(0, 1) \times L^2(0, 1)}.$$

Também, existe subsequência de $(h_\varepsilon)_\varepsilon$, denotada da mesma forma, tal que

$$h_\varepsilon \rightarrow h \quad \text{fracamente em } L^2(\omega \times (0, T)), \quad \text{quando } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (1.4)$$

e h é um controle nulo para a equação do calor (1.3).

Para provar o Teorema 1.1, usaremos a ideia de López, Zhang e Zuazua em [23], que consiste em dividir em três partes o intervalo $[0, T] = [0, T/3] \cup [T/3, 2T/3] \cup [2T/3, T]$ e tratar o problema de forma conveniente em cada uma delas. Mais precisamente, no primeiro subintervalo controlamos as projeções parabólicas da solução. No segundo subintervalo, deixamos o sistema evoluir livremente, ou seja, sem a influência de um controle, e nos concentramos na parte hiperbólica da solução, obtendo sua taxa de

decaimento. Por fim, no último subintervalo voltamos a atuar sobre o sistema de modo a levar todo o estado a zero. Com esse processo construímos um controle que garante a controlabilidade nula no tempo T . Além disso, essa partição do intervalo é o que nos permite manter a norma do controle limitada.

Para dividir o sistema em suas partes parabólica e hiperbólica precisamos de uma base adequada para o espaço no qual trabalharemos. Conseguí-la é a meta da próxima seção.

1.1 Espectro do sistema

Como dito antes, formalmente o sistema (1.1) tende ao sistema (1.3), quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Nesta etapa estudaremos os espectros dos dois sistemas, estabelecendo uma relação entre eles. Isso é feito encontrando as autofunções do operador associado à equação da onda a partir das autofunções do operador associado à equação do calor.

Iniciamos apresentando o sistema adjunto referente a (1.3):

$$\begin{cases} -\varphi_t - \varphi_{xx} = 0 & \text{em } (0, 1) \times (0, T), \\ \varphi(0) = 0 & \text{em } (0, T), \\ \varphi_x(1) + a\varphi(1) = 0 & \text{em } (0, T), \\ \varphi(T) = \varphi^0 & \text{em } (0, 1), \end{cases} \quad (1.5)$$

com $\varphi^0 \in L^2(0, 1)$.

Seja $A : D(A) \subset L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1)$ o operador

$$A = -\partial_x^2,$$

com

$$D(A) = \{z \in V(0, 1) \cap H^2(0, 1) \mid az(1) = -z_x(1)\}.$$

O sistema (1.5) é equivalente a

$$\begin{cases} \Phi_t = A\Phi, \\ \Phi(T) = \Phi^0 = \varphi^0. \end{cases}$$

Para encontrar os autovalores β de A , consideramos o problema:

$$\begin{cases} w_{xx}(x) + \beta w(x) = 0 & \text{em } (0, 1), \\ w(0) = w_x(1) + aw(1) = 0, \end{cases} \quad (1.6)$$

cujas equações características são dadas por

$$r^2 + \beta = 0 \Leftrightarrow r = \pm\sqrt{-\beta}.$$

Essa equação exige a análise de diferentes casos. Os detalhes estão apresentados no Apêndice A. Aqui estudaremos apenas aquele que fornece autovalores, a saber, quando $-\beta < 0$. Disso temos $r = \pm i\sqrt{\beta}$ e a solução geral de (1.6) é

$$w(x) = c_1 \cos \sqrt{\beta}x + c_2 \sin \sqrt{\beta}x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

Usando as condições de fronteira, vemos que

$$c_1 = 0$$

e

$$c_2 \left(\sqrt{\beta} \cos \sqrt{\beta} + a \sin \sqrt{\beta} \right) = 0.$$

Se $c_2 = 0$, então $w \equiv 0$ e não temos autovalores. Assim, devemos ter $c_2 \neq 0$ e buscaremos β tal que

$$\sqrt{\beta} \cos \sqrt{\beta} + a \sin \sqrt{\beta} = 0. \quad (1.7)$$

Como $a > 0$, a igualdade (1.7) nos diz que $\sqrt{\beta} \neq \pi/2 + k\pi$ e, portanto,

$$\operatorname{tg} \sqrt{\beta} = -\frac{\sqrt{\beta}}{a}. \quad (1.8)$$

Com o intuito de analisar as soluções da equação (1.8), consideremos, inicialmente, as funções f e g dadas por

$$f(z) = \operatorname{tg} z \quad \text{e} \quad g(z) = -\frac{1}{a}z.$$

Notemos que elas se intersectam em cada intervalo $I_k = ((2k-1)\pi/2, k\pi)$, $k \in \mathbb{N}$.

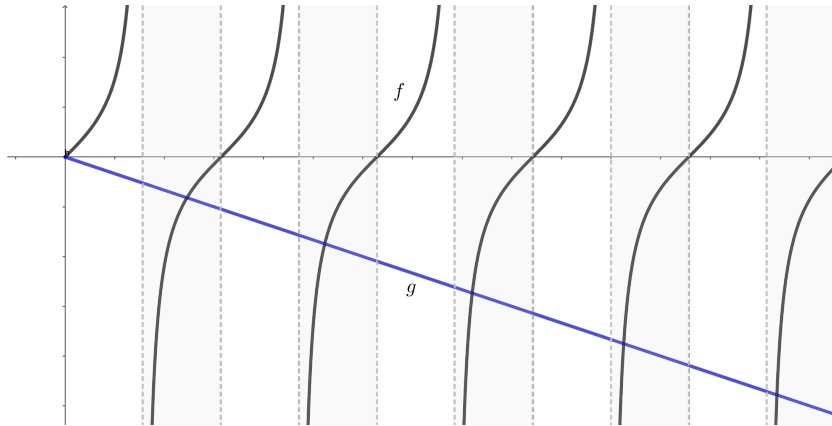


Figura 1.1: Comportamento das funções f e g .

Utilizamos essas informações para estudar as interseções que ocorrem entre as funções

$$F(\beta) = f(z(\beta)) = \operatorname{tg} \sqrt{\beta} \quad \text{e} \quad G(\beta) = g(z(\beta)) = -\frac{\sqrt{\beta}}{a}.$$

O esboço do gráfico das duas é apresentado abaixo.

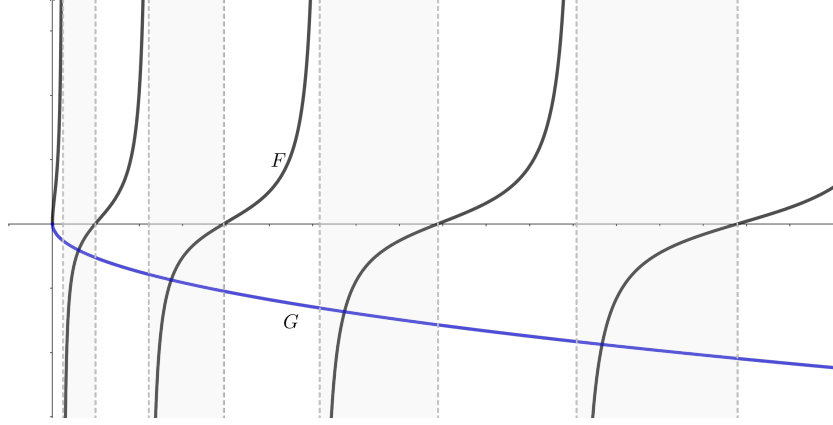


Figura 1.2: Comportamento das funções F e G .

Notemos que

$$\frac{(2k-1)\pi}{2} < \sqrt{\beta} < k\pi \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(2k-1)^2\pi^2}{4} < \beta < k^2\pi^2.$$

Dessa forma, temos uma raiz β_k em cada um dos intervalos $J_k = ((2k-1)^2\pi^2/4, k^2\pi^2)$, com $k \in \mathbb{N}$. Além disso,

$$0 < \beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_k < \cdots,$$

com $\beta_k \rightarrow +\infty$, quando $k \rightarrow +\infty$.

Seja w_k a autofunção associada ao autovalor β_k de modo que a sequência $\{w_k\}_k$ constitui uma base ortonormal de $L^2(0,1)$. No que segue, usaremos essa base e os autovalores associados para encontrar informações sobre o sistema (1.1) quando $h \equiv 0$, isto é,

$$\begin{cases} \varepsilon u_{tt} - u_{xx} + u_t = 0 & \text{em } (0,1) \times (0,T), \\ u(0) = 0 & \text{em } (0,T), \\ u_x(1) + au(1) = 0 & \text{em } (0,T), \\ u(0) = u^0, \quad u_t(0) = u^1 & \text{em } (0,1). \end{cases} \quad (1.9)$$

A solução u de (1.9) se escreve como

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k(t) w_k(x),$$

permitindo obter, por substituição em (1.9),

$$\sum_{k=1}^{\infty} [\varepsilon(y_k)_{tt}(t) + \beta_k y_k(t) + (y_k)_t(t)] w_k(x) = 0,$$

de onde, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\varepsilon(y_k)_{tt}(t) + \beta_k y_k(t) + (y_k)_t(t) = 0. \quad (1.10)$$

A equação característica associada,

$$\varepsilon \sigma_k^2 + \sigma_k + \beta_k = 0,$$

tem raízes não nulas

$$\sigma_{k+}^{\varepsilon} = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4\varepsilon\beta_k}}{2\varepsilon} \quad \text{e} \quad \sigma_{k-}^{\varepsilon} = \frac{-1 - \sqrt{1 - 4\varepsilon\beta_k}}{2\varepsilon}.$$

Também temos que a solução geral de (1.10) é dada por

$$y_k(t) = c_{1k} e^{\sigma_{k+}^{\varepsilon} t} + c_{2k} e^{\sigma_{k-}^{\varepsilon} t}, \quad (1.11)$$

se $\beta_k \neq 1/4\varepsilon$, e por

$$y_k(t) = c_{1k} e^{\sigma_{k+}^{\varepsilon} t} + c_{2k} t e^{\sigma_{k-}^{\varepsilon} t},$$

se $\beta_k = 1/4\varepsilon$. As raízes $\sigma_{k\pm}^{\varepsilon}$ são reais quando $\beta_k \leq 1/4\varepsilon$ e têm parte complexa não trivial sempre que $\beta_k > 1/4\varepsilon$. Elas são chamadas de *autovalores parabólicos* quando são reais e de *autovalores hiperbólicos* quando são complexas. Observe que esses autovalores dependem daqueles fornecidos pelo sistema (1.6). Além disso,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma_{k+}^{\varepsilon} = -\beta_k,$$

o que mostra que, quando $\varepsilon \rightarrow 0$, os autovalores $\sigma_{k+}^{\varepsilon}$ convergem para $-\beta_k$, autovalor do operador da equação do calor (1.3).

No que faremos a seguir, dotamos o espaço de energia

$$E = V(0, 1) \times L^2(0, 1)$$

com a norma

$$\|(u, v)\|_E^2 = \|u\|_{V(0,1)}^2 + \varepsilon \|v\|_{L^2(0,1)}^2. \quad (1.12)$$

Para deixar explícita a relação com a constante ε , denotaremos por E^{ε} o espaço E com a norma (1.12). Desse modo,

$$\|\cdot\|_{E^{\varepsilon}} := \|\cdot\|_E.$$

A energia $\mathcal{E}_\varepsilon$ do sistema (1.1) é dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_\varepsilon(t) &= \frac{1}{2} \int_0^1 (|u_x(x, t)|^2 + \varepsilon |u_t(x, t)|^2) dx + \frac{a}{2} |u(1, t)|^2 \\ &= \frac{1}{2} \|(u(t), u_t(t))\|_{E^\varepsilon}^2.\end{aligned}\tag{1.13}$$

Não é difícil ver que

$$\frac{d\mathcal{E}_\varepsilon(t)}{dt} = - \int_0^1 |u_t(x, t)|^2 dx < 0,$$

isto é, a energia é decrescente.

Introduzimos agora alguns subespaços de E^ε . Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja

$$E_n^\varepsilon = \{U = (u, v) \in E^\varepsilon \mid u, v \in \text{span}\{w_k, 1 \leq k \leq n\}\}.$$

Como os autovalores $\sigma_{k\pm}^\varepsilon$ são reais sempre que $1/4\varepsilon \geq \beta_k$ e a sequência $\{\beta_k\}_k$ tende ao infinito, quando $k \rightarrow +\infty$, existe $k(\varepsilon)$ tal que $1/4\varepsilon \geq \beta_{k(\varepsilon)}$. Em outras palavras,

$$\frac{1}{4\beta_{k(\varepsilon)+1}} < \varepsilon \leq \frac{1}{4\beta_{k(\varepsilon)}}.$$

Em particular, $k(\varepsilon)$ é a quantidade de autovalores $\sigma_{k\pm}^\varepsilon$ parabólicos. Definimos

$$E_p^\varepsilon = \{U = (u, v) \in E^\varepsilon \mid u, v \in \text{span}\{w_k, 1 \leq k \leq k(\varepsilon)\}\},$$

o subespaço de dimensão finita gerado pelos autovalores parabólicos.

OBSERVAÇÃO 1.2 *Notemos que, quando $\varepsilon \rightarrow 0$, temos $E_p^\varepsilon \rightarrow E^\varepsilon$.*

Também definimos

$$E_h^\varepsilon = \{U = (u, v) \in E^\varepsilon \mid u, v \in \text{span}\{w_k, k \geq k(\varepsilon) + 1\}\},$$

o subespaço de dimensão infinita gerado pelas autofunções hiperbólicas.

Por fim, consideramos $(E^\varepsilon)' = L^2(0, 1) \times V'(0, 1)$, o espaço dual de E^ε , dotado com a norma

$$\|(u, v)\|_{(E^\varepsilon)'}^2 = \varepsilon \|u\|_{L^2(0,1)}^2 + \|v\|_{V'(0,1)}^2.\tag{1.14}$$

Denotamos por $(E_n^\varepsilon)', (E_p^\varepsilon)'$ e $(E_h^\varepsilon)'$ os espaços duais de $E_n^\varepsilon, E_p^\varepsilon$ e E_h^ε , respectivamente.

1.2 Alguns resultados auxiliares

Nesta seção estabeleceremos resultados necessários no estudo do sistema (1.1) nos dois primeiros intervalos de tempo $[0, T/3]$ e $[T/3, 2T/3]$. A controlabilidade no terceiro intervalo, $[2T/3, T]$, exige maior esforço. Por esse motivo, trataremos dele separadamente.

1.2.1 Projeções parabólicas

No primeiro subintervalo de $[0, T]$ consideramos o sistema (1.1) com um controle atuando sobre ele. Para garantir sua controlabilidade precisamos do resultado a seguir.

Teorema 1.3 *Seja $l_1 < l_2$ e $\omega = (l_1, l_2)$ um subintervalo aberto não vazio de $(0, 1)$. Então, existem constantes positivas $\varepsilon(\omega)$ e $C(\omega)$ tais que para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon(\omega)$, todo $T > C(\omega)\sqrt{\varepsilon}$ e qualquer $(u^0, u^1) \in E^\varepsilon$ existe um controle $h_\varepsilon \in L^2(\omega \times (0, T))$ tal que a solução de (1.1) satisfaz*

$$\pi_p^\varepsilon(u_\varepsilon(T), (u_\varepsilon)_t(T)) = 0, \quad (1.15)$$

com π_p^ε sendo a projeção ortogonal sobre E_p^ε . Além disso, existe uma constante $C > 0$, dependendo de T , mas independente de $\varepsilon \in (0, \min(\varepsilon(\omega), T^2/C^2(\omega)))$ tal que

$$\|h_\varepsilon\|_{L^2((0,1) \times (0,T))} \leq C\|(u^0, u^1)\|_{E^\varepsilon}, \quad \forall (u^0, u^1) \in E^\varepsilon. \quad (1.16)$$

A demonstração pode ser feita seguindo a prova do Teorema 3.1 em [23]. Observamos que para provar o Teorema 3.1 é utilizada a Fórmula de Weyl, que permanece válida para o nosso caso. Aqui nos restringimos a apresentar o seguinte resultado, também necessário para a demonstração do Teorema 1.3.

Proposição 1.4 *Seja u_ε uma solução de (1.9) com dado inicial $(u^0, u^1) \in V(0, 1) \times L^2(0, 1)$ tal que*

$$\pi_p^\varepsilon u^0 = \pi_p^\varepsilon u^1 = 0. \quad (1.17)$$

Então, para todo $t > 0$,

$$\pi_p^\varepsilon u_\varepsilon(t) = 0. \quad (1.18)$$

Demonstração. Consideremos

$$u_\varepsilon(x, t) = \sum_{k \geq 1} y_k^\varepsilon(t) w_k(x).$$

Notemos que, por u_ε satisfazer a equação sem controle em (1.9), é válido

$$\sum_{k \geq 1} [\varepsilon(y_k^\varepsilon)_{tt}(t) + \beta_k y_k^\varepsilon(t) + (y_k^\varepsilon)_t(t)] w_k(x) = 0,$$

donde $y_k^\varepsilon(t)$ é solução de

$$\varepsilon(y_k^\varepsilon)_{tt}(t) + \beta_k y_k^\varepsilon(t) + (y_k^\varepsilon)_t(t) = 0.$$

Além disso, escrevendo

$$u^0(x) = \sum_{k \geq 1} a_k w_k(x) \quad e \quad u^1(x) = \sum_{k \geq 1} b_k w_k(x)$$

e lembrando que $u^0(x) = u_\varepsilon(x, 0)$ e $u^1(x) = (u_\varepsilon)_t(x, 0)$, vemos que

$$y_k^\varepsilon(0) = a_k \quad e \quad (y_k^\varepsilon)_t(0) = b_k.$$

De acordo com a hipótese sobre os dados, $a_k = b_k = 0$ para todo $k \leq k(\varepsilon)$. Temos, portanto, para cada $k \leq k(\varepsilon)$, o sistema

$$\begin{cases} \varepsilon(y_k^\varepsilon)_{tt} - \beta_k y_k^\varepsilon(t) + (y_k^\varepsilon)_t(t) = 0, \\ y_k^\varepsilon(0) = 0, (y_k^\varepsilon)_t(0) = 0, \end{cases}$$

cujas únicas soluções são $y_k^\varepsilon(t) \equiv 0$. Logo,

$$\pi_p^\varepsilon u_\varepsilon(x, t) = \sum_{k \leq k(\varepsilon)} y_k^\varepsilon(t) w_k(x) = 0,$$

o que prova o resultado. ■

1.2.2 Projeções hiperbólicas

Utilizando a escrita de u, u^0 e u^1 na base de autofunções, podemos estabelecer

$$u_\varepsilon(x, t) = \sum_{k \geq 1} \left[\frac{a_k \sigma_{k-}^\varepsilon - b_k}{\sigma_{k-}^\varepsilon - \sigma_{k+}^\varepsilon} e^{\sigma_{k+}^\varepsilon t} + \frac{b_k - a_k \sigma_{k+}^\varepsilon}{\sigma_{k-}^\varepsilon - \sigma_{k+}^\varepsilon} e^{\sigma_{k-}^\varepsilon t} \right] w_k(x). \quad (1.19)$$

A igualdade acima é válida se $\varepsilon \neq 1/4\beta_k$, quando $y_k(t)$ será dada por (1.11). O caso em que $\varepsilon = 1/4\beta_k$ gera pequenas mudanças na escrita de $u_\varepsilon(x, t)$, as quais não provocam alterações substanciais no que será feito neste trabalho. Por esse motivo, consideraremos a partir deste momento que $\varepsilon \neq 1/4\beta_k$ e que $u_\varepsilon(x, t)$ pode ser tomada como em (1.19).

De acordo com o Teorema 1.3, podemos controlar o sistema (1.1) no intervalo $[0, T/3]$ de forma que $\pi_p^\varepsilon(u_{\varepsilon 1}(T/3), (u_{\varepsilon 1})_t(T/3)) = 0$. Suponhamos agora que no intervalo $[T/3, 2T/3]$ consideramos (1.1) livre de controle e com dados iniciais $(u_{\varepsilon 2}^0, u_{\varepsilon 2}^1) = (u_{\varepsilon 1}(T/3), (u_{\varepsilon 1})_t(T/3))$. O resultado a seguir fornece uma estimativa para a solução do sistema em termos desses dados. A demonstração é feita usando as ideias em [23].

Teorema 1.5 *Seja u uma solução de (1.9) com dado inicial $(u^0, u^1) \in E_h^\varepsilon$. Então*

$$\|(u(t), u_t(t))\|_{E^\varepsilon} \leq 2^{3/2} e^{-t/4\varepsilon} \|(u^0, u^1)\|_{E^\varepsilon}. \quad (1.20)$$

Demonstração. Sabemos que o espaço E_h^ε é gerado pelas autofunções associadas aos autovalores hiperbólicos

$$\sigma_{j\pm}^\varepsilon = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\varepsilon\beta_j}}{2\varepsilon} = -\frac{1}{2\varepsilon} \pm i\rho_j^\varepsilon, \quad j \geq k(\varepsilon) + 1,$$

em que ρ_j^ε é dado por

$$\rho_j^\varepsilon = \frac{\sqrt{4\varepsilon\beta_j - 1}}{2\varepsilon} > 0.$$

Da ortonormalidade da base, segue que

$$\|u(t)\|_{V(0,1)}^2 = \sum_{j \geq 1} \beta_j |C_{1j} e^{\sigma_{j+}^\varepsilon t} + C_{2j} e^{\sigma_{j-}^\varepsilon t}|^2,$$

com $C_{1j} = (a_j \sigma_{j-}^\varepsilon - b_j) / (\sigma_{j-}^\varepsilon - \sigma_{j+}^\varepsilon)$ e $C_{2j} = (b_j - a_j \sigma_{j+}^\varepsilon) / (\sigma_{j-}^\varepsilon - \sigma_{j+}^\varepsilon)$. O fato de (u^0, u^1) pertencer a E_h^ε nos diz que $C_{1j} = C_{2j} = 0$, para todo $j < k(\varepsilon) + 1$. Sendo assim,

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{V(0,1)}^2 &= \sum_{j \geq k(\varepsilon)+1} \beta_j \left| \frac{a_j \sigma_{j-}^\varepsilon - b_j}{\sigma_{j-}^\varepsilon - \sigma_{j+}^\varepsilon} e^{\sigma_{j+}^\varepsilon t} + \frac{b_j - a_j \sigma_{j+}^\varepsilon}{\sigma_{j-}^\varepsilon - \sigma_{j+}^\varepsilon} e^{\sigma_{j-}^\varepsilon t} \right|^2 \\ &= \sum_{j \geq k(\varepsilon)+1} \beta_j \left| a_j \frac{\sigma_{j-}^\varepsilon e^{\sigma_{j+}^\varepsilon t} - \sigma_{j+}^\varepsilon e^{\sigma_{j-}^\varepsilon t}}{\sigma_{j-}^\varepsilon - \sigma_{j+}^\varepsilon} + b_j \frac{e^{\sigma_{j-}^\varepsilon t} - e^{\sigma_{j+}^\varepsilon t}}{\sigma_{j-}^\varepsilon - \sigma_{j+}^\varepsilon} \right|^2. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Mantendo em mente que, por cálculos diretos,

$$\begin{cases} \sigma_{j-}^\varepsilon e^{\sigma_{j+}^\varepsilon t} - \sigma_{j+}^\varepsilon e^{\sigma_{j-}^\varepsilon t} = -ie^{-t/2\varepsilon} \left(\frac{1}{\varepsilon} \sin \rho_j^\varepsilon t + 2\rho_j^\varepsilon \cos \rho_j^\varepsilon t \right), \\ e^{\sigma_{j-}^\varepsilon t} - e^{\sigma_{j+}^\varepsilon t} = -2ie^{-t/2\varepsilon} \sin \rho_j^\varepsilon t, \\ \sigma_{j-}^\varepsilon - \sigma_{j+}^\varepsilon = -2i\rho_j^\varepsilon, \end{cases} \quad (1.22)$$

a igualdade em (1.21) fornece

$$\begin{aligned}
& \|u(t)\|_{V(0,1)}^2 \\
&= \sum_{j \geq k(\varepsilon)+1} \beta_j \left| a_j \frac{e^{-t/2\varepsilon} (\sigma_{j-}^\varepsilon e^{i\rho_j^\varepsilon t} - \sigma_{j+}^\varepsilon e^{-i\rho_j^\varepsilon t})}{-2i\rho_j^\varepsilon} + b_j \frac{e^{-t/2\varepsilon} (e^{-i\rho_j^\varepsilon t} - e^{i\rho_j^\varepsilon t})}{-2i\rho_j^\varepsilon} \right|^2 \\
&\leq e^{-t/\varepsilon} \sum_{j \geq k(\varepsilon)+1} \frac{\beta_j}{2(\rho_j^\varepsilon)^2} \left(\left| -ia_j \left(\frac{1}{\varepsilon} \sin \rho_j^\varepsilon t + 2\rho_j^\varepsilon \cos \rho_j^\varepsilon t \right) \right|^2 + |-2ib_j \sin \rho_j^\varepsilon t|^2 \right) \\
&\leq e^{-t/\varepsilon} \sum_{j \geq k(\varepsilon)+1} \beta_j \left(a_j^2 \left(\left| \frac{\sin \rho_j^\varepsilon t}{\varepsilon \rho_j^\varepsilon} \right|^2 + 4 \cos^2 \rho_j^\varepsilon t \right) + 2b_j^2 \left| \frac{\sin \rho_j^\varepsilon t}{\rho_j^\varepsilon} \right|^2 \right).
\end{aligned} \tag{1.23}$$

Uma vez que $|(\sin \theta)/\theta| \leq 1$, para todo $\theta > 0$, tomando $\theta = \rho_j^\varepsilon t$,

$$\frac{\sin^2 \rho_j^\varepsilon t}{(\rho_j^\varepsilon)^2 t^2} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{\sin^2 \rho_j^\varepsilon t}{(\rho_j^\varepsilon)^2} \leq t^2.$$

Disto, segue que

$$\beta_j a_j^2 \left(\left| \frac{\sin \rho_j^\varepsilon t}{\varepsilon \rho_j^\varepsilon} \right|^2 + 4 \cos^2 \rho_j^\varepsilon t \right) \leq 2\beta_j a_j^2 \left(\frac{t^2}{2\varepsilon^2} + 2 \right). \tag{1.24}$$

Agora consideremos a função decrescente $f(\theta) = 2\theta/(2\theta - 1)$. No caso de termos $2\varepsilon\beta_j > 1$ e sendo f decrescente, vem que

$$\beta_j \left| \frac{\sin \rho_j^\varepsilon t}{\sqrt{\varepsilon} \rho_j^\varepsilon} \right|^2 \leq \frac{\beta_j}{\varepsilon (\rho_j^\varepsilon)^2} = \frac{4\varepsilon\beta_j}{4\varepsilon\beta_j - 1} < f(1) = 2. \tag{1.25}$$

Se $2\varepsilon\beta_j \leq 1$,

$$\beta_j \left| \frac{\sin \rho_j^\varepsilon t}{\rho_j^\varepsilon} \right|^2 t^2 \leq \beta_j t^2 \leq \frac{t^2}{2\varepsilon}.$$

Portanto,

$$2b_j^2 \varepsilon \beta_j \left| \frac{\sin \rho_j^\varepsilon t}{\sqrt{\varepsilon} \rho_j^\varepsilon} \right|^2 \leq 2b_j^2 \varepsilon \left(\frac{t^2}{2\varepsilon} + 2 \right). \tag{1.26}$$

Substituindo (1.24) e (1.26) em (1.23),

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_{V(0,1)}^2 &\leq e^{-t/\varepsilon} \sum_{j \geq k(\varepsilon)+1} \left(2\beta_j a_j^2 \left(\frac{t^2}{2\varepsilon^2} + 2 \right) + 2b_j^2 \varepsilon \left(\frac{t^2}{2\varepsilon} + 2 \right) \right) \\
&= 2 \left(\frac{t^2}{2\varepsilon^2} + 2 \right) e^{-t/\varepsilon} \sum_{j \geq k(\varepsilon)+1} (\beta_j a_j^2 + \varepsilon b_j^2).
\end{aligned}$$

Observando que a função $m(t) = (t^2/2\varepsilon^2 + 2)e^{-t/2\varepsilon}$ é não crescente,

$$\left(\frac{t^2}{2\varepsilon^2} + 2\right) e^{-t/2\varepsilon} \leq m(0) \Leftrightarrow \left(\frac{t^2}{2\varepsilon^2} + 2\right) e^{-t/\varepsilon} \leq 2e^{-t/2\varepsilon}. \quad (1.27)$$

Concluimos, dessa forma, que

$$\|u(t)\|_{V(0,1)}^2 \leq 4e^{-t/2\varepsilon} \sum_{j \leq k(\varepsilon)+1} (\beta_j a_j^2 + \varepsilon b_j^2). \quad (1.28)$$

Para obter uma limitação para a norma de $u_t(t)$ em $L^2(0,1)$, começamos estabelecendo

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= \sum_{j \geq k(\varepsilon)+1} \left[\sigma_{j+}^\varepsilon \frac{a_j \sigma_{j-}^\varepsilon - b_j}{\sigma_{j-}^\varepsilon - \sigma_{j+}^\varepsilon} e^{\sigma_{j+}^\varepsilon t} + \sigma_{j-}^\varepsilon \frac{b_j - a_j \sigma_{j+}^\varepsilon}{\sigma_{j-}^\varepsilon - \sigma_{j+}^\varepsilon} e^{\sigma_{j-}^\varepsilon t} \right] w_j(x) \\ &= \sum_{j \geq k(\varepsilon)+1} \left[a_j \sigma_{j+}^\varepsilon \sigma_{j-}^\varepsilon \frac{e^{\sigma_{j+}^\varepsilon t} - e^{\sigma_{j-}^\varepsilon t}}{\sigma_{j-}^\varepsilon - \sigma_{j+}^\varepsilon} + b_j \frac{\sigma_{j-}^\varepsilon e^{\sigma_{j-}^\varepsilon t} - \sigma_{j+}^\varepsilon e^{\sigma_{j+}^\varepsilon t}}{\sigma_{j-}^\varepsilon - \sigma_{j+}^\varepsilon} \right] w_j(x). \end{aligned}$$

Acrescentamos a (1.22) as igualdades

$$\begin{cases} \sigma_{j+}^\varepsilon \sigma_{j-}^\varepsilon = \frac{\beta_j}{\varepsilon}, \\ \sigma_{j-}^\varepsilon e^{\sigma_{j-}^\varepsilon t} - \sigma_{j+}^\varepsilon e^{\sigma_{j+}^\varepsilon t} = i e^{-t/2\varepsilon} \left(\frac{1}{\varepsilon} \sin \rho_j^\varepsilon t - 2\rho_j^\varepsilon \cos \rho_j^\varepsilon t \right). \end{cases} \quad (1.29)$$

Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} &\|u_t(t)\|_{L^2(0,1)}^2 \\ &= \sum_{j \geq k(\varepsilon)+1} \left[a_j \frac{\beta_j}{\varepsilon} \left(\frac{e^{-t/2\varepsilon} (e^{-i\rho_j^\varepsilon t} - e^{i\rho_j^\varepsilon t})}{2i\rho_j^\varepsilon} \right) + b_j \frac{e^{-t/2\varepsilon} (\sigma_{j-}^\varepsilon e^{-i\rho_j^\varepsilon t} - \sigma_{j+}^\varepsilon e^{i\rho_j^\varepsilon t})}{-2\rho_j^\varepsilon} \right]^2 \\ &= e^{-t/\varepsilon} \sum_{j \geq k(\varepsilon)+1} \left[a_j \frac{\beta_j}{\varepsilon} \left(\frac{2i \sin \rho_j^\varepsilon t}{2i\rho_j^\varepsilon} \right) + b_j \frac{\left(\frac{1}{\varepsilon} \sin \rho_j^\varepsilon t - 2\rho_j^\varepsilon \cos \rho_j^\varepsilon t \right)}{-2\rho_j^\varepsilon} \right]^2 \\ &\leq 2e^{-t/\varepsilon} \sum_{j \geq k(\varepsilon)+1} \left[a_j^2 \frac{\beta_j^2}{\varepsilon^2} \left| \frac{\sin \rho_j^\varepsilon t}{\rho_j^\varepsilon} \right|^2 + b_j^2 \left| \frac{\sin \rho_j^\varepsilon t}{2\varepsilon \rho_j^\varepsilon} - \cos \rho_j^\varepsilon t \right|^2 \right] \\ &\leq 2e^{-t/\varepsilon} \sum_{j \geq k(\varepsilon)+1} \left[a_j^2 \frac{\beta_j^2}{\varepsilon^2} \left| \frac{\sin \rho_j^\varepsilon t}{\rho_j^\varepsilon} \right|^2 + 2b_j^2 \left(\frac{\sin^2 \rho_j^\varepsilon t}{4\varepsilon^2 (\rho_j^\varepsilon)^2} + \cos^2 \rho_j^\varepsilon t \right) \right] \end{aligned}$$

e com isso temos

$$\|u_t(t)\|_{L^2(0,1)}^2 \leq 2e^{-t/\varepsilon} \sum_{j \geq k(\varepsilon)+1} \left[2 \frac{a_j^2 \beta_j}{\varepsilon} + b_j^2 \left(\frac{t^2}{2\varepsilon^2} + 2 \right) \right] \quad (1.30)$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2 \left(\frac{t^2}{2\varepsilon^2} + 2 \right) e^{-t/\varepsilon} \sum_{j \geq k(\varepsilon)+1} \left[\frac{a_j^2 \beta_j}{\varepsilon} + b_j^2 \right] \\
&\leq 4e^{-t/2\varepsilon} \sum_{j \geq k(\varepsilon)+1} \left[\frac{a_j^2 \beta_j}{\varepsilon} + b_j^2 \right],
\end{aligned}$$

onde usamos as estimativas (1.25) e (1.27). Segue de (1.28) e (1.30) que

$$\begin{aligned}
\|(u(t), u_t(t))\|_{E^\varepsilon}^2 &= \|u(t)\|_{V(0,1)}^2 + \varepsilon \|u_t(t)\|_{L^2(0,1)}^2 \\
&\leq 4e^{-t/2\varepsilon} \sum_{j \geq k(\varepsilon)+1} (\beta_j a_j^2 + \varepsilon b_j^2) + 4\varepsilon e^{-t/2\varepsilon} \sum_{j \geq k(\varepsilon)+1} \left[\frac{a_j^2 \beta_j}{\varepsilon} + b_j^2 \right] \\
&= 8e^{-t/2\varepsilon} \left[\sum_{j \geq k(\varepsilon)+1} \beta_j a_j^2 + \varepsilon \sum_{j \geq k(\varepsilon)+1} b_j^2 \right] \\
&= 8e^{-t/2\varepsilon} \|(u^0, u^1)\|_{E^\varepsilon}^2,
\end{aligned}$$

como queríamos provar. ■

1.3 Desigualdades de Carleman

Obter resultados relevantes para o terceiro intervalo, $[2T/3, T]$, exige de nós um pouco mais de esforço em comparação com os outros intervalos. O caminho que precisamos trilhar passa por uma desigualdade de observabilidade. Consideremos o sistema adjunto a (1.1):

$$\begin{cases} \varepsilon v_{tt} - v_{xx} - v_t = 0 & \text{em } (0, 1) \times (0, T), \\ v(0) = 0 & \text{em } (0, T), \\ v_x(1) + av(1) = 0 & \text{em } (0, T), \\ v(T) = v^0, \quad v_t(T) = v^1 & \text{em } (0, 1), \end{cases} \quad (1.31)$$

com $(v^0, v^1) \in L^2(0, 1) \times V'(0, 1)$. Para obter a observabilidade que precisamos, faremos uso de uma desigualdade de Carleman. Nesta seção desenvolvemos um processo que consiste em promover adaptações de uma desigualdade de Carleman inicial de maneira a obter uma que seja adequada ao nosso propósito, como foi feito em [1]. Antes, contudo, inspirados na Seção 5 de [23], fazemos uma mudança de variável.

Seja $\tau : [0, T] \rightarrow [0, T/\sqrt{\varepsilon}]$ a mudança de variável dada por $\tau(t) = (T - t)/\sqrt{\varepsilon}$. Para y definida por

$$y(x, \tau) = y(x, \tau(t)) = v(x, T - \sqrt{\varepsilon}\tau(t)) = v(x, t),$$

temos que (1.31) é equivalente a

$$\begin{cases} y_{\tau\tau} - y_{xx} + \kappa y_{\tau} = 0 & \text{em } (0, 1) \times (0, \hat{T}), \\ y(0) = 0 & \text{em } (0, \hat{T}), \\ y_x(1) + \alpha y(1) = 0 & \text{em } (0, \hat{T}), \\ y(0) = y^0, \quad y_{\tau}(0) = y^1 & \text{em } (0, 1), \end{cases} \quad (1.32)$$

em que $\kappa = 1/\sqrt{\varepsilon}$, $\hat{T} = T/\sqrt{\varepsilon}$ e $y^1(x) = -\sqrt{\varepsilon}v^1(x)$.

Seja P o operador diferencial

$$P = \partial_{\tau\tau} - \partial_{xx} + \kappa \partial_{\tau}. \quad (1.33)$$

Para $x_1 < 0, x_2 > 1, \alpha \geq 1$ e $\beta \in (0, 1)$, definimos o peso

$$\mu_{\kappa}(x, \tau) = \alpha \rho(x) - \beta \left(\tau - \frac{\hat{T}}{2} \right)^2 + M_{\kappa}, \quad (1.34)$$

com $M_{\kappa} > 0$ uma constante escolhida de forma que $\mu_{\kappa} \geq 1$ e ρ é uma função positiva de classe $\mathcal{C}^2([0, 1])$ que satisfaz

$$\rho(x) = \begin{cases} (x - x_1)^2 & \text{para } x \in [0, l_1 + \eta], \\ (x - x_2)^2 & \text{para } x \in [l_2 - \eta, 1], \end{cases} \quad (1.35)$$

com $0 < \eta < (l_2 - l_1)/2$ uma constante que será estipulada posteriormente. Com o intuito de facilitar a notação, denotaremos μ_{κ} apenas por μ e M_{κ} por M . Dado $s > 0$ definimos também a função

$$\psi(x, \tau) = e^{s\mu(x, \tau)}. \quad (1.36)$$

Para a desigualdade de observabilidade que queremos é importante que $\hat{T} > 2R_1$, com $R_1 = \max_{x \in [0, 1]} \sqrt{2\alpha\rho(x)}$. Isso nos permite escolher $\beta \in (0, 1)$ tal que

$$\sqrt{\beta\hat{T}} \geq 2 \max_{x \in [0, 1]} \sqrt{2\alpha\rho(x)},$$

ou, equivalentemente,

$$\hat{T} \geq \frac{2}{\sqrt{\beta}} R_1. \quad (1.37)$$

Nas desigualdades de Carleman que faremos a seguir tomaremos $\hat{T}$ igual a

$$T_0 = \frac{2}{\sqrt{\beta}} R_1. \quad (1.38)$$

Isso será o bastante para o objetivo que temos. Uma vez que $\hat{T} \geq T_0$, necessitamos que κ seja suficientemente grande. Para cada κ desses, o sistema (1.32) tem uma solução correspondente no intervalo $[0, \hat{T}]$. Nas desigualdades de Carleman que conseguiremos, a variável temporal dessa solução estará restrita ao intervalo $[0, T_0]$. Nelas consideramos

$$\alpha \geq \max\{1, 9R_2\}, \quad R_2 = \max_{x \in [0,1]} \rho(x), \quad x_2 \geq 2. \quad (1.39)$$

1.3.1 Desigualdade de Carleman com observação na fronteira

A desigualdade de Carleman que provaremos agora é a primeira no processo que citamos acima. Aqui x varia no intervalo $[0, l_1 + \eta]$. Logo, o peso é

$$\mu(x, \tau) = \alpha(x - x_1)^2 - \beta \left(\tau - \frac{T_0}{2} \right)^2 + M. \quad (1.40)$$

Para simplificar a notação, faremos

$$L_1 := l_1 + \eta.$$

Teorema 1.6 *Suponhamos que y pertencente a $L^2(0, T_0; V(0, L_1)) \cap H^1(0, T_0; L^2(0, L_1))$ satisfaz*

$$y(\cdot, 0) = y(\cdot, T_0) = y_\tau(\cdot, 0) = y_\tau(\cdot, T_0) = 0 \quad \text{em } (0, L_1), \quad (1.41)$$

$$y_x(L_1, \cdot) + ay(L_1, \cdot) = 0 \quad \text{em } (0, T_0) \quad (1.42)$$

e que $P(y) := y_{\tau\tau} - y_{xx} + \kappa y_\tau \in L^2(0, T_0; L^2(0, L_1))$. Então existem $\kappa_0, s_0, \lambda_0 \in \mathbb{R}^+$ tais que, para todo $\kappa \in \mathbb{R}$ com $|\kappa| \geq \kappa_0 \geq 1, s \geq s_0 \geq 1$ e $\lambda_{\kappa s} \geq \lambda_0 \max\{|\kappa|, s\} \geq 1$, é válido que

$$\begin{aligned} & \lambda_{\kappa s} s \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} e^{2\lambda_{\kappa s} \psi} \psi (|y_x|^2 + |y_\tau|^2) dx d\tau + \lambda_{\kappa s}^3 s^3 \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} e^{2\lambda_{\kappa s} \psi} |\psi|^3 |y|^2 dx d\tau \\ & \leq C \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} |e^{\lambda_{\kappa s} \psi} P(y)|^2 dx d\tau \\ & \quad + C |\kappa| \lambda_{\kappa s}^3 s^3 \int_0^{T_0} e^{2\lambda_{\kappa s} \psi(L_1, \tau)} |\psi(L_1, \tau)|^3 |y(L_1, \tau)|^2 d\tau \\ & \quad + C \lambda_{\kappa s} s \int_0^{T_0} e^{2\lambda_{\kappa s} \psi(L_1, \tau)} \psi(L_1, \tau) (|y_x(L_1, \tau)|^2 + |y_\tau(L_1, \tau)|^2) d\tau. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Demonstração. Nos cálculos seguintes, obtemos (1.43) considerando y uma função de classe $\mathcal{C}^\infty([0, T_0] \times \Omega)$. O resultado tal qual apresentado no enunciado é obtido por argumento de densidade.

Seja $z = e^{\lambda\psi}y$ e $P_\psi(z) = e^{\lambda\psi}P(e^{-\lambda\psi}z)$ ou, equivalentemente, $P_\psi(z) = e^{\lambda\psi}P(y)$. Será útil sabermos que

$$\begin{cases} \mu_x = 2\alpha(x - x_1), & \mu_{xx} = 2\alpha, \\ \mu_\tau = -2\beta\left(\tau - \frac{T_0}{2}\right), & \mu_{\tau\tau} = -2\beta \end{cases} \quad (1.44)$$

e, para $j \in \{x, \tau\}$,

$$\begin{cases} \psi_j = s\mu_j\psi, \\ \psi_{jj} = (s\mu_{jj} + s^2|\mu_j|^2)\psi, \\ z_j = e^{\lambda\psi}(\lambda\psi_j y + y_j), \\ (e^{-\lambda\psi}z)_j = e^{-\lambda\psi}(-\lambda s\mu_j\psi z + z_j), \\ (e^{-\lambda\psi}z)_{jj} = e^{-\lambda\psi}(\lambda^2 s^2|\mu_j|^2|\psi|^2 z - 2\lambda s\mu_j\psi z_j - \lambda s\mu_{jj}\psi z - \lambda s^2|\mu_j|^2\psi z + z_{jj}). \end{cases} \quad (1.45)$$

Usando algumas dessas informações podemos estabelecer que

$$\begin{aligned} P_\psi(z) &= z_{\tau\tau} - z_{xx} + \lambda^2 s^2(|\mu_\tau|^2 - |\mu_x|^2)|\psi|^2 z - \lambda s^2(|\mu_\tau|^2 - |\mu_x|^2)\psi z \\ &\quad - \lambda s(\mu_{\tau\tau} - \mu_{xx} + \kappa\mu_\tau)\psi z + (-2\lambda s\mu_\tau\psi + \kappa)z_\tau + 2\lambda s\mu_x\psi z_x, \end{aligned}$$

ou seja, fazendo $F(\mu) = |\mu_\tau|^2 - |\mu_x|^2$,

$$P_\psi(z) = P_1(z) + P_2(z) \quad (1.46)$$

com

$$\begin{cases} P_1(z) = z_{\tau\tau} - z_{xx} + \lambda^2 s^2 F(\mu)|\psi|^2 z - \lambda s^2 F(\mu)\psi z - \lambda s P(\mu)\psi z, \\ P_2(z) = (-2\lambda s\mu_\tau\psi + \kappa)z_\tau + 2\lambda s\mu_x\psi z_x. \end{cases} \quad (1.47)$$

Com base em (1.46),

$$\begin{aligned} &\int_0^{T_0} \int_0^{L_1} |P_\psi(z)|^2 dx d\tau \\ &= \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} (|P_1(z)|^2 + |P_2(z)|^2) dx d\tau + 2 \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} P_1(z)P_2(z) dx d\tau \end{aligned} \quad (1.48)$$

$$\geq 2 \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} P_1(z) P_2(z) dx d\tau.$$

Vamos agora buscar uma estimativa inferior para a integral

$$\int_0^{T_0} \int_0^{L_1} P_1(z) P_2(z) dx d\tau.$$

Cálculo do produto interno entre $P_1(z)$ e $P_2(z)$ em $L^2((0, L_1) \times (0, T_0))$. Denotaremos por $I_{i,j}$ a integral do produto interno entre o i -ésimo termo de $P_1(z)$ e o j -ésimo de $P_2(z)$. Dessa forma,

$$(P_1(z), P_2(z))_{L^2((0, L_1) \times (0, T_0))} = \sum_{i,j=1}^{i=5, j=2} I_{i,j}.$$

Para melhor fluidez da leitura, apresentaremos aqui apenas os resultados obtidos.

Integrando por partes, temos

$$\begin{aligned} I_{1,1} &= \lambda s \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} (\mu_\tau \psi)_\tau |z_\tau|^2 dx d\tau + \frac{1}{2} \int_0^{L_1} (-2s\lambda\mu_\tau \psi + \kappa) |z_\tau|^2 dx \Big|_{\tau=0}^{\tau=T_0}, \\ I_{1,2} &= -2\lambda s \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} (\mu_x \psi)_\tau z_x z_\tau dx d\tau + \lambda s \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} (\mu_x \psi)_x |z_\tau|^2 dx d\tau \\ &\quad - \lambda s \int_0^{T_0} \mu_x(L_1, \tau) \psi(L_1, \tau) |z_\tau(L_1, \tau)|^2 d\tau + 2\lambda s \int_0^{L_1} \mu_x \psi z_x z_\tau dx \Big|_{\tau=0}^{\tau=T_0}, \\ I_{2,1} &= -2\lambda s \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} (\mu_\tau \psi)_x z_x z_\tau dx d\tau + \lambda s \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} (\mu_\tau \psi)_\tau |z_x|^2 dx d\tau \\ &\quad - \int_0^{T_0} [-2\lambda s \mu_\tau(L_1, \tau) \psi(L_1, \tau) + \kappa] z_x(L_1, \tau) z_\tau(L_1, \tau) d\tau \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^{L_1} (-2\lambda s \mu_\tau \psi + \kappa) |z_x|^2 dx \Big|_{\tau=0}^{\tau=T_0}, \\ I_{2,2} &= \lambda s \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} (\mu_x \psi)_x |z_x|^2 dx d\tau - \lambda s \int_0^{T_0} \mu_x \psi |z_x|^2 d\tau \Big|_{x=0}^{x=L_1}, \\ I_{3,1} &= \lambda^3 s^3 \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} (\mu_\tau F(\mu) |\psi|^3)_\tau |z|^2 dx d\tau - \frac{\lambda^2 s^2}{2} \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} (\kappa F(\mu) |\psi|^2)_\tau |z|^2 dx d\tau, \\ I_{3,2} &= -\lambda^3 s^3 \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} (\mu_x F(\mu) |\psi|^3)_x |z|^2 dx d\tau \\ &\quad + \lambda^3 s^3 \int_0^{T_0} \mu_x(L_1, \tau) F(\mu(L_1, \tau)) |\psi(L_1, \tau)|^3 |z(L_1, \tau)|^2 d\tau, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{4,1} &= -\lambda^2 s^3 \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} (\mu_\tau F(\mu) |\psi|^2)_\tau |z|^2 dx d\tau + \frac{\lambda s^2}{2} \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} (\kappa F(\mu) \psi)_\tau |z|^2 dx d\tau, \\
I_{4,2} &= \lambda^2 s^3 \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} (\mu_x F(\mu) |\psi|^2)_x |z|^2 dx d\tau \\
&\quad - \lambda^2 s^3 \int_0^{T_0} \mu_x(L_1, \tau) F(\mu(L_1, \tau)) |\psi(L_1, \tau)|^2 |z(L_1, \tau)|^2 d\tau, \\
I_{5,1} &= \frac{\lambda s}{2} \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} (P(\mu) (-2\lambda s \mu_\tau \psi + \kappa) \psi)_\tau |z|^2 dx d\tau, \\
I_{5,2} &= \lambda^2 s^2 \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} (\mu_x P(\mu) |\psi|^2)_x |z|^2 dx d\tau \\
&\quad - \lambda^2 s^2 \int_0^{T_0} \mu_x(L_1, \tau) P(\mu(L_1, \tau)) |\psi(L_1, \tau)|^2 |z(L_1, \tau)|^2 d\tau.
\end{aligned}$$

Tomando

$$A = A(x, \tau) = s(|\mu_x|^2 + |\mu_\tau|^2) + \mu_{xx} + \mu_{\tau\tau},$$

$$B = B(x, \tau) = -4s\mu_x\mu_\tau,$$

$$D = D(x, \tau) = (\mu_\tau F(\mu) |\psi|^3)_\tau - (\mu_x F(\mu) |\psi|^3)_x,$$

$$G = G(x, \tau) = (\mu_x F(\mu) |\psi|^2)_x - (\mu_\tau F(\mu) |\psi|^2)_\tau,$$

a soma dos resultados obtidos produz

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j=1}^{i=5,j=2} I_{i,j} \\
&= \lambda s \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} (A(|z_x|^2 + |z_\tau|^2) + B z_x z_\tau) \psi dx d\tau \\
&\quad + \lambda^3 s^3 \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} D |z|^2 dx d\tau + \lambda^2 s^2 \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} (\mu_x P(\mu) |\psi|^2)_x |z|^2 dx d\tau \\
&\quad + \frac{\lambda s^2}{2} \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} (\kappa F(\mu) \psi)_\tau |z|^2 dx d\tau + \lambda^2 s^3 \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} G |z|^2 dx d\tau \\
&\quad - \frac{\lambda^2 s^2}{2} \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} (\kappa F(\mu) |\psi|^2)_\tau |z|^2 dx d\tau \\
&\quad + \frac{\lambda s}{2} \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} (P(\mu) (-2\lambda s \mu_\tau \psi + \kappa) \psi)_\tau |z|^2 dx d\tau \\
&\quad - \int_0^{T_0} (-2\lambda s \mu_\tau(L_1, \tau) \psi(L_1, \tau) + \kappa) z_x(L_1, \tau) z_\tau(L_1, \tau) d\tau \\
&\quad + \lambda^3 s^3 \int_0^{T_0} \mu_x(L_1, \tau) F(\mu(L_1, \tau)) |\psi(L_1, \tau)|^3 |z(L_1, \tau)|^2 d\tau
\end{aligned} \tag{1.49}$$

$$\begin{aligned}
& -\lambda^2 s^3 \int_0^{T_0} \mu_x(L_1, \tau) F(\mu(L_1, \tau)) |\psi(L_1, \tau)|^2 |z(L_1, \tau)|^2 d\tau \\
& -\lambda^2 s^2 \int_0^{T_0} \mu_x(L_1, \tau) P(\mu(L_1, \tau)) |\psi(L_1, \tau)|^2 |z(L_1, \tau)|^2 d\tau \\
& -\lambda s \int_0^{T_0} \mu_x(L_1, \tau) \psi(L_1, \tau) |z_\tau(L_1, \tau)|^2 d\tau + 2\lambda s \int_0^{L_1} \mu_x \psi z_x z_\tau dx \Big|_{\tau=0}^{\tau=T_0} \\
& + \frac{1}{2} \int_0^{L_1} (-2\lambda s \mu_\tau \psi + \kappa) (|z_x|^2 + |z_\tau|^2) dx \Big|_{\tau=0}^{\tau=T_0} - \lambda s \int_0^{T_0} \mu_x \psi |z_x|^2 d\tau \Big|_{x=0}^{x=L_1}.
\end{aligned}$$

Estimativas para as parcelas de (1.49). Começamos avaliando

$$A|z_x|^2 + A|z_\tau|^2 + Bz_x z_\tau. \quad (1.50)$$

As definições de A e B fornecem que

$$\begin{aligned}
A|z_x|^2 + A|z_\tau|^2 + Bz_x z_\tau &= s[(\mu_x z_x - \mu_\tau z_\tau)^2 + (\mu_\tau z_x - \mu_x z_\tau)^2] \\
&+ (\mu_{xx} + \mu_{\tau\tau})(|z_x|^2 + |z_\tau|^2) \\
&\geq (\mu_{xx} + \mu_{\tau\tau})(|z_x|^2 + |z_\tau|^2).
\end{aligned}$$

Fazendo uso de (1.44) e do fato que $\alpha \geq 1$, podemos afirmar que

$$A|z_x|^2 + A|z_\tau|^2 + Bz_x z_\tau \geq 2(1 - \beta)(|z_x|^2 + |z_\tau|^2).$$

No caso da segunda integral de (1.49),

$$\begin{aligned}
D &= \mu_{\tau\tau} F(\mu) |\psi|^3 + \mu_\tau (F(\mu))_\tau |\psi|^3 + 3\mu_\tau F(\mu) |\psi|^2 \psi_\tau - \mu_{xx} F(\mu) |\psi|^3 \\
&- \mu_x (F(\mu))_x |\psi|^3 - 3\mu_x F(\mu) |\psi|^2 \psi_x.
\end{aligned}$$

A definição de F e a informação sobre as derivadas parciais de ψ disponível em (1.45) estabelecem que

$$D = [3s|F(\mu)|^2 + (\mu_{\tau\tau} - \mu_{xx})F(\mu) + 2|\mu_x|^2 \mu_{xx} + 2|\mu_\tau|^2 \mu_{\tau\tau}] |\psi|^3.$$

Com o auxílio de (1.44), chegamos a

$$D = [3s|F(\mu)|^2 - 2(\alpha + 3\beta)F(\mu) + 4(\alpha - \beta)|\mu_x|^2] |\psi|^3 = D_1 |\psi|^3.$$

Por termos $\alpha \geq 1$ e $|\mu_x| = 2\alpha|x - x_1| \geq 2\alpha|x_1|$,

$$D_1 \geq 3s|F(\mu)|^2 - 2(\alpha + 3\beta)F(\mu) + 16\alpha^2(1 - \beta)x_1^2 = D_2.$$

Uma vez que D_2 é uma parábola com concavidade para cima,

$$D_2 \geq \frac{48s\alpha^2(1-\beta)x_1^2 - (\alpha + 3\beta)^2}{3s},$$

que é maior que zero para s suficientemente grande. Concluimos que existe $\delta_0 > 0$ tal que

$$D \geq \delta_0 |\psi|^3$$

sempre que s é suficientemente grande.

Aqui e no que segue, C denota uma constante positiva genérica que pode mudar de linha para linha. Usaremos notações mais específicas apenas nos casos em que se fizerem necessárias por motivo de clareza. Considere a seguinte soma contida em (1.49):

$$\begin{aligned} & - \int_0^{T_0} (-2\lambda s \mu_\tau(L_1, \tau) \psi(L_1, \tau) + \kappa) z_x(L_1, \tau) z_\tau(L_1, \tau) d\tau \\ & + \lambda^3 s^3 \int_0^{T_0} \mu_x(L_1, \tau) F(\mu(L_1, \tau)) |\psi(L_1, \tau)|^3 |z(L_1, \tau)|^2 d\tau \\ & - \lambda^2 s^3 \int_0^{T_0} \mu_x(L_1, \tau) F(\mu(L_1, \tau)) |\psi(L_1, \tau)|^2 |z(L_1, \tau)|^2 d\tau \\ & - \lambda^2 s^2 \int_0^{T_0} \mu_x(L_1, \tau) P(\mu(L_1, \tau)) |\psi(L_1, \tau)|^2 |z(L_1, \tau)|^2 d\tau. \end{aligned} \tag{1.51}$$

De (1.45) e da hipótese (1.42) encontramos que

$$z_x(L_1, \tau) = (\lambda \psi_x(L_1, \tau) - a) z(L_1, \tau).$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} & - \int_0^{T_0} (-2\lambda s \mu_\tau(L_1, \tau) \psi(L_1, \tau) + \kappa) z_x(L_1, \tau) z_\tau(L_1, \tau) d\tau \\ & = \frac{1}{2} \int_0^{T_0} [(-2\lambda s \mu_\tau(L_1, \tau) \psi(L_1, \tau) + \kappa)(\lambda \psi_x(L_1, \tau) - a)]_\tau |z(L_1, \tau)|^2 d\tau. \end{aligned}$$

Calculando a derivada que aparece nessa integral e supondo $\lambda, s \geq 1$, temos

$$\begin{aligned} & [(-2\lambda s \mu_\tau(L_1, \tau) \psi(L_1, \tau) + \kappa)(\lambda \psi_x(L_1, \tau) - a)]_\tau \\ & = -2\lambda^2 s^2 \mu_x(L_1, \tau) \mu_{\tau\tau}(L_1, \tau) |\psi(L_1, \tau)|^2 + 2a\lambda s \mu_{\tau\tau}(L_1, \tau) \psi(L_1, \tau) \\ & \quad - 2\lambda^2 s^3 \mu_x(L_1, \tau) |\mu_\tau(L_1, \tau)|^2 |\psi(L_1, \tau)|^2 + 2a\lambda s^2 |\mu_\tau(L_1, \tau)|^2 \psi(L_1, \tau) \\ & \quad - 2\lambda^2 s^3 \mu_x(L_1, \tau) |\mu_\tau(L_1, \tau)|^2 |\psi(L_1, \tau)|^2 + \kappa \lambda s^2 \mu_x(L_1, \tau) \mu_\tau(L_1, \tau) \psi(L_1, \tau) \\ & \geq -4\lambda^2 s^3 \mu_x(L_1, \tau) |\mu_\tau(L_1, \tau)|^2 |\psi(L_1, \tau)|^2 + 2a\lambda s \mu_{\tau\tau}(L_1, \tau) \psi(L_1, \tau) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\kappa\lambda s^2\mu_x(L_1,\tau)\mu_\tau(L_1,\tau)\psi(L_1,\tau) \\
& \geq -C|\kappa|\lambda^3s^3|\psi(L_1,\tau)|^3,
\end{aligned}$$

para $|\kappa|$ suficientemente grande. Com isso e as definições de $\mu_x(L_1,\tau)$ e $F(\mu(L_1,\tau))$ podemos escrever

$$\begin{aligned}
& -\int_0^{T_0} (-2\lambda s\mu_\tau(L_1,\tau)\psi(L_1,\tau) + \kappa)z_x(L_1,\tau)z_\tau(L_1,\tau)d\tau \\
& +\lambda^3s^3\int_0^{T_0} \mu_x(L_1,\tau)F(\mu(L_1,\tau))|\psi(L_1,\tau)|^3|z(L_1,\tau)|^2d\tau \\
& \geq \lambda^3s^3\int_0^{T_0} (-C|\kappa| + \mu_x(L_1,\tau)F(\mu(L_1,\tau)))|\psi(L_1,\tau)|^3|z(L_1,\tau)|^2d\tau \\
& \geq -C|\kappa|\lambda^3s^3\int_0^{T_0} |\psi(L_1,\tau)|^3|z(L_1,\tau)|^2d\tau,
\end{aligned}$$

com $|\kappa|$ suficientemente grande. Para as outras duas integrais em (1.51) observamos que

$$\begin{aligned}
& -\lambda^2s^3\int_0^{T_0} \mu_x(L_1,\tau)F(\mu(L_1,\tau))|\psi(L_1,\tau)|^2|z(L_1,\tau)|^2d\tau \\
& -\lambda^2s^2\int_0^{T_0} \mu_x(L_1,\tau)P(\mu(L_1,\tau))|\psi(L_1,\tau)|^2|z(L_1,\tau)|^2d\tau \\
& = -\lambda^2s^2\int_0^{T_0} [sF(\mu(L_1,\tau)) + P(\mu(L_1,\tau))]\mu_x(L_1,\tau)|\psi(L_1,\tau)|^2|z(L_1,\tau)|^2d\tau.
\end{aligned}$$

Da definição das funções envolvidas, temos

$$[sF(\mu(L_1,\tau)) + P(\mu(L_1,\tau))]\mu_x(L_1,\tau) \leq Cs|\kappa|,$$

desde que $|\kappa|$ seja grande o bastante. Reunindo as informações, conseguimos uma estimativa inferior para (1.51):

$$\begin{aligned}
& -\int_0^{T_0} (-2\lambda s\mu_\tau(L_1,\tau)\psi(L_1,\tau) + \kappa)z_x(L_1,\tau)z_\tau(L_1,\tau)d\tau \\
& +\lambda^3s^3\int_0^{T_0} \mu_x(L_1,\tau)F(\mu(L_1,\tau))|\psi(L_1,\tau)|^3|z(L_1,\tau)|^2d\tau \\
& -\lambda^2s^3\int_0^{T_0} \mu_x(L_1,\tau)F(\mu(L_1,\tau))|\psi(L_1,\tau)|^2|z(L_1,\tau)|^2d\tau \\
& -\lambda^2s^2\int_0^{T_0} \mu_x(L_1,\tau)P(\mu(L_1,\tau))|\psi(L_1,\tau)|^2|z(L_1,\tau)|^2d\tau \\
& \geq -C|\kappa|\lambda^3s^3\int_0^{T_0} |\psi(L_1,\tau)|^3|z(L_1,\tau)|^2d\tau,
\end{aligned}$$

com $|\kappa|$ suficientemente grande.

Para algumas das integrais em (1.49) buscaremos estimativas superiores, começando por

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} (\kappa F(\mu)\psi)_\tau |z|^2 dx d\tau, \\ \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} (\kappa F(\mu)|\psi|^2)_\tau |z|^2 dx d\tau. \end{array} \right. \quad (1.52)$$

Com alguns cálculos conseguimos mostrar que

$$\begin{aligned} |(F(\mu)\psi)_\tau| &= |\mu_\tau| 2\mu_{\tau\tau} + s(|\mu_\tau|^2 - |\mu_x|^2)|\psi| \leq Cs|\psi|, \\ |(F(\mu)|\psi|^2)_\tau| &= 2|\mu_\tau||\mu_{\tau\tau} + s(|\mu_\tau|^2 - |\mu_x|^2)|\psi|^2 \leq Cs|\psi|^2. \end{aligned}$$

Sendo assim e de termos $\psi \geq 1$,

$$\begin{aligned} \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} |(\kappa F(\mu)\psi)_\tau| |z|^2 dx d\tau &\leq C|\kappa|s \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} |\psi|^3 |z|^2 dx d\tau, \\ \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} |(\kappa F(\mu)|\psi|^2)_\tau| |z|^2 dx d\tau &\leq C|\kappa|s \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} |\psi|^3 |z|^2 dx d\tau. \end{aligned} \quad (1.53)$$

No caso da integral

$$\int_0^{T_0} \int_0^{L_1} (\mu_x P(\mu)|\psi|^2)_x |z|^2 dx d\tau,$$

usamos que

$$\begin{aligned} |(\mu_x P(\mu)|\psi|^2)_x| &= |(\mu_{xx} + 2s|\mu_x|^2)P(\mu)| |\psi|^2 \\ &\leq 4\alpha(1 + 4\alpha s|L_1 - x_1|^2)(1 + \alpha + |\kappa|T_0)|\psi|^2 \\ &\leq Cs|\kappa||\psi|^2 \end{aligned}$$

para obter

$$\int_0^{T_0} \int_0^{L_1} |(\mu_x P(\mu)|\psi|^2)_x| |z|^2 dx d\tau \leq Cs|\kappa| \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} |\psi|^2 |z|^2 dx d\tau. \quad (1.54)$$

Para conseguir uma estimativa para $|G|$ fazemos cálculos semelhantes aos que foram feitos para D . Encontramos, então, que

$$\begin{aligned} |G| &= |((\mu_{xx} - \mu_{\tau\tau})F(\mu) - 2s(F(\mu))^2 - 2|\mu_x|^2\mu_{xx} - 2|\mu_\tau|^2\mu_{\tau\tau})| |\psi|^2 \\ &\leq 2s((\alpha + 3\beta)(|\mu_\tau|^2 + |\mu_x|^2) + 2(|\mu_\tau|^4 + |\mu_x|^4) + 2(\alpha + \beta)|\mu_x|^2) |\psi|^2 \\ &\leq Cs|\psi|^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_0^{T_0} \int_0^{L_1} |G||z|^2 dx d\tau \leq Cs \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} |\psi|^2 |z|^2 dx d\tau. \quad (1.55)$$

Por fim, é possível chegar a

$$\begin{aligned} & \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} |(P(\mu)(-2\lambda s\mu_\tau\psi + \kappa)\psi)_\tau| |z|^2 dx d\tau \\ & \leq 2C|\kappa|\lambda s^2 \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} |\psi|^2 |z|^2 dx d\tau + Cs|\kappa|^2 \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} \psi |z|^2 dx d\tau, \end{aligned} \quad (1.56)$$

uma vez que

$$\begin{aligned} & |(P(\mu)(-2\lambda s\mu_\tau\psi + \kappa)\psi)_\tau| \\ & = |-2\lambda s ((\kappa\mu_\tau + P(\mu))\mu_{\tau\tau} + 2sP(\mu)|\mu_\tau|^2) |\psi|^2 + (|\kappa|^2\mu_{\tau\tau} + \kappa s\mu_\tau P(\mu)) \psi| \end{aligned}$$

e

$$|(\kappa\mu_\tau + P(\mu))\mu_{\tau\tau} + 2sP(\mu)|\mu_\tau|^2| \leq Cs|\kappa|,$$

$$||\kappa|^2\mu_{\tau\tau} + \kappa s\mu_\tau P(\mu)| \leq Cs|\kappa|^2.$$

Passamos agora a tratar dos traços em $\tau = 0$ e $\tau = T_0$. Sabemos por (1.45) que

$$z_j(x, 0) = [\lambda\psi_j(x, 0)y(x, 0) + y_j(x, 0)] e^{\lambda\psi(x, 0)},$$

bem como

$$z_j(x, T_0) = [\lambda\psi_j(x, T_0)y(x, T_0) + y_j(x, T_0)] e^{\lambda\psi(x, T_0)}.$$

A condição (1.41) garante que ambos são nulos, independente de $j = x$ ou $j = \tau$. Sendo assim,

$$\frac{1}{2} \int_0^{L_1} (-2\lambda s\mu_\tau\psi + \kappa)(|z_x|^2 + |z_\tau|^2) dx \Bigg|_{\tau=0}^{\tau=T_0} = 0.$$

O mesmo argumento pode ser utilizado para justificar que

$$2\lambda s \int_0^{L_1} \mu_x \psi z_x z_\tau dx \Bigg|_{\tau=0}^{\tau=T_0} = 0.$$

Utilização das estimativas. De acordo com as estimativas inferiores encontradas e as informações sobre o traço em $\tau = 0$ e $\tau = T_0$, para $\lambda, s, |\kappa| \geq 1$ suficientemente grandes,

$$\sum_{i,j=1}^{i=5,j=2} I_{i,j} \geq 2(1 - \beta)\lambda s \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} \psi(|z_x|^2 + |z_\tau|^2) dx d\tau + \lambda^3 s^3 \delta_0 \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} |\psi|^3 |z|^2 dx d\tau$$

$$\begin{aligned}
 & +\lambda^2 s^2 \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} (\mu_x P(\mu) |\psi|^2)_x |z|^2 dx d\tau + \frac{\lambda s^2}{2} \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} (\kappa F(\mu) \psi)_\tau |z|^2 dx d\tau \\
 & +\lambda^2 s^3 \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} G |z|^2 dx d\tau - \frac{\lambda^2 s^2}{2} \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} (\kappa F(\mu) |\psi|^2)_\tau |z|^2 dx d\tau \\
 & +\frac{\lambda s}{2} \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} (P(\mu) (-2\lambda s \mu_\tau \psi + \kappa) \psi)_\tau |z|^2 dx d\tau \\
 & -C|\kappa| \lambda^3 s^3 \int_0^{T_0} |\psi(L_1, \tau)|^3 |z(L_1, \tau)|^2 d\tau \\
 & -\lambda s \int_0^{T_0} \mu_x(L_1, \tau) \psi(L_1, \tau) |z_\tau(L_1, \tau)|^2 d\tau \\
 & -\lambda s \int_0^{T_0} \mu_x(L_1, \tau) \psi(L_1, \tau) |z_x(L_1, \tau)|^2 d\tau \\
 & +\lambda s \int_0^{T_0} \mu_x(0, \tau) \psi(0, \tau) |z_x(0, \tau)|^2 d\tau.
 \end{aligned}$$

Notemos que a última integral possui todos os termos positivos. Também temos

$$\begin{aligned}
 & -\lambda s \int_0^{T_0} \mu_x(L_1, \tau) \psi(L_1, \tau) |z_\tau(L_1, \tau)|^2 d\tau - \lambda s \int_0^{T_0} \mu_x(L_1, \tau) \psi(L_1, \tau) |z_x(L_1, \tau)|^2 d\tau \\
 & = -C_1 \lambda s \int_0^{T_0} \psi(L_1, \tau) (|z_\tau(L_1, \tau)|^2 + |z_x(L_1, \tau)|^2) d\tau,
 \end{aligned}$$

com C_1 uma constante positiva. Tomando $\delta < \min\{2(1 - \beta), \delta_0\}$, chegamos a

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i,j=1}^{i=5,j=2} I_{i,j} \\
 & \geq \delta \left(\lambda s \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} \psi (|z_x|^2 + |z_\tau|^2) dx d\tau + \lambda^3 s^3 \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} |\psi|^3 |z|^2 dx d\tau \right) \\
 & +\lambda^2 s^2 \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} (\mu_x P(\mu) |\psi|^2)_x |z|^2 dx d\tau + \frac{\lambda s^2}{2} \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} (\kappa F(\mu) \psi)_\tau |z|^2 dx d\tau \\
 & +\lambda^2 s^3 \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} G |z|^2 dx d\tau - \frac{\lambda^2 s^2}{2} \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} (\kappa F(\mu) |\psi|^2)_\tau |z|^2 dx d\tau \\
 & +\frac{\lambda s}{2} \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} (P(\mu) (-2\lambda s \mu_\tau \psi + \kappa) \psi)_\tau |z|^2 dx d\tau \\
 & -C|\kappa| \lambda^3 s^3 \int_0^{T_0} |\psi(L_1, \tau)|^3 |z(L_1, \tau)|^2 d\tau
 \end{aligned} \tag{1.57}$$

$$-C\lambda s \int_0^{T_0} \psi(L_1, \tau) (|z_\tau(L_1, \tau)|^2 + |z_x(L_1, \tau)|^2) d\tau.$$

Utilizando em (1.48) a estimativa (1.57), obtemos

$$\begin{aligned} & \delta \left(\lambda s \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} \psi (|z_x|^2 + |z_\tau|^2) dx d\tau + \lambda^3 s^3 \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} |\psi|^3 |z|^2 dx d\tau \right) \\ & \leq \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} |P_\psi(z)|^2 dx d\tau + C|\kappa| \lambda^3 s^3 \int_0^{T_0} |\psi(L_1, \tau)|^3 |z(L_1, \tau)|^2 d\tau \\ & \quad + C\lambda s \int_0^{T_0} \psi(L_1, \tau) (|z_\tau(L_1, \tau)|^2 + |z_x(L_1, \tau)|^2) d\tau \\ & \quad - \lambda^2 s^2 \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} (\mu_x P(\mu) |\psi|^2)_x |z|^2 dx d\tau - \frac{\lambda s^2}{2} \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} (\kappa F(\mu) \psi)_\tau |z|^2 dx d\tau \\ & \quad - \lambda^2 s^3 \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} G |z|^2 dx d\tau + \frac{\lambda^2 s^2}{2} \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} (\kappa F(\mu) |\psi|^2)_\tau |z|^2 dx d\tau \\ & \quad - \frac{\lambda s}{2} \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} (P(\mu) (-2\lambda s \mu_\tau \psi + \kappa) \psi)_\tau |z|^2 dx d\tau. \end{aligned}$$

As estimativas superiores (1.53)-(1.56) nos permitem estabelecer

$$\begin{aligned} \mathcal{A} & = -\lambda^2 s^2 \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} (\mu_x P(\mu) |\psi|^2)_x |z|^2 dx d\tau - \frac{\lambda s^2}{2} \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} (\kappa F(\mu) \psi)_\tau |z|^2 dx d\tau \\ & \quad - \lambda^2 s^3 \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} G |z|^2 dx d\tau + \frac{\lambda^2 s^2}{2} \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} (\kappa F(\mu) |\psi|^2)_\tau |z|^2 dx d\tau \\ & \quad - \frac{\lambda s}{2} \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} (P(\mu) (-2\lambda s \mu_\tau \psi + \kappa) \psi)_\tau |z|^2 dx d\tau \\ & \leq 4C_0 |\kappa| \lambda^2 s^3 \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} |\psi|^3 |z|^2 dx d\tau + C_0 |\kappa|^2 \lambda s^3 \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} |\psi|^3 |z|^2 dx d\tau \\ & \quad + C_0 \lambda^2 s^4 \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} |\psi|^2 |z|^2 dx d\tau \\ & \leq 4C_0 \lambda^3 s^3 \frac{|\kappa|}{\lambda} \left(1 + \frac{|\kappa|}{\lambda} \right) \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} |\psi|^3 |z|^2 dx d\tau + C_0 \lambda^2 s^4 \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} |\psi|^3 |z|^2 dx d\tau. \end{aligned}$$

Escolhemos, então, $\lambda \geq \max\{|\kappa|, (32C_0/\delta)|\kappa|, (4C_0/\delta)s\}$ suficientemente grande. Desde que $|\kappa|/\lambda \leq 1$, vem

$$\mathcal{A} \leq 8C_0 \lambda^3 s^3 \frac{|\kappa|}{\lambda} \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} |\psi|^3 |z|^2 dx d\tau + C_0 \lambda^2 s^4 \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} |\psi|^3 |z|^2 dx d\tau.$$

Por outro lado, de $|\kappa|/\lambda \leq \delta/32C_0$ e $s \leq \delta\lambda/4C_0$ segue que

$$\mathcal{A} \leq \frac{\delta}{2} \lambda^3 s^3 \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} |\psi|^3 |z|^2 dx d\tau.$$

Deste momento em diante passamos a usar a notação $\lambda_{\kappa s}$ para deixar explícita a dependência que λ tem de κ e s . Utilizando a estimativa obtida para $\mathcal{A}$, encontramos

$$\begin{aligned} & \delta \left(\lambda_{\kappa s} s \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} \psi (|z_x|^2 + |z_\tau|^2) dx d\tau + \frac{1}{2} \lambda_{\kappa s}^3 s^3 \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} |\psi|^3 |z|^2 dx d\tau \right) \\ & \leq \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} |P_\psi(z)|^2 dx d\tau + C |\kappa| \lambda_{\kappa s}^3 s^3 \int_0^{T_0} |\psi(L_1, \tau)|^3 |z(L_1, \tau)|^2 d\tau \\ & \quad + C \lambda_{\kappa s} s \int_0^{T_0} \psi(L_1, \tau) (|z_\tau(L_1, \tau)|^2 + |z_x(L_1, \tau)|^2) d\tau, \end{aligned}$$

que multiplicada por $2/\delta$ e com alguns ajustes pode ser escrita como

$$\begin{aligned} & \lambda_{\kappa s} s \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} \psi (|z_x|^2 + |z_\tau|^2) dx d\tau + \lambda_{\kappa s}^3 s^3 \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} |\psi|^3 |z|^2 dx d\tau \\ & \leq C \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} |P_\psi(z)|^2 dx d\tau + C |\kappa| \lambda_{\kappa s}^3 s^3 \int_0^{T_0} |\psi(L_1, \tau)|^3 |z(L_1, \tau)|^2 d\tau \\ & \quad + C \lambda_{\kappa s} s \int_0^{T_0} \psi(L_1, \tau) (|z_\tau(L_1, \tau)|^2 + |z_x(L_1, \tau)|^2) d\tau. \end{aligned} \tag{1.58}$$

Retorno à variável y . Graças a (1.45) e às características das funções envolvidas, temos

$$e^{2\lambda_{\kappa s}\psi} (|y_x|^2 + |y_\tau|^2) \leq \tilde{C}_0 (\lambda_{\kappa s}^2 s^2 |\psi|^2 |z|^2 + |z_x|^2 + |z_\tau|^2).$$

Multiplicando a desigualdade acima por $\lambda_{\kappa s} s \psi / \tilde{C}_0$ e integrando sobre $(0, T_0) \times (0, L_1)$, vemos que

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda_{\kappa s} s}{\tilde{C}_0} \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} e^{2\lambda_{\kappa s}\psi} \psi (|y_x|^2 + |y_\tau|^2) dx d\tau \\ & \leq \lambda_{\kappa s} s \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} \psi (|z_x|^2 + |z_\tau|^2) dx d\tau + \lambda_{\kappa s}^3 s^3 \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} |\psi|^3 |z|^2 dx d\tau. \end{aligned} \tag{1.59}$$

Também é possível estabelecer

$$|z(L_1, \tau)|^2 \leq e^{2\lambda_{\kappa s}\psi(L_1, \tau)} |y(L_1, \tau)|^2$$

e

$$\begin{aligned} & |z_x(L_1, \tau)|^2 + |z_\tau(L_1, \tau)|^2 \\ & \leq C \lambda_{\kappa s}^2 s^2 e^{2\lambda_{\kappa s}\psi(L_1, \tau)} |\psi(L_1, \tau)|^2 |y(L_1, \tau)|^2 + C e^{2\lambda_{\kappa s}\psi(L_1, \tau)} (|y_x(L_1, \tau)|^2 + |y_\tau(L_1, \tau)|^2). \end{aligned}$$

Essas estimativas fornecem

$$\begin{aligned}
& C|\kappa|\lambda_{\kappa s}^3 s^3 \int_0^{T_0} |\psi(L_1, \tau)|^3 |z(L_1, \tau)|^2 d\tau \\
& + C\lambda_{\kappa s} s \int_0^{T_0} \psi(L_1, \tau) (|z_\tau(L_1, \tau)|^2 + |z_x(L_1, \tau)|^2) d\tau \\
& \leq C|k|\lambda_{\kappa s}^3 s^3 \int_0^{T_0} e^{2\lambda_{\kappa s}\psi(L_1, \tau)} |\psi(L_1, \tau)|^3 |y(L_1, \tau)|^2 d\tau \\
& + C\lambda_{\kappa s} s \int_0^{T_0} e^{2\lambda_{\kappa s}\psi(L_1, \tau)} \psi(L_1, \tau) (|y_x(L_1, \tau)|^2 + |y_\tau(L_1, \tau)|^2) d\tau.
\end{aligned} \tag{1.60}$$

Fazendo uso de (1.59) e (1.60) em (1.58) e algumas manipulações, encontramos

$$\begin{aligned}
& \lambda_{\kappa s} s \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} e^{2\lambda_{\kappa s}\psi} \psi (|y_x|^2 + |y_\tau|^2) dx d\tau + \lambda_{\kappa s}^3 s^3 \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} e^{2\lambda_{\kappa s}\psi} |\psi|^3 |y|^2 dx d\tau \\
& \leq C \int_0^{T_0} \int_0^{L_1} |e^{\lambda_{\kappa s}\psi} P(y)|^2 dx d\tau + C|\kappa|\lambda_{\kappa s}^3 s^3 \int_0^{T_0} e^{2\lambda_{\kappa s}\psi(L_1, \tau)} |\psi(L_1, \tau)|^3 |y(L_1, \tau)|^2 d\tau \\
& + C\lambda_{\kappa s} s \int_0^{T_0} e^{2\lambda_{\kappa s}\psi(L_1, \tau)} \psi(L_1, \tau) (|y_x(L_1, \tau)|^2 + |y_\tau(L_1, \tau)|^2) d\tau,
\end{aligned}$$

sempre que $\lambda_{\kappa s} \geq \max \{|\kappa|, (32C_0/\delta)|\kappa|, (4C_0/\delta)s\}$, $s \geq 1$ e $|\kappa|$ forem suficientemente grandes. Isto mostra o resultado. ■

No Teorema 1.6 apresentamos uma desigualdade de Carleman para a qual tomamos $x_1 < 0$, o que fornece a observabilidade na fronteira $x = L_1 = l_1 + \eta$. Cálculos análogos mostram que para $x_2 \geq 2$ obtemos resultado semelhante, com observabilidade em $x = L_2 = l_2 - \eta$.

Teorema 1.7 *Suponhamos que y pertencente a $L^2(0, T_0; V(L_2, 1)) \cap H^1(0, T_0; L^2(L_2, 1))$ satisfaz*

$$y(\cdot, 0) = y(\cdot, T_0) = y_\tau(\cdot, 0) = y_\tau(\cdot, T_0) = 0 \quad \text{em } (L_2, 1), \tag{1.61}$$

$$y_x(1, \cdot) + ay(1, \cdot) = 0 \quad \text{em } (0, T_0) \tag{1.62}$$

e que $P(y) := y_{\tau\tau} - y_{xx} + \kappa y_\tau \in L^2(0, T_0; L^2(L_2, 1))$. Então existem $\kappa_0, s_0, \lambda_0 \in \mathbb{R}^+$ tais que, para todo $\kappa \in \mathbb{R}$ com $|\kappa| \geq \kappa_0 \geq 1$, $s \geq s_0 \geq 1$ e $\lambda_{\kappa s} \geq \lambda_0 \max\{|\kappa|, s\} \geq 1$, é válido que

$$\lambda_{\kappa s} s \int_0^{T_0} \int_{L_2}^1 e^{2\lambda_{\kappa s}\psi} \psi (|y_x|^2 + |y_\tau|^2) dx d\tau + \lambda_{\kappa s}^3 s^3 \int_0^{T_0} \int_{L_2}^1 e^{2\lambda_{\kappa s}\psi} |\psi|^3 |y|^2 dx d\tau \tag{1.63}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \int_0^{T_0} \int_{L_2}^1 |e^{\lambda_{\kappa s} \psi} P(y)|^2 dx d\tau + C \lambda_{\kappa s} s \int_0^{T_0} e^{2\lambda_{\kappa s} \psi(L_2, \tau)} |\psi(L_2, \tau)| |y_x(L_2, \tau)|^2 d\tau \\
&\quad + C \lambda_{\kappa s}^3 s^3 \int_0^{T_0} e^{2\lambda_{\kappa s} \psi(L_2, \tau)} |\psi(L_2, \tau)|^3 |y(L_2, \tau)|^2 d\tau.
\end{aligned}$$

1.3.2 Desigualdade de Carleman com observação no interior

Na subseção anterior encontramos desigualdades de Carleman considerando que a observação ocorria na fronteira do intervalo $[l_1 + \eta, l_2 - \eta]$. Aqui usaremos esses resultados para provar uma desigualdade de Carleman com a observação ocorrendo no subconjunto não-vazio $\omega = (l_1, l_2)$ de $(0, 1)$.

Teorema 1.8 *Suponhamos que $y \in L^2(0, T_0; V(0, 1)) \cap H^1(0, T_0; L^2(0, 1))$ satisfaz*

$$y(\cdot, 0) = y(\cdot, T_0) = y_\tau(\cdot, 0) = y_\tau(\cdot, T_0) = 0 \quad \text{em } (0, 1), \quad (1.64)$$

$$y_x(1, \cdot) + ay(1, \cdot) = 0 \quad \text{em } (0, T_0) \quad (1.65)$$

e que $P(y) := y_{\tau\tau} - y_{xx} + \kappa y_\tau \in L^2(0, T_0; L^2(0, 1))$. Então existem $\kappa_0, \lambda_0 \geq 1$ tais que, para todo $\kappa \in \mathbb{R}$ com $|\kappa| \geq \kappa_0$ e $\lambda_\kappa \geq \lambda_0 |\kappa|$, é válido que

$$\begin{aligned}
&\int_0^{T_0} \int_0^1 e^{2\lambda_\kappa \psi} (\lambda_\kappa^3 |y|^2 + \lambda_\kappa |y_x|^2 + \lambda_\kappa |y_\tau|^2) dx d\tau \\
&\leq C \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{2\lambda_\kappa \psi} |P(y)|^2 dx d\tau + C |\kappa| \int_0^{T_0} \int_{l_1}^{l_2} e^{2\lambda_\kappa \psi} (\lambda_\kappa^3 |y|^2 + \lambda_\kappa |y_\tau|^2) dx d\tau.
\end{aligned} \quad (1.66)$$

Demonstração. Seja $\xi \in C^\infty([0, 1])$ tal que

$$\xi(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x \in \left[0, l_1 + \frac{\eta}{3}\right], \\ 0 & \text{para } x \in \left[l_1 + \frac{2\eta}{3}, l_2 - \frac{2\eta}{3}\right], \\ 1 & \text{para } x \in \left[l_2 - \frac{\eta}{3}, 1\right]. \end{cases} \quad (1.67)$$

A construção de uma função desse tipo pode ser feita com o auxílio do Lema 2.1 em [21]. A base da ideia que utilizamos consiste em dividir o intervalo $[0, 1]$ nos subintervalos $[0, l_1 + \eta]$, $[l_1 + \eta, l_2 - \eta]$ e $[l_2 - \eta, 1]$, aplicar, para a função ξy , o Teorema 1.6 ao primeiro intervalo e o Teorema 1.7 ao último. As hipóteses no enunciado e as características da

função ξ fazem com que as condições exigidas por esses teoremas sejam satisfeitas.

Para o intervalo $[0, l_1 + \eta]$, observando que $\psi \geq 1$ e $\xi(l_1 + \eta) = (\xi y)_x(l_1 + \eta, \tau) = 0$, por (1.43) encontramos

$$\begin{aligned} & s \int_0^{T_0} \int_0^{l_1 + \eta} e^{2\lambda_{\kappa s} \psi} (\lambda_{\kappa s} |(\xi y)_x|^2 + \lambda_{\kappa s} |\xi y_\tau|^2) dx d\tau + s^3 \int_0^{T_0} \int_0^{l_1 + \eta} \lambda_{\kappa s}^3 e^{2\lambda_{\kappa s} \psi} |\xi y|^2 dx d\tau \\ & \leq C \int_0^{T_0} \int_0^{l_1 + \eta} |e^{\lambda_{\kappa s} \psi} P(\xi y)|^2 dx d\tau. \end{aligned}$$

Considerando $Q_1 = (0, l_1 + \eta) \times (0, T_0)$ e passando a tratar s como um valor fixo, temos

$$\int_{Q_1} e^{2\lambda_{\kappa} \psi} (\lambda_{\kappa}^3 |\xi y|^2 + \lambda_{\kappa} |(\xi y)_x|^2 + \lambda_{\kappa} |\xi y_\tau|^2) dx d\tau \leq C \|e^{\lambda_{\kappa} \psi} P(\xi y)\|_{L^2(Q_1)}^2, \quad (1.68)$$

com C uma constante adequada. De maneira semelhante, para o intervalo $[l_2 - \eta, 1]$, a desigualdade (1.63) e algumas manipulações fornecem

$$\int_{Q_2} e^{2\lambda_{\kappa} \psi} (\lambda_{\kappa}^3 |\xi y|^2 + \lambda_{\kappa} |(\xi y)_x|^2 + \lambda_{\kappa} |\xi y_\tau|^2) dx d\tau \leq C \|e^{\lambda_{\kappa} \psi} P(\xi y)\|_{L^2(Q_2)}^2, \quad (1.69)$$

com $Q_2 = (l_2 - \eta, 1) \times (0, T_0)$.

Mantendo em mente que $\xi y = y$ nos conjuntos $[0, l_1 + \eta/3] \times [0, T_0]$ e $[l_2 - \eta/3, 1] \times [0, T_0]$, podemos escrever

$$\begin{aligned} & \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{2\lambda_{\kappa} \psi} (\lambda_{\kappa}^3 |y|^2 + \lambda_{\kappa} |y_x|^2 + \lambda_{\kappa} |y_\tau|^2) dx d\tau \\ & = \int_0^{T_0} \int_0^{l_1 + \frac{\eta}{3}} e^{2\lambda_{\kappa} \psi} (\lambda_{\kappa}^3 |\xi y|^2 + \lambda_{\kappa} |\xi y_x|^2 + \lambda_{\kappa} |\xi y_\tau|^2) dx d\tau \\ & \quad + \int_0^{T_0} \int_{l_1 + \frac{\eta}{3}}^{l_2 - \frac{\eta}{3}} e^{2\lambda_{\kappa} \psi} (\lambda_{\kappa}^3 |y|^2 + \lambda_{\kappa} |y_x|^2 + \lambda_{\kappa} |y_\tau|^2) dx d\tau \\ & \quad + \int_0^{T_0} \int_{l_2 - \frac{\eta}{3}}^1 e^{2\lambda_{\kappa} \psi} (\lambda_{\kappa}^3 |\xi y|^2 + \lambda_{\kappa} |\xi y_x|^2 + \lambda_{\kappa} |\xi y_\tau|^2) dx d\tau \end{aligned}$$

e, então, usar (1.68) e (1.69) para obter

$$\begin{aligned} & \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{2\lambda_{\kappa} \psi} (\lambda_{\kappa}^3 |y|^2 + \lambda_{\kappa} |y_x|^2 + \lambda_{\kappa} |y_\tau|^2) dx d\tau \\ & \leq \int_0^{T_0} \int_{l_1 + \frac{\eta}{3}}^{l_2 - \frac{\eta}{3}} e^{2\lambda_{\kappa} \psi} (\lambda_{\kappa}^3 |y|^2 + \lambda_{\kappa} |y_x|^2 + \lambda_{\kappa} |y_\tau|^2) dx d\tau \\ & \quad + C \sum_{i=1,2} \int_{Q_i} e^{2\lambda_{\kappa} \psi} |P(\xi y)|^2 dx d\tau. \end{aligned} \quad (1.70)$$

Também podemos usar que $\xi y = y$ nos conjuntos $[0, l_1 + \eta/3] \times [0, T_0]$ e $[l_2 - \eta/3, 1] \times [0, T_0]$ para conseguir que

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1,2} \int_{Q_i} e^{2\lambda_\kappa \psi} |P(\xi y)|^2 dx d\tau \\
& \leq \int_0^{T_0} \int_0^{l_1 + \frac{\eta}{3}} e^{2\lambda_\kappa \psi} |P(y)|^2 dx d\tau + \int_0^{T_0} \int_{l_1 + \frac{\eta}{3}}^{l_2 - \frac{\eta}{3}} e^{2\lambda_\kappa \psi} |P(\xi y)|^2 dx d\tau \\
& \quad + \int_0^{T_0} \int_{l_2 - \frac{\eta}{3}}^1 e^{2\lambda_\kappa \psi} |P(y)|^2 dx d\tau.
\end{aligned} \tag{1.71}$$

Uma vez que $P(\xi y) = \xi P(y) - (\xi_{xx} y + 2\xi_x y_x)$, utilizando a regularidade de ξ podemos estimar a segunda integral no lado direito de (1.71), de forma que

$$\int_0^{T_0} \int_{l_1 + \frac{\eta}{3}}^{l_2 - \frac{\eta}{3}} e^{2\lambda_\kappa \psi} |P(\xi y)|^2 dx d\tau \leq C \int_0^{T_0} \int_{l_1 + \frac{\eta}{3}}^{l_2 - \frac{\eta}{3}} e^{2\lambda_\kappa \psi} (|P(y)|^2 + |y|^2 + |y_x|^2) dx d\tau.$$

Retornando a (1.71), temos

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1,2} \int_{Q_i} e^{2\lambda_\kappa \psi} |P(\xi y)|^2 dx d\tau \\
& \leq C \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{2\lambda_\kappa \psi} |P(y)|^2 dx d\tau + C \int_0^{T_0} \int_{l_1 + \frac{\eta}{3}}^{l_2 - \frac{\eta}{3}} e^{2\lambda_\kappa \psi} (|y|^2 + |y_x|^2) dx d\tau.
\end{aligned}$$

Disso e de (1.70), encontramos que, para $\lambda_\kappa \geq 1$ suficientemente grande,

$$\begin{aligned}
& \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{2\lambda_\kappa \psi} (\lambda_\kappa^3 |y|^2 + \lambda_\kappa |y_x|^2 + \lambda_\kappa |y_\tau|^2) dx d\tau \\
& \leq C \int_0^{T_0} \int_{l_1}^{l_2} e^{2\lambda_\kappa \psi} (\lambda_\kappa^3 |y|^2 + \lambda_\kappa |y_\tau|^2) dx d\tau + C \lambda_k \int_0^{T_0} \int_{l_1 + \frac{\eta}{3}}^{l_2 - \frac{\eta}{3}} e^{2\lambda_\kappa \psi} |y_x|^2 dx d\tau \\
& \quad + C \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{2\lambda_\kappa \psi} |P(y)|^2 dx d\tau.
\end{aligned} \tag{1.72}$$

Buscaremos agora uma estimativa para a segunda integral do lado direito de (1.72).

Consideremos $\zeta \in \mathcal{C}_0^\infty[l_1, l_2]$ uma função que satisfaz

$$\begin{cases} \zeta(x) \geq 0 & \text{em } [l_1, l_2], \\ \zeta(x) = 1 & \text{em } \left[l_1 + \frac{\eta}{3}, l_2 - \frac{\eta}{3}\right]. \end{cases}$$

Uma função como ζ também pode ser conseguida a partir do Lema 2.1 de [21]. Usando integração por partes e a igualdade $-y_{xx} = P(y) - y_{\tau\tau} - \kappa y_\tau$, podemos verificar que

$$\begin{aligned}
& \int_{l_1 + \frac{\eta}{3}}^{l_2 - \frac{\eta}{3}} e^{2\lambda_\kappa \psi} |y_x|^2 dx \\
& = \int_{l_1 + \frac{\eta}{3}}^{l_2 - \frac{\eta}{3}} \zeta e^{2\lambda_\kappa \psi} |y_x|^2 dx \leq \int_{l_1}^{l_2} \zeta e^{2\lambda_\kappa \psi} |y_x|^2 dx
\end{aligned} \tag{1.73}$$

$$= \frac{1}{2} \int_{l_1}^{l_2} (\zeta e^{2\lambda_\kappa \psi})_{xx} |y|^2 dx + \int_{l_1}^{l_2} \zeta e^{2\lambda_\kappa \psi} y (P(y) - y_{\tau\tau} - \kappa y_\tau) dx.$$

Para $\lambda_\kappa \geq 1$ grande o bastante, usando as limitações de ψ e ζ e de suas derivadas, encontramos

$$\int_0^{T_0} \int_{l_1}^{l_2} (\zeta e^{2\lambda_\kappa \psi})_{xx} |y|^2 dx d\tau \leq C \lambda_\kappa^2 \int_0^{T_0} \int_{l_1}^{l_2} e^{2\lambda_\kappa \psi} |y|^2 dx d\tau \quad (1.74)$$

e também

$$\begin{aligned} & \int_0^{T_0} \int_{l_1}^{l_2} \zeta e^{2\lambda_\kappa \psi} y (P(y) - y_{\tau\tau} - \kappa y_\tau) dx d\tau \\ & \leq \int_0^{T_0} \int_{l_1}^{l_2} e^{2\lambda_\kappa \psi} \left(\sqrt{\lambda_\kappa} \zeta y \right) \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_\kappa}} P(y) \right) dx d\tau - \int_0^{T_0} \int_{l_1}^{l_2} \zeta e^{2\lambda_\kappa \psi} y y_{\tau\tau} dx d\tau \\ & \quad - \kappa \int_0^{T_0} \int_{l_1}^{l_2} \zeta e^{2\lambda_\kappa \psi} y y_\tau dx d\tau \\ & \leq \frac{C}{\lambda_\kappa} \int_0^{T_0} \int_{l_1}^{l_2} e^{2\lambda_\kappa \psi} |P(y)|^2 dx d\tau + C |\kappa| \int_0^{T_0} \int_{l_1}^{l_2} e^{2\lambda_\kappa \psi} (\lambda_\kappa^2 |y|^2 + |y_\tau|^2) dx d\tau. \end{aligned} \quad (1.75)$$

Por (1.73)-(1.75) obtemos

$$\begin{aligned} & \int_0^{T_0} \int_{l_1 + \frac{\eta}{3}}^{l_2 - \frac{\eta}{3}} e^{2\lambda_\kappa \psi} |y_x|^2 dx d\tau \\ & \leq C \lambda_\kappa^2 \int_0^{T_0} \int_{l_1}^{l_2} e^{2\lambda_\kappa \psi} |y|^2 dx d\tau + \frac{C}{\lambda_\kappa} \int_0^{T_0} \int_{l_1}^{l_2} e^{2\lambda_\kappa \psi} |P(y)|^2 dx d\tau \\ & \quad + C |\kappa| \int_0^{T_0} \int_{l_1}^{l_2} e^{2\lambda_\kappa \psi} (\lambda_\kappa^2 |y|^2 + |y_\tau|^2) dx d\tau \\ & \leq C |\kappa| \int_0^{T_0} \int_{l_1}^{l_2} e^{2\lambda_\kappa \psi} (\lambda_\kappa^2 |y|^2 + |y_\tau|^2) dx d\tau + \frac{C}{\lambda_\kappa} \int_0^{T_0} \int_{l_1}^{l_2} e^{2\lambda_\kappa \psi} |P(y)|^2 dx d\tau. \end{aligned} \quad (1.76)$$

As estimativas (1.72) e (1.76) fornecem a desigualdade (1.66). ■

Na seção seguinte usaremos a desigualdade provada aqui para conseguir um resultado auxiliar que será usado na obtenção da desigualdade de Carleman que precisamos.

1.3.3 Desigualdade de Carleman: um resultado auxiliar

Nas desigualdades de Carleman que conseguimos trabalhamos basicamente com o sistema

$$\left\{ \begin{array}{ll} P(y) = y_{\tau\tau} - y_{xx} + \kappa y_{\tau} = f & \text{em } (0, 1) \times (0, T_0), \\ y(0) = 0 & \text{em } (0, T_0), \\ y_x(1) + ay(1) = 0 & \text{em } (0, T_0), \\ y(0) = y(T_0) = 0 & \text{em } (0, 1). \end{array} \right. \quad (1.77)$$

Vamos definir o que consideramos uma solução fraca para ele.

Definição 1.9 *Sejam $f \in L^2(0, T_0; L^2(0, 1))$ e $P^*(z) = z_{\tau\tau} - z_{xx} - \kappa z_{\tau}$. Dizemos que a função $y \in L^2(0, T_0; L^2(0, 1))$ é solução fraca do problema (1.77) se*

$$(y, P^*(z))_{L^2(0, T_0; L^2(0, 1))} = \langle f, z \rangle_{L^2(0, T_0; V'(0, 1)), L^2(0, T_0; V(0, 1))},$$

para toda $z \in H_0^1(0, T_0; V(0, 1))$ que satisfaz

$$P^*(z) \in L^2(0, T_0; L^2(0, 1)) \quad e \quad z_x(1, \tau) + az(1, \tau) = 0.$$

Estamos particularmente interessados nas soluções fracas de (1.77) que também satisfazem

$$y_{\tau}(0) = y_{\tau}(T_0) = 0 \quad \text{em } (0, 1).$$

Proposição 1.10 *Seja ψ a função definida em (1.36). Para cada $y \in L^2(0, T_0; L^2(0, 1))$, existem $\kappa_0, \lambda_0, C \in \mathbb{R}^+$ tais que, para todo $\kappa \in \mathbb{R}$ com $|\kappa| \geq \kappa_0 \geq 1$ e $\lambda_{\kappa} \geq \lambda_0 |\kappa| \geq 1$, é possível garantir a existência de $(z, \bar{z}) \in H_0^1(0, T_0; V(0, 1)) \times L^2(0, T_0; L^2(0, 1))$, com $\text{supp } \bar{z} \subset \overline{\omega \times (0, T_0)}$, que satisfaz*

$$\left\{ \begin{array}{ll} z_{\tau\tau} - z_{xx} - \kappa z_{\tau} = \bar{z} + \lambda_{\kappa} y e^{2\lambda_{\kappa} \psi} & \text{em } (0, 1) \times (0, T_0), \\ z_x(1) + az(1) = 0 & \text{em } (0, T_0) \end{array} \right.$$

e

$$\begin{aligned} & \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_{\kappa} \psi} (|z_x|^2 + |z_{\tau}|^2 + \lambda_{\kappa}^2 |z|^2) dx d\tau + \frac{1}{\lambda_{\kappa}^2} \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_{\kappa} \psi} |\bar{z}|^2 dx d\tau \\ & \leq C \lambda_{\kappa} |\kappa| \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{2\lambda_{\kappa} \psi} |y|^2 dx d\tau. \end{aligned} \quad (1.78)$$

Demonstração. Para uma melhor organização, dividiremos essa prova em etapas e prezaremos por apresentar os cálculos principais. A ideia que usaremos é inserir um

sistema auxiliar e dele extrair um subsistema para o qual possamos aplicar a desigualdade de Carleman conseguida no Teorema 1.7. As demais equações do sistema auxiliar contribuirão nos cálculos que faremos.

Etapa 1. Sejam $\theta \in (0, 1)$ e ζ uma função de classe $\mathcal{C}^2([0, 1])$ tal que $\zeta(x) \geq 1$ e

$$\zeta(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x \in \omega, \\ \frac{1}{\theta} & \text{para } \text{dist}(x, \omega) \geq \frac{-1}{\ln \theta}. \end{cases} \quad (1.79)$$

O lema a seguir garante a existência de um elemento $(\hat{z}, \hat{r}_1, \hat{r}_2, \hat{r})$ pertencente a $H^1(0, T_0; L^2(0, 1)) \times (H^1(0, T_0; L^2(0, 1)))^3$ que satisfaz

$$\begin{cases} P^*(z) = -(r_1)_\tau + r_2 + \lambda y e^{2\lambda\psi} + r & \text{em } (0, 1) \times (0, T_0), \\ z(0) = z_x(1) + az(1) = 0 & \text{em } (0, T_0), \\ z(0) = z(T_0) = 0 & \text{em } (0, 1). \end{cases} \quad (1.80)$$

Notemos que a solução desse problema de minimização depende do θ , no entanto, não deixaremos essa dependência explícita com o intuito de simplificar a notação. As variáveis r_1, r_2 e r também podem ser entendidas como controles.

Lema 1.11 *Para todo $y \in L^2(0, T_0; L^2(0, 1))$ com $y(0) = y(T_0) = 0$ em $(0, 1)$, existe $(\hat{z}, \hat{r}_1, \hat{r}_2, \hat{r}) \in H^1(0, T_0; H^1(0, 1)) \times (H^1(0, T_0; L^2(0, 1)))^3$ solução do problema (1.80). Além disso, essa solução satisfaz o sistema*

$$\begin{cases} p = \frac{r}{\theta} & \text{em } (0, 1) \times (0, T_0), & (1.81) \\ P^*(z) = -(r_1)_\tau + r_2 + \lambda y e^{2\lambda\psi} + r & \text{em } (0, 1) \times (0, T_0), & (1.82) \\ P(p) + e^{-2\lambda\psi} z = 0 & \text{em } (0, 1) \times (0, T_0), & (1.83) \\ -p_\tau + \zeta \frac{r_1}{\lambda^2} e^{-2\lambda\psi} = 0 & \text{em } (0, 1) \times (0, T_0), & (1.84) \\ p - \zeta \frac{r_2}{\lambda^4} e^{-2\lambda\psi} = 0 & \text{em } (0, 1) \times (0, T_0), & (1.85) \\ z(x, 0) = z(x, T_0) = 0 & \text{em } (0, 1), & (1.86) \\ p(x, 0) = p(x, T_0) = p_\tau(x, 0) = p_\tau(x, T_0) = 0 & \text{em } (0, 1), & (1.87) \\ z(0, \tau) = p(0, \tau) = 0 & \text{em } (0, T_0), & (1.88) \\ z_x(1, \tau) + az(1, \tau) = p_x(1, \tau) + ap(1, \tau) = 0 & \text{em } (0, T_0). & (1.89) \end{cases}$$

A prova do Lema 1.11 segue as ideias de [14] e, para efeito de completude, está feita no Apêndice B.

Etapa 2. Para κ e λ_κ adequados, o Teorema 1.8 nos garante a existência de $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} & \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{2\lambda_\kappa \psi} (\lambda_\kappa^3 |p|^2 + \lambda_\kappa |p_x|^2 + \lambda_\kappa |p_\tau|^2) dx d\tau \\ & \leq C \int_0^{T_0} \int_\omega e^{2\lambda_\kappa \psi} |P(p)|^2 dx d\tau + C|\kappa| \int_0^{T_0} \int_\omega e^{2\lambda_\kappa \psi} (\lambda_\kappa^3 |p|^2 + \lambda_\kappa |p_\tau|^2) dx d\tau. \end{aligned}$$

As informações contidas no sistema de optimalidade (1.81)-(1.89) e a limitação de ζ nos levam a

$$\begin{aligned} & \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{2\lambda_\kappa \psi} (\lambda_\kappa^3 |p|^2 + \lambda_\kappa |p_x|^2 + \lambda_\kappa |p_\tau|^2) dx d\tau \\ & \leq C \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} |z|^2 dx d\tau + C \frac{|\kappa|}{\lambda_\kappa^5} \int_0^{T_0} \int_\omega e^{-2\lambda_\kappa \psi} |r_2|^2 dx d\tau \\ & \quad + C \frac{|\kappa|}{\lambda_\kappa^3} \int_0^{T_0} \int_\omega e^{-2\lambda_\kappa \psi} |r_1|^2 dx d\tau, \end{aligned}$$

que, devido a $\lambda_\kappa \geq 1$, pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} & \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{2\lambda_\kappa \psi} (\lambda_\kappa^3 |p|^2 + \lambda_\kappa |p_x|^2 + \lambda_\kappa |p_\tau|^2) dx d\tau \\ & \leq C \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} |z|^2 dx d\tau + C|\kappa| \int_0^{T_0} \int_\omega e^{-2\lambda_\kappa \psi} \left(\frac{|r_1|^2}{\lambda_\kappa^2} + \frac{|r_2|^2}{\lambda_\kappa^4} \right) dx d\tau. \end{aligned} \tag{1.90}$$

Vamos trabalhar um pouco mais com o que sabemos sobre p . Multiplicando (1.82) por p e integrando em $(0, 1) \times (0, T_0)$ temos

$$\int_0^{T_0} \int_0^1 (z_{\tau\tau} - z_{xx} - \kappa z_\tau) p dx d\tau = \int_0^{T_0} \int_0^1 (-(r_1)_\tau + r_2 + \lambda_\kappa y e^{2\lambda_\kappa \psi} + r) p dx d\tau,$$

que é, por integração por partes e utilizando o sistema (1.81)-(1.89), equivalente a

$$\begin{aligned} & \int_0^{T_0} \int_0^1 z (p_{\tau\tau} - p_{xx} + \kappa p_\tau) dx d\tau \\ & = \int_0^{T_0} \int_0^1 \zeta \left(\frac{|r_1|^2}{\lambda_\kappa^2} + \frac{|r_2|^2}{\lambda_\kappa^4} \right) e^{-2\lambda_\kappa \psi} dx d\tau + \int_0^{T_0} \int_0^1 \lambda_\kappa p y e^{2\lambda_\kappa \psi} dx d\tau + \frac{1}{\theta} \int_0^{T_0} \int_0^1 |r|^2 dx d\tau. \end{aligned}$$

Podemos, então, utilizar (1.83) e reorganizar a igualdade acima para obter

$$\begin{aligned}
& - \int_0^{T_0} \int_0^1 \lambda_\kappa p y e^{2\lambda_\kappa \psi} dx d\tau \\
& = \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} |z|^2 dx d\tau + \int_0^{T_0} \int_0^1 \zeta \left(\frac{|r_1|^2}{\lambda_\kappa^2} + \frac{|r_2|^2}{\lambda_\kappa^4} \right) e^{-2\lambda_\kappa \psi} dx d\tau \\
& \quad + \frac{1}{\theta} \int_0^{T_0} \int_0^1 |r|^2 dx d\tau.
\end{aligned} \tag{1.91}$$

Auxiliados pela desigualdade de Young, $\zeta \geq 1$ e (1.90) temos

$$\begin{aligned}
& \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{2\lambda_\kappa \psi} |\lambda_\kappa y p| dx d\tau \\
& \leq C(\delta) \lambda_\kappa^{-1} \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{2\lambda_\kappa \psi} |y|^2 dx d\tau + \delta \int_0^{T_0} \int_0^1 \lambda_\kappa^3 e^{2\lambda_\kappa \psi} |p|^2 dx d\tau \\
& \leq C(\delta) \lambda_\kappa^{-1} \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{2\lambda_\kappa \psi} |y|^2 dx d\tau \\
& \quad + \delta C \left(\int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} |z|^2 dx d\tau + |\kappa| \int_0^{T_0} \int_\omega \zeta e^{-2\lambda_\kappa \psi} \left(\frac{|r_1|^2}{\lambda_\kappa^2} + \frac{|r_2|^2}{\lambda_\kappa^4} \right) dx d\tau \right),
\end{aligned}$$

com $\delta > 0$ a ser escolhido posteriormente.

Utilizando essa última desigualdade para estimar superiormente (1.91), chegamos a

$$\begin{aligned}
& \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} |z|^2 dx d\tau + \int_0^{T_0} \int_0^1 \zeta e^{-2\lambda_\kappa \psi} \left(\frac{|r_1|^2}{\lambda_\kappa^2} + \frac{|r_2|^2}{\lambda_\kappa^4} \right) dx d\tau + \frac{1}{\theta} \int_0^{T_0} \int_0^1 |r|^2 dx d\tau \\
& \leq C(\delta) \lambda_\kappa^{-1} \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{2\lambda_\kappa \psi} |y|^2 dx d\tau \\
& \quad + \delta C_0 \left(\int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} |z|^2 dx d\tau + |\kappa| \int_0^{T_0} \int_\omega \zeta e^{-2\lambda_\kappa \psi} \left(\frac{|r_1|^2}{\lambda_\kappa^2} + \frac{|r_2|^2}{\lambda_\kappa^4} \right) dx d\tau \right),
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
& C(\delta) \lambda_\kappa^{-1} \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{2\lambda_\kappa \psi} |y|^2 dx d\tau \\
& \geq (1 - \delta C_0 |\kappa|) \left(\int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} |z|^2 dx d\tau + \int_0^{T_0} \int_0^1 \zeta e^{-2\lambda_\kappa \psi} \left(\frac{|r_1|^2}{\lambda_\kappa^2} + \frac{|r_2|^2}{\lambda_\kappa^4} \right) dx d\tau \right) \\
& \quad + \frac{1}{\theta} \int_0^{T_0} \int_0^1 |r|^2 dx d\tau.
\end{aligned}$$

Tomando $\delta = 1/2C_0|\kappa|$ temos $C(\delta) = C_0|\kappa|/2$. Adequando a constante, encontramos

$$\frac{C}{\lambda_\kappa} |\kappa| \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{2\lambda_\kappa \psi} |y|^2 dx d\tau \tag{1.92}$$

$$\begin{aligned}
 &\geq \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} |z|^2 dx d\tau + \int_0^{T_0} \int_0^1 \zeta e^{-2\lambda_\kappa \psi} \left(\frac{|r_1|^2}{\lambda_\kappa^2} + \frac{|r_2|^2}{\lambda_\kappa^4} \right) dx d\tau \\
 &\quad + \frac{1}{\theta} \int_0^{T_0} \int_0^1 |r|^2 dx d\tau.
 \end{aligned}$$

Etapa 3. As informações disponíveis no sistema de optimalidade (1.81)-(1.89) são suficientes para que o seguinte sistema seja estabelecido

$$\left\{ \begin{array}{ll} p_{\tau\tau\tau} - p_{xx\tau} + \kappa p_{\tau\tau} + (e^{-2\lambda_\kappa \psi} z)_\tau = 0 & \text{em } (0, 1) \times (0, T_0), \\ -p_{\tau\tau} + \frac{\zeta}{\lambda_\kappa} \left(\frac{(r_1)_\tau}{\lambda_\kappa} - 2\psi_\tau r_1 \right) e^{-2\lambda_\kappa \psi} = 0 & \text{em } (0, 1) \times (0, T_0), \\ p_\tau - \frac{\zeta}{\lambda_\kappa^2} \left(\frac{(r_2)_\tau}{\lambda_\kappa^2} - \frac{2}{\lambda_\kappa} \psi_\tau r_2 \right) e^{-2\lambda_\kappa \psi} = 0 & \text{em } (0, 1) \times (0, T_0), \\ p_\tau(x, 0) = p_\tau(x, T_0) = p_{\tau\tau}(x, 0) = p_{\tau\tau}(x, T_0) = 0 & \text{em } (0, T_0), \\ p_\tau(0, \tau) = p_{x\tau}(1, \tau) + ap_\tau(1, \tau) = 0, & \text{em } (0, T_0). \end{array} \right. \quad (1.93)$$

Aplicando a Carleman (1.66) ao sistema (1.93), para κ e λ_κ adequados, encontramos

$$\begin{aligned}
 &\int_0^{T_0} \int_0^1 e^{2\lambda_\kappa \psi} (\lambda_\kappa^3 |p_\tau|^2 + \lambda_\kappa |p_{x\tau}|^2 + \lambda_\kappa |p_{\tau\tau}|^2) dx d\tau \\
 &\leq C \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{2\lambda_\kappa \psi} |P(p_\tau)|^2 dx d\tau + C|\kappa| \int_0^{T_0} \int_\omega e^{2\lambda_\kappa \psi} (\lambda_\kappa^3 |p_\tau|^2 + \lambda_\kappa |p_{\tau\tau}|^2) dx d\tau \\
 &\leq C \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} |z_\tau - 2\lambda_\kappa \psi_\tau z|^2 dx d\tau \\
 &\quad + C|\kappa| \int_0^{T_0} \int_\omega e^{-2\lambda_\kappa \psi} \frac{|\zeta|^2}{\lambda_\kappa} \left(\frac{|(r_2)_\tau|^2}{\lambda_\kappa^4} + \frac{4}{\lambda_\kappa^2} |\psi_\tau|^2 |r_2|^2 \right) dx d\tau \\
 &\quad + C|\kappa| \int_0^{T_0} \int_\omega e^{-2\lambda_\kappa \psi} \frac{|\zeta|^2}{\lambda_\kappa} \left(\frac{|(r_1)_\tau|^2}{\lambda_\kappa^2} + 4|\psi_\tau|^2 |r_1|^2 \right) dx d\tau.
 \end{aligned}$$

Usando o fato de $\lambda_\kappa \geq 1$ e a limitação de ζ, ψ_τ podemos manipular e reorganizar os termos para obter

$$\begin{aligned}
 &\int_0^{T_0} \int_0^1 e^{2\lambda_\kappa \psi} (\lambda_\kappa^3 |p_\tau|^2 + \lambda_\kappa |p_{x\tau}|^2 + \lambda_\kappa |p_{\tau\tau}|^2) dx d\tau \\
 &\leq C \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} (|z_\tau|^2 + \lambda_\kappa^2 |z|^2) dx d\tau \\
 &\quad + C|\kappa| \int_0^{T_0} \int_\omega e^{-2\lambda_\kappa \psi} \left(\frac{|(r_1)_\tau|^2}{\lambda_\kappa^2} + |r_1|^2 + \frac{|(r_2)_\tau|^2}{\lambda_\kappa^4} + \frac{|r_2|^2}{\lambda_\kappa^2} \right) dx d\tau.
 \end{aligned} \quad (1.94)$$

Multiplicando a equação em (1.82) por $p_{\tau\tau}$ e integrando sobre $(0, 1) \times (0, T_0)$ encontramos

$$\begin{aligned} & \int_0^{T_0} \int_0^1 [p_{\tau\tau} - p_{xx} + \kappa p_\tau]_{\tau\tau} z dx d\tau - \int_0^{T_0} z_x(1, \tau) p_{\tau\tau}(1, \tau) d\tau + \int_0^{T_0} z(1, \tau) p_{x\tau\tau}(1, \tau) d\tau \\ &= \int_0^{T_0} \int_0^1 (-(r_1)_\tau + r_2) p_{\tau\tau} dx d\tau + \int_0^{T_0} \int_0^1 \lambda_\kappa e^{2\lambda_\kappa \psi} y p_{\tau\tau} dx d\tau + \int_0^{T_0} \int_0^1 r p_{\tau\tau} dx d\tau. \end{aligned}$$

As condições de fronteira para z e p em $x = 1$ nos levam a

$$\begin{aligned} & - \int_0^{T_0} z_x(1, \tau) p_{\tau\tau}(1, \tau) d\tau + \int_0^{T_0} z(1, \tau) p_{x\tau\tau}(1, \tau) d\tau \\ &= a \int_0^{T_0} z(1, \tau) p_{\tau\tau}(1, \tau) d\tau - a \int_0^{T_0} z(1, \tau) p_{\tau\tau}(1, \tau) dt = 0. \end{aligned}$$

Com isso e de acordo com (1.83),

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{T_0} \int_0^1 z (e^{-2\lambda_\kappa \psi} z)_{\tau\tau} dx d\tau + \int_0^{T_0} \int_0^1 (-(r_1)_\tau + r_2) p_{\tau\tau} dx d\tau \\ &+ \int_0^{T_0} \int_0^1 \lambda_\kappa e^{2\lambda_\kappa \psi} y p_{\tau\tau} dx d\tau + \int_0^{T_0} \int_0^1 r p_{\tau\tau} dx d\tau. \end{aligned} \quad (1.95)$$

Vamos estudar as integrais em (1.95) individualmente. Primeiro observamos que

$$(e^{-2\lambda_\kappa \psi} z)_{\tau\tau} = e^{-2\lambda_\kappa \psi} (z_{\tau\tau} - 4\lambda_\kappa \psi_\tau z_\tau - 2\lambda_\kappa \psi_{\tau\tau} z + 4\lambda_\kappa^2 |\psi_\tau|^2 z)$$

e

$$\begin{aligned} & -4\lambda_\kappa \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} \psi_\tau z z_\tau dx d\tau \\ &= 2\lambda_\kappa \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} \psi_{\tau\tau} |z|^2 dx d\tau - 4\lambda_\kappa^2 \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} |\psi_\tau|^2 |z|^2 dx d\tau. \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} & \int_0^{T_0} \int_0^1 z (e^{-2\lambda_\kappa \psi} z)_{\tau\tau} dx d\tau \\ &= - \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} |z_\tau|^2 dx d\tau + \lambda_\kappa \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} \psi_\tau (|z|^2)_\tau d\tau dx \\ &+ 2\lambda_\kappa \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} \psi_{\tau\tau} |z|^2 dx d\tau - 4\lambda_\kappa^2 \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} |\psi_\tau|^2 |z|^2 dx d\tau \\ &- 2\lambda_\kappa \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} \psi_{\tau\tau} |z|^2 dx d\tau + 4\lambda_\kappa^2 \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} |\psi_\tau|^2 |z|^2 dx d\tau \\ &= - \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} |z_\tau|^2 dx d\tau - \lambda_\kappa \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} \psi_{\tau\tau} |z|^2 dx d\tau \\ &+ 2\lambda_\kappa^2 \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} |\psi_\tau|^2 |z|^2 d\tau dx. \end{aligned} \quad (1.96)$$

O sistema (1.93) nos possibilita encontrar

$$\begin{aligned} & \int_0^{T_0} \int_0^1 (-(r_1)_\tau + r_2) p_{\tau\tau} dx d\tau \\ &= - \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} \zeta \left(\frac{|(r_1)_\tau|^2}{\lambda_\kappa^2} + \frac{|(r_2)_\tau|^2}{\lambda_\kappa^4} - \frac{2}{\lambda_\kappa} \psi_\tau r_1 (r_1)_\tau - \frac{2}{\lambda_\kappa^3} \psi_\tau r_2 (r_2)_\tau \right) dx d\tau. \end{aligned} \quad (1.97)$$

Além disso, com (1.81) obtemos

$$\int_0^{T_0} \int_0^1 r p_{\tau\tau} dx d\tau = -\frac{1}{\theta} \int_0^{T_0} \int_0^1 |r_\tau|^2 dx d\tau. \quad (1.98)$$

Em posse dessas igualdades, substituímos (1.96) - (1.98) em (1.95) e reorganizamos:

$$\begin{aligned} & \lambda_\kappa \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{2\lambda_\kappa \psi} y p_{\tau\tau} dx d\tau \\ &= \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} |z_\tau|^2 dx d\tau + \lambda_\kappa \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} \psi_{\tau\tau} |z|^2 dx d\tau \\ & \quad - 2\lambda_\kappa^2 \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} |\psi_\tau|^2 |z|^2 dx d\tau + \frac{1}{\theta} \int_0^{T_0} \int_0^1 |r_\tau|^2 dx d\tau \\ & \quad + \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} \zeta \left(\frac{|(r_1)_\tau|^2}{\lambda_\kappa^2} + \frac{|(r_2)_\tau|^2}{\lambda_\kappa^4} - \frac{2}{\lambda_\kappa} \psi_\tau r_1 (r_1)_\tau - \frac{2}{\lambda_\kappa^3} \psi_\tau r_2 (r_2)_\tau \right) dx d\tau. \end{aligned} \quad (1.99)$$

Etapa 4. Iniciamos multiplicando (1.92) por $C\lambda_\kappa^2$ para conseguir

$$\begin{aligned} & C\lambda_\kappa^2 \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} |z|^2 dx d\tau + C \int_0^{T_0} \int_0^1 \zeta e^{-2\lambda_\kappa \psi} \left(|r_1|^2 + \frac{|r_2|^2}{\lambda_\kappa^2} \right) dx d\tau \\ & \leq C^2 \lambda_\kappa |\kappa| \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{2\lambda_\kappa \psi} |y|^2 dx d\tau. \end{aligned} \quad (1.100)$$

Utilizamos que a integral que envolve $|r_\tau|^2$ em (1.99) é não negativa e rearranjamos os termos restantes da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} |z_\tau|^2 dx d\tau + \int_0^{T_0} \int_0^1 \zeta e^{-2\lambda_\kappa \psi} \left(\frac{|(r_1)_\tau|^2}{\lambda_\kappa^2} + \frac{|(r_2)_\tau|^2}{\lambda_\kappa^4} \right) dx d\tau \\ & \leq \int_0^{T_0} \int_0^1 \lambda_\kappa e^{2\lambda_\kappa \psi} y p_{\tau\tau} dx d\tau - \lambda_\kappa \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} \psi_{\tau\tau} |z|^2 dx d\tau \\ & \quad + 2\lambda_\kappa^2 \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} |\psi_\tau|^2 |z|^2 dx d\tau \\ & \quad + \int_0^{T_0} \int_0^1 \zeta e^{-2\lambda_\kappa \psi} \left(\frac{2}{\lambda_\kappa} \psi_\tau r_1 (r_1)_\tau + \frac{2}{\lambda_\kappa^3} \psi_\tau r_2 (r_2)_\tau \right) dx d\tau. \end{aligned}$$

Somando as duas desigualdades obtidas encontramos

$$\begin{aligned}
& C\lambda_\kappa^2 \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa\psi} |z|^2 dx d\tau + \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa\psi} |z_\tau|^2 dx d\tau \\
& + C \int_0^{T_0} \int_0^1 \zeta e^{-2\lambda_\kappa\psi} \left(|r_1|^2 + \frac{|r_2|^2}{\lambda_\kappa^2} \right) dx d\tau \\
& + \int_0^{T_0} \int_0^1 \zeta e^{-2\lambda_\kappa\psi} \left(\frac{|(r_1)_\tau|^2}{\lambda_\kappa^2} + \frac{|(r_2)_\tau|^2}{\lambda_\kappa^4} \right) dx d\tau \\
& \leq C^2 \lambda_\kappa |\kappa| \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{2\lambda_\kappa\psi} |y|^2 dx d\tau + \lambda_\kappa \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{2\lambda_\kappa\psi} y p_{\tau\tau} dx d\tau \\
& - \lambda_\kappa \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa\psi} \psi_{\tau\tau} |z|^2 dx d\tau + 2\lambda_\kappa^2 \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa\psi} |\psi_\tau|^2 |z|^2 d\tau dx \\
& + \int_0^{T_0} \int_0^1 \zeta e^{-2\lambda_\kappa\psi} \left(\frac{2}{\lambda_\kappa} \psi_\tau r_1 (r_1)_\tau + \frac{2}{\lambda_\kappa^3} \psi_\tau r_2 (r_2)_\tau \right) dx d\tau.
\end{aligned} \tag{1.101}$$

Fazendo uso da desigualdade de Young e da regularidade de ψ , obtemos

$$\begin{aligned}
& \int_0^{T_0} \int_0^1 \zeta e^{-2\lambda_\kappa\psi} \left(\frac{2}{\lambda_\kappa} \psi_\tau r_1 (r_1)_\tau + \frac{2}{\lambda_\kappa^3} \psi_\tau r_2 (r_2)_\tau \right) dx d\tau \\
& \leq C_1 C(\delta_1) \int_0^{T_0} \int_0^1 \zeta e^{-2\lambda_\kappa\psi} \left(|r_1|^2 + \frac{|r_2|^2}{\lambda_\kappa^2} \right) dx d\tau \\
& + C_1 \delta_1 \int_0^{T_0} \int_0^1 \zeta e^{-2\lambda_\kappa\psi} \left(\frac{|(r_1)_\tau|^2}{\lambda_\kappa^2} + \frac{|(r_2)_\tau|^2}{\lambda_\kappa^4} \right) dx d\tau,
\end{aligned}$$

além de

$$\lambda_\kappa \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{2\lambda_\kappa\psi} y p_{\tau\tau} dx d\tau \leq \lambda_\kappa C(\delta_2) \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa\psi} |y|^2 dx d\tau + \lambda_\kappa \delta_2 \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{2\lambda_\kappa\psi} |p_{\tau\tau}|^2 dx d\tau.$$

Utilizando essas estimativas em (1.101), chegamos a

$$\begin{aligned}
& C\lambda_\kappa^2 \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa\psi} |z|^2 dx d\tau + \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa\psi} |z_\tau|^2 dx d\tau \\
& + C \int_0^{T_0} \int_0^1 \zeta e^{-2\lambda_\kappa\psi} \left(|r_1|^2 + \frac{|r_2|^2}{\lambda_\kappa^2} \right) dx d\tau \\
& + \int_0^{T_0} \int_0^1 \zeta e^{-2\lambda_\kappa\psi} \left(\frac{|(r_1)_\tau|^2}{\lambda_\kappa^2} + \frac{|(r_2)_\tau|^2}{\lambda_\kappa^4} \right) dx d\tau \\
& \leq C^2 \lambda_\kappa |\kappa| \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{2\lambda_\kappa\psi} |y|^2 dx d\tau + \lambda_\kappa C(\delta_2) \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{2\lambda_\kappa\psi} |y|^2 dx d\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\lambda_\kappa \delta_2 \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{2\lambda_\kappa \psi} |p_{\tau\tau}|^2 dx d\tau - \lambda_\kappa \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} |\psi_{\tau\tau}|^2 dx d\tau \\
& + 2\lambda_\kappa^2 \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} |\psi_\tau|^2 |z|^2 dx d\tau + C_1 C(\delta_1) \int_0^{T_0} \int_0^1 \zeta e^{-2\lambda_\kappa \psi} \left(|r_1|^2 + \frac{|r_2|^2}{\lambda_\kappa^2} \right) dx d\tau \\
& + C_1 \delta_1 \int_0^{T_0} \int_0^1 \zeta e^{-2\lambda_\kappa \psi} \left(\frac{|(r_1)_\tau|^2}{\lambda_\kappa^2} + \frac{|(r_2)_\tau|^2}{\lambda_\kappa^4} \right) dx d\tau.
\end{aligned}$$

Sendo assim, por (1.94),

$$\begin{aligned}
& C\lambda_\kappa^2 \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} |z|^2 dx d\tau + \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} |z_\tau|^2 dx d\tau \\
& + C \int_0^{T_0} \int_0^1 \zeta e^{-2\lambda_\kappa \psi} \left(|r_1|^2 + \frac{|r_2|^2}{\lambda_\kappa^2} \right) dx d\tau \\
& + \int_0^{T_0} \int_0^1 \zeta e^{-2\lambda_\kappa \psi} \left(\frac{|(r_1)_\tau|^2}{\lambda_\kappa^2} + \frac{|(r_2)_\tau|^2}{\lambda_\kappa^4} \right) dx d\tau \\
& \leq \lambda_\kappa (C^2 |\kappa| + C(\delta_2)) \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{2\lambda_\kappa \psi} |y|^2 dx d\tau + C_2 \delta_2 \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} |z_\tau|^2 dx d\tau \\
& + (C_2 \delta_2 + C_3) \lambda_\kappa^2 \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} |z|^2 dx d\tau \\
& + (C_2 |\kappa| \delta_2 + C_1 C(\delta_1)) \int_0^{T_0} \int_0^1 \zeta e^{-2\lambda_\kappa \psi} \left(|r_1|^2 + \frac{|r_2|^2}{\lambda_\kappa^2} \right) dx d\tau \\
& + (C_2 |\kappa| \delta_2 + C_1 \delta_1) \int_0^{T_0} \int_0^1 \zeta e^{-2\lambda_\kappa \psi} \left(\frac{|(r_1)_\tau|^2}{\lambda_\kappa^2} + \frac{|(r_2)_\tau|^2}{\lambda_\kappa^4} \right) dx d\tau.
\end{aligned}$$

Aqui escolhemos $\delta_1 = 1/4C_1$ e $\delta_2 = 1/8C_2|\kappa|$, o que implica em $C(\delta_1) = C_1$ e $C(\delta_2) = 2C_2|\kappa|$. Logo, tendo em mente que $1/|\kappa| \leq 1$,

$$\begin{aligned}
& C\lambda_\kappa^2 \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} |z|^2 dx d\tau + \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} |z_\tau|^2 dx d\tau \\
& + C \int_0^{T_0} \int_0^1 \zeta e^{-2\lambda_\kappa \psi} \left(|r_1|^2 + \frac{|r_2|^2}{\lambda_\kappa^2} \right) dx d\tau \\
& + \int_0^{T_0} \int_0^1 \zeta e^{-2\lambda_\kappa \psi} \left(\frac{|(r_1)_\tau|^2}{\lambda_\kappa^2} + \frac{|(r_2)_\tau|^2}{\lambda_\kappa^4} \right) dx d\tau \\
& \leq \lambda_\kappa (C^2 + 2C_2) |\kappa| \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{2\lambda_\kappa \psi} |y|^2 dx d\tau + \frac{1}{8} \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} |z_\tau|^2 dx d\tau \\
& + \left(\frac{1}{8} + C_3 \right) \lambda_\kappa^2 \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} |z|^2 dx d\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{1}{8} + C_1^2 \right) \int_0^{T_0} \int_0^1 \zeta e^{-2\lambda_\kappa \psi} \left(|r_1|^2 + \frac{|r_2|^2}{\lambda_\kappa^2} \right) dx d\tau \\
& + \frac{3}{8} \int_0^{T_0} \int_0^1 \zeta e^{-2\lambda_\kappa \psi} \left(\frac{|(r_1)_\tau|^2}{\lambda_\kappa^2} + \frac{|(r_2)_\tau|^2}{\lambda_\kappa^4} \right) dx d\tau.
\end{aligned}$$

Tomando C suficientemente grande temos

$$\frac{5}{8} < C - \frac{1}{8} - C_3, \quad \frac{5}{8} < C - \frac{1}{8} - C_1^2.$$

Renomeando as constantes chegamos a

$$\begin{aligned}
& \lambda_\kappa^2 \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} |z|^2 dx d\tau + \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} |z_\tau|^2 dx d\tau \\
& + \int_0^{T_0} \int_0^1 \zeta e^{-2\lambda_\kappa \psi} \left(|r_1|^2 + \frac{|r_2|^2}{\lambda_\kappa^2} \right) dx d\tau \\
& + \int_0^{T_0} \int_0^1 \zeta e^{-2\lambda_\kappa \psi} \left(\frac{|(r_1)_\tau|^2}{\lambda_\kappa^2} + \frac{|(r_2)_\tau|^2}{\lambda_\kappa^4} \right) dx d\tau \\
& \leq C \lambda_\kappa |\kappa| \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{2\lambda_\kappa \psi} |y|^2 dx d\tau.
\end{aligned} \tag{1.102}$$

Etapa 5. Partindo de (1.82) e usando o sistema (1.81) - (1.89) estabelecemos

$$\begin{aligned}
& \left(-(r_1)_\tau + r_2 + \lambda_\kappa y e^{2\lambda_\kappa \psi} + r, z e^{-2\lambda_\kappa \psi} \right)_{L^2(0, T_0; L^2(0, 1))} \\
& = \left(z_{\tau\tau} - z_{xx} - \kappa z_\tau, z e^{-2\lambda_\kappa \psi} \right)_{L^2(0, T_0; L^2(0, 1))} \\
& = - \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} |z_\tau|^2 dx d\tau - \lambda_\kappa \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} |z|^2 (\psi_{\tau\tau} - 2\lambda_\kappa |\psi_\tau|^2) dx d\tau \\
& + a \int_0^{T_0} e^{-2\lambda_\kappa \psi} |z(1, \tau)|^2 d\tau + \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} |z_x|^2 dx d\tau \\
& - 2\lambda_\kappa \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} \psi_x z_x z dx d\tau - \kappa \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} z_\tau z dx d\tau.
\end{aligned} \tag{1.103}$$

Dessa igualdade, da regularidade de ψ e da desigualdade de Young, segue que

$$\begin{aligned}
& a \int_0^{T_0} e^{-2\lambda_\kappa \psi} |z(1, \tau)|^2 d\tau + \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} |z_x|^2 dx d\tau \\
& \leq \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} |-(r_1)_\tau + r_2 + r| |z| dx d\tau + \lambda_\kappa \int_0^{T_0} \int_0^1 |y| |z| dx d\tau \\
& + \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} |z_\tau|^2 dx d\tau + C_1 \lambda_\kappa^2 \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} |z|^2 dx d\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + C_2 \delta_1 \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} |z_x|^2 dx d\tau + C_2 C(\delta_1) \lambda_\kappa^2 \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} |z|^2 dx d\tau \\
 & + \frac{\kappa^2}{2\lambda_\kappa^2} \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} |z_\tau|^2 dx d\tau + \frac{\lambda_\kappa^2}{2} \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} |z|^2 dx d\tau.
 \end{aligned}$$

Então, escolhemos $\delta_1 = 1/2C_2$, o que implica em $C(\delta_1) = C_2/2$, e vemos que

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} |z_x|^2 dx d\tau \\
 & \leq 2 \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} |-(r_1)_\tau + r_2 + r||z| dx d\tau + 2\lambda_\kappa \int_0^{T_0} \int_0^1 |y||z| dx d\tau \\
 & + \left(2 + \frac{\kappa^2}{\lambda_\kappa^2}\right) \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} |z_\tau|^2 dx d\tau + C\lambda_\kappa^2 \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} |z|^2 dx d\tau.
 \end{aligned} \tag{1.104}$$

Observemos que fazendo algumas manipulações temos

$$|-(r_1)_\tau + r_2 + r||z| \leq \frac{|(r_1)_\tau|^2}{\lambda_\kappa^2} + \frac{|r_2|^2}{\lambda_\kappa^2} + |r|^2 + 2\lambda_\kappa^2 |z|^2$$

e

$$\lambda_\kappa |y||z| \leq e^{2\lambda_\kappa \psi} |y|^2 + \lambda_\kappa^2 e^{-2\lambda_\kappa \psi} |z|^2.$$

Com essas informações, (1.104) fornece

$$\begin{aligned}
 \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} |z_x|^2 dx d\tau & \leq 2 \int_0^{T_0} \int_0^1 \zeta e^{-2\lambda_\kappa \psi} \left(\frac{|(r_1)_\tau|^2}{\lambda_\kappa^2} + \frac{|r_2|^2}{\lambda_\kappa^2} + |r|^2 \right) dx d\tau \\
 & + C \int_0^{T_0} \int_0^1 (e^{2\lambda_\kappa \psi} |y|^2 + \lambda_\kappa^2 e^{-2\lambda_\kappa \psi} |z|^2) dx d\tau \\
 & + \left(2 + \frac{\kappa^2}{\lambda_\kappa^2}\right) \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} |z_\tau|^2 dx d\tau.
 \end{aligned} \tag{1.105}$$

Consideremos $C_0 > 3$ suficientemente grande em (1.92), (1.102) e (1.105). Reescrevemos (1.92) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 & C_0 \lambda_\kappa^2 \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} |z|^2 dx d\tau + C_0 \int_0^{T_0} \int_0^1 \zeta e^{-2\lambda_\kappa \psi} |r_1|^2 dx d\tau \\
 & + C_0 \int_0^{T_0} \int_0^1 \zeta e^{-2\lambda_\kappa \psi} \frac{|r_2|^2}{\lambda_\kappa^2} dx d\tau + \frac{C_0 \lambda_\kappa^2}{\theta} \int_0^{T_0} \int_0^1 |r|^2 dx d\tau \\
 & \leq C_0^2 \lambda_\kappa |\kappa| \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{2\lambda_\kappa \psi} |y|^2 dx d\tau
 \end{aligned} \tag{1.106}$$

A desigualdade (1.102) é reorganizada, tornando-se

$$\begin{aligned}
 & C_0 \lambda_\kappa^2 \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} |z|^2 dx d\tau + C_0 \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} |z_\tau|^2 dx d\tau \\
 & + C_0 \int_0^{T_0} \int_0^1 \zeta e^{-2\lambda_\kappa \psi} |r_1|^2 dx d\tau + C_0 \int_0^{T_0} \int_0^1 \zeta e^{-2\lambda_\kappa \psi} \frac{|r_2|^2}{\lambda_\kappa^2} dx d\tau
 \end{aligned} \tag{1.107}$$

$$\begin{aligned}
& + C_0 \int_0^{T_0} \int_0^1 \zeta e^{-2\lambda_\kappa \psi} \frac{|(r_1)_\tau|^2}{\lambda_\kappa^2} dx d\tau + C_0 \int_0^{T_0} \int_0^1 \zeta e^{-2\lambda_\kappa \psi} \frac{|(r_2)_\tau|^2}{\lambda_\kappa^4} dx d\tau \\
& \leq C_0^2 \lambda_\kappa |\kappa| \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{2\lambda_\kappa \psi} |y|^2 dx d\tau,
\end{aligned}$$

e (1.105) gera

$$\begin{aligned}
& \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} |z_x|^2 dx d\tau - \left(2 + \frac{|\kappa|^2}{\lambda_\kappa^2}\right) \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} |z_\tau|^2 dx d\tau \\
& - C_0 \lambda_\kappa^2 \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} |z|^2 dx d\tau - 2 \int_0^{T_0} \int_0^1 \zeta e^{-2\lambda_\kappa \psi} \frac{|(r_1)_\tau|^2}{\lambda_\kappa^2} dx d\tau \\
& - 2 \int_0^{T_0} \int_0^1 \zeta e^{-2\lambda_\kappa \psi} \frac{|r_2|^2}{\lambda_\kappa^2} dx d\tau - 2 \lambda_\kappa^2 \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} |r|^2 dx d\tau \\
& \leq C_0 \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{2\lambda_\kappa \psi} |y|^2 dx d\tau.
\end{aligned} \tag{1.108}$$

Dessa forma, somando (1.106) - (1.108), encontramos

$$\begin{aligned}
& \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} |z_x|^2 dx d\tau + \left(C_0 - 2 - \frac{|\kappa|^2}{\lambda_\kappa^2}\right) \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} |z_\tau|^2 dx d\tau \\
& + C_0 \lambda_\kappa^2 \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} |z|^2 dx d\tau + (C_0 - 2) \int_0^{T_0} \int_0^1 \zeta e^{-2\lambda_\kappa \psi} \frac{|(r_1)_\tau|^2}{\lambda_\kappa^2} dx d\tau \\
& + C_0 \int_0^{T_0} \int_0^1 \zeta e^{-2\lambda_\kappa \psi} \frac{|(r_2)_\tau|^2}{\lambda_\kappa^4} dx d\tau + 2C_0 \int_0^{T_0} \int_0^1 \zeta e^{-2\lambda_\kappa \psi} |r_1|^2 dx d\tau \\
& + 2(C_0 - 1) \int_0^{T_0} \int_0^1 \zeta e^{-2\lambda_\kappa \psi} \frac{|r_2|^2}{\lambda_\kappa^2} dx d\tau + \left(\frac{C_0}{\theta} - 2\right) \lambda_\kappa^2 \int_0^{T_0} \int_0^1 |r|^2 dx d\tau \\
& \leq 3C_0^2 \lambda_\kappa |\kappa| \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{2\lambda_\kappa \psi} |y|^2 dx d\tau.
\end{aligned}$$

Tomando $\lambda_\kappa \geq \max \left\{ \lambda_0 |\kappa|, \sqrt{(C_0 - 5/2)^{-1}} |\kappa| \right\}$ e renomeando as constantes, chegamos a

$$\begin{aligned}
& C \lambda_\kappa |\kappa| \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{2\lambda_\kappa \psi} |y|^2 dx d\tau \\
& \geq \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} |z_x|^2 dx d\tau + \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} |z_\tau|^2 dx d\tau \\
& + \lambda_\kappa^2 \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} |z|^2 dx d\tau + \int_0^{T_0} \int_0^1 \zeta e^{-2\lambda_\kappa \psi} \left(\frac{|(r_1)_\tau|^2}{\lambda_\kappa^2} + \frac{|(r_2)_\tau|^2}{\lambda_\kappa^4} \right) dx d\tau \\
& + \int_0^{T_0} \int_0^1 \zeta e^{-2\lambda_\kappa \psi} \left(|r_1|^2 + \frac{|r_2|^2}{\lambda_\kappa^2} \right) dx d\tau.
\end{aligned} \tag{1.109}$$

Etapa 6. Relembramos agora que (z, r_1, r_2, r) depende de θ . Em (1.92) e (1.109) fixamos $|\kappa| = \kappa_0$ e um $\lambda_\kappa = \lambda_{\kappa_0}$ que satisfaz $\lambda_{\kappa_0} > \max \left\{ \lambda_0 |\kappa_0|, \sqrt{(C_0 - 5/2)^{-1}} |\kappa_0| \right\}$. Veja que por ψ ser limitada, existe $C_1 > 0$ tal que $e^{-2\lambda_{\kappa_0} C_1} \leq e^{-2\lambda_{\kappa_0} \psi} \Leftrightarrow e^{2\lambda_{\kappa_0} \psi} \leq e^{2\lambda_{\kappa_0} C_1}$. Isso nos permite afirmar, com o auxílio de (1.92) e (1.109), que

$$\begin{aligned} \int_0^{T_0} \int_0^1 |z|^2 dx d\tau &\leq \frac{C}{\lambda_{\kappa_0}} |\kappa_0| e^{4\lambda_{\kappa_0} C_1} \int_0^{T_0} \int_0^1 |y|^2 dx d\tau, \\ \int_0^{T_0} \int_0^1 |z_x|^2 dx d\tau + \int_0^{T_0} \int_0^1 |z_\tau|^2 dx d\tau &\leq C \lambda_{\kappa_0} |\kappa_0| e^{4\lambda_{\kappa_0} C_1} \int_0^{T_0} \int_0^1 |y|^2 dx d\tau, \\ \int_0^{T_0} \int_0^1 \left(|r_1|^2 + \frac{|r_2|^2}{\lambda_{\kappa_0}^2} \right) dx d\tau &\leq C \lambda_{\kappa_0} |\kappa_0| e^{4\lambda_{\kappa_0} C_1} \int_0^{T_0} \int_0^1 |y|^2 dx d\tau, \\ \int_0^{T_0} \int_0^1 \left(\frac{|(r_1)_\tau|^2}{\lambda_{\kappa_0}^2} + \frac{|(r_2)_\tau|^2}{\lambda_{\kappa_0}^4} \right) dx d\tau &\leq C \lambda_{\kappa_0} |\kappa_0| e^{4\lambda_{\kappa_0} C_1} \int_0^{T_0} \int_0^1 |y|^2 dx d\tau \end{aligned}$$

e

$$\int_0^{T_0} \int_0^1 |r|^2 dx d\tau \leq \frac{C\theta}{\lambda_{\kappa_0}} |\kappa_0| e^{2\lambda_{\kappa_0} C_1} \int_0^{T_0} \int_0^1 |y|^2 dx d\tau.$$

Isso nos diz que $(z_\theta, (r_1)_\theta, (r_2)_\theta, r_\theta)$ é limitada em $H_0^1(0, T_0; V(0, 1)) \times [H^1(0, T_0; L^2(0, 1))]^2 \times L^2(0, T_0; L^2(0, 1))$. Em particular, quando $\theta \rightarrow 0$, a desigualdade acima implica que a subsequência (r_θ) tende a zero. Da reflexividade do espaço, existe uma subsequência de $(z_\theta, (r_1)_\theta, (r_2)_\theta, r_\theta)$ que converge fraco para algum $(z, r_1, r_2, 0)$ em $H_0^1(0, T_0; V(0, 1)) \times [H^1(0, T_0; L^2(0, 1))]^2 \times L^2(0, T_0; L^2(0, 1))$. Com essa convergência e o sistema de optimalidade (1.81)-(1.89) temos que o seguinte sistema é satisfeito:

$$\begin{cases} z_{\tau\tau} - z_{xx} - \kappa z_\tau = -(r_1)_\tau + r_2 + \lambda_\kappa y e^{2\lambda_\kappa \psi} & \text{em } (0, 1) \times (0, T_0), \\ z(0) = 0 & \text{em } (0, T_0), \\ z_x(1) + a z(1) = 0 & \text{em } (0, T_0), \\ z(0) = z(T_0) = 0 & \text{em } (0, 1). \end{cases} \quad (1.110)$$

Seja $x_0 \notin \omega$. Digamos $0 < x_0 < l_1$. Então, existe $\delta > 0$ tal que $I_{x_0} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (0, l_1)$. Como $-1/\ln \theta$ tende a zero quando $\theta \rightarrow 0$, existe $\theta_0 > 0$ suficientemente pequeno tal que $\text{dist}(x_0 + \delta, \omega) \geq -1/\ln \theta_0 > -1/\ln \theta$, sempre que $0 < \theta < \theta_0$. Assim, tomamos $\zeta(x) = 1/\theta$ em I_{x_0} . Lembremos que

$$\int_0^{T_0} \int_0^1 \zeta \left(\frac{|(r_1)_\theta|^2}{\lambda_{\kappa_0}^2} + \frac{|(r_2)_\theta|^2}{\lambda_{\kappa_0}^4} \right) dx d\tau$$

$$= \int_0^{T_0} \int_{[0,1] \setminus \bar{\omega}} \zeta \left(\frac{|(r_1)_\theta|^2}{\lambda_{\kappa_0}^2} + \frac{|(r_2)_\theta|^2}{\lambda_{\kappa_0}^4} \right) dx d\tau + \int_0^{T_0} \int_{\omega} \zeta \left(\frac{|(r_1)_\theta|^2}{\lambda_{\kappa_0}^2} + \frac{|(r_2)_\theta|^2}{\lambda_{\kappa_0}^4} \right) dx d\tau,$$

o que por (1.92) implica em

$$\int_0^{T_0} \int_{[0,1] \setminus \bar{\omega}} \zeta \left(\frac{|(r_1)_\theta|^2}{\lambda_{\kappa_0}^2} + \frac{|(r_2)_\theta|^2}{\lambda_{\kappa_0}^4} \right) dx d\tau \leq \frac{C}{\lambda_{\kappa_0}} |\kappa_0| e^{4\lambda_{\kappa_0} C_1} \int_0^{T_0} \int_0^1 |y|^2 dx d\tau.$$

Em particular,

$$\frac{1}{\theta} \int_0^{T_0} \int_{I_{x_0}} \left(\frac{|(r_1)_\theta|^2}{\lambda_{\kappa_0}^2} + \frac{|(r_2)_\theta|^2}{\lambda_{\kappa_0}^4} \right) dx d\tau \leq \frac{C}{\lambda_{\kappa_0}} |\kappa_0| e^{4\lambda_{\kappa_0} C_1} \int_0^{T_0} \int_0^1 |y|^2 dx d\tau.$$

O lado direito da desigualdade ser limitado e $1/\theta \rightarrow \infty$ quando $\theta \rightarrow 0^+$ nos dizem que

$$\int_0^{T_0} \int_{I_{x_0}} \left(\frac{|(r_1)_\theta|^2}{\lambda_{\kappa_0}^2} + \frac{|(r_2)_\theta|^2}{\lambda_{\kappa_0}^4} \right) dx d\tau = 0.$$

Portanto, $r_1 = r_2 = 0$ em I_{x_0} . Uma vez que construção análoga pode ser feita para todo $x \notin \bar{\omega}$, concluímos que $\text{supp}(r_1) \cup \text{supp}(r_2) \subset \overline{\omega \times (0, T_0)}$.

Por fim, definimos $\bar{z} = -(r_1)_\tau + r_2$. Notemos que

$$|\bar{z}|^2 = |-(r_1)_\tau + r_2|^2 \leq 2|(r_1)_\tau|^2 + 2|r_2|^2.$$

Disso, de (1.109) e de $\zeta \geq 1$ vem que

$$\begin{aligned} & C\lambda_\kappa |\kappa| \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{2\lambda_\kappa \psi} |y|^2 dx d\tau \\ & \geq \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} (|z_x|^2 + |z_\tau|^2 + \lambda_\kappa^2 |z|^2) dx d\tau + \frac{1}{\lambda_\kappa^2} \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} (|(r_1)_\tau|^2 + |r_2|^2) dx d\tau \\ & \geq \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} (|z_x|^2 + |z_\tau|^2 + \lambda_\kappa^2 |z|^2) dx d\tau + \frac{1}{2\lambda_\kappa^2} \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} |\bar{z}|^2 dx d\tau. \end{aligned}$$

Dessa forma, encerramos a demonstração. ■

1.3.4 Desigualdade de Carleman

Finalmente, provaremos a desigualdade de Carleman que utilizaremos para conseguir a desigualdade de observabilidade.

Teorema 1.12 *Seja ψ a função definida em (1.36), $y \in \mathcal{C}([0, T_0]; L^2(0, 1))$ solução fraca de (1.77) e $P(y) \in L^2(0, T_0; L^2(0, 1))$. Existem $\kappa_0, \lambda_0, C \in \mathbb{R}^+$ tais que, para todo $\kappa \in \mathbb{R}$ com $|\kappa| \geq \kappa_0 \geq 1, \lambda_\kappa \geq \lambda_0 |\kappa| \geq 1$, é válido que*

$$\begin{aligned}
& \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{2\lambda_\kappa \psi} |y|^2 dx d\tau \\
& \leq C|\kappa|^2 \|e^{\lambda_\kappa \psi} P(y)\|_{L^2(0, T_0; V'(0,1))}^2 + C|\kappa|^2 \lambda_\kappa^2 \int_0^{T_0} \int_\omega e^{2\lambda_\kappa \psi} |y|^2 dx d\tau.
\end{aligned} \tag{1.111}$$

Demonstração. Seja $y \in \mathcal{C}([0, T_0]; L^2(0, 1))$ solução fraca de (1.77). Consideremos z, κ_0 e λ_0 dados pela Proposição 1.10. Da regularidade de y, ψ e $\bar{z}$ temos $P^*(z) \in L^2(0, T_0; L^2(0, 1))$. Sendo assim, da definição de solução fraca, vem que

$$(y, \bar{z} + \lambda_\kappa y e^{2\lambda_\kappa \psi})_{L^2(0, T_0; L^2(0,1))} = \langle P(y), z \rangle_{L^2(0, T_0; V'(0,1)), L^2(0, T_0; V(0,1))}.$$

Tendo em mente que $\text{supp } \bar{z} \subset \overline{\omega \times (0, T_0)}$, a igualdade acima fornece

$$\begin{aligned}
& \lambda_\kappa \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{2\lambda_\kappa \psi} |y|^2 dx d\tau \\
& \leq \left| \langle P(y), z \rangle_{L^2(0, T_0; V'(0,1)), L^2(0, T_0; V(0,1))} \right| + \left| \int_0^{T_0} \int_\omega y \bar{z} dx d\tau \right|.
\end{aligned} \tag{1.112}$$

Sabemos que $P(y) \in L^2(0, T_0; L^2(0, 1))$ e $z \in L^2(0, T_0; V(0, 1))$. Logo, como $e^{\pm \lambda_\kappa \psi} \in C^\infty((0, 1) \times (0, T_0))$, temos $e^{\lambda_\kappa \psi} P(y) \in L^2(0, T_0; L^2(0, 1)) \subset L^2(0, T_0; V'(0, 1))$ e $e^{-\lambda_\kappa \psi} z \in L^2(0, T, V(0, 1))$. Pelo Teorema da Representação de Riesz-Fréchet, podemos dizer que

$$\begin{aligned}
\langle e^{\lambda_\kappa \psi} P(y), e^{-\lambda_\kappa \psi} z \rangle_{L^2(0, T_0; V'(0,1)), L^2(0, T_0; V(0,1))} &= (e^{\lambda_\kappa \psi} P(y), e^{-\lambda_\kappa \psi} z)_{L^2(0, T_0; L^2(0,1))} \\
&= (P(y), z)_{L^2(0, T_0; L^2(0,1))}
\end{aligned}$$

e

$$\langle P(y), z \rangle_{L^2(0, T_0; V'(0,1)), L^2(0, T_0; V(0,1))} = (P(y), z)_{L^2(0, T_0; L^2(0,1))}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\left| \langle P(y), z \rangle_{L^2(0, T_0; V'(0,1)), L^2(0, T_0; V(0,1))} \right| &= \left| \langle e^{\lambda_\kappa \psi} P(y), e^{-\lambda_\kappa \psi} z \rangle_{L^2(0, T_0; V'(0,1)), L^2(0, T_0; V(0,1))} \right| \\
&\leq \|e^{\lambda_\kappa \psi} P(y)\|_{L^2(0, T_0; V'(0,1))} \|e^{-\lambda_\kappa \psi} z\|_{L^2(0, T_0; V(0,1))}.
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Young, segue que

$$\begin{aligned}
& \left| \langle P(y), z \rangle_{L^2(0, T_0; V'(0,1)), L^2(0, T_0; V(0,1))} \right| \\
& \leq \frac{1}{4\delta_1} \|e^{\lambda_\kappa \psi} P(y)\|_{L^2(0, T_0; V'(0,1))}^2 + \delta_1 \|e^{-\lambda_\kappa \psi} z\|_{L^2(0, T_0; V(0,1))}^2.
\end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
\|e^{-\lambda_\kappa \psi} z\|_{L^2(0, T_0; V(0,1))}^2 &= \int_0^{T_0} \|e^{-\lambda_\kappa \psi(\tau)} z(\tau)\|_{V(0,1)}^2 d\tau \\
&\leq C \int_0^{T_0} \|(e^{-\lambda_\kappa \psi(\tau)} z(\tau))_x\|_{L^2(0,1)}^2 d\tau \\
&\leq C \int_0^{T_0} \int_0^1 (-\lambda_\kappa \psi_\kappa e^{-\lambda_\kappa \psi} z + e^{-\lambda_\kappa \psi} z_x)^2 dx d\tau \\
&\leq C \lambda_\kappa^2 \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} |z|^2 dx d\tau + C \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} |z_x|^2 dx d\tau.
\end{aligned}$$

Utilizando em (1.112) as informações obtidas e fazendo um novo uso da desigualdade de Young chegamos a

$$\begin{aligned}
&\lambda_\kappa \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{2\lambda_\kappa \psi} |y|^2 dx d\tau \\
&\leq \frac{1}{4\delta_1} \|e^{\lambda_\kappa \psi} P(y)\|_{L^2(0, T_0; V'(0,1))}^2 + C \lambda_\kappa^2 \delta_1 \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} |z|^2 dx d\tau \\
&\quad + C \delta_1 \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} |z_x|^2 dx d\tau + \frac{\lambda_\kappa^2}{4\delta_2} \int_0^{T_0} \int_\omega e^{2\lambda_\kappa \psi} |y|^2 dx d\tau \\
&\quad + \frac{\delta_2}{\lambda_\kappa^2} \int_0^{T_0} \int_\omega e^{-2\lambda_\kappa \psi} |\bar{z}|^2 dx d\tau.
\end{aligned} \tag{1.113}$$

Reescrevendo (1.78) da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2C_0} \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} (|z_x|^2 + |z_\tau|^2 + \lambda_\kappa^2 |z|^2) dx d\tau + \frac{1}{2C_0 \lambda_\kappa^2} \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} |\bar{z}|^2 dx d\tau \\
&\leq \frac{\lambda_\kappa |\kappa|}{2} \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{2\lambda_\kappa \psi} |y|^2 dx d\tau
\end{aligned}$$

e somando a (1.113) multiplicada por $|\kappa|$, vemos que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2C_0} \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} (|z_x|^2 + |z_\tau|^2 + \lambda_\kappa^2 |z|^2) dx d\tau + \frac{1}{2C_0 \lambda_\kappa^2} \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} |\bar{z}|^2 dx d\tau \\
&\quad + \frac{\lambda_\kappa |\kappa|}{2} \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{2\lambda_\kappa \psi} |y|^2 dx d\tau \\
&\leq \frac{|\kappa|}{4\delta_1} \|e^{\lambda_\kappa \psi} P(y)\|_{L^2(0, T_0; V'(0,1))}^2 + C |\kappa| \lambda_\kappa^2 \delta_1 \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} |z|^2 dx d\tau \\
&\quad + C |\kappa| \delta_1 \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa \psi} |z_x|^2 dx d\tau + \frac{|\kappa| \lambda_\kappa^2}{4\delta_2} \int_0^{T_0} \int_\omega e^{2\lambda_\kappa \psi} |y|^2 dx d\tau \\
&\quad + \frac{|\kappa| \delta_2}{\lambda_\kappa^2} \int_0^{T_0} \int_\omega e^{-2\lambda_\kappa \psi} |\bar{z}|^2 dx d\tau.
\end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{2C_0} - C_1|\kappa|\delta_1 \right) \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa\psi} |z_x|^2 dx d\tau + \frac{1}{2C_0} \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa\psi} |z_\tau|^2 dx d\tau \\
& + \left(\frac{1}{2C_0} - C_1|\kappa|\delta_1 \right) \lambda_\kappa^2 \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa\psi} |z|^2 dx d\tau \\
& + \left(\frac{1}{2C_0} - \delta_2|\kappa| \right) \frac{1}{\lambda_\kappa^2} \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{-2\lambda_\kappa\psi} |\bar{z}|^2 dx d\tau + \frac{\lambda_\kappa}{2} \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{2\lambda_\kappa\psi} |y|^2 dx d\tau \\
& \leq \frac{|\kappa|}{4\delta_1} \|e^{\lambda_\kappa\psi} P(y)\|_{L^2(0,T_0;V'(0,1))}^2 + \frac{\lambda_\kappa^2|\kappa|}{4\delta_2} \int_0^{T_0} \int_\omega e^{2\lambda_\kappa\psi} |y|^2 dx d\tau.
\end{aligned} \tag{1.114}$$

Agora, escolhamos $\delta_1 = 1/4C_0C_1|\kappa|$ e $\delta_2 = 1/4C_0|\kappa|$. Com isso, de (1.114) obtemos

$$\begin{aligned}
& \frac{\lambda_\kappa}{2} \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{2\lambda_\kappa\psi} |y|^2 dx d\tau \\
& \leq C_0C_1|\kappa|^2 \|e^{\lambda_\kappa\psi} P(y)\|_{L^2(0,T_0;V'(0,1))}^2 + C_0|\kappa|^2 \lambda_\kappa^2 \int_0^{T_0} \int_\omega e^{2\lambda_\kappa\psi} |y|^2 dx d\tau.
\end{aligned}$$

Usando que $\lambda_\kappa \geq 1$ e reorganizando as constantes, chegamos a

$$\int_0^{T_0} \int_0^1 e^{2\lambda_\kappa\psi} |y|^2 dx d\tau \leq C|\kappa|^2 \|e^{\lambda_\kappa\psi} P(y)\|_{L^2(0,T_0;V'(0,1))}^2 + C|\kappa|^2 \lambda_\kappa^2 \int_0^{T_0} \int_\omega e^{2\lambda_\kappa\psi} |y|^2 dx d\tau,$$

como queríamos mostrar. ■

1.4 Controlabilidade no terceiro intervalo

Nesta parte do trabalho retomamos o que foi iniciado na Seção 1.2. Nosso objetivo é garantir a controlabilidade do sistema (1.1) no intervalo $[2T/3, T]$, o que será feito no Teorema 1.13. Antes disso, porém, precisamos de algumas definições e resultados auxiliares.

1.4.1 Norma em $V'(0, 1)$

É importante que tenhamos uma expressão para a norma em $V'(0, 1)$. Para obtê-la, começaremos provando que o operador $B : V(0, 1) \rightarrow V'(0, 1)$ que satisfaz

$$\begin{cases} B(v) = -v_{xx} = f & \text{em } (0, 1), \\ v(0) = v_x(1) + av(1) = 0, \end{cases} \quad (1.115)$$

é um isomorfismo. A linearidade do operador é vista facilmente, assim como sua injetividade. Dizemos que $v \in V$ é solução fraca de (1.115) se

$$av(1)\xi(1) + \int_0^1 v_x \xi_x dx = \langle f, \xi \rangle_{V'(0,1), V(0,1)}, \quad \forall \xi \in V(0, 1).$$

Em $[V(0, 1)]^2$ definimos a forma

$$b(\xi_1, \xi_2) = a\xi_1(1)\xi_2(1) + \int_0^1 (\xi_1)_x (\xi_2)_x dx,$$

que é bilinear, contínua e coerciva. Aplicando o Teorema de Lax-Milgram para b e o funcional linear f , obtemos que existe único $v \in V(0, 1)$ tal que para todo $\xi \in V(0, 1)$,

$$b(v, \xi) = \langle f, \xi \rangle_{V'(0,1), V(0,1)},$$

fornecendo que v é solução fraca de (1.115). Com isso, concluimos que para todo $f \in V'(0, 1)$, existe $v \in V(0, 1)$ tal que $B(v) = f$. Em outras palavras, B é sobrejetora.

Seja $f \in V'(0, 1)$. De B ser um isomorfismo sabemos que existe único $v \in V(0, 1)$ tal que $Bv = f$. Note que

$$\langle Bv, z \rangle_{V'(0,1), V(0,1)} = (v, z)_{V(0,1)}.$$

Dessa forma,

$$\langle f, z \rangle_{V'(0,1), V(0,1)} = \langle Bv, z \rangle_{V'(0,1), V(0,1)} = (v, z)_{V(0,1)}$$

e, da desigualdade de Cauchy-Schwartz,

$$\|f\|_{V'(0,1)} = \sup_{\|z\|_{V(0,1)}=1} |(v, z)_{V(0,1)}| \leq \|v\|_{V(0,1)}.$$

Escolhendo $z = v / \|v\|_{V(0,1)}$, temos que $z \in V(0, 1)$ e $\|z\|_{V(0,1)} = 1$. Além disso,

$$|(v, z)_{V(0,1)}| = \left| \left(v, \frac{v}{\|v\|_{V(0,1)}} \right)_{V(0,1)} \right| = \frac{1}{\|v\|_{V(0,1)}} \|v\|_{V(0,1)}^2 = \|v\|_{V(0,1)}.$$

Portanto, dado que $f = Bv$,

$$\|f\|_{V'(0,1)} = \|v\|_{V(0,1)}.$$

Também é verdade que $\|v\|_{V(0,1)}$ e $\|B^{1/2}v\|_{L^2(0,1)}$ são equivalentes. De fato, o Teorema do Traço e a desigualdade de Poincaré nos permitem dizer que

$$|v(1)|^2 \leq C \|v\|_{H^1(0,1)}^2 = C \left(\|v_x\|_{L^2(0,1)}^2 + \|v\|_{L^2(0,1)}^2 \right) \leq C \|v_x\|_{L^2(0,1)}^2.$$

Logo,

$$\|v_x\|_{L^2(0,1)}^2 \leq \|v\|_{V(0,1)}^2 \leq C \|v_x\|_{L^2(0,1)}^2.$$

Reunindo as informações obtidas, temos que existem constantes C_1 e C_2 positivas tais que para $f = Bv$,

$$C_1 \|B^{1/2}v\|_{L^2(0,1)} \leq \|f\|_{V'(0,1)} = \|v\|_{V(0,1)} \leq C_2 \|B^{1/2}v\|_{L^2(0,1)}. \quad (1.116)$$

1.4.2 Desigualdade de observabilidade

A energia associada ao sistema (1.32) é dada por

$$\mathcal{F}(\tau) = \frac{1}{2} \left(\|y(\tau)\|_{L^2(0,1)}^2 + \|y_\tau(\tau)\|_{V'(0,1)}^2 \right) \quad (1.117)$$

Observemos que

$$\frac{d\mathcal{F}(\tau)}{d\tau} = -\kappa \|y_\tau(\tau)\|_{V'(0,1)}^2. \quad (1.118)$$

O objetivo desta seção é obter a desigualdade de observabilidade, a qual é dada no seguinte resultado:

Teorema 1.13 *Seja y solução de (1.32). Existem constantes positivas $T_0, \kappa_0, C, \bar{C}$ tais que para todo $\hat{T} \geq T_0, \kappa \geq \kappa_0$,*

$$\|y(0)\|_{L^2(0,1)}^2 + \|y_\tau(0)\|_{V'(0,1)}^2 \leq C e^{\bar{C}|\kappa|} \int_0^{\hat{T}} \int_\omega |y|^2 dx d\tau. \quad (1.119)$$

Para a demonstração do teorema anterior, precisaremos de algumas desigualdades de energia. Aqui apresentamos esses resultados e suas provas para que possamos usá-los sem maiores explicações no momento devido.

Lema 1.14 *Sejam $0 \leq s_0 < \tau_0 \leq \hat{T}$ quaisquer e $|\kappa| \geq 1$. Então, para todo $\bar{s}_0, \bar{\tau}_0$ satisfazendo $s_0 < \bar{s}_0 < \bar{\tau}_0 < \tau_0$, existe uma constante $C > 0$ tal que a energia $\mathcal{F}(\tau)$ associada à solução y de (1.32) satisfaz*

$$\int_{\bar{s}_0}^{\bar{\tau}_0} \mathcal{F}(\tau) d\tau \leq C |\kappa| \int_{s_0}^{\tau_0} \|y(\tau)\|_{L^2(0,1)}^2 d\tau. \quad (1.120)$$

Demonstração. Definamos em $[0, \hat{T}]$ a função auxiliar

$$\gamma(\tau) = (\tau - s_0)^2(\tau - \tau_0)^2.$$

Fazendo o produto escalar da equação em (1.32) por $\gamma B^{-1}y$ e integrando sobre $(0, 1) \times (s_0, \tau_0)$, temos

$$\begin{aligned} 0 &= - \int_{s_0}^{\tau_0} \int_0^1 \gamma y_\tau (B^{-1}y)_\tau dx d\tau - \int_{s_0}^{\tau_0} \int_0^1 \gamma_\tau y_\tau B^{-1}y dx d\tau \\ &\quad - \int_{s_0}^{\tau_0} \gamma(\tau) y_x(1, \tau) (B^{-1}y)(1, \tau) d\tau + \int_{s_0}^{\tau_0} \gamma(\tau) y(1, \tau) (B^{-1}y)_x(1, \tau) d\tau \\ &\quad + \int_{s_0}^{\tau_0} \int_0^1 \gamma |y|^2 dx d\tau + \kappa \int_{s_0}^{\tau_0} \int_0^1 \gamma y_\tau B^{-1}y dx d\tau. \end{aligned}$$

Seja v tal que $Bv = y$. De acordo com (1.115),

$$\begin{aligned} &- \int_{s_0}^{\tau_0} \gamma(\tau) y_x(1, \tau) (B^{-1}y)(1, \tau) d\tau + \int_{s_0}^{\tau_0} \gamma(\tau) y(1, \tau) (B^{-1}y)_x(1, \tau) dx \\ &= \int_{s_0}^{\tau_0} \gamma(\tau) y(1, \tau) (v_x(1, \tau) + av(1, \tau)) d\tau = 0. \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} 0 &= - \int_{s_0}^{\tau_0} \int_0^1 \gamma y_\tau (B^{-1}y)_\tau dx d\tau + \int_{s_0}^{\tau_0} \int_0^1 \gamma |y|^2 dx d\tau \\ &\quad + \int_{s_0}^{\tau_0} \int_0^1 (\kappa \gamma - \gamma_\tau) y_\tau B^{-1}y dx d\tau. \end{aligned} \tag{1.121}$$

Usando $v = B^{-1}y$ também encontramos que

$$- \int_{s_0}^{\tau_0} \int_0^1 \gamma y_\tau (B^{-1}y)_\tau dx d\tau = - \int_{s_0}^{\tau_0} \gamma \|y_\tau(\tau)\|_{V'(0,1)}^2 d\tau$$

e

$$\int_{s_0}^{\tau_0} \int_0^1 (\kappa \gamma - \gamma_\tau) y_\tau B^{-1}y dx d\tau = - \frac{1}{2} \int_{s_0}^{\tau_0} (\kappa \gamma_\tau - \gamma_{\tau\tau}) \|y(\tau)\|_{V'(0,1)}^2 d\tau.$$

Substituindo essas igualdades em (1.121) temos

$$\begin{aligned} &\int_{s_0}^{\tau_0} \gamma(\tau) \|y_\tau(\tau)\|_{V'(0,1)}^2 d\tau \\ &= \int_{s_0}^{\tau_0} \gamma(\tau) \|y(\tau)\|_{L^2(0,1)}^2 d\tau - \frac{1}{2} \int_{s_0}^{\tau_0} (\kappa \gamma_\tau(\tau) - \gamma_{\tau\tau}(\tau)) \|y(\tau)\|_{V'(0,1)}^2 d\tau. \end{aligned} \tag{1.122}$$

Uma vez que γ é positiva para todo $\tau \notin \{s_0, \tau_0\}$, para todo intervalo $[\bar{s}_0, \bar{\tau}_0] \subset (s_0, \tau_0)$ existe $C_1 > 0$ tal que

$$C_1 \int_{\bar{s}_0}^{\bar{\tau}_0} \|y_\tau(\tau)\|_{V'(0,1)}^2 d\tau \leq \int_{\bar{s}_0}^{\bar{\tau}_0} \gamma(\tau) \|y_\tau(\tau)\|_{V'(0,1)}^2 d\tau.$$

Por (1.122) e da regularidade de γ , segue que

$$\begin{aligned} & C_1 \int_{\bar{s}_0}^{\bar{\tau}_0} \|y_\tau(\tau)\|_{V'(0,1)}^2 d\tau \\ & \leq \int_{s_0}^{\tau_0} \gamma(\tau) \|y(\tau)\|_{L^2(0,1)}^2 d\tau - \frac{1}{2} \int_{s_0}^{\tau_0} (\kappa \gamma_\tau(\tau) - \gamma_{\tau\tau}(\tau)) \|y(\tau)\|_{V'(0,1)}^2 d\tau \\ & \leq C \left(\int_{s_0}^{\tau_0} \|y(\tau)\|_{L^2(0,1)}^2 d\tau + |\kappa| \int_{s_0}^{\tau_0} \|y(\tau)\|_{V'(0,1)}^2 d\tau \right). \end{aligned} \quad (1.123)$$

Usando que $L^2(0,1)$ está imerso continuamente em $V'(0,1)$, obtemos de (1.123)

$$\int_{\bar{s}_0}^{\bar{\tau}_0} \|y_\tau(\tau)\|_{V'(0,1)}^2 d\tau \leq C|\kappa| \int_{s_0}^{\tau_0} \|y(\tau)\|_{L^2(0,1)}^2 d\tau.$$

Sendo assim,

$$\frac{1}{2} \int_{\bar{s}_0}^{\bar{\tau}_0} \left(\|y(\tau)\|_{L^2(0,1)}^2 + \|y_\tau(\tau)\|_{V'(0,1)}^2 \right) d\tau \leq \frac{1}{2} (1 + C|\kappa|) \int_{s_0}^{\tau_0} \|y(\tau)\|_{L^2(0,1)}^2 d\tau$$

e, portanto,

$$\int_{\bar{s}_0}^{\bar{\tau}_0} \mathcal{F}(\tau) d\tau \leq C|\kappa| \int_{s_0}^{\tau_0} \|y(\tau)\|_{L^2(0,1)}^2 d\tau,$$

como desejado. ■

O lema a seguir estabelece uma relação entre o valor da energia em dois pontos quaisquer do intervalo de tempo com o qual estamos trabalhando. Ele será fundamental para os nossos propósitos.

Lema 1.15 *A energia $\mathcal{F}$ associada à solução fraca do sistema (1.32) satisfaz*

$$\mathcal{F}(s_0) \leq e^{2|\kappa|\hat{T}} \mathcal{F}(\tau_0), \quad \forall s_0, \tau_0 \in [0, \hat{T}]. \quad (1.124)$$

Demonstração. Sabemos que

$$\frac{d\mathcal{F}(\tau)}{d\tau} = -\kappa \|y_\tau(\tau)\|_{V'(0,1)}^2 \leq |\kappa| \|y_\tau(\tau)\|_{V'(0,1)}^2 \leq 2|\kappa| \mathcal{F}(\tau).$$

Dessa forma,

$$\mathcal{F}(s_0) \leq \mathcal{F}(\tau_0) e^{2|\kappa|(s_0 - \tau_0)}, \quad \forall s_0, \tau_0 \in [0, \hat{T}], \tau_0 \leq s_0. \quad (1.125)$$

Agora, fazendo a mudança de variável $\bar{\tau} = \hat{T} - \tau$ e $\bar{y}(x, \bar{\tau}) = y(x, \tau)$, temos

$$\begin{aligned} y_\tau(x, \tau) &= \bar{y}_\tau(x, \bar{\tau})\bar{\tau}_\tau = -\bar{y}_\tau(x, \bar{\tau}), & y_{\tau\tau}(x, \tau) &= \bar{y}_{\tau\tau}(x, \bar{\tau}), \\ y_x(x, \tau) &= \bar{y}_x(x, \bar{\tau}), & y_{xx}(x, \tau) &= \bar{y}_{xx}(x, \bar{\tau}). \end{aligned}$$

Com isso,

$$\begin{cases} \bar{y}_{\tau\tau} - \bar{y}_{xx} - \kappa\bar{y}_\tau = 0 & \text{em } (0, 1) \times (0, \hat{T}), \\ \bar{y}(0, \bar{\tau}) = 0 & \text{em } (0, \hat{T}), \\ \bar{y}_x(1, \bar{\tau}) + a\bar{y}(1, \bar{\tau}) = 0 & \text{em } (0, \hat{T}), \\ \bar{y}(x, \hat{T}) = y^0(x), \bar{y}_\tau(x, \hat{T}) = -y^1(x) & \text{em } (0, 1). \end{cases}$$

Tomando $z = \bar{y}$, temos o sistema

$$\begin{cases} z_{\tau\tau} - z_{xx} - \kappa z_\tau = 0 & \text{em } (0, 1) \times (0, \hat{T}), \\ z(0, \bar{\tau}) = 0 & \text{em } (0, \hat{T}), \\ z_x(1, \bar{\tau}) + az(1, \bar{\tau}) = 0 & \text{em } (0, \hat{T}), \\ z(x, 0) = \bar{y}(x, 0), z_\tau(x, 0) = \bar{y}_\tau(x, 0) & \text{em } (0, 1). \end{cases}$$

Para $s_0 \leq \tau_0$, façamos $\bar{s}_0 = \hat{T} - s_0$ e $\bar{\tau}_0 = \hat{T} - \tau_0$. Note que $\bar{\tau}_0 \leq \bar{s}_0$. Por raciocínio análogo ao que utilizamos anteriormente, encontramos

$$\frac{d\mathcal{F}_z(\bar{\tau})}{d\bar{\tau}} = \frac{d}{d\bar{\tau}} \left(\frac{1}{2} \left(\|z(\bar{\tau})\|_{L^2(0,1)}^2 + \|z_\tau(\bar{\tau})\|_{V'(0,1)}^2 \right) \right) = \kappa \|z_\tau(\bar{\tau})\|_{V'(0,1)}^2$$

e

$$\mathcal{F}_z(\bar{s}_0) \leq \mathcal{F}_z(\bar{\tau}_0) e^{2|\kappa|(\bar{s}_0 - \bar{\tau}_0)}.$$

Portanto,

$$\|z(\bar{s}_0)\|_{L^2(0,1)}^2 + \|z_\tau(\bar{s}_0)\|_{V'(0,1)}^2 \leq e^{2|\kappa|(\bar{s}_0 - \bar{\tau}_0)} \left(\|z(\bar{\tau}_0)\|_{L^2(0,1)}^2 + \|z_\tau(\bar{\tau}_0)\|_{V'(0,1)}^2 \right),$$

o que implica

$$\|\bar{y}(\bar{s}_0)\|_{L^2(0,1)}^2 + \|\bar{y}_\tau(\bar{s}_0)\|_{V'(0,1)}^2 \leq e^{2|\kappa|(\bar{s}_0 - \bar{\tau}_0)} \left(\|\bar{y}(\bar{\tau}_0)\|_{L^2(0,1)}^2 + \|\bar{y}_\tau(\bar{\tau}_0)\|_{V'(0,1)}^2 \right)$$

e

$$\|y(s_0)\|_{L^2(0,1)}^2 + \|y_\tau(s_0)\|_{V'(0,1)}^2 \leq e^{2|\kappa|(\bar{s}_0 - \bar{\tau}_0)} \left(\|y(\tau_0)\|_{L^2(0,1)}^2 + \|y_\tau(\tau_0)\|_{V'(0,1)}^2 \right).$$

Assim,

$$\mathcal{F}(s_0) \leq e^{2|\kappa|(\bar{s}_0 - \bar{\tau}_0)} \mathcal{F}(\tau_0), \quad \forall s_0, \tau_0 \in [0, \hat{T}], s_0 \leq \tau_0. \quad (1.126)$$

Concluimos de (1.125) e (1.126) que

$$\mathcal{F}(s_0) \leq e^{2|\kappa|\hat{T}} \mathcal{F}(\tau_0), \quad \forall s_0, \tau_0 \in [0, \hat{T}],$$

como queríamos. ■

Voltemos, agora, ao Teorema 1.13 para estabelecermos sua demonstração.

Demonstração do Teorema 1.13. Como indicado no início da Seção 1.3, consideramos $\hat{T} \geq T_0$, com T_0 dado por (1.38). A prova de (1.119) será feita para $\hat{T} = T_0$. Note que isso é suficiente para garantirmos que (1.119) é válida para todo $\hat{T} \geq T_0$. Lembramos que

$$\mu(x, \tau) = \alpha \rho(x) - \beta \left(\tau - \frac{T_0}{2} \right)^2 + M.$$

Para todo $x \in (0, 1)$,

$$\mu \left(x, \frac{T_0}{2} \right) > M.$$

Além disso, a definição de T_0 nos leva a

$$\mu(x, 0) = \mu(x, T_0) < M.$$

Da continuidade de μ , existem $0 < \delta_0, \delta_1 < T_0/4$, suficientemente pequenos, tais que

$$\mu(x, \tau) > M + \delta_1 \quad \text{em} \quad [0, 1] \times \left[\frac{T_0}{2} - \delta_0, \frac{T_0}{2} + \delta_0 \right] \quad (1.127)$$

e

$$\mu(x, \tau) < M - \delta_1 \quad \text{em} \quad [0, 1] \times I, \quad (1.128)$$

com $I = [0, \delta_0] \cup [T_0 - \delta_0, T_0]$. Uma vez que $\psi(x, \tau) = e^{s\mu(x, \tau)}$,

$$\psi(x, \tau) > M_1 := e^{s(M+\delta_1)} \quad \text{em} \quad [0, 1] \times \left[\frac{T_0}{2} - \delta_0, \frac{T_0}{2} + \delta_0 \right] \quad (1.129)$$

e

$$\psi(x, \tau) < M_2 := e^{s(M-\delta_1)} \quad \text{em} \quad [0, 1] \times I. \quad (1.130)$$

Seja $\Theta \in \mathcal{C}_0^\infty(0, T_0)$ uma função não negativa que satisfaz $\Theta(\tau) = 1$ em $[\delta_0, T_0 - \delta_0]$. Para y solução de (1.32) temos que Θy é uma solução fraca de (1.78) e $P(\Theta y) \in L^2(0, T_0; L^2(0, 1))$.

Sendo assim, pelo Teorema 1.12,

$$\begin{aligned} & \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{2\lambda_\kappa \psi} |\Theta y|^2 dx d\tau \\ & \leq C |\kappa|^2 \|e^{\lambda_\kappa \psi} P(\Theta y)\|_{L^2(0, T_0; V'(0, 1))}^2 + C |\kappa|^2 \lambda_\kappa^2 \int_0^{T_0} \int_\omega e^{2\lambda_\kappa \psi} |\Theta y|^2 dx d\tau, \end{aligned} \quad (1.131)$$

para κ e λ_κ apropriados.

Utilizando o Teorema da Representação de Riesz-Fréchet vemos que

$$\begin{aligned}
& \int_0^{T_0} \|e^{\lambda_\kappa \psi(\tau)} P(\Theta y)(\tau)\|_{V'(0,1)}^2 d\tau \\
&= \int_0^{T_0} \left(\sup_{\|z\|_{V(0,1)}=1} \left| \langle e^{\lambda_\kappa \psi(\tau)} P(\Theta y)(\tau), z \rangle_{V'(0,1), V(0,1)} \right| \right)^2 d\tau \\
&= \int_0^{T_0} \left(\sup_{\|z\|_{V(0,1)}=1} \left| \int_0^1 e^{\lambda_\kappa \psi(\tau)} P(\Theta y)(\tau) z dx \right| \right)^2 d\tau \\
&= \int_0^{T_0} \left(\sup_{\|z\|_{V(0,1)}=1} \left| \langle P(\Theta y)(\tau), e^{\lambda_\kappa \psi(\tau)} z \rangle_{V'(0,1), V(0,1)} \right| \right)^2 d\tau \\
&\leq \int_0^{T_0} \left(\sup_{\|z\|_{V(0,1)}=1} \|P(\Theta y)(\tau)\|_{V'(0,1)} \|e^{\lambda_\kappa \psi(\tau)} z\|_{V(0,1)} \right)^2 d\tau.
\end{aligned}$$

Agora observemos que $P(\Theta y) = \Theta_{\tau\tau}y + 2\Theta_\tau y_\tau + \kappa\Theta_\tau y$ e que $\Theta_\tau = \Theta_{\tau\tau} = 0$ em $[\delta_0, T_0 - \delta_0]$. Logo, $P(\Theta y) = 0$ sobre $[0, 1] \times [\delta_0, T_0 - \delta_0]$. Além disso, $e^{\lambda_\kappa \psi(x, \tau)} \leq e^{\lambda_\kappa M_2}$ em $[0, 1] \times I$. Dessa forma,

$$\begin{aligned}
\|e^{\lambda_\kappa \psi(\tau)} z\|_{V(0,1)} &\leq C \| (e^{\lambda_\kappa \psi(\tau)} z)_x \|_{L^2(0,1)} \\
&= C \sqrt{\int_0^1 |e^{\lambda_\kappa \psi(\tau)} (\lambda_\kappa \psi_x z + z_x)|^2 dx} \\
&\leq C e^{\lambda_\kappa M_2} \left(C_1 \lambda_\kappa \|z\|_{L^2(0,1)} + \sqrt{2} \|z_x\|_{L^2(0,1)} \right) \\
&\leq C \lambda_\kappa e^{\lambda_\kappa M_2} \|z\|_{V(0,1)}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
& \int_0^{T_0} \|e^{\lambda_\kappa \psi(\tau)} P(\Theta y)(\tau)\|_{V'(0,1)}^2 d\tau \\
&\leq \int_I \|P(\Theta y)(\tau)\|_{V'(0,1)}^2 \left(\sup_{\|z\|_{V(0,1)}=1} C \lambda_\kappa e^{\lambda_\kappa M_2} \|z\|_{V(0,1)} \right)^2 d\tau \\
&= C \lambda_\kappa^2 e^{2\lambda_\kappa M_2} \int_I \|P(\Theta y)(\tau)\|_{V'(0,1)}^2 d\tau.
\end{aligned}$$

Substituindo $P(\Theta y)$ por $\Theta_{\tau\tau}y + 2\Theta_\tau y_\tau + \kappa\Theta_\tau y$ e tendo em mente que Θ não depende de x , encontramos

$$\begin{aligned}
& \int_0^{T_0} \|e^{\lambda_\kappa \psi(\tau)} P(\Theta y)(\tau)\|_{V'(0,1)}^2 d\tau \\
&\leq C \lambda_\kappa^2 e^{2\lambda_\kappa M_2} \int_I |\Theta_{\tau\tau}(\tau) + \kappa\Theta_\tau(\tau)|^2 \|y(\tau)\|_{V'(0,1)}^2 d\tau
\end{aligned} \tag{1.132}$$

$$\begin{aligned}
 & + C\lambda_\kappa^2 e^{2\lambda_\kappa M_2} \int_I |2\Theta_\tau(\tau)|^2 \|y_\tau(\tau)\|_{V'(0,1)}^2 d\tau \\
 & \leq C\lambda_\kappa^2 |\kappa|^2 e^{2\lambda_\kappa M_2} \int_I \left(\|y(\tau)\|_{L^2(0,1)}^2 + \|y_\tau(\tau)\|_{V'(0,1)}^2 \right) d\tau \\
 & \leq C\lambda_\kappa^2 |\kappa|^2 e^{2\lambda_\kappa M_2} \int_I \mathcal{F}(\tau) d\tau.
 \end{aligned}$$

Utilizando a estimativa (1.132) em (1.131), obtemos

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{T_0} \int_0^1 e^{2\lambda_\kappa \psi} |\Theta y|^2 dx d\tau \\
 & \leq C\lambda_\kappa^2 |\kappa|^4 e^{2\lambda_\kappa M_2} \int_I \mathcal{F}(\tau) d\tau + C|\kappa|^2 \lambda_\kappa^2 \int_0^{T_0} \int_\omega e^{2\lambda_\kappa \psi} |\Theta y|^2 dx d\tau.
 \end{aligned} \tag{1.133}$$

Sabemos de (1.129) que

$$e^{2\lambda_\kappa M_1} \int_{\frac{T_0}{2}-\delta_0}^{\frac{T_0}{2}+\delta_0} \int_0^1 |\Theta y|^2 dx d\tau \leq \int_{\frac{T_0}{2}-\delta_0}^{\frac{T_0}{2}+\delta_0} \int_0^1 |\Theta y|^2 e^{2\lambda_\kappa \psi} dx d\tau. \tag{1.134}$$

Como $\delta_0 < T_0/4$, o intervalo $[T_0/2 - \delta_0, T_0/2 + \delta_0]$ está contido em $[\delta_0, T_0 - \delta_0]$. Logo $\Theta = 1$ em $[T_0/2 - \delta_0, T_0/2 + \delta_0]$. Com base no Lema 1.14, podemos escolher $\bar{s}_0 \in (T_0/2 - \delta_0, T_0/2)$ e $\bar{\tau}_0 \in (T_0/2, T_0/2 + \delta_0)$ tais que

$$\int_{\bar{s}_0}^{\bar{\tau}_0} \mathcal{F}(\tau) d\tau \leq C|\kappa| \int_{\frac{T_0}{2}-\delta_0}^{\frac{T_0}{2}+\delta_0} \|y(\tau)\|_{L^2(0,1)}^2 d\tau = C|\kappa| \int_{\frac{T_0}{2}-\delta_0}^{\frac{T_0}{2}+\delta_0} \|\Theta y(\tau)\|_{L^2(0,1)}^2 d\tau \tag{1.135}$$

e do Lema 1.15,

$$(\bar{\tau}_0 - \bar{s}_0) \mathcal{F}(0) \leq e^{2|\kappa|T_0} \int_{\bar{s}_0}^{\bar{\tau}_0} \mathcal{F}(\tau) d\tau. \tag{1.136}$$

Segue das desigualdades (1.134)-(1.136) que

$$\mathcal{F}(0) \leq C|\kappa| e^{2|\kappa|T_0 - 2\lambda_\kappa M_1} \int_{\frac{T_0}{2}-\delta_0}^{\frac{T_0}{2}+\delta_0} \int_0^1 |\Theta y|^2 e^{2\lambda_\kappa \psi} dx d\tau. \tag{1.137}$$

Usando (1.137) em (1.133) e a limitação proveniente da continuidade de Θ , temos

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}(0) & \leq C\lambda_\kappa^2 |\kappa|^5 e^{2|\kappa|T_0 - 2\lambda_\kappa(M_1 - M_2)} \int_I \mathcal{F}(\tau) d\tau \\
 & \quad + C\lambda_\kappa^2 |\kappa|^3 e^{2|\kappa|T_0 - 2\lambda_\kappa M_1} \int_0^{T_0} \int_\omega e^{2\lambda_\kappa \psi} |y|^2 dx d\tau.
 \end{aligned} \tag{1.138}$$

Uma nova aplicação do Lema 1.15 nos diz que

$$\int_I \mathcal{F}(\tau) d\tau \leq C e^{2|\kappa|T_0} \mathcal{F}(0).$$

Sendo assim, por (1.138),

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(0) &\leq C\lambda_\kappa^2|\kappa|^5 e^{4|\kappa|T_0-2\lambda_\kappa(M_1-M_2)}\mathcal{F}(0) \\ &\quad + C\lambda_\kappa^2|\kappa|^3 e^{2|\kappa|T_0-2\lambda_\kappa M_1} \int_0^{T_0} \int_\omega e^{2\lambda_\kappa \psi} |y|^2 dx d\tau.\end{aligned}\quad (1.139)$$

Considerando (1.138) e que $M_3 = \max \psi(x, \tau) \geq M_1$ em $(0, 1) \times (0, T_0)$, conseguimos estabelecer

$$\left(1 - \frac{C_0\lambda_\kappa^2|\kappa|^5}{e^{2\lambda_\kappa(M_1-M_2)-4|\kappa|T_0}}\right) \mathcal{F}(0) \leq C_0\lambda_\kappa^2|\kappa|^3 e^{2|\kappa|T_0+2\lambda_\kappa(M_3-M_1)} \int_0^{T_0} \int_\omega |y|^2 dx d\tau. \quad (1.140)$$

Agora tomamos, para λ_0 dado pelo Teorema 1.12,

$$\lambda_\kappa \geq \max \left\{ \frac{8R_1 + 1}{2(M_1 - M_2)\sqrt{\beta}} |\kappa|, \lambda_0 |\kappa| \right\}. \quad (1.141)$$

Dessa forma,

$$2\lambda_\kappa(M_1 - M_2) - 4|\kappa|T_0 \geq \frac{8R_1 + 1}{(M_1 - M_2)\sqrt{\beta}} |\kappa|(M_1 - M_2) - \frac{8}{\sqrt{\beta}} |\kappa|R_1 > C_1|\kappa|$$

e

$$2|\kappa|T_0 + 2\lambda_\kappa(M_3 - M_1) \leq 8\lambda_\kappa(M_1 - M_2) + 2\lambda_\kappa(M_3 - M_1) < C_2\lambda_\kappa.$$

Notemos que podemos tomar $\lambda_\kappa = \lambda_1|\kappa|$ para algum λ_1 escolhido adequadamente. Assim,

$$-\frac{C_0\lambda_1^2|\kappa|^7}{e^{C_1|\kappa|}} = -\frac{C_0\lambda_\kappa^2|\kappa|^5}{e^{C_1|\kappa|}} < -\frac{C_0\lambda_\kappa^2|\kappa|^5}{e^{2\lambda_\kappa(M_1-M_2)-4|\kappa|T_0}}$$

e

$$\frac{1}{2} < 1 - \frac{C_0\lambda_\kappa^2|\kappa|^5}{e^{2\lambda_\kappa(M_1-M_2)-4|\kappa|T_0}}, \quad (1.142)$$

sempre que $|\kappa|$ é grande o bastante. Portanto, por (1.140) – (1.142) segue que

$$\mathcal{F}(0) \leq C_0\lambda_1^2|\kappa|^5 e^{C_2\lambda_1|\kappa|} \int_0^{T_0} \int_\omega |y|^2 dx d\tau,$$

o que implica em

$$\|y(0)\|_{L^2(0,1)}^2 + \|y_\tau(0)\|_{V'(0,1)}^2 \leq C e^{\bar{C}|\kappa|} \int_0^{T_0} \int_\omega |y|^2 dx d\tau,$$

como queríamos provar. ■

Agora que conseguimos uma desigualdade de observabilidade para o sistema (1.32), vamos estabelecer a desigualdade de observabilidade para o sistema (1.31).

Teorema 1.16 *Seja v solução de (1.31). Existem constantes positivas $\varepsilon_0(T), C(T), \bar{C}(T)$ tais que, para todo $T > 0, 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0(T)$,*

$$\|v^0\|_{L^2(0,1)}^2 + \varepsilon \|v^1\|_{V'(0,1)}^2 \leq C(T) e^{\frac{\bar{C}(T)}{\sqrt{\varepsilon}}} \int_0^T \int_{\omega} |v(x,t)|^2 dx dt. \quad (1.143)$$

Demonstração. Sejam T_0, κ_0, C e $\bar{C}$ as constantes do enunciado do Teorema 1.13 e um $T > 0$ qualquer. Sabemos que esse resultado é válido para todo $\hat{T} > T_0$. Uma vez que $\hat{T} = T/\sqrt{\varepsilon}$, temos que

$$\frac{T}{\sqrt{\varepsilon}} = \hat{T} > T_0 \Leftrightarrow T > \sqrt{\varepsilon} T_0.$$

Logo, basta escolher ε suficientemente pequeno, digamos $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0(T)$, para que o Teorema 1.13 possa ser aplicado. Dessa forma, por (1.119),

$$\|y(0)\|_{L^2(0,1)}^2 + \|y_{\tau}(0)\|_{V'(0,1)}^2 \leq C e^{\bar{C}|\kappa|} \int_0^{\hat{T}} \int_{\omega} |y(x,\tau)|^2 dx d\tau. \quad (1.144)$$

Como $y(x,\tau) = v(x, T - \sqrt{\varepsilon}\tau)$, vem que

$$\|v(T)\|_{L^2(0,1)}^2 + \|\sqrt{\varepsilon}v_t(T)\|_{V'(0,1)}^2 \leq C e^{\frac{\bar{C}}{\sqrt{\varepsilon}}} \int_0^{\frac{T}{\sqrt{\varepsilon}}} \int_{\omega} |v(x, T - \sqrt{\varepsilon}\tau)|^2 dx d\tau,$$

o que é equivalente a

$$\|v^0\|_{L^2(0,1)}^2 + \varepsilon \|v^1\|_{V'(0,1)}^2 \leq \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}} e^{\frac{\bar{C}}{\sqrt{\varepsilon}}} \int_T^0 \int_{\omega} |v(x,t)|^2 dx dt$$

ou

$$\|v^0\|_{L^2(0,1)}^2 + \varepsilon \|v^1\|_{V'(0,1)}^2 \leq \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}} e^{\frac{\bar{C}}{\sqrt{\varepsilon}}} \int_0^T \int_{\omega} |v(x,t)|^2 dx dt.$$

Em particular, para ε suficientemente pequeno, temos (1.143) ■

1.4.3 Controlabilidade

Em posse da desigualdade de observabilidade (1.143), estamos aptos a provar a controlabilidade nula do sistema (1.1). Antes disso, observemos que multiplicando a equação em (1.1) por v solução de (1.31) e integrando sobre Q , temos

$$\int_0^T \int_0^1 h 1_{\omega} v dx dt \quad (1.145)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \varepsilon v^0(x) u_t(x, T) dx - \int_0^1 v(x, 0) (\varepsilon u^1(x) + u^0(x)) dx \\
&\quad + \int_0^1 (-\varepsilon v^1(x) + v^0(x)) u(x, T) dx + \int_0^1 \varepsilon v_t(x, 0) u^0(x) dx.
\end{aligned}$$

Se $u(T) = u_t(T) = 0$, então, para todo $(v^0, v^1) \in L^2(0, 1) \times V'(0, 1)$,

$$\varepsilon v^0(x) u_t(x, T) + (-\varepsilon v^1(x) + v^0(x)) u(x, T) = 0. \quad (1.146)$$

Reciprocamente, suponha que a afirmação acima é verdadeira. Vamos reescrever (1.146) da seguinte forma:

$$(\varepsilon u_t(x, T) + u(x, T)) v^0(x) - \varepsilon v^1(x) u(x, T) = 0.$$

Escolhendo $v^0(x) = \varepsilon u_t(x, T) + u(x, T)$ e $v^1(x) = -\varepsilon^{-1} u(x, T)$, temos

$$|\varepsilon u_t(x, T) + u(x, T)|^2 + |u(x, T)|^2 = 0,$$

o que implica $u(x, T) = u_t(x, T) = 0$. Com isso concluímos que o sistema é controlável a zero se, e somente se, para todo $(v(T), v_t(T)) = (v^0, v^1) \in L^2(0, 1) \times V'(0, 1)$ a igualdade (1.146) é válida, onde v é a solução do sistema adjunto com esses dados iniciais. Disso e de (1.145) vem que o sistema é controlável se, e somente se,

$$\int_0^T \int_0^1 h 1_\omega v dx dt = \int_0^1 u^0(x) [\varepsilon v_t(x, 0) - v(x, 0)] dx - \varepsilon \int_0^1 u^1(x) v(x, 0) dx. \quad (1.147)$$

A equação (1.147) é chamada *Condição de Optimalidade* e iremos provar que ela é satisfeita na demonstração do teorema a seguir.

Teorema 1.17 *Existem constantes $C, \bar{C}, \varepsilon_0 > 0$ tais que para $T > 0$ e $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0(T) < 1$, o sistema (1.1) é nulamente controlável e o controle h satisfaz*

$$\|h\|_{L^2(\omega \times (0, T))} \leq C(T) e^{\frac{\bar{C}(T)}{\sqrt{\varepsilon}}} \|(u^0, \sqrt{\varepsilon} u^1)\|_{V(0, 1) \times L^2(0, 1)}. \quad (1.148)$$

Demonstração. Consideremos o funcional $J : L^2(0, 1) \times V'(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$J(v^0, v^1) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_\omega |v|^2 dx dt + \int_0^1 (u^0 + \varepsilon u^1) v(0) dx - \varepsilon \langle u^0, v_t(0) \rangle, \quad (1.149)$$

em que v é a solução de (1.31) para os dados iniciais (v^0, v^1) . Ele é contínuo e estritamente convexo. A desigualdade de observabilidade nos ajuda a mostrar que ele é coercivo. De fato, fixado $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0(T)$, com o auxílio de (1.143) vemos que

$$J(v^0, v^1) \geq C_1(T) \left(\|v^0\|_{L^2(0, 1)}^2 + \varepsilon \|v^1\|_{V'(0, 1)}^2 \right) - \left| \int_0^1 (u^0 + \varepsilon u^1) v(0) dx \right| - |\varepsilon \langle u^0, v_t(0) \rangle|.$$

De acordo com as desigualdades de Cauchy e a de Young,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 (u^0 + \varepsilon u^1) v(0) dx \right| &\leq \|u^0 + \varepsilon u^1\|_{L^2(0,1)} \|v(0)\|_{L^2(0,1)} \\ &\leq C(\delta) \|u^0 + \varepsilon u^1\|_{L^2(0,1)}^2 + \delta \|v(0)\|_{L^2(0,1)}^2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \left| \langle \sqrt{\varepsilon} u^0, \sqrt{\varepsilon} v_t(0) \rangle_{V(0,1), V'(0,1)} \right| &\leq \|\sqrt{\varepsilon} u^0\|_{V(0,1)} \|\sqrt{\varepsilon} v_t(0)\|_{V'(0,1)} \\ &\leq C(\delta) \|\sqrt{\varepsilon} u^0\|_{V(0,1)}^2 + \delta \|\sqrt{\varepsilon} v_t(0)\|_{V'(0,1)}^2. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} J(v^0, v^1) &\geq C_1(T) \left(\|v^0\|_{L^2(0,1)}^2 + \varepsilon \|v^1\|_{V'(0,1)}^2 \right) - C(\delta) \|u^0 + \varepsilon u^1\|_{L^2(0,1)}^2 \\ &\quad - \delta \|v(0)\|_{L^2(0,1)}^2 - C(\delta) \|\sqrt{\varepsilon} u^0\|_{V(0,1)}^2 - \delta \|\sqrt{\varepsilon} v_t(0)\|_{V'(0,1)}^2. \end{aligned}$$

Sabemos de (1.118) que

$$\frac{d}{d\tau} \left[\frac{1}{2} \left(\|y(\tau)\|_{L^2(0,1)}^2 + \|y_\tau(\tau)\|_{V'(0,1)}^2 \right) \right] \leq 0.$$

Integrando de 0 a $\hat{T}$ e retornando à variável v , encontramos

$$\|v(0)\|_{L^2(0,1)}^2 + \varepsilon \|v_\tau(0)\|_{V'(0,1)}^2 \leq \|v^0\|_{L^2(0,1)}^2 + \varepsilon \|v^1\|_{V'(0,1)}^2. \quad (1.150)$$

Com essa informação obtemos

$$\begin{aligned} J(v^0, v^1) &\geq C_1(T) \left(\|v^0\|_{L^2(0,1)}^2 + \varepsilon \|v^1\|_{V'(0,1)}^2 \right) - C(\delta) \left(\|u^0 + \varepsilon u^1\|_{L^2(0,1)}^2 + \|\varepsilon u^0\|_{V(0,1)}^2 \right) \\ &\quad - \delta \left(\|v^0\|_{L^2(0,1)}^2 + \varepsilon \|v^1\|_{V'(0,1)}^2 \right) \\ &\geq (C_1(T) - \delta) \left(\|v^0\|_{L^2(0,1)}^2 + \varepsilon \|v^1\|_{V'(0,1)}^2 \right). \end{aligned}$$

Logo, escolhendo $\delta < C_1(T)$,

$$\lim_{\|(v^0, v^1)\|_{E^\varepsilon} \rightarrow \infty} J(v^0, v^1) = +\infty,$$

provando a coercividade de J . Podemos, portanto, afirmar que J possui um único mínimo em algum $(\bar{v}^0, \bar{v}^1) \in E^\varepsilon$. Sejam $(v^0, v^1) \in E^\varepsilon$ e v a solução correspondente. Uma vez que

$$DJ(\bar{v}^0, \bar{v}^1) = \int_0^T \int_\omega \bar{v} v dx dt + \int_0^1 v(x, 0) (\varepsilon u^1(x) + u^0(x)) dx - \int_0^1 \varepsilon v_t(x, 0) u^0(x) dx = 0,$$

com $\bar{v}$ sendo solução de (1.31) associada a $(\bar{v}^0, \bar{v}^1)$, temos que

$$\int_0^T \int_\omega \bar{v} v dx dt = - \int_0^1 v(x, 0) (\varepsilon u^1(x) + u^0(x)) dx + \int_0^1 \varepsilon v_t(x, 0) u^0(x) dx.$$

Assim, a condição de optimalidade (1.147) é satisfeita com o controle $h = \bar{v}$ e concluimos a controlabilidade de (1.1).

Para provar (1.148), usamos o fato de J atingir mínimo em $(\bar{v}^0, \bar{v}^1)$. Isso nos permite afirmar que

$$J(\bar{v}^0, \bar{v}^1) dx \leq J(0, 0) = 0,$$

de onde vem

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\omega} |\bar{v}|^2 dx dt \\ & \leq \|u^0 + \varepsilon u^1\|_{L^2(0,1)} \|\bar{v}(0)\|_{L^2(0,1)} + \varepsilon \|u^0\|_{V(0,1)} \|\bar{v}_t(0)\|_{V'(0,1)} \\ & \leq \left(\|u^0 + \varepsilon u^1\|_{L^2(0,1)} + \sqrt{\varepsilon} \|u^0\|_{V(0,1)} \right) \left(\|\bar{v}(0)\|_{L^2(0,1)} + \sqrt{\varepsilon} \|\bar{v}_t(0)\|_{V'(0,1)} \right). \end{aligned} \quad (1.151)$$

Podemos estabelecer, das desigualdades (1.143) e (1.150), a estimativa

$$\|\bar{v}(0)\|_{L^2(0,1)} + \sqrt{\varepsilon} \|\bar{v}_t(0)\|_{V'(0,1)} \leq C(T) e^{\frac{\bar{C}(T)}{\sqrt{\varepsilon}}} \|\bar{v}\|_{L^2(\omega \times (0,1))}. \quad (1.152)$$

Também podemos mostrar que

$$\|u^0 + \varepsilon u^1\|_{L^2(0,1)} + \sqrt{\varepsilon} \|u^0\|_{V(0,1)} \leq C \left(\|u^0\|_{V(0,1)} + \sqrt{\varepsilon} \|u^1\|_{L^2(0,1)} \right). \quad (1.153)$$

Combinando (1.151)-(1.153), chegamos a

$$\|\bar{v}\|_{L^2(\omega \times (0,T))}^2 \leq C(T) e^{\frac{\bar{C}(T)}{\sqrt{\varepsilon}}} \|(u^0, \sqrt{\varepsilon} u^1)\|_{V(0,1) \times L^2(0,1)} \|\bar{v}\|_{L^2(\omega \times (0,T))},$$

a qual implica em (1.148). ■

1.5 Prova do Teorema 1.1

Os resultados obtidos nas seções anteriores nos permitem provar o principal teorema deste capítulo, o Teorema 1.1. Uma vez que no teorema existem muitas afirmações a serem comprovadas, dividiremos a demonstração em tópicos.

O sistema é nulamente controlável. O que faremos agora é reunir os resultados obtidos nas seções anteriores e com isso construir o controle que nos permitirá levar u e u_t a zero em um dado tempo $T > 0$. Para isso, fixado T , dividimos o intervalo de tempo da seguinte forma: $[0, T] = [0, T/3] \cup [T/3, 2T/3] \cup [2T/3, T]$. Seja $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\omega, T)$ pequeno o suficiente para que possamos aplicar os teoremas 1.3 e 1.17. De acordo com o Teorema 1.3, para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, existe um controle $h_{\varepsilon_1} \in L^2(\omega \times (0, T))$ que faz com que a

solução do sistema

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varepsilon(u_{\varepsilon 1})_{tt} - (u_{\varepsilon 1})_{xx} + (u_{\varepsilon 1})_t = h_{\varepsilon 1} 1_{\omega} & \text{em } (0, 1) \times \left(0, \frac{T}{3}\right), \\ u_{\varepsilon 1}(0) = 0 & \text{em } \left(0, \frac{T}{3}\right), \\ (u_{\varepsilon 1})_x(1) + au_{\varepsilon 1}(1) = 0 & \text{em } \left(0, \frac{T}{3}\right), \\ u_{\varepsilon 1}(0) = u^0, \quad (u_{\varepsilon 1})_t(0) = u^1 & \text{em } (0, 1), \end{array} \right. \quad (1.154)$$

satisfaça

$$\pi_p^{\varepsilon} \left(u_{\varepsilon 1} \left(\frac{T}{3} \right), (u_{\varepsilon 1})_t \left(\frac{T}{3} \right) \right) = 0. \quad (1.155)$$

Também temos que

$$\|h_{\varepsilon 1}\|_{L^2(\omega \times (0, \frac{T}{3}))} \leq C \|(u^0, u^1)\|_{E^{\varepsilon}}. \quad (1.156)$$

Note que multiplicando a equação em (1.154) por $(u_{\varepsilon 1})_t$ e integrando sobre $(0, 1) \times (0, T/3)$ chegamos à desigualdade de energia

$$\left\| \left(u_{\varepsilon 1} \left(\frac{T}{3} \right), (u_{\varepsilon 1})_t \left(\frac{T}{3} \right) \right) \right\|_{E^{\varepsilon}} \leq \|h_{\varepsilon 1}\|_{L^2(\omega \times (0, \frac{T}{3}))} + \|(u^0, u^1)\|_{E^{\varepsilon}}.$$

Sendo assim, usando a estimativa (1.156), encontramos

$$\left\| \left(u_{\varepsilon 1} \left(\frac{T}{3} \right), (u_{\varepsilon 1})_t \left(\frac{T}{3} \right) \right) \right\|_{E^{\varepsilon}} \leq C \|(u^0, u^1)\|_{E^{\varepsilon}}. \quad (1.157)$$

Passamos agora a olhar para o sistema

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varepsilon(u_{\varepsilon 2})_{tt} - (u_{\varepsilon 2})_{xx} + (u_{\varepsilon 2})_t = 0 & \text{em } (0, 1) \times \left(\frac{T}{3}, \frac{2T}{3}\right), \\ u_{\varepsilon 2}(0) = 0 & \text{em } \left(\frac{T}{3}, \frac{2T}{3}\right), \\ (u_{\varepsilon 2})_x(1) + au_{\varepsilon 2}(1) = 0 & \text{em } \left(\frac{T}{3}, \frac{2T}{3}\right), \\ u_{\varepsilon 2} \left(\frac{T}{3} \right) = u_2^0, \quad (u_{\varepsilon 2})_t \left(\frac{T}{3} \right) = u_2^1 & \text{em } (0, 1), \end{array} \right. \quad (1.158)$$

com

$$u_2^0 = u_{\varepsilon 1} \left(\frac{T}{3} \right) \quad \text{e} \quad u_2^1 = (u_{\varepsilon 1})_t \left(\frac{T}{3} \right). \quad (1.159)$$

Por (1.155) temos que (u_2^0, u_2^1) pertence a E_h^{ε} . Aplicando o Teorema 1.5, para todo

$t \in [T/3, 2T/3]$,

$$\|(u_{\varepsilon 2}(t), (u_{\varepsilon 2})_t(t))\|_{E^\varepsilon} \leq 2^{3/2} e^{-t/4\varepsilon} \|(u_2^0, u_2^1)\|_{E^\varepsilon}.$$

Em particular, para $t = 2T/3$,

$$\left\| \left(u_{\varepsilon 2} \left(\frac{2T}{3} \right), (u_{\varepsilon 2})_t \left(\frac{2T}{3} \right) \right) \right\|_{E^\varepsilon} \leq 2^{3/2} e^{-T/6\varepsilon} \|(u_2^0, u_2^1)\|_{E^\varepsilon}. \quad (1.160)$$

Logo, (1.157)-(1.160) fornecem

$$\left\| \left(u_{\varepsilon 2} \left(\frac{2T}{3} \right), (u_{\varepsilon 2})_t \left(\frac{2T}{3} \right) \right) \right\|_{E^\varepsilon} \leq C e^{-T/6\varepsilon} \|(u^0, u^1)\|_{E^\varepsilon}. \quad (1.161)$$

Para finalizar, consideramos o sistema

$$\begin{cases} \varepsilon(u_{\varepsilon 3})_{tt} - (u_{\varepsilon 3})_{xx} + (u_{\varepsilon 3})_t = h_{\varepsilon 3} 1_\omega & \text{em } (0, 1) \times \left(\frac{2T}{3}, T \right), \\ u_{\varepsilon 3}(0) = 0 & \text{em } \left(\frac{2T}{3}, T \right), \\ (u_{\varepsilon 3})_x(1) + a u_{\varepsilon 3}(1) = 0 & \text{em } \left(\frac{2T}{3}, T \right), \\ u_{\varepsilon 3} \left(\frac{2T}{3} \right) = u_3^0, \quad (u_{\varepsilon 3})_t \left(\frac{2T}{3} \right) = u_3^1 & \text{em } (0, 1), \end{cases} \quad (1.162)$$

com $(u_3^0, u_3^1) = (u_{\varepsilon 2}(2T/3), (u_{\varepsilon 2})_t(2T/3))$ e $h_{\varepsilon 3}$ o controle estabelecido no Teorema 1.17.

Com isso podemos garantir que

$$u_\varepsilon(x, t) = \begin{cases} u_{\varepsilon 1}(x, t) & \text{em } (0, 1) \times \left(0, \frac{T}{3} \right), \\ u_{\varepsilon 2}(x, t) & \text{em } (0, 1) \times \left(\frac{T}{3}, \frac{2T}{3} \right), \\ u_{\varepsilon 3}(x, t) & \text{em } (0, 1) \times \left(\frac{2T}{3}, T \right) \end{cases}$$

e

$$h_\varepsilon(x, t) = \begin{cases} h_{\varepsilon 1}(x, t) & \text{em } (0, 1) \times \left(0, \frac{T}{3} \right), \\ 0 & \text{em } (0, 1) \times \left(\frac{T}{3}, \frac{2T}{3} \right), \\ h_{\varepsilon 3}(x, t) & \text{em } (0, 1) \times \left(\frac{2T}{3}, T \right), \end{cases}$$

satisfazem (1.1) e $u_\varepsilon(T) = (u_\varepsilon)_t(T) = 0$, provando a controlabilidade do sistema. Também

temos por (1.148) e (1.161) que

$$\begin{aligned} \|h_{\varepsilon 3}\|_{L^2(\omega \times (\frac{2T}{3}, T))} &\leq C(T) e^{\bar{C}(T)/\sqrt{\varepsilon}} \|(u_3^0, \sqrt{\varepsilon} u_3^1)\|_{V(0,1) \times L^2(0,1)} \\ &\leq C(T) e^{(6\sqrt{\varepsilon} \bar{C}(T) - T)/6\varepsilon} \|(u^0, u^1)\|_{E^\varepsilon}. \end{aligned} \quad (1.163)$$

Uma vez que $6\sqrt{\varepsilon} \bar{C}(T) - T < 0$, para ε suficientemente pequeno, o lado direito de (1.163) é uniformemente limitado em relação a ε :

$$\|h_{\varepsilon 3}\|_{L^2(\omega \times (\frac{2T}{3}, T))} \leq C(T) \|(u^0, u^1)\|_{E^\varepsilon}. \quad (1.164)$$

Segue de (1.156) e (1.164) que

$$\|h_\varepsilon\|_{L^2(\omega \times (0, T))} \leq C(T) \|(u^0, u^1)\|_{E^\varepsilon}. \quad (1.165)$$

Uma nova desigualdade de observabilidade. Para continuar a demonstração precisamos de uma desigualdade de observabilidade levemente diferente da que foi dada no Teorema 1.16. Embora no enunciado do lema a seguir não fique explícita a relação com a controlabilidade que acabamos de provar, utilizamos fortemente a existência do controle h_ε e a limitação uniforme (1.165) que ele possui.

Lema 1.18 *Seja $T > 0$ e v solução de (1.31). Existem $C(T)$ e $\varepsilon_0(\omega, T)$ constantes positivas tais que, para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon_0(\omega, T)$,*

$$\|\varepsilon v_t(0) - v(0)\|_{V'(0,1)}^2 + \varepsilon \|v(0)\|_{L^2(0,1)}^2 \leq C(T) \int_0^T \int_\omega |v|^2 dx dt. \quad (1.166)$$

Demonstração. Iniciamos multiplicando a equação em (1.1) por v solução de (1.31) e integrando sobre Q . Isso resulta em

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_\omega h v dx dt \\ &= \varepsilon \int_0^1 u_t(x, T) v(x, T) dx + \varepsilon \int_0^1 u^0(x) v_t(x, 0) dx \\ &\quad + \int_0^1 u(x, T) (-\varepsilon v_t(x, T) + v(x, T)) dx - \int_0^1 (u^0(x) + \varepsilon u^1(x)) v(x, 0) dx. \end{aligned} \quad (1.167)$$

Tomando h como o controle obtido na etapa anterior, $u(x, T) = u_t(x, T) = 0$ e (1.167) passa a ser

$$\int_0^1 \int_{\omega} h v dx dt = -\varepsilon \int_0^1 u^1(x) v(x, 0) dx + \varepsilon \int_0^1 u^0(x) v_t(x, 0) dx - \int_0^1 u^0 v(x, 0) dx.$$

Isso nos diz que

$$\begin{aligned} & \|h\|_{L^2(\omega \times (0, T))} \|v\|_{L^2(\omega \times (0, T))} \\ & \geq \left| \int_0^1 u^0 (\varepsilon v_t(0) - v(0)) dx - \int_0^1 \varepsilon u^1 v(0) dx \right| \end{aligned} \quad (1.168)$$

e devido a (1.165),

$$\begin{aligned} & C(T) \|(u^0, u^1)\|_{E^\varepsilon} \|v\|_{L^2(\omega \times (0, T))} \\ & \geq \left| \int_0^1 u^0 (\varepsilon v_t(0) - v(0)) dx - \int_0^1 \varepsilon u^1 v(0) dx \right|. \end{aligned} \quad (1.169)$$

Definimos o funcional $F : E^\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$ da seguinte forma:

$$F(u^0, u^1) = \int_0^1 u^0 (\varepsilon v_t(0) - v(0)) dx - \int_0^1 \varepsilon u^1 v(0) dx.$$

Então, por (1.169),

$$\|F\|_{(E^\varepsilon)'} = \sup_{\|(u^0, u^1)\|_{E^\varepsilon} \neq 0} \frac{\left| \int_0^1 u^0 (\varepsilon v_t(0) - v(0)) dx - \int_0^1 \varepsilon u^1 v(0) dx \right|}{\|(u^0, u^1)\|_{E^\varepsilon}} \leq C(T) \|v\|_{L^2(\omega \times (0, T))},$$

ou seja,

$$\|\varepsilon v_t(0) - v(0)\|_{V'(0,1)} + \sqrt{\varepsilon} \|v(0)\|_{L^2(0,1)} \leq C(T) \|v\|_{L^2(\omega \times (0, T))}.$$

Por fim, elevando ao quadrado encontramos que, para todo $(v^0, v^1) \in (E^\varepsilon)'$, a desigualdade é verificada. ■

Convergências. Aqui trabalharemos com o sistema (1.31), adjunto ao sistema (1.1), mas considerando os dados com melhor regularidade, a saber, $(v^0, v^1) \in V(0, 1) \times L^2(0, 1)$. O objetivo dessa alteração é obter resultados que não seriam possíveis de garantir, a priori, com os dados com a regularidade anterior.

Inicialmente, a cada $\varepsilon > 0$, associamos a solução v_ε de (1.31). Queremos mostrar que quando $\varepsilon \rightarrow 0$, podemos extrair uma subsequência de $(v_\varepsilon)_\varepsilon$ que converge em $L^2(0, T; L^2(0, 1))$ para a solução φ do sistema (1.5), adjunto a (1.2), com dado inicial $\varphi^0 = v^0$. Observe que, posta a modificação que fizemos, o espaço de φ^0 também passa a

ser mais restritivo que aquele considerado em (1.5).

Para todo $z \in H_0^1(0, T; V(0, 1))$, temos as formas variacionais da solução de (1.31) e de (1.5) dadas, respectivamente, por

$$-(\varepsilon(v_\varepsilon)_t, z_t)_{L^2(0, T; L^2(0, 1))} + (v_\varepsilon, z)_{L^2(0, T; V(0, 1))} - ((v_\varepsilon)_t, z)_{L^2(0, T; L^2(0, 1))} = 0 \quad (1.170)$$

e

$$(\varphi, z)_{L^2(0, T; V(0, 1))} - (\varphi_t, z)_{L^2(0, T; L^2(0, 1))} = 0. \quad (1.171)$$

Lema 1.19 *Dados $v^0 \in V(0, 1)$ e $v^1 \in L^2(0, 1)$, toda subsequência convergente da sequência $(v_\varepsilon)_\varepsilon$ de soluções de (1.31) possui uma subsequência, que ainda será denotada por $(v_\varepsilon)_\varepsilon$, que converge em $L^2(Q)$ para a solução φ de (1.5). Além disso, quando $\varepsilon \rightarrow 0$:*

$$v_\varepsilon \rightarrow \varphi \quad \text{em } L^2(Q), \quad (1.172)$$

$$v_\varepsilon(0) \rightarrow \varphi(0) \quad \text{em } V(0, 1), \quad (1.173)$$

$$\sqrt{\varepsilon}(v_\varepsilon)_t(0) \rightarrow 0 \quad \text{em } L^2(0, 1). \quad (1.174)$$

Demonstração. Consideremos uma subsequência convergente qualquer de $(v_\varepsilon)_\varepsilon$, que, por simplicidade de notação, denotaremos da mesma forma. Calculando a energia para o sistema (1.31) encontramos

$$\mathcal{F}_\varepsilon(t) = \frac{1}{2} \left(\varepsilon \|(v_\varepsilon)_t(t)\|_{L^2(0, 1)}^2 + \|v_\varepsilon(t)\|_{V(0, 1)}^2 \right). \quad (1.175)$$

Além disso, podemos verificar que

$$\frac{d\mathcal{F}_\varepsilon(t)}{dt} = \|(v_\varepsilon)_t(t)\|_{L^2(0, 1)}^2. \quad (1.176)$$

Observemos que (1.176) nos diz que $\mathcal{F}_\varepsilon$ é crescente. Logo, para todo $t \in [0, T]$, é válido que

$$\varepsilon \|(v_\varepsilon)_t(t)\|_{L^2(0, 1)}^2 + \|v_\varepsilon(t)\|_{V(0, 1)}^2 \leq 2\mathcal{F}_\varepsilon(T).$$

Uma vez que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2\mathcal{F}_\varepsilon(T) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\varepsilon \|v^1\|_{L^2(0, 1)}^2 + \|v^0\|_{V(0, 1)}^2 \right) = \|v^0\|_{V(0, 1)}^2,$$

conseguimos as limitações

$$(\sqrt{\varepsilon}(v_\varepsilon)_t)_\varepsilon \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; L^2(0, 1)), \quad (1.177)$$

$$(v_\varepsilon)_\varepsilon \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; V(0, 1)). \quad (1.178)$$

Dessa forma, passando a uma subsequência se preciso for,

$$v_\varepsilon \rightarrow v \text{ fracamente - * em } L^\infty(0, T; V(0, 1)), \quad (1.179)$$

$$(v_\varepsilon)_t \rightarrow v_t \text{ fracamente - * em } L^\infty(0, T; L^2(0, 1)). \quad (1.180)$$

Usando essas convergências, aplicamos o limite em (1.170) e obtemos

$$(v, z)_{L^2(0, T; V(0, 1))} - (v_t, z)_{L^2(0, T; L^2(0, 1))} = 0, \quad (1.181)$$

o que mostra que v é uma solução fraca para o sistema (1.5). Da unicidade de solução segue que $v = \varphi$.

Vamos agora buscar as convergências (1.172) a (1.174).

Limite (1.172). Observemos que de (1.178), (1.180) e do Teorema da Compacidade de Aubin-Lions, passando a uma subsequência de $(v_\varepsilon)_\varepsilon$, se necessário,

$$v_\varepsilon \rightarrow \varphi \text{ em } \mathcal{C}([0, T]; L^2(0, 1)) \hookrightarrow L^2(Q). \quad (1.182)$$

Limite (1.173). Do fato de $\mathcal{F}_\varepsilon$ ser crescente e limitada, temos que $(\mathcal{F}_\varepsilon(0))_\varepsilon$ é limitada e podemos extrair uma subsequência de $(v_\varepsilon(0), \sqrt{\varepsilon}(v_\varepsilon)_t(0))_\varepsilon$ de modo que

$$v_\varepsilon(0) \rightharpoonup \xi \text{ em } V(0, 1), \quad (1.183)$$

e

$$\sqrt{\varepsilon}(v_\varepsilon)_t(0) \rightharpoonup \eta \text{ em } L^2(0, 1). \quad (1.184)$$

Notemos que devido a (1.182), $\xi = \varphi(0)$. Além disso, de (1.176),

$$\frac{1}{2} \|v_\varepsilon(0)\|_{V(0, 1)}^2 + \int_0^T \|(v_\varepsilon)_t(t)\|_{L^2(0, 1)}^2 dt \leq \mathcal{F}_\varepsilon(T). \quad (1.185)$$

Conseguimos com a desigualdade acima, as propriedades do limite superior e a convergência (1.183) que

$$\begin{aligned} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \|(v_\varepsilon)_t(t)\|_{L^2(0, 1)}^2 dt &\leq \frac{1}{2} \|v^0\|_{V(0, 1)}^2 + \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2} \|v_\varepsilon(0)\|_{V(0, 1)}^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \|v^0\|_{V(0, 1)}^2 - \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \|v_\varepsilon(0)\|_{V(0, 1)}^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \|v^0\|_{V(0, 1)}^2 - \frac{1}{2} \|\varphi(0)\|_{V(0, 1)}^2. \end{aligned} \quad (1.186)$$

Calculando a energia para o sistema (1.4) e integrando de 0 a T chegamos a

$$\int_0^T \|\varphi_t(t)\|_{L^2(0, 1)}^2 dt = \frac{1}{2} \|\varphi^0\|_{V(0, 1)}^2 - \frac{1}{2} \|\varphi(0)\|_{V(0, 1)}^2. \quad (1.187)$$

Utilizando em (1.186) a desigualdade (1.187) e as convergências (1.180) e (1.182), obtemos

$$\begin{aligned} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \|(v_\varepsilon)_t(t)\|_{L^2(0,1)}^2 dt &\leq \int_0^T \|\varphi_t(t)\|_{L^2(0,1)}^2 dt \\ &\leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \|(v_\varepsilon)_t(t)\|_{L^2(0,1)}^2 dt. \end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \|(v_\varepsilon)_t(t)\|_{L^2(0,1)}^2 dt = \int_0^T \|\varphi_t(t)\|_{L^2(0,1)}^2 dt. \quad (1.188)$$

Podemos reorganizar (1.185), fazer uso das convergências (1.183) e (1.188) e da desigualdade (1.187) para conseguir

$$\begin{aligned} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \|v_\varepsilon(0)\|_{V(0,1)}^2 &\leq \frac{1}{2} \|v^0\|_{V(0,1)}^2 - \int_0^T \|\varphi_t(t)\|_{L^2(0,1)}^2 dt \\ &= \frac{1}{2} \|\varphi(0)\|_{V(0,1)}^2 \\ &\leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \|v_\varepsilon(0)\|_{V(0,1)}^2. \end{aligned}$$

Assim encontramos

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \|v_\varepsilon(0)\|_{V(0,1)}^2 = \frac{1}{2} \|\varphi(0)\|_{V(0,1)}^2 \quad (1.189)$$

e obtemos (1.173) da mesma forma que concluimos (1.172).

Limite (1.174). Integrando a igualdade (1.176) encontramos

$$\frac{1}{2} \|(v_\varepsilon)_t(0)\|_{L^2(0,1)}^2 = \mathcal{F}_\varepsilon(T) - \int_0^T \|(v_\varepsilon)_t(t)\|_{L^2(0,1)}^2 dt - \frac{1}{2} \|v_\varepsilon(0)\|_{V(0,1)}^2. \quad (1.190)$$

Dos limites obtidos previamente e de (1.187) vem que

$$\begin{aligned} &\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \varepsilon \|(v_\varepsilon)_t(0)\|_{L^2(0,1)}^2 \\ &= \frac{1}{2} \|v^0\|_{V(0,1)}^2 - \int_0^T \|\varphi_t(t)\|_{L^2(0,1)}^2 dt - \frac{1}{2} \|\varphi(0)\|_{V(0,1)}^2 \\ &= 0 \\ &\leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \varepsilon \|(v_\varepsilon)_t(0)\|_{L^2(0,1)}^2. \end{aligned}$$

Disso segue que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \varepsilon \|(v_\varepsilon)_t(0)\|_{L^2(0,1)}^2 = 0$$

e (1.174) está provada. ■

Condição de Optimalidade para a Equação do Calor. Multiplicando a equação em (1.3) por φ solução de (1.5) e integrando sobre Q , temos

$$\int_Q h 1_\omega \varphi dx dt = \int_0^1 u(T) \varphi^0 dx - \int_0^1 u^0 \varphi(0) dx. \quad (1.191)$$

Suponhamos que $u(x, T) = 0$. Então, para todo $\varphi^0 \in L^2(0, 1)$,

$$\int_0^1 u(T) \varphi^0 dx = 0.$$

Reciprocamente, se a afirmação acima é verdadeira, escolhendo $\varphi^0(x) = u(x, T)$, temos

$$\int_0^1 |u(T)|^2 dx = 0.$$

Logo, $u(x, T) = 0$. Dessa forma, retornando para (1.191), a controlabilidade nula do sistema (1.3) é equivalente a provar que, para todo $\varphi^0 \in L^2(0, 1)$,

$$\int_0^T \int_0^1 h 1_\omega \varphi dx dt + \int_0^1 u^0 \varphi(0) dx = 0, \quad (1.192)$$

com φ sendo a solução do sistema (1.5) associada a φ^0 . A equação (1.192) é a condição de optimalidade para o sistema (1.2).

Do mesmo jeito que fizemos para (1.1), definimos o funcional contínuo e estritamente convexo $G : L^2(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$:

$$G(\varphi^0) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 |\varphi|^2 1_\omega dx dt + \int_0^1 u^0(x) \varphi(x, 0) dx, \quad (1.193)$$

onde φ é a solução de (1.5) para o dado inicial φ^0 . Sua derivada em $\bar{\varphi}^0$ é dada por

$$DG(\bar{\varphi}^0) \cdot (\varphi^0) = \int_0^T \int_\omega \bar{\varphi} \varphi dx dt + \int_0^1 u^0(x) \varphi(x, 0) dx, \quad (1.194)$$

para toda φ solução de (1.5) correspondente ao dado inicial φ^0 . Assim, se G tem um mínimo em $\bar{\varphi}_0$, então a condição de optimalidade é satisfeita com $h = \bar{\varphi}$.

Passagem ao Limite. De acordo com o Teorema 1.17, para cada $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0(\omega, T)]$, o sistema (1.1) é controlável. A demonstração do teorema fornece que o controle $\bar{h}_\varepsilon$ é a solução $\bar{v}_\varepsilon$ do sistema (1.31) associada ao dado inicial $(\bar{v}_\varepsilon^0, \bar{v}_\varepsilon^1) \in (E^\varepsilon)'$, ponto onde o funcional (1.149) assume seu valor mínimo. Disso, para toda v_ε solução de (1.31) com dado inicial (v^0, v^1) , temos

$$\begin{aligned}
& DJ_\varepsilon(\bar{v}^0, \bar{v}^1) \cdot (v^0, v^1) \\
&= \int_0^T \int_\omega \bar{v}_\varepsilon v_\varepsilon dx dt + \int_0^1 v_\varepsilon(0)(\varepsilon u^1 + u^0) dx - \int_0^1 \varepsilon(v_\varepsilon)_t(0) u^0 dx \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{1.195}$$

Observemos que se, em particular, tomamos $v_\varepsilon = \bar{v}_\varepsilon$, então

$$\int_0^T \int_\omega |\bar{v}_\varepsilon|^2 dx dt = \int_0^1 u^0(x) (\varepsilon(\bar{v}_\varepsilon)_t(x, 0) - \bar{v}_\varepsilon(x, 0)) dx - \int_0^1 \varepsilon u^1(x) \bar{v}_\varepsilon(x, 0) dx. \tag{1.196}$$

Segue que

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_\omega |\bar{v}_\varepsilon|^2 dx dt &\leq \|u^0\|_{V(0,1)} \|\varepsilon(\bar{v}_\varepsilon)_t(0) - \bar{v}_\varepsilon(0)\|_{V'(0,1)} + \varepsilon \|u^1\|_{L^2(0,1)} \|\bar{v}_\varepsilon(0)\|_{L^2(0,1)} \\
&\leq C \left(\|\varepsilon(\bar{v}_\varepsilon)_t(0) - \bar{v}_\varepsilon(0)\|_{V'(0,1)} + \sqrt{\varepsilon} \|\bar{v}_\varepsilon(0)\|_{L^2(0,1)} \right).
\end{aligned}$$

Tendo em mente (1.166), vemos que

$$\|\bar{v}_\varepsilon\|_{L^2(\omega \times (0,T))}^4 \leq C(T) \|\bar{v}_\varepsilon\|_{L^2(\omega \times (0,T))}^2$$

e chegamos a

$$\|\bar{v}_\varepsilon\|_{L^2(\omega \times (0,T))}^2 \leq C(T). \tag{1.197}$$

Essa limitação uniforme em relação a ε nos permite afirmar que existe uma subsequência de $(\bar{v}_\varepsilon)_\varepsilon$, que denotaremos da mesma forma, tal que

$$\bar{v}_\varepsilon \rightharpoonup \bar{v} \quad \text{em } L^2(\omega \times (0, T)). \tag{1.198}$$

Agora retomamos (1.195) considerando $(v^0, v^1) \in V(0, 1) \times L^2(0, 1)$. Utilizando as convergências do Lema 1.19, o limite de (1.195) é

$$\int_0^T \int_\omega \bar{v} \varphi dx dt + \int_0^1 \varphi(0) u^0 dx = 0, \tag{1.199}$$

com φ solução de (1.5) associada ao dado inicial $v^0 \in V(0, 1)$.

Vamos estender a igualdade (1.199) para todo $v^0 = \varphi^0 \in L^2(0, 1)$ usando a densidade de $V(0, 1)$ em $L^2(0, 1)$. Dado $\varphi^0 \in L^2(0, 1)$, seja $(v_n^0)_{n \in \mathbb{N}}$ a sequência em $V(0, 1)$ que converge para φ^0 . Sabemos que para cada v_n^0 existe φ_n solução fraca de (1.5), ou seja, φ_n satisfaz

$$-((\varphi_n)_t, z)_{L^2(0,T;L^2(0,1))} + (\varphi_n, z)_{L^2(0,T;V(0,1))} = 0, \tag{1.200}$$

para toda $z \in H_0^1(0, T; V(0, 1))$. Multiplicando a equação em (1.5) por φ_n e integrando sobre Q , obtemos

$$\int_0^T \|\varphi_n(t)\|_{V(0,1)}^2 dt + \frac{1}{2} \|\varphi_n(0)\|_{L^2(0,1)}^2 = \frac{1}{2} \|v_n^0\|_{L^2(0,1)}^2 \leq \frac{C}{2} \|v_n^0\|_{V(0,1)}^2.$$

Se, por outro lado, multiplicamos a equação em (1.5) por $(\varphi_n)_t$ e integramos sobre Q , encontramos

$$\int_0^T \|(\varphi_n)_t(t)\|_{L^2(0,1)}^2 dt + \frac{1}{2} \|\varphi_n(0)\|_{V(0,1)}^2 = \frac{1}{2} \|v_n^0\|_{V(0,1)}^2.$$

Uma vez que $(v_n^0)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente, tem-se

$$(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ limitada em } L^2(0, T; V(0, 1)), \quad (1.201)$$

$$(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ limitada em } L^2(0, T; L^2(0, 1)), \quad (1.202)$$

$$(\varphi_n(0))_{n \in \mathbb{N}} \text{ limitada em } L^2(0, 1), \quad (1.203)$$

$$(\varphi_n(0))_{n \in \mathbb{N}} \text{ limitada em } V(0, 1), \quad (1.204)$$

$$((\varphi_n)_t)_{n \in \mathbb{N}} \text{ limitada em } L^2(0, T; L^2(0, 1)). \quad (1.205)$$

Logo, existe uma subsequência de $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$, denotada da mesma forma, tal que

$$\varphi_n \rightarrow \varphi \quad \text{fracamente em } L^2(0, T; V(0, 1)), \quad (1.206)$$

$$\varphi_n \rightarrow \varphi \quad \text{fracamente em } L^2(0, T; L^2(0, 1)), \quad (1.207)$$

$$\varphi_n(0) \rightarrow \xi \quad \text{fracamente em } L^2(0, 1), \quad (1.208)$$

$$\varphi_n(0) \rightarrow \xi \quad \text{fracamente em } V(0, 1), \quad (1.209)$$

$$(\varphi_n)_t \rightarrow \zeta \quad \text{fracamente em } L^2(0, T; L^2(0, 1)). \quad (1.210)$$

Sem grandes dificuldades podemos mostrar que $\zeta = \varphi_t$. Passando o limite em (1.200), encontramos

$$-(\varphi_t, z)_{L^2(0, T; L^2(0, 1))} + (\varphi, z)_{L^2(0, T; V(0, 1))} = 0,$$

concluindo que φ é solução fraca de (1.5) com dado inicial φ^0 .

Queremos agora passar o limite na sequência gerada por (1.199), a saber,

$$\int_0^T \int_{\omega} \bar{v} \varphi_n dx dt + \int_0^1 \varphi_n(0) u^0 dx = 0, \quad (1.211)$$

Observemos que se integramos de t a T nos cálculos mencionados logo após (1.200), conseguimos

$$\int_t^T \|\varphi_n(s)\|_{V(0,1)}^2 ds \leq C,$$

para todo $t \in [0, T]$. Assim, $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em $L^\infty(0, T; V(0, 1))$ e o Teorema da

Compacidade de Aubin-Lions, passando a uma subsequência se preciso, fornece que

$$\varphi_n \rightarrow \varphi \text{ em } \mathcal{C}(0, T; L^2(0, 1)).$$

Com isso mostra-se a igualdade $\xi = \varphi(0)$. Observemos que por (1.202) temos que $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em $L^2(0, T; L^2(\omega))$ e, conseqüentemente, alguma subsequência satisfaz

$$\varphi_n \rightarrow \psi \text{ fracamente em } L^2(0, T; L^2(\omega)),$$

que pode ser escrito como

$$(f, \varphi_n) \rightarrow (f, \psi), \quad \forall f \in L^2(0, T; L^2(\omega)). \quad (1.212)$$

Fazendo o mesmo para (1.207),

$$(f, \varphi_n) \rightarrow (f, \varphi), \quad \forall f \in L^2(0, T; L^2(0, 1)).$$

Se escolhemos $f \in \mathcal{C}_0^\infty(0, T; \mathcal{C}_0^\infty(0, 1))$ tal que $\text{supp } f \subset \omega \times (0, T)$, então

$$(f, \varphi_n) \rightarrow (f, \varphi), \quad \forall f \in \mathcal{C}_0^\infty(0, T; \mathcal{C}_0^\infty(\omega)).$$

Por (1.212), isso implica que $(f, \psi) = (f, \varphi)$ para toda $f \in \mathcal{C}_0^\infty(0, T; \mathcal{C}_0^\infty(\omega))$ e concluimos que $\psi = \varphi|_{(\omega \times (0, T))}$. Aplicando o limite em (1.211) e usando as convergências (1.207) e (1.209), vemos que

$$\int_0^T \int_\omega \bar{v} \varphi dx dt + \int_0^1 \varphi(0) u^0 dx = 0.$$

Portanto, obtemos que a condição de optimalidade (1.192) é satisfeita com $h = \bar{v}$ e, como consequência, o sistema (1.2) é nulamente controlável. Note que isso nos diz que uma subsequência da sequência de controles h_ε para o sistema (1.1) converge fraco para o controle do sistema (1.3) e encerra a demonstração do Teorema 1.1.

Capítulo 2

Equação de Stokes com Restrição

Sejam $M \in \mathbb{N}$, $N = 2, 3$ e Ω um conjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^N$ cuja fronteira Γ é de classe $\mathcal{C}^2$. Em Ω consideramos um subconjunto ω não vazio. Para um tempo $T > 0$, definimos $Q = \Omega \times (0, T)$, $\omega_T = \omega \times (0, T)$ e $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$. Também definimos os espaços

$$V = \{v \in [H_0^1(\Omega)]^N \mid \operatorname{div} v = 0\}$$

e

$$H = \{w \in [L^2(\Omega)]^N \mid \operatorname{div} w = 0, \ w \cdot \nu = 0\},$$

em que ν denota o vetor normal unitário externo a Γ .

Consideremos o sistema de Stokes

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + \nabla p = g 1_\omega & \text{em } Q, \\ \operatorname{div} y = 0 & \text{em } Q, \\ y = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y(0) = y^0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (2.1)$$

em que g é o controle e 1_ω é a função característica de ω . O estado é representado por y , uma função vetorial que a cada $(x, t) \in Q$ associa o vetor $y(x, t) = (y_1(x, t), \dots, y_N(x, t))$, e $p = p(x, t)$ é a pressão do fluido.

É conhecido que, para $g \in L^2(0, T; H)$ e $y^0 \in H$, o sistema de Stokes (2.1) tem única solução na classe

$$\begin{aligned} y &\in \mathcal{C}([0, T]; H) \cap L^2(0, T; V), \\ p &\in H^{-1}(0, T; L^2(\Omega)). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Esse fato pode ser visto em [28].

Consideremos funções vetoriais não nulas

$$e_i = (e_{i1}, e_{i2}, \dots, e_{iN}), \quad 1 \leq i \leq M, \quad (2.3)$$

pertencentes a $L^2(0, T; H)$ e

$$E = \{(\operatorname{rot} e_1)1_\omega, (\operatorname{rot} e_2)1_\omega, \dots, (\operatorname{rot} e_M)1_\omega\}. \quad (2.4)$$

Aqui compreendemos que para uma função escalar h ou vetorial F , o rotacional é dado por

$$\operatorname{rot} h = (\partial_2 h, -\partial_1 h)^T \quad \text{ou} \quad \operatorname{rot} F = \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1,$$

no caso $N = 2$, e por

$$\operatorname{rot} F = (\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2, \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3, \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1)^T$$

quando $N = 3$.

Tomaremos como hipótese que

$$E \text{ é um subconjunto linearmente independente de } L^2(0, T; H). \quad (2.5)$$

Nosso objetivo é garantir a controlabilidade nula do sistema (2.1) com um número finito de restrições sobre o estado y . Em termos mais precisos, o que queremos é provar que para cada $e_i \in L^2(0, T; H)$, $1 \leq i \leq M$, e um dado inicial $y^0 \in H$, é possível encontrar um controle $g \in L^2(0, T; H)$ que leva o estado do sistema (2.1) a zero em $t = T$, ou seja,

$$y(T) = 0 \text{ em } \Omega \quad (2.6)$$

e tal que

$$(y, e_i)_{L^2(0, T; H)} = 0, \quad 1 \leq i \leq M. \quad (2.7)$$

Enunciamos a seguir o nosso principal teorema.

Teorema 2.1 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto e limitado com fronteira Γ de classe $\mathcal{C}^2$ e ω um subconjunto aberto não vazio de Ω . Para todo conjunto E verificando (2.5) e $y^0 \in H$, existe um controle $g \in L^2(0, T; H)$ tal que a solução y do sistema (2.1) satisfaz (2.6) e (2.7). Além disso,*

$$\|g\|_{L^2(0, T; H)} \leq C \|y^0\|_H, \quad (2.8)$$

com $C > 0$ uma constante dependente de Ω, ω, T e $\sum_{i=1}^M \|e_i\|_{L^2(0, T; H)}$.

Em [27], Mophou e Nakoulima estudaram um problema semelhante a esse. Esse artigo nos serviu de inspiração para as ideias utilizadas aqui. Os autores trabalharam com uma equação do calor semilinear também com uma quantidade finita de restrições no

estado. Para isso, utilizaram, principalmente, desigualdades de Carleman para a equação do calor linearizada e método do ponto fixo. O caso que apresentamos aqui utiliza basicamente desigualdades de Carleman. No entanto, a condição sobre o conjunto E difere da necessária para [27].

É importante para o problema que estamos estudando estabelecermos uma desigualdade de Carleman apropriada. Com esse intuito, partiremos de uma desigualdade de Carleman conhecida e faremos adaptações para obtermos a que desejamos. Começamos considerando o sistema adjunto a (2.1):

$$\begin{cases} -w_t - \Delta w + \nabla r = f, & \text{em } Q, \\ \operatorname{div} w = 0, & \text{em } Q, \\ w = 0, & \text{sobre } \Sigma, \\ w(T) = w^0, & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (2.9)$$

Seja $\psi \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$ uma função auxiliar que satisfaz as seguintes condições:

$$\begin{cases} \psi(x) > 0, & \forall x \in \Omega, \\ \psi(x) = 0, & \forall x \in \Gamma, \\ |\nabla \psi(x)| > 0, & \forall x \in \overline{\Omega - \omega_1}, \end{cases} \quad (2.10)$$

em que $\omega_1 \subset \omega$ é um subconjunto aberto não vazio tal que $\overline{\omega_1} \subset \omega$. A existência de ψ é garantida em [12]. Tomamos $\beta \in \mathcal{C}^\infty([0, 1])$ dada por

$$\begin{cases} \beta(t) = t, & t \in (0, 1/4), \\ \beta(t) \in [1/4, 1/2], & t \in (1/4, 3/4), \\ \beta(t) = 1 - t, & t \in (3/4, 1) \end{cases}$$

e, a partir dela, a função $\mu(t) = T\beta(t/T) \in \mathcal{C}^\infty([0, T])$. Dessa forma,

$$\begin{cases} \mu(t) = t, & t \in (0, T/4), \\ \mu(t) \in [T/4, T/2], & t \in (T/4, 3T/4), \\ \mu(t) = T - t, & t \in (3T/4, T). \end{cases}$$

Definimos para $\lambda > 1, k \geq 2$ e $(x, t) \in Q$, os pesos:

$$\varphi(x, t) = \frac{e^{\lambda\psi(x)} - e^{2\lambda\|\psi\|_\infty}}{(\mu(t))^k}, \quad (2.11)$$

$$\eta(x, t) = \frac{e^{\lambda(\psi(x) + \|\psi\|_\infty)}}{(\mu(t))^k} \quad (2.12)$$

$$\bar{\varphi}(t) = \min_{x \in \Omega} \varphi(x, t) = \frac{1 - e^{2\lambda\|\psi\|_\infty}}{(\mu(t))^k} \quad (2.13)$$

$$\bar{\eta}(t) = \min_{x \in \Omega} \eta(x, t) = \frac{e^{\lambda\|\psi\|_\infty}}{(\mu(t))^k} \quad (2.14)$$

$$\tilde{\varphi}(t) = \max_{x \in \Omega} \varphi(x, t) = \frac{e^{\lambda\|\psi\|_\infty} - e^{2\lambda\|\psi\|_\infty}}{(\mu(t))^k} \quad (2.15)$$

$$\tilde{\eta}(t) = \max_{x \in \Omega} \eta(x, t) = \frac{e^{2\lambda\|\psi\|_\infty}}{(\mu(t))^k}. \quad (2.16)$$

Feitas essas colocações, estamos aptos a enunciar uma desigualdade de Carleman para o sistema de Stokes (2.9). Esse resultado está disponível em [2].

Proposição 2.2 *Sejam $\varphi, \eta, \bar{\varphi}, \bar{\eta}, \tilde{\varphi}$ e $\tilde{\eta}$ as funções definidas em (2.11)-(2.16), $f \in (L^2(Q))^N$, $k \geq 4$ e $w^0 \in H$. Então existe $\lambda_0 > 0$ tal que para todo $\lambda \geq \lambda_0$ existem constantes $c_0(\lambda) > 1$ e $s_0(\lambda) > 0$ tais que, para quaisquer $s \geq s_0$, a solução de (2.9) verifica*

$$\begin{aligned} & c_0(\lambda)s \int_Q e^{2s\varphi} \eta |f|^2 dxdt + c_0^2(\lambda)s^4 \lambda^4 \int_0^T \int_\omega e^{2s\varphi} \eta^3 |w|^2 dxdt \\ & \geq s^{-1} \int_Q e^{2s\bar{\varphi}} \bar{\eta}^{-1} |w_t|^2 dxdt + s^{-1} \int_Q e^{2s\varphi} \eta^{-1} |\Delta w|^2 dxdt \\ & \quad + \int_Q e^{2s\varphi} |\nabla(\text{rot } w)|^2 dxdt + s\lambda^2 \int_Q e^{2s\varphi} \eta |\nabla w|^2 dxdt \\ & \quad + s^2 \lambda^2 \int_Q e^{2s\varphi} \eta^2 |\text{rot } w|^2 dxdt + s^3 \lambda^4 \int_Q e^{2s\varphi} \eta^3 |w|^2 dxdt \\ & \quad + s^{-1} \int_0^T \int_\Omega e^{2s\bar{\varphi}} \bar{\eta}^{-1} |\nabla r|^2 dxdt. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Utilizando φ e η dadas, respectivamente, por (2.11) e (2.12), definimos em Q as funções

$$\alpha = e^{s\varphi} \eta^{3/2} \quad (2.18)$$

e

$$\bar{\alpha} = e^{2s\varphi} \eta, \quad (2.19)$$

que são positivas e limitadas. Fixando λ e s adequados, podemos substituir (2.18) e (2.19) em (2.17), fazer uso das limitações e encontrar que para todo $w \in \mathcal{C}([0, T]; H) \cap L^2(0, T; V)$,

$$\int_0^T \int_{\Omega} \alpha^2 |w|^2 dx dt \leq C \left(\int_0^T \int_{\Omega} |f|^2 dx dt + \int_0^T \int_{\omega} |w|^2 dx dt \right). \quad (2.20)$$

Por ora manteremos essa informação guardada e buscaremos outras que também serão importantes.

Dado $e_i \in L^2(0, T; H)$ como em (2.3), $1 \leq i \leq M$, introduzimos o sistema adjunto a (2.1) com lado direito apropriado:

$$\begin{cases} -(z_i)_t - \Delta z_i + \nabla q_i = e_i & \text{em } Q, \\ \operatorname{div} z_i = 0 & \text{em } Q, \\ z_i = 0 & \text{em } \Sigma, \\ z_i(T) = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (2.21)$$

Seguindo os passos traçados em [27], no Teorema 2.4, estabelecemos uma equivalência entre o problema de controlabilidade no qual estamos interessados e um no qual as restrições são referentes ao controle. Antes, porém, provaremos um lema que é usado para garantir a validade do Teorema 2.4.

Lema 2.3 *Seja α a função definida em (2.18). Assuma que (2.5) é válida. As funções $z_1 1_{\omega}, z_2 1_{\omega}, \dots, z_M 1_{\omega}$, com z_i solução de (2.21), são linearmente independentes, assim como $\alpha z_1 1_{\omega}, \alpha z_2 1_{\omega}, \dots, \alpha z_M 1_{\omega}$.*

Demonstração. Tomemos $z = \sum_{i=1}^M a_i z_i$ uma combinação linear de soluções de (2.21) tal que $z|_{\omega \times (0, T)} = 0$. Uma vez que cada z_i , $1 \leq i \leq M$, é solução de (2.21), temos que

$$-z_t - \Delta z + \sum_{i=1}^M a_i \nabla q_i = \sum_{i=1}^M a_i e_i.$$

Como $z = 0$ em $\omega \times (0, T)$, segue que

$$\sum_{i=1}^M a_i \nabla q_i = \sum_{i=1}^M a_i e_i \quad \text{em } \omega \times (0, T).$$

Aplicando o rotacional, encontramos

$$\sum_{i=1}^M a_i \operatorname{rot} e_i = 0 \quad \text{em } \omega \times (0, T).$$

Dessa forma, por (2.5), $a_1 = a_2 = \dots = a_M = 0$ e as funções $z_1 1_{\omega}, z_2 1_{\omega}, \dots, z_M 1_{\omega}$ são linearmente independentes. Tendo isso, a mesma conclusão é facilmente obtida para o

segundo conjunto de funções. ■

Em posse do Lema 2.3, definimos os subespaços de dimensão finita M :

$$Z = \text{span} \{z_1 1_\omega, z_2 1_\omega, \dots, z_M 1_\omega\}, \quad (2.22)$$

$$Z_\alpha = \text{span} \{\alpha z_1 1_\omega, \alpha z_2 1_\omega, \dots, \alpha z_M 1_\omega\} \quad (2.23)$$

e consideramos o problema de controlabilidade nula com restrição no controle que consiste em: *dado $y_0 \in H$ e $z_0 \in Z_\alpha$, encontrar $z \in L^2(0, T; H)$ e $y = y(z)$ satisfazendo*

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + \nabla p = (z_0 + z)1_\omega & \text{em } Q, \\ \text{div } y = 0 & \text{em } Q, \\ y = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y(0) = y^0 & \text{em } \Omega \end{cases} \quad (2.24)$$

e tal que

$$z \in Z^\perp \quad (2.25)$$

e

$$y(x, T) = 0 \quad \text{em } \Omega. \quad (2.26)$$

Teorema 2.4 *Assumamos as hipóteses do Teorema 2.1. Seja α a função definida em (2.18) e $Z^\perp$ o complemento ortogonal de Z em $L^2(0, T; H)$. Então existe $z_0 \in Z_\alpha$ tal que o problema de controlabilidade nula com restrição no estado (2.1), (2.6) e (2.7) é equivalente ao problema de controlabilidade nula com restrição no controle (2.24)-(2.26)*

Demonstração. Suponhamos que existe solução para o problema com restrição no estado (2.1), (2.6) e (2.7). Devemos encontrar $z_0 \in Z_\alpha$ adequado e $z \in L^2(0, T; H)$ com $z \in Z^\perp$ tais que vale (2.24)-(2.26). Fazendo o produto interno em $L^2(0, T; H)$ entre a equação em (2.1) e z_i solução de (2.21), temos

$$\int_0^T \int_\Omega y_t z_i dx dt + \int_0^T \int_\Omega (-\Delta y) z_i dx dt + \int_0^T \int_\Omega \nabla p \cdot z_i dx dt = \int_0^T \int_\omega g z_i dx dt.$$

Usando integração por partes e as informações dos sistemas, encontramos, para $1 \leq i \leq M$,

$$\int_0^T \int_\omega g z_i dx dt = - \int_\Omega y^0 z_i(0) dx + \int_0^T \int_\Omega y e_i dx dt. \quad (2.27)$$

De acordo com (2.7), (2.27) se resume a

$$\int_0^T \int_{\omega} g z_i dx dt = - \int_{\Omega} y^0 z_i(0) dx, \quad 1 \leq i \leq M. \quad (2.28)$$

Definimos

$$\hat{Z} = \text{span}\{z_1, z_2, \dots, z_M\} \subset C([0, T]; H) \hookrightarrow L^2(0, T; H)$$

e em $\hat{Z} \times \hat{Z}$ a forma bilinear

$$a(u, v) = \int_0^T \int_{\omega} \alpha u v dx dt. \quad (2.29)$$

Com o auxílio do Lema 2.3, temos que a define um produto interno $\hat{Z}$. Consideremos o funcional linear $G : \hat{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$G(u) = - \int_{\Omega} y^0 u(0) dx.$$

Aplicando o Teorema de Lax-Milgram, temos que existe único $\hat{z}_0 \in \hat{Z}$ tal que

$$G(u) = a(\hat{z}_0, u), \quad \forall \quad u \in \hat{Z}.$$

Escolhendo $u = z_i$ e $z_0 = \alpha \hat{z}_0 1_{\omega}$ vemos que $z_0 \in Z_{\alpha}$ e vale

$$- \int_{\Omega} y^0 z_i(0) dx = \int_0^T \int_{\omega} z_0 z_i dx dt, \quad 1 \leq i \leq M. \quad (2.30)$$

Substituindo (2.30) em (2.28) vemos que

$$\int_0^T \int_{\omega} (g - z_0) z_i dx dt = 0, \quad 1 \leq i \leq M.$$

Segue que $(g - z_0)1_{\omega} \in Z^{\perp}$ e, portanto, existe $z \in Z^{\perp}$ tal que

$$(g - z_0)1_{\omega} = z1_{\omega},$$

ou, equivalentemente,

$$g1_{\omega} = (z_0 + z)1_{\omega}.$$

Sendo assim, basta tomarmos $g1_{\omega} = (z_0 + z)1_{\omega}$ em (2.1) para que tenhamos (2.24). Isso conclui a primeira parte da demonstração.

Suponhamos agora que para cada $z_0 \in Z_{\alpha}$ existe $z \in L^2(0, T; H)$ com $z \in Z^{\perp}$ satisfazendo (2.24) - (2.26). Devemos mostrar que existe $g \in L^2(0, T; H)$ tal que (2.1), (2.6) e (2.7) é válido. Tomemos $g1_{\omega} = (z_0 + z)1_{\omega}$, com $z_0 \in Z_{\alpha}$ que verifica (2.30). Com isso, basta provar que (2.7) é verdadeira. Por cálculos análogos aos que nos levaram a (2.27), o produto interno em $\hat{Z}$ entre a primeira equação em (2.24) e $z_i, 1 \leq i \leq M$,

fornece

$$\int_0^T \int_{\omega} z_0 z_i dx dt + \int_0^T \int_{\omega} z z_i dx dt = - \int_{\Omega} y^0 z_i(0) dx + \int_0^T \int_{\Omega} y e_i dx dt. \quad (2.31)$$

Uma vez que z_0 satisfaz (2.30), conseguimos da equação (2.31) que

$$\int_0^T \int_{\Omega} y e_i dx dt = \int_0^T \int_{\omega} z z_i dx dt, \quad 1 \leq i \leq M. \quad (2.32)$$

Como $z_i 1_{\omega} \in Z$ e $z \in Z^{\perp}$, o lado direito de (2.32) é nulo e temos o que queríamos. ■

Posto esse teorema, nosso propósito é garantir que (2.24)-(2.26) ocorrem. Para isso precisamos de uma desigualdade de Carleman mais adequada que a apresentada anteriormente. O lema a seguir será útil nesse processo.

Denotaremos por $L(\rho)$ o operador associado ao sistema (2.9):

$$L(\rho) = -\rho_t - \Delta \rho + \nabla \pi.$$

Lema 2.5 *Admitamos (2.5) e consideremos $z_i, 1 \leq i \leq M$, solução de (2.21). Seja ρ uma função tal que $\rho|_{\omega_T} \in Z$, ou seja, $\rho|_{\omega_T} = \sum_{i=1}^M a_i z_i|_{\omega}$, com $a_1, \dots, a_M \in \mathbb{R}$. Se ρ satisfaz $\text{rot}(-\rho_t - \Delta \rho) = 0$ em $\omega \times (0, T)$, então ρ é nula em $\omega \times (0, T)$.*

Demonstração. As hipóteses que temos nos dizem que

$$0 = \text{rot}(-\rho_t - \Delta \rho) = \text{rot} \left(\sum_{i=1}^M a_i (-(z_i)_t - \Delta z_i) \right) \quad \text{em } \omega \times (0, T).$$

Uma vez que z_i é solução de (2.21),

$$0 = \text{rot} \left(\sum_{i=1}^M a_i (e_i - \nabla q_i) \right) = \sum_{i=1}^M a_i \text{rot}(e_i - \nabla q_i) \quad \text{em } \omega \times (0, T). \quad (2.33)$$

Assim,

$$\sum_{i=1}^M a_i (\text{rot } e_i) 1_{\omega} = 0.$$

Usando a condição (2.5) temos que $a_i = 0$, para todo $1 \leq i \leq M$. Logo, $\rho \equiv 0$ em $\omega \times (0, T)$. ■

No que segue, o operador projeção ortogonal de $L^2(0, T; H)$ sobre Z será denotado por P .

A partir deste momento usaremos C para denotar uma constante positiva qualquer que pode mudar de linha para linha.

Lema 2.6 *Consideremos (2.5) válida. Então, para qualquer $\rho \in \mathcal{C}([0, T]; H) \cap L^2(0, T; V)$, existe uma constante $C = C(\Omega, \omega)$ tal que*

$$\int_0^T \int_{\Omega} \alpha^2 |\rho|^2 dx dt \leq C \left(\int_0^T \int_{\Omega} |L(\rho)|^2 dx dt + \int_0^T \int_{\omega} |\rho - P\rho|^2 dx dt \right). \quad (2.34)$$

Demonstração. Suponhamos que (2.34) não é verdadeira. Isso significa que para todo $n \in \mathbb{N}$ podemos encontrar um $\rho_n \in \mathcal{C}([0, T]; H) \cap L^2(0, T; V)$ tal que

$$\int_0^T \int_{\Omega} \alpha^2 |\rho_n|^2 dx dt > n \left(\int_0^T \int_{\Omega} |L(\rho_n)|^2 dx dt + \int_0^T \int_{\omega} |\rho_n - P\rho_n|^2 dx dt \right).$$

Logo, usando a linearidade de L e P , podemos assumir que

$$\int_0^T \int_{\Omega} \alpha^2 |\rho_n|^2 dx dt = 1, \quad (2.35)$$

$$\int_0^T \int_{\Omega} |L(\rho_n)|^2 dx dt < \frac{1}{n}, \quad (2.36)$$

e

$$\int_0^T \int_{\omega} |\rho_n - P\rho_n|^2 dx dt < \frac{1}{n}. \quad (2.37)$$

De fato, caso o lado esquerdo de (2.35), que denotaremos por A_n , não seja 1, basta tomarmos $\bar{\rho}_n = \rho_n / \sqrt{A_n}$ para que tenhamos (2.35)-(2.37). Observemos que

$$\int_0^T \int_{\omega} \alpha^2 |P\rho_n|^2 dx dt \leq 2 \int_0^T \int_{\omega} \alpha^2 |\rho_n|^2 dx dt + 2 \int_0^T \int_{\omega} \alpha^2 |\rho_n - P\rho_n|^2 dx dt.$$

Da limitação da função α , de (2.35) e (2.37), podemos afirmar que existe $C > 0$ tal que

$$\int_0^T \int_{\omega} \alpha^2 |P\rho_n|^2 dx dt \leq C. \quad (2.38)$$

Sabendo que $\|\cdot\|_{\alpha} : Z \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\|z\|_{\alpha} = \sqrt{\int_0^T \int_{\omega} \alpha^2 |z|^2 dx dt}$$

define uma norma em Z e que em espaço de dimensão finita todas as normas são equivalentes, (2.38) nos leva a

$$\|P\rho_n\|_{L^2(0, T; [L^2(\omega)]^N)} \leq C. \quad (2.39)$$

Uma vez que

$$\|\rho_n\|_{L^2(0,T;[L^2(\omega)]^N)} \leq \|\rho_n - P\rho_n\|_{L^2(0,T;[L^2(\omega)]^N)} + \|P\rho_n\|_{L^2(0,T;[L^2(\omega)]^N)},$$

por (2.37) e (2.39),

$$\|\rho_n\|_{L^2(0,T;[L^2(\omega)]^N)} \leq C. \quad (2.40)$$

Por termos que a dimensão de Z é finita, segue que P é compacto. Portanto, passando a uma subsequência se necessário, existe $\hat{\rho} \in Z$ tal que

$$P\rho_n \rightarrow \hat{\rho} \quad \text{em } L^2\left(0, T; [L^2(\omega)]^N\right). \quad (2.41)$$

Devido a (2.37), obtemos

$$\rho_n - P\rho_n \rightarrow 0 \quad \text{em } L^2\left(0, T; [L^2(\omega)]^N\right). \quad (2.42)$$

De (2.41) e (2.42) concluímos que

$$\rho_n \rightarrow \hat{\rho} \quad \text{em } L^2\left(0, T; [L^2(\omega)]^N\right).$$

Vejamos que por (2.36),

$$L(\rho_n) \rightarrow 0 \quad \text{em } L^2\left(0, T; [L^2(\Omega)]^N\right).$$

Em particular,

$$L(\rho_n) \rightarrow 0 \quad \text{em } L^2\left(0, T; [L^2(\omega)]^N\right).$$

As convergências que estabelecemos são suficientes para que possamos obter

$$\text{rot}(L(\rho_n)) = \text{rot}(-(\rho_n)_t - \Delta\rho_n) \rightarrow \text{rot}(-\hat{\rho}_t - \Delta\hat{\rho}) = 0 \quad \text{em } \mathcal{D}'(0, T; [\mathcal{D}'(\omega)]^N).$$

Com base no Lema 2.5, $\hat{\rho} \equiv 0$ em ω_T . O pertencimento de ρ_n a $\mathcal{C}([0, T]; H) \cap L^2(0, T; V)$ combinado com (2.20) fornece

$$\int_0^T \int_{\Omega} \alpha^2 |\rho_n|^2 dx dt \leq C \left(\int_0^T \int_{\Omega} |L(\rho_n)|^2 dx dt + \int_0^T \int_{\omega} |\rho_n|^2 dx dt \right).$$

Das convergências obtidas vem que

$$\int_0^T \int_{\Omega} \alpha^2 |\rho_n|^2 dx dt \rightarrow 0,$$

quando $n \rightarrow \infty$. Isso contradiz (2.35) e concluímos que (2.34) é verdadeira. ■

Finalizada a prova desse lema, a desigualdade de Carleman que precisamos é obtida como um corolário dele.

Corolário 2.7 *Admitamos que (2.5) é válida. Existe uma constante C dependente de Ω, ω e T tal que para todo $\rho \in \mathcal{C}([0, T]; H) \cap L^2(0, T; V)$:*

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} |\rho(0)|^2 dx + \int_0^T \int_{\Omega} \alpha^2 |\rho|^2 dx dt \\ & \leq C \left(\int_0^T \int_{\Omega} |L(\rho)|^2 dx dt + \int_0^T \int_{\omega} |\rho - P\rho|^2 dx dt \right). \end{aligned} \quad (2.43)$$

Demonstração. Sabemos que α é limitada inferiormente por uma constante positiva quando t pertence ao intervalo $(T/4, 3T/4)$. Sendo assim, com o auxílio de (2.34) vemos que

$$\int_{T/4}^{3T/4} \int_{\Omega} |\rho|^2 dx dt \leq C \left(\int_0^T \int_{\Omega} |L(\rho)|^2 dx dt + \int_0^T \int_{\omega} |\rho - P\rho|^2 dx dt \right), \quad (2.44)$$

para todo $\rho \in \mathcal{C}([0, T]; H) \cap L^2(0, T; V)$. Consideremos $\beta \in \mathcal{C}^\infty([0, T])$ uma função assumindo valores no intervalo $[0, 1]$ tal que $\beta = 1$ em $[0, T/4]$ e $\beta = 0$ em $[3T/4, T]$. Definimos $\zeta(x, t) = \beta(t)\rho(x, t)$. Observemos que

$$\begin{aligned} \zeta(x, 0) &= \rho(x, 0), \\ \zeta(x, T) &= 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \zeta}{\partial t} - \Delta \zeta + \beta \nabla \pi &= -\beta' \rho - \beta \frac{\partial \rho}{\partial t} - \beta \Delta \rho + \beta \nabla \pi \\ &= \beta \left(-\frac{\partial \rho}{\partial t} - \Delta \rho + \nabla \pi \right) - \beta' \rho. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Multiplicando (2.45) por ζ , considerando $\delta > 0$ uma constante e integrando sobre Q , obtemos

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_0^T \frac{\partial |\zeta|^2}{\partial t} dt dx + \int_0^T \left[\int_{\Omega} |\nabla \zeta|^2 dx - \int_{\partial \Omega} \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial \nu} dS \right] dt + \int_0^T \beta^2 \int_{\Omega} \nabla \pi \cdot \rho dx dt \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} \left(\sqrt{\delta} \beta L \rho \right) \left(\frac{\zeta}{\sqrt{\delta}} \right) dx dt - \int_0^T \int_{\Omega} \beta \beta' |\rho|^2 dx dt, \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\rho(0)|^2 dx + \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla \zeta|^2 dx dt \\ & \leq \frac{\delta}{2} \int_0^T \int_{\Omega} |\beta L(\rho)|^2 dx dt + \frac{1}{2\delta} \int_0^T \int_{\Omega} |\zeta|^2 dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} |\beta \beta'| |\rho|^2 dx dt. \end{aligned}$$

Uma vez que $\beta'\beta = 0$ em $[0, T/4] \cup [3T/4, T]$ e β, β' são limitadas, conseguimos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\rho(0)|^2 dx + \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla \zeta|^2 dx dt \\ & \leq \frac{\delta}{2} C \int_0^T \int_{\Omega} |L(\rho)|^2 dx dt + \frac{1}{2\delta} \int_0^T \int_{\Omega} |\zeta|^2 dx dt + C \int_{T/4}^{3T/4} \int_{\Omega} |\rho|^2 dx dt. \end{aligned}$$

A desigualdade de Poincaré possibilita escrevermos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\rho(0)|^2 dx + \left(1 - \frac{C_0}{\delta}\right) \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla \zeta|^2 dx dt \\ & \leq \frac{\delta}{2} C \int_0^T \int_{\Omega} |L(\rho)|^2 dx dt + C \int_{T/4}^{3T/4} \int_{\Omega} |\rho|^2 dx dt. \end{aligned}$$

Tomamos, então, $\delta > 2C_0$. Com isso, $1 - C_0/\delta > 1/2$ e obtemos

$$\int_{\Omega} |\rho(0)|^2 dx \leq \delta C \int_0^T \int_{\Omega} |L(\rho)|^2 dx dt + C \int_{T/4}^{3T/4} \int_{\Omega} |\rho|^2 dx dt.$$

Utilizando (2.44),

$$\int_{\Omega} |\rho(0)|^2 dx \leq C \int_0^T \int_{\Omega} |L(\rho)|^2 dx dt + C \int_0^T \int_{\omega} |\rho - P\rho|^2 dx dt.$$

Por fim, somando essa desigualdade à (2.34), chegamos a

$$\int_{\Omega} |\rho(0)|^2 dx + \int_Q \alpha^2 |\rho|^2 dx dt \leq C \left(\int_Q |L(\rho)|^2 dx dt + \int_0^T \int_{\omega} |\rho - P\rho|^2 dx dt \right),$$

o que conclui a prova. ■

Na Proposição 2.10 estabeleceremos estimativas para z_0 e $\alpha^{-1}z_0$. Para conseguí-las precisaremos do seguinte:

Lema 2.8 *Admitamos a condição (2.5). Seja z_i solução de (2.21), para $1 \leq i \leq M$, e α dada por (2.18). Definamos a matriz*

$$A = \left(\int_0^T \int_{\omega} \alpha z_i z_j dx dt \right)_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq M$$

e, para todo $b = (b_1, b_2, \dots, b_M) \in \mathbb{R}^M$,

$$\langle Ab, b \rangle_{\mathbb{R}^M} = \int_0^T \int_{\omega} \alpha \left(\sum_{i=1}^M b_i z_i \right) \left(\sum_{j=1}^M b_j z_j \right) dx dt.$$

Então, existe $\delta > 0$ tal que

$$\langle Ab, b \rangle_{\mathbb{R}^M} \geq \delta \|b\|_{\mathbb{R}^M}^2. \quad (2.46)$$

Demonstração. Suponhamos que (2.46) não ocorra. Então para cada $n \in \mathbb{N}$, existe um $b_n = (b_{1n}, b_{2n}, \dots, b_{Mn})$ não nulo tal que

$$\langle Ab_n, b_n \rangle_{\mathbb{R}^M} < \frac{1}{n} \|b_n\|_{\mathbb{R}^M}^2.$$

Para $\bar{b}_n = b_n / \|b_n\|_{\mathbb{R}^M}$ temos

$$\|\bar{b}_n\|_{\mathbb{R}^M} = \sqrt{\sum_{i=1}^M |\bar{b}_{in}|^2} = 1.$$

Logo, existe uma subsequência de $(\bar{b}_{in})_n$, que ainda denotaremos por $(\bar{b}_{in})_n$, tal que

$$\bar{b}_{in} \rightarrow \bar{b}_i, \quad 1 \leq i \leq M.$$

Das propriedades do limite e da continuidade das funções envolvidas, estabelecemos

$$\sum_{i=1}^M |\bar{b}_i|^2 = \sum_{i=1}^M \lim_{n \rightarrow \infty} |\bar{b}_{in}|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^M |\bar{b}_{in}|^2 = 1. \quad (2.47)$$

Tomamos

$$\bar{z}_n = \sum_{i=1}^M \bar{b}_{in} z_i = \sum_{i=1}^M \frac{b_{in}}{\|b_n\|_{\mathbb{R}^M}} z_i.$$

Da convergência obtida, conseguimos a convergência forte em $L^2(0, T; H)$:

$$\bar{z}_n \rightarrow \bar{z} = \sum_{i=1}^M \bar{b}_i z_i. \quad (2.48)$$

Vejamos que

$$\begin{aligned} \langle A\bar{b}_n, \bar{b}_n \rangle_{\mathbb{R}^M} &= \int_0^T \int_{\omega} \alpha \left(\sum_{i=1}^M \frac{b_{in}}{\|b_n\|_{\mathbb{R}^M}} z_i \right) \left(\sum_{j=1}^M \frac{b_{jn}}{\|b_n\|_{\mathbb{R}^M}} z_j \right) dx dt \\ &= \frac{1}{\|b_n\|_{\mathbb{R}^M}^2} \int_0^T \int_{\omega} \alpha \left(\sum_{i=1}^M b_{in} z_i \right) \left(\sum_{j=1}^M b_{jn} z_j \right) dx dt \\ &= \frac{1}{\|b_n\|_{\mathbb{R}^M}^2} \langle Ab_n, b_n \rangle_{\mathbb{R}^M} < \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_0^T \int_{\omega} \alpha |\bar{z}_n|^2 dx dt < \frac{1}{n}.$$

Com essa informação e o auxílio de (2.48) podemos afirmar que

$$\int_0^T \int_{\omega} \alpha |\bar{z}|^2 dx dt = 0$$

e deduzir que $\bar{z} = 0$ em $\omega \times (0, T)$. Do fato das funções z_i satisfazerem (2.21) temos

$$-\bar{z}_t - \Delta \bar{z} + \sum_{i=1}^M \bar{b}_i \nabla q_i = \sum_{i=1}^M \bar{b}_i e_i \quad \text{em } \omega \times (0, T).$$

Uma vez que $\bar{z} = 0$ em $\omega \times (0, T)$,

$$\sum_{i=1}^M \bar{b}_i (\nabla q_i - e_i) = 0 \quad \text{em } \omega \times (0, T).$$

Aplicando o rotacional chegamos a

$$\sum_{i=1}^M \bar{b}_i \operatorname{rot} e_i = 0 \quad \text{em } \omega \times (0, T).$$

De acordo com (2.5), $\bar{b}_i = 0$ para $1 \leq i \leq M$, o que contraria (2.47). Concluimos que existe $\delta > 0$ tal que (2.46) é verificada. $\blacksquare$

OBSERVAÇÃO 2.9 A independência linear do conjunto $z_1 1_\omega, z_2 1_\omega, \dots, z_M 1_\omega$ garantida no Lema 2.3 é uma condição necessária para que a afirmação do Lema 2.8 seja verdadeira. Com efeito, suponhamos $M = 3$ e $z_1 1_\omega, z_2 1_\omega, z_3 1_\omega$ tais que $z_3 = a_1 z_1 + a_2 z_2$. Para $b = (-a_1 b_3, -a_2 b_3, b_3)$, $b_3 \neq 0$, temos

$$\begin{aligned} \langle Ab, b \rangle_{\mathbb{R}^3} &= \int_0^T \int_\omega \alpha (-a_1 b_3 z_1 - a_2 b_3 z_2 + b_3 z_3)^2 dt dx \\ &= \int_0^T \int_\omega \alpha (-a_1 b_3 z_1 - a_2 b_3 z_2 + a_1 b_3 z_1 + a_2 b_3 z_2)^2 dx dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\|b\|_{\mathbb{R}^3}^2 = a_1^2 b_3^2 + a_2^2 b_3^2 + b_3^2 = (a_1^2 + a_2^2 + 1) b_3^2 \neq 0,$$

impossibilitando que se tenha (2.46) qualquer que seja $\delta > 0$.

Proposição 2.10 *Seja z_i solução de (2.21) ($1 \leq i \leq M$), α definida por (2.18) e z_0 a função que satisfaz (2.30). Existe uma constante $C = C\left(\Omega, T, \sum_{i=1}^M \|e_i\|_{L^2(0,T;H)}\right) > 0$ tal que*

$$\|z_0\|_{L^2(0,T;[L^2(\omega)]^N)} \leq C \|y^0\|_H, \quad (2.49)$$

$$\|\alpha^{-1} z_0\|_{L^2(0,T;[L^2(\omega)]^N)} \leq C \|y^0\|_H. \quad (2.50)$$

Demonstração. Partimos do fato de z_0 pertencer a Z_α . Isso nos diz que existe $b = (b_1, \dots, b_M) \in \mathbb{R}^M$ tal que

$$z_0 = \sum_{j=1}^M b_j \alpha z_j 1_\omega.$$

Substituindo em (2.30), obtemos

$$\int_0^T \int_\omega \sum_{j=1}^M b_j \alpha z_j z_i dx dt = - \int_\Omega y^0 z_i(0) dx, \quad 1 \leq i \leq M.$$

Calculando o produto da igualdade acima por b_i e somando em relação ao índice i encontramos

$$\int_0^T \int_\omega \alpha \left(\sum_{i=1}^M b_i z_i \right) \left(\sum_{j=1}^M b_j z_j \right) dx dt = - \int_\Omega y^0 \sum_{i=1}^M b_i z_i(0) dx.$$

Agora aplicamos o Lema 2.8 e fica estabelecido que existe $\delta > 0$ tal que

$$\delta \|b\|_{\mathbb{R}^M}^2 \leq - \int_\Omega y^0 \sum_{i=1}^M b_i z_i(0) dx.$$

Fazendo uso da desigualdade triangular e da desigualdade de Cauchy-Schwartz, obtemos

$$\delta \|b\|_{\mathbb{R}^M}^2 \leq \|y^0\|_{[L^2(\Omega)]^N} \left\| \sum_{i=1}^M b_i z_i(0) \right\|_{[L^2(\Omega)]^N} \leq C(\Omega) \|y^0\|_H \sum_{i=1}^M |b_i| \|z_i(0)\|_{[L^2(\Omega)]^N}. \quad (2.51)$$

Multiplicando a equação em (2.21) por z_i e integrando sobre Ω vemos que, para todo $t \in [0, T]$,

$$- (\|z_i(t)\|_H^2)_t \leq \|e_i(t)\|_H^2 + \|z_i(t)\|_H^2.$$

Podemos, então, multiplicar essa desigualdade por e^t , integrar no intervalo $[t, T]$, $0 \leq t \leq T$, e conseguir

$$\|z_i(t)\|_H^2 \leq e^T \int_0^T \|e_i(t)\|_H^2 dt.$$

Em particular,

$$\|z_i(0)\|_H \leq C(T) \|e_i\|_{L^2(0,T;H)}, \quad 1 \leq i \leq M. \quad (2.52)$$

Tendo em mente que $|b_i| \leq \|b\|_{\mathbb{R}^M}$ e que $\left(\sum_{i=1}^M a_i \right)^2 \leq 2^{M-1} \sum_{i=1}^M a_i^2$, (2.51) e (2.52) fornecem

$$\|b\|_{\mathbb{R}^M}^2 \leq \delta^{-1} C(\Omega, T) \|y^0\|_H \|b\|_{\mathbb{R}^M} \sqrt{\sum_{i=1}^M \|e_i\|_{L^2(0,T;H)}^2}. \quad (2.53)$$

Usando a limitação de α encontramos

$$\begin{aligned}
 \|z_0\|_{L^2(0,T;[L^2(\omega)]^N)}^2 &\leq 2^{M-1} \sum_{j=1}^M \int_0^T \int_{\omega} |b_j \alpha z_j|^2 dx dt \\
 &\leq C_0 \sum_{j=1}^M |b_j|^2 \|z_j\|_{L^2(0,T;[L^2(\omega)]^N)}^2.
 \end{aligned} \tag{2.54}$$

e

$$\begin{aligned}
 \|\alpha^{-1} z_0\|_{L^2(0,T;[L^2(\omega)]^N)}^2 &\leq 2^{M-1} \sum_{j=1}^M \int_0^T \int_{\omega} |b_j z_j|^2 dx dt \\
 &\leq C_0 \sum_{j=1}^M |b_j|^2 \|z_j\|_{L^2(0,T;[L^2(\omega)]^N)}^2.
 \end{aligned} \tag{2.55}$$

Sabemos que existe uma constante $\bar{C}_0 > 0$ tal que $\|z_j\|_{L^2(0,T;H)}^2 \leq \bar{C}_0$, $1 \leq j \leq M$. Logo, por (2.54),

$$\|z_0\|_{L^2(0,T;[L^2(\omega)]^N)} \leq \sqrt{C_0 \bar{C}_0 \sum_{j=1}^M |b_j|^2} = \sqrt{C_0 \bar{C}_0} \|b\|_{\mathbb{R}^M}. \tag{2.56}$$

Analogamente estabelecemos de (2.55) que

$$\|\alpha^{-1} z_0\|_{L^2(0,T;[L^2(\omega)]^N)} \leq \sqrt{C_0 \bar{C}_0} \|b\|_{\mathbb{R}^M}. \tag{2.57}$$

Considerando $b \neq 0$, segue de (2.56) e (2.57), com o auxílio de (2.53), que

$$\|z_0\|_{L^2(0,T;[L^2(\omega)]^N)} \leq \sqrt{C_0 \bar{C}_0} \delta^{-1} C(\Omega, T) \sqrt{\sum_{j=1}^M \|e_j\|_{L^2(0,T;H)}^2} \|y^0\|_H$$

e

$$\|\alpha^{-1} z_0\|_{L^2(0,T;[L^2(\omega)]^N)} \leq \sqrt{C_0 \bar{C}_0} \delta^{-1} C(\Omega, T) \sqrt{\sum_{j=1}^M \|e_j\|_{L^2(0,T;H)}^2} \|y^0\|_H,$$

provando as desigualdades desejadas. ■

Seja h a forma bilinear em $(\mathcal{C}([0, T]; H) \cap L^2(0, T; V))^2$ dada por

$$h(\rho, \hat{\rho}) = \int_0^T \int_{\Omega} L \rho L \hat{\rho} dx dt + \int_0^T \int_{\omega} (\rho - P \rho)(\hat{\rho} - P \hat{\rho}) dx dt. \tag{2.58}$$

Suponhamos que $h(\rho, \rho) = 0$. Isso nos diz que o lado direito de (2.43) é nulo e

$$\int_{\Omega} |\rho(0)|^2 dx + \int_0^T \int_{\Omega} \alpha |\rho|^2 dx dt \leq 0,$$

seguindo que $\rho \equiv 0$. Podemos mostrar sem dificuldades as demais condições que permitem afirmar que h define um produto interno em $(\mathcal{C}([0, T]; H) \cap L^2(0, T; V))^2$. Denotaremos por $\bar{\mathcal{C}}$ o espaço de Hilbert que é o complemento de $\mathcal{C}([0, T]; H) \cap L^2(0, T; V)$ com a norma proveniente de h :

$$\|\rho\|_{\bar{\mathcal{C}}} = \sqrt{h(\rho, \rho)}.$$

Em $\bar{\mathcal{C}}$ definimos o funcional linear

$$\bar{G}(\rho) = \int_0^T \int_{\omega} z_0 \rho dx dt + \int_{\Omega} y^0 \rho(0) dx,$$

com z_0 definida em (2.30). Usando a desigualdade de Cauchy-Schwartz vemos que

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T \int_{\omega} z_0 \rho dx dt + \int_{\Omega} y^0 \rho(0) dx \right|^2 \\ & \leq 2 \|\alpha^{-1} z_0 1_{\omega}\|_{L^2(0, T; H)}^2 \|\alpha \rho\|_{L^2(0, T; H)}^2 + 2 \|y^0\|_H^2 \|\rho(0)\|_H^2. \end{aligned}$$

De acordo com (2.43) e (2.50),

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T \int_{\omega} z_0 \rho dx dt + \int_{\Omega} y^0 \rho(0) dx \right|^2 \\ & \leq C \left(\|\alpha \rho\|_{L^2(0, T; H)}^2 + \|\rho(0)\|_H^2 \right) \|y^0\|_H^2 \\ & \leq C \left(\int_0^T \int_{\Omega} |L\rho|^2 dx dt + \int_0^T \int_{\omega} |\rho - P\rho|^2 dx dt \right) \|y^0\|_H^2. \end{aligned}$$

Logo $|\bar{G}(\rho)| \leq C \|\rho\|_{\bar{\mathcal{C}}}$ para todo $\rho \in \bar{\mathcal{C}}$ e temos que $\bar{G}$ é contínua. Portanto, podemos aplicar o Teorema de Lax-Milgram e garantir que para cada $y^0 \in H$ existe único $\bar{\rho} \in \bar{\mathcal{C}}$ tal que

$$h(\bar{\rho}, \rho) = \bar{G}(\rho),$$

ou seja,

$$\int_0^T \int_{\Omega} L\bar{\rho} L\rho dx dt + \int_0^T \int_{\omega} (\bar{\rho} - P\bar{\rho})(\rho - P\rho) dx dt = \int_0^T \int_{\omega} z_0 \rho dx dt + \int_{\Omega} y^0 \rho(0) dx. \quad (2.59)$$

No resultado a seguir utilizamos a existência de $\bar{\rho}$ e a igualdade (2.59) para provar que o problema de controlabilidade com restrição no controle tem solução.

Teorema 2.11 *Dado $y^0 \in H$, seja $\bar{\rho}$ a solução única de (2.59). Então, as funções*

$$\bar{z} = -(\bar{\rho} 1_{\omega} - P\bar{\rho}) \quad (2.60)$$

e

$$\bar{y} = L\bar{\rho} \quad (2.61)$$

são solução de (2.24)-(2.26). Também é válido que existe uma constante $C > 0$ dependente de Ω, ω, T e $\sum_{i=1}^M \|e_i\|_{L^2(0,T;H)}$ tal que

$$\|\bar{\rho}\|_{\bar{\mathcal{C}}} \leq C \|y^0\|_H, \quad (2.62)$$

$$\|\bar{z}\|_{L^2(0,T;H)} \leq C \|y^0\|_H, \quad (2.63)$$

$$\|\bar{y}\|_{C(0,T;H) \cap L^2(0,T;V)} \leq C \|y^0\|_H. \quad (2.64)$$

Demonstração. Dividiremos esta prova em etapas.

Solução de (2.24)-(2.26). Sabemos que $\bar{\rho} \in \bar{\mathcal{C}}$ e que

$$\|\bar{\rho}\|_{\bar{\mathcal{C}}}^2 = \int_0^T \int_{\Omega} |L\bar{\rho}|^2 dx dt + \int_0^T \int_{\omega} |\bar{\rho} - P\bar{\rho}|^2 dx dt.$$

Logo, $\bar{y} = L\bar{\rho}$ e $\bar{z} = -(\bar{\rho}1_{\omega} - P\bar{\rho})$ pertencem a $L^2(0,T;H)$ e $L^2(0,T;[L^2(\omega)]^N)$, respectivamente. Veja que

$$P(\bar{z}) = -P(\bar{\rho}1_{\omega} - P\bar{\rho}) = -P\bar{\rho} + P\bar{\rho} = 0,$$

o que implica que $\bar{z} \in Z^{\perp}$. Substituindo (2.60) e (2.61) em (2.59) temos que, para todo $\rho \in \bar{\mathcal{C}}$,

$$\int_0^T \int_{\Omega} \bar{y} L \rho dx dt - \int_0^T \int_{\omega} \bar{z} (\rho - P\rho) dx dt = \int_0^T \int_{\omega} z_0 \rho dx dt + \int_{\Omega} y^0 \rho(0) dx. \quad (2.65)$$

Notemos que de $P\rho \in Z$ e $\bar{z} \in Z^{\perp}$,

$$\int_0^T \int_{\omega} \bar{z} P\rho dx dt = 0.$$

Sendo assim, reescrevemos (2.65) como

$$\int_0^T \int_{\Omega} \bar{y} L \rho dx dt = \int_0^T \int_{\omega} \bar{z} \rho dx dt + \int_0^T \int_{\omega} z_0 \rho dx dt + \int_{\Omega} y^0 \rho(0) dx. \quad (2.66)$$

Sejam $\Phi \in L^2(0,T;H)$ e o sistema

$$\begin{cases} -\rho_t - \Delta \rho + \nabla \pi = \Phi & \text{em } Q, \\ \operatorname{div} \rho = 0 & \text{em } Q, \\ \rho = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \rho(T) = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (2.67)$$

De acordo com (2.66), temos

$$\int_0^T \int_{\Omega} \bar{y} \Phi dx dt = \int_0^T \int_{\omega} \bar{z} \rho dx dt + \int_0^T \int_{\omega} z_0 \rho dx dt + \int_{\Omega} y^0 \rho(0) dx.$$

Dessa forma, $\bar{y}$ é uma solução ultra fraca ou solução por transposição do sistema (2.24) com $z = \bar{z}$. A mudança de variável temporal $t \mapsto T - t$ estabelece uma equivalência entre os sistemas (2.1) e (2.67), de forma que $\bar{y}$ tem a regularidade apresentada em (2.2). Se agora multiplicamos a primeira equação de (2.24) por uma função $\rho \in \mathcal{C}([0, T]; H) \cap L^2(0, T; V)$, chegamos a

$$\int_Q \rho(z_0 + \bar{z}) 1_{\omega} dx dt = \int_Q \rho(T) \bar{y}(T) dx dt - \int_{\Omega} \rho(0) y^0 dx + \int_Q \bar{y} [L\rho - \nabla \pi] dx dt$$

ou, equivalentemente,

$$\int_{\Omega} \rho(T) \bar{y}(T) dx - \int_{\Omega} \rho(0) y^0 dx + \int_Q \bar{y} L\rho dx dt = \int_{\omega_T} \rho z_0 dx dt + \int_{\omega_T} \rho \bar{z} dx dt. \quad (2.68)$$

Substituindo (2.66) em (2.68) encontramos que

$$\int_{\Omega} \rho(T) \bar{y}(T) dx = 0,$$

para todo $\rho \in \mathcal{C}([0, T]; H) \cap L^2(0, T; V)$. Em particular, essa igualdade é verdadeira para todo $\rho(T) \in H$. Logo, $\bar{y}(T) = 0$ em Ω . Isso encerra a prova de que $(\bar{z}, \bar{y})$ é uma solução para (2.24)-(2.26).

Estimativa (2.62). Usando (2.59)-(2.61), temos

$$\begin{aligned} h(\bar{\rho}, \bar{\rho}) &= \int_0^T \int_{\Omega} |\bar{y}|^2 dx dt + \int_0^T \int_{\omega} |\bar{z}|^2 dx dt \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} (\alpha^{-1} z_0 1_{\omega}) (\alpha \bar{\rho}) dx dt + \int_{\Omega} y^0 \bar{\rho}(0) dx \\ &\leq \left(\|\alpha^{-1} z_0\|_{L^2(0, T; [L^2(\omega)]^N)} + \|y^0\|_H \right) \left(\|\alpha \bar{\rho}\|_{L^2(0, T; [L^2(\omega)]^N)} + \|\bar{\rho}(0)\|_H \right). \end{aligned} \quad (2.69)$$

Uma vez que

$$\|\alpha \bar{\rho}\|_{L^2(0, T; H)} + \|\bar{\rho}(0)\|_H \leq \sqrt{2} \sqrt{\|\alpha \bar{\rho}\|_{L^2(0, T; H)}^2 + \|\bar{\rho}(0)\|_H^2},$$

as desigualdades (2.43), (2.50) e (2.69) fornecem

$$\|\bar{\rho}\|_{\bar{\mathcal{C}}}^2 \leq C(\|y^0\|_H + \|y^0\|_H) \|\bar{\rho}\|_{\bar{\mathcal{C}}},$$

com $C = C\left(\Omega, T, \sum_{i=1}^M \|e_i\|_{L^2(0, T; H)}\right)$. Logo,

$$\|\bar{\rho}\|_{\bar{C}} \leq C \|y^0\|_H,$$

em que C também depende de $\Omega, T, \sum_{i=1}^M \|e_i\|_{L^2(0,T;H)}$.

Estimativa (2.63). Para conseguir (2.63) usamos que

$$\begin{aligned} \|\bar{z}\|_{L^2(0,T;H)} &= \sqrt{\int_Q |\bar{z}(x,t)|^2 dx dt} = \sqrt{\int_Q |\bar{\rho}1_\omega - P\bar{\rho}|^2 dx dt} \\ &= \sqrt{\|\bar{\rho}1_\omega - P\bar{\rho}\|_{L^2(0,T;[L^2(\omega)]^N)}^2} \leq \sqrt{\|\bar{\rho}\|_{\bar{C}}^2} = \|\bar{\rho}\|_{\bar{C}}. \end{aligned}$$

Portanto, de (2.62),

$$\|\bar{z}\|_{L^2(0,T;H)} \leq C \|y^0\|_H,$$

com C dependente de $\Omega, T, \sum_{i=1}^M \|e_i\|_{L^2(0,T;H)}$.

Estimativa (2.64). Multiplicando a equação em (2.24) por $\bar{y}$ e integrando sobre Ω temos

$$\frac{1}{2} (\|\bar{y}(t)\|_H^2)_t + \|\nabla \bar{y}(t)\|_{[L^2(\Omega)]^N}^2 \leq \|\bar{y}(t)\|_H \|(z_0(t) + \bar{z}(t))1_\omega\|_H. \quad (2.70)$$

Partindo dessa desigualdade conseguimos que, para todo $t \in [0, T]$,

$$\|\bar{y}(t)\|_H^2 \leq C \left(\|y^0\|_H^2 + \int_0^t \|(z_0(s) + \bar{z}(s))1_\omega\|_H^2 ds \right). \quad (2.71)$$

Com isso,

$$\|\bar{y}\|_{C(0,T;H)}^2 = \max_{t \in [0,T]} \|\bar{y}(t)\|_H^2 \leq C \left(\|y^0\|_H^2 + \|(z_0 + \bar{z})1_\omega\|_{L^2(0,T;H)}^2 \right).$$

Por (2.49) e (2.63),

$$\|\bar{y}\|_{C(0,T;H)}^2 \leq C^2 \|y^0\|_H^2. \quad (2.72)$$

Observemos que (2.70) também fornece

$$\int_0^t \left((\|\bar{y}(s)\|_H^2)_t + 2 \|\nabla \bar{y}(s)\|_{[L^2(\Omega)]^N}^2 \right) ds \leq \int_0^t (\|\bar{y}(s)\|_H^2 + \|(z_0(s) + \bar{z}(s))1_\omega\|_H^2) ds,$$

o que implica em

$$\begin{aligned} &\|\bar{y}(t)\|_H^2 + \int_0^t \|\nabla \bar{y}(s)\|_{[L^2(\Omega)]^N}^2 ds \\ &\leq \|y^0\|_H^2 + \int_0^t (\|\bar{y}(s)\|_H^2 + \|(z_0(s) + \bar{z}(s))1_\omega\|_H^2) ds, \end{aligned} \quad (2.73)$$

para todo $t \in [0, T]$. Posto que por (2.71)

$$\int_0^t \|\bar{y}(s)\|_H^2 ds \leq C \int_0^t \left(\|y^0\|_H^2 + \int_0^T \|(z_0(t) + \bar{z}(t))1_\omega\|_H^2 dt \right) dt, \quad (2.74)$$

vem de (2.73) e (2.74) que

$$\int_0^T \|\bar{y}(t)\|_H^2 dt + \int_0^T \|\nabla \bar{y}(t)\|_H^2 dt \leq C \left(\|y^0\|_H^2 + \|(z_0 + \bar{z}) 1_\omega\|_{L^2(0,T;H)}^2 \right),$$

Dessa forma,

$$\|\bar{y}\|_{L^2(0,T;H)}^2 + \|\nabla \bar{y}\|_{L^2(0,T;H)}^2 \leq C \left(\|y^0\|_H^2 + \|(z_0 + \bar{z}) 1_\omega\|_{L^2(0,T;H)}^2 \right)$$

e obtemos, com o auxílio da estimativa (2.63),

$$\|\bar{y}\|_{L^2(0,T;[H_0^1(\Omega)]^N)}^2 \leq C^2 \|y^0\|_H^2. \quad (2.75)$$

A estimativa (2.64) segue de (2.72) e (2.75). ■

Os resultados que obtivemos até aqui garantem a veracidade do Teorema 2.1. Estamos aptos, portanto, a provar o nosso principal teorema

Demonstração do Teorema 2.1 . Seja $z_0 \in Z_\alpha$ satisfazendo (2.30). Sabemos do Teorema 2.11 que existe um controle $z \in Z^\perp$ e uma solução $y = y(z)$ que satisfazem (2.24)-(2.26). De acordo com o Teorema 2.4, isso garante que o problema de controlabilidade com restrição no estado (2.1), (2.6) e (2.7) tem solução com controle

$$g = (z_0 + z)1_\omega.$$

Observemos que de (2.49) e (2.63),

$$\|g\|_{L^2(0,T;H)} \leq \|z_0 1_\omega\|_{L^2(0,T;H)} + \|z 1_\omega\|_{L^2(0,T;H)} \leq C \|y^0\|_H,$$

com C dependente de Ω, ω, T e $\sum_{i=1}^M \|e_i\|_{L^2(0,T;H)}$. Com isso a demonstração está completa. ■

Finalizando este capítulo, observamos que no Teorema 2.11 provamos a existência de solução para o sistema (2.24)-(2.26), no entanto, não temos unicidade de controle. A forma que usaremos para garantir algum tipo de unicidade para esse controle é olhar para aquele que tem norma mínima. Isso é o que faremos agora.

Proposição 2.12 *Seja $y^0 \in H$ e $R = \{\bar{z} \in L^2(0,T;H) \mid (\bar{z}, \bar{y}(\bar{z})) \text{ verifica (2.24)-(2.26)}\}$. Então, existe um único controle z para (2.24)-(2.26) que satisfaz*

$$\|z\|_{L^2(0,T;H)} = \min_{\bar{z} \in R} \|\bar{z}\|_{L^2(0,T;H)}. \quad (2.76)$$

Além disso, existe $C = C\left(\Omega, \omega, T, \sum_{i=1}^M \|e_i\|_{L^2(Q)}\right) > 0$ tal que

$$\|z\|_{L^2(0,T;H)} \leq C \|y^0\|_H. \quad (2.77)$$

Demonstração. Nesta prova usaremos o Teorema de Stampacchia. Sabemos que o produto interno em $L^2(0,T;H)$ é uma forma bilinear contínua, coerciva e simétrica. Também, do Teorema 2.11, sabemos que R é não vazio. Resta-nos provar que R é convexo e fechado. Uma vez que a convexidade pode ser provada sem grande resistência, nos dedicaremos a garantir que o conjunto é fechado.

Seja $(\bar{z}_n)_n$ uma sequência em R que converge para $\bar{z} \in L^2(0,T;H)$. Dado qualquer $\hat{z} \in Z$, definimos o funcional linear contínuo $\tau_{\hat{z}} : L^2(0,T;H) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\tau_{\hat{z}}(u) = (u, \hat{z})_{L^2(0,T;H)}.$$

De termos $\bar{z}_n \in R$ vem que

$$0 = \tau_{\hat{z}}(\bar{z}_n) \rightarrow \tau_{\hat{z}}(\bar{z}).$$

Portanto, $(\bar{z}, \hat{z})_{L^2(0,T;H)} = 0$ e $\bar{z} \in Z^\perp$.

Para passar o limite no sistema (2.24) e para garantir que (2.26) é verdadeira, precisamos de estimativas. Por cálculos semelhantes aos feitos para conseguir (2.64) e usando a limitação de $(\bar{z}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, encontramos

$$\|\bar{y}_n\|_{L^\infty(0,T;H)}^2 + \|\nabla \bar{y}_n\|_{L^2(0,T;H)}^2 \leq C.$$

Com base na estimativa encontrada, existe uma subsequência de $(\bar{y}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, que denotaremos da mesma forma, tal que

$$\bar{y}_n \rightarrow \bar{y} \quad \text{fracamente} \quad \text{em} \quad L^2(0,T;V), \quad (2.78)$$

$$\bar{y}_n \rightarrow \bar{y} \quad \text{fracamente} \quad - * \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;[L^2(\Omega)]^N). \quad (2.79)$$

Por (2.79), $\bar{y}_n \rightarrow \bar{y}$ em $\mathcal{D}'(Q)$. Agora consideramos a forma variacional da equação (2.24):

$$((\bar{y}_n)_t(t), v) + (\nabla \bar{y}_n(t), \nabla v) = ((\hat{z}_0(t) + z_n(t)) 1_\omega, v), \quad \forall v \in V. \quad (2.80)$$

Passando o limite encontramos

$$(\bar{y}_t(t) - \Delta \bar{y}(t) - (z_0(t) + \bar{z}(t)) 1_\omega, v) = 0, \quad \forall v \in V.$$

Em particular, a igualdade é válida para todo $v \in [\mathcal{D}(\Omega)]^N$ tal que $\text{div } v = 0$. Segue do Lema de De Rham que existe $p \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tal que

$$\bar{y}_t - \Delta \bar{y} - (z_0 + \bar{z}) 1_\omega = -\nabla p,$$

ou seja, no sentido de $\mathcal{D}'(Q)$,

$$\bar{y}_t - \Delta \bar{y} + \nabla p = (z_0 + \bar{z}) 1_\omega.$$

A verificação de que os dados inicial e final para $\bar{y}$ satisfazem o sistema é feita da maneira padrão. Aqui nos restringimos a garantir que faz sentido falarmos de $\bar{y}(0)$ e $\bar{y}(T)$. Para isso consideramos $w_n = \bar{y}_m - \bar{y}_n$. Observe que w_m satisfaz o sistema

$$\begin{cases} (w_n)_t - \Delta w_n + \nabla(p_m - p_n) = (\bar{z}_m - \bar{z}_n) 1_\omega & \text{em } Q, \\ \operatorname{div} w_n = 0 & \text{em } Q, \\ w_n = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ w(0) = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

Cálculos análogos aos que fizemos para (2.64) nos levam a

$$\|w_n\|_{\mathcal{C}(0,T;H)}^2 \leq \|(\bar{z}_m - \bar{z}_n) 1_\omega\|_{L^2(0,T;H)}^2,$$

e como $(\bar{z}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente, é uma sequência de Cauchy. Isso implica que $(\bar{y}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy no espaço completo $\mathcal{C}(0,T;H)$. Portanto, $\bar{y}_n \rightarrow \bar{y}$ em $\mathcal{C}(0,T;H)$, permitindo-nos afirmar que $\bar{y}$ está definida em 0 e T .

Para finalizar, concluímos que $\bar{y} = 0$ sobre Σ e $\operatorname{div} \bar{y} = 0$ em Q do fato de $\bar{y} \in L^2(0,T;V)$. Isso encerra a demonstração de que R é fechado e podemos aplicar o Teorema de Stampacchia. Escolhendo $\gamma \equiv 0$ em $(L^2(0,T;H))'$, o teorema nos diz que existe único $z \in R$ tal que

$$\|z\|_{L^2(0,T;H)}^2 = \min_{\bar{z} \in R} \|\bar{z}\|_{L^2(0,T;H)}^2.$$

Disso segue (2.76).

Estimativa. Do fato de z ser o único controle de norma mínima, temos que para $\bar{z}$ dado por (2.60),

$$\|z\|_{L^2(0,T;H)} \leq \|\bar{z}\|_{L^2(0,T;H)}.$$

Assim, segue de (2.63) que

$$\|z\|_{L^2(0,T;H)} \leq C \|y^0\|_H,$$

com C dependente de $\Omega, T, \sum_{i=1}^M \|e_i\|_{L^2(0,T;H)}$. ■

Apêndice A

Determinação dos Autovalores

Na Seção 1.1 introduzimos um operador A e buscamos seus autovalores β . Para obtê-los, consideramos o sistema (1.6), isto é,

$$\begin{cases} w_{xx}(x) + \beta w(x) = 0 & \text{em } (0, 1), \\ w(0) = w_x(1) + aw(1) = 0, \end{cases}$$

que tem a seguinte equação característica:

$$r^2 + \beta = 0 \Leftrightarrow r = \pm\sqrt{-\beta}.$$

Aqui apresentamos as análises de casos quando β pertence ao corpo dos números reais ou ao corpo dos números complexos.

Caso 1. $\beta \in \mathbb{R}$

Subcaso 1. $\beta = 0$

Isso indica que a solução de (1.6) é da forma $w(x) = c_1 + c_2x$, com c_1 e c_2 constantes complexas. Temos que

$$0 = w(0) = c_1 + c_2 \cdot 0 = c_1.$$

Além disso,

$$0 = w_x(1) + aw(1) = c_2 + ac_2 = c_2(1 + a).$$

Uma vez que $a \neq -1$, segue que $c_2 = 0$. Com isso concluímos que $w(x) \equiv 0$ e não temos autovalores.

Subcaso 2. $-\beta > 0$

A solução de (1.6) é dada por $w(x) = c_1 e^{\sqrt{-\beta}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\beta}x}$, com c_1 e c_2 constantes

complexas. Sabemos que

$$0 = w(0) = c_1 e^{\sqrt{-\beta} \cdot 0} + c_2 e^{-\sqrt{-\beta} \cdot 0} = c_1 + c_2 \Leftrightarrow c_1 = -c_2,$$

dando-nos

$$0 = w_x(1) + aw(1) = c_1 \left[\sqrt{-\beta} \left(e^{\sqrt{-\beta}} + e^{-\sqrt{-\beta}} \right) + a \left(e^{\sqrt{-\beta}} - e^{-\sqrt{-\beta}} \right) \right].$$

Notemos que se $c_1 = 0$, então $w \equiv 0$ e não temos autovalores. Suponhamos $c_1 \neq 0$. Nesse caso,

$$\sqrt{-\beta} \left(e^{\sqrt{-\beta}} + e^{-\sqrt{-\beta}} \right) + a \left(e^{\sqrt{-\beta}} - e^{-\sqrt{-\beta}} \right) = 0. \quad (\text{A.1})$$

No entanto, observemos que o fator $e^{\sqrt{-\beta}} - e^{-\sqrt{-\beta}}$ é não negativo. Logo, o lado esquerdo de (A.1) é sempre positivo, o que nos leva a conclusão de que c_1 não pode ser diferente de zero. Novamente, não existem autovalores.

Subcaso 3. $-\beta < 0$

Esse caso foi estudado na Seção 1.1.

Caso 2. $-\beta \in \mathbb{C}$.

Subcaso 1. $-\beta = ib, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Começamos escrevendo $-\beta$ na forma

$$-\beta = |-\beta|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

e estabelecendo que

$$|-\beta| = |b|, \quad \operatorname{sen} \theta = \frac{b}{|-\beta|} = \begin{cases} 1, & \text{se } b > 0 \\ -1, & \text{se } b < 0 \end{cases}, \quad \cos \theta = \frac{0}{|b|} = 0.$$

Sendo assim,

$$\theta = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{se } b > 0, \\ \frac{3\pi}{2}, & \text{se } b < 0 \end{cases} \quad e \quad -\beta = \begin{cases} |b| \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \right), & \text{se } b > 0, \\ |b| \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} \right), & \text{se } b < 0. \end{cases}$$

Nosso interesse é encontrar $r = \pm \sqrt{-\beta} = \pm \sqrt{ib}$. Lembrando que

$$\sqrt[n]{-\beta} = (-\beta)_k = \sqrt[n]{|b|} \left[\cos \left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) \right]; k = 0, 1, 2, \dots, n-1,$$

temos que para $\theta = \theta_1 = \pi/2$

$$\sqrt{-\beta} = (-\beta)_0 = \sqrt{|b|} \left[\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right] = \frac{\sqrt{2|b|}}{2}(1+i)$$

e

$$\sqrt{-\beta} = (-\beta)_1 = \sqrt{|b|} \left[\cos \left(\frac{\pi}{4} + \pi \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{4} + \pi \right) \right] = -\frac{\sqrt{2|b|}}{2}(1+i).$$

No caso de $\theta = \theta_2 = 3\pi/2$, vemos que

$$\sqrt{-\beta} = (-\beta)_0 = \sqrt{|b|} \left[\cos \frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4} \right] = \frac{\sqrt{2|b|}}{2}(-1+i)$$

e

$$\sqrt{-\beta} = (-\beta)_1 = \sqrt{|b|} \left[\cos \left(\frac{3\pi}{4} + \pi \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{3\pi}{4} + \pi \right) \right] = \frac{\sqrt{2|b|}}{2}(1-i).$$

Portanto,

$$\sqrt{-\beta} = \begin{cases} \pm \frac{\sqrt{2|b|}}{2}(1+i), & \text{se } b > 0, \\ \pm \frac{\sqrt{2|b|}}{2}(1-i), & \text{se } b < 0. \end{cases}$$

Vamos analisar os casos.

- $b > 0$

Notemos que $r = \pm\sqrt{-\beta} = \pm\sqrt{2|b|}(1+i)/2$. A solução, portanto, será dada por

$$w(x) = c_1 e^{\frac{\sqrt{2b}}{2}(1+i)x} + c_2 e^{-\frac{\sqrt{2b}}{2}(1+i)x}.$$

cuja derivada é

$$w_x(x) = c_1 \frac{\sqrt{2b}}{2}(1+i) e^{\frac{\sqrt{2b}}{2}(1+i)x} - c_2 \frac{\sqrt{2b}}{2}(1+i) e^{-\frac{\sqrt{2b}}{2}(1+i)x}.$$

Usando a primeira informação de fronteira encontramos

$$0 = w(0) = c_1 + c_2 \Leftrightarrow c_1 = -c_2.$$

Utilizando essa informação na segunda condição de fronteira, podemos dizer que

$$c_1 \left[\frac{\sqrt{2b}}{2}(1+i) \left(e^{\frac{\sqrt{2b}}{2}(i+1)} + e^{-\frac{\sqrt{2b}}{2}(i+1)} \right) + a \left(e^{\frac{\sqrt{2b}}{2}(i+1)} - e^{-\frac{\sqrt{2b}}{2}(i+1)} \right) \right] = 0.$$

Se $c_1 = 0$, uma vez que $c_1 = -c_2$, teremos $w \equiv 0$ e não existem autofunções. Para simplificar a notação, por enquanto, usaremos $\lambda = \sqrt{2b}/2$. Assim, o que precisamos verificar é se é possível termos

$$\lambda(i+1) \left(e^{\lambda(i+1)} + e^{-\lambda(i+1)} \right) + a \left(e^{\lambda(i+1)} - e^{-\lambda(i+1)} \right) = 0$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{cases} (e^\lambda + e^{-\lambda})\lambda \cos \lambda - (e^\lambda - e^{-\lambda})\lambda \sin \lambda + (e^\lambda - e^{-\lambda})a \cos \lambda = 0, \\ (e^\lambda - e^{-\lambda})\lambda \sin \lambda + (e^\lambda + e^{-\lambda})\lambda \cos \lambda + (e^\lambda + e^{-\lambda})a \sin \lambda = 0. \end{cases}$$

Dividindo a primeira equação por $e^\lambda - e^{-\lambda}$ e a segunda por $e^\lambda + e^{-\lambda}$, obtemos

$$\begin{cases} \frac{e^\lambda + e^{-\lambda}}{e^\lambda - e^{-\lambda}}\lambda \cos \lambda - \lambda \sin \lambda + a \cos \lambda = 0, \\ \frac{e^\lambda - e^{-\lambda}}{e^\lambda + e^{-\lambda}}\lambda \sin \lambda + \lambda \cos \lambda + a \sin \lambda = 0. \end{cases}$$

Multiplicando agora a primeira por $-\sin \lambda$ e a segunda por $\cos \lambda$, chegamos a

$$\begin{cases} -\frac{e^\lambda + e^{-\lambda}}{e^\lambda - e^{-\lambda}}\lambda \sin \lambda \cos \lambda + \lambda \sin^2 \lambda + a \sin \lambda \cos \lambda = 0, \\ \frac{e^\lambda - e^{-\lambda}}{e^\lambda + e^{-\lambda}}\lambda \sin \lambda \cos \lambda + \lambda \cos^2 \lambda + a \sin \lambda \cos \lambda = 0. \end{cases}$$

A soma das duas equações resulta em

$$-\frac{4}{e^{2\lambda} - e^{-2\lambda}}\lambda \sin \lambda \cos \lambda + \lambda = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{2}{e^{2\lambda} - e^{-2\lambda}} \sin 2\lambda = 0.$$

Voltando para a expressão em termos de b , devemos avaliar se a função

$$f(b) = e^{\sqrt{2b}} - e^{-\sqrt{2b}} - 2b \sin \sqrt{2b}$$

tem raízes reais. Notemos que

$$\lim_{b \rightarrow 0^+} f(b) = 0.$$

Portanto, basta que mostremos que f é uma função crescente para que possamos afirmar que ela não possui raízes. Para isso, começaremos avaliando a função positiva $g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g(b) = e^{\sqrt{2b}} + e^{-\sqrt{2b}}.$$

Sua derivada é

$$g'(b) = \frac{1}{\sqrt{2b}} (e^{\sqrt{2b}} - e^{-\sqrt{2b}}) > 0.$$

Isso nos diz que g é crescente e atinge mínimo em $b = 0$:

$$g(0) = 2.$$

Sabendo disso, podemos afirmar que a derivada de f ,

$$f'(b) = \frac{1}{\sqrt{2b}} (g(b) - 2 \cos \sqrt{2b})$$

é positiva, pois $2 \cos \sqrt{2b} < 2$ e $g(b) > 2$, para todo $b > 0$. Concluimos, assim, que f é crescente. Consequentemente, não teremos autovalores.

• $b < 0$

Neste caso, $r = \pm\sqrt{-2b}(1-i)/2$. A solução, portanto, será dada por

$$w(x) = c_1 e^{\frac{\sqrt{-2b}}{2}(1-i)x} + c_2 e^{-\frac{\sqrt{-2b}}{2}(1-i)x}.$$

A primeira condição de fronteira nos diz que $c_1 = -c_2$. Combinada com a segunda, obtemos

$$c_1 \left[\frac{\sqrt{-2b}}{2}(1-i) \left(e^{\frac{\sqrt{-2b}}{2}(1-i)} + e^{-\frac{\sqrt{-2b}}{2}(1-i)} \right) + a \left(e^{\frac{\sqrt{-2b}}{2}(1-i)} - e^{-\frac{\sqrt{-2b}}{2}(1-i)} \right) \right] = 0.$$

Se $c_1 = 0$, teremos $w \equiv 0$ e não existem autofunções. Vejamos se é possível que c_1 seja não nulo. Para simplificar a notação, por ora, usaremos $\lambda = \sqrt{-2b}/2$. Assim, o que precisamos verificar é se é possível

$$\lambda(1-i) \left(e^{\lambda(1-i)} + e^{-\lambda(1-i)} \right) + a \left(e^{\lambda(1-i)} - e^{-\lambda(1-i)} \right) = 0.$$

em outras palavras, queremos saber se o sistema

$$\begin{cases} (e^\lambda + e^{-\lambda})\lambda \cos \lambda - (e^\lambda - e^{-\lambda})\lambda \sin \lambda + (e^\lambda - e^{-\lambda})a \cos \lambda = 0, \\ -(e^\lambda - e^{-\lambda})\lambda \sin \lambda - (e^\lambda + e^{-\lambda})\lambda \cos \lambda - (e^\lambda + e^{-\lambda})a \sin \lambda = 0. \end{cases}$$

tem solução. Para isso, multiplicamos a primeira equação por $(e^\lambda + e^{-\lambda}) \sin \lambda$, a segunda por $(e^\lambda - e^{-\lambda}) \cos \lambda$ e somamos os resultados, obtendo:

$$2 \sin 2\lambda - e^{2\lambda} + e^{-2\lambda} = 0.$$

Substituindo o valor de $\lambda = \sqrt{-2b}/2$, encontramos

$$2 \sin \sqrt{-2b} - e^{\sqrt{-2b}} + e^{-\sqrt{-2b}} = 0. \quad (\text{A.2})$$

Consideremos $f : (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(b) = 2 \sin \sqrt{-2b} - e^{\sqrt{-2b}} + e^{-\sqrt{-2b}},$$

cuja derivada é

$$f'(b) = \frac{1}{\sqrt{-2b}} \left(e^{\sqrt{-2b}} + e^{-\sqrt{-2b}} - 2 \cos \sqrt{-2b} \right).$$

Quando $b \rightarrow 0^-$, temos

$$\lim_{b \rightarrow 0^-} f(b) = 0.$$

Se pudermos mostrar que f é crescente, o limite obtido garantirá que $f(b) < 0$, para todo $b < 0$. Logo, a igualdade em (A.2) não ocorre, permitindo-nos concluir que $c_1 = 0$ e que não existem autofunções. Provemos que f é crescente. Isso se reduz a mostrarmos que

$$e^{\sqrt{-2b}} + e^{-\sqrt{-2b}} > 2 \cos \sqrt{-2b}.$$

Notemos que o lado direito dessa desigualdade atinge, no máximo, o valor 2. Assim, para obtermos o que queremos, basta verificarmos que

$$e^{\sqrt{-2b}} + e^{-\sqrt{-2b}} > 2.$$

Seja $f_1 : (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ a função

$$f_1(b) = e^{\sqrt{-2b}} + e^{-\sqrt{-2b}}.$$

Com alguns cálculos, mostra-se que f_1 é uma função decrescente. Uma vez que

$$\lim_{b \rightarrow 0^-} f_1(b) = 2, \text{ segue que}$$

$$e^{\sqrt{-2b}} + e^{-\sqrt{-2b}} > 2,$$

para todo $b \in (-\infty, 0)$, como queríamos.

Subcaso 2. $r = \pm(c + id)$, com $c, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

A solução será da forma

$$w(x) = c_1 e^{(c+id)x} + c_2 e^{-(c+id)x},$$

Usando as condições de fronteira, vemos que

$$c_1 [(c + id)(e^{c+id} + e^{-(c+id)}) + a(e^{c+id} - e^{-(c+id)})] = 0.$$

O caso $c_1 = 0$ nos fornecerá $w \equiv 0$ e não teremos autovalores. Suponhamos que é possível ter $c_1 \neq 0$. Obrigatoriamente devem existir $c, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tais que

$$(c + id)(e^{c+id} + e^{-(c+id)}) + a(e^{c+id} - e^{-(c+id)}) = 0 \quad (\text{A.3})$$

Escrevendo (A.3) em termos de senos e cossenos, encontramos

$$\begin{cases} (e^c + e^{-c})c \cos d - d(e^c - e^{-c})d \sin d + (e^c - e^{-c})a \cos d = 0, \\ (e^c - e^{-c})c \sin d + (e^c + e^{-c})d \cos d + (e^c + e^{-c})a \sin d = 0. \end{cases}$$

ou, ainda,

$$\begin{cases} \frac{e^c + e^{-c}}{e^c - e^{-c}} c \cos d - d \sin d + a \cos d = 0, \\ \frac{e^c - e^{-c}}{e^c + e^{-c}} c \sin d + d \cos d + a \sin d = 0, \end{cases}$$

que trataremos de duas formas diferentes. Inicialmente, multiplicamos a primeira equação por $-\sin d$, a segunda por $\cos d$ e somamos as equações resultantes. Com isso, obtemos

$$\frac{1}{2} \left(\frac{e^c - e^{-c}}{e^c + e^{-c}} - \frac{e^c + e^{-c}}{e^c - e^{-c}} \right) c \sin 2d + d = -\frac{1}{2} \left(\frac{4}{e^{2c} - e^{-2c}} \right) c \sin 2d + d = 0,$$

que é equivalente a

$$\frac{\sin 2d}{d} = \frac{e^{2c} - e^{-2c}}{2c}. \quad (\text{A.4})$$

No segundo momento, multiplicamos a primeira equação por $\sin d$ e a segunda por $\cos d$.

A soma das novas equações fornece

$$\frac{e^{2c} + e^{-2c}}{e^{2c} - e^{-2c}} c \frac{\sin 2d}{d} + \cos 2d + \frac{a \sin 2d}{d} = 0.$$

Usando o resultado obtido em (A.4) e o fato de $\cos 2d = 2 \cos^2 d - 1$, temos

$$\frac{e^{2c} + e^{-2c}}{e^{2c} - e^{-2c}} c \frac{e^{2c} - e^{-2c}}{2c} + 2 \cos^2 d - 1 + a \frac{e^{2c} - e^{-2c}}{2c} = 0,$$

isto é,

$$\cos^2 d = \frac{1}{2} - a \frac{e^{2c} - e^{-2c}}{4c} - \frac{e^{2c} + e^{-2c}}{4}.$$

Nosso objetivo agora é mostrar que a função

$$f(c) = \frac{1}{2} - a \frac{e^{2c} - e^{-2c}}{4c} - \frac{e^{2c} + e^{-2c}}{4}$$

é menor que 0 para todo $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, uma vez que se isso ocorre, não é possível termos

$$\cos^2 d = \frac{1}{2} - a \frac{e^{2c} - e^{-2c}}{4c} - \frac{e^{2c} + e^{-2c}}{4}$$

qualquer que seja o $d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e não teremos autofunções. Com alguns cálculos podemos mostrar que

$$\frac{e^{2c} + e^{-2c}}{4} > \frac{1}{2}$$

no domínio de f , o que fornece

$$f(c) < -a \frac{e^{2c} - e^{-2c}}{4c}.$$

Dessa forma, para que tenhamos $f(c) < 0$, basta provarmos que a função

$$g(c) = \frac{e^{2c} - e^{-2c}}{4c}$$

é maior que 0 para todo $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Já sabemos que $e^{2c} - e^{-2c} > 0$ se $c > 0$. No caso de $c < 0$, temos que

$$c < -c \Leftrightarrow e^{2c} < e^{-2c} \Leftrightarrow e^{2c} - e^{-2c} < 0.$$

Portanto, do fato de $4c$ ser menor que zero, podemos afirmar que $g(c) > 0$. Isso conclui nossa demonstração.

Apêndice B

Problema de Minimização e Regularidade

Sejam $\Omega = (0, 1)$, ω subconjunto aberto não vazio de Ω e $T_0 > 0$. Considerando $a > 0$ e κ tal que $|\kappa| \geq \kappa_0$, κ_0 uma constante positiva adequada, retomamos o sistema (1.77)

$$\begin{cases} P(y) = y_{\tau\tau} - y_{xx} + \kappa y_{\tau} = f & \text{em } Q_0 := (0, 1) \times (0, T_0), \\ y(0, \tau) = 0 & \text{sobre } (0, T_0), \\ y_x(1, \tau) + ay(1, \tau) = 0 & \text{sobre } (0, T_0), \\ y(x, 0) = y(x, T_0) = 0 & \text{sobre } (0, 1). \end{cases}$$

O objetivo deste apêndice é provar o Lema 1.11. Para isso precisaremos de outro lema, um que trata um problema bastante semelhante, mas discretizando a variável temporal. A importância dessa discretização está na possibilidade de melhorar, em algum sentido, a regularidade das funções e assim ser capaz de fazer cálculos dos quais precisamos.

Usaremos as seguintes notações:

$$(0, 1) \times K^{(l)} = \{(x, \tau) \in Q_0 | x \in (0, 1), \tau = il, i \in \{1, \dots, N-1\}\},$$

$$(0, 1) \times K_1^{(l)} = ((0, 1) \times K^{(l)}) \cup ((0, 1) \times \{T_0\}),$$

$$D_l v(x, \tau) = \frac{v(x, \tau + l) - v(x, \tau)}{l},$$

$$D_{\bar{l}} v(x, \tau) = \frac{v(x, \tau) - v(x, \tau - l)}{l},$$

$$D_l^2 v(x, \tau) = D_l (D_{\bar{l}} v)(x, \tau) = \frac{v(x, \tau + l) - 2v(x, \tau) + v(x, \tau - l)}{l^2},$$

com $l = T_0/N$, $N \in \mathbb{Z}_+$.


 Figura B.1: representação do conjunto $(0, 1) \times K^{(l)}$

Não é difícil mostrar que para $b \in \mathbb{R}$ e funções v_1, v_2 ,

- I. $D_l(v_1 + bv_2)(x, \tau) = D_lv_1(x, \tau) + bD_lv_2(x, \tau)$,
- II. $D_l(v_1v_2)(x, \tau) = v_1(x, \tau + l)D_lv_2(x, \tau) + v_2(x, \tau)D_lv_1(x, \tau)$,
- III. $D_{\bar{l}}(v_1v_2)(x, \tau) = v_1(x, \tau)D_{\bar{l}}v_2(x, \tau) + v_2(x, \tau - l)D_{\bar{l}}v_1(x, \tau)$,
- IV. $D_l^2v_1(x, \tau) = D_{\bar{l}}(D_lv_1)(x, \tau)$.

Dado um espaço de Banach Y , definimos o análogo do espaço $L^2(0, T_0; Y)$ como:

$$l_2^{(l)}(0, T_0; Y) = \left\{ v(x, \tau) \mid (x, \tau) \in (0, 1) \times K^{(l)} \text{ e } \|v\|_{l_2^{(l)}(0, T_0; Y)}^2 = \sum_{i=1}^{N-1} l \|v(x, il)\|_Y^2 < \infty \right\}.$$

Os análogos dos operadores P e P^* serão:

$$P_lv = D_l^2v - v_{xx} + \kappa D_lv$$

e

$$P_l^*v = D_{\bar{l}}^2v - v_{xx} - \kappa D_{\bar{l}}v.$$

Introduzimos também uma versão discreta para o problema (1.77):

$$\left\{ \begin{array}{ll} P_l(y) = D_l^2y - y_{xx} + \kappa D_ly = f & \text{em } (0, 1) \times K^{(l)}, \\ y(0, il) = 0 & \text{sobre } K^{(l)} \\ y_x(1, il) + ay(1, il) = 0 & \text{sobre } K^{(l)}, \\ y(x, 0) = y(x, T_0) = 0 & \text{sobre } (0, 1). \end{array} \right. \quad (\text{B.1})$$

Definição B.1 Suponhamos $f \in l_2^{(l)}(0, T_0; L^2(0, 1))$. Dizemos que a função y pertencente

$a \, l_2^{(l)}(0, T_0; L^2(0, 1))$ é solução fraca do problema (B.1) se

$$(y, P_l^* z)_{l_2^{(l)}(0, T_0; L^2(0, 1))} = \langle f, z \rangle_{l_2^{(l)}(0, T_0; V'(0, 1)), l_2^{(l)}(0, T_0; V(0, 1))},$$

para toda $z \in l_2^{(l)}(0, T_0; V(0, 1))$ que satisfaz

$$\begin{cases} P_l^*(z) \in l_2^{(l)}(0, T_0; V(0, 1)) \\ z(x, 0) = z(x, T_0) = 0 & \text{sobre } (0, 1), \\ z_x(1, il) + az(1, il) = 0 & \text{sobre } K^{(l)}. \end{cases}$$

Seja $J^{(l)}$ o funcional

$$\begin{aligned} J^{(l)} & \left(z^{(l)}, r_1^{(l)}, r_2^{(l)}, r^{(l)} \right) \\ &= \frac{l}{2} \sum_{i=1}^{N-1} \int_0^1 |z^{(l)}(x, il)|^2 e^{-2\lambda\psi(x, il)} dx \\ &+ \frac{l}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \zeta(x) \left(\frac{|r_1^{(l)}(x, il)|^2}{\lambda^2} + \frac{|r_2^{(l)}(x, il)|^2}{\lambda^4} \right) e^{-2\lambda\psi(x, il)} dx \\ &+ \frac{l}{2\theta} \sum_{i=1}^{N-1} \int_0^1 |r^{(l)}(x, il)|^2 dx. \end{aligned} \tag{B.2}$$

Estamos em busca de um elemento $(\hat{z}^{(l)}, \hat{r}_1^{(l)}, \hat{r}_2^{(l)}, \hat{r}^{(l)})$ onde $J^{(l)}$ atinja valor mínimo e que satisfaz

$$\begin{cases} P_l^*(z^{(l)}) = -D_l r_1^{(l)} + r_2^{(l)} + \lambda y e^{2\lambda\psi} + r^{(l)} & \text{em } (0, 1) \times K^{(l)}, \end{cases} \tag{B.3}$$

$$\begin{cases} z^{(l)}(0, \tau) = z_x^{(l)}(1, \tau) + az^{(l)}(1, \tau) = 0 & \text{sobre } K^{(l)}, \end{cases} \tag{B.4}$$

$$\begin{cases} z^{(l)}(x, 0) = z^{(l)}(x, T_0) = 0 & \text{sobre } (0, 1), \end{cases} \tag{B.5}$$

$$\begin{cases} r_j^{(l)}(x, 0) = r_j^{(l)}(x, T_0) = 0 & \text{sobre } (0, 1), \quad j = \{1, 2\}, \end{cases} \tag{B.6}$$

$$\begin{cases} r^{(l)}(x, 0) = r^{(l)}(x, T_0) = 0 & \text{sobre } (0, 1). \end{cases} \tag{B.7}$$

O conjunto admissível para o problema acima é dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{ad}^{(l)} &= \left\{ \left(z^{(l)}, r_1^{(l)}, r_2^{(l)}, r^{(l)} \right) \in l_2^{(l)}(0, T_0; V(0, 1)) \times \left(l_2^{(l)}(0, T_0; L^2(0, 1)) \right)^3 \right. \\ &\quad \left. \left(z^{(l)}, r_1^{(l)}, r_2^{(l)}, r^{(l)} \right) \text{ satisfaz (B.3)-(B.7)} \right\}. \end{aligned}$$

A existência de $\left(\hat{z}^{(l)}, \hat{r}_1^{(l)}, \hat{r}_2^{(l)}, \hat{r}^{(l)}\right)$ e sua regularidade são os temas do resultado a seguir.

Lema B.2 *Seja $y \in L^2(Q_0)$ com $y(x, 0) = y(x, T_0) = 0$. Então existe única solução $\left(\hat{z}^{(l)}, \hat{r}_1^{(l)}, \hat{r}_2^{(l)}, \hat{r}^{(l)}\right) \in l_2^{(l)}(0, T_0; H^2(0, 1)) \times \left(l_2^{(l)}(0, T_0; L^2(0, 1))\right)^3$ para o problema (B.3)-(B.7). Tal solução satisfaz o sistema de optimalidade*

$$\left\{ \begin{array}{ll} p^{(l)} = \frac{r^{(l)}}{\theta} & \text{em } (0, 1) \times K^{(l)}, \quad (\text{B.8}) \\ P_l(p^{(l)}) + e^{-2\lambda\psi} z^{(l)} = 0 & \text{em } (0, 1) \times K^{(l)}, \quad (\text{B.9}) \\ P_l^*(z^{(l)}) = -D_{\bar{l}} r_1^{(l)} + r_2^{(l)} + \lambda y e^{2\lambda\psi} + r^{(l)} & \text{em } (0, 1) \times K^{(l)}, \quad (\text{B.10}) \\ p^{(l)}(0, il) = p_x^{(l)}(1, il) + ap^{(l)}(1, il) = 0 & \text{sobre } K^{(l)}, \quad (\text{B.11}) \\ z^{(l)}(0, il) = z_x^{(l)}(1, il) + az^{(l)}(1, il) = 0 & \text{sobre } K^{(l)}, \quad (\text{B.12}) \\ r_j^{(l)}(x, 0) = r_j^{(l)}(x, T_0) = 0 & \text{sobre } (0, 1), j = \{1, 2\}, \quad (\text{B.13}) \\ p^{(l)}(x, 0) = p^{(l)}(x, T_0) = 0 & \text{sobre } (0, 1), \quad (\text{B.14}) \\ z^{(l)}(x, 0) = z^{(l)}(x, T_0) = 0 & \text{sobre } (0, 1), \quad (\text{B.15}) \\ D_l p(x, 0) = D_l p(x, T_0) = 0 & \text{sobre } (0, 1), \quad (\text{B.16}) \\ -D_l p^{(l)} + \zeta \frac{r_1^{(l)}}{\lambda^2} e^{-2\lambda\psi} = 0 & \text{em } (0, 1) \times K_1^{(l)}, \quad (\text{B.17}) \\ p^{(l)} - \zeta \frac{r_2^{(l)}}{\lambda^4} e^{-2\lambda\psi} = 0 & \text{em } (0, 1) \times K_1^{(l)}. \quad (\text{B.18}) \end{array} \right.$$

Além disso, existe uma constante $C = C(\theta, \kappa, \lambda)$ para a qual as seguintes estimativas são verdadeiras:

$$J^{(l)} \left(\hat{z}^{(l)}, \hat{r}_1^{(l)}, \hat{r}_2^{(l)}, \hat{r}^{(l)} \right) \leq C \sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 |y(x, il)|^2 e^{4\lambda\psi(x, il)} dx, \quad (\text{B.19})$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N l \int_0^1 |D_{\bar{l}} \hat{z}^{(l)}(x, il)|^2 dx + \sum_{i=1}^N l \int_0^1 \frac{\zeta(x)}{\lambda^2} |D_{\bar{l}} \hat{r}_1^{(l)}(x, il)|^2 dx \\ & + \sum_{i=1}^N l \int_0^1 \frac{\zeta(x)}{\lambda^4} |D_{\bar{l}} \hat{r}_2^{(l)}(x, il)|^2 dx + \sum_{i=1}^N \frac{l}{\theta} \int_0^1 |D_{\bar{l}} \hat{r}^{(l)}(x, il)|^2 dx \\ & \leq C \sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 |y(x, il)|^2 e^{4\lambda\psi(x, il)} dx, \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

$$\sum_{i=1}^N l \int_0^1 |(\hat{z}^{(l)})_x(x, il)|^2 dx \leq C \sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 |y(x, il)|^2 e^{4\lambda\psi(x, il)} dx. \quad (\text{B.21})$$

Demonstração. Para uma melhor organização da prova, ela será dividida em etapas.

I. Existência de solução em $l_2^{(l)}(0, T_0; H^2(0, 1)) \times \left(l_2^{(l)}(0, T_0; L^2(0, 1))\right)^3$. Observemos que $J^{(l)}\left(z^{(l)}, r_1^{(l)}, r_2^{(l)}, r^{(l)}\right) \geq 0$ e que $(0, 0, 0, -\lambda y e^{2\lambda\psi}) \in \mathcal{A}_{ad}^{(l)}$. Isso nos permite afirmar que existe $\alpha^{(l)}$ tal que

$$\alpha^{(l)} = \inf_{\mathcal{A}_{ad}^{(l)}} J^{(l)}\left(z^{(l)}, r_1^{(l)}, r_2^{(l)}, r^{(l)}\right)$$

e, conseqüentemente, existe uma sequência $\left(J^{(l)}\left(z_m^{(l)}, r_{1m}^{(l)}, r_{2m}^{(l)}, r_m^{(l)}\right)\right)_{m \in \mathbb{N}}$ satisfazendo

$$\lim_{m \rightarrow \infty} J^{(l)}\left(z_m^{(l)}, r_{1m}^{(l)}, r_{2m}^{(l)}, r_m^{(l)}\right) = \alpha^{(l)},$$

com $\left(z_m^{(l)}, r_{1m}^{(l)}, r_{2m}^{(l)}, r_m^{(l)}\right) \in \mathcal{A}_{ad}^{(l)}$. A convergência garante que $\left(J^{(l)}\left(z_m^{(l)}, r_{1m}^{(l)}, r_{2m}^{(l)}, r_m^{(l)}\right)\right)_{m \in \mathbb{N}}$ é uma sequência limitada, digamos por $B^{(l)}$. Temos que

$$\begin{aligned} B^{(l)} &\geq \frac{l}{2} \sum_{i=1}^{N-1} \int_0^1 |z_m^{(l)}(x, il)|^2 e^{-2\lambda\psi(x, il)} dx \\ &\quad + \frac{l}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \zeta(x) \left(\frac{|r_{1m}^{(l)}(x, il)|^2}{\lambda^2} + \frac{|r_{2m}^{(l)}(x, il)|^2}{\lambda^4} \right) e^{-2\lambda\psi(x, il)} dx \\ &\quad + \frac{l}{2\theta} \sum_{i=1}^{N-1} \int_0^1 |r_m^{(l)}(x, il)|^2 dx. \end{aligned}$$

Disso e das limitações de ψ e ζ , encontramos

$$\begin{aligned} \|z_m^{(l)}\|_{L_2^{(l)}(0, T_0; L^2(0, 1))}^2 &= l \sum_{i=1}^{N-1} \int_0^1 |z_m^{(l)}(x, il)|^2 dx \leq 2B^{(l)} e^{2\lambda e^{sB_1}}, \\ \|r_{1m}^{(l)}\|_{L_2^{(l)}(0, T_0; L^2(0, 1))}^2 &= l \sum_{i=1}^N \int_0^1 |r_{1m}^{(l)}(x, il)|^2 dx \leq 2\lambda^2 B^{(l)} e^{2\lambda e^{sB_1}}, \\ \|r_{2m}^{(l)}\|_{L_2^{(l)}(0, T_0; L^2(0, 1))}^2 &= l \sum_{i=1}^N \int_0^1 |r_{2m}^{(l)}(x, il)|^2 dx \leq 2\lambda^4 B^{(l)} e^{2\lambda e^{sB_1}}, \\ \|r_m^{(l)}\|_{L_2^{(l)}(0, T_0; L^2(0, 1))}^2 &= l \sum_{i=1}^{N-1} \int_0^1 |r_m^{(l)}(x, il)|^2 dx \leq 2\theta B^{(l)}, \end{aligned}$$

donde segue que $\left(z_m^{(l)}, r_{1m}^{(l)}, r_{2m}^{(l)}, r_m^{(l)}\right)_{m \in \mathbb{N}^*}$ é limitada em $\left(l_2^{(l)}(0, T_0; L^2(0, 1))\right)^4$. Em particular, $\left(z_m^{(l)}(il), r_{1m}^{(l)}(il), r_{2m}^{(l)}(il), r_m^{(l)}(il)\right)_{m \in \mathbb{N}^*}$ é limitada em $(L^2(0, 1))^4$ para cada $i \in$

$\{0, 1, \dots, N\}$. A limitação de $\left(z_m^{(l)}, r_{1m}^{(l)}, r_{2m}^{(l)}, r_m^{(l)}\right)_{m \in \mathbb{N}^*}$ é suficiente para garantir que a sequência $\left(-\left(z_m^{(l)}\right)_{xx}\right)_{m \in \mathbb{N}^*} = \left(-D_l^2 z_m^{(l)} + \kappa D_{\bar{l}} z_m^{(l)} - D_{\bar{l}} r_{1m}^{(l)} + r_{2m}^{(l)} + \lambda y e^{2\lambda\psi} + r_m^{(l)}\right)_{m \in \mathbb{N}^*}$ é limitada em $l_2^{(l)}(0, T_0; L^2(0, 1))$. Multiplicando essa igualdade por $z_m^{(l)}(x, il)$, integrando com x variando de 0 a 1 e usando as limitações que temos, chegamos a

$$\begin{aligned} & al \left| z_m^{(l)}(1, il) \right|^2 + \int_0^1 l \left| \left(z_m^{(l)} \right)_x(x, il) \right|^2 dx \\ & \leq \int_0^1 l \left| \left(-D_l^2 z_m^{(l)} + \kappa D_{\bar{l}} z_m^{(l)} - D_{\bar{l}} r_{1m}^{(l)} + r_{2m}^{(l)} + \lambda y e^{2\lambda\psi} + r_m^{(l)} \right)(x, il) \right|^2 dx \\ & \quad + \int_0^1 l \left| z_m^{(l)}(x, il) \right|^2 dx \\ & \leq C. \end{aligned}$$

Portanto, $\left(z_m^{(l)}\right)_{m \in \mathbb{N}^*}$ é limitada em $l_2^{(l)}(0, T; H^2(0, 1))$. Podemos, então, afirmar que existe uma subsequência de $\left(z_m^{(l)}, r_{1m}^{(l)}, r_{2m}^{(l)}, r_m^{(l)}\right)_{m \in \mathbb{N}^*}$, que ainda denotaremos da mesma forma, tal que

$$\left(z_m^{(l)}, r_{1m}^{(l)}, r_{2m}^{(l)}, r_m^{(l)}\right)_{m \in \mathbb{N}^*} \rightharpoonup \left(\hat{z}^{(l)}, \hat{r}_1^{(l)}, \hat{r}_2^{(l)}, \hat{r}^{(l)}\right)$$

em $l_2^{(l)}(0, T_0; H^2(0, 1)) \times \left(l_2^{(l)}(0, T_0; L^2(0, 1))\right)^3$.

Devemos agora mostrar que para todo $l \in \{1, \dots, N\}$, o limite $\left(\hat{z}^{(l)}, \hat{r}_1^{(l)}, \hat{r}_2^{(l)}, \hat{r}^{(l)}\right)$ é um elemento do conjunto admissível. Começamos escrevendo (B.3) da seguinte forma:

$$-\left(z_m^{(l)}\right)_{xx} = -D_l^2 z_m^{(l)} + \kappa D_{\bar{l}} z_m^{(l)} - D_{\bar{l}} r_{1m}^{(l)} + r_{2m}^{(l)} + \lambda y e^{2\lambda\psi} + r_m^{(l)}. \quad (\text{B.22})$$

Das convergências obtidas e das definições de $D_{\bar{l}}$ e D_l^2 encontramos que

$$D_{\bar{l}} z_m^{(l)} \rightharpoonup D_{\bar{l}} \hat{z}^{(l)} \quad \text{em } l_2^{(l)}(0, T_0; H^2(0, 1)),$$

$$D_l^2 z_m^{(l)} \rightharpoonup D_l^2 \hat{z}^{(l)} \quad \text{em } l_2^{(l)}(0, T_0; H^2(0, 1))$$

e

$$D_{\bar{l}} r_{1m}^{(l)} \rightharpoonup D_{\bar{l}} \hat{r}_1^{(l)} \quad \text{em } l_2^{(l)}(0, T_0; L^2(0, 1)).$$

Uma vez que o lado direito de (B.22) converge em $l_2^{(l)}(0, T_0; L^2(0, 1))$, o mesmo pode ser dito de $\left(-\left(z_m^{(l)}\right)_{xx}\right)_m$. Observemos que para qualquer $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(0, 1)$, da convergência de $\left(z_m^{(l)}\right)_m$ em $l_2^{(l)}(0, T_0; L^2(0, 1))$,

$$\sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 \left(z_m^{(l)}\right)_{xx}(x, il) \varphi(x) dx \rightarrow \sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 \hat{z}_{xx}^{(l)}(x, il) \varphi(x) dx.$$

Isso nos diz que $\left(\left(z_m^{(l)}\right)_{xx}\right)_m$ converge para $\hat{z}_{xx}^{(l)}$ no sentido das distribuições. Em particular, como essa sequência é convergente em $l_2^{(l)}(0, T_0; L^2(0, 1))$, segue que

$$\left(\left(z_m^{(l)}\right)_{xx}\right)_m \rightharpoonup \hat{z}_{xx}^{(l)} \quad \text{em } l_2^{(l)}(0, T_0; L^2(0, 1)).$$

Passando o limite na igualdade (B.22) chegamos a

$$P_l^*(\hat{z}^{(l)}) = -D_l \hat{r}_1^{(l)} + \hat{r}_2^{(l)} + \lambda y e^{2\lambda\psi} + \hat{r}^{(l)}.$$

Agora provaremos as condições de fronteira espacial em (B.4). Começamos observando que da limitação obtida para $\left(\left(z_m^{(l)}\right)_x\right)_m$ e por método análogo ao utilizado para $\left(\left(z_m^{(l)}\right)_{xx}\right)_m$, podemos mostrar que, restringindo a uma subsequência se preciso, $\left(z_m^{(l)}\right)_x \rightharpoonup \hat{z}_x^{(l)}$. Do fato de $H^2(0, 1)$ estar imerso continuamente em $\mathcal{C}^1([0, 1])$, faz sentido falarmos em $z^{(l)}(0, il)$, $z^{(l)}(1, il)$ e $z_x^{(l)}(1, il)$, para todo $i = \{1, \dots, N-1\}$. Seja $\vartheta \in \mathcal{C}^1([0, 1])$ satisfazendo $\vartheta(0) = 1$ e $\vartheta(1) = 0$. Para toda função v definida em $\{1, 2, \dots, N-1\}$,

$$\sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 (z_m^{(l)})_x(x, il) \vartheta(x) v(i) dx = - \sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 z_m^{(l)}(x, il) \vartheta_x(x) v(i) dx$$

e

$$\sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 \hat{z}_x^{(l)}(x, il) \vartheta(x) v(i) dx = - \sum_{i=1}^{N-1} l \hat{z}^{(l)}(0, il) v(i) - \sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 \hat{z}^{(l)}(x, il) \vartheta_x(x) v(i) dx.$$

Calculando o limite quando $m \rightarrow \infty$ na primeira igualdade e usando a segunda, vem que

$$\sum_{i=1}^{N-1} l \hat{z}^{(l)}(0, il) v(i) = 0.$$

Fixado $i = i_0$, escolhemos a função v tal que

$$v(i) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = i_0, \\ 0, & \text{se } i \neq i_0. \end{cases}$$

Com isso,

$$\hat{z}^{(l)}(0, il) = 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, N-1\}.$$

Se, por sua vez, tomamos $\vartheta \in \mathcal{C}^1([0, 1])$ com $\vartheta(0) = 0$ e $\vartheta(1) = 1$, seguindo os passos anteriores, encontramos

$$z_m^{(l)}(1, il) \rightarrow \hat{z}^{(l)}(1, il), \quad \forall i \in \{1, \dots, N-1\}.$$

Vejamos que

$$\sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 (z_m^{(l)})_{xx}(x, il) \vartheta(x) v(i) dx$$

$$= \sum_{i=1}^{N-1} l (z_m^{(l)})_x (1, il) v(i) - \sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 (z_m^{(l)})_x (x, il) \vartheta_x(x) v(i) dx$$

e

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 \hat{z}_{xx}^{(l)}(x, il) \vartheta(x) v(i) dx \\ &= \sum_{i=1}^{N-1} l \hat{z}_x^{(l)}(1, il) v(i) - \sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 \hat{z}_x^{(l)}(x, il) \vartheta_x(x) v(i) dx. \end{aligned}$$

Fazendo m tender a infinito temos, por um lado,

$$\sum_{i=1}^{N-1} l (z_m^{(l)}) (1, il) v(i) = -a \sum_{i=1}^{N-1} l z_m^{(l)}(1, il) v(i) \rightarrow -a \sum_{i=1}^{N-1} l \hat{z}^{(l)}(1, il) v(i)$$

e, por outro lado,

$$\sum_{i=1}^{N-1} l (z_m^{(l)})_x (1, il) v(i) \rightarrow \sum_{i=1}^{N-1} l \hat{z}_x^{(l)}(1, il) v(i).$$

Portanto,

$$\sum_{i=1}^{N-1} l \hat{z}_x^{(l)}(1, il) v(i) = -a \sum_{i=1}^{N-1} l \hat{z}^{(l)}(1, il) v(i).$$

Escolhendo v apropriado, concluímos que

$$\hat{z}_x^{(l)}(1, il) = -a \hat{z}^{(l)}(1, il), \quad \forall i \in \{1, \dots, N-1\}.$$

Por fim, vamos analisar a fronteira temporal. Observemos que a equação (B.16) não depende ou fornece informações em $i \in \{0, T_0\}$. Além disso, para os elementos no conjunto admissível, o funcional pode ser considerado com i variando no conjunto $\{1, 2, \dots, N-1\}$. Sendo assim, podemos definir

$$\hat{z}^{(l)}(x, 0) = \hat{z}^{(l)}(x, T_0) = 0 \quad \text{sobre } (0, 1),$$

$$\hat{r}_j^{(l)}(x, 0) = \hat{r}_j^{(l)}(x, T_0) = 0 \quad \text{sobre } (0, 1), \quad j = \{1, 2\},$$

$$\hat{r}^{(l)}(x, 0) = \hat{r}^{(l)}(x, T_0) = 0 \quad \text{sobre } (0, 1).$$

Concluimos, dessa forma, que $(\hat{z}^{(l)}, \hat{r}_1^{(l)}, \hat{r}_2^{(l)}, \hat{r}^{(l)}) \in \mathcal{A}_{ad}^{(l)}$ e segue que ele é o mínimo do funcional $J^{(l)}$. A unicidade de solução decorre do conjunto admissível ser convexo, $J^{(l)}$ ser estritamente convexo e ter um mínimo.

Passaremos agora a buscar o sistema de optimalidade (B.8)-(B.18). Definimos

$$g_l(\xi_0, \xi_1, \xi_2) = J^{(l)} \left(\hat{z}^{(l)} + \xi_0 \delta_0, \hat{r}_1^{(l)} + \xi_1 \delta_1, \hat{r}_2^{(l)} + \xi_2 \delta_2, u^{(l)}(\xi_0, \xi_1, \xi_2) \right),$$

com

$$\delta_0 \in l_2^{(l)}(0, T_0; V(0, 1)),$$

$$P_l^* \delta_0 \in l_2^{(l)}(0, T_0; L^2(0, 1)),$$

$$(\delta_0)_x(1, il) + a\delta_0(1, il) = 0,$$

$$\delta_0(x, 0) = \delta_0(x, T_0) = 0 \quad \text{sobre } (0, 1),$$

$$\delta_j \in L_2^{(l)}(0, T_0; L^2(0, 1)), \quad \delta_j(x, 0) = \delta_j(x, T_0) = 0 \quad \text{sobre } (0, 1), \quad j \in \{1, 2\},$$

$$u^{(l)}(\xi_0, \xi_1, \xi_2) = P_l^*(\hat{z}^{(l)} + \xi_0\delta_0) + D_{\bar{l}}(\hat{r}_1^{(l)} + \xi_1\delta_1) - \hat{r}_2^{(l)} - \xi_2\delta_2 - \lambda y e^{2\lambda\psi},$$

$$(u^{(l)}(\xi_0, \xi_1, \xi_2))(x, 0) = (u^{(l)}(\xi_0, \xi_1, \xi_2))(x, T_0) = 0 \quad \text{sobre } (0, 1).$$

Pode ser visto que $W = \left(\hat{z}^{(l)} + \xi_0\delta_0, \hat{r}_1^{(l)} + \xi_1\delta_1, \hat{r}_2^{(l)} + \xi_2\delta_2, u^{(l)}(\xi_0, \xi_1, \xi_2) \right)$ pertence a $\mathcal{A}_{ad}^{(l)}$. Uma vez que $J^{(l)}$ atinge mínimo em $\left(\hat{z}^{(l)}, \hat{r}_1^{(l)}, \hat{r}_2^{(l)}, \hat{r}^{(l)} \right)$, temos $\nabla g_l(0, 0, 0) = 0$. Fazendo os cálculos encontramos, para todo $\delta_1 \in l_2^{(l)}(0, T_0; L^2(0, 1))$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_l}{\partial \xi_1}(0, 0, 0) &= l \sum_{i=1}^N \int_0^1 \zeta(x) \frac{\hat{r}_1^{(l)}(x, il) \delta_1(x, il)}{\lambda^2} e^{-2\lambda\psi(x, il)} dx \\ &\quad + \frac{l}{\theta} \sum_{i=1}^{N-1} \int_0^1 \hat{r}^{(l)}(x, il) D_{\bar{l}} \delta_1(x, il) dx. \end{aligned} \tag{B.23}$$

Sabemos que

$$\hat{r}^{(l)}(x, il) D_{\bar{l}} \delta_1(x, il) = D_{\bar{l}}(\delta_1 \hat{r}^{(l)})(x, il) - \delta_1(x, (i-1)l) D_{\bar{l}} \hat{r}^{(l)}(x, il)$$

e $\hat{r}^{(l)}(x, 0) = \hat{r}^{(l)}(x, T_0) = 0$. Com isso,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N-1} \int_0^1 \hat{r}^{(l)}(x, il) D_{\bar{l}} \delta_1(x, il) dx &= \sum_{i=1}^N \int_0^1 \hat{r}^{(l)}(x, il) D_{\bar{l}} \delta_1(x, il) dx \\ &= \sum_{i=1}^N \int_0^1 D_{\bar{l}} (\delta_1 \hat{r}^{(l)})(x, il) dx \\ &\quad - \sum_{i=1}^N \int_0^1 \delta_1(x, (i-1)l) D_{\bar{l}} \hat{r}^{(l)}(x, il) dx. \end{aligned}$$

Desenvolvendo o somatório identificamos que

$$\sum_{i=1}^N \int_0^1 D_{\bar{l}} (\delta_1 \hat{r}^{(l)})(x, il) dx = 0.$$

Também podemos verificar que

$$\sum_{i=1}^N \int_0^1 \delta_1(x, (i-1)l) D_{\bar{l}} \hat{r}^{(l)}(x, il) dx = \sum_{j=0}^{N-1} \int_0^1 \delta_1(x, jl) D_{\bar{l}} \hat{r}^{(l)}(x, (j+1)l) dx$$

e

$$D_{\bar{l}}\hat{r}^{(l)}(x, (j+1)l) = D_l\hat{r}^{(l)}(x, jl).$$

Substituindo em (B.23) as informações obtidas, temos

$$\sum_{i=1}^N \int_0^1 \left(\zeta(x) \frac{\hat{r}_1^{(l)}(x, il)}{\lambda^2} e^{-2\lambda\psi(x, il)} - \frac{1}{\theta} D_l \hat{r}^{(l)}(x, il) \right) \delta_1(x, il) dx = 0, \quad (\text{B.24})$$

para todo $\delta_1 \in l_2^{(l)}(0, T_0; L^2(0, 1))$. No caso de $(\partial g_l / \partial \xi_2)(0, 0, 0)$,

$$\begin{aligned} \frac{g_l(0, 0, \eta) - g_l(0, 0, 0)}{\eta} &= \frac{l}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \frac{\zeta(x)}{\lambda^4} \left(2\hat{r}_2^{(l)} + \eta\delta_2 \right) (x, il) \delta_2(x, il) e^{-2\lambda\psi(x, il)} dx \\ &\quad + \frac{l}{2\theta} \sum_{i=1}^{N-1} \int_0^1 (-2\hat{r}^{(l)} + \eta\delta_2)(x, il) \delta_2(x, il) dx. \end{aligned}$$

Notemos que se $i = N$, então $\delta_2(x, il) = \delta_2(x, T_0) = 0$. Segue que

$$\sum_{i=1}^{N-1} \int_0^1 \left(\zeta(x) \frac{\hat{r}_2^{(l)}(x, il)}{\lambda^4} e^{-2\lambda\psi(x, il)} - \frac{1}{\theta} \hat{r}^{(l)}(x, il) \right) \delta_2(x, il) dx = 0, \quad (\text{B.25})$$

para todo $\delta_2 \in l_2^{(l)}(0, T_0; L^2(0, 1))$. Em particular, (B.24) e (B.25) são verdadeiras para todas $\delta_1, \delta_2 \in l_2^{(l)}(0, T_0; H^1(0, 1))$. Lembremo-nos que $\mathcal{C}_0^\infty(0, 1)$ é denso em $H^1(0, 1)$. Fixado $i_0 \in \{1, 2, \dots, N-1, N\}$, consideramos as funções $\delta_{1i_0}(\cdot, il), \delta_{2i_0}(\cdot, il) \in l_2^{(l)}(0, T_0; \mathcal{C}_0^\infty(0, 1))$ tais que $\delta_{1i_0}(\cdot, il) = \delta_{2i_0}(\cdot, il) = 0$ sempre que $i \neq i_0$. Assim, por (B.24) e (B.25) temos que

$$\zeta(x) \frac{\hat{r}_1^{(l)}(x, il)}{\lambda^2} e^{-2\lambda\psi(x, il)} - \frac{1}{\theta} D_l \hat{r}^{(l)}(x, il) = 0 \quad \text{em } (0, 1) \times K_1^{(l)}, \quad (\text{B.26})$$

$$\zeta(x) \frac{\hat{r}_2^{(l)}(x, il)}{\lambda^4} e^{-2\lambda\psi(x, il)} - \frac{1}{\theta} \hat{r}^{(l)}(x, il) = 0 \quad \text{em } (0, 1) \times K^{(l)}. \quad (\text{B.27})$$

Definindo $\hat{p}^{(l)} = \hat{r}^{(l)} / \theta$, (B.26) e (B.27) fornecem as equações (B.17) e (B.18), respectivamente. Utilizando (B.5) em (B.25), vemos que

$$D_l \hat{p}^{(l)}(x, 0) = \zeta(x) \frac{\hat{r}_1^{(l)}(x, 0)}{\lambda^2} e^{-2\lambda\psi(x, 0)} = 0,$$

$$D_l \hat{p}^{(l)}(x, T_0) = \zeta(x) \frac{\hat{r}_1^{(l)}(x, T_0)}{\lambda^2} e^{-2\lambda\psi(x, T_0)} = 0.$$

Também, (B.4) rende

$$\hat{p}^{(l)}(x, 0) = \frac{\hat{r}^{(l)}(x, 0)}{\theta} = 0,$$

$$\hat{p}^{(l)}(x, T_0) = \frac{\hat{r}^{(l)}(x, T_0)}{\theta} = 0.$$

Conseguimos, portanto, as igualdades em (B.15) e (B.17). Agora calculamos $(\partial g_l / \partial \xi_0)(0, 0, 0)$.

Encontramos que

$$\sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 \left(\frac{\hat{r}^{(l)}(x, il)}{\theta} P_l^* \delta_0(x, il) + \hat{z}^{(l)}(x, il) \delta_0(x, il) e^{-2\lambda\psi(x, il)} \right) dx = 0, \quad (\text{B.28})$$

com $\delta_0 \in \{l_2^{(l)}(0, T_0; V(0, 1)) \mid P_l^* \delta \in l^2(0, T_0; L^2(0, 1)), \delta(x, 0) = \delta(x, T_0) = 0 \text{ sobre } (0, 1) \text{ e } \delta_x(1, il) + a\delta(1, il) = 0 \text{ sobre } K^{(l)}\}$. Notemos que isso nos diz que $\hat{p}^{(l)}$ é solução fraca de (B.1) com $P(\hat{p})^{(l)} = -\hat{z}^{(l)}(x, il)e^{-2\lambda\psi(x, il)}$. Disso seguem as equações (B.10) e (B.12).

Limitação Uniforme. Buscaremos uma limitação para solução $(\hat{z}^{(l)}, \hat{r}_1^{(l)}, \hat{r}_2^{(l)}, \hat{r}^{(l)}) \in (l_2^{(l)}(0, T_0; H^2(0, 1)))^2 \times (l_2^{(l)}(0, T_0; L^2(0, 1)))^2$ que não dependa de l . O primeiro passo nesse caminho é fazer o produto escalar em $l_2^{(l)}(0, T_0; L^2(0, 1))$ entre a equação (B.11) e $\hat{p}^{(l)}$:

$$\sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 \left(P_l^*(\hat{z}^{(l)}) + D_{\bar{l}} \hat{r}_1^{(l)} - \hat{r}_2^{(l)} - \lambda y e^{2\lambda\psi} - \hat{r}^{(l)} \right) (x, il) \hat{p}^{(l)}(x, il) dx = 0. \quad (\text{B.29})$$

Vamos trabalhar um pouco com algumas parcelas dessa integral. Para o cálculo de

$$\sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 P_l^* \hat{z}^{(l)}(x, il) \hat{p}^{(l)}(x, il) dx, \quad (\text{B.30})$$

usamos que de

$$\begin{aligned} D_l^2 \hat{z}^{(l)}(x, il) \hat{p}^{(l)}(x, il) &= D_l (\hat{p}^{(l)} D_{\bar{l}} \hat{z}^{(l)}) (x, il) - D_{\bar{l}} (\hat{z}^{(l)} D_l \hat{p}^{(l)}) (x, (i+1)l) \\ &\quad + \hat{z}^{(l)}(x, (i+1)l) D_{\bar{l}} (D_l \hat{p}^{(l)}(x, (i+1)l)) \end{aligned}$$

e de $\hat{p}^{(l)}(x, 0) = \hat{p}^{(l)}(x, T_0) = \hat{z}^{(l)}(x, 0) = \hat{z}^{(l)}(x, T_0) = 0$, encontramos

$$\sum_{i=0}^{N-1} D_l (\hat{p}^{(l)} D_{\bar{l}} \hat{z}^{(l)}) (x, il) = \sum_{i=0}^{N-1} D_{\bar{l}} (\hat{z}^{(l)} D_l \hat{p}^{(l)}) (x, (i+1)l) = 0.$$

Essas igualdades e algumas manipulações levam a

$$\sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 D_l^2 \hat{z}^{(l)}(x, il) \hat{p}^{(l)}(x, il) dx = \sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 \hat{z}^{(l)}(x, il) D_l^2 \hat{p}^{(l)}(x, il) dx. \quad (\text{B.31})$$

Os dados na fronteira espacial e integração por partes nos permitem estabelecer que

$$-\sum_{i=1}^{N-1} \int_0^1 \hat{p}^{(l)}(x, il) (\hat{z}^{(l)})_{xx}(x, il) dx = -\sum_{i=1}^{N-1} \int_0^1 (\hat{p}^{(l)})_{xx}(x, il) \hat{z}^{(l)}(x, il) dx. \quad (\text{B.32})$$

Por último, usando o fato de $D_{\bar{l}} v(x, (j+1)l) = D_l v(x, jl)$ e argumentos semelhantes aos que forneceram (B.31), obtemos

$$-\sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 D_{\bar{l}} \hat{z}^{(l)}(x, il) \hat{p}^{(l)}(x, il) dx = \sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 \hat{z}^{(l)}(x, il) D_l \hat{p}^{(l)}(x, il) dx. \quad (\text{B.33})$$

Somando (B.31)-(B.33) membro a membro, conseguimos

$$\sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 P_l^* \hat{z}^{(l)}(x, il) \hat{p}^{(l)}(x, il) dx = \sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 \hat{z}^{(l)}(x, il) P(\hat{p}^{(l)})(x, il) dx. \quad (\text{B.34})$$

Para a segunda parcela em (B.29), de $\hat{p}^{(l)}(x, 0) = \hat{p}^{(l)}(x, T_0) = 0$ e de $D_{\bar{l}} \hat{p}^{(l)}(x, (j+1)l) = D_l \hat{p}^{(l)}(x, jl)$, vemos que

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 D_{\bar{l}} \hat{r}_1^{(l)}(x, il) \hat{p}^{(l)}(x, il) dx \\ &= \sum_{i=1}^N l \int_0^1 D_{\bar{l}} \left(\hat{r}_1^{(l)} \hat{p}^{(l)} \right) (x, il) dx - \sum_{i=1}^N l \int_0^1 \hat{r}_1^{(l)}(x, (i-1)l) D_{\bar{l}} \hat{p}^{(l)}(x, il) dx \\ &= - \sum_{j=1}^N l \int_0^1 \hat{r}_1^{(l)}(x, jl) D_{\bar{l}} \hat{p}^{(l)}(x, (j+1)l) dx \\ &= - \sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 \hat{r}_1^{(l)}(x, il) D_l \hat{p}^{(l)}(x, il) dx. \end{aligned} \quad (\text{B.35})$$

Podemos, então, substituir (B.34) e (B.35) em (B.29):

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 \left(P_l^* (\hat{z}^{(l)}) + D_{\bar{l}} \hat{r}_1^{(l)} - \hat{r}_2^{(l)} - \lambda y e^{2\lambda\psi} - \hat{r}^{(l)} \right) (x, il) \hat{p}^{(l)}(x, il) dx \\ &= \sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 \hat{z}^{(l)}(x, il) P(\hat{p}^{(l)})(x, il) dx - \sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 \hat{r}_1^{(l)}(x, il) D_l \hat{p}^{(l)}(x, il) dx \\ &\quad - \sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 \hat{r}_2^{(l)}(x, il) \hat{p}^{(l)}(x, il) dx - \sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 \lambda y(x, il) e^{2\lambda\psi(x, il)} \hat{p}^{(l)}(x, il) dx \\ &\quad - \sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 \hat{r}^{(l)}(x, il) \hat{p}^{(l)}(x, il) dx. \end{aligned}$$

Com o auxílio do sistema (B.8)-(B.18) conseguimos que

$$\begin{aligned} 0 &= - \sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 |\hat{z}^{(l)}(x, il)|^2 e^{-2\lambda\psi(x, il)} dx - \sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 \zeta \frac{|\hat{r}_1^{(l)}(x, il)|^2}{\lambda^2} e^{-2\lambda\psi(x, il)} dx \\ &\quad - \sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 \zeta \frac{|\hat{r}_2^{(l)}(x, il)|^2}{\lambda^4} e^{-2\lambda\psi(x, il)} dx - \sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 \lambda y(x, il) e^{2\lambda\psi(x, il)} \hat{p}^{(l)}(x, il) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{i=1}^{N-1} \frac{l}{\theta} \int_0^1 |\hat{r}^{(l)}(x, il)|^2 dx \\
 & = -2J^{(l)} \left(\hat{z}^{(l)}, \hat{r}_1^{(l)}, \hat{r}_2^{(l)}, \hat{r}^{(l)} \right) - \sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 \lambda y(x, il) \hat{p}^{(l)}(x, il) e^{2\lambda\psi(x, il)} dx.
 \end{aligned}$$

Usando essa igualdade e (B.8) vemos que

$$\begin{aligned}
 & J^{(l)} \left(\hat{z}^{(l)}, \hat{r}_1^{(l)}, \hat{r}_2^{(l)}, \hat{r}^{(l)} \right) \\
 & \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 \lambda \left| \frac{1}{\theta} y(x, il) \hat{r}^{(l)}(x, il) \right| e^{2\lambda\psi(x, il)} dx \\
 & \leq \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 \frac{\lambda^2}{\theta} |y(x, il)|^2 e^{4\lambda\psi(x, il)} dx + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 \frac{1}{\theta} |\hat{r}^{(l)}(x, il)|^2 dx.
 \end{aligned}$$

Com isso,

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^{N-1} \frac{l}{2} \int_0^1 |\hat{z}^{(l)}(x, il)|^2 e^{-2\lambda\psi(x, il)} dx + \sum_{i=1}^N \frac{l}{2} \int_0^1 \zeta \frac{|\hat{r}_1^{(l)}(x, il)|^2}{\lambda^2} e^{-2\lambda\psi(x, il)} dx \\
 & + \sum_{i=1}^N \frac{l}{2} \int_0^1 \zeta \frac{|\hat{r}_2^{(l)}(x, il)|^2}{\lambda^4} e^{-2\lambda\psi(x, il)} dx + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{l}{4\theta} \int_0^1 |\hat{r}^{(l)}(x, il)|^2 dx \\
 & \leq \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 \frac{\lambda^2}{\theta} |y(x, il)|^2 e^{4\lambda\psi(x, il)} dx
 \end{aligned}$$

e chegamos a

$$J^{(l)} \left(\hat{z}^{(l)}, \hat{r}_1^{(l)}, \hat{r}_2^{(l)}, \hat{r}^{(l)} \right) \leq \frac{C}{\theta} \sum_{i=1}^{N-1} l \lambda^2 \int_0^1 |y(x, il)|^2 e^{4\lambda\psi(x, il)} dx, \quad (\text{B.36})$$

com C uma constante que não depende de l .

Para encontrarmos (B.20), fazemos o produto entre (B.10) e $D_l^2 \hat{p}^{(l)}$:

$$\sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 \left(P_l^*(\hat{z}^{(l)}) + D_l \hat{r}_1^{(l)} - \hat{r}_2^{(l)} - \lambda y e^{2\lambda\psi} - \hat{r}^{(l)} \right) (x, il) D_l^2 \hat{p}^{(l)}(x, il) dx = 0. \quad (\text{B.37})$$

Vamos buscar informações sobre algumas das integrais subentendidas em (B.37). Começamos por

$$\sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^l P_l^*(\hat{z}^{(l)})(x, il) D_l^2 \hat{p}^{(l)}(x, il) dx. \quad (\text{B.38})$$

Fazendo os cálculos mantendo em mente que $D_l^2 \hat{p}^{(l)}(x, 0) = D_l^2 \hat{p}^{(l)}(x, T_0) = 0$, podemos estabelecer que

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 D_l^2 \hat{z}^{(l)}(x, il) D_l^2 \hat{p}^{(l)}(x, il) dx &= \sum_{i=0}^{N-1} l \int_0^1 D_l^2 \hat{z}^{(l)}(x, il) D_l^2 \hat{p}^{(l)}(x, il) dx \\
 &= \sum_{i=1}^N l \int_0^1 \hat{z}^{(l)}(x, il) D_l^2 (D_{\bar{l}}^2 \hat{p}^{(l)})(x, il) dx,
 \end{aligned}$$

assim como

$$- \sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 (\hat{z}^{(l)})_{xx}(x, il) D_l^2 \hat{p}^{(l)}(x, il) dx = - \sum_{i=0}^{N-1} l \int_0^1 \hat{z}^{(l)}(x, il) D_l^2 (\hat{p}^{(l)})_{xx}(x, il) dx,$$

e

$$\sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 D_{\bar{l}} \hat{z}^{(l)}(x, il) D_l^2 \hat{p}^{(l)}(x, il) dx = - \sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 \hat{z}^{(l)}(x, il) D_l^2 (D_l \hat{p}^{(l)})(x, il) dx.$$

Com essas igualdades e (B.9), encontramos

$$\begin{aligned}
 &\sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 P_l^* (\hat{z}^{(l)})(x, il) D_l^2 \hat{p}^{(l)}(x, il) dx \\
 &= \sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 \hat{z}^{(l)}(x, il) D_l^2 (D_l^2 \hat{p}^{(l)} - (\hat{p}^{(l)})_{xx} + \kappa D_l \hat{p}^{(l)})(x, il) dx \\
 &= - \sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 \hat{z}^{(l)}(x, il) D_l^2 (e^{-2\lambda\psi} \hat{z}^{(l)})(x, il) dx.
 \end{aligned} \tag{B.39}$$

Podemos ainda dizer que

$$\begin{aligned}
 &- \sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 \hat{z}^{(l)}(x, il) D_l^2 (e^{-2\lambda\psi} \hat{z}^{(l)})(x, il) dx \\
 &= - \sum_{i=0}^{N-1} l \int_0^1 \hat{z}^{(l)}(x, il) D_l (D_{\bar{l}} (e^{-2\lambda\psi} \hat{z}^{(l)}))(x, il) dx \\
 &= \sum_{j=1}^N l \int_0^1 D_{\bar{l}} (e^{-2\lambda\psi} \hat{z}^{(l)})(x, jl) D_{\bar{l}} \hat{z}^{(l)}(x, jl) dx.
 \end{aligned}$$

Com as propriedades que $D_{\bar{l}}$ satisfaz, indicadas no início deste apêndice, conseguimos estabelecer que

$$\begin{aligned}
 &- \sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 \hat{z}^{(l)}(x, il) D_l^2 (e^{-2\lambda\psi} \hat{z}^{(l)})(x, il) dx \\
 &= \sum_{i=1}^N l \int_0^1 e^{-2\lambda\psi(x, il)} |D_{\bar{l}} \hat{z}^{(l)}(x, il)|^2 dx \\
 &\quad + \sum_{i=1}^N l \int_0^1 \hat{z}^{(l)}(x, (i-1)l) D_{\bar{l}} (e^{-2\lambda\psi})(x, il) D_{\bar{l}} \hat{z}^{(l)}(x, il) dx.
 \end{aligned} \tag{B.40}$$

Passaremos a avaliar

$$\sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 D_{\bar{l}} \hat{r}_1^{(l)}(x, il) D_l^2 \hat{p}^{(l)}(x, il) dx.$$

Aqui usamos que $D_l^2 \hat{p}^{(l)}(x, T_0) = 0$ e (17) para escrever

$$\sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 D_{\bar{l}} \hat{r}_1^{(l)}(x, il) D_l^2 \hat{p}^{(l)}(x, il) dx = \sum_{i=1}^N l \int_0^1 D_{\bar{l}} \hat{r}_1^{(l)}(x, il) D_{\bar{l}} \left(\zeta \frac{\hat{r}_1^{(l)}}{\lambda^2} e^{-2\lambda\psi} \right) (x, il) dx.$$

Das propriedades de $D_{\bar{l}}$ temos

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 D_{\bar{l}} \hat{r}_1^{(l)}(x, il) D_l^2 \hat{p}^{(l)}(x, il) dx \\ &= \sum_{i=1}^N l \int_0^1 \frac{\zeta(x)}{\lambda^2} D_{\bar{l}} \hat{r}_1^{(l)}(x, il) \hat{r}_1^{(l)}(x, (i-1)l) D_{\bar{l}}(e^{-2\lambda\psi})(x, il) dx \\ &+ \sum_{i=1}^N l \int_0^1 \frac{\zeta(x)}{\lambda^2} \left| D_{\bar{l}} \hat{r}_1^{(l)}(x, il) \right|^2 e^{-2\lambda\psi(x, il)} dx. \end{aligned} \quad (\text{B.41})$$

Para a integral

$$- \sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 \hat{r}_2^{(l)}(x, il) D_l^2 \hat{p}^{(l)}(x, il) dx$$

utilizamos que

$$\begin{aligned} - \sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 \hat{r}_2^{(l)}(x, il) D_l^2 \hat{p}^{(l)}(x, il) dx &= - \sum_{i=0}^{N-1} l \int_0^1 \hat{r}_2^{(l)}(x, il) D_l (D_{\bar{l}} \hat{p}^{(l)})(x, il) dx \\ &= \sum_{j=1}^N l \int_0^1 D_{\bar{l}} \hat{p}^{(l)}(x, jl) D_{\bar{l}} \hat{r}_2^{(l)}(x, jl) dx. \end{aligned}$$

A igualdade em (B.18) nos permite calcular

$$\begin{aligned} & - \sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 \hat{r}_2^{(l)}(x, il) D_l^2 \hat{p}^{(l)}(x, il) dx \\ &= \sum_{j=1}^N l \int_0^1 D_{\bar{l}} \left(\zeta \frac{\hat{r}_2^{(l)}}{\lambda^4} e^{-2\lambda\psi} \right) (x, il) D_{\bar{l}} \hat{r}_2^{(l)}(x, il) dx \\ &= \sum_{j=1}^N l \int_0^1 \frac{\zeta(x)}{\lambda^4} e^{-2\lambda\psi(x, il)} \left| D_{\bar{l}} \hat{r}_2^{(l)}(x, il) \right|^2 dx \\ &+ \sum_{j=1}^N l \int_0^1 \frac{\zeta(x)}{\lambda^4} D_{\bar{l}} \hat{r}_2^{(l)}(x, il) \hat{r}_2^{(l)}(x, (i-1)l) D_{\bar{l}}(e^{-2\lambda\psi})(x, il) dx. \end{aligned} \quad (\text{B.42})$$

Para a última integral subentendida em (B.37), lembrando que $\hat{r}^{(l)}(x, 0) = \hat{r}^{(l)}(x, T_0) = 0$, encontramos

$$\begin{aligned}
 - \sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 \hat{r}^{(l)}(x, il) D_l^2 \hat{p}^{(l)}(x, il) dx &= - \sum_{i=0}^{N-1} l \int_0^1 \hat{r}^{(l)}(x, il) D_l (D_{\bar{l}} \hat{p}^{(l)})(x, il) dx \\
 &= \sum_{i=1}^N l \int_0^1 D_{\bar{l}} \hat{p}^{(l)}(x, il) D_{\bar{l}} \hat{r}^{(l)}(x, il) dx.
 \end{aligned}$$

Além disso, por (B.8),

$$- \sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 \hat{r}^{(l)}(x, il) D_l^2 \hat{p}^{(l)}(x, il) dx = \sum_{i=1}^N \frac{l}{\theta} \int_0^1 |D_{\bar{l}} \hat{r}^{(l)}(x, il)|^2 dx. \quad (\text{B.43})$$

Substituindo (B.39)-(B.43) em (B.37) temos

$$\begin{aligned}
 0 &= \sum_{i=1}^N l \int_0^1 e^{-2\lambda\psi(x, il)} |D_{\bar{l}} \hat{z}^{(l)}(x, il)|^2 dx \\
 &\quad + \sum_{i=1}^N l \int_0^1 \hat{z}^{(l)}(x, (i-1)l) D_{\bar{l}} e^{-2\lambda\psi(x, il)} D_{\bar{l}} \hat{z}^{(l)}(x, il) dx \\
 &\quad + \sum_{i=1}^N l \int_0^1 \frac{\zeta(x)}{\lambda^2} D_{\bar{l}} \hat{r}_1^{(l)}(x, il) \hat{r}_1^{(l)}(x, (i-1)l) D_{\bar{l}} e^{-2\lambda\psi(x, il)} dx \\
 &\quad + \sum_{i=1}^N l \int_0^1 \frac{\zeta(x)}{\lambda^2} |D_{\bar{l}} \hat{r}_1^{(l)}(x, il)|^2 e^{-2\lambda\psi(x, il)} dx \\
 &\quad + \sum_{i=1}^N l \int_0^1 \frac{\zeta(x)}{\lambda^4} D_{\bar{l}} \hat{r}_2^{(l)}(x, il) \hat{r}_2^{(l)}(x, (i-1)l) D_{\bar{l}} e^{-2\lambda\psi(x, il)} dx \\
 &\quad + \sum_{i=1}^N l \int_0^1 \frac{\zeta(x)}{\lambda^4} e^{-2\lambda\psi(x, il)} |D_{\bar{l}} \hat{r}_2^{(l)}(x, il)|^2 dx \\
 &\quad - \sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 \lambda y(x, il) e^{2\lambda\psi(x, il)} D_l^2 \hat{p}^{(l)}(x, il) dx \\
 &\quad + \sum_{i=1}^N \frac{l}{\theta} \int_0^1 |D_{\bar{l}} \hat{r}^{(l)}(x, il)|^2 dx.
 \end{aligned} \quad (\text{B.44})$$

Com base no Teorema do Valor Médio podemos garantir que

$$D_l e^{-2\lambda\psi(x, il)}, D_{\bar{l}} e^{-2\lambda\psi(x, il)} \leq C_1 \lambda.$$

Essas estimativas e a desigualdade de Young nos ajudam a encontrar:

$$\begin{aligned}
 &- \sum_{i=1}^N l \int_0^1 \hat{z}^{(l)}(x, (i-1)l) D_{\bar{l}} e^{-2\lambda\psi(x, il)} D_{\bar{l}} \hat{z}^{(l)}(x, il) dx \\
 &\leq C_1 C(\delta) \lambda \sum_{i=1}^N l \int_0^1 |\hat{z}^{(l)}(x, il)|^2 dx + C_1 \delta \lambda \sum_{i=1}^N l \int_0^1 |D_{\bar{l}} \hat{z}^{(l)}(x, il)|^2 dx,
 \end{aligned}$$

bem como

$$\begin{aligned} & - \sum_{i=1}^N l \int_0^1 \frac{\zeta(x)}{\lambda^2} D_{\bar{l}} \hat{r}_1^{(l)}(x, il) \hat{r}_1^{(l)}(x, (i-1)l) D_{\bar{l}} e^{-2\lambda\psi(x, il)} dx \\ & \leq C_1 \lambda \delta \sum_{i=1}^N l \int_0^1 \frac{\zeta(x)}{\lambda^2} \left| D_{\bar{l}} \hat{r}_1^{(l)}(x, il) \right|^2 dx + C_1 C(\delta) \lambda \sum_{i=1}^N \int_0^1 \frac{\zeta(x)}{\lambda^2} \left| \hat{r}_1^{(l)}(x, il) \right|^2 dx, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} & - \sum_{i=1}^N l \int_0^1 \frac{\zeta(x)}{\lambda^4} D_{\bar{l}} \hat{r}_2^{(l)}(x, il) \hat{r}_2^{(l)}(x, (i-1)l) D_{\bar{l}} e^{-2\lambda\psi(x, il)} dx \\ & \leq C_1 \lambda \delta \sum_{i=1}^N \int_0^1 \frac{\zeta(x)}{\lambda^4} \left| D_{\bar{l}} \hat{r}_2^{(l)}(x, il) \right|^2 dx + C_1 C(\delta) \lambda \sum_{i=1}^N \int_0^1 \frac{\zeta(x)}{\lambda^4} \left| \hat{r}_2^{(l)}(x, il) \right|^2 dx, \end{aligned}$$

além de

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 \lambda y(x, il) e^{2\lambda\psi(x, il)} D_{\bar{l}}^2 \hat{p}^{(l)}(x, il) dx \\ & \leq \frac{C_1 \lambda}{2} \sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 \zeta(x) |y(x, il)|^2 e^{4\lambda\psi(x, il)} dx + \frac{C_1 \lambda}{2} \sum_{i=1}^N l \int_0^1 \frac{\zeta(x)}{\lambda^2} \left| \hat{r}_1^{(l)}(x, il) \right|^2 dx \\ & \quad + C(\delta_1) \sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 \zeta(x) |y(x, il)|^2 dx + \delta_1 \sum_{i=1}^N l \int_0^1 \frac{\zeta(x)}{\lambda^2} \left| D_{\bar{l}} \hat{r}_1^{(l)}(x, il) \right|^2 dx. \end{aligned}$$

Sabemos que existe $C_0^1 \in \mathbb{R}$ tal que $e^{-2\lambda e^{sC_0^1}} \leq e^{-2\lambda\psi(x, il)}$. Sendo assim, com as estimativas obtidas e escolhendo $\delta = e^{-2\lambda e^{sC_0^1}}/4C_1\lambda$ e $\delta_1 = e^{-2\lambda e^{sC_0^1}}/4$, a igualdade em (B.44) proporciona

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} e^{-2\lambda e^{sC_0^1}} \sum_{i=1}^N l \int_0^1 \left(\left| D_{\bar{l}} \hat{z}^{(l)}(x, il) \right|^2 + \frac{\zeta(x)}{\lambda^2} \left| D_{\bar{l}} \hat{r}_1^{(l)}(x, il) \right|^2 \right) dx \\ & \quad + \frac{1}{2} e^{-2\lambda e^{sC_0^1}} \sum_{i=1}^N l \int_0^1 \left(\frac{\zeta(x)}{\lambda^4} \left| D_{\bar{l}} \hat{r}_2^{(l)}(x, il) \right|^2 + \frac{1}{\theta} \left| D_{\bar{l}} \hat{r}^{(l)}(x, il) \right|^2 \right) dx \\ & \leq C_2 \lambda^2 e^{2\lambda e^{sC_0^1}} \left(\frac{l}{2} \sum_{i=1}^{N-1} \int_0^1 \left(\left| \hat{z}^{(l)}(x, il) \right|^2 + \zeta(x) \left(\frac{\left| \hat{r}_1^{(l)}(x, il) \right|^2}{\lambda^2} + \frac{\left| \hat{r}_2^{(l)}(x, il) \right|^2}{\lambda^4} \right) \right) dx \right. \\ & \quad \left. + e^{2\lambda e^{sC_0^1}} \frac{l}{2\theta} \sum_{i=1}^{N-1} \int_0^1 \left| \hat{r}^{(l)}(x, il) \right|^2 dx \right) + C_2 \lambda e^{2\lambda e^{sC_0^1}} \sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 |y(x, il)|^2 e^{4\lambda\psi(x, il)} dx \\ & \leq C_2 \lambda^2 e^{4\lambda e^{sC_0^1}} J^{(l)} \left(\hat{z}^{(l)}, \hat{r}_1^{(l)}, \hat{r}_2^{(l)}, \hat{r}^{(l)} \right) + C_2 \lambda e^{2\lambda e^{sC_0^1}} \sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 |y(x, il)|^2 e^{4\lambda\psi(x, il)} dx. \end{aligned}$$

Portanto, de (B.36) vem que

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^N l \int_0^1 |D_{\bar{l}} \hat{z}^{(l)}(x, il)|^2 dx + \sum_{i=1}^N l \int_0^1 \frac{\zeta(x)}{\lambda^2} |D_{\bar{l}} \hat{r}_1^{(l)}(x, il)|^2 dx \\
 & + \sum_{i=1}^N l \int_0^1 \frac{\zeta(x)}{\lambda^4} |D_{\bar{l}} \hat{r}_2^{(l)}(x, il)|^2 dx + \sum_{i=1}^N \frac{l}{\theta} \int_0^1 |D_{\bar{l}} \hat{r}^{(l)}(x, il)|^2 dx \\
 & \leq \frac{C}{\theta} \lambda^4 e^{6\lambda e^{s_{C_0^1}}} \sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 |y(x, il)|^2 e^{4\lambda\psi(x, il)} dx.
 \end{aligned} \tag{B.45}$$

Por fim, vamos em busca de (B.21). Façamos o produto escalar entre (B.9) e $\hat{z}^{(l)}$ em $l_2^{(l)}(0, T_0; L^2(0, 1))$:

$$\sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 P_l^*(\hat{z}^{(l)}) \hat{z}^{(l)} dx = \sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 \left(-D_{\bar{l}} \hat{r}_1^{(l)} + \hat{r}_2^{(l)} + \lambda y e^{2\lambda\psi} + \hat{r}^{(l)} \right) \hat{z}^{(l)} dx. \tag{B.46}$$

Podemos verificar que

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 D_{\bar{l}}^2 \hat{z}^{(l)}(x, il) \hat{z}^{(l)}(x, il) dx &= \sum_{i=1}^N l \int_0^1 D_{\bar{l}}(D_l \hat{z}^{(l)})(x, il) \hat{z}^{(l)}(x, il) dx \\
 &= - \sum_{i=1}^N l \int_0^1 |D_{\bar{l}} \hat{z}^{(l)}(x, il)|^2 dx,
 \end{aligned}$$

da mesma forma que

$$- \sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 (\hat{z}^{(l)})_{xx}(x, il) \hat{z}^{(l)}(x, il) dx = a \sum_{i=1}^N l |\hat{z}^{(l)}(1, il)|^2 + \sum_{i=1}^N l \int_0^1 |(\hat{z}^{(l)})_x(x, il)|^2 dx$$

e

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 \hat{z}^{(l)}(x, il) D_{\bar{l}} \hat{z}^{(l)}(x, il) dx &= \sum_{i=1}^N l \int_0^1 \hat{z}^{(l)}(x, il) D_{\bar{l}} \hat{z}^{(l)}(x, il) dx \\
 &= - \sum_{i=1}^N l \int_0^1 \hat{z}^{(l)}(x, il) D_l \hat{z}^{(l)}(x, il) dx.
 \end{aligned}$$

Logo, substituindo essas igualdades em (B.46) e manipulando os termos,

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^N l \int_0^1 |(\hat{z}^{(l)})_x(x, il)|^2 dx \\
 & \leq \sum_{i=1}^N l \int_0^1 |D_{\bar{l}} \hat{z}^{(l)}(x, il)|^2 dx - \kappa \sum_{i=1}^N l \int_0^1 \hat{z}^{(l)}(x, il) D_l \hat{z}^{(l)}(x, il) dx \\
 & + \sum_{i=1}^N l \int_0^1 \left(-D_{\bar{l}} \hat{r}_1^{(l)}(x, il) + \hat{r}_2^{(l)}(x, il) \right) \hat{z}^{(l)}(x, il) dx
 \end{aligned} \tag{B.47}$$

$$+ \sum_{i=1}^N l \int_0^1 \lambda y(x, il) e^{2\lambda\psi(x, il)} \hat{z}^{(l)}(x, il) dx + \sum_{i=1}^N l \int_0^1 \hat{r}^{(l)}(x, il) \hat{z}^{(l)}(x, il) dx.$$

Para melhorar essa estimativa, observamos que

$$\begin{aligned} & -\kappa \sum_{i=1}^N l \int_0^1 \hat{z}^{(l)}(x, il) D_l \hat{z}^{(l)}(x, il) dx \\ & \leq \frac{\kappa}{2} \sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 |\hat{z}^{(l)}(x, il)|^2 dx + \frac{\kappa}{2} \sum_{i=1}^N l \int_0^1 |D_l \hat{z}^{(l)}(x, il)|^2 dx \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N l \int_0^1 \left(-D_{\bar{l}} \hat{r}_1^{(l)}(x, il) + \hat{r}_2^{(l)}(x, il) \right) \hat{z}^{(l)}(x, il) dx \\ & \leq \frac{\lambda^2}{2} \sum_{i=1}^N l \int_0^1 \frac{\zeta(x)}{\lambda^2} |D_{\bar{l}} \hat{r}_1^{(l)}(x, il)|^2 dx + \frac{\lambda^4}{2} \sum_{i=1}^N l \int_0^1 \frac{\zeta(x)}{\lambda^4} |\hat{r}_2^{(l)}(x, il)|^2 dx \\ & \quad + \sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 |\hat{z}^{(l)}(x, il)|^2 dx. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 \hat{r}^{(l)}(x, il) \hat{z}^{(l)}(x, il) dx \\ & \leq \frac{1}{2\theta} \sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 |\hat{r}^{(l)}(x, il)|^2 dx + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 |\hat{z}^{(l)}(x, il)|^2 dx \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N l \int_0^1 \lambda y(x, il) e^{2\lambda\psi(x, il)} \hat{z}^{(l)}(x, il) dx \\ & \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 \lambda^2 |y(x, il)|^2 e^{4\lambda\psi(x, il)} dx + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 |\hat{z}^{(l)}(x, il)|^2 dx. \end{aligned}$$

Sendo assim, por (B.47) temos

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N l \int_0^1 |(\hat{z}^{(l)})_x(x, il)|^2 dx \\ & \leq C_1 \kappa \lambda^2 \left(\sum_{i=1}^N l \int_0^1 |D_{\bar{l}} \hat{z}^{(l)}(x, il)|^2 dx + \sum_{i=1}^N l \int_0^1 \frac{\zeta(x)}{\lambda^2} |D_{\bar{l}} \hat{r}_1^{(l)}(x, il)|^2 dx \right) \\ & \quad + C_2 \kappa \lambda^4 \left(\sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 |\hat{z}^{(l)}(x, il)|^2 dx + \sum_{i=1}^N l \int_0^1 \frac{\zeta(x)}{\lambda^4} |\hat{r}_2^{(l)}(x, il)|^2 dx \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + C_2 \kappa \lambda^4 \left(\sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 |\hat{z}^{(l)}(x, il)|^2 dx + \sum_{i=1}^N l \int_0^1 \frac{\zeta(x)}{\lambda^4} |\hat{r}_2^{(l)}(x, il)|^2 dx \right. \\
 & \left. + \frac{e^{2\lambda e^{s_{C_0^1}}}}{2\theta} \sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 |\hat{r}^{(l)}(x, il)|^2 dx \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 \lambda^2 |y(x, il)|^2 e^{4\lambda\psi(x, il)} dx.
 \end{aligned}$$

Segue por (B.36) e (B.45) que

$$\sum_{i=1}^N l \int_0^1 |(\hat{z}^{(l)})_x(x, il)|^2 dx \leq \frac{C}{\theta} \kappa \lambda^6 e^{6\lambda e^{s_{C_0^1}}} \sum_{i=1}^{N-1} l \int_0^1 |y(x, il)|^2 e^{4\lambda\psi(x, il)} dx. \quad (\text{B.48})$$

Isso conclui a prova do Lema B.2. ■

Em posse do Lema B.2 estamos em condições de provar do Lema 1.11.

Demonstração (do Lema 1.11). Seja $(\hat{z}^{(l)}, \hat{r}_1^{(l)}, \hat{r}_2^{(l)}, \hat{r}^{(l)})$ a solução para o problema (B.3)-(B.7) fornecida no Lema B.2. Definimos em Q_0 , por interpolação linear, as funções:

$$\begin{aligned}
 \tilde{z}^{(l)}(x, \tau) &= \frac{-(\tau - (i+1)l)\hat{z}^{(l)}(x, il) + (\tau - il)\hat{z}^{(l)}(x, (i+1)l)}{l}, \\
 \tilde{r}_1^{(l)}(x, \tau) &= \frac{-(\tau - (i+1)l)\hat{r}_1^{(l)}(x, il) + (\tau - il)\hat{r}_1^{(l)}(x, (i+1)l)}{l}, \\
 \tilde{r}_2^{(l)}(x, \tau) &= \frac{-(\tau - (i+1)l)\hat{r}_2^{(l)}(x, il) + (\tau - il)\hat{r}_2^{(l)}(x, (i+1)l)}{l}, \\
 \tilde{r}^{(l)}(x, \tau) &= \frac{-(\tau - (i+1)l)\hat{r}^{(l)}(x, il) + (\tau - il)\hat{r}^{(l)}(x, (i+1)l)}{l}, \\
 \tilde{p}^{(l)}(x, \tau) &= \frac{-(\tau - (i+1)l)\hat{p}^{(l)}(x, il) + (\tau - il)\hat{p}^{(l)}(x, (i+1)l)}{l},
 \end{aligned} \quad (\text{B.49})$$

para todo $\tau \in [il, (i+1)l], i = \{0, \dots, N-1\}$.

Sabemos que para uma função $\tilde{v}^{(l)}$ definida como acima,

$$\int_0^{T_0} |\tilde{v}^{(l)}(x, \tau)|^2 d\tau = \lim_{l \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{N-1} |\tilde{v}^{(l)}(x, il)|^2 l = \lim_{l \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{N-1} |\hat{v}^{(l)}(x, il)|^2 l.$$

Lembrando que $\hat{z}^{(l)}(x, 0) = 0$ e de acordo com (B.19),

$$\begin{aligned}
 \int_{Q_0} |\tilde{z}^{(l)}(x, \tau)|^2 dx d\tau &\leq C \int_0^1 \lim_{l \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{N-1} l |y(x, il) e^{2\lambda\psi(x, il)}|^2 dx \\
 &\leq C \int_0^{T_0} \int_0^1 |y e^{2\lambda\psi}|^2 dx d\tau < \infty.
 \end{aligned}$$

De forma análoga provamos que $(\tilde{z}_x^{(l)})_l, (\tilde{r}_1^{(l)})_l, (\tilde{r}_2^{(l)})_l$ e $(\tilde{r}^{(l)})_l$ são limitadas em $L^2(Q_0)$.

Mostraremos agora que $(\tilde{z}_\tau^{(l)})_l, ((\tilde{r}_1^{(l)})_\tau)_l, ((\tilde{r}_2^{(l)})_\tau)_l$ e $(\tilde{r}_\tau^{(l)})_l$ também são limitadas nesse espaço. Com isso, teremos $(\tilde{z}^{(l)})_l$ uma sequência limitada em $H^1(Q_0)$ e $(\tilde{r}_1^{(l)})_l, (\tilde{r}_2^{(l)})_l$ e $(\tilde{r}^{(l)})_l$ sequências limitadas em $H^1(0, T_0; L^2(0, 1))$. Usando (B.49), encontramos, para todo $\tau \in [il, (i+1)l], i = \{0, \dots, N-1\}$,

$$\tilde{z}^{(l)}(x, \tau) - \tilde{z}^{(l)}(x, \tau - \delta) = \delta \frac{\hat{z}^{(l)}(x, (i+1)l) - \hat{z}^{(l)}(x, il)}{l} = \delta D_l \hat{z}^{(l)}(x, il).$$

Sendo assim,

$$\tilde{z}_\tau^{(l)}(x, \tau) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\tilde{z}^{(l)}(x, \tau) - \tilde{z}^{(l)}(x, \tau - \delta)}{\delta} = D_l \hat{z}^{(l)}(x, il).$$

Uma vez que

$$\sum_{i=0}^{N-1} |\tilde{z}_\tau^{(l)}(x, il)|^2 = \sum_{i=0}^{N-1} |D_l \hat{z}^{(l)}(x, il)|^2 = \sum_{j=1}^N |D_{\bar{l}} \hat{z}^{(l)}(x, jl)|^2,$$

com a estimativa (B.20) conseguimos a limitação desejada. O mesmo raciocínio pode ser usado para as demais sequências.

Com base nas informações obtidas, existe uma subsequência de $(\tilde{z}^{(l)}, \tilde{r}_1^{(l)}, \tilde{r}_2^{(l)}, \tilde{r}^{(l)})_l$, que denotaremos da mesma forma, tal que

$$(\tilde{z}^{(l)}, \tilde{r}_1^{(l)}, \tilde{r}_2^{(l)}, \tilde{r}^{(l)})_l \rightharpoonup (\tilde{z}, \tilde{r}_1, \tilde{r}_2, \tilde{r}) \text{ em } H^1(Q_0) \times (H^1(0, T_0; L^2(0, 1)))^3. \quad (\text{B.50})$$

Usando as definições em (B.49) podemos mostrar as condições de fronteira

$$\tilde{p}^{(l)}(0, \tau) = \tilde{p}_x^{(l)}(1, \tau) + a\tilde{p}^{(l)}(1, \tau) = 0 \quad \text{sobre } (0, T_0), \quad (\text{B.51})$$

$$\tilde{z}^{(l)}(0, \tau) = \tilde{z}_x^{(l)}(1, \tau) + a\tilde{z}^{(l)}(1, \tau) = 0 \quad \text{sobre } (0, T_0), \quad (\text{B.52})$$

$$\tilde{r}_j^{(l)}(x, 0) = \tilde{r}_j^{(l)}(x, T_0) = 0 \quad \text{sobre } (0, 1), j = \{1, 2\}, \quad (\text{B.53})$$

$$\tilde{p}^{(l)}(x, 0) = \tilde{p}^{(l)}(x, T_0) = \tilde{p}_\tau^{(l)}(x, 0) = \tilde{p}_\tau^{(l)}(x, T_0) = 0 \quad \text{sobre } (0, 1), \quad (\text{B.54})$$

$$\tilde{z}^{(l)}(x, 0) = \tilde{z}^{(l)}(x, T_0) = 0 \quad \text{sobre } (0, 1). \quad (\text{B.55})$$

Com o auxílio de técnicas convencionais, conseguimos encontrar que

$$\tilde{z}_\tau^{(l)} \rightharpoonup \tilde{z}_\tau \quad \text{em } L^2(Q_0) \quad (\text{B.56})$$

e que

$$\tilde{r}_j(x, 0) = \tilde{r}_j(x, T_0) = 0 \quad \text{sobre } (0, 1), j = \{1, 2\}, \quad (\text{B.57})$$

$$\tilde{p}(x, 0) = \tilde{p}(x, T_0) = 0 \quad \text{sobre } (0, 1), \quad (\text{B.58})$$

$$\tilde{z}(x, 0) = \tilde{z}(x, T_0) = 0 \quad \text{sobre } (0, 1), \quad (\text{B.59})$$

Para garantir que

$$\tilde{p}_\tau(x, 0) = \tilde{p}_\tau(x, T_0) = 0 \quad \text{em } (0, 1), \quad (\text{B.60})$$

levamos em consideração as convergências obtidas e (B.26) para estabelecer que

$$-\tilde{p}_\tau + \zeta \frac{\tilde{r}_1}{\lambda^2} e^{-2\lambda\psi} = 0 \quad \text{em } (0, 1) \times (0, T_0). \quad (\text{B.61})$$

Essa igualdade e (B.57) fornecem (B.60).

Das convergências que temos e de (B.27) também segue que

$$\tilde{p} - \frac{\zeta}{\lambda^4} \tilde{r}_2 e^{-2\lambda\psi} = 0$$

Consideremos $\varphi \in H_0^1(0, T_0; V(0, 1))$ que satisfaz $P^* \varphi \in L^2(Q_0)$ e $\varphi_x(1, \tau) + a\varphi(1, \tau) = 0$ sobre $(0, T_0)$. Observemos que

$$\int_{Q_0} \tilde{p} P^* \varphi dx d\tau = \lim_{l \rightarrow 0} \int_{Q_0} \tilde{p}^{(l)} P^* \varphi dx d\tau = \lim_{l \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{N-1} \int_0^1 l \hat{p}^{(l)}(x, il) P_l^* \varphi(x, il) dx.$$

Uma vez que $\hat{p}^{(l)}$ é solução fraca de (B.1) com $P_l(\hat{p}^{(l)}) = -\hat{z}^{(l)}(x, il)e^{-2\lambda\psi(x, il)}$, temos

$$\begin{aligned} \int_{Q_0} \tilde{p} P^* \varphi dx d\tau &= \lim_{l \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{N-1} \int_0^1 l P_l(\hat{p}^{(l)})(x, il) \varphi(x, il) dx \\ &= - \lim_{l \rightarrow 0} \int_{Q_0} \tilde{z}^{(l)} e^{-2\lambda\psi} \varphi dx d\tau \\ &= - \int_{Q_0} \tilde{z} e^{-2\lambda\psi} \varphi dx d\tau. \end{aligned} \quad (\text{B.62})$$

Logo, $\tilde{p}$ é solução fraca de (1.77) com $P(\tilde{p}) = -\tilde{z}e^{-2\lambda\psi}$.

De forma semelhante e com o auxílio de (B.10),

$$\begin{aligned} \int_{Q_0} \tilde{z} P \varphi dx d\tau &= \lim_{l \rightarrow 0} \int_{Q_0} \tilde{z}^{(l)} P \varphi dx d\tau \\ &= \lim_{l \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{N-1} \int_0^1 l \tilde{z}^{(l)}(x, il) P_l \varphi(x, il) dx \\ &= \lim_{l \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{N-1} \int_0^1 l \varphi(x, il) P_l^* (\hat{z}^{(l)})(x, il) dx \\ &= \lim_{l \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{N-1} \int_0^1 l \varphi(x, il) \left(-D_l \hat{r}_1^{(l)} + \hat{r}_2^{(l)} + \lambda y e^{2\lambda\psi} + \hat{r}^{(l)} \right) (x, il) dx \\ &= \lim_{l \rightarrow 0} \int_{Q_0} \varphi(x, \tau) \left(-\left(\tilde{r}_1^{(l)} \right)_\tau + \tilde{r}_2^{(l)} + \lambda y e^{2\lambda\psi} + \tilde{r}^{(l)} \right) (x, \tau) dx d\tau. \end{aligned}$$

Segue que $\tilde{z}$ é uma solução fraca de (1.77) que satisfaz $P^*(\tilde{z}) = -(\tilde{r}_1)_\tau + \tilde{r}_2 + \lambda y e^{2\lambda\psi} + \tilde{r}$.

Isso completa a prova do lema.

Referências Bibliográficas

- [1] ANTUNES, G. O.; ARARUNA, F. D.; MERCADO, A. Exact controllability for the semilinear Mindli-Timoshenko system. **J. Math. Anal. Appl.**, v.480, n. 2, aug. 2019.
- [2] BADRA, M. Global Carleman Inequalities for Stokes and penalized Stokes equations. **Mathematical Control and Related Fields**, [S.l.], v.1, n.2, p. 149-175, june 2011.
- [3] BARDOS, C.; LEBEAU, G. , RAUCH, J. Sharp sufficient conditions for the observations, control and stabilizations of waves from the boundary. **SIAM J. Cont. Optim.**, Philadelphia, v. 30, n. 5, p. 1024-1065, sep. 1992.
- [4] BOYER, F. **Controllability of linear parabolic equations and systems**. Toulouse: Université Paul Sabatier, 2020. 142 p. Lecture Notes.
- [5] CASTRO, C. ; ZUAZUA, E. Unique continuation and control for the heat equation from a lower dimensional manifold. **SIAM**, [S. l.], v. 43, n. 4, p. 1400-1434, apr. 2004.
- [6] CORON, J.-M. **Control and nonlinearity**. Mathematical Surveys and Monographs, American Mathematical Society, v. 136, Providence, RI, 2007.
- [7] ERVEDOZA, S.; ZUAZUA, E. Sharp observability estimates for heat equations. **Arch Rational Mech. Anal.**, [S.l.], v. 202, p. 975-1017, may 2011.
- [8] FABRE, C.; PUEL, J.-P.; ZUAZUA, E. Approximated controllability of the semilinear heat equations. **Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect A**, [S.l.], v. 125, n. 1, p. 31-61, jan. 1995.

- [9] FATTORINI, O. H. **Infinite Dimensional Optimization and Control Theory**. 2 ed. [S.l.]: OUP Oxford, 2009. 304 p.
- [10] FERNÁNDEZ-CARA, E; ZUAZUA, E. Control theory: history, mathematical achievements and perspectives. **Bol. Soc. Esp. Mat. Aplic.**, [S.l.], n. 26, p. 79-140, 2003.
- [11] FERNÁNDEZ-CARA, E. et al. Null controllability of the heat equations with boundary Fourier conditions: the linear case. **ESAIM: COCV**, [S.l.], v. 12, n. 3, p. 442-465, jul. 2006.
- [12] FURSIKOV, A. V., IMANUVILOV, O. Y. **Controllability of evolution equations**. Seoul: Seoul National University, 1996. 163 p.
- [13] HORMANDER, L. **Linear Partial Differential Operators**. Berlin: Springer Verlag, 1963. 288 p.
- [14] IMANUVILOV, O. Y. On Carleman estimates for hyperbolic equations. **Asymptotic Analysis**, [S.l.], v. 32, n. 3, p. 185-220, dec. 2002.
- [15] JOHNSON, L. Distributed parameter systems: an annotated bibliography - to April 1971. **Int. Sci. Rep.**, Los Angeles, aug. 1971.
- [16] KALMAN, R. E. **On the general theory of control systems**. In: Proc. 1st IFAC Congress, 1960. Moscow : Butterworth, 1960. v. 1. p. 481-492.
- [17] KHAPALOV, A. Y. Controllability of the wave equation with moving point control. **Appl. Math. Optim**, [S.l.], v. 31, p. 155-175, 1995.
- [18] KLIBANOV, M. V. Inverse problems and Carleman estimates. **Inverse Problems**, v. 8, n. 4, p. 575-596, 1992.
- [19] LaSALLE, J. P. The time optimal control problem. In : CESARI, L. ; LaSALLE, J. P. ; LEFSCHETZ, S. et al (org). **Contributions to the theory of nonlinear oscillations (AM-45)**. v. V. Princeton: Princeton University Press, 1960, p. 573-577.

-
- [20] LEE, E. B. ; MARKUS, L. **Foundations of optimal control theory**. New York : John Wiley, 1967. 576 p.
- [21] LEE, J. M. **Introduction to smooth manifolds**. 2. ed. New York: Springer, 2012. 708 p.
- [22] LIONS, J. -L. **Contrôlabilité exacte perturbations et stabilisation de systèmes distribués**. v. 1 e 2. Paris: Masson, 1988.
- [23] LÓPEZ, A.; ZHANG, X.; ZUAZUA, E. Null cotrollability of the heat equation as singular limit of the exact controllability of dissipative wave equations. **J. Math Pures Appl.**, [S.l.], v. 79, n. 8, p. 741-808, oct. 2000.
- [24] LÓPEZ, A.; ZUAZUA, E. **Some new results related to the null cotrollability of the 1-d heat equation**. Seminaire Equations aux Dérivées Pertielles. Palaiseau: École Polytechnique, 1997-1998. p. 4-13.
- [25] MICU, S.; ZUAZUA, E. **An Introduction to the Controllability of Partial Differential Equations**. 2004. 89 p. Lecture Notes.
- [26] MILLER, L. On the null-controllability of the heat equations in unbounded domains. **Bull, Sci. Math**, [S.l.], v. 129, p.175-185, feb. 2005.
- [27] MOPHOU, G. M.; NAKOULIMA, O. Null controllability with constraints on the state for the semilinear heat equation. **J. Optim. Theory Appl.**, [S.l.], v. 143, n. 3, p. 539-565, may 2009.
- [28] PUEL, J. -P. **Basis of mathematical methods in fluid mechanics**. 2011. 58 p. Lecture Notes.
- [29] PUEL, J. P. **Global Carleman inequalities for the wave equations and applications to controllability and inverse problems**. 2004. 31 p. Lecture Notes.
- [30] RAO, S. S. **Optimization: theory and applications**. 2 ed. New York: John Wiley & Sons, 1984. 747 p.

- [31] ROBINSON, A. C. **A survey of optimal control of distributed-parameter systems**. Rep. ARL-0177, Wright-Patterson AFB, Ohio.
- [32] RUSSELL, D. L. Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations: recent progress and open question. **SIAM Review**, [S.l.], v. 20, n. 4, p. 639-739, oct. 1978.
- [33] SMITH, D. R. **Variational Methods in Optimization**. New Jersey: Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1974. 378 p.
- [34] SONTAG, E. D. **Mathematical control theory: deterministic finite-dimensional systems**. 2. ed. Texts in applied mathematics 6. New York : Springer-Verlag, 1998. 548 p.
- [35] TATARU, D. Carleman estimates and unique continuation for solutions to boundary value problems. **J. Math. Pures Appl.**, v. 75, n. 4, p. 367-408, dec. 1995.
- [36] TEMAM, R. **Navier-Stokes Equations: theory and numerical analysis**. v. 2. New York: North-Holland, 1979. 529 p.
- [37] TUCSNAK, M.; WEISS, G. **Observation and control for operator semigroups**. Basler: Birkhäuser, 2009.
- [38] ZHANG, X. Explicit observability inequalities for the wave equation with lower order terms by means of Carleman inequalities. **SIAM J. Control and Optim.**, v. 39, p. 812-834, oct. 2001.
- [39] ZUAZUA, E. Controllability of partial differential equations and its semi-discrete approximations. **DCDS**, [S.l.], v. 8, n. 2, p. 569-513, apr. 2002.
- [40] ZUAZUA, E. Controllability of the linear system of thermoelasticity. **Math Pures Appl**, Madri, v. 74, p. 291-315, 1995.
- [41] ZUAZUA, E. Exact boundary controllability of the semilinear wave equation. In: BREZIS, L. H (org). **Nonlinear partial differential equations and theis applications**. v. X. Harlow: Longman, 1991, p. 357-391.

-
- [42] ZUAZUA, E. Propagation, observation, and control of waves approximated by finite difference methods. **SIAM Review**, [S.l.], v. 47, n. 2, p. 197-243, june 2005.
- [43] ZUAZUA, E. **Some problems and results on the controllability of partial differential equations**. In: Proceedings of the Second European Congress of Mathematics, 1996. Budapest: Progress in Mathematics, 1998. v. 169. p. 276-311.