



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Curso de Graduação em Matemática

Superfícies em $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2$

João Victor Barros Coelho

João Pessoa
2025

João Victor Barros Coelho

Superfícies em $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2$

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à
Coordenação de Curso de bacharelado em Ma-
temática da Universidade Federal da Paraíba
como requisito para obtenção do título de ba-
charel em Matemática.

Orientador: Eraldo Almeida Lima Júnior

João Pessoa
2025

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

C672s Coelho, Joao Victor Barros.
Superfícies em R^2 / Joao Victor Barros Coelho. -
João Pessoa, 2025.
69 p. : il.

Orientação: Eraldo Almeida Lima Júnior.
TCC (Curso de Bacharelado em Matemática) -
UFPB/CCEN.

1. Geometria diferencial. 2. Geometria riemanniana.
3. Curvatura. 4. Espaço hiperbólico. I. Lima Júnior,
Eraldo Almeida. II. Título.

UFPB/CCEN

CDU 51(043.2)

João Victor Barros Coelho

Superfícies em $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2$

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à coordenação do Curso de bacharelado em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de bacharel em Matemática. Orientador: Eraldo Almeida Lima Júnior. Aprovado em: 02/05/2025.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Eraldo Almeida Lima Júnior
Orientador – UFPB Campus I

Prof. Dr. Adriano Alves de Medeiros
Avaliador – UFPB Campus I

Prof. Dr. Allan George de Carvalho Freitas
Avaliador – UFPB Campus I

Dedico este trabalho a minha família por me apoiarem durante essa trajetória.

Agradecimentos

Quero agradecer primeiramente a qualquer força divina que possa existir nesse vasto universo e que tenha me dado forças pra seguir o árduo caminho da matemática sem nunca abaixar a cabeça.

Agradeço também a minha família, por sempre estarem me apoiando e serem o principal pilar da minha vida. Que nunca saíam do meu lado e que estiveram comigo nas piores crises e nas maiores vitórias.

Agradeço ao meu Orientador, o professor Eraldo Almeida Lima Jr. por ter me acompanhado durante toda a minha formação como matemático, desde o primeiro até o último período, me orientando e me apresentando as belezas da geometria.

Agradeço a todos os meus professores por terem me formado como um cidadão, terem ajudado a formar meu caráter, e terem me incentivado a prosseguir nesta jornada na matemática. Muitos desses professores transcenderam a relação mestre-aluno, e se tornaram verdadeiros amigos. Quero agradecer em especial a um desses professores, Napoleón Caro Tuesta, que sempre me incentivou a desenvolver minhas ideias malucas e quase sempre sem futuro, mas que de certa forma me instigava a prosseguir no mundo da matemática.

Por fim, quero agradecer, a todos os amigos que eu fiz durante essa jornada, Todos os que me animaram, me incentivaram, me ajudaram e me fizeram rir, deixando meus dias na universidade sempre mais leves. Quero destacar meu agradecimento à turma de estágio, composta por Maria Eduarda, Francisco Inácio, Jafé Silvestre, e meu grande amigo, Eduardo Nunes (Biscoito), que desde o quarto período sempre esteve ao meu lado em todos os momentos do curso e da minha vida.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo principal investigar a geometria das superfícies imersas em $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2$, um ambiente não-Euclidiano, ou seja, com uma geometria distinta da definida em \mathbb{R}^3 .

Para viabilizar essa investigação, o primeiro capítulo foi dedicado ao desenvolvimento de conceitos fundamentais da geometria diferencial clássica em \mathbb{R}^3 , incluindo as definições de superfície regular e métrica induzida, além de noções sobre geodésicas e completude de superfícies. Também foram definidos entes geométricos como as curvaturas média e Gaussiana. Concluímos esse capítulo com a definição da pseudoesfera, uma superfície de curvatura Gaussiana constante negativa, que serviu como ponte para a exploração de outros ambientes não-Euclidianos.

Posteriormente, no segundo capítulo, introduzimos o espaço de Lorentz-Minkowski e, dentro desse contexto, definimos o espaço hiperbólico \mathbb{H}^2 . Apresentamos também alguns resultados fundamentais sobre esse espaço, destacando sua completude nesse novo ambiente. Em seguida, no terceiro capítulo, abordamos conceitos essenciais da geometria Riemanniana, que generaliza os resultados do primeiro capítulo para espaços mais amplos. Nesse contexto, exploramos noções como métrica Riemanniana, conexões afins e curvaturas, com ênfase no teorema de Levi-Civita, um resultado fundamental para a geometria Riemanniana.

Por fim, no último capítulo deste texto, construímos o ambiente $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2$ e exploramos diversas propriedades geométricas associadas a ele. Em particular, apresentamos resultados sobre curvaturas nesse contexto, destacando o famoso teorema de Gauss, que relaciona curvaturas extrínsecas a um ente intrínseco das superfícies em um espaço arbitrário \mathbb{M}^3 . Além disso, aplicamos esses resultados a exemplos concretos, ilustrando sua relevância e aplicabilidade.

Palavras chave: Superfície Regular, Geometria Riemanniana, Espaço Hiperbólico, Curvaturas, Teorema de Levi-Civita, Teorema de Gauss.

Abstract

The main objective of this work is to investigate the geometry of surfaces immersed in $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2$, a non-Euclidean space, that is, with a geometry distinct from that defined in \mathbb{R}^3 .

To enable this investigation, the first chapter was dedicated to the development of fundamental concepts of classical differential geometry in \mathbb{R}^3 , including the definitions of regular and induced metric surfaces, as well as notions of geodesics and surface completeness. Geometric entities such as mean and Gaussian curvatures were also defined. We conclude this chapter with the definition of the pseudosphere, a surface of constant negative Gaussian curvature, which served as a bridge to the exploration of other non-Euclidean spaces.

Later, in the second chapter, we introduce the Lorentz-Minkowski space and, within this context, we define the hyperbolic space \mathbb{H}^2 . We also present some fundamental results about this space, highlighting its completeness in this new space. Then, in the third chapter, we address essential concepts of Riemannian geometry, which generalizes the results of the first chapter to larger spaces. In this context, we explore notions such as Riemannian metric, affine connections and curvatures, with emphasis on the Levi-Civita theorem, a fundamental result for Riemannian geometry.

Finally, in the last chapter of this text, we construct the space $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2$ and explore several geometric properties associated with it. In particular, we present results on curvatures in this context, highlighting the famous Gauss theorem, which relates extrinsic curvatures to an intrinsic entity of surfaces in an arbitrary space \mathbb{M}^3 . Furthermore, we apply these results to concrete examples, illustrating their relevance and applicability.

Keywords: Regular Surface, Riemannian Geometry, Hyperbolic Space, Curvatures, Levi-Civita Theorem, Gauss Theorem.

Sumário

Introdução	9
1 Geometria diferencial em \mathbb{R}^3 e a pseudo-esfera	11
1.1 Definições iniciais	11
1.2 Aplicação normal e segunda forma fundamental	14
1.3 Geodésicas e superfícies completas	21
1.4 A pseudoesfera	26
2 Geometria Lorentziana e o espaço hiperbólico	29
2.1 O espaço de Lorentz-Minkowski	30
2.2 O espaço hiperbólico	32
3 Noções gerais de Geometria Riemanniana	37
3.1 Definições iniciais	37
3.2 Métrica Riemanniana	39
3.3 Conexões afins e conexão Riemanniana	41
3.4 Curvatura em uma variedade Riemanniana	47
4 Geometria diferencial em $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2$	50
4.1 Isometria do espaço Hiperbólico	51
4.2 Curvaturas média e de Gauss-Kronecker em $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2$	55
4.3 Curvatura Gaussiana em $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2$	62
Referências Bibliográficas	69

Introdução

A geometria diferencial, amplamente desenvolvida por Carl Friedrich Gauss no século XIX, trouxe uma generalização revolucionária da geometria clássica proposta por Euclides no início do primeiro milênio da era comum. Enquanto a geometria euclidiana se restringe a espaços planos, a geometria diferencial permite o estudo de espaços curvos mais gerais, conhecidos como superfícies.

Portanto, para quantificar o quão diferente a geometria de uma superfície era da geometria Euclidiana, surgiu a necessidade de definir a noção de *curvatura*. Inicialmente, partindo da compreensão da curvatura de curvas — que mede o quão distante uma curva está de ser uma reta em uma determinada região — desenvolveu-se, através de uma intuição geométrica, um método para calcular a curvatura de superfícies a partir das curvas que nelas se encontram.

A ideia fundamental foi considerar, em um ponto da superfície, todas as curvas contidas nela que passam por esse ponto e analisar suas curvaturas. Observou-se que esses valores assumem um máximo e um mínimo, denominados *curvaturas principais*. A partir dessas grandezas, definimos a *curvatura média* como a média aritmética das curvaturas principais e a *curvatura Gaussiana*, em homenagem a Gauss, como o produto dessas curvaturas principais.

Esses avanços tiveram um impacto significativo e encontraram aplicações em diversos campos do conhecimento, como, por exemplo, na cartografia. No entanto, a geometria diferencial clássica ainda estava restrita ao estudo de superfícies bidimensionais imersas em um espaço tridimensional, o \mathbb{R}^3 .

Foi Bernhard Riemann quem deu um passo fundamental para a generalização dessa teoria. Em uma célebre palestra em 1854, ele lançou as bases do que viria a ser chamado posteriormente de *Geometria Riemanniana*. Nessa nova abordagem, Riemann introduziu conceitos mais abstratos sobre superfícies e seus análogos de dimensão superior, chamados *variedades riemannianas*.

Uma de suas principais contribuições foi a generalização da noção de *métrica*, isto é, da maneira como calculamos ângulos, distâncias, comprimentos e volumes em uma variedade. Com essa nova estrutura, surgiu um problema análogo ao que havia sido tratado na geometria diferencial clássica: como determinar o quão distante a geometria de uma determinada variedade riemanniana está da geometria plana clássica? Essa geometria plana, por sua vez, não estava mais restrita apenas a \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 , mas poderia existir em qualquer dimensão \mathbb{R}^n .

Para responder a essa questão, foi necessário estender a noção de curvatura para variedades de dimensão arbitrária. Riemann iniciou essa generalização tentando adaptar a curvatura Gaussiana ao contexto de seções planas dentro de uma variedade qualquer, originando o conceito de *curvatura seccional*. Entretanto, uma formulação mais completa e satisfatória só foi desenvolvida anos depois, com contribuições de diversos matemáticos, como Elwin Christoffel, Gregorio Ricci-Curbastro, e Tullio Levi-Civita.

Dessa evolução nasceu a *curvatura Riemanniana*, um conceito que relaciona a distância de uma métrica em relação à métrica Euclidiana com o grau de não comutatividade da conexão afim associada à variedade¹. Essa conexão afim, por sua vez, define o *transporte paralelo* de vetores entre dois pontos distintos. Intuitivamente, a conexão nos informa como um vetor pode

¹Veremos no terceiro capítulo desse livro de uma maneira mais formal o significado dessa conexão.

ser transportado ao longo de uma variedade sem perder suas propriedades essenciais.

Os resultados apresentados por Riemann inicialmente não tiveram um impacto imediato na comunidade matemática da época, sendo considerados excessivamente abstratos para os problemas então em voga. No entanto, com o passar do tempo, a geometria Riemanniana revelou-se fundamental para a solução de diversos problemas concretos, o que levou a uma revalorização desse campo de estudo. Esse interesse cresceu significativamente após Albert Einstein aplicar conceitos da geometria Riemanniana no desenvolvimento da teoria da relatividade geral em 1915.

Muitas das aplicações da geometria Riemanniana encontram-se na física, incluindo a criação de modelos isotrópicos do universo, nos quais são utilizados espaços como $-\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$ e $-\mathbb{R} \times \mathbb{S}^n$.² Neste trabalho, daremos início ao estudo de variedades similares a essas, utilizando um modelo tridimensional mais acessível: o espaço $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2$.

Ao analisarmos esse ambiente de dimensão três, torna-se possível compará-lo com o espaço Euclidiano da geometria diferencial clássica, investigando as diferenças de comportamento das superfícies imersas em ambos os cenários. No entanto, como $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2$ possui uma estrutura geométrica mais rica e complexa, é necessário introduzir conceitos da geometria Riemanniana para generalizar certos resultados da geometria diferencial e aplicá-los adequadamente.

Com essa motivação, o primeiro capítulo deste texto abordará conceitos fundamentais da geometria diferencial. No terceiro capítulo, esses conceitos serão estendidos e adaptados à geometria Riemanniana, preparando o terreno para sua aplicação em $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2$ no quarto capítulo. O segundo capítulo terá um papel intermediário, sendo dedicado à construção da pseudoesfera \mathbb{H}^2 , que servirá como base para a definição do ambiente $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2$.

Para uma boa compreensão do texto, espera-se que o leitor tenha familiaridade com conceitos básicos de topologia geral, como homeomorfismos e difeomorfismos. Além disso, serão utilizados alguns resultados de análise em \mathbb{R}^n e álgebra linear, tornando recomendável que o leitor já tenha alguma experiência nessas áreas.

²Tais espaços são conhecidos como Espaços de Robertson–Walker. Esta família de variedades satisfaz a equação do tensor energia-momento de Einstein, caracterizando-se, portanto, como modelos de espaço-tempo. Para os leitores interessados em compreender de forma mais aprofundada a construção desses espaços, recomendamos a leitura da obra [7]. Embora esse livro extrapole o escopo deste trabalho — por tratar de uma teoria mais geral do que aquela que abordaremos — sua leitura é fortemente recomendada aos entusiastas das aplicações geométricas na relatividade.

1 Geometria diferencial em \mathbb{R}^3 e a pseudo-esfera

Neste capítulo, serão apresentadas definições e resultados fundamentais da Geometria Diferencial no espaço euclidiano \mathbb{R}^3 . Esses conceitos servirão como base para uma comparação com os resultados que serão desenvolvidos em $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2$ no último capítulo deste texto. Além disso, será construída, em \mathbb{R}^3 , a chamada pseudoesfera, cuja análise proporcionará uma motivação para o estudo do espaço $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2$.

As definições e os resultados apresentados neste capítulo foram extraídos, em sua maioria, dos capítulos 2, 3 e 4 de [3]. As seções 1.3 e 1.4, contudo, incluem algumas definições e resultados adicionais — como os referentes à completude — provenientes do quinto capítulo da mesma obra. Destacamos, ainda, o último resultado enunciado neste capítulo, o Teorema de Hilbert, extraído da seção final do quinto capítulo do referido livro.

1.1 Definições iniciais

O principal objeto de estudo deste trabalho são as superfícies imersas em espaços tridimensionais, sejam eles \mathbb{R}^3 ou $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2$. Nesse contexto, o espaço ambiente será denotado genericamente por \mathbb{M}^3 , sempre que não for necessário especificar sua natureza. Com isso em mente, observa-se que a definição de superfície regular não depende de propriedades específicas do espaço ambiente onde a superfície está inserida, permitindo que tal objeto geométrico seja definido de forma geral em \mathbb{M}^3 .

A partir disso, obtém-se a seguinte definição de superfície regular parametrizada:

Definição 1.1. *Seja U um conjunto aberto de \mathbb{R}^2 . Diz-se que uma função de classe C^k , ($k \geq 1$) $X : U \rightarrow \mathbb{M}^3$ é uma superfície regular parametrizada quando sua matriz jacobiana $J_X(x)$ tiver posto máximo, isto é, quando sua derivada $dX(x)$ for injetiva, seja qual for o x pertencente a U , e quando X for um homeomorfismo diferenciável de classe C^k sobre a sua imagem.*

Ao par (X, U) , onde $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma superfície regular parametrizada, damos o nome de *parametrização*. Por simplicidade, nos referiremos a uma parametrização apenas pela sua aplicação X , omitindo o conjunto U do par.

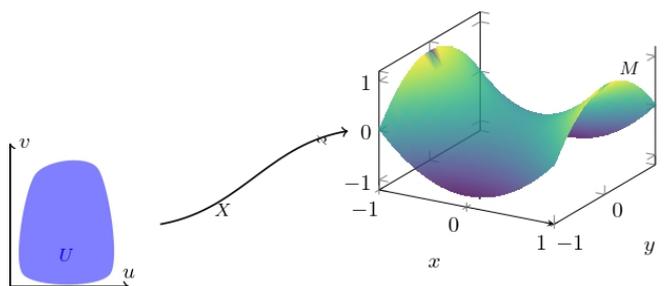


Figura 1: Ilustração de uma parametrização

Define-se, então, como superfície regular um subconjunto S de \mathbb{M}^3 para o qual existe uma família de pares $(U_\lambda, X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, indexada por um conjunto Λ , onde U_λ é um conjunto aberto de \mathbb{R}^2 e $X_\lambda : U_\lambda \rightarrow \mathbb{M}^3$ é uma parametrização para cada $\lambda \in \Lambda$, satisfazendo as seguintes condições:

- $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda(U_\lambda) = S$ e
- para λ_1 e λ_2 elementos de Λ tais que $X_{\lambda_1}(U_{\lambda_1}) \cap X_{\lambda_2}(U_{\lambda_2}) \neq \emptyset$, então a aplicação

$$X_{\lambda_2}^{-1} \circ X_{\lambda_1} : X_{\lambda_1}^{-1}(Z) \rightarrow X_{\lambda_2}^{-1}(Z).$$

onde, $Z = X_{\lambda_1}(U_{\lambda_1}) \cap X_{\lambda_2}(U_{\lambda_2})$, é um difeomorfismo de classe C^k .

Por fim, vale observar que a segunda condição da definição acima chama-se *transição suave*. Mais precisamente, dizemos que duas parametrizações X_1 e X_2 são *suavemente compatíveis* quando $X_1(U_1) \cap X_2(U_2) = \emptyset$ ou quando sua transição é suave.

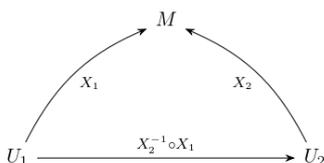


Figura 2: Diagrama que ilustra a transição suave

Exemplos:

1. (*Gráfico de funções*). Sejam U um conjunto aberto em \mathbb{R}^2 e $h : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma função real de classe C^k em U . Afirmemos que o gráfico de h , $Gr(h) = \{u, v, h(u, v) \mid (u, v) \in U\}$ é uma superfície regular, e sua parametrização é dada por $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ é da forma $X(u, v) = (u, v, h(u, v))$.

Com efeito, percebe-se que a aplicação X é injetiva pela definição de função, isto é, ela é uma bijeção sobre sua imagem. Além disso X é uma função contínua, pois cada uma de suas funções coordenadas também são. E como a sua inversa é uma projeção, concluímos que X é um difeomorfismo. Agora basta observar que a matriz jacobiana de X no ponto (u, v) é dada por

$$J_X(u, v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ h_u(u, v) & h_v(u, v) \end{bmatrix}$$

possui posto máximo, sejam qual for o ponto (u, v) escolhido em U . Isto é facilmente observável, uma vez que os vetores coluna da matriz são sempre linearmente independentes. Portanto $dX(u, v)$ é injetiva e X é uma superfície regular parametrizada, como queríamos demonstrar.

2. (*Superfície de revolução*). Seja $C \in \mathbb{R}^2$ uma curva plana suave e regular e $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (\varphi(t), \psi(t))$, onde $\psi(t) > 0$ para todo $t \in I$, uma parametrização por comprimento de arco e de classe C^k de C^3 , e onde para todo $t \in I$ $\varphi(t) > 0$. Então a função $X : I \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$X(u, v) = (\varphi(u)\cos(v), \varphi(u)\sen(v), \psi(u))$$

³Isto é, para $(a, x) \subseteq I = (a, b)$ o comprimento de arco de α em (a, x) é igual a $x - a$.

é uma superfície regular parametrizada de \mathbb{R}^3 .

Com efeito, perceba que o domínio da função é construído para que ela seja injetiva, isto é, bijetiva sobre sua imagem. Além disso, como cada uma de suas funções coordenadas é contínua, então X também será. Agora seja $(x, y, z) \in Im(X)$ e veja que a correspondência

$$(x, y, z) \rightarrow \left(\arcsen \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right), \psi^{-1}(z) \right)$$

constitui uma inversa de classe \mathcal{C}^k para X . Portanto X é um homeomorfismo. Calculando a matriz jacobiana de X em um ponto (u, v) , temos

$$J_X(u, v) = \begin{bmatrix} \varphi'(v)\cos(v) & -\varphi(u)\sen(v) \\ \varphi'(u)\sen(v) & \varphi(u)\cos(v) \\ \psi'(u) & 0 \end{bmatrix},$$

que possui claramente posto máximo, seja qual for o ponto $(u, v) \in U$. Note que se $\psi'(u) \neq 0$, não há o que fazer, mas caso contrário, supondo por contradição que $(\varphi'(v)\cos(v), \varphi'(v)\sen(v)) = \lambda(-\varphi(v)\sen(v), \varphi(v)\cos(v))$, para algum λ não nulo, chegaremos na seguinte equação:

$$(\varphi'(u) - \lambda\varphi(u))\sen(v) = (\varphi'(u) + \lambda\varphi(u))\cos(v),$$

donde, para $v = 0$, obtemos

$$\varphi'(u) = -\lambda\varphi(u),$$

e para $v = \pi/2$ obtemos

$$\varphi'(u) = \lambda\varphi(u),$$

e com isso concluímos que $\varphi = \varphi' = 0$, o que é uma contradição, pois, pela definição de curva regular⁴, $\alpha'(u) \neq 0$ para todo u , seja qual for a parametrização α utilizada para a curva. E isto nos mostra que a imagem de X é de fato uma superfície regular.

Com a compreensão desses conceitos iniciais sobre superfícies regulares, surge a necessidade de dotar tais objetos matemáticos de uma estrutura métrica. Em outras palavras, é fundamental estabelecer um método que permita calcular distâncias e ângulos em superfícies regulares. Essa estrutura métrica é indispensável para que possamos generalizar os resultados da geometria clássica a esses objetos, ampliando sua aplicabilidade e aprofundando nosso entendimento sobre suas propriedades intrínsecas.

Como as superfícies até agora estudadas estão imersas em um ambiente (o \mathbb{R}^3), é possível utilizar o produto interno usual desse espaço para induzir, em cada ponto da superfície, um

⁴Ver primeira definição do capítulo 1.3 de [3].

produto interno no plano tangente (denotado por T_pM) associado. Esse método fornece uma maneira precisa de medir distâncias e ângulos em uma vizinhança da superfície próxima ao ponto considerado, permitindo uma análise detalhada das propriedades da superfície.

Para prosseguir nossa análise, definiremos de modo mais formal o plano tangente mencionado anteriormente.

Definição 1.2. *Sejam M uma superfície regular e $p \in M$ um ponto arbitrário de M . O Plano Tangente a M em p, T_pM , é um espaço vetorial construído da seguinte forma*

$$T_pM = \{\alpha'(0) | \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M\} \quad (1)$$

onde $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ uma curva regular parametrizada⁵ com $\alpha(0) = p$.

Se X é uma parametrização local de M , então, como a matriz jacobiana J_X possui posto máximo, os vetores X_u e X_v tangentes às curvas coordenadas $X(u, v_0)$ e $X(u_0, v)$, com $(u_0, v_0) \in U$, estarão contidos em T_pM e serão linearmente independentes. Portanto, eles formarão uma base para T_pM . Deste modo, a partir daqui, identificaremos T_pM como o espaço vetorial gerado por X_u e X_v .

Para um vetor arbitrário $w \in T_pM$, denominamos por *Primeira Forma Fundamental de w* o produto interno induzido de \mathbb{R}^3 para T_pM $I_p(w) = \langle w, w \rangle \geq 0$.

Uma vez que, pela definição de superfície regular parametrizada, para qualquer parametrização X de uma superfície regular M e um ponto (u, v) arbitrário do domínio de X , com $p = X(u, v)$, as suas derivadas parciais $X_u, X_v \in T_pM$ são linearmente independentes, podemos assim caracterizar o plano tangente tomando o conjunto $\{X_u, X_v\}$ como base para esse espaço. Com isso, se w está em T_pM , existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $w = aX_u + bX_v$, e com isso vale

$$\begin{aligned} I_p(w) = \langle w, w \rangle &= \langle aX_u + bX_v, aX_u + bX_v \rangle \\ &= a^2 \langle X_u, X_u \rangle + 2ab \langle X_u, X_v \rangle + b^2 \langle X_v, X_v \rangle \\ &= a^2 E + 2ab F + b^2 G. \end{aligned}$$

Aos números $\langle X_u, X_u \rangle = E = g_{11}$, $\langle X_u, X_v \rangle = F = g_{12}$ e $\langle X_v, X_v \rangle = G = g_{22}$ damos o nome de *Componentes da Primeira Forma*, ou também como *Componentes da métrica*. Estas componentes possuem várias propriedades, sendo a mais importante delas o fato dessas serem intrínsecas à superfície, isto é, elas independem da parametrização escolhida, determinadas unicamente pela própria superfície.

1.2 Aplicação normal e segunda forma fundamental

Outra característica fundamental para a análise das propriedades das superfícies em \mathbb{R}^3 é a noção de *orientabilidade*. De forma geral, uma superfície é considerada orientável se for possível definir uma aplicação suave que associe a cada ponto da superfície um vetor normal unitário.

⁵O primeiro capítulo de [3] é dedicado ao estudo dos principais resultados relativos a esse tipo de curva. Considerando que a análise desses objetos ultrapassa o escopo deste trabalho, recomendamos aos leitores interessados que consultem diretamente o referido capítulo.

Mais rigorosamente, dizemos que uma superfície M é orientável quando existe um conjunto de parametrizações locais que cobrem M , \mathcal{A} cujas aplicações são duas a duas suavemente compatíveis e que, além disso, a determinante da derivada das transições suaves $\det d(X_2^{-1} \circ X_1)$, será sempre positiva.

Relembrando o fato de que em \mathbb{R}^3 o produto vetorial entre dois vetores linearmente independentes sempre resulta em um vetor normal a ambos e que para uma parametrização X de uma superfície regular M e $(u_0, v_0) \in \text{Dom}(X)$ os vetores $X_u(u_0, v_0)$ e $X_v(u_0, v_0) \in T_{X(u_0, v_0)}M$ são sempre linearmente independentes, então é possível definir localmente a aplicação

$$\begin{aligned} N : \text{Im}(X) &\rightarrow \mathbb{S}^2 \\ X(u_0, v_0) &\mapsto \frac{X_u(u_0, v_0) \times X_v(u_0, v_0)}{\|X_u(u_0, v_0) \times X_v(u_0, v_0)\|} \end{aligned}$$

onde \mathbb{S}^2 é a esfera unitária do \mathbb{R}^3 , a qual é denominada *Aplicação Normal de Gauss*, e a existência dessa aplicação suave para toda a superfície M é um equivalente local da definição de orientabilidade. Com esta observação, a partir de agora é esta aplicação que usaremos daqui para frente.

A diferencial da aplicação normal N de uma superfície M , com uma correção no sinal dos vetores, cujo domínio $TM = \{T_p M | p \in M\}$ pode ser identificado com $\mathcal{U} \subseteq TS^2$, damos o nome de *Operador de Weingarten*. Esta aplicação é denotada da seguinte forma:

$$-dN(p) : T_p M \rightarrow T_p M.$$

O operador de Weingarten possui uma interpretação geométrica significativa, pois ele descreve o grau de curvatura ou, de forma intuitiva, o quão próximo de uma esfera uma superfície é em um determinado ponto.

A seguinte proposição possui substancial importância para a análise das superfícies e as definições de curvatura discutidas mais à frente.

Proposição 1.1. *A aplicação diferencial $dN(p) = dN_p : T_p M \rightarrow T_p M$ é uma aplicação auto-adjunta.*⁶

Demonstração. Como dN_p é por definição linear, mostremos que essa aplicação é auto-adjunta. Para provar isso, tomando uma parametrização X de uma superfície regular orientável M , $p \in M$, basta mostrarmos que para uma base qualquer de $T_p M$, digamos, X_u, X_v , vale a igualdade $\langle dN_p(X_u), X_v \rangle = \langle X_u, dN_p(X_v) \rangle$.

Seja, então $\alpha(t) = (X(u(t)), X(v(t)))$ uma curva regular em M , com $\alpha(0) = p$. Então, denotando $N_u = dN_p(X_u)$ e $N_v = dN_p(X_v)$, obtemos

$$\begin{aligned} dN_p(\alpha'(0)) &= dN_p(X_u u'(0), X_v v'(0)) \\ &= \frac{d}{dt} N(u(t), v(t))|_{t=0} \\ &= N_u u'(0) + N_v v'(0). \end{aligned}$$

⁶Ver proposição 1 do capítulo 3.2 de [3]

Portanto, o nosso problema se resume a provar a igualdade $\langle N_u, X_v \rangle = \langle X_u, N_v \rangle$. Desta forma, basta derivarmos a igualdade $\langle N, X_u \rangle = 0$ com relação a v e $\langle N, X_v \rangle = 0$ com relação a u e a v , respectivamente, então obtemos

$$\begin{aligned} \langle N_u, X_v \rangle + \langle N, X_{uv} \rangle &= 0, \\ \langle N_v, X_u \rangle + \langle N, X_{uv} \rangle &= 0 \\ \iff \langle N_u, X_v \rangle &= \langle X_u, N_v \rangle \end{aligned}$$

□

Com este resultado em mãos, nós podemos garantir que a aplicação de Weingarten dN_p possui uma forma quadrática associada, que é definida da seguinte forma:

Definição 1.3. A aplicação \mathbb{II} definida da forma $\mathbb{II}(v) = -\langle dN_p(v), v \rangle$ $v \in T_pM$ é chamada de Segunda forma fundamental de M em p .

com esta definição, dada uma parametrização X se uma superfície regular M , podemos definir as componentes da segunda forma fundamental da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} e &= \langle N, X_{uu} \rangle = \langle N_u, X_u \rangle \\ f &= \langle N, X_{uv} \rangle = \langle N_v, X_u \rangle = \langle N_u, X_v \rangle = \langle N, X_{vu} \rangle \\ g &= \langle N, X_{vv} \rangle = \langle N_v, X_v \rangle \end{aligned}$$

Em álgebra linear, duas propriedades que são invariantes por matriz de mudança de base de uma transformação linear são o traço e a determinante da matriz. Esse princípio nos motiva a definir dois invariantes geométricos relacionados à segunda forma fundamental. Mais precisamente, definimos como $\hat{K}(p) = |A(p)|$ a *Curvatura de Gauss-Kronecker* e como $H(p) = \frac{1}{2}tr(A(p))$ a *Curvatura Média* de M em p , onde A é a matriz de $-dN(p)$ com associada à base canônica. Mais ainda, como a matriz da segunda forma fundamental é diagonalizável, então existem dois números k_1 e k_2 , com $k_1 \leq k_2$, chamados *curvaturas principais*, os quais podemos reescrever essa matriz da forma

$$-dN(p) = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$$

Assim, podemos por simplicidade, definir $\hat{K} = k_1.k_2$ e $H = \frac{k_1+k_2}{2}$.

Em uma parametrização de uma superfície M podemos exibir de forma explícita uma fórmula mais exata para expressar essas duas curvaturas. E é isso que construiremos a partir de agora.

Seja X uma parametrização de uma superfície regular M e $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ uma curva regular contida em M tal que $\alpha(0) = p$. Sabemos que o campo tangente da curva α pode ser expresso como $\alpha'(t) = u'(t)X_u + v'(t)X_v$. Aplicando o campo dN em $\alpha'(t)$ obtemos

$$\begin{aligned} dN(\alpha'(t)) &= dN(u'(t), v'(t)) \\ &= u'(t)dN(X_u) + v'(t)dN(X_v) \\ &= N_u u' + N_v v' \\ &= N'(\alpha(t)) \end{aligned}$$

onde N_u e N_v são, respectivamente, $\frac{d}{du}N$ e $\frac{d}{dv}N$. Tais projeções podem ser descritas como combinação linear de X_u e X_v . Com isso, obtemos

$$\begin{aligned} N_u &= a_{11}X_u + a_{12}X_v + a_{13}N \\ N_v &= a_{21}X_u + a_{22}X_v + a_{23}N. \end{aligned}$$

Aplicando essas igualdades na equação acima, chegamos ao seguinte sistema de equações

$$dN \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}.$$

Decompondo X_u e X_v na equação dos coeficientes da segunda forma fundamental, obtemos o seguinte sistema

$$\begin{aligned} -e &= \langle N_u, X_u \rangle = a_{11}E + a_{21}F, \\ -f &= \langle N_u, X_v \rangle = a_{11}F + a_{21}G, \\ -f &= \langle N_v, X_u \rangle = a_{12}E + a_{22}F, \\ -g &= \langle N_v, X_v \rangle = a_{12}F + a_{22}G, \end{aligned}$$

que, na forma matricial, se torna

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

O que, multiplicando pela inversa da matriz da primeira forma em ambos os lados, nos fornece o sistema

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}. \quad (2)$$

Deste modo, uma vez que a matriz (a_{ij}) representa a aplicação dN com respeito a base $\{X_u, X_v\}$, então podemos expressar localmente a curvatura de Gauss-Kronecker de M através da equação

$$\hat{K} = \det(a_{ij}) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}. \quad (3)$$

Por fim, para calcular a curvatura média de M , primeiro observemos que

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}$$

Aplicando esta igualdade na equação 2 e escrevendo em forma de sistema de equações, obtemos as seguintes expressões para os coeficientes da matriz da aplicação de Weingarten.

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{fF - eG}{EF - F^2}, \\ a_{12} &= \frac{gF - fG}{EF - F^2}, \\ a_{21} &= \frac{eF - fE}{EF - F^2}, \\ a_{22} &= \frac{fF - gE}{EF - F^2}, \end{aligned} \tag{4}$$

Essas são as chamadas *Equações de Weingarten*.

Observando que $-k_1$ e $-k_2$ são autovalores de dN , e portanto, são soluções do polinômio característico obtido pela seguinte equação:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} + k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} + k \end{pmatrix} = 0,$$

que fica da forma

$$k^2 + k(a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0.$$

Esta equação nos revela que a soma $k_1 + k_2$ é igual a $-(a_{11} + a_{22})$, e portanto, a curvatura média da M pode ser expressa da forma

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = -\frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}) = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}. \tag{5}$$

Uma outra definição de significativa importância é a de isometria. A importância desta definição se dá pois ela estabelece uma noção de equivalência entre superfícies. A definição é dada da seguinte maneira:

Definição 1.4. *Sejam M_1 e M_2 duas superfícies regulares em \mathbb{M}^3 . Dizemos que uma aplicação $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ é uma isometria quando ela for um difeomorfismo que preserva métrica. Isto é, se $q = \varphi(p)$, $w_1 = d\varphi(v_1)$ e $w_2 = d\varphi(v_2)$, para $v_1, v_2 \in T_p M_1$, então*

$$\langle w_1, w_2 \rangle_{M_2} = \langle v_1, v_2 \rangle_{M_1}. \tag{6}$$

Dizemos que são invariantes isométricos aquelas propriedades que permanecem inalteradas via isometrias. Como exemplo e resultado direto da definição, a norma de vetores e os ângulos entre dois vetores distintos são invariantes isométricos.

Algumas equivalências mais fracas que podemos citar são as homotetias e as transformações conformes. Tomando uma função estritamente positiva $f^2 : M_1 \rightarrow \mathbb{R}$, diremos que $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ é uma aplicação conforme quando $f^2(p)\langle w_1, w_2 \rangle_{M_2} = \langle v_1, v_2 \rangle_{M_1}$. Quando f^2 for uma constante λ , então φ é chamada de homotetia. Observe que uma isometria é um caso particular dessas definições.

Nem sempre é simples ou mesmo possível estabelecer uma isometria global entre duas superfícies, isto é, uma aplicação que preserva a métrica de todos os pontos de M_1 em M_2 . Por esse motivo, frequentemente é mais conveniente recorrer a uma noção mais flexível, conhecida como isometria local. Essa definição é similar à global, diferenciando-se apenas pelo fato de ser formulada localmente por meio de parametrizações locais. Mais precisamente:

Definição 1.5. *Duas superfícies M_1 e M_2 são ditas localmente isométricas quando, para qualquer ponto $p \in M_1$ e $U \subset M_1$ uma vizinhança aberta de p , existe uma aplicação $\varphi_p : U \rightarrow M_2$ que é uma isometria sobre a sua imagem.*

O seguinte teorema é considerado um dos teoremas fundamentais da geometria diferencial:

Teorema 1.1. *(Theorema Egregium em \mathbb{R}^3) A curvatura de Gauss-Kronecker é invariante por isometrias locais em \mathbb{R}^3 .*

Este teorema será provado de forma mais geral no quarto capítulo deste texto.

Como o *Theorema Egregium* estabelece que a curvatura de Gauss-Kronecker é, localmente, um ente intrínseco das superfícies regulares, a partir deste ponto passaremos a referi-la no ambiente \mathbb{R}^3 como Curvatura Gaussiana. Essa distinção se tornará mais clara posteriormente, mas adiantamos que ela se justifica pelo fato de reservarmos o termo *Gauss-Kronecker* para toda curvatura definida pelo determinante da segunda forma fundamental em um ambiente arbitrário \mathbb{M}^3 , enquanto o termo *Gaussiana* será empregado exclusivamente para descrever a curvatura intrínseca desse ambiente.

Agora apresentaremos alguns exemplos do cálculo das curvaturas média e Gaussiana de algumas classes de superfícies em \mathbb{R}^3 .

1. Começemos calculando as curvaturas de um gráfico dado por $X(u, v) = (u, v, h(u, v))$, onde h é uma função de classe C^k , como construído anteriormente. Então, como primeiro passo para calcular as curvaturas média e Gaussiana dessas superfícies, nós calculamos as derivadas de primeira e segunda ordem de X , que são dadas por

$$\begin{aligned} X_u(u, v) &= (1, 0, h_u(u, v)), \\ X_v(u, v) &= (0, 1, h_v(u, v)), \\ X_{uu}(u, v) &= (0, 0, h_{uu}(u, v)), \\ X_{uv}(u, v) &= (0, 0, h_{uv}(u, v)), \\ X_{vv}(u, v) &= (0, 0, h_{vv}(u, v)). \end{aligned}$$

Em seguida, definimos os coeficientes da primeira forma fundamental,

$$E = 1 + h_u^2, \quad F = h_u h_v, \quad G = 1 + h_v^2.$$

Agora calculamos a aplicação normal N do gráfico, e uma vez percebido que $\|X_u \times X_v\| = \sqrt{EG - F^2}$, obtemos, para

$$EG - F^2 = h_u^2 + h_v^2 + 1$$

a seguinte equação para a aplicação normal;

$$N = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & h_u \\ 0 & 1 & h_v \end{vmatrix} = \frac{-h_u \hat{i} - h_v \hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{h_u^2 + h_v^2 + 1}}.$$

Com isso, os coeficientes da segunda forma fundamental ficam da forma

$$e = \frac{h_{uu}}{\sqrt{h_u^2 + h_v^2 + 1}}, \quad f = \frac{h_{uv}}{\sqrt{h_u^2 + h_v^2 + 1}}, \quad e \quad g = \frac{h_{vv}}{\sqrt{h_u^2 + h_v^2 + 1}}.$$

Por fim, calculamos K , que será da forma

$$\hat{K} = \frac{h_{uu}h_{vv} - h_{uv}^2}{(h_u^2 + h_v^2 + 1)^2} = \frac{\det(H_h)}{(|\nabla h|^2 + 1)^2},$$

onde H_h é a matriz hessiana de h e $|\nabla h|^2$ é a norma ao quadrado do gradiente de h e, H , por sua vez, será da forma

$$H = \frac{1}{2} \frac{h_{uu} + h_{uu}h_v^2 + 2h_{uv}h_uh_v + h_{vv} + h_{vv}h_u^2}{(h_u^2 + h_v^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}.$$

2. Agora calculemos as curvaturas média e Gaussiana de uma superfície de revolução. Isto é, uma superfície dada da forma

$$X(u, v) = (\varphi(u)\cos(v), \varphi(u)\sen(v), \psi(u)),$$

onde $(\varphi(t), \psi(t))$ é uma curva regular plana parametrizada por comprimento de arco.⁷ Com isso, assim como no caso anterior, começamos calculando as derivadas de ordem um e dois de X para que possamos calcular as formas fundamentais.

$$\begin{aligned} X_u &= (\varphi'(u)\cos(v), \varphi'(u)\sen(v), \psi'(u)) \\ X_v &= (-\varphi(u)\sen(v), \varphi(u)\cos(v), 0) \\ X_{uu} &= (\varphi''(u)\cos(v), \varphi''(u)\sen(v), \psi''(u)) \\ X_{uv} &= (-\varphi'(u)\sen(v), \varphi'(u)\cos(v), 0) \\ X_{vv} &= (-\varphi(u)\cos(v), -\varphi(u)\sen(v), 0) \end{aligned}$$

Com isso, sabendo que pelo fato da curva utilizada para a revolução ser parametrizada por comprimento de arco, isto é $(\varphi')^2(t) + (\psi')^2(t) = 1$ para todo t no domínio da curva, então as componentes da primeira forma serão dadas por

⁷A condição da curva ser parametrizada por comprimento de arco, isto é, a medida do comprimento de arco da curva ser a mesma do intervalo do domínio da parametrização, pode ser dada sem perda de generalidade, uma vez que é sempre possível reparametrizar uma curva por comprimento de arco. Ver resultado na seção 1.3 de [3].

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = \varphi^2.$$

Isto implica na igualdade $EG - F^2 = \varphi^2$. Ao calcular N , obtemos

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{|\varphi(u)|} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \varphi'(u)\cos(v) & \varphi'(u)\text{sen}(v) & \psi'(u) \\ -\varphi(u)\text{sen}(v) & \varphi(u)\cos(v) & 0 \end{vmatrix} \\ &= \frac{-\varphi(u)\psi'(u)\cos(v)\hat{i} - \varphi(u)\psi'(u)\text{sen}(v)\hat{j} + (\varphi\varphi')(u)\hat{k}}{\varphi(u)} \\ &= (-\psi'(u)\cos(v), -\psi'(u)\text{sen}(v), \varphi'(u)) \end{aligned}$$

Aplicando o produto entre N e as derivadas segundas, obtemos as componentes da segunda forma fundamental

$$e = \psi''\varphi' - \psi'\varphi'', \quad f = 0 \quad e \quad g = \varphi\psi'.$$

Com isso, obtemos a curvatura Gaussiana da superfície de revolução da forma

$$K = -\frac{\psi'(\psi'\varphi'' - \psi''\varphi')}{\varphi}.$$

Uma vez, porem, que diferenciando a equação $(\varphi')^2 + (\psi')^2 = 1$, obtemos $\varphi'\varphi'' = -\psi'\psi''$, obtemos, aplicando esta igualdade em K

$$K = -\frac{\psi'(\psi'\varphi'' - \psi''\varphi')}{\varphi} = -\frac{(\psi')^2\varphi'' + (\varphi')^2\varphi''}{\varphi} = -\frac{\varphi''}{\varphi}.$$

Por fim, a curvatura média ficará da forma

1.3 Geodésicas e superfícies completas

Passamos agora a um breve estudo sobre a noção de completude de uma superfície. Para compreender essa definição, é fundamental introduzir previamente o conceito de geodésicas. Embora o aprofundamento nesse tema não seja o foco deste texto, apresentaremos algumas definições e resultados iniciais que permitirão uma compreensão intuitiva da completude de uma superfície.

Intuitivamente, uma geodésica poderia ser definida como uma curva que minimiza a distância entre dois pontos em uma superfície. Mas é preferível que definamos a partir de uma perspectiva mais geral, da qual depende de um outro conceito, chamado de *Transporte paralelo*.

Portanto, dada uma curva regular α em uma superfície M e um campo de vetores X suave tangente à superfície em α , então dizemos que X é *paralelo* quando a componente tangente a M em α da sua diferencial $\frac{dX}{dt}$ (denotada por $\frac{DX}{dt}$, e popularmente conhecida como *derivada covariante de X*) se anula em todo ponto.

A partir dessa definição, introduzimos formalmente o conceito de geodésica:

Definição 1.6. *Sejam M uma superfície regular e α uma curva regular parametrizada de M . Então, dizemos que α é uma geodésica de M se o seu campo tangente α' for paralelo. Isto é, quando*

$$\frac{D\alpha'}{dt} = 0.$$

O conceito de geodésica desempenha um papel fundamental na geometria e pode ser interpretado fisicamente de diversas maneiras, sendo uma das mais notáveis sua relação com problemas de minimização. Isso ocorre porque as soluções desses problemas, quando envolvem distâncias, são dadas por geodésicas. No entanto, a recíproca não é necessariamente verdadeira, pois existem geodésicas que não minimizam distâncias.

Um exemplo clássico dessa situação ocorre na esfera Euclidiana, cujas geodésicas são caracterizadas pelos seus grandes círculos. Dado um par de pontos p, q na esfera que não sejam antípodas, existe um único grande círculo que passa por ambos. Esse círculo pode ser dividido em dois segmentos distintos, originando assim duas geodésicas de comprimentos diferentes conectando os mesmos pontos. Como essas são as únicas geodésicas que passam simultaneamente por p e q , uma delas será a solução do problema de minimização da distância entre esses pontos, enquanto a outra, não, confirmando nossa afirmação de que nem toda geodésica necessariamente minimiza distâncias.

Outra observação relevante sobre as geodésicas é que, assim como a curvatura Gaussiana, elas também são invariantes por isometrias locais. A demonstração desse fato será apresentada no quarto capítulo deste texto.

No entanto, é válido afirmar agora que a demonstração desse fato consiste na construção de um sistema de equações diferenciais ordinárias lineares de ordem dois e que, pelo teorema de Picard, para um problema de valor inicial utilizando esse sistema, conseguimos garantir a existência e unicidade local de uma geodésica a partir de um ponto e um vetor velocidade. Isto nos motiva a identificar uma geodésica específica γ que passa por p em $\gamma(0)$ com uma velocidade v em $\gamma'(0)$ da forma $\gamma(t, v)$.

Uma outra propriedade que podemos retirar das geodésicas decorre do seguinte lema:

Lema 1.2. *(Homogeneidade de uma geodésica). Se uma geodésica $\gamma(t, v)$ aonde t está definida em $(-\varepsilon, \varepsilon)$, então, para qualquer número real positivo λ , a geodésica $\gamma(t, \lambda v)$ está definida em $(-\varepsilon/\lambda, \varepsilon/\lambda)$, e além disso, vale a igualdade $\gamma(t, \lambda v) = \gamma(\lambda t, v)$*

⁸Este lema nos motiva a definir, para um dado $p \in M$, a aplicação $exp_p : T_p M \rightarrow M$, dada da forma

$$exp_p(v) = \begin{cases} \gamma(1, v) & v \neq 0, \\ p & v = 0 \end{cases}. \quad (7)$$

O teorema da função inversa nos garante que a aplicação exp_p será um difeomorfismo em uma vizinhança de $0 \in T_p M$ ⁹. Logo, para toda vizinhança da origem em $T_p M$ onde tal aplicação é um difeomorfismo é chamada de *Vizinhança normal de M* .

O seguinte resultado nos fornece um tipo mais específico de vizinhança chamado de *Vizinhança totalmente normal*, que será utilizado mais à frente:

Teorema 1.2. ¹⁰ Para todo $p \in M$ existe um par (W, δ) , onde W é uma vizinhança aberta de p e $\delta > 0$ é um número real, tal que, para todo ponto $q \in W$ a aplicação exp_q é um difeomorfismo na bola geodésica $B_\delta(0) \in T_q M$ e $W \subset exp_q(B_\delta(0))$, isto é, W é uma vizinhança normal de todos os seus pontos.

Observação 1.3. Segue do resultado apresentado acima e do fato de geodésicas minimizarem distâncias que, para quaisquer pontos $q_1, q_2 \in W$, existe uma única geodésica minimizante conectando q_1 e q_2 e cujo comprimento é menor do que δ .

Dados de forma breve esses conceitos, agora podemos definir a completude de superfícies.

Definição 1.7. Uma superfície regular $M \subset \mathbb{M}^3$ é chamada de completa (ou geodesicamente completa) quando, para qualquer ponto $p \in M$ e para qualquer geodésica $\gamma : [0, \varepsilon) \rightarrow M$, com $\gamma(0) = p$, de M , exista uma geodésica $\bar{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow M$ que contenha completamente γ .

A noção de completude possui uma importância significativa no estudo de superfícies regulares, pois ela traz um sentido de maximalidade às superfícies. Isto se dá pois toda superfície completa é não-estendível, ou seja, não está contida propriamente em outra superfície regular conexa. Provemos essa afirmação com a seguinte proposição:

Proposição 1.4. Toda superfície completa é não-estendível.

Demonstração. Suponhamos que M seja uma superfície regular completa e estendível. Com isso, existe uma superfície \bar{M} que contém propriamente M . Além disso, M é aberto em \bar{M} , e possui fronteira não vazia. Caso contrário, o complementar de M em \bar{M} também seria aberto, e conseqüentemente, \bar{M} seria a união de dois conjuntos abertos, o que contradiz o fato dessa superfície ser conexa.

Com isso, existe pelo menos um ponto $p \in \partial M$. Tomando uma vizinhança \bar{V} de p em \bar{M} com a propriedade de que existe uma geodésica que conecta cada ponto desse conjunto a p , notemos que, como p está na fronteira de M , então existe $q \in M \cap \bar{V}$. Portanto, existe uma geodésica $\gamma : [0, 1] \rightarrow \bar{M}$ tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = q$. Perceba agora que a curva $\delta : [0, 1) \rightarrow M$ dada

⁸A prova deste lema pode ser encontrada na seção 4.6 de [3].

⁹A demonstração detalhada desse fato se encontra na proposição 2 do capítulo 4.6 de [3]

¹⁰Teorema 3.7, [4]

por $\delta(t) = \gamma(1 - t)$, vemos que claramente γ é uma geodésica em M . Além disso, como M é completo, então podemos estender δ até uma geodésica $\delta' : \mathbb{R} \rightarrow M$ que, pela construção, passa em algum momento por p , que por sua vez não está contido em M , o que resulta em uma contradição. Portanto, M não pode ser estendível. \square

Agora introduziremos a noção de *métrica intrínseca* de uma superfície, com o objetivo de apresentar um resultado sobre completude que será essencial para nossas discussões futuras. Para isso, primeiro definiremos de um modo mais formal o comprimento de arco de uma curva em M .

Definição 1.8. Para uma curva $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ descrita como na equação acima, onde $\alpha(a) = x$ e $\alpha(b) = y$, o seu comprimento de arco é dado pela fórmula

$$\mathcal{L}[\alpha] = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt \quad (8)$$

Com isso, podemos partir para a seguinte definição

Definição 1.9. Para uma superfície regular $M \subset \mathbb{M}^3$, denominamos por *métrica intrínseca* a função $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ dada da forma

$$d(x, y) = \inf_{\alpha \in [\alpha]_x^y} \mathcal{L}[\alpha], \quad (9)$$

onde $[\alpha]_x^y$ é o conjunto de todas as curvas regulares suaves por partes que estão em M as quais têm o ponto x como ponto de partida e y como ponto de chegada, e $\mathcal{L}[\alpha]$ é o comprimento de arco dessas curvas.

De fato, a função definida acima cumpre o papel de uma métrica no sentido topológico usual da palavra. Provaremos isso na proposição que segue.

Proposição 1.5. A função d satisfaz as seguintes propriedades:

1. $d(x, y) \geq 0$
2. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
3. $d(x, y) = d(y, x)$
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

onde, $x, y, z \in M$.

Demonstração. A primeira propriedade vem do fato de que o comprimento de arco é sempre um número positivo, e para um conjunto $A \in \mathbb{R}$ de números positivos, o valor $\inf A$ é sempre não-negativo.

Para provar a segunda propriedade, começemos pela recíproca da equivalência. Se $x = y$, então definindo $\alpha(t) = x$, obtemos $\mathcal{L}[\alpha] = 0$. Agora suponhamos que $d(x, y) = 0$ mas $x \neq y$. Tomando uma vizinhança V de p que não contém q , e que todos os pontos dessa vizinhança

possam ser conectados por p por uma geodésica completamente contida em V , e $B_r(x)$ uma região limitada por um círculo geodésico centrado em x e de raio r , completamente contido em V .

Utilizando a definição de ínfimo, dado ε tal que $0 < \varepsilon < r$, vai existir um $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ onde $\alpha(a) = x$ e $\alpha(b) = y$ tal que $\mathcal{L}[\alpha] < \varepsilon$. Mas $y \notin B_r(x)$, então, pela conexidade de $\alpha([a, b])$, haverá um t_0 tal que $\alpha(t_0) \in \partial B_r(x)$, portanto $\mathcal{L}[\alpha] \geq r > 0$, o que contradiz nossa hipótese. Portanto $x = y$, como queríamos.

A terceira propriedade sai do fato de que para uma curva $\alpha : [a, b] \rightarrow M$, onde $\alpha(a) = x$ e $\alpha(b) = y$, o seu comprimento de arco $\mathcal{L}[\alpha]$ será igual ao comprimento de uma curva $\beta : [a, b] \rightarrow M$ dada da forma $\beta(t) = \alpha(a - t + b)$. Pois, note que $\beta(a) = \alpha(b) = y$ e $\beta(b) = \alpha(a) = x$.

Por fim, a última propriedade vem do fato de que para dois conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}$, vale que se $A \subseteq B$, então $\inf B \leq \inf A$. Dessa forma, tomando o conjunto $[\alpha]_x^y$ de modo que todas as curvas desse conjunto tenham domínio $[0, 1/2]$, e o conjunto $[\alpha]_y^z$ de modo que todas as curvas desse conjunto tenham domínio $[1/2, 1]$, definimos o conjunto

$$P = \left\{ \gamma : [0, 1] \rightarrow M \mid \gamma(t) = \begin{cases} \alpha(t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(t) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}, \text{ onde } \alpha \in [\alpha]_x^y \text{ e } \beta \in [\beta]_y^z \right\},$$

que claramente está contido em $[\alpha]_x^z$ e que, além disso, para qualquer $\gamma \in P$, vale que $\mathcal{L}[\gamma] = \mathcal{L}[\alpha] + \mathcal{L}[\beta]$. E pela propriedade de ínfimo descrita acima, para $\delta \in [\alpha]_x^z$, temos

$$\begin{aligned} \inf_{\gamma \in P} \mathcal{L}[\gamma] &\leq \inf_{\delta \in [\alpha]_x^z} \mathcal{L}[\delta] \\ \implies d(x, y) + d(y, z) &\leq d(x, z) \end{aligned}$$

o que demonstra o que queríamos provar. □

O seguinte resultado conecta a noção de completude de um espaço métrico com a métrica d à completude de uma superfície.

Proposição 1.6. *Se uma superfície M é um espaço métrico completo com a métrica d definida acima, então ela é geodesicamente completa.*¹¹

Demonstração. Provemos que se M é completo como espaço métrico, então, para qualquer geodésica $\gamma : [0, \varepsilon) \rightarrow M$, que, sem perda de generalidade, seja parametrizada por comprimento de arco, e que além disso, tenha um ponto p fixado como $\gamma(0)$, então existirá uma outra geodésica $\xi : \mathbb{R} \rightarrow M$ que contém propriamente γ .

Dessa forma, utilizando o fato de que para um dado valor s_0 , uma geodésica ξ onde $\xi(s_0)$ está definida satisfaz uma propriedade de existência e unicidade para uma vizinhança de s_0 em \mathbb{R} . Desta forma, o conjunto dos números $s \in \mathbb{R}$ os quais ξ está definido é aberto em \mathbb{R} . Caso

¹¹Esta proposição se trata de uma versão simplificada de um famoso teorema da geometria chamado *Teorema de Hopf e Rinow*, que caracteriza variedades completas. De fato, é verdade que vale a equivalência do que enunciamos aqui. Para o leitor interessado em ver uma demonstração mais completa desse resultado, recomendamos a leitura do teorema 2.8 do capítulo VII de [4].

provemos que ele também é fechado em \mathbb{R} , isto é, constitui uma componente conexa de \mathbb{R} , que é conexo, então mostramos que esse conjunto é o próprio \mathbb{R} , e assim provamos o que queríamos.

Sendo assim, suponhamos que todos os elementos s para os quais a geodésica está definida sejam menores do que s_0 e mostremos que, se isso for verdade, então ξ também está definido em s_0 . Tomemos, portanto, a sequência $(s_n) \rightarrow s_0$ dos pontos aqui mencionados. Definamos, assim, por \bar{d} a métrica definida como a definição acima, porém para todo o \mathbb{R}^3 . Pela propriedade de ínfimo, sabemos que

$$\bar{d}(p, q) \leq d(p, q).$$

Com isso, como (s_n) é uma sequência de Cauchy no domínio de ξ , então existe um $\varepsilon > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que, para $n, m > n_0$,

$$\bar{d}(\xi(s_n), \xi(s_m)) \leq d(\xi(s_n), \xi(s_m)) \leq |s_n - s_m| \leq \varepsilon.$$

Consequentemente, (s_n) é uma sequência de Cauchy em \mathbb{R}^3 . Como \mathbb{R}^3 é completo, então $(\xi(s_n))$ converge para um ponto $q \in \mathbb{R}^3$. Logo, como por hipótese M é fechado, e q é ponto de aderência de M , então $q \in M$, isto é, $\delta(s_0) = q$, e isso prova o que queríamos.

Agora provemos que de fato γ é estendida. Tomando uma vizinhança totalmente normal (W, δ) de p_0 e escolhendo $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n, m > n_1$ vale que $|s_m - s_n| < \delta$ e $\gamma(s_m), \gamma(s_n)$ pertencem a W , então vai existir uma única geodésica g cujo comprimento de arco é menor do que delta e que conecta $\gamma(s_m)$ a $\gamma(s_n)$. E, como claramente γ e g se coincidem na região onde γ está definida, e ainda, como $\exp_{\gamma(s_n)}$ é um difeomorfismo em $B_\delta(0)$ e $W \subset \exp_{\gamma(s_n)}(B_\delta(0))$, concluímos que g estende γ para além de s_0 , o que conclui a nossa prova. □

1.4 A pseudoesfera

A partir deste ponto, nosso interesse se volta para um tipo especial de superfícies chamadas de *pseudoesfera*. Essa definição possui um significado importante para o conteúdo abordado neste texto. Pois, como veremos nos capítulos subsequentes, o espaço hiperbólico \mathbb{H}^2 se trata de uma pseudoesfera.

Com isso, partimos para a seguinte definição.

Definição 1.10. *Uma pseudoesfera é uma superfície regular com curvatura Gaussiana constante negativa.*

Um exemplo clássico de pseudoesfera em \mathbb{R}^3 é a superfície gerada a partir da revolução de uma curva denominada *tractriz*. Esta é uma curva oriunda da física, e ela possui a propriedade de que o segmento da reta tangente a qualquer ponto dessa curva que conecta tal ponto a uma reta que não se intersecta com a curva (a qual convencionaremos que é o eixo y do plano) tem comprimento de arco constante igual a 1. Expressando esta propriedade de forma matemática, chegamos nos seguintes cálculos:

Suponhamos que a tractriz é dada da forma $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, onde $\gamma(t) = (t, y(t))$. Com isso, fixando um t_0 do domínio de γ a equação da reta tangente a γ nesse ponto é dada da forma

$$s_0(t) = (t + t_0, \gamma'(t_0)t + \gamma(t_0)).$$

A partir disso podemos deduzir que a propriedade da tractriz é expressa sobre o comprimento de arco da aplicação s_0 a partir do ponto $s_0(0)$ até $s_0(t_0)$. Isto é

$$\mathcal{L}[s_0]_0^{t_0} = \int_0^{t_0} \|s'(t)\| dt = 1. \quad (10)$$

o que nos fornece

$$\mathcal{L}[s_0]_0^{t_0} = \int_0^{t_0} \sqrt{1 + \gamma'(t_0)^2} dt = t_0 \sqrt{1 + y'(t_0)^2} = 1.$$

A partir daqui podemos tornar t_0 arbitrário, já que, segundo a propriedade da tractriz, essa igualdade vale para qualquer ponto da curva, e isolando y' obtemos a seguinte equação.

$$y'(t) = \pm \frac{\sqrt{1-t^2}}{t}. \quad (11)$$

Por fim, integrando ambos os lados, obtemos a expressão explícita de $y(t)$, e portanto, de $\gamma(t)$, que é dada por

$$\gamma(t) = \left(t, \ln \frac{1 + \sqrt{1-t^2}}{t} - \sqrt{1-t^2} \right). \quad (12)$$

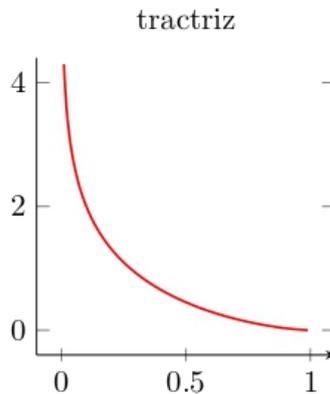


Figura 3: Tractriz

Agora queremos calcular a curvatura Gaussiana da superfície de revolução gerada pela tractriz. Para isso, é necessário que reparametrizemos esta curva por comprimento de arco, isto é, precisamos encontrar uma função $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ de tal modo que para a curva $\alpha = \gamma(h)$, a norma $\|\alpha'(t)\|$ seja igual a 1 para qualquer t escolhido do domínio. Além disso, queremos que essa função satisfaça a equação

$$k = -\frac{h''}{h} = -1$$

descrita anteriormente. Tendo isto em vista, a caracterização dessa função h já é suficiente para atestar que a revolução da tractriz é uma pseudoesfera.

Uma pista da forma de h está na própria forma como a fórmula da curvatura Gaussiana está posta. Temos assim a equação diferencial

$$h'' = h,$$

que é uma equação linear onde suas soluções são exponenciais, sendo uma delas a função e^t . Perceba que esta função satisfaz a equação acima, e além disso, temos que

$$\begin{aligned} \|\alpha'(s)\|^2 &= \|h'(t) \cdot \gamma'(h(t))\|^2 \\ &= |h'(t)|^2 \cdot \|\gamma'(h(t))\|^2 \\ &= (e^t)^2 \cdot \left(1 + \frac{1 - (e^t)^2}{(e^t)^2}\right) \\ &= (e^t)^2 \cdot \left(\frac{1}{(e^t)^2}\right) \\ &= \left(\frac{e^t}{e^t}\right)^2 = 1 \end{aligned}$$

Com isso, chegamos aonde queríamos. Vale destacar que inicialmente, a tractriz estava definida no domínio $(0, 1]$. Com a reparametrização, analisando os extremos de cada intervalo, é fácil ver que o novo domínio da função está em $(-\infty, 0]$.

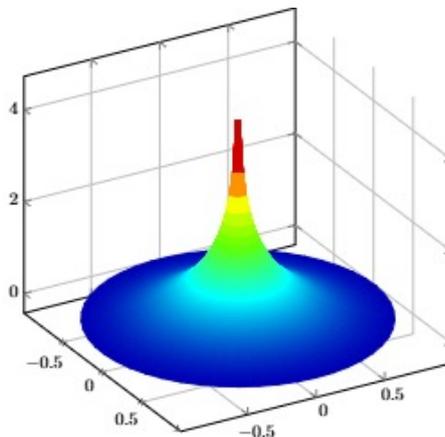


Figura 4: Pseudoesfera

De acordo com a definição de completude apresentada na seção anterior, se torna natural nos perguntarmos se a pseudoesfera se trata de uma superfície completa. De fato, ela não é. Pois,

com efeito, percebendo que no conjunto $U = B_1(0) - \{0\}$ a pseudoesfera constitui o gráfico de uma função, podemos descrever essa superfície como um gráfico da função $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por

$$f(u, v) = \ln \frac{1 + \sqrt{1 - (u^2 + v^2)^2}}{(u^2 + v^2)} - \sqrt{1 - (u^2 + v^2)^2}.$$

Vale observar que o conjunto dos pontos $(u, v, f(u))$ onde $(u, v) \in U$, embora descreva a pseudoesfera, não constitui uma superfície regular, pois U não é um conjunto aberto. No entanto, dada a função $g : \mathbb{R}^2 - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ da forma

$$g(u, v) = \begin{cases} f(u, v), & 0 < u^2 + v^2 \leq 1 \\ 0 & 1 < u^2 + v^2 \end{cases}$$

e observando que essa função é suave, temos que a aplicação $X : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $X(u, v) = (u, v, g(u, v))$ é uma superfície regular em \mathbb{R}^3 . Mas perceba que a pseudoesfera está contida propriamente na superfície gerada por X . Logo, a pseudoesfera é estendível e, portanto, não pode ser completa.

Uma vez observado que esse modelo de pseudoesfera não é completo, torna-se natural perguntar se é possível, de alguma forma, completar essa superfície, ou se existe algum outro modelo de pseudoesfera completo que possamos observar. E a resposta a essas dúvidas surge com o seguinte teorema:

Teorema 1.3. (Hilbert). *Não existem superfícies de curvatura constante negativa imersas completamente em \mathbb{R}^3 .*

A demonstração desse teorema é extensa e trabalhosa, a ponto de justificar a elaboração de um capítulo específico somente para detalhá-la¹². Por essa razão, sua prova será omitida neste trabalho.

Uma vez que o teorema de Hilbert se trata de um resultado específico para superfícies no \mathbb{R}^3 , uma pergunta natural que nos surge é a seguinte: *É possível encontrar uma pseudoesfera completa em algum outro ambiente?*

A resposta para essa pergunta será explorada no próximo capítulo .

2 Geometria Lorentziana e o espaço hiperbólico

Neste capítulo construiremos o espaço de Lorentz-Minkowski e mostraremos que a pseudoesfera é definida de forma natural nesse ambiente como uma superfície completa.

Uma vez que, neste capítulo, adentramos um tipo distinto de geometria, além da obra [3], faz-se necessária a consulta a uma fonte que trate propriamente da geometria Lorentziana. Nesse sentido, utilizamos como referências adicionais [2] e [6], onde a primeira foi utilizada para um estudo mais geral do espaço de Lorentz-Minkowski, enquanto a segunda foi utilizada para estudar de forma mais aprofundada as curvaturas nesse ambiente.

¹²Ver seção 5.11 de [3]

2.1 O espaço de Lorentz-Minkowski

Definimos o *Espaço de Lorentz-Minkowski*, denotado por \mathbb{L}^3 , como o par $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{L}^3})$, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{L}^3}$ é chamado de *Produto Interno Lorentziano*, e, para dois vetores $x, y \in \mathbb{R}^3$,

$$\langle x, y \rangle_{\mathbb{L}^3} = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3. \quad (13)$$

Dito isto, omitimos o índice “ \mathbb{L}^3 ” do produto interno Lorentziano neste capítulo para simplificar a notação.

É facilmente verificável que o produto interno Lorentziano não corresponde a um produto interno no sentido usual, pois sua forma quadrática associada, definida por $g(v) = \langle v, v \rangle$, não é positivo-definida. Em outras palavras, essa aplicação bilinear não satisfaz a condição de positividade exigida para um produto interno convencional.

Por essa razão, a função $d(x, y) = \|x - y\|$, onde $\|\cdot\|$ representa a norma induzida pelo produto interno Lorentziano, não define propriamente uma métrica no sentido clássico, sendo, portanto, denominada pseudométrica.

Embora não possua uma métrica no sentido convencional, o espaço de Lorentz-Minkowski, mesmo sendo dotado de uma pseudométrica, preserva grande parte dos resultados geométricos estabelecidos em \mathbb{R}^3 . Em certos casos, as diferenças residem apenas em uma troca de sinal, decorrente do tipo causal dos espaços tangentes considerados.

Para compreendermos essas variações e suas implicações, apresentamos a seguir algumas definições fundamentais:

Definição 2.1. *Seja $v \in \mathbb{L}^3$ um vetor em \mathbb{L}^3 , então dizemos que o tipo causal do vetor é*

- *Tipo-Espaço quando $\langle v, v \rangle > 0$ ou quando $v = 0$;*
- *Tipo-Tempo quando $\langle v, v \rangle < 0$;*
- *Tipo-Luz quando $\langle v, v \rangle = 0$ e $v \neq 0$.*

Ademais, denominamos por ϵ_v o número referente ao tipo causal de v , que é 1, caso v seja tipo-espaço, 0 se é tipo-luz, ou -1 é tipo-tempo.

Um resultado que sofre alteração da métrica Lorentziana é a fórmula de obtenção da curvatura Gaussiana para uma parametrização X de M . Nesta ocasião, ela é dada da forma

$$K = \epsilon \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \quad (14)$$

onde ϵ representa o tipo causal do ponto o qual estamos analisando a curvatura.

Esse resultado pode ser deduzido de maneira semelhante à abordagem adotada para \mathbb{R}^3 no capítulo anterior. No entanto, essa dedução exige um conhecimento mais aprofundado sobre

variedades Semi-Riemannianas, que não faz parte do escopo deste texto. Assim, deixamos aqui uma referência onde essa demonstração pode ser consultada¹³.

O próximo conceito possui uma contribuição significativa para a teoria da relatividade. Para tornar sua definição mais clara, é útil observar que, na física, a terceira componente do espaço de Lorentz-Minkowski—isto é, aquela associada ao sinal negativo na métrica—corresponde à dimensão temporal.

Com essa motivação, convencionamos considerar a direção positiva dessa componente como o futuro e a direção negativa como o passado. Com essa interpretação em mente, apresentamos a seguinte definição:

Definição 2.2. *Seja $v = (v_1, v_2, v_3)$ um vetor de \mathbb{L}^3 tal que $v_3 \neq 0$. Então, dizemos que*

1. *v é Futuro-dirigido quando $v_3 > 0$,*
2. *v é passado-dirigido quando $v_3 < 0$.*

O conjunto de todos os vetores tipo-luz é chamado de *Cone de Luz* e é denotado por Λ . Uma breve análise revela que qualquer vetor $v = (v_1, v_2, v_3) \in \Lambda$ possui sua componente v_3 diferente de zero. Como consequência, Λ é um conjunto desconexo, sendo composto por exatamente duas componentes conexas, descritas da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\Lambda_+ &= \{(v_1, v_2, v_3) \in \Lambda \mid v_3 > 0\}, \\ \Lambda_- &= \{(v_1, v_2, v_3) \in \Lambda \mid v_3 < 0\}.\end{aligned}$$

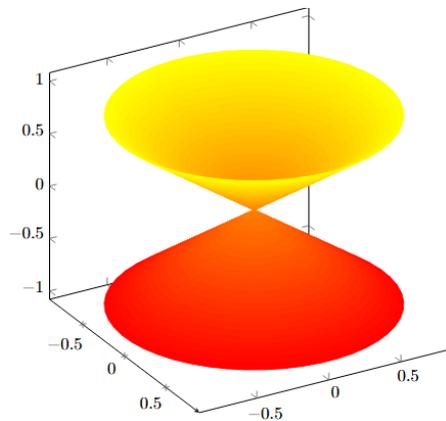


Figura 5: Cone de Luz

Um detalhe importante a ser observado é que o cone de luz separa o $\mathbb{L}^3 \setminus \Lambda$ em três componentes conexas. Uma dessas componentes corresponde ao conjunto de todos os vetores do tipo espaço, enquanto as outras duas são formadas por vetores do tipo tempo. Dentre estas, uma é composta pelos vetores futuro-dirigidos e a outra pelos passado-dirigidos.

¹³Ver capítulo 3.3 de [6].

Essa definição fornece uma intuição sobre as esferas no espaço de Lorentz-Minkowski. Recordemos que, no contexto Euclidiano, uma esfera é definida como uma superfície da forma

$$S := \{v \in \mathbb{M}^3 \mid \langle v, v \rangle = c > 0\}.$$

Ao considerar essa definição em \mathbb{L}^3 observa-se que essas superfícies diferem das esferas Euclidianas, uma vez que, devido à estrutura do cone de luz, elas devem estar contidas nas componentes desconexas de $\mathbb{L}^3 \setminus \Lambda$.

Mais precisamente, uma esfera Lorentziana será uma superfície regular que estará contida no exterior do cone de luz, pois todos os seus pontos, quando vistos como vetores, serão tipo-espaço.

A construção da esfera Lorentziana, por sua vez, nos fornece as seguintes equações:

1. $x^2 + y^2 = z^2 + c$;
2. $x^2 - z^2 = y^2 - c$;
3. $y^2 - z^2 = x^2 - c$.

Observemos que, na equação (1), quando fixado z , obtemos uma circunferência de raio $\sqrt{z^2 + c}$. Repetindo esse mesmo processo nas equações (2) e (3) fixando y e x , respectivamente, obtemos as equações de hipérboles. Estas equações nos dá indícios de que S se trata da revolução de hipérbole em torno do eixo z . Esse espaço é chamado de *de Sitter*.

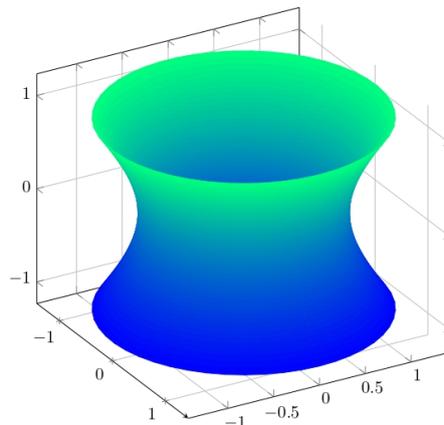


Figura 6: de Sitter

2.2 O espaço hiperbólico

Diferente do espaço Euclidiano, o \mathbb{L}^3 nos abre margem para estender a definição usual de esfera, uma vez que uma pseudométrica nos dá margem para considerar a constante c , vista na definição anterior, como um número negativo.

Definimos o conjunto F_c da forma

$$F_c := \{v \in \mathbb{L}^3 \mid \langle v, v \rangle = c < 0\}.$$

Note que se $v = (v_1, v_2, v_3)$ é um elemento de F_c , então $w = (v_1, v_2, -v_3)$ também é um ponto de F_c . Unindo esta observação ao fato de que, pela própria construção de F_c , todos os seus pontos são tipo-tempo, concluímos que F_c é um conjunto desconexo, de tal modo que uma de suas componentes conexas seja futuro-dirigida e a outra passado-dirigida.

Ao escolhermos uma das componentes conexas, digamos, a de vetores futuro-dirigidos, fazendo $c = -1$, obtemos o que chamamos de *Espaço Hiperbólico*, o \mathbb{H}^2 . Mais formalmente, temos

$$\mathbb{H}^2 := \{p = (p_1, p_2, p_3) \in F_{-1} \mid p_3 > 0\}. \quad (15)$$

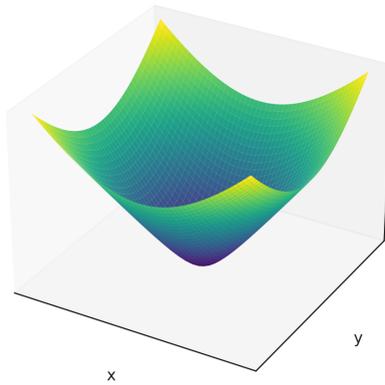


Figura 7: Espaço hiperbólico

O segundo resultado vai conectar as construções feitas no espaço de Lorentz-Minkowski com a pergunta feita no final do primeiro capítulo.

Teorema 2.1. *A superfície \mathbb{H}^2 é uma pseudoesfera completa.*

Demonstração. Começemos calculando a curvatura Gaussiana de \mathbb{H}^2 . Uma vez provado que ela é igual a -1 , concluímos que essa superfície se trata de uma Pseudoesfera.

Para isso, consideremos a aplicação $X(u, v) = (\sinh(u)\cos(v), \sinh(u)\sin(v), \cosh(v))$, que é a revolução da curva geratriz do espaço hiperbólico¹⁴ parametrizada por comprimento de arco (pois $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$). De fato, essa superfície parametriza o espaço hiperbólico, uma vez que

$$\langle X(u, v), X(u, v) \rangle = \sinh^2(u) - \cosh^2(u) = -1,$$

e além disso, $\cosh(u) > 0$ para todo u .

¹⁴isto é, a curva cuja revolução resulta na superfície analisada. No caso, o espaço hiperbólico.

Ademais, observemos que podemos considerar a aplicação normal N de X como sendo a própria aplicação X , já que

$$\begin{aligned}\langle X, X \rangle &= -1 \\ \implies \frac{\partial}{\partial i} \langle X, X \rangle &= 0 \\ \implies \langle X_i, X \rangle &= 0,\end{aligned}$$

para $i = u, v$. A partir disso, calculando as derivadas de primeira e segunda ordem de X , obtemos

$$\begin{aligned}X_u(u, v) &= (\cosh(u)\cos(v), \cosh(u)\sen(v), \sinh(u)), \\ X_v(u, v) &= (-\sinh(u)\sen(v), \sinh(u)\cos(v), 0), \\ X_{uu}(u, v) &= X(u, v), \\ X_{uv}(u, v) &= (-\cosh(u)\sen(v), \cosh(u)\cos(v), 0), \\ X_{vv}(u, v) &= (-\sinh(u)\cos(v), -\sinh(u)\sen(v), 0).\end{aligned}$$

Com isso, obtemos que as coeficientes da primeira forma são

$$E = \cosh(u)^2 - \sinh^2(u) = 1, \quad F = 0, \quad G = \sinh^2 u.$$

Além disso, como dito acima que a aplicação normal N será o próprio X , então os coeficientes da segunda forma fundamental serão da forma

$$\langle X, X_{ij} \rangle.$$

Portanto, obtemos

$$e = -1, \quad f = 0, \quad g = -\sinh^2 u.$$

Com tudo isso, ao calcular K , uma vez que todos os pontos do conjunto \mathbb{H}^2 são vetores tipo-tempo, obtemos

$$K = \epsilon \frac{eg}{EG} = -\frac{\sinh u}{\sinh u} = -1,$$

e com isso, concluímos que \mathbb{H}^2 é uma pseudoesfera em \mathbb{L}^3 .

Agora mostremos que \mathbb{H}^2 é uma superfície completa. Para provar esse fato, mostraremos que essa superfície é completa como espaço métrico com a métrica definida no primeiro capítulo deste texto. Para isso, tomaremos uma sequência (Y_n) de \mathbb{H}^2 e mostraremos que se (Y_n) é de Cauchy, então ela é convergente.

Uma vez que a sequência (Y_n) é de Cauchy, ela será limitada em \mathbb{H}^2 . Portanto, caso isso implique que a projeção $(\pi(Y_n))$ no plano xy de \mathbb{L}^3 (que pode ser identificado com \mathbb{R}^2) seja também limitada. Assim, sabendo que \mathbb{R}^2 é completo, obteremos uma subsequência convergente $(\pi(Y_{nk}))$ de $(\pi(Y_n))$ que converge para um determinado valor $\pi(Y_0)$. Com isso, uma vez que

conseguimos parametrizar \mathbb{H}^2 com uma parametrização tipo gráfico que cubra todo o plano \mathbb{R}^2 como domínio, digamos Y , de tal forma que a sua aplicação inversa seja a projeção π utilizada, então a subsequência $(Y \circ \pi)(Y_{nk}) = Y_{nk}$ será uma subsequência convergente de Y_n que converge para $(Y \circ \pi)(Y_0) = Y_0$. E como Y_n é de Cauchy, isso é suficiente para provar que essa sequência converge para Y_0 , provando a completude de \mathbb{H}^2 .

Tendo feitas as devidas explicações, basta provarmos que Y_n ser limitada implica em $\pi(Y_n)$ ser limitada. Com isso, temos que a função altura de nosso gráfico se dá da forma

$$h(u, v) = \sqrt{u^2 + v^2 + 1}.$$

No entanto, com o objetivo de simplificar os cálculos, faremos uma substituição de h para coordenadas polares, deste modo, temos

$$h(r, \theta) = \sqrt{r^2 + 1}.$$

deste modo, a nossa parametrização Y será da forma

$$Y(r, \theta) = \left(r \cdot \cos(\theta), r \cdot \text{sen}(\theta), \sqrt{r^2 + 1} \right).$$

Com isso, uma vez que o parâmetro θ já está limitado, basta provarmos que se a sequência

$$(Y_n) = \left(r_n \cdot \cos(\theta_n), r_n \cdot \text{sen}(\theta_n), \sqrt{r_n^2 + 1} \right),$$

é de Cauchy, então (r_n) será limitado. Desta forma, suponhamos, por contradição que (r_n) não seja limitada. Como (Y_n) é de *Cauchy*, então existe um certo n_0 e $m, n > n_0$ de tal forma que, para um dado $\varepsilon > 0$, exista uma curva $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$, com $\alpha(0) = Y_m$ e $\alpha(1) = Y_n$ tal que

$$\mathcal{L}[\alpha] < \varepsilon.$$

Então, como α é definida de forma geral como

$$\alpha(t) = X \left(r(t) \cdot \cos(\theta(t)), r(t) \cdot \text{sen}(\theta(t)), \sqrt{r(t)^2 + 1} \right),$$

temos que sua derivada com relação a t será da forma

$$\alpha'(t) = \left(r'(t) \cos(\theta(t)) - r(t) \text{sen}(\theta(t)) \theta'(t), \right. \\ \left. r'(t) \text{sen}(\theta(t)) + r(t) \cos(\theta(t)) \theta'(t), \frac{r(t) r'(t)}{\sqrt{r^2(t) + 1}} \right).$$

Logo, calculando $\|\alpha'\|$, chegamos no seguinte resultado

$$\begin{aligned}
\|\alpha'(t)\| &= (r'(t))^2 \cos^2(\theta(t)) - 2r'(t)r(t)\cos(\theta(t))\operatorname{sen}(\theta(t))\theta'(t) + r^2(t)\operatorname{sen}^2(\theta(t))(\theta')^2(t) \\
&\quad + (r'(t))^2 \operatorname{sen}^2(\theta(t)) + 2r'(t)r(t)\operatorname{sen}(\theta(t))\cos(\theta(t))\theta'(t) + r^2(t)\cos^2(\theta(t))(\theta')^2(t) \\
&\quad - \frac{(r'(t))^2 r^2(t)}{r^2(t) + 1} \\
&= (r'(t))^2 + r^2(t)(\theta')^2(t) - \frac{(r'(t))^2 r^2(t)}{r^2(t) + 1} \\
&= \frac{(r'(t))^2(t)}{r^2(t) + 1} + r^2(t)(\theta')^2(t).
\end{aligned}$$

Com isso, uma vez que θ é limitado, podemos calcular $\mathcal{L}[\alpha]$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\alpha] &= \int_0^1 \|\alpha'(t)\| dt \\
&= \int_0^1 \sqrt{\frac{(r'(t))^2(t)}{r^2(t) + 1} + r^2(t)(\theta')^2(t)} dt \\
&\geq \int_0^1 \sqrt{\frac{(r')^2(t)}{r^2(t) + 1}} dt \\
&\geq \int_0^1 \frac{|r'(t)|}{\sqrt{r^2(t) + 1}} dt \\
&\geq \int_0^1 \frac{r'(t)}{\sqrt{r^2(t) + 1}} dt \\
&= \operatorname{arctgh} \left(\frac{r(t)}{\sqrt{r^2(t) + 1}} \right) \Big|_0^1 \\
&= \operatorname{arctgh} \left(\frac{r_n}{\sqrt{r_n^2 + 1}} \right) - \operatorname{arctgh} \left(\frac{r_m}{\sqrt{r_m^2 + 1}} \right).
\end{aligned}$$

Fixando m e variando $n > n_0$, obtemos uma sequência de curvas α_n que satisfazem a igualdade

$$d(Y_m, Y_n) = \mathcal{L}[\alpha_n] < \varepsilon.$$

Fazendo n tender ao infinito e lembrando que, pela hipótese, isso implica que $r_n \rightarrow \infty$, chegamos na seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned}
\varepsilon &> \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arctgh} \left(\frac{r_n}{\sqrt{r_n^2 + 1}} \right) - \operatorname{arctgh} \left(\frac{r_m}{\sqrt{r_m^2 + 1}} \right) \\
&> \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arctgh} (1) - \operatorname{arctgh} \left(\frac{r_m}{\sqrt{r_m^2 + 1}} \right) \\
&= \infty - \operatorname{arctgh} \left(\frac{r_m}{\sqrt{r_m^2 + 1}} \right) \\
&= \infty,
\end{aligned}$$

que resulta em uma contradição. Portanto r_n deve ser limitada. E como discutido anteriormente, isso demonstra que \mathbb{H}^2 é completo, como queríamos mostrar. □

3 Noções gerais de Geometria Riemanniana

Neste capítulo, iniciamos o estudo das variedades Riemannianas. Essa teoria mais abrangente é fundamental para compreendermos o ambiente $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2$, cuja natureza é mais complexa e menos intuitiva do que a de \mathbb{R}^3 . Isso ocorre porque $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2$ é um ambiente não-Euclidiano, dificultando o desenvolvimento de uma intuição geométrica direta, ao contrário do que acontece em \mathbb{R}^3 .

A geometria Riemanniana, ao generalizar os resultados da geometria diferencial, permite estender esses conceitos para espaços não intuitivos por meio de uma abordagem essencialmente algébrica e analítica. Com isso em mente, neste capítulo discutiremos a métrica Riemanniana e a conexão afim, que ampliam as noções de métrica e paralelismo introduzidas no primeiro capítulo.

Além disso, abordaremos dois conceitos que generalizam a curvatura Gaussiana. São eles a curvatura de Riemann e a curvatura seccional. Esses elementos serão essenciais no quarto capítulo, onde analisaremos como a curvatura do ambiente $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2$ influencia a curvatura das superfícies nele imersas.

A principal referência utilizada neste capítulo foi a obra [4], da qual foram explorados os conceitos desenvolvidos nos capítulos I, II e IV, com o intuito de fundamentar os temas aqui tratados. O capítulo III, que aborda o estudo das geodésicas, entretanto, não foi aprofundado, uma vez que, conforme mencionado anteriormente, tal conteúdo extrapola o escopo do presente trabalho..

3.1 Definições iniciais

Diferentemente da geometria diferencial clássica, onde os objetos de estudo são superfícies imersas em um ambiente \mathbb{R}^3 , no caso mais geral da geometria Riemanniana, uma variedade não

precisa estar necessariamente contida em um espaço ambiente.

Dessa forma, para formalizar essa abordagem, iniciaremos pela definição do conceito de variedade diferenciável. Com essa base conceitual estabelecida, será então possível introduzir uma noção mais geral de parametrização, adequada a esse tipo de ente mais abstrato.

Definição 3.1. *Uma Variedade topológica M se trata de um espaço topológico que satisfaz as seguintes condições:*

- M é um espaço de Hausdorff;
- M é localmente Euclidiano, isto é, para todo ponto $p \in M$ existe uma vizinhança V de p e uma aplicação $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ que é um homeomorfismo sobre a sua imagem;
- M admite o segundo axioma da enumerabilidade.

Assim, definimos uma parametrização de forma análoga à construção feita anteriormente, porém com algumas distinções sutis. A primeira diferença reside no fato de que a dimensão do domínio agora pode ser arbitrária. A segunda, por sua vez, é que a aplicação não tem como imagem um ambiente previamente fixado, mas sim diretamente o conjunto que estamos estudando, que, neste caso, é a variedade topológica M . Mais rigorosamente, uma parametrização é um par (X, U) , aonde

$$X : U \rightarrow M$$

se trata de um difeomorfismo sobre a sua imagem.

Dada uma família de sistemas de coordenadas de M , nós podemos definir as noções de transição suave e de parametrizações suavemente compatíveis de forma similar ao que definimos para parametrizações.

Por fim, vale observar que a classe de variedades topológicas é bastante ampla e pode incluir diversos casos patológicos. Por essa razão, é fundamental impor restrições adicionais a essa classe, de modo a garantir propriedades desejáveis para o nosso estudo. Essa necessidade nos leva à próxima definição.

Definição 3.2. *Uma variedade diferenciável M^n , onde n representa a sua dimensão, se trata de uma variedade topológica munida de um conjunto \mathcal{A} , denominado Atlas, de parametrizações as quais são, duas a duas, suavemente compatíveis e que cobrem M^n .*

Observação 3.1. *A definição de uma variedade diferenciável aqui mencionada está totalmente relacionada com a dimensão do conjunto em que as suas parametrizações a levam. Diferentemente do caso das superfícies em \mathbb{R}^3 , a dimensão dos conjuntos abertos utilizados nas parametrizações pode ser arbitrária. Façamos, portanto, que a dimensão de todas as parametrizações seja um valor fixo n e, então, definimos este valor como a dimensão de nossa variedade.*

Outro conceito essencial para o estudo das variedades é a definição de campos de vetores. Para introduzi-los — especificamente, os campos de vetores tangentes — é necessário, em primeiro lugar, construir o espaço tangente a uma variedade. Essa construção, contudo, já foi apresentada

no primeiro capítulo deste trabalho, quando tratamos do plano tangente a uma superfície. A definição que se seguirá será análoga àquela, a partir da qual poderemos formalizar o conceito de campo de vetores.

Definição 3.3. *Um campo de vetores X (tangente) de M^n é uma aplicação que associa a cada $p \in M^n$, um vetor $v \in T_p M$. Dizemos que X é diferenciável quando $X : M \rightarrow TM = \{T_p M | p \in M\}$ for diferenciável.*

Uma vez estabelecidas essas definições com um nível adequado de rigor, podemos avançar e ingressar na geometria Riemanniana. Assim como no primeiro capítulo deste texto, é necessário introduzir às variedades diferenciáveis um meio de medir distâncias.

Entretanto, a partir deste ponto, começamos a nos distanciar da geometria diferencial clássica e até mesmo da geometria Lorentziana. Diferentemente dessas abordagens, aqui não dispomos de um ambiente previamente munido de um produto interno para induzir uma métrica na variedade. A solução, portanto, consiste em definir uma métrica de maneira abstrata, o que faremos a seguir.

3.2 Métrica Riemanniana

Definição 3.4. *Seja M^n uma variedade diferenciável. Uma métrica Riemanniana, ou estrutura Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é uma aplicação que associa a cada ponto $p \in M$ uma forma bilinear simétrica positivo-definida $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ ao espaço tangente a M em p de tal forma que, para uma determinada parametrização (X, U) , com $p \in U$, e os vetores X_i e X_j definidos da forma*

$$X_i = dx(0, \dots, \underbrace{1}_{i\text{-ésima posição}}, \dots, 0),$$

$$X_j = dx(0, \dots, \underbrace{1}_{j\text{-ésima posição}}, \dots, 0),$$

a aplicação $g_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$ dada da forma $g_{ij}(x) = \langle X_i(x), X_j(x) \rangle_p$, para x tal que $X(x) = p$, seja uma aplicação diferenciável em relação à variável p . Um par $(M^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, onde M^n é uma variedade diferenciável e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é uma métrica riemanniana de M^n é chamado de Variedade Riemanniana.

Observação 3.2. 1. *Dada esta definição, a fim de simplificar a notação, agora denotaremos as variedades Riemannianas simplesmente por M .*

2. *Poderíamos aqui dar vários exemplos de variedades Riemannianas, porém nos capítulos anteriores já foram apresentados diversos exemplos dessa classe de variedades. um detalhe que deve ser observado, no entanto, é que o espaço de Lorentz-Minkowski não se trata de uma variedade Riemanniana, pois, sua métrica não é positivo-definida. De fato, esse espaço está presente em uma classe mais geral de variedades denominadas Semi-Riemannianas. Perceba, no entanto, que contido nesse ambiente, os subespaços vetoriais que são tipo-espaço recuperam a positividade da métrica, isto implica que superfícies aonde todos os seus planos tangentes são tipo-espaço, apesar de estarem em um ambiente Lorentziano, são Riemannianos. Este é o caso do nosso espaço hiperbólico*

3. Por fim, é perceptível que assim como na geometria diferencial clássica, em que as métricas das superfícies podem ser representadas como combinações lineares dos coeficientes da primeira forma fundamental E , F e G , que são nada mais que g_{uu} , g_{uv} e g_{vv} , onde g é a métrica da superfície induzida pelo produto interno usual de \mathbb{R}^3 , de forma similar nós podemos caracterizar a métrica de uma variedade qualquer através de suas componentes g_{ij} . Aqui nós introduzimos uma notação alternativa, muito utilizada na relatividade e até mesmo na própria geometria, esta notação é a de elemento de linha, e ela representa intuitivamente a métrica sendo utilizada para quantidades infinitesimais, por isso utilizamos a notação ds^2 para tal.

como exemplo podemos apresentar a métrica do \mathbb{R}^n através dessa notação:

$$ds_{\mathbb{R}^n}^2 = \sum_{i=1}^n dx_i^2,$$

um outro exemplo é a métrica de \mathbb{H}^2 em \mathbb{L}^3 com a parametrização

$$X(u, v) = (\sinh(u)\cos(v), \sinh(u)\sin(v), \cosh(u)),$$

a qual, calculando os coeficientes da primeira forma fundamental, e escrevendo na forma quadrática associada, obtemos

$$ds_{\mathbb{H}^2}^2 = du^2 + \sinh^2(v)dv^2$$

Apresentaremos agora alguns exemplos interessantes de variedades Riemannianas que podem ser obtidas a partir de outras variedades. Eles serão muito importantes para compreendermos as variedades vistas durante este texto.

1. (*Subvariedades*). Dada uma variedade diferenciável M^m , onde $m > 1$, podemos imergir outra variedade N^n , onde $n < m$, dentro de M^m ¹⁵, de forma similar a como fizemos com as superfícies imersas em \mathbb{R}^3 . Além disso, uma vez que obtemos uma métrica Riemanniana em M^m , é possível induzir uma métrica em N^n da forma

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_N = \langle \cdot, \cdot \rangle_M|_N.$$

¹⁶Como mencionado acima, as superfícies em \mathbb{R}^3 são os exemplos mais comuns que obtemos de subvariedades riemannianas. O que estudaremos mais a frente é o caso das superfícies imersas em $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2$, que são também vistas como subvariedades desse ambiente.

Algo que vale ser destacado é o conceito de *codimensão* de uma subvariedade. Dados um ambiente M^m e uma subvariedade desse ambiente N^n , a codimensão de N com respeito a M é o número $m - n$. Quando a codimensão da subvariedade é igual a um, ela recebe o nome especial de *hiperfície*, e essa classe de subvariedades possui a propriedade de qualquer espaço normal aos seus espaços tangentes terem dimensão um, o que facilita a construção de uma aplicação normal.

¹⁵Ao nos referirmos a uma imersão, estamos considerando um homeomorfismo diferenciável $F : N \rightarrow M$ cuja derivada é injetiva em todos os pontos do domínio.

¹⁶Quando N possui previamente uma métrica, e esta coincide com a métrica induzida $\langle \cdot, \cdot \rangle_M|_N$, então a imersão F será chamada de *imersão isométrica*.

2. (*Variedades produto*). Dadas duas variedades Riemannianas arbitrárias, digamos, M^m e N^n , não é difícil notar que o seu produto cartesiano $M \times N$ é uma variedade diferenciável de dimensão $m + n$. Isto fica claro, uma vez que, dados dois atlas, $\mathcal{A}_M = \{(X_\lambda, U_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ e $\mathcal{A}_N = \{(Y_\sigma, V_\sigma)\}_{\sigma \in \Sigma}$, pertencentes a M e N , respectivamente, temos que o conjunto \mathcal{B} , dado da forma

$$\mathcal{B} = \{(Z_{\lambda\sigma}, W_{\lambda\sigma})\}_{\lambda\sigma \in \Lambda \times \Sigma},$$

onde $W_{\lambda\sigma} = U_\lambda \times V_\sigma \in \mathbb{R}^{m+n}$ e $Z_{\lambda\sigma} : W_{\lambda\sigma} \rightarrow M \times N$ aplica X_λ nas m primeiras entradas de um elemento x de $W_{\lambda\sigma}$, e Y_σ nas n últimas entradas, constitui um atlas para $M \times N$. Para vermos isso, é necessário apenas mostrar que as parametrizações desse conjunto são suavemente compatíveis, e isso se verifica verdadeiro, uma vez que a transição suave entre as parametrizações de \mathcal{B} pode ser expressa pela compatibilidade das parametrizações \mathcal{A}_M e \mathcal{A}_N nas suas respectivas entradas. Por fim, sejam ds_M^2 e ds_N^2 as formas quadráticas associadas às métricas de M e N , respectivamente. Então aplicação

$$ds_{M \times N}^2 = ds_M^2 + ds_N^2$$

constitui também uma forma quadrática que varia de forma diferenciável, conforme variamos os pontos de $M \times N$, e com isso, podemos concluir que a aplicação associada a esse elemento de linha constitui uma métrica Riemanniana para $M \times N$, como queríamos.

De fato, seguindo esse exemplo, podemos obter uma métrica para $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2$ fazendo o produto das métricas que já obtemos, desse modo, obtemos

$$ds_{\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2}^2 = dt^2 + du^2 + \sinh^2(v)dv^2.$$

No entanto, essa versão do $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2$ não nos interessa pelo fato dela está imersa em um ambiente, o \mathbb{L}^4 . No próximo capítulo apresentaremos uma solução para esse impasse

3.3 Conexões afins e conexão Riemanniana

Após estabelecermos a definição de variedade Riemanniana, avançamos agora para um conceito fundamental em nossa análise: a noção de conexão. Iniciaremos com a conexão afim, que fornece um meio de diferenciar vetores ao longo de uma variedade, e em seguida abordaremos a conexão Riemanniana, que incorpora a estrutura métrica da variedade, desempenhando um papel essencial no estudo das curvaturas e do transporte paralelo.

Para partir para a próxima definição, denotaremos por $\mathcal{X}(M)$ o conjunto de todos os campos de vetores suaves em M e por $\mathcal{F}(M)$ o conjunto de todas as funções suaves reais em M .

Definição 3.5. Dizemos que uma conexão afim em uma variedade diferenciável M é um operador ∇ dado da forma

$$\begin{aligned} \nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) &\rightarrow \mathcal{X}(M) \\ (X, Y) &\mapsto \nabla_X Y \end{aligned} \tag{16}$$

e que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_XZ + g\nabla_YZ,$
2. $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_XY + \nabla_XZ,$
3. $\nabla_X(fY) = f\nabla_XY + Xf(Y),$

onde $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ e $f, g \in \mathcal{F}(M)$.

Esta definição é claramente bem mais abstrata do que todas as que tivemos até agora. No entanto, ela possui um significado geométrico fundamental, pois generaliza a noção de transporte paralelo discutida anteriormente. Poderíamos apresentar uma série de resultados que demonstram a equivalência dessa definição com a de paralelismo. Contudo, como tais resultados se distanciam dos nossos objetivos, indicamos referências apropriadas onde podem ser encontrados.

A próxima definição nos apresenta uma propriedade encontrada em algumas conexões que generaliza a regra do produto usual.

Definição 3.6. *Sejam M uma variedade Riemanniana e ∇ uma conexão afim de M . Então dizemos ∇ é compatível com a métrica de M quando, para quaisquer campos $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ vale*

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle. \quad (17)$$

Por fim, a seguinte definição antes de partirmos para o teorema principal desta seção utilizará um conceito chamado *Colchete de Lie*. Que se trata de um operador que transforma um par de campos $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ no campo $[X, Y] = XY - YX$.

Definição 3.7. *Dizemos que uma conexão ∇ de uma variedade Riemanniana M é Simétrica quando, para quaisquer $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, valer a igualdade*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]. \quad (18)$$

Observação 3.3. *1. Dada uma parametrização (X, U) de M , dados dois campos coordenados X_i e X_j , vemos que a simetria de ∇ nos fornece a seguinte igualdade*

$$\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = [X_i, X_j] = 0, \quad (19)$$

isso se dá pelo fato de X_i ser igual a $\frac{\partial}{\partial X_i}$, onde ∂ se trata da derivada no sentido Euclidiano na direção X_i . Como, por definição, X deve ser uma aplicação suave, então segue que suas derivadas parciais mistas são iguais, resultando na igualdade acima.

Por fim, vejamos tal resultado implica diretamente na seguinte igualdade

$$\nabla_{X_i} X_j = \nabla_{X_j} X_i,$$

que será bastante utilizada nas próximas seções.

2. É fácil verificar que o Colchete de Lie possui as seguintes propriedades:

- $[\cdot, \cdot]$ é uma forma bilinear,
- $[\cdot, \cdot]$ é antissimétrico,
- $[\cdot, \cdot]$ satisfaz a Identidade de Jacobi, ou seja, para campos $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$, vale

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0,$$

- Dados $f, g \in \mathcal{F}(M)$, $[\cdot, \cdot]$ também satisfaz a igualdade

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X.$$

Agora apresentamos o principal resultado desta seção, conhecido como o *Teorema Fundamental da Geometria Riemanniana*. Esse teorema assegura a existência e unicidade de uma conexão afim que é simultaneamente simétrica e compatível com a métrica. Além disso, ele fornece uma caracterização explícita dessa conexão. O mais notável é que essa conexão, chamada de *Conexão de Levi-Civita*, depende unicamente da métrica de M , tornando-se, assim, um ente intrínseco da variedade.

Teorema 3.1. (Levi-Civita). *Para qualquer variedade Riemanniana M , existe uma única conexão afim ∇ que satisfaz as condições*

4. ∇ é simétrica;
5. ∇ é compatível com a métrica de M .

Demonstração. Suponhamos primeiramente que essa conexão exista. Logo, dados três campos de vetores arbitrários $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$, temos as seguintes igualdades:

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle, \quad (20)$$

$$Y\langle Z, X \rangle = \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_Y X \rangle, \quad (21)$$

$$Z\langle X, Y \rangle = \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle. \quad (22)$$

Fazendo a soma das duas primeiras equações e subtraindo pela terceira, obtemos

$$\begin{aligned} X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle &= \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle + \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_Y X \rangle \\ &\quad - \langle \nabla_Z X, Y \rangle - \langle X, \nabla_Z Y \rangle \\ &= \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, [X, Z] \rangle + \langle X, [Y, Z] \rangle + \langle Z, \nabla_Y X \rangle. \end{aligned}$$

Com isso, observando a igualdade

$$\nabla_Y X = \nabla_X Y - [X, Y],$$

chegamos na equação

$$\begin{aligned} X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle &= 2\langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, [X, Z] \rangle + \langle X, [Y, Z] \rangle \\ &\quad - \langle Z, [X, Y] \rangle. \end{aligned}$$

Reorganizando as contas, chegamos na seguinte equação, conhecida como *Fórmula de Koszul*:

$$\langle \nabla_X Y, Z \rangle = \frac{1}{2} \left(X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle - \langle Y, [X, Z] \rangle - \langle X, [Y, Z] \rangle + \langle Z, [X, Y] \rangle \right). \quad (23)$$

Essa fórmula nos revela que uma conexão que satisfaça as cinco propriedades depende apenas da métrica da variedade e, além disso, revela sua unicidade, já que qualquer conexão que satisfaça todas as cinco propriedades tem que satisfazer essa fórmula de caracterização.

Agora, para provar a existência dessa conexão, definamos a partir da fórmula (23). Tomando mais um campo de vetor $W \in \mathcal{X}(M)$ e funções suaves $f, g \in \mathcal{F}(M)$, temos

1.

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{fX+gW} Y, Z \rangle &= \frac{1}{2} \left[(fX + gW) \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, (fX + gW) \rangle - Z \langle (fX + gW), Y \rangle \right. \\ &\quad \left. - \langle Y, [(fX + gW), Z] \rangle - \langle (fX + gW), [Y, Z] \rangle \right. \\ &\quad \left. + \langle Z, [(fX + gW), Y] \rangle \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[fX \langle Y, Z \rangle + gW \langle Y, Z \rangle + fY \langle Z, X \rangle + Y(f) \langle Z, X \rangle \right. \\ &\quad \left. + gY \langle Z, W \rangle + Y(g) \langle Z, W \rangle - fZ \langle X, Y \rangle - Z(f) \langle X, Y \rangle \right. \\ &\quad \left. - gZ \langle W, Y \rangle - Z(g) \langle W, Y \rangle - f \langle Y, [X, Z] \rangle + Z(f) \langle Y, X \rangle \right. \\ &\quad \left. - g \langle Y, [W, Z] \rangle + Z(g) \langle Y, W \rangle - f \langle X, [Y, Z] \rangle - g \langle W, [Y, Z] \rangle \right. \\ &\quad \left. + f \langle Z, [X, Y] \rangle - Y(f) \langle Z, X \rangle + g \langle Z, [W, Y] \rangle - Y(g) \langle Z, W \rangle \right] \\ &= \frac{f}{2} \left[X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle - \langle Y, [X, Z] \rangle \right. \\ &\quad \left. - \langle X, [Y, Z] \rangle + \langle Z, [X, Y] \rangle \right] \\ &\quad + \frac{g}{2} \left[W \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, W \rangle - Z \langle W, Y \rangle - \langle Y, [W, Z] \rangle \right. \\ &\quad \left. - \langle W, [Y, Z] \rangle + \langle Z, [W, Y] \rangle \right] \\ &= \langle f \nabla_X Y, Z \rangle + \langle g \nabla_W Y, Z \rangle = \langle f \nabla_X Y + g \nabla_W Y, Z \rangle \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_X(Y+W), Z \rangle &= \frac{1}{2} \left[X\langle Y+W, Z \rangle + (Y+Z)\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y+W \rangle \right. \\
&\quad \left. - \langle Y+W, [X, Z] \rangle - \langle X, [(Y+W), Z] \rangle + \langle Z, [X, (Y+W)] \rangle \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle - \langle Y, [X, Z] \rangle \right. \\
&\quad \left. - \langle X, [Y, Z] \rangle + \langle Z, [X, Y] \rangle \right] + \\
&\quad \frac{1}{2} \left[X\langle W, Z \rangle + W\langle Z, X \rangle - Z\langle X, W \rangle - \langle W, [X, Z] \rangle \right. \\
&\quad \left. - \langle X, [W, Z] \rangle + \langle Z, [X, W] \rangle \right] \\
&= \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle \nabla_X W, Z \rangle = \langle \nabla_X(Y+W), Z \rangle,
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_X(fY), Z \rangle &= \frac{1}{2} \left[X\langle fY, Z \rangle + fY\langle Z, X \rangle - Z\langle X, fY \rangle - \langle fY, [X, Z] \rangle \right. \\
&\quad \left. - \langle X, [fY, Z] \rangle + \langle Z, [X, fY] \rangle \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[X(f)\langle Y, Z \rangle + fX\langle Y, Z \rangle + (fY)\langle Z, X \rangle \right. \\
&\quad \left. - (fZ)\langle X, Y \rangle - Z(f)\langle X, Y \rangle - f\langle Y, [X, Z] \rangle \right. \\
&\quad \left. - \langle X, f[Y, Z] - Z(f)X \rangle + \langle Z, f[X, Y] + X(f)Y \rangle \right] \\
&= \frac{f}{2} \left[X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle - \langle Y, [X, Z] \rangle \right. \\
&\quad \left. - \langle X, [Y, Z] \rangle + \langle Z, [X, Y] \rangle \right] \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(X(f)\langle Y, Z \rangle - Z(f)\langle X, Y \rangle + Z(f)\langle X, Y \rangle + X(f)\langle Y, Z \rangle \right) \\
&= \langle f\nabla_X Y, Z \rangle + \langle X(f)Y, Z \rangle = \langle f\nabla_X Y + X(f)Y, Z \rangle,
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_X Y, Z \rangle - \langle \nabla_Y X, Z \rangle &= \frac{1}{2} \left[X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle - \langle Y, [X, Z] \rangle \right. \\
&\quad \left. - \langle X, [Y, Z] \rangle + \langle Z, [X, Y] \rangle \right] \\
&\quad - \frac{1}{2} \left[Y\langle X, Z \rangle + X\langle Z, Y \rangle - Z\langle Y, X \rangle - \langle X, [Y, Z] \rangle \right. \\
&\quad \left. - \langle Y, [X, Z] \rangle + \langle Z, [Y, X] \rangle \right] \\
&= \langle [X, Y], Z \rangle,
\end{aligned}$$

5. Por fim, temos

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle &= \frac{1}{2} \left[X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle - \langle Y, [X, Z] \rangle \right. \\
&\quad \left. - \langle X, [Y, Z] \rangle + \langle Z, [X, Y] \rangle \right] \\
&+ \frac{1}{2} \left[X \langle Z, Y \rangle + Z \langle Y, X \rangle - Y \langle X, Z \rangle - \langle Z, [X, Y] \rangle \right. \\
&\quad \left. - \langle X, [Z, Y] \rangle + \langle Y, [X, Z] \rangle \right] \\
&= X \langle Y, Z \rangle.
\end{aligned}$$

E portanto, concluímos que a fórmula de Koszul caracteriza uma conexão simétrica e compatível com a métrica, como queríamos. \square

Tomemos agora dois campos coordenados arbitrários, X_i e X_j , de M . Calculando a conexão com respeito a esses dois campos, obtemos

$$\nabla_{X_i} X_j = \Gamma_{ij}^k X^k,$$

onde Γ_{ij}^k são os chamados *símbolos de Christoffel* de M . Esses símbolos podem ser determinados exclusivamente pela métrica e são dados pela fórmula¹⁷

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} (X_i g_{lj} + X_j g_{il} - X_l g_{ij}), \quad (24)$$

onde g^{kl} representa o elemento kl da matriz inversa à matriz dos elementos g_{kl} . Algo que também é válido observar é que, pelo fato de $[\partial_i, \partial_j] = 0$, é verdade que $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

A partir desses símbolos, nós conseguimos, para quaisquer dois campos $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, calcular $\nabla_X Y$ a partir dos campos coordenados, e desse modo, obtemos

$$\nabla_X Y = X^i \left(\frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + \Gamma_{ij}^k Y^j \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \quad (25)$$

Uma vez que mostramos a existência e unicidade da *conexão de Levi-Civita*, também chamada de *conexão Riemanniana*, é ela que usaremos a partir de agora. Na próxima seção definiremos algumas noções de curvatura, que generalizam a curvatura Gaussiana, vista nos capítulos anteriores.

¹⁷Ver capítulo II de [4].

3.4 Curvatura em uma variedade Riemanniana

A definição de curvatura que apresentaremos a seguir é mais abstrata. No entanto, ao longo desta seção, seu significado será gradualmente esclarecido e contextualizado.

Definição 3.8. *Seja M uma variedade Riemanniana. A aplicação R , que associa, a cada dois campos de vetores $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ a aplicação $R(X, Y) : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ dada por*

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{[X, Y]} Z$$

É denominada Curvatura Riemanniana de M .

Perceba que, uma vez que em \mathbb{R}^n $\nabla_X Z = \sum_i X Z_i$, e conseqüentemente $\nabla_Y \nabla_X Z = \sum_i Y X Z_i$. Isso implica que a curvatura de Riemann para quaisquer dois campos vetoriais em \mathbb{R}^n é nula. Esse fato decorre da comutatividade das derivadas covariantes nesse espaço. A partir disso, podemos interpretar geometricamente a curvatura Riemanniana de uma variedade como uma medida do 'quão distante' essa variedade está de ser localmente equivalente a \mathbb{R}^n .

Uma outra maneira de observar essa relação é analisando a derivada covariante dos campos coordenados. Com isso, temos, para três campos ∂_i , ∂_j e ∂_k , a seguinte relação

$$R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = (\nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_j} - \nabla_{\partial_j} \nabla_{\partial_i})\partial_k.$$

Esta fórmula nos mostra com mais clareza que a curvatura Riemanniana mede o grau de comutatividade de uma conexão.

A seguinte proposição estabelece algumas propriedades fundamentais da curvatura Riemanniana¹⁸.

Proposição 3.4. *A curvatura Riemanniana R goza das seguintes propriedades:*

- *R é bilinear em $\mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M)$. Ou seja, para $W, X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ e $f, g \in \mathcal{F}(M)$, são válidas as seguintes propriedades:*

$$\begin{aligned} R(fX + gW, Y)Z &= fR(X, Y)Z + gR(W, Y)Z, \\ R(X, fY + gW)Z &= fR(X, Y)Z + gR(X, W)Z. \end{aligned}$$

- *R é linear em $\mathcal{X}(M)$, isto é*

$$R(X, Y)(fZ + gW) = fR(X, Y)Z + gR(X, Y)W.$$

Daqui em diante, utilizaremos com frequência o operador $\langle R(X, Y)Z, W \rangle$ em algumas construções. Para facilitar a notação, em alguns contextos convenientes, esse operador será denotado simplesmente por (X, Y, Z, W) . A seguir, apresentamos alguns resultados fundamentais sobre essa notação e suas propriedades.

¹⁸Ver proposição 2.2 de [4]

Proposição 3.5. (*Primeira identidade de Bianchi*). Para campos de vetores arbitrários $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$. A curvatura riemanniana R goza da seguinte propriedade:

$$R(X, Y)Z + R(Z, X)Y + R(Y, Z)X = 0 \quad (26)$$

Demonstração. A demonstração desse fato segue da expansão das curvaturas Riemannianas e da identidade de Jacobi, vista em (2). Explicitamente

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y &= \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z + \nabla_Z \nabla_Y X \\ &\quad - \nabla_X \nabla_Z Y + \nabla_{[Y, Z]} X + \nabla_X \nabla_Z Y - \nabla_Z \nabla_X Y \\ &\quad + \nabla_{[X, Z]} Y \\ &= \nabla_Y [X, Z] + \nabla_Z [X, Y] + \nabla_X [Z, Y] - \nabla_{[X, Z]} Y \\ &\quad - \nabla_{[Y, X]} Z - \nabla_{[Z, Y]} X \\ &= [Y, [X, Z]] + [Z, [X, Y]] + [X, [Z, Y]] = 0 \end{aligned}$$

□

Agora podemos enunciar o seguinte resultado

Proposição 3.6. *Dados campos de vetores $X, Y, Z, W \in \mathcal{X}(M)$, as seguintes propriedades são verdadeiras:*

- $(X, Y, Z, W) + (Y, Z, X, W) + (Z, X, Y, W) = 0$,
- $(X, Y, Z, W) = -(Y, X, Z, W)$,
- $(X, Y, Z, W) = -(X, Y, W, Z)$,
- $(X, Y, Z, W) = (Z, W, X, Y)$.

Demonstração. A primeira propriedade é consequência direta da identidade de Bianchi. A segunda vem do fato, facilmente verificável, de que $R(Y, X)Z = -R(X, Y)Z$. A terceira propriedade segue do fato de que $(X, Y, Z, Z) = 0$. De fato, supondo que essa igualdade é verdadeira, obtemos

$$\begin{aligned} 0 = (X, Y, Z - W, Z - W) &= (X, Y, Z, Z) - (X, Y, Z, W) \\ &\quad - (X, Y, W, Z) + (X, Y, W, W), \end{aligned}$$

que segue na propriedade três. Portanto, provemos que $(X, Y, Z, Z) = 0$.

Uma vez que

$$\begin{aligned} \langle \nabla_Y \nabla_X Z, Z \rangle &= Y \langle \nabla_X Z, Z \rangle - \langle \nabla_X Z, \nabla_Y Z \rangle \\ \langle \nabla_X \nabla_Y Z, Z \rangle &= X \langle \nabla_Y Z, Z \rangle - \langle \nabla_Y Z, \nabla_X Z \rangle \quad e \\ \langle \nabla_{[X, Y]} Z, Z \rangle &= \frac{1}{2} [X, Y] \langle Z, Z \rangle, \end{aligned}$$

chegamos nos seguintes cálculos:

$$\begin{aligned}
(X, Y, Z, Z) &= \langle \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{[X, Y]} Z, Z \rangle \\
&= Y \langle \nabla_X Z, Z \rangle - X \langle \nabla_Y Z, Z \rangle + \frac{1}{2} [X, Y] \langle Z, Z \rangle \\
&= \frac{1}{2} (Y(X \langle Z, Z \rangle) - X(Y \langle Z, Z \rangle) + [X, Y] \langle Z, Z \rangle) \\
&= \frac{1}{2} (-[X, Y] \langle Z, Z \rangle + [X, Y] \langle Z, Z \rangle) = 0.
\end{aligned}$$

Por fim, para demonstrar a última propriedade, somaremos as equações abaixo que conseguimos a partir da primeira propriedade.

$$\begin{aligned}
(X, Y, Z, W) + (Y, Z, X, W) + (Z, X, Y, W) &= 0, \\
(Y, Z, W, X) + (Z, W, Y, X) + (W, Y, Z, X) &= 0, \\
(Z, W, X, Y) + (W, X, Z, Y) + (X, Z, W, Y) &= 0, \\
(W, X, Y, Z) + (X, Y, W, Z) + (Y, W, X, Z) &= 0.
\end{aligned}$$

Desta forma, obtemos a seguinte igualdade:

$$2\langle Z, X, Y, W \rangle + 2\langle W, Y, Z, X \rangle = 0.$$

Utilizando a segunda propriedade nessa equação, chegamos no resultado esperado. \square

Podemos verificar que a curvatura Riemanniana, quando reduzida a superfícies em \mathbb{M}^3 , representa justamente a curvatura Gaussiana de tais superfícies. Uma outra construção que podemos fazer em uma variedade qualquer, e que, diferente da curvatura de Riemann, possui um significado geométrico mais claro, é a partir de uma seção plana de M . Dados dois vetores linearmente independentes $x, y \in T_p M$, o número $\bar{K}(x, y)$, dado da forma

$$\bar{K}(x, y) = \frac{(x, y, x, y)}{|x \wedge y|^2}, \quad (27)$$

onde $|x \wedge y|^2 = \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - \langle x, y \rangle^2$, é chamado de *Curvatura Seccional* de M na seção plana σ de $T_p M$ gerada pela base $\{x, y\}$. A seguinte proposição nos mostrará que essa definição de fato está bem posta, isto é, a curvatura seccional em uma seção plana σ de $T_p M$ não depende da base escolhida para gerar σ .

Proposição 3.7. *Seja σ uma seção plana bidimensional de $T_p M$ e $x, y \in T_p M$ vetores linearmente independentes. Então a aplicação $\bar{K}(x, y)$ não depende da escolha de x e de y .*

Demonstração. Para que provemos esta proposição, é suficiente mostrarmos que, para $\lambda \in \mathbb{R}$, valem as seguintes propriedades

1. $\overline{K}(x, y) = \overline{K}(y, x)$,
2. $\overline{K}(x, y) = \overline{K}(\lambda x, y)$,
3. $\overline{K}(x, y) = \overline{K}(x + \lambda y, y)$,

pois, qualquer mudança de base de geradores de um espaço vetorial pode ser expressa como composição dessas três propriedades.

Temos que a primeira igualdade segue do fato de que $(x, y, x, y) = (y, x, y, x)$, provado a partir da segunda e terceira propriedades vistas na proposição 3.6, e além disso, pela simetria do produto interno, segue que $|x \wedge y| = |y \wedge x|$.

Para vermos que a segunda igualdade é verdadeira, basta percebermos que $(\lambda x, y, \lambda x, y) = \lambda^2(x, y, x, y)$ e que $|\lambda x \wedge y|^2 = \lambda^2|x \wedge y|^2$, e disso segue a igualdade.

A terceira igualdade é verificada fazendo os seguintes cálculos: Primeiramente, temos que

$$(x + \lambda y, y, x + \lambda y, y) = (x, y, x, y) + \lambda(y, y, x, y) + \lambda(x, y, y, y) + \lambda^2(y, y, y, y),$$

donde os três últimos termos se anulam, restando a igualdade que queríamos.

Fazendo o mesmo processo com o denominador de $\overline{K}(x, y)$, obtemos

$$\begin{aligned} |x + \lambda y \wedge y| &= (\langle x, x \rangle + 2\lambda\langle x, y \rangle + \lambda^2\langle y, y \rangle)\langle y, y \rangle \\ &\quad - (\langle x, y \rangle + \lambda\langle y, y \rangle)^2 \\ &= \langle x, x \rangle\langle y, y \rangle - \langle x, y \rangle^2 \\ &= |x \wedge y|, \end{aligned}$$

e com isso, provamos a terceira igualdade. □

Agora que mostramos algumas construções e resultados fundamentais da geometria Riemanniana, estamos prontos para realizar essas construções em $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2$. No próximo capítulo, construiremos de forma rigorosa esse espaço e calcularemos algumas de suas curvaturas a fim de fazermos um comparativo com a geometria diferencial clássica.

4 Geometria diferencial em $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2$

Neste capítulo, aprofundamos o estudo de superfícies imersas em $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2$, a qual é uma variedade produto, como discutido anteriormente. No entanto, como o espaço hiperbólico que construímos corresponde a uma superfície imersa no espaço de Lorentz-Minkowski, ao utilizar esse modelo para definir $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2$, obteremos uma variedade imersa em $\mathbb{R} \times \mathbb{L}^3 = \mathbb{L}^4$.

Nosso objetivo, porém, não é estudar essa variedade enquanto imersa em um ambiente maior, mas sim analisá-la de forma independente. Para isso, apresentamos uma variedade isométrica a \mathbb{H}^2 que não é construída a partir de uma imersão, permitindo-nos formular o estudo de maneira mais adequada. Uma vez estabelecida essa estrutura, investigamos as superfícies contidas nesse espaço.

Na primeira seção deste capítulo, faremos uso extensivo dos resultados sobre isometrias do espaço hiperbólico apresentados em [1]. Em particular, a isometria que empregaremos entre

os dois modelos hiperbólicos aqui considerados corresponde à composição de duas isometrias descritas naquela obra. No restante do capítulo, os resultados demonstrados e os exemplos discutidos terão como base os conteúdos do sexto capítulo de [4], o qual trata das imersões isométricas.

4.1 Isometria do espaço Hiperbólico

Diferente da definição de isometria utilizada no primeiro capítulo, neste capítulo faremos uma definição mais abrangente que a anterior. Aqui, não trataremos apenas de superfícies em \mathbb{R}^3 , mas sim de duas variedades Riemannianas quaisquer,

Dito isto, dadas duas variedades Riemannianas M_1 e M_2 , uma isometria $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ se trata de um difeomorfismo entre essas duas variedades que preserva a estrutura métrica de M_1 em M_2 , isto é, a seguinte igualdade será válida:

$$\langle u, v \rangle_p = \langle d\varphi(u), d\varphi(v) \rangle_{\varphi(p)}$$

para $u, v \in T_p M$.

Note que quando nos restringimos a superfícies em \mathbb{M}^3 , então retornamos à definição original feita no primeiro capítulo. A diferença essencial que é encontrada em ambas as definições está no fato de que as superfícies em \mathbb{M}^3 dependem da métrica do ambiente ao qual elas foram construídas. Quando generalizamos essa definição para variedades Riemannianas quaisquer, torna-se desnecessário que a variedade esteja imersa em um ambiente, como o \mathbb{R}^3 , ou \mathbb{L}^3 .

Dito isto, construiremos o espaço denominado *Semi-plano Hiperbólico* e mostraremos que esse espaço é isométrico a \mathbb{H}^2 .

O conjunto $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ munido da métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ que, para $p = (x, y) \in H$, a forma quadrática associada à métrica de H aplicada em p é da forma

$$ds_H^2(p) = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

Como $ds_H^2(p)$ é claramente uma forma bilinear simétrica positivo-definida, é verdade que mostrar que H é uma variedade diferenciável é suficiente para concluirmos que esse conjunto, juntamente com a métrica ds_H^2 , se trata de uma variedade Riemanniana. De fato, esse conjunto, por ser um subconjunto aberto de \mathbb{R}^2 , é claramente uma variedade topológica. Então, o nosso problema se reduz a exibir um atlas para o conjunto H .

Para tanto, basta observarmos que o par (\mathbb{R}^2, φ) , onde, φ é da forma

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow H \\ (x, y) &\mapsto (x, e^y), \end{aligned}$$

forma uma parametrização de H , e mais ainda, (\mathbb{R}^2, φ) cobre todo o conjunto H de forma biunívoca. Desta forma, observando que a aplicação φ é um difeomorfismo, concluímos que o conjunto $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}^2, \varphi)\}$ constitui um atlas para H , o que demonstra que de fato, (H, ds_H^2) se trata de uma variedade Riemanniana.

Agora provemos que H e \mathbb{H}^2 são isométricos, isto é, que existe uma isometria entre esses dois espaços. A aplicação que utilizaremos para demonstrar esse fato será $\varphi : \mathbb{H}^2 \rightarrow H$, dada da forma

$$\varphi(x, y, z) = \left(\frac{y}{x+z}, \frac{1}{x+z} \right).$$

Mostremos primeiramente que a aplicação F é uma bijeção. Para isso, tomando um ponto $p = (x, y, z)$ arbitrário de \mathbb{H}^2 , temos que os seus correspondentes pontos de H são (u, v) , dados da forma

$$u = \frac{y}{x+z} \quad e \quad v = \frac{1}{x+z}.$$

Observando as equações acima, fica evidente que dividindo u por v nós obtemos y , além disso, partindo da equação de v , também vale a igualdade

$$x = \frac{1}{v} - z.$$

Elevando os dois lados ao quadrado, temos

$$x^2 = \frac{1}{v^2} - 2\frac{z}{v} + z^2,$$

logo, usando o fato de que $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ e de que $y = u/v$, obtemos

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{1}{v^2} - 2\frac{z}{v} + x^2 + y^2 + 1 \\ \Leftrightarrow 2\frac{z}{v} &= \frac{1}{v^2} + \frac{u^2}{v^2} + \frac{v^2}{v^2} \\ \Leftrightarrow z &= \frac{1 + u^2 + v^2}{2v}. \end{aligned}$$

Logo, aplicando esta igualdade na equação

$$x = \frac{1}{v} - z,$$

obtemos o seguinte valor para x :

$$x = \frac{1 - (u^2 + v^2)}{2v}.$$

Por fim, como $p \in \mathbb{H}^2$ é arbitrário, segue que a função

$$G(u, v) = \left(\frac{1 - u^2 - v^2}{2v}, \frac{u}{v}, \frac{1 + u^2 + v^2}{2v} \right)$$

constitui uma aplicação inversa para F . Portanto, concluímos que F é uma bijeção. Mas não só isso. Como em ambas as aplicações as funções coordenadas são infinitamente diferenciáveis, então é verdade que F se trata de um difeomorfismo entre \mathbb{H}^2 e H .

Agora provaremos que F preserva a métrica de \mathbb{H}^2 . Para isso, lembremos que dada uma variedade qualquer M e seja X uma parametrização de uma vizinhança de M . Quando tomamos um ponto $p \in M$ parametrizado por X e $u, v \in T_p M$ e escrevermos tais vetores da forma

$$u = \sum_i u_i X_i \quad e \quad v = \sum_j v_j X_j$$

vemos que é válido afirmar que

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i,j} g_{ij} u_i v_j.$$

Como u e v são arbitrários, então concluímos que a métrica será dada apenas caracterizando g_{ij} . E é isso que faremos.

Utilizando a parametrização X de \mathbb{H}^2 dada da forma

$$X(r, \theta) = (\sinh(r)\cos(\theta), \sinh(r)\sin(\theta), \cosh(r)),$$

uma vez que seus vetores tangentes X_r, X_θ são da forma

$$\begin{aligned} X_r &= (\cosh(r)\cos(\theta), \cosh(r)\sin(\theta), \sinh(r)) \\ X_\theta &= (-\sinh(r)\sin(\theta), \sinh(r)\cos(\theta), 0), \end{aligned}$$

obtemos os seguintes valores para os coeficientes da métrica:

$$g_{rr} = 1, \quad g_{r\theta} = 0, \quad g_{\theta\theta} = \sinh^2(r).$$

Agora tomando a parametrização Y de H , dada por

$$Y(r, \theta) = (F \circ X)(r, \theta),$$

é suficiente provar que os coeficientes da métrica de H , os quais denotaremos por \tilde{g}_{ij} sejam iguais aos coeficientes da métrica com respeito à parametrização X , isto é, g_{ij} ¹⁹. Desta forma, fazendo a composição de F com X , chegamos na seguinte forma explícita de Y ;

$$Y(r, \theta) = \left(\frac{\sinh(r)\sin(\theta)}{\sinh(r)\cos(\theta) + \cosh(r)}, \frac{1}{\sinh(r)\cos(\theta) + \cosh(r)} \right),$$

Derivando Y com relação a r e a θ , obtemos

¹⁹De fato, o método aqui utilizado é utilizado para verificar se duas variedades são localmente isométricas, ao invés de isométricas. No entanto, se a variedade de entrada possuir um atlas composto por apenas uma parametrização, então esse resultado local pode ser considerado global.

$$Y_r = \left(\frac{\text{sen}\theta}{(\text{senh}(r)\cos(\theta) + \text{cosh}(r))^2}, \frac{-(\text{cosh}(r)\cos(\theta) + \text{senh}(r))}{(\text{senh}(r)\cos(\theta) + \text{cosh}(r))^2} \right),$$

$$Y_\theta = \left(\frac{\text{senh}(r)(\text{senh}(r) + \text{cosh}(r)\cos(\theta))}{(\text{senh}(r)\cos(\theta) + \text{cosh}(r))^2}, \frac{\text{senh}(r)\text{sen}(\theta)}{(\text{senh}(r)\cos(\theta) + \text{cosh}(r))^2} \right).$$

Com isso podemos calcular os coeficientes:

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{rr} &= \frac{(\text{cosh}(r)\cos(\theta) + \text{senh}(r))^2 + \text{sen}^2(\theta)}{(\text{senh}(r)\cos(\theta) + \text{cosh}(r))^2} \cdot (\text{senh}(r)\cos(\theta) + \text{cosh}(r))^2 \\ &= \frac{\text{cosh}^2(r)\cos^2(\theta) + 2\text{cosh}(r)\text{senh}(r)\cos(\theta) + \text{senh}^2(r) + \text{sen}^2(\theta)}{(\text{senh}(r)\cos(\theta) + \text{cosh}(r))^2} \end{aligned}$$

Aplicando em $\text{senh}^2(r)$ e $\text{sen}^2(\theta)$, respectivamente, as identidades

$$\begin{aligned} \text{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) &= 1 \\ \text{cosh}^2(r) - \text{senh}^2(r) &= 1, \end{aligned}$$

e expandindo os cálculos, obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{rr} &= \left[\text{cosh}^2(r)\cos^2(\theta) + 2\text{cosh}(r)\text{senh}(r)\cos(\theta) \right. \\ &\quad \left. + \text{senh}^2(r)(\text{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta)) + \text{sen}^2(\theta)(\text{cosh}^2(r) - \text{senh}^2(r)) \right] \\ &= \frac{1}{(\text{senh}(r)\cos(\theta) + \text{cosh}(r))^2} \\ &= \frac{(\text{senh}(r)\cos(\theta) + \text{cosh}(r))^2}{(\text{senh}(r)\cos(\theta) + \text{cosh}(r))^2} = 1. \end{aligned}$$

Partindo para $g_{r\theta}$, temos

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{r\theta} &= \left[\text{senh}^2(r)\text{sen}(\theta) + \text{senh}(r)\text{sen}(\theta)\text{cosh}(r)\cos(\theta) \right. \\ &\quad \left. - \text{senh}(r)\text{sen}(\theta)\text{cosh}(r)\cos(\theta) - \text{sen}^2(r)\text{sen}(\theta) \right] \\ &= \frac{1}{(\text{senh}(r)\cos(\theta) + \text{cosh}(r))^2} = 0 \end{aligned}$$

E por fim, temos que

$$\begin{aligned}
\tilde{g}_{\theta\theta} &= \frac{\sinh^2(r)(\cosh(r)\cos(\theta) + \sinh(r)) + \sinh^2(r)\sin^2(\theta)}{(\sinh(r)\cos(\theta) + \cosh(r))^2} \\
&= \frac{\sinh^2(r)((\cosh(r) + \sinh(r))^2 + \sin^2(\theta))}{(\sinh(r)\cos(\theta) + \cosh(r))^2} \\
&= \frac{\sinh^2(r)(\sinh(r)\cos(\theta) + \cosh(r))^2}{(\sinh(r)\cos(\theta) + \cosh(r))^2} = \sinh^2(r).
\end{aligned}$$

Nas duas últimas linhas da equação foi utilizada a mesma igualdade calculada em \tilde{g}_{rr} .

Assim, concluímos que H e \mathbb{H}^2 são isométricos. Com essa demonstração, adotaremos a notação \mathbb{H}^2 para representar o semiplano H a partir de agora. O espaço $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2$ será, portanto definido como o conjunto

$$\{(t, x, y) | t \in \mathbb{R} \text{ e } (x, y) \in \mathbb{H}^2\}$$

munido da métrica

$$ds_{\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2}^2 = dt^2 + \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

Na próxima seção, exploraremos algumas propriedades das superfícies imersas nesse novo ambiente que construímos.

4.2 Curvaturas média e de Gauss-Kronecker em $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2$

Uma vez que construímos o espaço $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2$, vamos agora apresentar alguns exemplos de curvatura de Gauss-Kronecker e média de superfícies. Para isso, vamos apresentar de forma explícita os cálculos da aplicação normal e das componentes da segunda forma fundamental.

Vale ressaltar que para diferenciar da curvatura Gaussiana, denotaremos a curvatura de Gauss-Kronecker a partir de agora por \hat{K} . Essa distinção é importante neste momento, pois, como será visto na próxima seção, nesse ambiente esses dois conceitos são coisas distintas, diferente do que acontece em \mathbb{R}^3 .

Seja

$$p = (t, x, y)$$

um ponto de $M \in \mathbb{R} \times \mathbb{H}^2$ e seja X uma parametrização de M em uma vizinhança de p . Deste modo, uma vez que

$$X(u, v) = (t(u, v), x(u, v), y(u, v)),$$

obtemos

$$\begin{cases} X_u = (t_u, x_u, y_u) \\ X_v = (t_v, x_v, y_v) \end{cases}. \quad (28)$$

Deste modo, os coeficientes da primeira forma fundamental são escritos da forma

$$E = t_u^2 + \frac{x_u^2 + y_u^2}{y^2}, \quad F = t_u t_v + \frac{x_u x_v + y_u y_v}{y^2}, \quad G = t_v^2 + \frac{x_v^2 + y_v^2}{y^2}. \quad (29)$$

Com isso, também obtemos a expressão do determinante $EG - F^2$, que será da forma

$$EG - F^2 = \frac{1}{y^4} ((x_u y_v - y_u x_v)^2 + y^2 (y_u t_v - t_u y_v)^2 + y^2 (t_u x_v - x_u t_v)^2). \quad (30)$$

Para calcular a expressão da aplicação normal, é necessário obtermos uma base ortonormal para o nosso ambiente. Isto se dá pois a métrica utilizada não preserva a ortonormalidade da base canônica $\{\partial_t, \partial_x, \partial_y\}$. De fato, $\partial_t = (1, 0, 0)$ ainda permanece normal, no entanto, uma rápida verificação nos mostra que

$$\|\partial_x\| = \frac{1}{y} = \|\partial_y\|,$$

onde $\partial_x = (0, 1, 0)$ e $\partial_y = (0, 0, 1)$. Isso nos induz a escolher uma nova base que seja ortonormal para que possamos calcular o produto vetorial entre X_u e X_v . E ela será da forma

$$\begin{aligned} e_t &= \partial_t, \\ e_x &= y\partial_x \\ e_y &= y\partial_y. \end{aligned}$$

Com isso, mudamos os vetores X_u e X_v para essa nova base ortonormal e obtemos

$$\begin{aligned} X_u &= t_u e_t + \frac{x_u}{y} e_x + \frac{y_u}{y} e_y, \\ X_v &= t_v e_t + \frac{x_v}{y} e_x + \frac{y_v}{y} e_y. \end{aligned}$$

Deste modo, o produto vetorial será da forma

$$N = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|},$$

onde

$$X_u \times X_v = \begin{pmatrix} e_t & e_x & e_y \\ t_u & x_u/y & y_u/y \\ t_v & x_v/y & y_v/y \end{pmatrix},$$

Assim, definindo os termos

$$\begin{aligned} N_1 &= x_u y_v - x_v y_u, \\ N_2 &= y_u t_v - y_v t_u, \\ N_3 &= t_u x_v - t_v x_u, \end{aligned} \quad (31)$$

Obtemos

$$\begin{aligned} X_u \times X_v &= \frac{N_1}{y^2} e_t + \frac{N_2}{y} e_x + \frac{N_3}{y} e_y \\ &= \frac{N_1}{y^2} \partial_t + N_2 \partial_x + N_3 \partial_y \end{aligned}$$

E disso, segue que

$$\|X_u \times X_v\| = \frac{\sqrt{N_1 + y^2(N_2^2 + N_3^2)}}{y^2} = \sqrt{EG - F^2}.$$

Com o objetivo de simplificar a notação na hora dos cálculos, denotaremos $\sqrt{N_1^2 + y^2(N_2^2 + N_3^2)}$ por W .

Daí, segue que N será da forma

$$N = \frac{(N_1, y^2 N_2, y^2 N_3)}{W} \quad (32)$$

Por fim, diferentemente do cálculo dos coeficientes da segunda forma fundamental em \mathbb{R}^3 , onde utilizamos as derivadas segundas de X , isto é, X_{uu} , X_{uv} e X_{vv} , aqui utilizaremos a conexão do ambiente, de modo que obtemos:

$$e = \langle N, \bar{\nabla}_{X_u} X_u \rangle, \quad f = \langle N, \bar{\nabla}_{X_u} X_v \rangle, \quad g = \langle N, \bar{\nabla}_{X_v} X_v \rangle,$$

onde diferenciamos a conexão do ambiente, $\bar{\nabla}$, com a conexão das superfícies imersas nele, ∇ , e, com isso, por (24) e (25), os símbolos de Christoffel e as conexões ficam da forma

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^2 = -\frac{1}{y} = -\Gamma_{11}^2 \quad e$$

$$\bar{\nabla}_{X_u} X_u = \left(t_{uu}, x_{uu} - \frac{2x_u y_u}{y}, y_{uu} + \frac{x_u^2 - y_u^2}{y} \right)$$

$$\bar{\nabla}_{X_u} X_v = \left(t_{uv}, x_{uv} - \frac{x_v y_u + x_u y_v}{y}, y_{uv} + \frac{x_u x_v - y_u y_v}{y} \right)$$

$$\bar{\nabla}_{X_v} X_v = \left(t_{vv}, x_{vv} - \frac{2x_v y_v}{y}, y_{vv} + \frac{x_v^2 - y_v^2}{y} \right)$$

poderemos com essas fórmulas calcular as curvaturas Gaussiana e média das superfícies de $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2$.

É importante notar que as fórmulas obtidas no primeiro capítulo para calcular as curvaturas média e de Gauss-Kronecker também se aplicam em $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2$. Na verdade, essas expressões são válidas em qualquer ambiente tridimensional \mathbb{M}^3 , pois, em sua construção, não utilizamos especificamente a métrica de \mathbb{R}^3 . Com essa observação, podemos proceder ao cálculo de \hat{K} e H utilizando essas mesmas fórmulas. Formalmente, este resultado é dado pela seguinte proposição:

Proposição 4.1. *As curvaturas média e de Gauss-Kronecker de uma superfície $M \subset \mathbb{M}^3$, são dadas da forma*

$$\hat{K} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \quad e \quad H = \frac{1}{2} \frac{Eg + eG - 2fF}{EG - F^2}. \quad (33)$$

Demonstração. De fato, percebamos que, além de estarmos em um conjunto com uma métrica distinta da euclidiana, o que diferencia o caso do \mathbb{R}^3 com esse mais geral é a definição de segunda forma fundamental, que é dada da forma²⁰

$$\text{II}(X) = -\langle \bar{\nabla}_X N, X \rangle$$

Donde, para qualquer campo de vetores X essa aplicação pode ser decomposta em termos

$$\begin{aligned} e &= -\langle \bar{\nabla}_{X_u} N, X_u \rangle = \langle N, \bar{\nabla}_{X_u} X_u \rangle, \\ f &= -\langle \bar{\nabla}_{X_u} N, X_v \rangle = \langle N, \bar{\nabla}_{X_u} X_v \rangle, \\ g &= -\langle \bar{\nabla}_{X_v} N, X_v \rangle = \langle N, \bar{\nabla}_{X_v} X_v \rangle \end{aligned}$$

E uma vez que

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{X_u} N &= a_{11}X_u + a_{12}X_v + a_{13}N \\ \bar{\nabla}_{X_v} N &= a_{21}X_u + a_{22}X_v + a_{23}N \end{aligned}$$

temos que

$$\begin{aligned} -e &= \langle \bar{\nabla}_{X_u} N, X_u \rangle = a_{11}E + a_{21}F, \\ -f &= \langle \bar{\nabla}_{X_u} N, X_v \rangle = a_{11}F + a_{21}G, \\ -f &= \langle \bar{\nabla}_{X_v} N, X_u \rangle = a_{12}E + a_{22}F, \\ -g &= \langle \bar{\nabla}_{X_v} N, X_v \rangle = a_{12}F + a_{22}G, \end{aligned}$$

E com issom obtemos o mesmo sistema apresentado no primeiro capítulo.

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}$$

E desenvolvendo esse sistema de forma análoga ao que foi feito no primeiro capítulo, chegamos ao resultado que queríamos. \square

Agora vamos reproduzir os exemplos vistos no capítulo 1 neste ambiente a fim de perceber as diferenças que a mudança da métrica nos dá.

Exemplos:

²⁰Ver capítulo VI de [4]

1. Seja $h : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, uma função de classe C^k . Definimos o *gráfico* de h como sendo a parametrização da forma

$$X(u, v) = (h(u, v), u, v).$$

Calcularemos agora as curvaturas média e de Gauss-Kronecker da superfície parametrizada por X .

Calculando X_u e X_v , obtemos

$$\begin{cases} X_u = (h_u, 1, 0) \\ X_v = (h_v, 0, 1), \end{cases}$$

donde, obtemos para os termos da primeira forma fundamental

$$E = h_u^2 + \frac{1}{v^2}, \quad F = h_u h_v, \quad G = h_v^2 + \frac{1}{v^2}.$$

Além disso, podemos calcular o vetor normal, uma vez que sabemos que

$$\begin{aligned} N_1 &= 1, \\ N_2 &= -h_u \quad e \\ N_3 &= -h_v \end{aligned}$$

Temos que

$$W = \sqrt{1 + v^2(h_u^2 + h_v^2)} \quad e \quad N = \frac{(1, -v^2 h_u, -v^2 h_v)}{W}$$

Assim, calculando aos temos $\bar{\nabla}_{X_i} X_j$, $i, j = u, v$, obtemos

$$\bar{\nabla}_{X_u} X_u = \left(h_{uu}, 0, \frac{1}{v} \right),$$

$$\bar{\nabla}_{X_u} X_v = \left(h_{uv}, -\frac{1}{v}, 0 \right),$$

$$\bar{\nabla}_{X_v} X_u = \left(h_{vu}, 0, -\frac{1}{v} \right).$$

Por fim, tendo calculado esses objetos, podemos calcular finalmente os coeficientes da segunda forma fundamental, que serão

$$e = \frac{1}{W} \left(h_{uu} - \frac{h_v}{v} \right), \quad f = \frac{1}{W} \left(h_{uv} + \frac{h_u}{v} \right) \quad g = \frac{1}{W} \left(h_{vv} + \frac{h_v}{v} \right).$$

e chegamos, portanto, nos seguintes resultados para as curvaturas de Gauss-Kronecker e Média:

$$\hat{K} = \frac{v^4(h_{uu}h_{vv} - h_{uv}^2) + v^3(h_v(h_{uu} - h_{vv}) - 2h_{uv}h_u) - v^2(h_u^2 + h_v^2)}{(1 + v^2(h_u^2 + h_v^2))^2},$$

$$H = \frac{v^4(h_{uu}h_v^2 - h_{uv}h_uh_v + h_{vv}h_u^2) - v^3(h_u^2h_v + h_v^3) + v^2(h_{uu} + h_{vv})}{(1 + v^2(h_u^2 + h_v^2))^{3/2}}.$$

2. Agora seja $\alpha(t) = (t, \psi(t))$ uma curva regular parametrizada em \mathbb{H}^2 , com $\psi(t) > 0$. A partir de agora, calcularemos as curvaturas de Gauss-Kronecker e média de $X(u, v) = (\psi(u), u \cos(v), u \sin(v))$ ²¹. Observemos, neste caso, que o parâmetro v , não pode nesta ocasião dar uma revolução completa de 2π , pois a última componente de X está restrita a ser apenas positiva, portanto a nossa revolução será apenas no intervalo $(0, \pi)$ para v , como é possível ver na imagem abaixo.

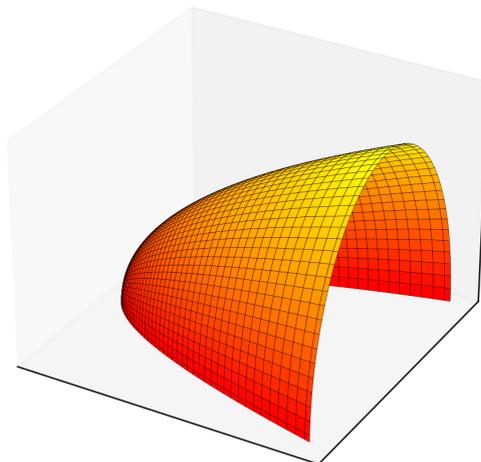


Figura 8: Revolução da curva $\alpha(t) = (t, t^2)$ ao longo do eixo real de $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2$

Temos, desse modo

$$\begin{cases} X_u = (\psi', \cos(v), \sin(v)) \\ X_v = (\psi, -u \sin(v), u \cos(v)). \end{cases}$$

Os coeficientes da primeira forma fundamental são da forma

$$E = (\psi')^2 + \frac{1}{u^2 \sin^2(v)}, \quad F = 0, \quad G = \frac{1}{\sin^2(v)},$$

²¹Nesta seção optamos por omitir o parâmetro u das equações

e uma vez que N_1, N_2 e N_3 são dados por

$$N_1 = u, \quad N_2 = -u\psi' \cos(v), \quad N_3 = -u\psi' \operatorname{sen}(v), \quad (34)$$

podemos definir W e N da forma

$$W = u\sqrt{1 + (\psi')^2 u^2 \operatorname{sen}^2(v)}, \quad N = \frac{(1, -\psi' u^2 \operatorname{sen}^2(v) \cos(v), -\psi' u^2 \operatorname{sen}^3(v))}{\sqrt{1 + (\psi')^2 u^2 \operatorname{sen}^2(v)}},$$

Além disso, também podemos calcular $EG - F^2$, que será da forma

$$EG - F^2 = \frac{1 + u^2(\psi')^2 \operatorname{sen}^2(v)}{u^2 \operatorname{sen}^4(v)}$$

Agora, uma vez que as conexões $\bar{\nabla}_{X_i} X_j$ são da forma

$$\bar{\nabla}_{X_u} X_u = \left(\psi'', -\frac{2\cos(v)\operatorname{sen}(v)}{u\operatorname{sen}(v)}, \frac{\cos^2(v) - \operatorname{sen}^2(v)}{u\operatorname{sen}(v)} \right)$$

$$\bar{\nabla}_{X_u} X_v = \left(0, -\operatorname{sen}(v) - \frac{u(\cos^2(v) - \operatorname{sen}^2(v))}{u\operatorname{sen}(v)}, \cos(v) - \frac{2(u\operatorname{sen}(v)\cos(v))}{u\operatorname{sen}(v)} \right)$$

$$\bar{\nabla}_{X_v} X_v = \left(0, -u\cos(v) + \frac{2u^2 \operatorname{sen}(v)\cos(v)}{u\operatorname{sen}(v)}, -u\operatorname{sen}(v) + \frac{u^2(\operatorname{sen}^2(v) - \cos^2(v))}{u\operatorname{sen}(v)} \right)$$

Então podemos, deste modo, calcular e, f e g , que serão

$$\begin{aligned} e &= (u\psi'' + \psi') \frac{1}{W} \\ f &= u\psi' \cos(v) \left(\frac{\cos^2(v) + \operatorname{sen}^2(v)(2\cos(v) - 1)}{\operatorname{sen}(v)} \right) \frac{1}{W} \\ g &= 0. \end{aligned}$$

Deste modo, como, F e g são nulos, as curvaturas serão expressas da forma

$$\hat{K} = \frac{-f^2}{EG}, \quad H = \frac{1}{2} \frac{e}{E}.$$

Fazendo esses cálculos, obtemos

$$\hat{K} = -\frac{(\psi')^2 \cos^2(v) (\cos^2(v) + \operatorname{sen}^2(v)(2\cos(v) - 1))^2}{(1 + (\psi')^2 u^2 \operatorname{sen}^2(v))^2}$$

$$H = \frac{u^2 \operatorname{sen}^2(v) (\psi'' + \psi')}{(u^2 \operatorname{sen}^2(v) (\psi')^2 + 1)^{3/2}}$$

Observação 4.2. *Perceba que, neste caso, não utilizamos uma curva parametrizada por comprimento de arco. Isso se deve ao fato de que a métrica do ambiente não permite que as mesmas simplificações feitas em \mathbb{R}^3 sejam realizadas aqui. Assim, nos restringimos ao caso em que a curva é o gráfico de uma função. Embora essa classe de curvas seja, de fato, mais restrita, trata-se de um exemplo mais simples que optamos por apresentar.*

E assim, obtemos os mesmos exemplos de curvatura média e de Gauss-Kronecker calculados em \mathbb{R}^3 , só que desta vez, visto em $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2$. Fica claro aqui a importância da métrica Riemanniana para uma variedade. E esta diferença fica muito clara no exemplo 2, onde o fato da curva ser parametrizada por comprimento de arco não nos ajuda muito na simplificação das curvaturas desse ambiente.

Com isso, seguimos para a próxima seção, onde calcularemos outra curvatura desse ambiente, a qual definiremos como a verdadeira curvatura de Gauss, uma vez que ela será intrínseca à superfície.

4.3 Curvatura Gaussiana em $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2$

Diferente do que foi visto em \mathbb{R}^3 , a curvatura de *Gauss-Kronecker* de uma superfície em $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2$ não se trata de um ente localmente intrínseco das superfícies regulares desse ambiente. Podemos notar isso observando que o cálculo dessas curvaturas depende em diversas ocasiões da conexão do ambiente, que, por sua vez, é extrínseca à superfície.

Dessa forma, nesta seção, desenvolveremos a curvatura *Gaussiana* nesse contexto, baseando-nos em uma formulação generalizada do *Theorema Egregium* de Gauss. Essa construção envolverá tanto a demonstração desse teorema quanto a apresentação da *fórmula de Gauss*, fundamentais para a caracterização da curvatura intrínseca nesse ambiente.

Com isso, uma vez que, para uma dada superfície M e uma parametrização X de M , o conjunto $\{X_u, X_v, N\}$ é linearmente independente em $T_p(\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2)$, segue que ele formará uma base para o espaço tangente do ambiente. Com isso, podemos representar todas as derivadas covariantes de X_u e X_v como combinação linear dessa base.

Obtemos, portanto

$$\begin{aligned}\nabla_{X_u} X_u &= \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + L_1 N, \\ \nabla_{X_v} X_u &= \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + L_2 N, \\ \nabla_{X_v} X_v &= \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + L_3 N,\end{aligned}\tag{35}$$

onde Γ_{ij}^k são os *Símbolos de Christoffel* de M . Não é difícil verificar que esses símbolos são localmente intrínsecos a M . Vale observar que os símbolos de Christoffel já foram introduzidos no capítulo anterior, mas aqueles, no entanto, se tratam dos símbolos que caracterizam a conexão do ambiente. No contexto atual, no entanto, trabalhamos com os símbolos de Christoffel da superfície, que é proveniente da própria conexão de M .

Se observarmos as igualdades

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_{X_u} X_u, X_u \rangle &= \frac{1}{2} E_u, \\
\langle \nabla_{X_u} X_u, X_v \rangle &= F_u - \frac{1}{2} E_v, \\
\langle \nabla_{X_v} X_u, X_u \rangle &= \frac{1}{2} E_v, \\
\langle \nabla_{X_v} X_u, X_v \rangle &= \frac{1}{2} G_u, \\
\langle \nabla_{X_v} X_v, X_u \rangle &= F_v - \frac{1}{2} G_u, \\
\langle \nabla_{X_v} X_v, X_v \rangle &= \frac{1}{2} G_v,
\end{aligned} \tag{36}$$

e que X_u e X_v são ortogonais a N , aplicando (35) em (36) obtemos os seguintes sistemas:

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \frac{1}{2} E_u \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = F_u - \frac{1}{2} E_v \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \frac{1}{2} E_v \\ \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = \frac{1}{2} G_u \end{cases} \tag{37}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = F_v - \frac{1}{2} G_u \\ \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G = \frac{1}{2} G_v \end{cases}$$

Como a determinante da matriz de coeficiente dos três sistemas é igual a $EG - F^2 \neq 0$, então todos eles possuem solução única. Além disso, a própria forma como os sistemas foram caracterizados nos revela que as soluções para os símbolos de Christoffel aparecerão em termos de E , F , G e de suas derivadas primeiras, o que, portanto, revela que esses símbolos são intrínsecos à métrica de M , como queríamos mostrar.

O objetivo desses cálculos é determinar a curvatura seccional \bar{K} da seção plana gerada pelos vetores X_u e X_v e compará-la com a curvatura de Gauss-Kronecker \hat{K} , dada pela expressão

$$\hat{K} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}.$$

Notamos que, enquanto a curvatura seccional de qualquer seção plana em \mathbb{R}^3 é sempre nula, em $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2$ obtemos um comportamento distinto. Diante dessa diferença, conduziremos

uma investigação para caracterizar essa curvatura, que, assim como a de Gauss-Kronecker, é extrínseca. Nosso objetivo será obter, a partir dessa análise, um ente intrínseco.

Com isso, a partir da expressão

$$\bar{K}(X_u, X_v) = \frac{\langle R(X_u, X_v)X_u, X_v \rangle}{EG - F^2},$$

onde

$$R(X_u, X_v)X_u = \bar{\nabla}_{X_u}\bar{\nabla}_{X_v}X_u - \bar{\nabla}_{X_v}\bar{\nabla}_{X_u}X_u, \quad (38)$$

obtemos, aplicando (35) na expressão acima, que essa curvatura Riemanniana é dada por

$$\begin{aligned} R(X_u, X_v)X_u = & \bar{\nabla}_{X_u}(\Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + L_2 N) \\ & - \bar{\nabla}_{X_v}(\Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + L_1 N), \end{aligned} \quad (39)$$

onde $\bar{\nabla}$ se trata da conexão do ambiente, a qual diferenciamos de ∇ , vista como a conexão da superfície em si.

Deste modo, uma vez que X_v é tangente à M , quando fazemos o produto interno a parte normal de $\bar{\nabla}$ se anula, e desse modo podemos substituir por ∇ . Portanto, ao aplicar a regra de Leibniz em (39) e aplicando na expressão da curvatura seccional, obtemos

$$\begin{aligned} \bar{K}(X_u, X_v) = & \frac{1}{EG - F^2} \left[\langle (\Gamma_{12}^1)_u X_u + \Gamma_{12}^1 \nabla_{X_u} X_u \right. \\ & + (\Gamma_{12}^2)_u X_v + \Gamma_{12}^2 \nabla_{X_u} X_v + (L_2)_u N + L_2 \nabla_{X_u} N, X_v \rangle \\ & - \langle (\Gamma_{11}^1)_v X_u + \Gamma_{11}^1 \nabla_{X_u} X_v + (\Gamma_{11}^2)_v X_v + \Gamma_{11}^2 \nabla_{X_v} X_v \\ & \left. + (L_1)_v N + L_2 \nabla_{X_v} N, X_v \rangle \right]. \end{aligned}$$

Além disso, ao fazer o produto interno dos dois primeiros campos descritos em (35) com N , a parte tangente se anula e obtemos as expressões

$$\begin{aligned} \langle \bar{\nabla}_{X_u} X_u, N \rangle &= L_1 \\ \langle \bar{\nabla}_{X_v} X_u, N \rangle &= L_2, \end{aligned}$$

donde, as expressões da esquerda se tratam, respectivamente, de e e f . Deste modo, obtemos

$$\begin{aligned} L_1 &= e \\ L_2 &= f. \end{aligned}$$

Portanto, unindo essa igualdade e as identidades apresentadas nas equações (36) na expressão expandida de \bar{K} , obtemos, em termos dos coeficientes da primeira e segunda forma fundamental

a expressão completa da curvatura seccional, que é dada por:

$$\begin{aligned} \bar{K}(X_u, X_v) = \frac{1}{EG - F^2} \left[-(eg - f^2) + ((\Gamma_{12}^1)_u - (\Gamma_{11}^1)_v)F + ((\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v)G \right. \\ \left. + \frac{1}{2}G_u(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) + (F_u - \frac{1}{2}E_v)\Gamma_{12}^1 - \frac{1}{2}G_v\Gamma_{11}^2 \right]. \end{aligned} \quad (40)$$

Agora note que, uma vez que os símbolos de Christoffel são entes intrínsecos a M , o único termo de \bar{K} que depende do ambiente se trata da expressão $\frac{-(eg-f^2)}{EG-F^2}$ destacada. Isto implica que a soma da curvatura seccional com a curvatura de Gauss-Kronecker resulte em um objeto completamente intrínseco à superfície.

Esse objeto recupera em ambientes mais gerais a ideia de *Curvatura Gaussiana* vista no primeiro capítulo deste texto.

De fato, ao analisar os cálculos realizados até o momento, observa-se que em nenhum instante foi utilizada uma propriedade específica da métrica de $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2$. Isso nos permite concluir que esses resultados são válidos para qualquer ambiente. Além disso, quando esse ambiente é \mathbb{R}^3 , sabemos que a curvatura seccional \bar{K} é sempre nula, o que implica que a curvatura de Gauss-Kronecker coincide com a curvatura intrínseca da superfície.

Com tudo isso, nós enunciamos o *Theorema Egregium* de forma completa.

Teorema 4.1. (*Theorema Egregium generalizado*). *Sejam M uma superfície em \mathbb{M}^3 e X uma parametrização local de M . Então a curvatura Gaussiana de M , denotada por K é expressa localmente pela fórmula de Gauss, dada por*

$$K = \hat{K} + \bar{K}. \quad (41)$$

Corolário 4.3. *Se para uma parametrização X de $M \subset \mathbb{M}^3$, caso a componente F da primeira forma fundamental seja nula, temos a seguinte versão da fórmula de Gauss:*

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right\} \quad (42)$$

Demonstração. Basta perceber que os sistemas vistos em (37) estão diagonalizados. Com isso, obtemos de forma direta a expressão dos símbolos de Christoffel, e ao substituir em (40), obtemos esta fórmula. \square

Após a apresentação do teorema, procederemos ao cálculo da curvatura Gaussiana em $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2$. No entanto, antes de iniciarmos essa análise, demonstraremos rapidamente que, como consequência quase imediata da construção dos símbolos de Christoffel, as geodésicas são entes localmente intrínsecos às superfícies em \mathbb{M}^3 .

De fato, sejam M uma superfície em \mathbb{M}^3 , X uma parametrização local de M , e $\gamma : I \rightarrow M$ da forma $\gamma(t) = X(u(t), v(t))$ uma geodésica de M . Sabemos que o campo de vetores γ' ao longo de γ pode ser escrito como

$$\gamma'(t) = u'(t)X_u + v'(t)X_v.$$

E portanto, derivando com respeito a t novamente, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\gamma'(t) &= u''(t)X_u + u'(t)(u'\nabla_{X_u}X_u + v'\nabla_{X_v}X_u) \\ &\quad + v''(t)X_v + v'(t)(u'\nabla_{X_u}X_v + v'\nabla_{X_v}X_v). \end{aligned}$$

Aplicando as equações descritas em (35) e eliminando as componentes normais para obtermos a derivada covariante, chegamos à seguinte equação:

$$\begin{aligned} \frac{D}{dt}\gamma'(t) &= (u'' + \Gamma_{11}^1(u')^2 + 2\Gamma_{12}^1u'v' + \Gamma_{22}^1(v')^2)X_u \\ &\quad + (v'' + \Gamma_{11}^2(u')^2 + 2\Gamma_{12}^2u'v' + \Gamma_{22}^2(v')^2)X_v \\ &= 0, \end{aligned}$$

que pode ser escrita como um sistema de equações diferenciais de segunda ordem, da forma

$$\begin{cases} u'' + \Gamma_{11}^1(u')^2 + 2\Gamma_{12}^1u'v' + \Gamma_{22}^1(v')^2 = 0, \\ v'' + \Gamma_{11}^2(u')^2 + 2\Gamma_{12}^2u'v' + \Gamma_{22}^2(v')^2 = 0. \end{cases} \quad (43)$$

Note que uma curva é uma geodésica na imagem de uma parametrização X de M se e somente se ela satisfaz o sistema de equações diferenciais descrito em (43). Desta forma, além desse sistema nos dar uma caracterização local das geodésicas em uma parametrização de M , ela também nos revela que essa caracterização depende apenas dos símbolos de Christoffel, que, por sua vez, são intrínsecos à M . Esta observação é suficiente para concluirmos que as geodésicas são invariantes por isometrias locais, como queríamos provar.

Por fim, calcularemos a curvatura Gaussiana de uma superfície Σ em $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2$ dada da forma

$$\Sigma = \{(t, x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{H}^2 \mid t = a \ln(y)\},$$

aonde a é um número real fixado. Mostraremos que Σ possui curvatura Gaussiana constante negativa. E para isso, utilizaremos a equação de Gauss,

$$K = \bar{K} + \hat{K}.$$

Tomando a função $h : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$h(u, v) = a \ln(v),$$

parametrizaremos Σ por um gráfico de função. Isto é, tomamos

$$X(u, v) = (a \ln(v), u, v).$$

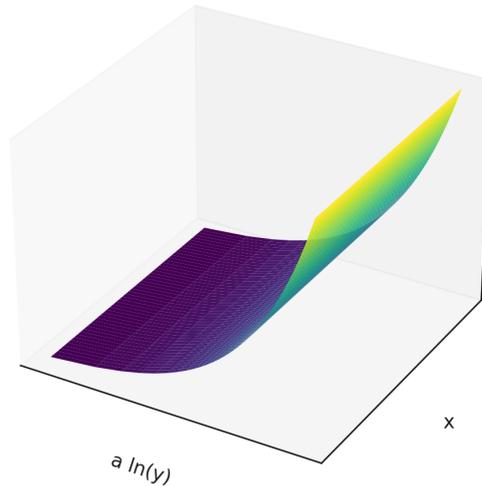


Figura 9: Gráfico de Σ

Observemos que no espaço euclidiano, uma superfície definida da mesma forma, porém com a métrica induzida do \mathbb{R}^3 , terá, pela fórmula conseguida no primeiro capítulo deste documento, curvatura Gaussiana $K = 0$.

Note também que pela fórmula da curvatura de Gaus-Kronecker para gráfico de funções construída neste capítulo, \hat{K} também irá se anular. Portanto, para calcularmos a curvatura intrínseca de Σ em $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2$, Basta calcularmos a curvatura seccional do ambiente em um plano tangente arbitrário dessa superfície.

Começemos calculando os coeficientes da primeira forma fundamental de X . Sabendo que

$$X_u = (0, 1, 0), e$$

$$X_v = \left(\frac{a}{v}, 0, 1\right),$$

obtemos

$$E = \frac{1}{v^2}, \quad F = 0, \quad G = \frac{a^2 + 1}{v^2}.$$

Desta forma, o valor de $EG - F^2$ será $(a^2 + 1)/v^4$.

Agora, para calcular os valores dos símbolos de Christoffel, precisamos derivar os coeficientes

da primeira forma fundamental da parametrização X com respeito a u e a v . Com isso, obtemos

$$\begin{cases} E_u = 0, \\ E_v = -\frac{2}{v^3} \\ F_u = F_v = 0 \\ G_u = 0 \\ G_v = -\frac{2(a^2+1)}{v^3} \end{cases}$$

Observando que nesse caso $F = 0$ e aplicando esses valores na equação (42), chegamos na seguinte equação

$$\begin{aligned} K &= -\frac{v^2}{2\sqrt{a^2+1}} \left\{ \left(\frac{-2v^2}{v^3\sqrt{a^2+1}} \right)_v + 0 \right\} \\ &= \frac{v^2}{(a^2+1)} \left(\frac{1}{v} \right)_v \\ &= -\frac{v^2}{(a^2+1)} \left(\frac{1}{v^2} \right) = \frac{-1}{(a^2+1)}. \end{aligned}$$

Daí, concluímos que a curvatura Gaussiana de Σ é constante e não nula, diferentemente de sua curvatura de Gauss-Kronecker. Uma observação interessante é que Σ , quando imerso em $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2$, trata-se de uma pseudoesfera, enquanto essa mesma superfície no espaço Euclidiano é isométrica a um plano. Isso nos revela o quanto o ambiente em que uma variedade está imersa influencia no seu comportamento. Resultados posteriores garantem que o fato da curvatura Gaussiana de Σ ser constante negativa implica que essa superfície será homotética ao espaço hiperbólico. No entanto, tal resultado exige um aprofundamento maior na geometria Riemanniana, o que foge do escopo deste texto. ²²

A curvatura média desta superfície Σ é dada por

$$\frac{a}{2\sqrt{1+a^2}}$$

Esta fórmula aparece em [5], mas fazemos o cálculo aqui por completude.

Calculando os coeficientes da segunda forma, como visto no primeiro exemplo da seção anterior, obtemos

$$e = \frac{a}{v^2\sqrt{1+a^2}} \quad \text{e} \quad f = g = 0.$$

Como neste caso F , f e g são nulos a fórmula da curvatura média é dada por

$$H = \frac{1}{2} \frac{e}{E} = \frac{1}{2} \frac{\frac{a}{v^2\sqrt{1+a^2}}}{\frac{1}{v^2}} = -\frac{1}{2} \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}.$$

²²O resultado aqui citado trata de uma consequência do teorema 6.5 de [4].

Referências Bibliográficas

- [1] CANNON, James W. Non-Euclidean Geometry and Curvature. American Mathematical Soc., 2017.
- [2] COUTO, Ivo Terek; LYMBEROPOULOS, Alexandre. Introdução a geometria Lorentziana: curvas e superfícies. 2018.
- [3] DO CARMO, Manfredo Perdigão. Geometria diferencial de curvas e superfícies. Sociedade Brasileira de Matemática, 2010.
- [4] DO CARMO, Manfredo Perdigao; FLAHERTY FRANCIS, J. Riemannian geometry. Boston: Birkhäuser, 1992.
- [5] LIMA, Henrique F., LIMA, Eraldo A., PARENTE, Ulisses L. , Hypersurfaces with prescribed angle function, Pacific Journal of Mathematics 269 (2014) 393–406.
- [6] LÓPEZ, Rafael. Differential geometry of curves and surfaces in Lorentz-Minkowski space. International electronic journal of geometry, v. 7, n. 1, p. 44-107, 2014.
- [7] O'NEILL, Barrett. Semi-Riemannian geometry with applications to relativity. Academic press, 1983.