



**UFPB**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

# **Medidas de caos em sinais de ECG e classificação de ritmos cardíacos por meio de aprendizado de máquina**

**José Hugo Alves Mascena**

**João Pessoa - PB**

2024

**José Hugo Alves Mascena**

**Medidas de caos em sinais de ECG e  
classificação de ritmos cardíacos por meio  
de aprendizado de máquina**

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Física**

**Orientador:** Prof. Dr. Jorge Gabriel Gomes de Souza Ramos.

**João Pessoa - PB**

2024



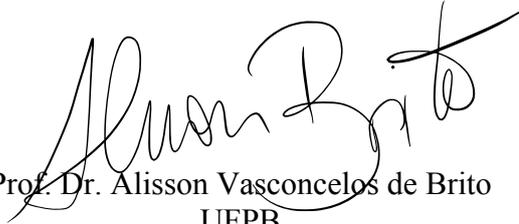
Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
**Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Física**

Ata da Sessão Pública da Defesa de dissertação de **Mestrado** do aluno **José Hugo Alves Mascena**, candidato ao Título de Mestre em Física na Área de Concentração Física da Matéria Condensada.

Aos vinte e sete dias do mês de fevereiro do ano de dois mil e vinte e quatro, às 14h00, na sala virtual <https://meet.google.com/rux-aady-ose>, reuniram-se os membros da Banca Examinadora constituída para avaliar a dissertação de Mestrado, na área de Física da Matéria Condensada, de **José Hugo Alves Mascena**. A banca foi composta pelos(as) professores(as) doutores(as): Jorge Gabriel Gomes de Souza Ramos (UFPB), orientador e presidente da banca examinadora, Fábio Leal de Melo Dahia (UFPB) e Alisson Vasconcelos de Brito (UFPB). Dando início aos trabalhos, o Prof. Jorge Gabriel Gomes de Souza Ramos comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a palavra para o candidato para que o mesmo fizesse, oralmente, a exposição da pesquisa de dissertação intitulada “*Medidas de Caos em Sinais de ECG e Classificação de Ritmos Cardíacos por Meio de Aprendizado de Máquina*”. Concluída a exposição, o candidato foi arguido pela Banca Examinadora, que emitiu o parecer “**aprovado**”. Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba expedir o respectivo diploma de Mestre em Física na forma da lei. E para constar, Danilo Wilson Lemos Menezes, Técnico em Assuntos Educacionais, redigiu a presente ata que vai assinada pelos membros da Banca Examinadora. João Pessoa, Paraíba, **27 de fevereiro de 2024**.

  
Prof. Dr. Jorge Gabriel Gomes de Souza Ramos  
Orientador - PPGF/UFPB

  
Prof. Dr. Fábio Leal de Melo Dahia  
PPGF/UFPB

  
Prof. Dr. Alisson Vasconcelos de Brito  
UFPB

**Catálogo na publicação**  
**Seção de Catalogação e Classificação**

M395m Mascena, José Hugo Alves.

Medidas de caos em sinais de ECG e classificação de ritmos cardíacos por meio de aprendizado de máquina / José Hugo Alves Mascena. - João Pessoa, 2024.  
115 f. : il.

Orientação: Jorge Gabriel Gomes de Souza Ramos.  
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Caos. 2. ECG. 3. Matrizes aleatórias. 4. Correlação. 5. Densidade de máximos. 6. Aprendizado de máquina. I. Ramos, Jorge Gabriel Gomes de Souza. II. Título.

UFPB/BC

CDU 530.162(043)

## Resumo

Desde a segunda metade do século passado, a teoria de sistemas não lineares e caos vem se desenvolvendo rapidamente através de uma empreitada multidisciplinar. Como resultado, um grande número de técnicas foi desenvolvidas buscando a correta identificação de caos em sistemas empíricos. Nesse sentido, uma importante aplicação é diferenciar as componentes de natureza aleatória de um sinal das componentes de natureza determinística, essencial em qualquer área que envolva a análise de dados experimentais. Em especial, na fisiologia busca-se estabelecer as relações entre caos, estocasticidade e o estado de saúde do corpo humano, essencial para nortear aplicações médicas que permitam o diagnóstico facilitado e preciso de doenças e outras condições anormais. Seguindo essa linha, buscamos neste trabalho identificar caos no coração por meio de análises de sinais de eletrocardiograma de pacientes com diferentes condições de ritmo - normais ou arrítmicas - e tentar diferenciá-los por meio de medidas de caos. Para isso, utilizamos métodos alternativos aos comumente utilizados na literatura, um baseado na teoria de matrizes aleatórias e o outro fundamentado no princípio da máxima entropia que permite relacionar a densidade de máximos de um sistema com o seu comprimento de correlação. Transformando os sinais temporais em matrizes típicas do ensemble de Wigner e do ensemble de Wishart-Laguerre constatamos que a densidade espectral média dos autovalores dessas matrizes não recuperam as formas assintóticas esperadas de sinais aleatórios, mas se assemelham a de sinais caóticos. Pudemos verificar também que a densidade de máximos converge particularmente bem para uma função do comprimento de correlação do sinal, típico de sinais caóticos, implicando dessa forma a presença de caos no sistema sem a necessidade de reconstrução do espaço de fases e cálculo de dimensão do atrator caótico do sistema. Em especial, temos no comprimento de correlação uma medida quantitativa associada ao nível de caos no sistema. Por fim, utilizando essas medidas calculadas diretamente e a partir da densidade de máximos, fomos capazes de classificar sinais com ritmo normal e sinais com arritmia através de algoritmos de aprendizado de máquina.

**Palavras-chave:** Caos, ECG, Matrizes aleatórias, Correlação, Densidade de máximos, Aprendizado de máquina.

# Abstract

Since the second half of the last century, the theory of nonlinear systems and chaos has been developing rapidly through a multidisciplinary endeavor. As a result, a large number of techniques were developed seeking the correct identification of chaos in empirical systems. In this sense, an important application is to differentiate the random components of a signal from its deterministic components, essential in any area that involves the analysis of experimental data. In particular, physiology seeks to establish relationships between chaos, stochasticity and the health status of the human body, essential to guide medical applications that allow for easy and accurate diagnosis of diseases and other abnormal conditions. Following this line, in this work we seek to identify chaos in the heart through analysis of electrocardiogram signals from patients with different rhythm conditions: normal or arrhythmic, and try to differentiate them through measures of chaos. To do this, we use alternative methods to those commonly used in the literature, one based on the theory of random matrices and the other based on the principle of maximum entropy that allows us to relate the maximum density of a system to its correlation length. Transforming the time series into typical matrices from the Wigner ensemble and the Wishart-Laguerre ensemble, we found that the average spectral density of the eigenvalues of these matrices do not recover the asymptotic shapes expected from random signals, but resemble those of chaotic signals. We were also able to verify that the maximum density converges particularly well to a function of the signal correlation length, typical of chaotic signals, thus implying the presence of chaos in the system without the need to reconstruct the phase space and calculate its chaotic attractor dimension. In particular, we have in the correlation length a quantitative measure associated with the level of chaos in the system. Finally, using these measurements calculated directly and from the maximum density, we were able to classify signals with normal rhythm and signals with arrhythmia using machine learning algorithms.

**Key words:** Chaos, ECG, Random matrices, Correlation, Density of maxima, Machine learning.

# Lista de Figuras

1.1	Campo vetorial do oscilador harmônico simples. Fonte: Autor . . . . .	6
1.2	Exemplos de atratores: ponto fixo à esquerda e ciclo limite à direita. Fonte: [25]	7
1.3	Evolução temporal de um sistema linear com (a) ponto fixo instável em $x=0$ e (b) ponto fixo estável em $x=0$ , para diferentes valores do parâmetro $a$ . Fonte: [23]	8
1.4	<b>Oscilador de Van der Pol com <math>\mu = 1</math>.</b> A partir do campo vetorial, é possível ver que as trajetórias no espaço de fase tendem a ir para o Ciclo Limite, representado no retrato de fase. Fonte: Autor . . . . .	10
1.5	<b>Solução numérica para o sistema de Lorenz.</b> Fonte: [24] . . . . .	11
1.6	Evolução de duas órbitas próximas no espaço de fases. Fonte: [25] . . . . .	13
1.7	<b>Duas trajetórias temporais de <math>\phi(t)</math>, com uma diferença de <math>0.00001rad</math></b> Mesmo com uma diferença pífia nos valores das condições iniciais, o sistema rapidamente dá origem a duas trajetórias completamente diferentes. Fonte: Autor . . . . .	13
1.8	Evolução temporal da diferença entre dois sistemas com uma diferença de $0.00001rad$ na posição inicial. Fonte: Autor. . . . .	14
1.9	Atrator de Lorenz reconstruído a partir de uma série temporal. (a)trajetória no sistema de Lorenz, (b) coordenadas $x$ de (a) plotadas em função do tempo, (c) reconstrução do atrator de Lorenz por meio de coordenadas atrasadas da série temporal de $x$ . Fonte: [23] . . . . .	16
1.10	<b>Comparação entre a dinâmica do coração saudável e dois casos de patologia.</b> Fonte: [13] . . . . .	21
1.11	Atrator caótico reconstruído a partir de um sinal de um ciclo do eletrocardiograma. Fonte: [29] . . . . .	22
1.12	<b>Reconstrução de atrator caótico a partir de uma série temporal de eletrocardiograma por meio do método de coordenadas atrasadas.</b> Fonte: [30] . . . . .	22
2.1	Estrutura anatômica do coração(vista interna). Fonte: [33] . . . . .	23

2.2	Representação de uma parte da membrana de uma célula excitável em repouso rodeado pelo meio intracelular e extracelular. Nessa ilustração estão representados somente os íons $Na^+, Cl^-$ e $K^+$ , e os demais íons com contribuição para o potencial de repouso são representados por $A^+$ . Adaptado de [34] . . . . .	25
2.3	Circuito análogo à membrana celular no modelo de Hodgkin-Huxley. Adaptado de [35] . . . . .	28
2.4	Forma padrão do sinal de eletrocardiograma de um indivíduo com ritmo sinus normal. As ondas e intervalos de relevância estão indicados. Fonte: [14] . . . . .	31
2.5	Representação da sequência de ativação elétrica do coração a partir de isócronas, considerando um eletrocardiograma obtido de uma derivação V5. O vetor de dipolo do coração está indicado. Fonte [14] . . . . .	32
2.6	Projeções dos vetores do coração nos eixos e derivações. $\vec{c}_i$ e $\vec{c}_j$ são os vetores de derivação unipolares para os pontos $Q_i$ e $Q_j$ , respectivamente e $\vec{L}$ é o vetor de derivação bipolar. Fonte: [38] . . . . .	33
2.7	(a) Derivações bipolares, (b) derivações unipolares aumentadas e (c) derivações pré-cordiais. Fonte: [14] . . . . .	35
2.8	Exemplo de eletrocardiograma de paciente com ritmo sinus normal, sem apresentar qualquer tipo de arritmia. Fonte: [14] . . . . .	38
2.9	Exemplo de eletrocardiograma de uma paciente com vibração atrial(cima) e fibrilação atrial(baixo). Fonte: [14] . . . . .	39
2.10	Exemplo de eletrocardiograma de uma paciente com vibração ventricular(cima) e fibrilação ventricular(baixo). Fonte: [14] . . . . .	40
3.1	Ilustração da transformada de Gabor com uma janela gaussiana. Fonte: [39] . . . . .	47
3.2	Representação das Wavelet-mãe de Morlet, Daubechie (db6), Coiflet (coif2) e Symlet (sym6). Fonte: [42] . . . . .	50
3.3	Representação do processo de filtragem na análise de Wavelet. O conteúdo de alta frequência fica contido nas aproximações A, enquanto o conteúdo de alta frequência fica contido nos detalhes D. Fonte: [42] . . . . .	51
3.4	Representação do processo de decomposição em três níveis de um sinal por meio de uma transformada de Wavelet. Fonte: [42] . . . . .	52
3.5	Representação da análise em wavelet enfatizando a redução do número de amostras do sinal original para o sinal decomposto. Os vetores contendo os coeficientes de aproximação e detalhe possuem aproximadamente metade do comprimento do sinal original. Fonte: [43] . . . . .	53
3.6	Processo de decomposição em multinível na análise de wavelet, destacando a diminuição de amostras ( <i>downsampling</i> ) das decomposições em relação ao sinal original. Fonte: [42] . . . . .	54

3.7	Comparação entre o formato previsto por Wigner na lei do semicírculo com a densidade espectral dos ensembles GOE, GUE e GSE. . . . .	57
3.8	Representações da conjectura de Wigner a partir da forma da função prevista analiticamente e do histograma de autovalores de matrizes aleatórias geradas computacionalmente. . . . .	58
3.9	Comparação da lei de Marchenko-Pastur para dois diferentes valores do parâmetro $c = N/M$ obtidos a partir da diagonalização de matrizes aleatórias de Wishart para todos os valores possíveis de $\beta$ . Fonte [45] . . . . .	59
3.10	Ilustração da estratificação do espaço numa divisão binária recursiva com cinco fases, e a árvore de decisão associada essa divisão. Fonte: [47] . . . . .	65
3.11	Exemplo de classificação KNN utilizando métrica euclidiana considerando diferentes valores de $K$ . Para o menor valor de $K$ (círculo interno), há mais bolinhas pretas do que verdes, e assim a estrela vermelha é classificada como bolinha preta. Já para o maior valor de $K$ (círculo externo), há mais bolinhas verdes do que pretas e , portanto, a estrela vermelha é classificada como bolinha verde. Fonte: [48] . . . . .	67
3.12	Exemplo de classificação para números crescentes de $k$ . É notável que para valores pequenos de $k$ a classificação tende a se ajustar de modo específico para o conjunto de treinamento usado, de modo que não há uma região bem delimitada. Enquanto para valores altos a região não se adapta as particularidade dos dados de treinamento e tende a ser linear. Fonte: [49] . . . . .	68
3.13	Hiperplano com margem maximal, linha sólida, definido para duas classes de observação. A margem é definida como a distância do hiperplano para uma das linhas tracejadas, que são definidas pelos vetores de suporte. Fonte: [50] . . . .	70
3.14	Matriz de confusão para classificação binária com classes genéricas "sim" e "não". Fonte: [51] . . . . .	72
4.1	Sinais não filtrados normalizados de cada um dos bancos de dados utilizados. Em (a) e (c) é possível ver a ruídos característicos de alta frequência, enquanto em (b) e (d) estão presentes também ruídos com amplitude e frequência da ordem de grandeza das ondas característicos do ciclo cardíaco. Fonte: Autor. .	76
4.2	Transformada de Fourier obtida por FFT em um sinal com frequência bem determinada, com e sem adição de ruído. Fonte: Autor. . . . .	77
4.3	FFT de atrator de Rossler com parâmetros $a = 0.15, b = 0.20, c = 10$ . É possível ver que no regime caótico, não é possível selecionar uma frequência característica que defina a dinâmica do sinal. Fonte: Autor. . . . .	77
4.4	Aplicação de filtro por análise de Fourier para os sinais apresentados em 4.1. Fonte: Autor. . . . .	78

4.5	Demonstração da reconstrução de um sinal decomposto por Wavelet considerando diferentes faixas de frequência, contidos nos níveis de detalhe. Fonte: Autor. . . . .	79
4.6	Aplicação de filtro por análise de Wavelet para o sinais apresentados na figura 4.1. Fonte: Autor. . . . .	80
4.7	<b>Distribuição Espectral de Autovalores de ECG.</b> Há uma variação inerente à densidade espectral de cada tipo de ritmo cardíaco nos sinais filtrados e ainda que nenhuma recupere exatamente a lei do semicírculo, a forma do histograma sugere a existência de componentes estocásticas no sinal. No entanto, depois do filtro a densidade espectral de todos os ritmos cardíacos apresentam aproximadamente as mesmas características. Fonte: Autor. . . . .	81
4.8	<b>Distribuição Espectral do Espaçamento entre Autovalores de ECG.</b> O mesmo comportamento da densidade espectral do autovalores está presente no espectro de espaçamento, e a conjectura de Wigner não é recuperada exatamente, ainda que uma forma semelhante tenha sido obtida. Fonte: Autor. . . . .	81
4.9	Aplicação do método de matrizes aleatórias para um <b>sinal aleatório uniformemente distribuído</b> . Podemos ver que a construção da matrizes garante as propriedades de simetria para a recuperação das leis assintóticas das densidades espectrais quando o sinal é aleatório, mesmo que seus elementos não sejam distribuídos segundo uma gaussiana. . . . .	82
4.10	Aplicação do método de matrizes aleatórias para um <b>sinal seno</b> . Fonte: Autor. . . . .	83
4.11	Aplicação do método de matrizes aleatórias para um <b>sinal seno ruidoso</b> . Nesse caso, é possível ver que ainda que a conjectura de Wigner não tenha sido recuperado, muito provavelmente por fatores de escala, a lei do semicírculo é uma boa aproximação para a densidade espectral do sistema. Fonte: Autor. . . . .	83
4.12	Densidade de autovalores das matrizes correlação $C_2$ de sistemas caóticos contínuos. À esquerda, o sistema de Lorenz e à direita, o sistema de Rössler. Fonte: [15] . . . . .	84
4.13	Função de autocorrelação de um sinal aleatório distribuído uniformemente. Fonte: Autor. . . . .	84
4.14	Função de autocorrelação de um sinal seno considerando dois intervalos de tempo diferentes. Fonte: Autor. . . . .	85
4.15	Comparação das séries temporais, figuras de cima, e das funções de correlação, figuras de baixo, entre dois sistemas em regime caótico. Fonte: [58] . . . . .	86
4.16	Funções de Correlação média por pacientes obtida a partir de sinais não filtrados. Fonte: Autor. . . . .	87

4.17	Na parte de cima está plotada a média da função de correlação por tipo de arritmia, do lado esquerdo considerando sinais filtrados por FFT e a direita por Wavelet. Na parte de baixo, estão plotados as funções de correlação que formam a média de cima. É possível notar que os sinais dos bancos de dados AFDB e VFDB são mais curtos, isso ocorre pois a divisão do intervalos de tempo foram feito considerando o número de amostras, e posteriormente convertido para unidades de tempo. Os sinais AFDB e VFDB são mais curtos pois possuem uma maior frequência de amostragem. Fonte: Autor. . . . .	88
4.18	Gráfico do espalhamento de valores do comprimento de correlação classificados por tipo arritmia de acordo com o banco de dados a que pertencem: NSRDB, AFDB, SVDB ou VFDB. No item (a) estão contidas as correlações por intervalo de tempo ( <b>Classificação 1</b> ) e no item (b) a correlação média por paciente ( <b>Classificação 2</b> ). Fonte: Autor. . . . .	89
4.19	Matrizes de Confusão para a configuração 1, considerando sinais filtrados por Wavelet, em que foram atribuídos os seguintes índices: 0. NSRDB, 1.VFDB, 2.SVDB e 3.AFDB. É possível ver que apesar da alta taxa de acertos de previsão, o algoritmo KNN não foi capaz de aprender os ritmos AFDB e SVDB. O algoritmo SVM possui melhor generalização, pois tenta fazer previsões da classe 2, mas em decorrência disso apresenta uma performance geral inferior Fonte: Autor. . . . .	91
4.20	Matrizes de Confusão para a configuração 2, considerando sinais filtrados por Wavelet, em que foram atribuídos os seguintes índices: 0. NSRDB, 1.VFDB, 2.SVDB e 3.AFDB. Nesse caso, podemos ver que apesar da menor acurácia em relação a configuração 1, ambos os algoritmos foram capazes de realizar previsões para todas as classes. Fonte: Autor. . . . .	93
4.21	Gráfico do espalhamento de valores do comprimento de correlação classificados binariamente entre ritmo normal(0) e arritmia(1). No item (a) estão contidas as correlações por intervalo de tempo ( <b>Classificação 3</b> ) e no item (b) a correlação média por paciente ( <b>Classificação 4</b> ). Fonte: Autor. . . . .	93
4.22	Matrizes de Confusão da validação do algoritmo SVM para as configurações 3 e 4, em que foi atribuído o índice 0 para ritmos normais e 1 para arritmias. Podemos ver que ambas possuem uma alta taxa de acertos de previsão, mantida mesmo quando o número de amostras é reduzida da configuração 3 para a 4. Fonte: Autor. . . . .	95

# Lista de Tabelas

1.1	Tipo de atrator associado a um espectro de expoentes de Lyapunov com base na dimensão do espaço de fases. Adpatado de [3] . . . . .	19
4.1	Níveis de resolução e suas respectivas faixas de frequências para os coeficientes de detalhes de uma transformada de Wavelet com frequências de aquisição $F_s = 128Hz$ e $F_s = 250Hz$ . Fonte: Autor. . . . .	79
4.2	Comprimento de autocorrelação obtidos por meio de cálculo direto. . . . .	86
4.3	Comprimento de autocorrelação obtidos por meio da densidade de máximos . .	86
4.4	Erro médio absoluto (MAE) a entre o valor do comprimento de correlação medido diretamente e calculado a partir da densidade de máximos. Fonte: Autor.	87
4.5	Acurácia da validação (Classificação 1). Fonte: Autor. . . . .	90
4.6	Acurácia de Teste (Classificação 1). Fonte: Autor. . . . .	90
4.7	Acurácia de Validação (Classificação 2). Fonte: Autor. . . . .	92
4.8	Acurácia de Teste (Classificação 2). Fonte: Autor. . . . .	92
4.9	Acurácia de Validação (Classificação 3). Fonte: Autor. . . . .	94
4.10	Acurácia de Teste (Classificação 3). Fonte: Autor. . . . .	94
4.11	Acurácia de Validação (Classificação 4). Fonte: Autor. . . . .	94
4.12	Acurácia de Teste (Classificação 4) . Fonte: Autor. . . . .	95

# Sumário

<b>Resumo</b>	<b>ii</b>
<b>Abstract</b>	<b>iii</b>
<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Caos em Sistemas Dinâmicos</b>	<b>4</b>
1.1 Sistemas Dinâmicos . . . . .	4
1.1.1 Atratores . . . . .	6
1.2 Caos . . . . .	11
1.2.1 Atratores Caóticos . . . . .	11
1.2.2 Dependência Sensível à Condições Iniciais . . . . .	12
1.3 Medindo Caos em Sistemas Empíricos . . . . .	14
1.3.1 Coordenadas Atrasadas . . . . .	15
1.3.2 Medidas de Caos . . . . .	16
1.4 Caos no Coração . . . . .	20
1.4.1 O batimento cardíaco normal é homeostático ou caótico? . . . . .	20
<b>2 Biofísica do Coração</b>	<b>23</b>
2.1 Potencial Elétrico das Membranas . . . . .	24
2.1.1 Potencial de Repouso . . . . .	24
2.1.2 Potencial de Ação . . . . .	27
2.1.3 Modelo de de Hogkin-Huxley . . . . .	27
2.2 Atividade Elétrica do Coração . . . . .	29
2.2.1 Eletrocardiografia . . . . .	30
2.2.2 Ciclo Cardíaco e a Forma Típica do Eletrocardiograma . . . . .	31
2.2.3 Sistema de Derivações . . . . .	33
2.3 Ritmos Cardíacos . . . . .	36
<b>3 Métodos</b>	<b>42</b>
3.1 Processamento de Sinais Cardíacos . . . . .	42
3.1.1 Filtros . . . . .	43

3.1.2	Filtro por Análise Fourier . . . . .	43
3.1.3	Filtro por Análise Wavelet . . . . .	49
3.2	Matrizes Aleatórias . . . . .	54
3.2.1	Ensemble de Wigner . . . . .	55
3.2.2	Ensemble de Wishart-Laguerre . . . . .	57
3.2.3	Construindo Matrizes de Correlação . . . . .	59
3.3	Função de Autocorrelação e Densidade de Máximos . . . . .	61
3.4	Aprendizado de Máquina . . . . .	63
3.4.1	Classificação . . . . .	63
3.4.2	Algoritmos . . . . .	65
3.4.3	Teste e Validação . . . . .	71
3.4.4	Matriz de Confusão . . . . .	72
<b>4</b>	<b>Resultados</b>	<b>74</b>
4.1	Filtragem . . . . .	75
4.1.1	Filtro FFT . . . . .	75
4.1.2	Filtro Wavelet . . . . .	78
4.2	Análise de Caos por Matrizes Aleatórias . . . . .	80
4.3	Análise de Caos por Função de Correlação . . . . .	84
4.4	Aprendizado de Máquina . . . . .	88
4.4.1	Classificação por Ritmos Cardíacos . . . . .	89
4.4.2	Classificação Binária . . . . .	93
	<b>Conclusão e Perspectivas</b>	<b>96</b>

# Introdução

O desenvolvimento da atividade científica é na sua forma empirista racionalista nas ciências exatas é realizada, fundamentalmente, através da medição e análise de sinais que compreendem fenômenos e sistemas da natureza, e de sua devida representação matemática. Dessa forma, o estudo e caracterização desses sinais (ordem, periodicidade, determinismo...)

Durante grande parte da história acreditou-se que a natureza fosse caracterizada por ordem espacial e temporal, contida nas leis da natureza, por meio do qual o ser humano seria capaz de prever com precisão eventos naturais antes que eles ocorressem. Essa visão determinística é encapsulada pela afirmação de Pierre-Simon Laplace: "O presente estado de um sistema da natureza é evidentemente uma consequência daquilo que foi em seu momento precedente, e se concebermos uma inteligência que a qualquer instante compreende todas as relações das entidades desse universo, ela poderia afirmar as posições, movimentos e efeitos gerais de todas essas entidades em qualquer momento no passado ou futuro." [1].

A concepção de um universo determinístico no sentido convencional afirmado por Laplace já foi abandonada na física decorrente do desenvolvimento da mecânica quântica, uma teoria essencialmente probabilística, e pela teoria do Caos que constata que, mesmo em sistemas determinísticos, previsões exatas não podem ser realizadas a longo prazo.

Nas últimas décadas, grande esforço multidisciplinar tem sido empregado para melhor compreender o Caos, especialmente em sistemas não-lineares. Quais são suas origens, como podemos caracterizá-lo matematicamente e quais são as propriedades que sistemas empíricos caóticos exibem? A partir da compreensão da teoria de Caos e de dinâmica não linear, ficou evidente que muitos processos de natureza errática, antes tratados como frutos de ruído ou de aleatoriedade, na realidade podem ser compreendidos como processos determinísticos caóticos [2].

Na fisiologia, por exemplo, um movimento de conciliar a ideia de homeostase com a possibilidade de caos nos processos fisiológicos têm sido realizado nas últimas décadas [3]. Na homeostase as funções corporais são descritas por meios de mecanismos de controles que tendem a restaurar certas propriedades do corpo, como por exemplo pressão sanguínea, a níveis de equilíbrio [4]. No entanto, notadamente muitos dos processos cíclicos do corpo humano apresentam comportamento complexo, aparentemente errático [5].

Um exemplo é a própria atividade elétrica que dá origem aos processos mecânicos do coração. O ciclo cardíaco é fruto, em última instância, dos potenciais de ação e de repouso que

surgem devido a uma relação complexa entre a composição química das membranas celulares e da distribuição de íons nos meios extra e intracelular. Esses potenciais de membrana, aliados com as diferentes propriedades elétricas de estruturas e tecidos especializados do coração resultam em um ciclo cardíaco com ritmo normal bem característico, o que parece caracterizar o batimento cardíaco como um processo aproximadamente periódico.

A forma tradicional de investigar a atividade elétrica cardíaca é por meio da eletrocardiografia: a medição dos potenciais supracitados, utilizando eletrodos posicionados na superfície corporal. O eletrograma resultante do procedimento é uma série temporal formada por frentes de onda características, cuja morfologia pode ser usada para identificação de patologias no coração.

Dessa forma, uma ampla literatura sobre a identificação de patologia e ritmos anormais a partir do eletrocardiograma estão disponíveis [6] e são aplicadas na prática médica usual. Devido a sua importância, é de grande interesse médico o desenvolvimento de métodos que permitam a identificação de arritmias e patologias de modo automatizado, e especialmente em tempo real. [7–9].

Outra questão ainda em aberto é o papel do caos no funcionamento corporal. Estudos apontam que o comportamento caótico na fisiologia pode estar associado tanto a uma variabilidade saudável do funcionamento normal de alguns processos [10], quanto ao surgimento de doenças [11]. No coração, podemos conjecturar que sua atividade elétrica constitui um processo não linear, tanto pela própria não linearidade dos potenciais de membrana que dão origem e atuam na propagação elétrica quanto pelo envolvimento de múltiplas células fortemente interagentes com diferentes propriedades de condutividade. Dessa forma, é de se esperar que o ciclo cardíaco possa apresentar caos.

Já foi mostrado que a variabilidade da frequência cardíaca, a variação no intervalo de tempo entre batidas do coração, apresenta um comportamento mais fortemente caótico em indivíduos saudáveis e/ou jovens, em comparação a idosos ou pessoas com doenças crônicas [12, 13]. Além disso, alguns tipos de arritmias, as taquicardias, são caracterizadas pelo aumento na frequência cardíaca de modo que nem todas as etapas do ciclo são completadas adequadamente, o que, é de se esperar, também representa um aumento no grau de caos do coração.

Outro fator pertinente à correta avaliação da natureza do processo cardíaco é a presença de ruídos de fontes variadas em eletrocardiogramas. Por se tratar de um método não invasivo, o dispositivo que capta a eletricidade é sensível a interferências externas como a da tensão elétrica dos aparelhos, movimentos no eletrodos ou até mesmo movimento muscular. Muitos desses ruídos possuem frequências próximas a do ciclo cardíaco que dificultam a filtragem por métodos convencionais [14].

Desse modo, a análise de caos em sistemas cardíacos pode ser útil para a distinção entre sinal e ruído, servindo como uma etapa de processamento com objetivo de facilitar a filtragem. E a quantificação das medidas de caos no coração pode se mostrar uma ferramenta de diagnóstico poderosa em comparação às usuais para se determinar a saúde do coração.

Com esse objetivo em mente, estudaremos nesse trabalho métodos de se distinguir Caos e Estocasticidade. Em especial, desejamos verificar a efetividade de métodos não convencionais para a caracterização de caos: 1. utilizando métodos da teoria de matrizes aleatórias [15] e 2. utilizando a densidade de máximos da série temporal para calcular sua função de autocorrelação [16, 17]. E a partir desses métodos, verificar se é possível utilizar as medidas de caos como um parâmetro que nos permite distinguir entre um sinal de eletrocardiograma com ritmo normal e um sinal com arritmia. Para isso, iremos aplicar algoritmos típicos de aprendizado de máquina para classificar os tipos de ritmo cardíaco de um paciente usando como valores de entrada os tempos de correlação.

## Estrutura Geral

O trabalho está estruturado da seguinte forma:

No capítulo 1, apresentamos de que modo o comportamento caótico é compreendido na teoria de sistemas dinâmicos, de que modo identificá-lo e as formas convencionais de se medir caos em sistemas empíricos.

No capítulo 2 entenderemos melhor de que modo ocorre a atividade elétrica no tecido cardíaco em nível celular e no coração em nível de órgão, de que modo é realizada a medição da atividade elétrica do coração através do eletrocardiograma e como defeitos na produção da atividade elétrica no ritmo correto gerando arritmias se apresentam no eletrocardiograma. Nessa seção temos interesse em compreender a forma normal de um eletrocardiograma, e quais são as propriedades relevantes para uma análise clínica.

No capítulo 3 apresentamos os métodos pelo qual iremos fazer o processamento de dados dos sinais de eletrocardiograma obtidos de um banco de dados, assim como os métodos de análise de caos e classificação estatística por meio de aprendizado de máquina

No capítulos 4, apresentamos os resultados obtidos da aplicação dos métodos nos sinais de eletrocardiograma.

E por fim, em **Conclusões e perspectivas** realizamos algumas ponderações acerca dos resultados obtidos e apresentamos perspectivas para a ampliação dos estudos realizados nesse trabalho.

# Capítulo 1

## Caos em Sistemas Dinâmicos

As primeiras investigações sobre caos se iniciaram no final do século XIX, quando o matemático francês Henri Poincaré estudou o problema de três corpos da mecânica celeste, considerando a evolução temporal de trajetórias iniciando com condições iniciais levemente diferentes. Como conclusão, ele percebeu que uma solução fechada não é possível e, portanto, trajetórias que iniciem arbitrariamente próximas eventualmente divergem [18].

Apesar de importantes trabalhos na teoria de sistemas não lineares terem sido realizados no início do século XX, a teoria de caos só se consolidou e desenvolveu consideravelmente na segunda metade do século, com os trabalhos de Edward Lorenz sobre a dinâmica da atmosfera [19], em que descobriu o **efeito borboleta**. Esse desenvolvimento só foi possível devido ao emprego de ferramentas gráficas e numéricas dos computadores digitais recém inventados, que possibilitaram perceber a rápida discrepância entre uma resolução numérica de um sistema de equações com condições iniciais diferindo na sexta casa decimal, a mesma dependência sensível às condições iniciais observada por Poincaré no problema dos três corpos [2]. Empregando métodos de análise no espaço de fase desenvolvidos por Poincaré, Lorenz descobriu também uma estrutura associada ao comportamento caótico do sistema, o **atrator estranho**.

Desde então a teoria de sistemas não lineares e caos se desenvolveu por meio de um esforço multidisciplinar, com métodos que podem ser aplicados nas mais diversas áreas que englobam física [20], matemática [21], dinâmica populacional [22] dentre muitas outras áreas e subáreas. Iremos nesse capítulo compreender de que modo podemos caracterizar caos segundo a teoria de sistemas dinâmicos, alguns métodos de identificação de caos comumente utilizados e algumas aplicações desses conceitos e métodos na fisiologia do coração.

### 1.1 Sistemas Dinâmicos

Através do estudo de sistemas dinâmicos não lineares podemos identificar e compreender algumas das propriedades que caracterizam o caos e o distingue do comportamento de sistemas mais simples. Um sistema dinâmico pode ser definido como a descrição matemática da evolução

temporal de um sistema, uma regra que permite associar estados presentes a estados no passado [23]. Essa regra pode ser definida em termos de distribuições de probabilidades, para sistemas estocásticos, ou em termos de equações diferenciais e mapas em sistemas determinísticos.

Uma classificação que abrange a noção geral de caos e complexidade em sistemas dinâmicos pode ser feita em termos de linearidade e dimensão. A maioria dos sistemas considerados simples, e que possuem solução analítica, são lineares e com baixa dimensão. A medida que o número de graus de liberdade de um sistema e não linearidade aumentam em um sistema, também aumenta a complexidade do comportamento e a dificuldade da solução.

Em concordância com essa noção intuitiva, duas condições são necessárias para que um sistema possa apresentar regime caótico podem ser estabelecidas: não linearidade e, dependendo do tipo de sistema, um número suficiente de dimensões no espaço de fase [24]. No caso de equações diferenciais ordinárias, é necessário que  $N \geq 3$  para que comportamento caótico seja possível. Em sistemas não autônomos, que possuem uma dependência temporal explícita, é possível representar o tempo como uma das variáveis de estado, tornando necessário apenas que  $N = 2$ , equivalente ao requisito anterior. Já em mapas iterados, se o mapa é invertível, comportamento caótico só é possível com  $N \geq 2$ . Mas no caso em que os mapas são não invertíveis, até mesmo sistemas unidimensionais podem apresentar Caos.

Consideremos a importância da linearidade a partir de equações diferenciais ordinárias. Seja  $t$  a variável independente e  $x = x(t)$  uma função linear e contínua de  $t$ . Podemos identificar por  $x = x^{(n)}(t) = d^n x / dt^n$  a derivada de ordem  $n$  de  $x(t)$  e assim escrever uma EDO implícita de ordem  $n$ , como

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (1.1)$$

Quando a EDO é linear é possível estabelecer teoremas que garantem a existência de solução e sua unicidade. Por causa disso, variações  $\delta_n$  arbitrariamente pequenas em condições iniciais próximas tendem a se aproximar com tempo, e assim um dos requisitos de comportamento caótico, a dependência sensível a condições iniciais, não é possível.

Outra característica importante de sistemas lineares é o princípio da superposição. Por exemplo, em uma equação de segunda ordem

$$p(t)\ddot{x}(t) + q(t)\dot{x}(t) + r(t)x(t) = 0, \quad (1.2)$$

em que  $x(t)$  é uma função de  $t$  desconhecida e  $p(t)$  e  $r(t)$  são funções fixas conhecidas. Se  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  são soluções conhecidas para essa equação, então qualquer combinação linear

$$x(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)$$

também é uma solução. Dessa forma, como consequência do princípio da superposição, para achar todas as soluções possíveis dessa equação de segunda ordem, só é preciso encontrar duas soluções independentes. Ou ainda, de modo mais geral para um equação de ordem  $n$ , são

necessárias  $n$  soluções independentes para que todas as soluções possíveis sejam descritas. Já para equações não lineares, a solução analítica só é possível em alguns casos específicos com simetrias particulares e não existe nenhuma propriedade que nos permita escrever soluções gerais de modo semelhante ao princípio da superposição.

A forma mais geral de um sistema não linear  $n$  dimensional, que pode descrever, por exemplo, um conjunto de partículas representadas por suas posições e velocidades ou populações de diferentes espécies num ecossistema, é a de um sistema de equações diferenciais

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_n),\end{aligned}\tag{1.3}$$

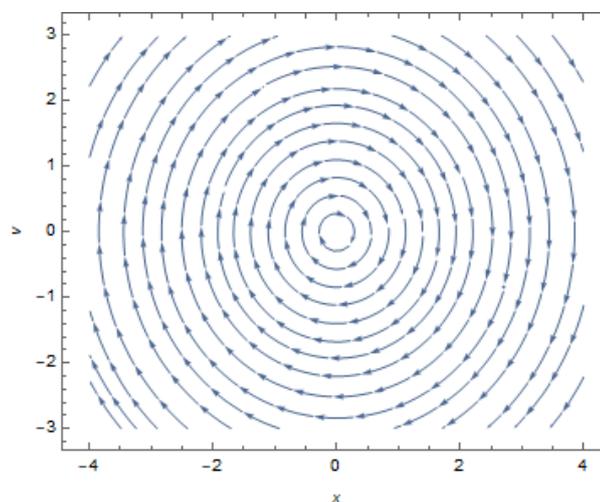
$\dot{x}_i \equiv dx_i/dt$ , que pode ser escrito na forma vetorial como

$$\mathbf{\dot{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))\tag{1.4}$$

Dessa forma, assim como num sistema de múltiplas partículas, em que o espaço de fases de  $2N$  coordenadas  $\{x_1, \dots, x_N, p_1, \dots, p_n\}$  não mais assume a interpretação de posições num espaço euclidiano tridimensional, também ocorre no espaço do estados.

Sistemas das mais diferentes áreas da ciência podem assumir a forma das equações 1.3 e, portanto, nem sempre uma noção espacial pode ser estabelecida. Por isso, é importante considerar o espaço de estados como um espaço representativo. É por meio do estudo de estruturas que surgem nesse espaço abstrato que podemos entender conceitos aplicáveis do modo mais amplo possível.

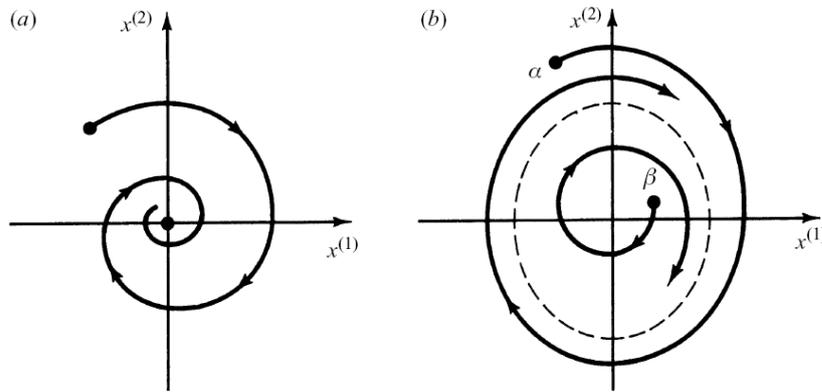
### 1.1.1 Atratores



**Figura 1.1:** Campo vetorial do oscilador harmônico simples. Fonte: Autor

Devido a inexistência de métodos analíticos gerais para a solução de equações não lineares, é preferível o uso de métodos qualitativos com o auxílio de gráficos gerados para a compreensão desse tipo de sistema no espaço de estados. Dentre esses métodos, a análise assintótica permite identificar algumas regiões especiais do espaço de fase que permitem caracterizar um sistema. Dentre elas temos: pontos fixos, órbitas fechadas, ciclos limites.

Uma distinção importante a se considerar para esse tipo de análise é entre sistemas dissipativos e conservativos. Consideremos por exemplo o oscilador harmônico simples, figura 1.1, em que uma trajetória iniciada em qualquer ponto inicial, representa estados estacionários. Nesse tipo de órbita, qualquer perturbação irá fazer com que o sistema vá para outro estado estacionário, com energia diferente. Por outro lado, em sistemas dissipativos, em consequência da perda de energia, as trajetórias iniciadas a partir de um ponto qualquer no espaço de fase tendem a se aproximar de trajetórias estáveis, conforme pode ser visto na figura 1.2.



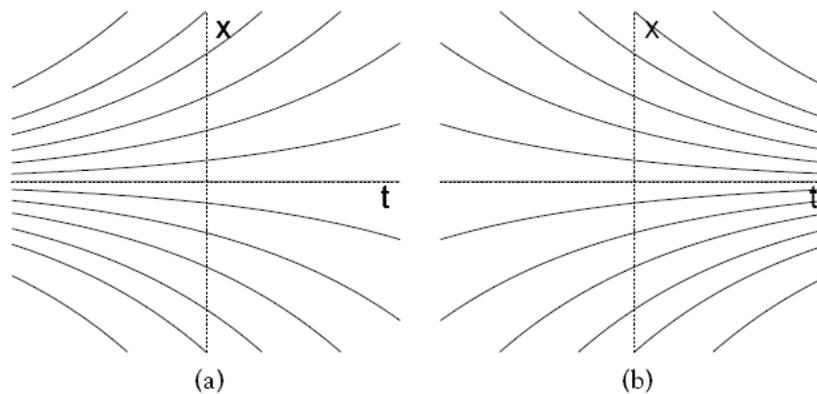
**Figura 1.2:** Exemplos de atratores: ponto fixo à esquerda e ciclo limite à direita. Fonte: [25]

A diferença entre esses dois tipos de sistemas pode ser descrita através do volume no espaço de fase. Considerando que o estado possíveis de um sistema dinâmico ocupe um volume  $V$  envolvido por uma superfície fechada  $S_0$  num espaço de fases  $N$  dimensional. Ao longo de sua evolução temporal, a superfície  $S_0$  irá evoluir para uma outra superfície fechada  $S_t$ , em um tempo  $t$  posterior. A variação volume  $V$  pode ser descrita, a partir do teorema da divergência, pela equação de conservação

$$dV(t)/dt = \int_{S_t} \nabla \cdot \mathbf{F} d^N x. \quad (1.5)$$

Se  $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$  o volume  $V$  é preservado, e portanto o sistema é conservativo. Mas para  $\nabla \cdot \mathbf{F} < 0$  o volume decresce com o tempo e o sistema é dissipativo. Dessa forma, nesse último caso, existem subconjuntos fechados para os quais regiões com volume não nulo das condições iniciais se aproximam assintoticamente a medida que o tempo aumenta. Esses subconjuntos são chamados de atratores e podem ser definidos mais especificamente como um conjunto  $A$  com as seguintes propriedades [24]:

1.  $A$  é um conjunto invariante: qualquer trajetória que se inicia em  $x(t)$



**Figura 1.3:** Evolução temporal de um sistema linear com (a) ponto fixo instável em  $x=0$  e (b) ponto fixo estável em  $x=0$ , para diferentes valores do parâmetro  $a$ . Fonte: [23]

2. Existe um conjunto aberto  $U$  contido em  $A$  tal que se  $\mathbf{x}(0) \in U$ , então a distância de  $\mathbf{x}(t)$  para  $A$  vai para zero a medida que  $t \rightarrow \infty$
3. Não existe nenhum subconjunto de  $A$  que satisfaça às condições 1 e 2.

### Pontos Fixos

Pontos fixos são atratores de dimensão nula, o único tipo encontrado num sistema unidimensional. Da perspectiva de um sistemas de equações diferenciais como um fluxo, o ponto fixo é um ponto  $x^*$  em que o fluxo é estacionário em todos os instantes de tempo:

$$dx^*/dt = f(x^*) = 0 \quad (1.6)$$

Podemos explorar um pouco mais a ideia a partir de uma equação diferencial unidimensional, nesse caso um sistema dinâmico é dado simplesmente pela equação

$$\dot{x} = f(x). \quad (1.7)$$

Para uma equação linear, temos

$$\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt} = ax, \quad (1.8)$$

Cujas soluções são da forma  $x(t) = ce^{at}$  para uma constante real  $c$ . Para se definir completamente a solução de uma equação diferencial é necessário considerar às condições iniciais, normalmente dada na forma do valor no tempo  $t = 0$ , nesse caso  $c = x_0 \equiv x(t = 0)$ .

$$x(t) = x_0 e^{at}. \quad (1.9)$$

A evolução temporal, portanto, é definida pela parâmetro  $a$  e pelo valor inicial  $x_0$ , e pode ser representado num gráfico de  $x$  por  $t$ .

De modo simples, o ponto fixo representa um estado em que o sistema não é alterado

com o passar do tempo. No caso de sistemas lineares,  $x^* = 0$ , conforme pode ser visto na figura 1.3. No entanto, os pontos fixos podem ser classificados pelo comportamento das órbitas de pontos iniciais na vizinhança. Para  $a > 0$ , o comportamento assintótico das trajetórias para  $x_0 \neq 0$  é de crescer ou decrescer para  $x = \pm\infty$ . Enquanto para  $a < 0$ , o sistema evolui para  $x = 0$  independente de onde começa, e assim  $x^* = 0$  é um atrator. Como nesse caso só há um ponto fixo, a estabilidade deles é global. Mas, para sistemas não lineares, pode surgir mais de um ponto fixo em uma sistema unidimensional, ou até mesmo infinitos, como é o caso de um sistema determinado pela equação

$$\dot{x} = \sin x, \quad (1.10)$$

em que a estabilidade dos pontos fixos é local.

Em uma dimensão, o único comportamento assintótico possível para as trajetórias é de se aproximar/permanecer nos pontos fixos ou de divergir para  $\pm\infty$ . Isso ocorre pois as trajetórias só podem crescer ou decrescer monotonicamente, ou se manterem constantes. E por causa disso, não há como um trajetória mudar de direção no espaço de fases. Desse modo, soluções periódicas ou comportamentos mais complicados não são possíveis em uma dimensão

### Ciclos Limites

Em duas dimensões, além dos pontos fixos, os atratores podem ser do tipo ciclo limite: trajetórias fechadas e isoladas, no sentido de que trajetórias vizinhas não são fechadas, mas se afastam ou se aproximam. E assim, ciclos limites podem ser classificados, semelhantemente aos pontos fixos, em estáveis(atratores) ou instáveis.

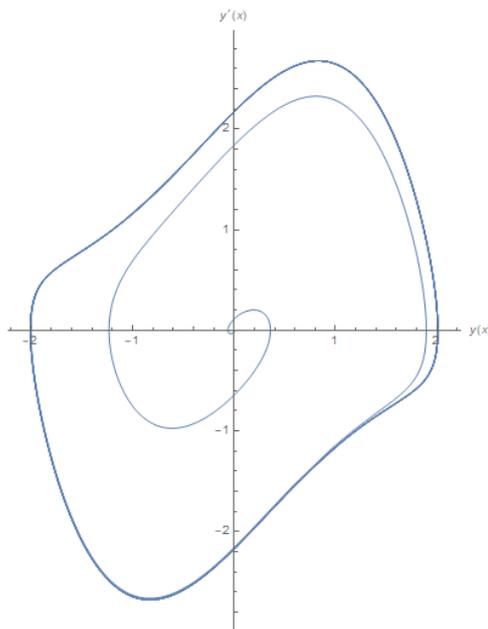
Como é possível perceber pelo retrato de fase do Oscilador Harmônico Simples, figura 1.1, alguns sistemas possuem uma família de órbitas fechadas como solução. Em que qualquer alteração nas condições iniciais, ou perturbações na trajetória, irá produzir uma solução com um novo período.

Já em sistemas não lineares as trajetórias vizinhas descrevem espirais que se distanciam ou aproximam do ciclo limite, definindo, desse modo, um período de oscilação preferencial no sistema, de tal modo que qualquer perturbação será amortecido e retornará ao sistema à trajetória padrão. Um exemplo clássico é o oscilador de Van der Pol, figura 1.4, descrito pela equação

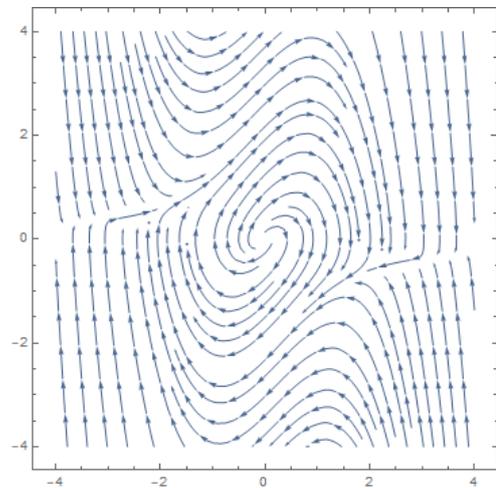
$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0, \quad (1.11)$$

um circuito não linear, onde o amortecimento  $\mu(x^2 - 1)$  atua de modo que quando  $|x| > 1$  o amortecimento é positivo, e quando  $|x| < 1$  o amortecimento é negativo, e o movimento do sistema é restrito a uma única oscilação estável, determinada pelo parâmetro  $\mu \geq 0$ .

Ciclos limites são o tipo de movimento mais complicado possível em duas dimensões. Segundo o teorema de Poincaré-Bendixson, dada uma região finita  $R$  do plano entre duas curvas simples fechadas  $D_1$  e  $D_2$ , em que  $\vec{F}$  é o campo vetorial do sistema, então o sistema possuirá



(a) Retrato de Fase do Oscilador de Van der Pol



(b) Campo Vetorial do Oscilador de Van de Pol

**Figura 1.4: Oscilador de Van der Pol com  $\mu = 1$ .** A partir do campo vetorial, é possível ver que as trajetórias no espaço de fase tendem a ir para o Ciclo Limite, representado no retrato de fase. Fonte: Autor

um órbita fechada em  $R$ , se:

1. Em cada ponto de  $D_1$  e  $D_2$ , o campo  $\vec{F}$  aponta em direção ao interior de  $R$ , e
2.  $R$  não possui pontos críticos

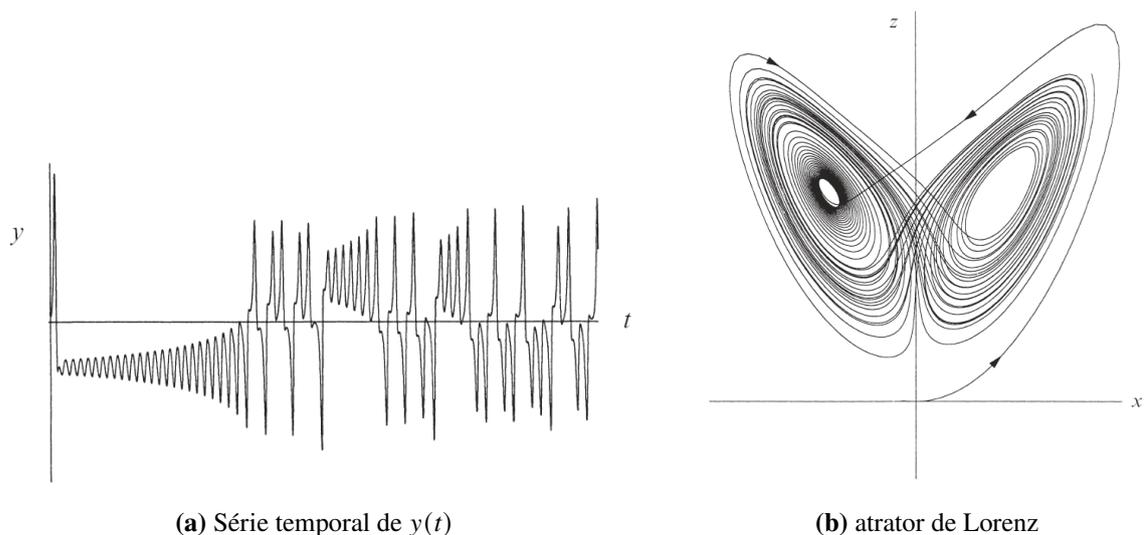
E pelo Teorema da Unicidade e Existência, para uma função contínua e com derivadas contínuas, é garantido que haja uma solução única num período em torno de um ponto inicial. Como consequência direta, não pode haver trajetórias (soluções com diferentes pontos iniciais) que se intersectam no plano de fase, pois assim poderia ser possível construir duas soluções distintas partindo do mesmo ponto, e assim a solução não seria mais única. Assim, para sistemas bidimensionais, se há uma órbita fechada no espaço de fase, qualquer trajetória que se inicie dentro dessa órbita estará confinada lá para sempre.

O teorema de Poincaré-Bendixson, em adição ao teorema da existência e da unicidade, nos diz que a trajetória poderá, ou se aproximar de um ponto fixo se houver algum dentro da órbita, ou se aproximar eventualmente da órbita fechada. Isto é, em duas dimensões, só pode haver movimento monotônico, ou movimento oscilatório. E portanto, para que exista Caos num sistema é necessário que ele possua uma dimensão  $n \geq 3$ , onde o teorema não mais se aplica e as trajetórias podem continuar indefinidamente em um conjunto fechado, sem irem para um ponto fixo ou ciclo limite. [24]

## 1.2 Caos

Não existe um consenso quanto a definição exata de Caos e sobre como classificá-lo de maneira exaustiva. Propriedades diferentes podem caracterizar o movimento caótico a depender do tipo de sistema considerado, se hamiltoniano/conservativo ou dissipativo, em tempo discreto ou contínuo, se possui ou não mais de uma variável independente. Uma definição simples dada por Strogatz [24] é de que Caos é um comportamento aperiódico de longo termo num sistema determinístico que apresenta dependência sensível às condições iniciais. Segundo Gutzwiller [26], podemos ainda classificá-lo entre *Soft Chaos*, em que o comportamento caótico é observado para um conjunto de trajetórias específicas, podendo ser obtido como a evolução ou perturbação a partir de um comportamento regular, ou *Hard Chaos*, em que cada trajetória do sistema é capaz de apresentar caos.

### 1.2.1 Atratores Caóticos



**Figura 1.5: Solução numérica para o sistema de Lorenz.** Fonte: [24]

O atrator estranho foi observado pela primeira vez por Lorenz ao resolver seu modelo simplificado para a dinâmica da atmosfera. Ele observou que após uma fase transiente, o sistema se estabelece num comportamento oscilatório irregular, mas completamente aperiódico. No entanto, essa aperiodicidade difere bastante de um sistema estocástico. Enquanto no último, a trajetória no espaço de fases é um conjunto de pontos espalhados, o do sistema de Lorenz exibe uma trajetória bem definida, que parece se cruzar repetidamente, mas sem fazê-lo, que veio depois a ser chamada de atrator estranho.

O sistema caótico paradigmático é dado pelas equações de Lorenz, um modelo matemá-

tico simples de convecção atmosférico baseado nas equações de Navier-Stokes,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= xy - bz.\end{aligned}\tag{1.12}$$

Em que os parâmetros de controle do sistema  $\sigma, r, b > 0$  proporcionais ao número de Prandtl, ao número de Rayleigh e à escala das convecções, respectivamente. Dependendo da escolha desses parâmetros, o sistema pode apresentar os atratores convencionais. No entanto, em algumas regiões do "espaço de parâmetros", essa equação dá origem a um comportamento errático, confinada a uma região fechada que eventualmente é atraída para um conjunto de volume zero.

Esse conjunto de equações pode ser resolvido por integração numérica. Para condições iniciais  $(x, y, z) = (0, 1, 0)$ , obtemos para  $y(t)$  a série temporal representada na figura 1.5a. É possível ver que o sistema passa por um período transiente com oscilações regulares aumentando de amplitude, até que se estabelece num movimento oscilatório aperiódico que persiste a medida que  $t \rightarrow \infty$

Representando a solução numérica no espaço de fases obtemos a estrutura apresentada na figura 1.5b, uma trajetória que, depois do período inicial, começa a espiralar em torno de um ponto, semelhante a um atrator normal, mas após um tempo vai para a esquerda e inicia um movimento espiral em torno de um ponto e retorna depois de um tempo, continuando esse movimento indefinidamente sem nunca ser atraído a um ponto fixo ou ciclo limite.

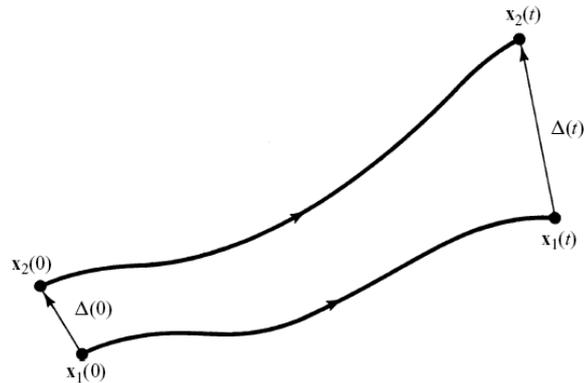
Dessa forma, podemos dizer que **atrator caótico** é aquele que apresenta instabilidade local e estabilidade global. Isso significa que, nele, trajetórias próximas são afastadas, mas permanecem confinadas dentro de um conjunto fechado que, normalmente, apresenta dimensão fractal.

## 1.2.2 Dependência Sensível à Condições Iniciais

A instabilidade local dos atratores caóticos é comumente conhecida como dependência sensível à condições iniciais, em que trajetórias no espaço de fase que iniciem em pontos próximos tendem a se afastar exponencialmente. Para ilustrar, consideremos dois pontos iniciais próximos  $\mathbf{x}_1(0)$  e  $\mathbf{x}_2(0) = \mathbf{x}_1(0) + \Delta(0)$  de uma mesma equação diferencial, cujas soluções são as duas órbitas  $\mathbf{x}_1(t)$  e  $\mathbf{x}_2(t)$ , respectivamente, conforme mostrado na figura 1.6.

Dizemos que um sistema possui dependência sensível à condições iniciais, se dado que num tempo  $t$ , a separação entre as duas órbitas  $\Delta(t) = \mathbf{x}_2(t) - \mathbf{x}_1(t)$ , então num limite em que  $|\Delta(0)| \rightarrow 0$ , para  $t$  grande, as órbitas permanecem numa região fechada e a diferença entre soluções  $|\Delta(t)|$  cresce exponencialmente para uma orientação típica do vetor. Isto é, se  $|\Delta(t)|/|\Delta(0)| \sim \exp(\lambda t), \lambda > 0$ .

A condição de pertencer a uma região fechada é necessária, pois caso contrário é muito simples que duas órbitas se distanciem exponencialmente se as órbitas vão para o infinito.

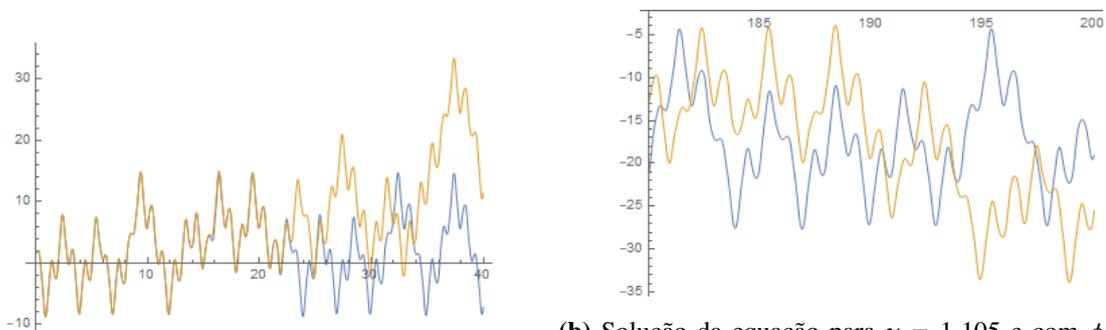


**Figura 1.6:** Evolução de duas órbitas próximas no espaço de fases. Fonte: [25]

Um exemplo dessa dependência sensível pode ser observada num pêndulo forçado e amortecido, com um termo de impulso cosseno, que pode ser escrito na forma adimensional como

$$\ddot{\phi} + 2\beta\dot{\phi} + \omega_0^2 \sin \phi = \gamma\omega_0^2 \cos \omega t. \quad (1.13)$$

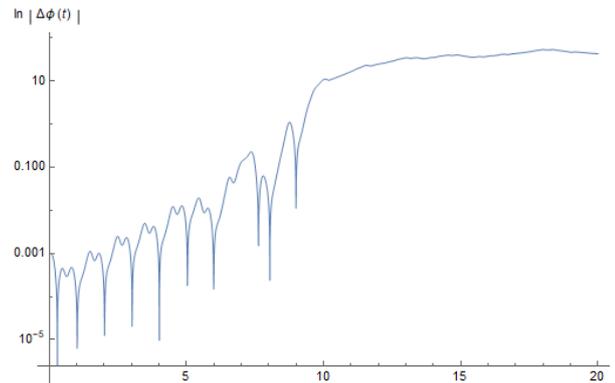
Para valores de  $\gamma$  acima de um valor limite,  $\gamma_c = 1.0829$ , o pêndulo forçado amortecido apresenta órbitas caóticas que podem ser facilmente observadas considerando condições iniciais com uma diferença de  $0.00001 \text{ rad}$ . A figura 1.7 demonstra duas trajetórias nos primeiros 40 segundos, e depois de 180 segundos.



(a) Solução da equação para  $\gamma = 1.105$  e com  $\phi(0) = \frac{-\pi}{2} \frac{-\pi}{2} + 0.00001$  (b) Solução da equação para  $\gamma = 1.105$  e com  $\phi(0) = \frac{-\pi}{2} \frac{-\pi}{2} + 0.00001$

**Figura 1.7: Duas trajetórias temporais de  $\phi(t)$ , com uma diferença de  $0.00001 \text{ rad}$**  Mesmo com uma diferença pífia nos valores das condições iniciais, o sistema rapidamente dá origem a duas trajetórias completamente diferentes. Fonte: Autor

Podemos ver que o comportamento é completamente aperiódico, e que as duas trajetórias se tornam totalmente diferentes após cerca de 20 segundos, no entanto, permanecem próximas umas das outras. De um ponto de vista experimental, essa separação entre as soluções significa que qualquer erro de medição irá ser amplificado. Decorrido tempo suficiente, até mesmo efeitos de ruído, flutuação e aproximações computacionais modificam a solução esperada para outra completamente diferente. Portanto, medições em sistemas que se encontrem em regime caótico possuem um "prazo de validade".



**Figura 1.8:** Evolução temporal da diferença entre dois sistemas com uma diferença de 0.00001rad na posição inicial. Fonte: Autor.

Uma forma simples de verificar o grau de separação entre duas curvas é através do gráfico de  $\ln |\Delta|(t)$  por  $t$ . Como  $|\Delta(t)| \sim \exp(\lambda t)|\Delta(0)|$ , esperamos que a curva logarítmica seja aproximadamente linear em sistemas caóticos com coeficiente positivo. Para a separação entre as trajetórias da figura 1.7, a curva do logaritmo da separação está apresentada na figura 1.8. Nesse caso específico, a curva em nenhum momento é exatamente reta, mas cresce de modo oscilante até atingir um ponto de saturação.

O número  $\lambda$  é chamado de maior expoente de Lyapunov, que faz parte de um conjunto de expoentes que constituem uma forma precisa de se medir a dependência sensível às condições iniciais de um sistema [24]. E por isso, são um dos parâmetros para a definição de Caos em um sistema conforme veremos a seguir.

### 1.3 Medindo Caos em Sistemas Empíricos

O estudo do Caos exibido em sistemas dinâmicos, como vimos até então, é focado em sua maior parte na solução de sistemas modelados por equações diferenciais ou de mapas iterados. No entanto, de que modo podemos aplicar os resultados conhecidos desse tipo de sistemas para análise de fenômenos reais e dados experimentais?

A primeira abordagem é a partir da construção de um modelo, capaz de recuperar características essenciais dos fenômenos reais a partir de idealizações e simplificações. Esse tipo de modelagem pode ser feito a partir de primeiros princípios, considerando os elementos mais simples que compõem o sistema e sua dinâmica para construir o modelo total. Ou através da parametrização de dados experimentais para descrição de leis empíricas.

Contudo, modelar um sistema não é uma tarefa simples. Nem sempre é possível determinar quais são os estados de um sistema dinâmico experimental, ou quantas componentes são necessárias para representá-lo. Em outros casos, não é possível sequer medir todas as componentes de um vetor  $\mathbf{x}(t)$  que determina o estado de um sistema e, portanto, abordagens alternativas devem ser consideradas.

### 1.3.1 Coordenadas Atrasadas

Um requisito fundamental para o estudo de caos em sistemas empíricos partir dos métodos da teoria de sistemas dinâmicos é a possibilidade de reconstruir o espaço de fase a partir de um conjunto de medições.

É garantido pelo teorema de mergulho de Whitney [23], que se  $\mathbb{R}^k$  é o espaço de um sistema dinâmico, e que nele há variedades  $d$ -dimensional, então é possível reconstruir um estado nessa variedade a partir de um conjunto de  $m$  medições simultâneas e independentes do sistema em um instante de tempo qualquer, desde que  $m > 2d$ .

Como desdobramento desse teorema, foi demonstrado posteriormente por Takens [?] que o espaço de fases de um sistema e seus subconjuntos, como atratores, podem ser reconstruídos a partir de uma série temporal por meio do método de coordenadas atrasadas.

Para isso, consideramos que é possível obter uma função escalar de um vetor de estado

$$g(t) = G(\mathbf{x}(t)), \quad (1.14)$$

podemos definir as coordenadas atrasadas como o conjunto  $\mathbf{y} = (y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(M)})$ , tal que

$$\begin{aligned} y^{(1)}(t) &= g(t), \\ y^{(2)}(t) &= g(t - \tau), \\ y^{(3)}(t) &= g(t - 2\tau), \\ &\vdots \\ y^{(M)}(t) &= g[t - (M - 1)\tau], \end{aligned} \quad (1.15)$$

em que  $\tau$  é algum intervalo de tempo fixo, escolhido de modo a ser da ordem do tempo característico em que  $g(t)$  varia.

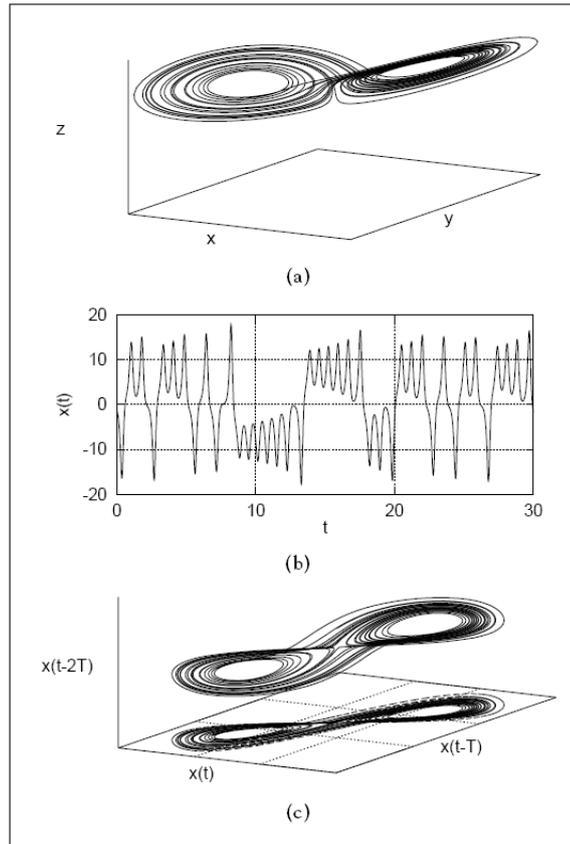
Seja  $\mathbf{x}$  dado em um tempo específico  $t_0$ , seria possível obter em princípio  $\mathbf{x}(t_0 - m\tau)$  integrando no tempo, por uma quantidade  $m\tau$ , as equações diferenciais que definem o sistema. Logo  $\mathbf{x}(t_0 - m\tau)$  é unicamente determinada para  $\mathbf{x}(t_0)$  e pode ser tomada como um função de  $\mathbf{x}(t_0)$

$$\mathbf{x}(t - m\tau) = \mathbf{L}_m(\mathbf{x}(t)). \quad (1.16)$$

Desse modo,  $g(t - m\tau) = G(\mathbf{L}_m(\mathbf{x}(t)))$ , e podemos tomar o vetor  $\mathbf{y}(t)$  como uma função de  $\mathbf{x}(t)$

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}(\mathbf{x}). \quad (1.17)$$

Pelo teorema de Takens [23], se  $A$  é um subconjunto  $d$ -dimensional de  $\mathbb{R}^k$  que é invariante para um sistema dinâmico  $g$ . Se  $m > 2d$  e  $\mathbf{g} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$  é uma função de reconstrução em coordenadas atrasadas com um atraso genérico  $T$  então,  $g$  é um a um com  $A$ . Isto é, se  $a \neq b$  em  $A$  então,  $F(a) \neq F(b)$  em  $\mathbb{R}^m$ . E portanto, se a trajetória de  $\mathbf{x}(t)$  do sistema "original"exibe



**Figura 1.9:** Atrator de Lorenz reconstruído a partir de uma série temporal. (a) trajetória no sistema de Lorenz, (b) coordenadas  $x$  de (a) plotadas em função do tempo, (c) reconstrução do atrator de Lorenz por meio de coordenadas atrasadas da série temporal de  $x$ . Fonte: [23]

um atrator estranho no espaço de fases, então  $y(t)$  também possui um atrator qualitativamente semelhante.

### 1.3.2 Medidas de Caos

A priori, a reconstrução de estruturas no espaço de fases a partir de séries temporais, por si só, constitui um método para se identificar caos, através da existência de atratores caóticos. Todavia, existem ainda outras medidas quantitativas associadas à fractalidade do atrator estranho e à dependência sensível às condições iniciais, que podem ser empregadas.

#### Medidores de Dimensão

Medidores de dimensão focam na estrutura geométrica, estática, do sistema. A dimensão de um sistema corresponde ao número de variáveis independentes necessárias para especificar o estado de um sistema em todos os instantes, ou ainda o número de graus de liberdade inerentes ao movimento. Há, entretanto, uma distinção significativa entre dimensão do espaço de fases, uma propriedade do sistema dinâmico, e a dimensão do atrator no espaço de fases, que é um subconjunto do primeiro.

Atratores simples, como pontos fixos, possuem uma noção de dimensão convencional inteira associada a eles. Podemos, por exemplo, pensar num ponto como tendo dimensão nula, ou num ciclo limite sendo unidimensional. Já para atratores caóticos, devido a sua estrutura fractal, é necessário adotar métodos de contagem para definir uma dimensão não inteira.

Vários métodos foram desenvolvidos para se estimar dimensões em fractais, com base na ideia de medição numa escala  $\epsilon$ . Isto é, medir um conjunto de modo a ignorar irregularidades com tamanho  $\epsilon$  e então considerar o caso para o qual  $\epsilon \rightarrow 0$ .

**Dimensão de Capacidade:** Para calcular essa medida consideramos que o atrator, constituído por  $n$  pontos no espaço de fases de dimensão  $D$ , é coberto por uma malha regular de caixas  $D$ -dimensional com arestas de comprimento  $\epsilon$ , o que leva o método também a ser chamado de dimensão de caixa.

Para estimar a dimensão, contamos o número mínimo  $N(\epsilon)$  de caixas vazias necessárias para cobrir o conjunto. Por exemplo, se temos uma linha reta de comprimento  $L$  e  $N(\epsilon)$  caixas são necessárias, então  $N(\epsilon) = L(1/\epsilon)$ . Para uma superfície em duas dimensões,  $N(\epsilon) \propto \frac{L^2}{\epsilon^2}$ . E assim para uma figura  $D$  dimensional, a fórmula é  $N(\epsilon) = L^D(1/\epsilon)^D$ . Tomando o logaritmo, vemos que  $D$  é igual ao log de  $N(\epsilon)$  dividido pelo log de  $1/\epsilon$ . Como  $L$  é desprezível no limite de  $\epsilon$  pequeno então temos a seguinte fórmula para a dimensão de caixa

$$C = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{\ln N(\epsilon)}{\ln (1/\epsilon)} \right]. \quad (1.18)$$

De modo prático, a dimensão de capacidade pode ser obtida através da curva de  $\ln N(\epsilon)$  por  $\ln 1/\epsilon$ , quando  $\epsilon$  é suficientemente pequeno. Para atratores estranhos a dimensão de capacidade possui um valor não inteiro. Por exemplo, o atrator de Lorenz possui capacidade  $\approx 2.08$ .

**Dimensão de Informação:** Generalização da dimensão de capacidade avaliando cada cubo vazio  $i$  ponderado pela densidade de probabilidade  $p_i$  da trajetória visitar o cubo:

$$\delta = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{\sum_{i=1}^{N(\epsilon)} p_i \ln (1/p_i)}{\ln(1/\epsilon)} \right] = \left[ \frac{\sum_{i=1}^{N(\epsilon)} p_i \ln (p_i)}{\ln(\epsilon)} \right]. \quad (1.19)$$

Uma interpretação possível para essa medida é que ela representa a quantidade de números reais, ou bits de informação, necessárias para especificar um ponto com um certo grau de precisão. Quanto mais precisão é necessária, mais ajustado é a malha e, conseqüentemente, mais bits de informação são necessários para especificar a posição.

### Abordagem Dinâmica:

Os medidores de dimensão enfatizam as qualidades estáticas do sistema, focando em descrever a densidade de ocupação de regiões do espaço de fase, mas sem levar em consideração a evolução temporal. Para as características dinâmicas, as medidas mais utilizadas são a entropia

e o espectro dos expoentes de Lyapunov, que ajudam a compreender de que maneira as trajetórias se desenvolvem no tempo.

### Entropia

Do ponto de vista informacional, entropia pode ser definida como a média da informação ganha ao se observar o estado do sistema com uma precisão  $\epsilon$ . Para delimitar a quantidade de informação criada ou perdida, em média, pela evolução temporal de uma porção do sistema podemos usar a entropia de Kolmogorov-Sinai. Que consiste em estimar, com precisão  $\epsilon$ , o intervalo de tempo em que o estado do sistema pode ser conhecido, a partir de medições da taxa de informação gerada pelo sistema.

Sistemas caóticos geram informação continuamente, devido a sensibilidade às condições iniciais, o que torna previsões de longo alcance impossíveis. Se considerarmos duas trajetórias inicialmente próximas, com separação  $\epsilon$ , rapidamente veremos que elas começam a se afastar significativamente até se tornarem bastante distintas. Isto é, considerando uma que o espaço é dividido numa malha de caixas, elas visitarão caixas diferentes.

Particionando o atrator ao qual essas trajetórias pertencem em  $N(\epsilon)$  caixas  $s_1, \dots, s_N$  de tamanho  $\epsilon$ , então  $m$  medições sucessivas realizadas em intervalos de tempo regulares  $\tau$  irão resultar em uma sequência de caixas  $(s_1, \dots, s_N)$  visitadas pela trajetória observada. Seja  $P(s_1, \dots, s_N)$  a probabilidade conjunta de se encontrar num tempo  $\tau$  a trajetória na caixa  $s_1$ , num tempo  $2\tau$  a trajetória na caixa  $s_2$ , ..., e num tempo  $m\tau$  a trajetória na caixa  $s_m$  podemos definir a entropia  $K - S$ , como

$$K = - \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{m \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{m\tau} \sum_{s_1, \dots, s_m} P(s_1, \dots, s_m) \ln P(s_1, \dots, s_m) \right] \quad (1.20)$$

O tempo para o qual o comportamento do sistema pode ser previsto é proporcional a  $1/K$ . Quando  $K$  se aproxima de 0 significa que o sistema se tornou totalmente previsível e novas medições não geram informação nova. Em contraste quando  $K$  vai para o infinito, cada medição gera uma informação nova, característica de um processo estocástico. Já para um sistema caótico, a entropia métrica possui um valor finito e positivo, quanto maior esse valor, mais caótico é o sistema.

### Espectro dos expoentes de Lyapunov

A forma mais utilizada de se medir a dependência sensível às condições iniciais num sistema é através dos expoentes de Lyapunov. Para um conjunto de  $n$  equações diferenciais podemos definir um espectro de coeficientes de Lyapunov  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  que determinam a taxa de afastamento entre dois pontos ao longo de direções ortogonais. Isso é o equivalente à evolução temporal no espaço tangente ao espaço de fase, determinado pela matriz jacobiana

$$J_{ij}(t) = \left. \frac{df_i(x)}{dx_j} \right|_{x(t)}. \quad (1.21)$$

**Tabela 1.1:** Tipo de atrator associado a um espectro de expoentes de Lyapunov com base na dimensão do espaço de fases. Adaptado de [3]

Dimensão	Expoentes de Lyapunov	Tipo de Atrator
1	–	Ponto Fixo
2	–, –	Ponto Fixo
2	0, –	Ciclo Limite
3	–, –, –	Ponto Fixo
3	0, –, –	Ciclo Limite
3	+, 0, –	Atrator Estranho

Nesse caso, a evolução temporal dos vetores tangentes, dado pela matriz  $Y$ , pode ser escrita como

$$\dot{Y} = JY \quad (1.22)$$

com condição inicial  $Y_{ij}(0) = \delta_{ij}$ . A matriz  $Y$  representa o quanto uma mudança pequena num ponto  $x(0)$  se propaga até a um ponto final  $x(t)$ . Assim, no limite  $t \rightarrow \infty$  podemos definir a matriz

$$\Lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \log(Y(t)Y^T(t)) \quad (1.23)$$

cujos autovalores  $\lambda_i$  são os expoentes de Lyapunov [18].

Em uma trajetória de dimensão  $n$  é possível definir  $n$  expoentes de Lyapunov, cada qual medindo a taxa média de divergência ou convergência exponencial de trajetórias infinitamente próximas ao longo de eixos ortogonais. Os expoentes de Lyapunov  $\lambda$  podem ser positivos, negativos ou nulos. Se  $\lambda$  é negativo, as trajetórias convergem no tempo. Se  $\lambda$  é positivo, então as trajetórias divergem, e qualquer diferença pequena nas condições iniciais se torna do tamanho do atrator em tempo finito. Podemos usar os expoentes de Lyapunov para classificar o tipo de atrator num sistema dissipativo, conforme o apresentado na tabela 1.1.

Por definição, sistemas dissipativos devem possuir pelo menos um expoente de Lyapunov negativo para que possuam atratores. Se o atrator é um ponto fixo, todos os expoentes devem ser negativos para que todas as direções sejam contraídas para um subconjunto de dimensão zero, o ponto. Se o atrator não é um ponto fixo, então pelo menos um expoente deve ir a zero indicando que pelo menos em alguma direção do fluxo, a distância se mantém constante. E para atratores caóticos, deve haver pelo menos um expoente de Lyapunov positivo para que dois pontos inicialmente próximos se afastem exponencialmente em alguma direção. Além do caráter qualitativo da dinâmica determinado pelo sinal dos expoentes de Lyapunov, sua magnitude também pode ser usada como medida quantitativa de caos no sistema. Quanto maior for o expoente de Lyapunov positivo, maior é o distanciamento de trajetórias no atrator numa direção particular e menor é a previsibilidade da evolução do sistema.

## 1.4 Caos no Coração

Uma das áreas que atualmente empregam conceitos da teoria de sistemas não lineares e caos é a fisiologia. Grande parte do entendimento sobre a vida e sobre os mecanismos que a constituem a vida, se dá pelo estudo de processos cíclicos, que estão presentes nos mais diversos níveis de organização - desde o nível celular ao de organismo como um todo. Desses, muitos podem ser observados no corpo humano: o batimento do coração, os movimentos rítmicos dos membros enquanto andamos, o ciclo natural de acordar e dormir, assim como muitos outros menos evidentes que regulam a liberação de hormônios durante o metabolismo, a digestão de comida e outros processos no corpo humano.

Ritmos fisiológicos são centrais para a vida, e a interrupção de um deles pode causar danos a saúde. No entanto, a presença de ritmos nem sempre é equivalente ao funcionamento normal do organismo. Em muitos casos, o surgimento de ritmos anormais é indicativo de patologia. Portanto, compreendê-los e o modo como eles surgem ou deixam de ocorrer, é indispensável para entender a vida como um todo, e para o desenvolvimento de ferramentas e métodos de diagnósticos e terapias para a cura de doenças.

Na fisiologia clássica, a dinâmica dos processos rítmicos é, em geral, descrita em termos de sistemas lineares de retroalimentação, que atuam de modo a manter o corpo num estado de equilíbrio. No entanto, investigações recentes demonstram que muitos ritmos normais do corpo humano apresentam comportamento errático de natureza determinística [3], sugerindo que uma teoria completa sobre o funcionamento fisiológico precisa também incorporar aspectos da dinâmica não linear. Nesse sentido, diversos estudos têm sido realizados para compreender o papel do caos no funcionamento normal e anormal das funções vitais, e se é possível correlacionar univocamente comportamento caótico com saúde ou doença.

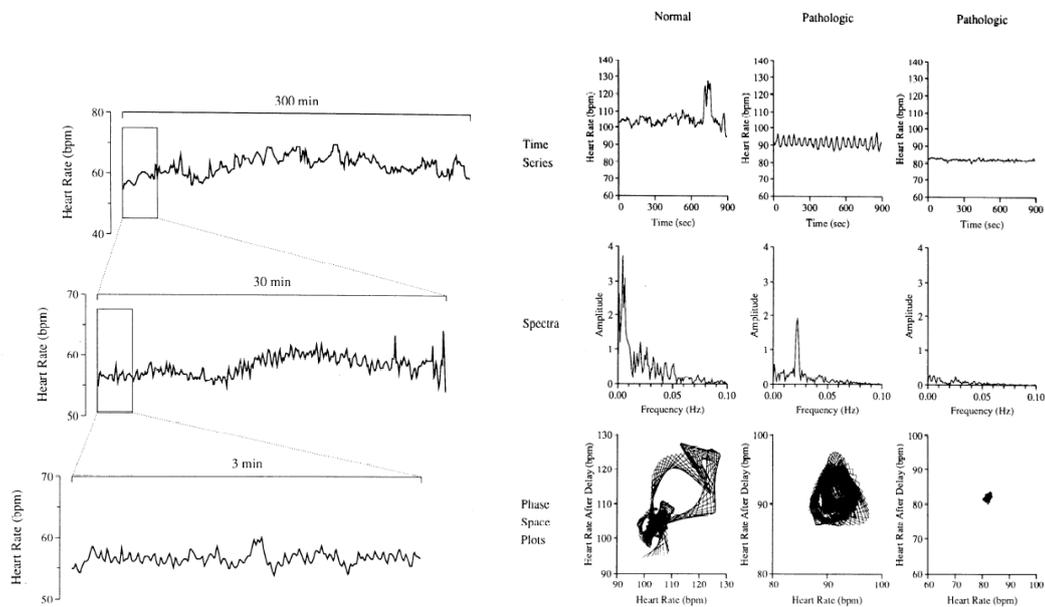
Uma das hipóteses, sugeridas por Glass e Mackey é de que mudanças de ordem para desordem podem ser identificadas como a transição do estado regular saudável do sistema vivo para um estado patológico, chamados "doenças dinâmicas" [5], que segue a linha tradicional da homeóstase de que saúde num ser vivo corresponde a estados de equilíbrio determinado por variáveis estacionárias num intervalo permitido. Todavia, como atratores caóticos são caracterizados por estarem em uma região fechada, o comportamento caótico não é completamente contrário ao equilíbrio homeostático. Goldberger e West [28] argumentam que a dinâmica do sistema fisiológico saudável pode conter variabilidade aparentemente irregular e complexa, e que um grau de maior de complexidade pode ser entendido como sinal de saúde corporal.

### 1.4.1 O batimento cardíaco normal é homeostático ou caótico?

As mesmas questões levantadas para a fisiologia como um todo podem ser aplicadas ao coração. Diferentes pesquisas tem sido realizadas no âmbito de aplicar os métodos desenvolvidos na seção anterior para compreender o papel do caos no coração. No entanto, não há consenso ainda sobre esse papel. Em [13], Goldberg argumenta que a ideia de homeóstase não se aplica

bem à atividade cardíaca normal. Ainda que o coração tenda a manter uma pressão diastólica e sistólica em valores de equilíbrio, o batimento cardíaco normal está sujeito a um grande grau de variabilidade, que o torna imprevisível e assim, parece violar a constância de sistemas homeostáticos não perturbados.

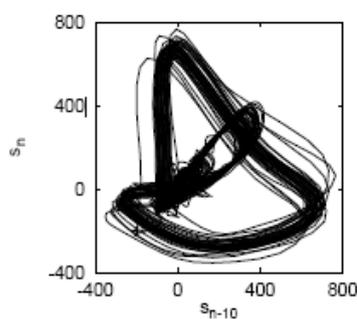
A partir da análise de séries temporais de pacientes saudáveis e doentes, figura 1.10, é possível perceber que o caso clínico mais significativo de Caos é o encontrado na dinâmica do ritmo sinusal regular, e que esse ainda apresenta uma série temporal com padrão errático, com uma estrutura semelhante à fractal, caracterizado por uma largura de banda ampla, em contraste com processos altamente regulares, que possuem uma largura de banda estreita, e picos bem definidos separados. Isso é corroborado ao se realizar o mapeamento da série temporal num espaço de fases é possível identificar figuras com características de atrator estranho, ao invés de um ciclo limite ou um atrator regular que definem comportamento periódico.



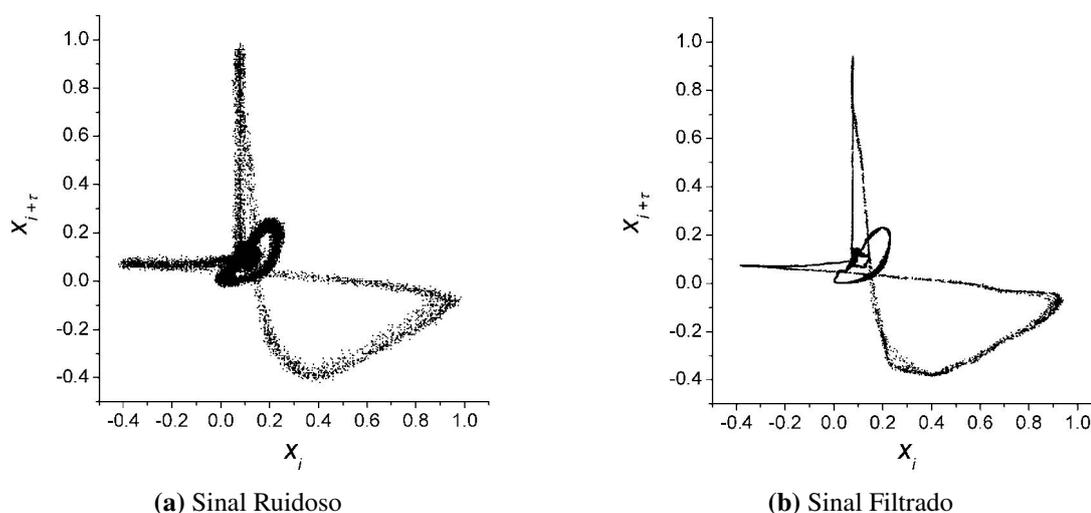
(a) Série temporal do coração com ritmo sinusal normal. (b) Séries temporais (cima), espectro de frequências (meio) e atratores caóticos reconstruídos (baixo), de eletrocardiograma de um indivíduo saudável (esquerda) e indivíduos com patologias.

**Figura 1.10: Comparação entre a dinâmica do coração saudável e dois casos de patologia.** Fonte: [13]

Kantz e Schreiber [29], demonstram que os intervalos RR obtidos de ondas de ECG com um ciclo podem ser aproximadas por superfícies de baixa dimensão, e utilizam o método de coordenadas atrasadas para obter o um atrator caótico, figura 1.11 que representa a dinâmica de um intervalo de 20s do eletrocardiograma e demonstram que esse resultado pode ser utilizado para a redução de ruído. Porém, constataram também que em longos intervalos de tempo o método de espaço de fases não pode ser aplicado devido a não-estacionaridade dos intervalos RR. E de modo semelhante, podemos ver na figura 1.12 que para parâmetros ótimos de dimensão e atraso, as coordenadas atrasadas podem obter um atrator caótico a partir de sinais de eletrocardiograma mesmo na presença de ruído [30].



**Figura 1.11:** Atrator caótico reconstruído a partir de um sinal de um ciclo do eletrocardiograma. Fonte: [29]



**Figura 1.12:** Reconstrução de atrator caótico a partir de uma série temporal de eletrocardiograma por meio do método de coordenadas atrasadas. Fonte: [30]

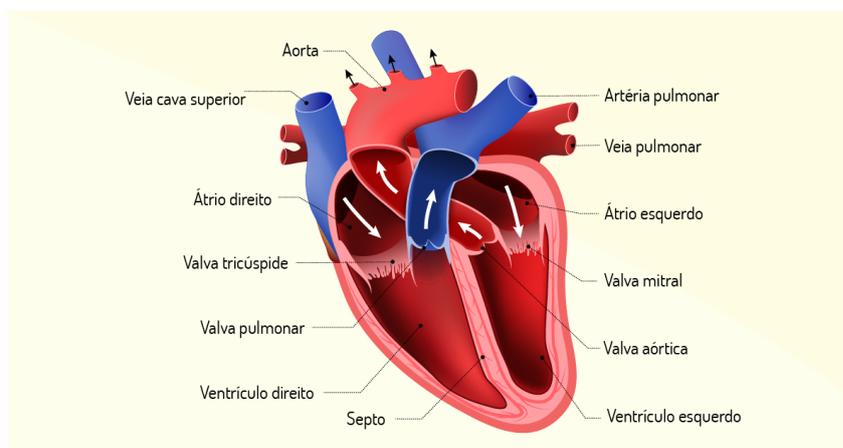
Não obstante, os resultados não são conclusivos. Por exemplo, em [31] e [32] não foi possível obter atratores caóticos a partir da reconstrução do espaço de fase da variabilidade de frequência cardíaca de indivíduos saudáveis e com fibrilação atrial, respectivamente. Nesses casos, a dimensão de atrator medida foi aproximadamente inteira, correspondente a atratores simples, o que indica ausência de caos de baixa dimensão.

Portanto, uma vez que os métodos tradicionais de análise de caos em sistemas cardíacos a partir de eletrocardiograma se mostraram inconclusivos na literatura, iremos aplicar métodos alternativos que nos permitam identificar a presença de caos sem a necessidade de reconstrução de espaço fase, evitando ambiguidades quanto a escolha de dimensão utilizada para representar o atrator caótico, e com menor custo computacional.

No entanto, para corroborar a ideia de caos nesses sistemas e entender de que modo fazer uma análise adequada desse tipo de sinal, veremos primeiro como é gerada a atividade elétrica no coração, como ela é gravada por meio de eletrocardiografia e quais são as características de alguns tipos de ritmos que emergem no funcionamento cardíaco.

## Capítulo 2

# Biofísica do Coração



**Figura 2.1:** Estrutura anatômica do coração(vista interna). Fonte: [33]

O coração é um órgão muscular que pode ser descrito como duas bombas paralelas quase simétricas, cada qual com funcionamento distinto mas função semelhante: bombear ritmicamente sangue para regiões diferentes do corpo. Ambos os lados, esquerdo e direito, são regiões com cavidades que permitem a passagem e armazenamento de sangue. Compostos por um Átrio e um Ventrículo cada e divididos pela parede do coração, o Septo.

Os átrios são responsáveis por receber o sangue: o direito recebe o sangue venoso vindo do sistema circulatório, e o esquerdo recebe o sangue oxigenado vindo do pulmão por meio da artéria pulmonar. Já os ventrículos são responsáveis por enviar o sangue para outras regiões do corpo. O ventrículo direito, para o pulmão para o processo de oxigenação do sangue venoso, e o esquerdo para todo o corpo por meio do sistema circulatório. Outras partes do coração são responsáveis pelo controle do fluxo sanguíneo, as válvulas: a valva atrioventricular, localizada entre átrios e ventrículos, e as valvas pulmonar e aórtica, localizadas entre ventrículos e artérias.

Esse fluxo ocorre devido a contrações de grupos de células do sistemas de condução cardíaco, localizado na camada intermediária da parede total do coração, o miocárdio. Esse sistema de condução é formado por células condutoras de pulso elétrico, que sinalizam a liberação de cálcio nas células musculares que geram as contrações. É essa relação entre

processos mecânicos, elétricos e físico-químicos no coração que permite a análise da saúde cardíaca por meio de atividade elétrica, e que embasa a ideia de seu possível comportamento caótico.

## 2.1 Potencial Elétrico das Membranas

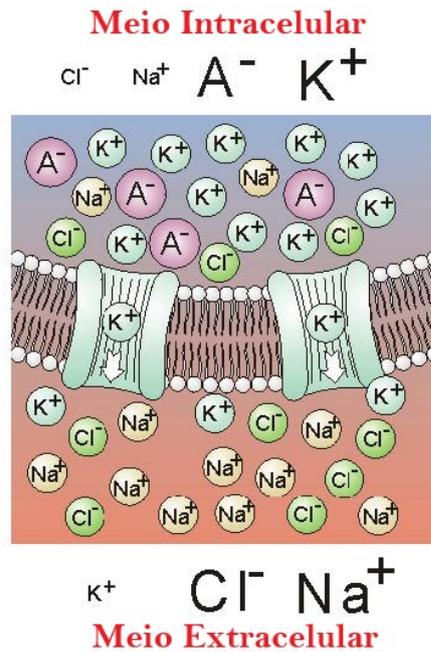
No coração, assim como em outros tecidos excitáveis, a atividade elétrica é resultado da formação dos potenciais de membrana nas células. Consequência, principalmente, da composição molecular das membranas celulares e do fluxo de íons que pode ocorrer por difusão, pela formação eventual de gradientes elétricos ou através de proteínas especializadas chamadas bombas de sódio-potássio.

Há, constantemente, na membrana celular uma diferença de potencial entre o meio interno e o externo, denotado simples potencial de membrana, que pode se apresentar de duas formas. No seu estado natural, todas as células se encontram polarizadas negativamente, e é possível medir nelas o chamado potencial de repouso, em magnitudes que variam de acordo com a especialização do tecido. Já nas células excitáveis, há também o potencial de ação que surge quando a célula é estimulada. Esse estímulo pode ser excitatório gerando despolarização, que torna o potencial transmembrana mais positivo e desencadeia a atividade elétrica em células vizinhas. Ou pode ser inibitório, através de hiperpolarização, tornando a célula ainda mais negativa, recuperando o estado de repouso.

### 2.1.1 Potencial de Repouso

O fator determinante na formação do potencial elétrico de repouso é o desbalanço na abundância de íons que há entre os meios intra e extracelular: uma maior concentração de sódio  $Na^+$  e cloreto  $Cl^-$  no meio externo, e de potássio  $K^+$  e outros íons de menor contribuição no meio interno. Como a membrana celular é composta de uma bicamada lipídica hidrofóbica, o transporte iônico entre os meios só é possível por intermédio de canais proteicos hidrofílicos, presentes na superfície da membrana. Durante o repouso, estão abertos ainda os canais de vazamento, alguns permitindo a passagem de vários tipos de íons, e outros de só um tipo, conferindo permeabilidade seletiva à membrana. Dessa forma, íons de carga diferente tendem a se acumular de lados opostos da membrana, polarizando a célula.

Podemos entender como se forma o potencial de repouso, a partir de uma situação simplificada representada na figura 2.2, em que estão presentes somente os íons potássio  $K^+$ , sódio  $Na^+$  e cloreto  $Cl^-$ . E de modo ainda mais simplificado, consideramos que o canal é permeável ao potássio, que é em geral a maior contribuição para o potencial. A concentração do potássio é normalmente em torno de 30 a 50 vezes maior no meio intracelular do que no meio extracelular. Como consequência, há um gradiente de concentração, e os íons de potássio se movem por difusão para o exterior da célula, deixando para trás um número igual de íons



**Figura 2.2:** Representação de uma parte da membrana de uma célula excitável em repouso rodeado pelo meio intracelular e extracelular. Nessa ilustração estão representados somente os íons  $\text{Na}^+$ ,  $\text{Cl}^-$  e  $\text{K}^+$ , e os demais íons com contribuição para o potencial de repouso são representados por  $\text{A}^-$ . Adaptado de [34].

negativos. Nesse processo a capacitância da membrana está carregando, gerando um campo elétrico direcionado para dentro da célula proporcional ao fluxo de potássio, mas se opondo ao movimento deste.

A soma das forças elétricas e de difusão que atuam no movimento dos íons pela membrana formam o **gradiente eletroquímico**, que eventualmente se torna nulo, quando a força que resiste ao movimento dos íons para fora é igual a força de difusão. Ou, mais precisamente, quando a quantidade de íons transportados para fora devido ao gradiente de difusão é, em média, igual a quantidade de íons transportado para dentro devido ao gradiente elétrico. Nesse ponto o sistema se encontra em equilíbrio, não há mais fluxo resultante, e o potencial na membrana é determinado pela concentração dos íons no meio intracelular e extracelular.

O **potencial de equilíbrio** é a diferença de potencial elétrico entre as camadas da membrana que equilibra o gradiente de concentração. Portanto, a magnitude do potencial de membrana é diretamente proporcional ao gradiente de concentração iônico e à carga dos íons em fluxo. Quando o sistema se encontra em equilíbrio, o potencial da membrana é igual ao potencial de equilíbrio. Caso uma célula fosse permeável somente a passagem do potássio, o seu potencial de repouso seria igual ao potencial de equilíbrio  $V_k = \Phi_i - \Phi_o$  que pode ser escrito, por meio da equação de Nernst [34]., como

$$V_k = -\frac{RT}{z_k F} \ln \frac{c_{i,k}}{c_{o,k}}, \quad (2.1)$$

em que  $c_{i,k}$  e  $c_{o,k}$  denotam a concentração do  $k$ -ésimo íon dentro e fora da célula, respectivamente,

$T$  é a temperatura do meio em unidades absolutas [ $K$ ],  $z_k$  é a valência do  $i$ -ésimo íon,  $F$  é a constante de Faraday e  $R$  é a constante universal dos gases.

Em células reais, o potencial de membrana e as diferentes características elétricas das células excitáveis são determinados pelas contribuições de vários outros tipo iônicos além do sódio, potássio e cloreto, todos com algum nível de permeabilidade pela membrana. Por isso, o potencial de repouso é uma contribuição do potencial de equilíbrio de todas as espécies iônicas.

No caso das células do miocárdio, as membranas também são permeáveis à  $Na^+$  e  $Cl^-$ , e o potencial de equilíbrio do potássio é contrabalanceado pela existência de correntes de sódio na direção oposta ao fluxo do potássio, o que resulta num potencial de repouso um pouco menor do que o dado pela equação 2.1. Para determinar o valor do potencial nessa situação, assumimos que o fluxo iônico de um tipo é independente do fluxo de outros íons, e assim o potencial total  $V_m$  da membrana pode ser calculado como uma média ponderada dos potenciais de equilíbrio de cada íon, determinado pela equação de Millman

$$V_m = \frac{g_{K^+}}{g_{tot}} V_{eq,K^+} + \frac{g_{Na^+}}{g_{tot}} V_{eq,Na^+} + \frac{g_{Cl^-}}{g_{tot}} V_{eq,Cl^-} \quad (2.2)$$

em que  $g_i$  é a condutância de cada espécie iônica e  $g_{tot}$  é a soma de todas condutâncias, em unidades arbitrárias.

No entanto, a equação 2.2 assume que a relação de potencial e condutância na membrana é ôhmico, o que nem sempre é válido. Uma estimativa mais precisa do potencial de membrana é dada pela equação de Goldman-Hogkin-Katz [34],

$$V_m = \frac{RT}{F} \ln \left( \frac{P_{Na^+} c_{Na^+,o} + P_{K^+} c_{K^+,o} + P_{Cl^-} c_{Cl^-,i}}{P_{Na^+} c_{Na^+,i} + P_{K^+} c_{K^+,i} + P_{Cl^-} c_{Cl^-,o}} \right) \quad (2.3)$$

que considera o fluxo devido aos gradientes de concentração dos íons, em que  $P_l$  é a permeabilidade da membrana ao íon  $l$ . Temos uma equação semelhante à equação de Nernst, mas com um termo pra cada íon dentro do logaritmo.

Apesar de ser determinado pelos potenciais de equilíbrio das espécies iônicas, o potencial de membrana em si não é um potencial de equilíbrio. É necessário um gasto de energia constante para que seja mantido, através das bombas de sódio e potássio. Também responsáveis por evitar degeneração da célula, que ocorre quando a concentração iônica se torna homogênea entre os meios. Como efeito, os potenciais de repouso são estados quase estacionário mantido pelos gradientes de concentração e pelas bombas de potássio, ainda que este último pouco contribua para a magnitude do potencial.

O último mecanismo que atua na geração de potencial de membrana é a abertura e fechamento de canais iônicos, permitindo que a membrana apresente diferentes graus de permeabilidade a um tipo de íon, dependendo das condições do meio. Esse mecanismo também contribui na formação dos potenciais de repouso, mas atua principalmente na geração dos potenciais de ação, ao permitir que a célula despolarize, repolarize ou hiperpolarize como

consequência de influxos de determinados tipos iônicos.

### 2.1.2 Potencial de Ação

O potencial de ação é o que possibilita as células excitáveis de conduzirem sinais elétricos. Ocorre quando há uma variação brusca no potencial de membrana de uma célula, primeiro crescendo e depois decaindo, causando um efeito cascata de despolarização nas células adjacentes do mesmo grupo.

No coração, o potencial de ação é iniciado quando a célula recebe um estímulo de um potencial de marcapasso que desencadeia a injeção extra de cátions  $Na^+$  na célula. Esse fluxo de íons, por sua vez, causa a despolarização da célula. Partindo do potencial de repouso, a membrana passa a ter uma alta permeabilidade aos íons de sódio, provocando um grande influxo desses íons, o que torna a célula menos negativa. Se o potencial passar do chamado limiar de excitabilidade da célula, então uma mudança abrupta e transitória ocorre no potencial elétrico da célula que cresce e alcança até  $+30mV$  de voltagem. Caso contrário, não há geração de nenhum potencial. Nesse sentido, diz-se que os potenciais de ação seguem uma lei tudo ou nada.

Após a despolarização, a célula entra em estado de repolarização devido à abertura dos canais de potássio que, por possuírem cinética lenta, não se fecham quando retornam ao potencial de repouso, o que gera também hiperpolarização. Por fim, tanto os canais de potássio quanto a bomba de sódio e potássio atuam para retornar a célula ao potencial de repouso.

É essencialmente esse ciclo de despolarização, repolarização, hiperpolarização a partir do potencial de repouso, se propagando por conjuntos de células especializadas no tecido cardíaco, que dão origem à atividade elétrica do coração e que são registrados por meio do eletrocardiograma.

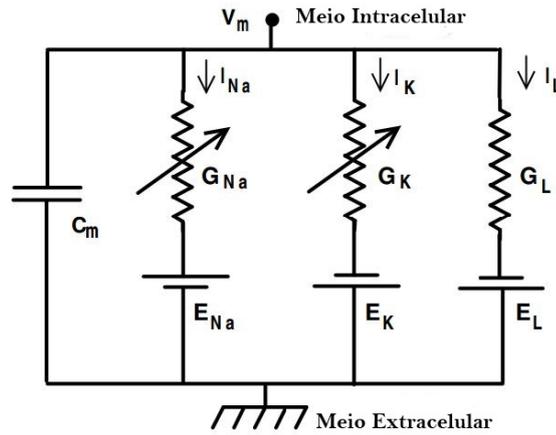
### 2.1.3 Modelo de Hodgkin-Huxley

Grande parte do que se sabe hoje sobre os potenciais de ação se deve ao sucesso do modelo de Hodgkin-Huxley em explicar o comportamento elétrico ativo e passivo da membrana do axônio gigante de lula. O modelo é baseado na ideia de que a membrana celular se comporta como um circuito capacitivo, conforme o ilustrado na figura 2.3.

O surgimento dos potenciais de ação na membrana decorre das correntes de membrana  $I_m$  que pode ser escrita por meio da lei de Kirchoff como

$$I_m = I_c + I_i + I_L, \quad (2.4)$$

em que  $I_i$  é a corrente iônica, do fluxo de sódio e potássio,  $I_L$  é a corrente de vazamento, devido às contribuições de íons menos importantes e  $I_c$  é a corrente capacitiva da membrana. Todas elas satisfazendo a lei de Ohm  $I = g\Delta V$ , em que  $g$  é a condutância e no caso das correntes iônicas,  $\Delta V = V_m - V_i$  é a diferença de potencial da membrana em relação ao potencial de equilíbrio.



**Figura 2.3:** Circuito análogo à membrana celular no modelo de Hodgkin-Huxley. Adaptado de [35]

O sucesso do modelo está em descrever a variação temporal das correntes iônicas. Para explicar o comportamento da condutância, os autores originalmente utilizaram a ideia de partículas imaginárias responsáveis pela ativação e inativação dos canais de sódio, potássio. Consideramos que as partículas podem estar em dois estados distintos, e que a abertura e fechamento de canais é governado pelo transição de estados das partículas. A partir da dinâmica dessas partículas, foi possível escrever as curvas de condutância ao potássio e ao sódio como

$$g_K = G_K \cdot n^4$$

$$g_{Na} = G_{Na} \cdot m^3 \cdot h$$

em que  $g_k$  e  $g_{Na}$  é a condutância da membrana ao potássio e ao sódio, respectivamente, e  $n, m$  e  $h$  é quantidade das partículas responsáveis pela inativação dos canais de potássio, ativação e inativação dos canais de sódio, respectivamente. A distribuição de  $n, m$  e  $h$  obedecem as equações diferenciais

$$\begin{aligned} \frac{dn}{dt} &= \alpha_n (1 - n) - \beta_n n \\ \frac{dm}{dt} &= \alpha_m (1 - m) - \beta_m m \\ \frac{dh}{dt} &= \alpha_h (1 - h) - \beta_h h \end{aligned} \quad (2.5)$$

em que  $\alpha_i$  é a taxa de transição que contribuem para ativação dos canais de sódio, e  $\beta_i$  são as taxas de transição no sentido contrário. A partir dessas equações, e escrevendo a equação 2.4 como

$$I_m = C_m \frac{dV}{dt} + G_{Na} \cdot m^3 \cdot h (V_m - V_{Na}) + G_K \cdot n^4 (V_m - V_K) + G_L (V_m - V_L), \quad (2.6)$$

obtemos um conjunto de equações diferenciais não lineares acopladas que determinam completamente o modelo, a menos das constantes  $\alpha_i$  e  $\beta_i$ , que precisam ser determinadas experimentalmente.

O modelo de Hodgkin-Huxley permanece sendo o paradigma para a geração de potenciais de ação em células excitáveis musculares, cardíacas e neuronais. Sendo necessário apenas a incorporação de extensões, como outras contribuições iônicas, para . E em outros casos também equações mais simples podem ser derivadas, mantendo um dos parâmetros fixos e reduzindo o número de dimensões, como é o caso do modelo de Fitzhugh-Nagumo.

É fácil perceber que o modelo de HH atende aos pré-requisitos para a possibilidade de caos apresentados no capítulo anterior: número suficiente de dimensões e não linearidade. E, de fato, dinâmica caótica já foi observada usando os parâmetros originais do axônio de lula [37], quanto em modelos alterados [36], identificando-se em ambos os casos um subconjunto invariante caótico associado ao limiar de disparo do potencial.

Sendo assim, é notável que mesmo em sua origem celular, o comportamento do coração é não linear o que sugere fortemente a possibilidade de caos em nível macroscópico. Mas apesar de permitir o entendimento da origem da atividade elétrica nas células excitáveis, não há ainda um modelo macroscópico do coração que incorpore a descrição dos potenciais de ação. Diante disso, consideraremos a análise do sistema cardíaco usando eletrocardiogramas, medições da atividade elétrica a partir da superfície corporal.

## 2.2 Atividade Elétrica do Coração

A contração muscular que dá origem ao ciclo cardíaco do coração possui um movimento rítmico com origem elétrica, estabelecido pelas células de marca passo do coração que estão localizadas no nó sinoatrial. Essas células criam pulsos elétricos que se propagam rapidamente entre as demais células: a cada ciclo cardíaco, um sinal elétrico viaja rapidamente pelos átrios direito e esquerdo, fazendo-os contrair. Depois o sinal é conduzido ao atrioventricular e , a partir de lá, em direção aos ventrículos direito e esquerdo, que contraem juntos, frações de segundo após os átrios.

Essa atividade elétrica só é possível pois o coração é formado por um conjunto de fibras musculares com propriedades específicas de condução elétrica. As células cardíacas são capazes de sustentar o próprio ritmo, de maneira regular, diferenciando-as das demais células excitáveis. Dessa forma, o próprio tecido cardíaco é capaz de gerar potenciais de ação, mesmo quando

Além disso, a especialização de fibras em diferentes regiões do coração permita que haja condução elétrica mais lenta em algumas partes do que em outras. Isso permite que diferentes regiões possam contrair fora de fase num mesmo ciclo de ativação elétrica, o que caracteriza o processo de sístole e diástole do coração.

Neste ínterim, na ocorrência de alterações no ciclo cardíaco, diversas condições anormais de saúde podem ser originadas, associadas ao funcionamento imperfeito do coração - o que pode ser observado em sua atividade elétrica. Sendo assim, a medição e estudo de sinais elétricos do coração é imprescindível para a formulação de métodos de identificação e tratamento de patologias.

### 2.2.1 Eletrocardiografia

Diferentes medidas da atividade elétrica no coração podem ser feitas com objetivo de compreender seu funcionamento. Dessas, umas das mais utilizadas na área médica é o sinal de eletrocardiograma, obtido por eletrocardiografia, que mede a variação de potencial elétrico no coração através de eletrodos posicionados em posições estratégicas ao longo da pele.

A eletrocardiografia teve início em 1887 quando Augustus Waller demonstrou que é possível captar os fenômenos elétricos do coração a partir da superfície corporal. A primeira gravação foi realizada através de um electrômetro de capilaridade de Lippmann, que devido a sua baixa eficiência necessitava de um processo demorado de tratamento da pele para aplicação.

Medições precisas do potencial elétrico só foram possíveis com o desenvolvimento posterior, por Eithoven, da tecnologia do galvanômetro de corda, um equipamento com sensibilidade muito superior e com a elaboração de técnicas para a gravação, que serviram de base para a teoria moderna da eletrocardiografia.

As hipóteses utilizadas por Eithoven para a teoria da medição são as de que as forças elétricas, em boa aproximação, podem ser representadas por vetores dipolares e que os meios existentes em torno do coração atuam como um volume homogêneo, permitindo que os vetores de dipolo do coração possam ser medidos através da superfície. A melhor posição para essa medição seria a dos pontos que formam o que hoje é conhecido como triângulo de Eithoven, delimitado pelos ombros e pela região inguinal central, tendo o coração como centro.

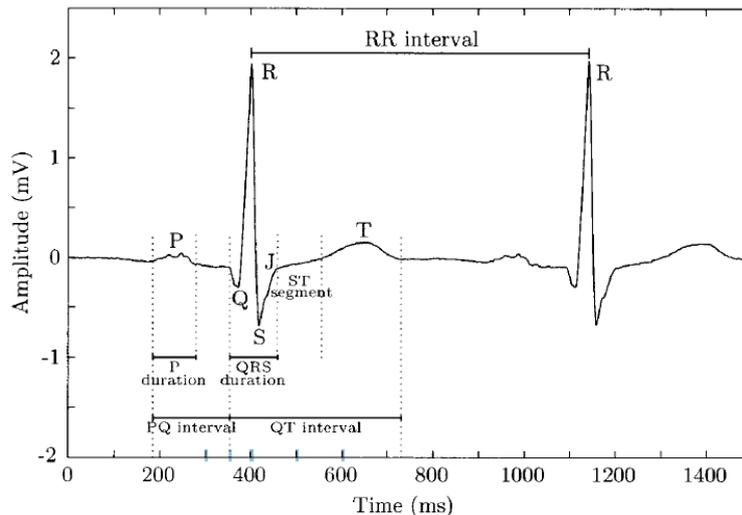
O equipamento usado para registrar as variações do potencial elétrico na superfície corporal é o eletrocardiógrafo, que é composto por 3 componentes principais: eletrodos, amplificador e registrador. Os eletrodos são utilizados para a medição, através da superfície corporal, dos potenciais elétricos que surgem no coração decorrentes da geração e propagação coletiva dos potenciais de membrana nas células cardíacas.

É necessário no mínimo uma dupla de eletrodos, que recebe o nome de derivação, para a medição de um potencial elétrico. Tipicamente, é utilizada uma configuração com diversas derivações, dependendo do interesse clínico do ECG, que podem ser unipolares, quando a derivação reflete a variação em voltagem medida num só eletrodo em relação a um terminal central, ou bipolares, quando a variação de voltagem medida é a diferença entre dois eletrodos.

Os fios dos eletrodos são conectados a diferentes amplificadores, construídos especificamente para sinais bioelétricos, com um alto ganho e um grande intervalo dinâmico necessários pois ainda que as ondas individuais sejam da ordem de milivolts, as gravações de ECG podem ir de alguns poucos microvolts até 1V de magnitude. Já largura de banda do amplificador pode estar entre 0.05 e 100-500Hz, em que o limite superior depende do tipo de aplicação. Os sinais elétricos amplificados são então transmitidos a um gravador, que gera uma série temporal associada ao ciclo cardíaco.

## 2.2.2 Ciclo Cardíaco e a Forma Típica do Eletrocardiograma

Podemos compreender o ciclo cardíaco através de uma onda típica de eletrocardiograma, ilustrada na figura 2.4. Para entender a formação dessa onda, assumimos que a diferença de potencial entre diferentes regiões do coração formam um vetor de dipolo elétrico, cujas componentes são medidas nos eletrodos, com uma frequência de aquisição bem definida.

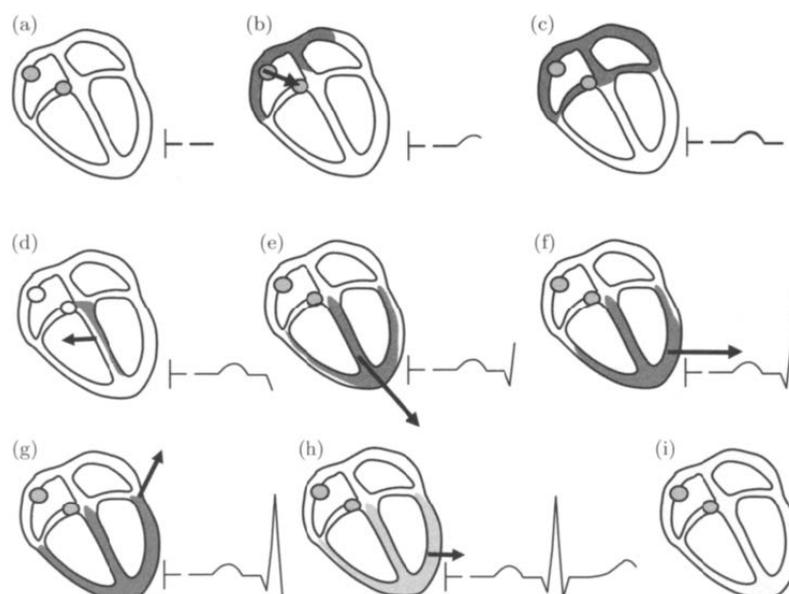


**Figura 2.4:** Forma padrão do sinal de eletrocardiograma de um indivíduo com ritmo sinus normal. As ondas e intervalos de relevância estão indicados. Fonte: [14]

A forma característica do eletrocardiograma representa a sequência de ativação elétrica no coração em termos de uma série de frentes de onda de despolarização em um dado instante, as isócronas, que dão origem ao sinal padrão [34], conforme indicado na figura 2.5.

Partindo do repouso, figura 2.5(a), as células de marcapasso do nódulo sinoatrial(NSA) são estimuladas eletricamente e agem como um gatilho para a despolarização das demais células do átrio direito, o que dá início ao ciclo cardíaco. Surge assim um vetor direcionado para baixo em direção ao nódulo atrioventricular(NAV), e um aumento de potencial é medido, figura 2.5(b). Como a massa do átrio é pequena, a amplitude gerada é curta. A onda de despolarização se propaga do NSA para o esqueleto fibroso (paredes dos átrios) a uma velocidade de cerca 1m/s, e paralelamente para o nódulo atrioventricular(NAV). No esqueleto fibroso a propagação se encerra devido a sua natureza isolante, figura 2.5(c), mas continua em velocidade mais lenta do NAV para o feixe de His, figura 2.5(d) .

O feixe de His é composto por fibras mais alongadas de rápida condutâncias, chamadas fibras de Purkinje, com direção preferencial de propagação ao longo do eixo, de modo que agem como cabos isolantes. As fibras de Purkinje se ramificam no esqueleto fibrosos em dois ramos, cobrindo a parede que separa os ventrículos direito e esquerdo. Elas são responsáveis por propagar as ondas para os ventrículos, dando início a despolarização ventricular, e como consequência os ventrículos se contraem com uma pequena assincronia: a base adiantada em



**Figura 2.5:** Representação da sequência de ativação elétrica do coração a partir de isócronas, considerando um eletrocardiograma obtido de uma derivação V5. O vetor de dipolo do coração está indicado. Fonte [14]

relação ao corpo.

Na fase de ativação seguinte, as ondas de despolarização alcançam os dois lados do septo, de maneira que as forças elétricas se cancelam. Mas devido a ativação anterior, surge um vetor resultante apontando no ápice do ventrículo, figura 2.5(e).

Após a despolarização ter se propagado pela parede do ventrículo direito, ele atinge a parede da superfície epidérmica num evento chamado *breakthrough*. Como a parede esquerda do ventrículo é mais grossa, sua despolarização continua mesmo quando a do ventrículo direito cessa. Nesse caso, como não existe nenhuma componente contrária na direita, o vetor resultante atinge sua fase máxima, apontando para a esquerda, figura 2.5 (f) O vetor de despolarização continua, se propagando da parede esquerda para trás. E como a área da superfície decresce continuamente, o vetor resultante também decresce até que todo o músculo ventricular esteja despolarizado, figura 2.5 (g). O vetor de dipolo está na direção oposta ao eletrodo, por isso a direção é para baixo.

Terminada a despolarização, o ECG passa um período numa isoeletrica 2.5(h), até que se inicie a repolarização ventricular, a partir da parte de fora dos ventrículos. Nesse momento, a onda de repolarização se propaga no sentido inverso à da despolarização.

Apesar de ser o último a despolarizar, o epicárdio é o primeiro a repolarizar, devido aos potenciais de duração de tempo curto. A recuperação das células não são propagadas entre células, mas ainda assim a repolarização ocorre de um modo ritmado e sequencial que se move do epicárdio para o endocárdio. Por causa da forma difusa da repolarização, a amplitude do sinal é bem menor e a duração maior do que a onda de despolarização, figura 2.5(i).

Ainda na figura 2.4, podemos identificar os pulsos e intervalos característicos da onda padrão. A **onda P** reflete a despolarização sequencial dos átrios direito e esquerdo, o **complexo**

**QRS** reflete a despolarização dos ventrículos esquerdo e direito, o **segmento ST** representa o intervalo em que os ventrículos permanecem num estado despolarizado, a **onda T** marca a repolarização ventricular, o **intervalo RR** determina a duração do ciclo cardíaco, o **intervalo PQ** é intervalo de tempo entre a despolarização atrial e a despolarização ventricular e o **intervalo QT** marca o tempo entre o início da despolarização ventricular e o término da repolarização ventricular.

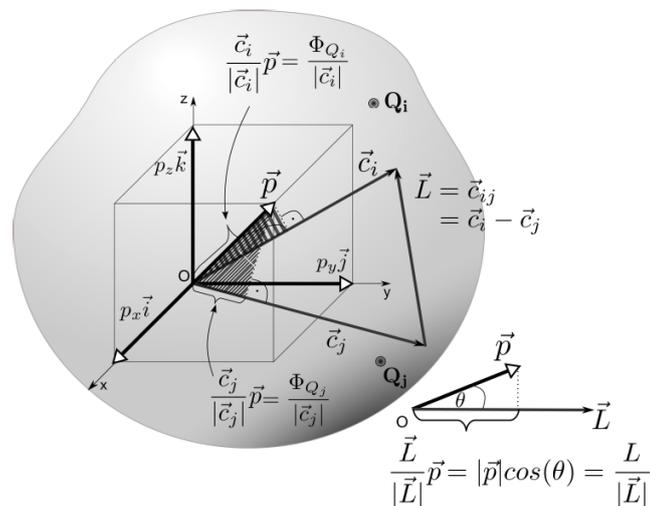
Em geral, problemas de morfologia ou de duração nos intervalos nas ondas estão associados às condições cardíacas e são utilizados para o diagnóstico de patologias. No entanto, para uma análise precisa, também deve ser considerado qual das derivações foi utilizada nas medições, uma vez que a morfologia e a polaridade das ondas depende do posicionamento dos eletrodos no corpo.

### 2.2.3 Sistema de Derivações

Uma maneira simplificada de se dividir o coração durante o ciclo cardíaco é em regiões opostamente polarizadas. No estado de repouso as células se encontram eletricamente negativas, enquanto as células despolarizadas são positivas em seu exterior. Como algumas regiões do coração se depolarizam primeiros, e repolarizam fora de fase, há sempre regiões com polarização opostas cuja contribuição total pode ser representada por vetor de dipolo.

Por causa disso, podemos estimar a diferença de potencial entre dois pontos arbitrários, considerando que o coração é um dipolo fixo com componentes variáveis. E assim, podemos entender os potenciais medidos nos eletrodos do eletrocardiograma como projeções desse vetor de dipolo em uma direção determinada pelo vetor de separação entre os eletrodos.

#### Vetor de Derivação



**Figura 2.6:** Projeções dos vetores do coração nos eixos e derivações.  $\vec{c}_i$  e  $\vec{c}_j$  são os vetores de derivação unipolares para os pontos  $Q_i$  e  $Q_j$ , respectivamente e  $\vec{L}$  é o vetor de derivação bipolar. Fonte: [38]

Denotamos por  $\vec{p}$  o vetor de dipolo com magnitude  $p = I_0 d$  devido a um par de correntes com magnitude  $I_0$ , num intervalo de tempo arbitrário, separado por um pequeno deslocamento  $d$ . Dado que seja possível definir três direções ortogonais, com intuito de formar um sistema de coordenadas  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , podemos escrever os componentes do dipolo como  $\vec{p} = p_x \vec{i} + p_y \vec{j} + p_z \vec{k}$ .

Suponha que num ponto Q o potencial devido a um dipolo unitário  $\hat{i}$  é  $c_x$ , medido relativo a um outro ponto de referência com potencial nulo. Então, por linearidade, o potencial  $\Phi_Q$  correspondente ao dipolo  $p_x \hat{i}$  com magnitude arbitrária  $p_x$  é

$$\Phi_Q = c_x p_x.$$

O mesmo vale para as direções y e z, e pelo princípio da superposição,

$$\Phi_Q = c_x p_x + c_y p_y + c_z p_z$$

em que os coeficientes  $c_x$ ,  $c_y$  e  $c_z$  podem ser interpretados como os componentes de um vetor  $\vec{c}$  e são encontrados ao energizar o dipolo unitário correspondente ao longo do eixo unitário, e medindo o campo potencial correspondente. Desse modo,

$$\Phi_Q = \vec{c} \cdot \vec{p} \quad (2.7)$$

em que  $\vec{c}$  pode ser chamado vetor de derivação e  $\vec{p}$  é o vetor de dipolo do coração.

### Derivação Bipolar

É possível considerar uma derivação formada por um par de derivações, e considerar o vetor de derivação correspondente. Para cada localização  $P$  ao longo da superfície do volume conduto é possível determinar o vetor de derivação  $\vec{c}_0, \dots, \vec{c}_n$  para o dipolo  $\vec{p}$  em uma localização fixa. Assim, temos

$$\Phi_i = \vec{c}_i \cdot \vec{p} \quad (2.8)$$

e a diferença de potencial entre quaisquer dois pontos  $P_i$  e  $P_j$  é

$$L_{ij} = \Phi_i - \Phi_j \quad (2.9)$$

Que representa a voltagem que seria medida colocando dois eletrodos nos pontos  $Q_i$  e  $Q_j$ . Considerando o vetor formado pelas derivações desses pontos

$$\vec{c}_{ij} = \vec{c}_i - \vec{c}_j$$

Então a diferença de potencial entre  $Q_i$  e  $Q_j$

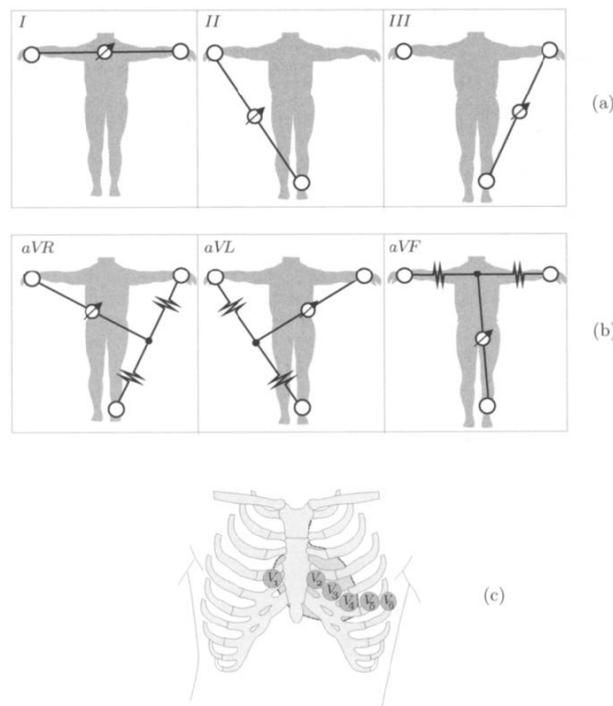
$$V_{ij} = \Phi_i - \Phi_j = \vec{c}_i \cdot \vec{p} - \vec{c}_j \cdot \vec{p} = \vec{c}_{ij} \cdot \vec{p}.$$

Portanto, identificamos  $\vec{c}_{ij}$  como o vetor de derivação de para os pontos  $Q_i - Q_j$ . E assim a voltagem de uma derivação bipolar pode ser expressa como

$$\vec{L} = \vec{c} \cdot \vec{p}. \quad (2.10)$$

O vetor de derivação é um coeficiente de transferência tridimensional que permite determinar como uma fonte de dipolo em um ponto fixo dentro de um volume condutor influencia no potencial ao longo da superfície [34]. Dessa forma, a partir das equações 2.7 e 2.10, considerando que é possível determinar os componentes de  $c$  por meio de medições do potencial elétrico realizadas nos eletrodos posicionados ao longo do corpo, podemos reconstruir o potencial  $\Phi_Q$ . Portanto são necessários pelo menos três derivações para determinar o caráter tridimensional da atividade elétrica no coração e, por isso, uma configuração com 10 eletrodos compreendendo 12 derivações é o sistema padrão utilizado clinicamente [38].

### Configuração de 12 Derivações



**Figura 2.7:** (a) Derivações bipolares, (b) derivações unipolares aumentadas e (c) derivações pré-cordiais. Fonte: [14]

Existem dois tipos de derivações possíveis para o sistema padrão de 12 derivações: as unipolares, equação 2.7, e as bipolares, equação 2.10. No caso bipolar, a diferença de potencial é medido entre dois eletrodos. Esse é o método introduzido nas primeiras medições por Waller e Eithoven, em que os eletrodos são posicionados no triângulo de Eithoven, e que ainda é utilizado atualmente. Já no caso unipolar, a diferença de potencial é medida a partir do eletrodo em relação a um ponto de referência. Nesse sentido, temos as 6 derivações pré-cordiais, em que

os eletrodos são posicionados próximo do coração e as derivações unipolares aumentadas, que registra a diferença de potencial entre os eletrodos nos membros como um ponto teórico no centro do triângulo de Eithoven.

A três derivações bipolares denotadas por *I*, *II* e *III* são obtidas a partir da diferença de potencial entre braço esquerdo, braço direito e perna esquerda nas seguintes combinações:

$$\begin{aligned} V_I &= \Phi_L - \Phi_R \\ V_{II} &= \Phi_F - \Phi_R \\ V_{III} &= \Phi_F - \Phi_L \end{aligned}$$

As derivações unipolares aumentadas (*aVF*, *aVL* e *aVR*) são introduzidas de modo a preencher o espaço de 60° entre as direções das derivações bipolares, definidas como a diferença entre o potencial de uma das extremidades e a média das duas restantes

$$\begin{aligned} aVR &= V_{RA} - \frac{V_{LA} + V_{LL}}{2}, \\ aVL &= V_{LA} - \frac{V_{RA} + V_{LL}}{2}, \\ aVF &= V_{LL} - \frac{V_{LA} + V_{RA}}{2}, \end{aligned}$$

Como a informação de diferença de potencial é a mesma que a contida nas derivações bipolares, então a informação entre elas é redundante.

Por fim, as derivações precordiais são posicionadas em uma sucessão ao longo do lado esquerdo do peito a fim de fornecer uma visão mais detalhada do coração em relação às outras medições. Por convenção, essas derivações são unipolares e medidas em relação ao terminal central definido a partir das voltagens dos braços e da perna esquerda

$$V_{WCT} = \frac{V_{LA} + V_{RA} + V_{LL}}{3} \quad (2.11)$$

Devido a sua proximidade do coração, cada derivação precordial é capaz de registrar o sinal de diferentes regiões do coração com mais intensidade e tendem a ter uma razão sinal/ruído maior do que as derivações dos membros.

## 2.3 Ritmos Cardíacos

Um coração com ritmo cardíaco normal possui, em repouso, uma frequência entre 50-100 batimentos por minuto que é determinado, principalmente, pelos impulsos elétricos iniciados no nó sinoatrial. Uma das formas mais simples de se detectar anormalidades no funcionamento do coração é através de mudança desse ritmo, observadas no eletrocardiograma.

Alterações do ritmo cardíaco normal são denominadas de **arritmias**, e podem ter diversas causas e expressões. Em geral, há dois tipos de perturbações na atividade elétrica do coração

que levam a arritmias: alterações na formação, que ocorrem quando células de marcapasso de outras partes do coração iniciam a despolarização antes das células do nodo SA; ou alterações na condução, quando existe algum tipo de anomalia no impulso elétrico na medida que ele se propaga pelo tecido cardíaco.

- **Problemas de Formação:** Ocorrem quando o ritmo de um foco ectópico, grupos excitáveis de células que depolarizam fora de ritmo, predomina sobre o ritmo do nodo SA quando, por algum motivo, ou o foco ectópico apresenta uma resposta automática que gera impulso de maneira mais acelerada, ou o nodo SA gera impulsos de maneira mais lenta que o usual.
- **Problemas de Condução:** Ocorrem quando existe algum bloqueio, parcial ou total, nas células de condução. No primeiro, a propagação do impulso elétrico é desacelerado, enquanto no segundo pode haver falha na propagação, de sorte que o movimento de contração pode ser incompleto, causando redução na frequência cardíaca.

Podemos ainda classificar os tipos de arritmia quanto ao local de sua origem ou quanto à frequência. Em relação a origem, podem existir 4 tipos de relacionamentos entre átrios e ventrículos nos diferentes tipos de arritmia:

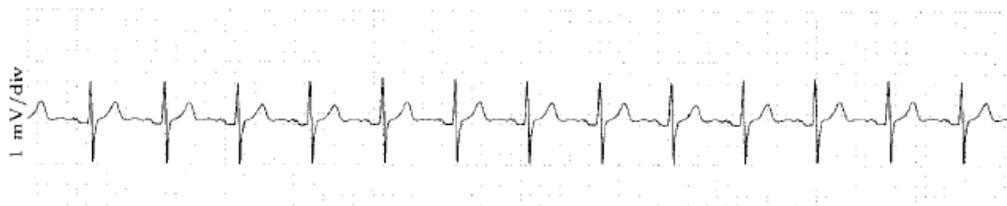
1. Ritmos atriais e ventriculares correlacionados. Os ritmos com a mesma frequência/taxa podem ser originados ou nos átrios ou nos ventrículos.
2. Ritmo originado no átrio. Frequência atrial mais rápida que a frequência ventricular.
3. Ritmo originado no ventrículo. Frequência ventricular mais rápida que a frequência atrial.
4. Ritmos atriais e ventriculares independentes. As frequências podem ser iguais ou diferentes.

Quanto à frequência cardíaca, podemos ter bradiarritmia, quando é menor que 60 batimentos por minutos, ou taquiarritmia, quando é maior que 100 batimentos por minuto. Quanto à persistência, uma arritmia pode ser paroxismal quando possui início e fim abrupto, ou persistente/permanente, caso contrário. No entanto, é importante considerar que ainda existem arritmias no dentro do limite de frequência normal.

O limite teórico para a frequência cardíaca máxima está no intervalo de 240 a 300 batimentos por minuto, ( $4 - 5Hz$ ), determinado pelo período refratário das células. Portanto, para fins práticos em que se deseja isolar, no eletrocardiograma, o sinal cardíaco de ruídos externos, podemos delimitar um filtro com interesse no comportamento integral do coração. Para isso consideramos o intervalo de  $[0.5Hz, 5Hz]$ , em que 0.5 é o limite para batimentos mínimos, já levando em conta que a taxa cardíaca máxima reduz com a idade.

Nos bancos de dados analisados nesse trabalho, com resultados ritmo sinus normal, arritmias ventriculares e arritmias atriais.

## Sinus Normal



**Figura 2.8:** Exemplo de eletrocardiograma de paciente com ritmo sinusal normal, sem apresentar qualquer tipo de arritmia. Fonte: [14]

Ritmo originado no nó sinoatrial com frequência entre 50 e 100 batimentos por minutos com variabilidade na frequência cardíaca relacionado à respiração: aumenta com a inspiração e decresce com a expiração, e a um balanço contínuo de componentes do sistema nervoso autônomo que influencia a taxa de disparo no nódulo sino atrial. A partir da forma do sinal normal, figura 2.8, podemos verificar alterações na morfologia e frequência para identificar arritmias.

## Batimentos Prematuros

Quando o ritmo normal é interrompido por um batimento que ocorre antes do tempo esperado do próximo batimento, este é referido como um batimento prematuro ou ectópico. Nesse caso, o foco ectópico que gera o batimento prematuro pode estar localizado em qualquer parte do coração. A depender do local, o sinal pode apresentar morfologia anormal ou normal, precedido ou não de uma onda P.

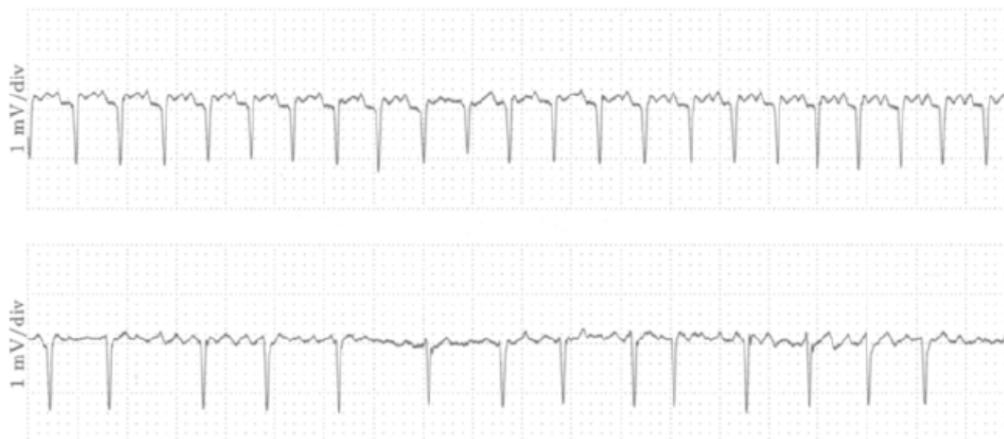
Se origem está acima dos ventrículos, nos átrios ou no nodo atrioventricular, então ocorre um batimento prematuro supraventricular (*SVPB*). Se é nos ventrículos, há batimento prematuro ventricular (*VPB*). A presença de *VPB* quase sempre significa uma interrupção no próximo batimento normal, pois as células cardíacas se encontram no estado refratário quando ocorre a descarga do nódulo SA, e assim o batimento não pode ser completado.

No eletrocardiograma, o tipo mais comum de *SVPB* é identificada pela morfologia anormal de ondas P e um complexo QRS semelhante ao estado inalterado. A pausa compensatória que ocorre devida a um *SVPB* pode ser identificada por possuir um comprimento um pouco menor que o comprimento de dois intervalos RR normais.

Já o *VPB* apresenta uma morfologia alterada do complexo QRS em relação ao estado normal, e um intervalo de duração maiores. Isto pois esses batimentos prematuros podem ocorrer em qualquer ponto ao longo dos feixes de His quando estes se ramificam, de modo que o caminho de condução da onda de propagação é alterada. Outra possibilidade é de que ocorram múltiplos *VPBs* simultâneos, o que resulta num complexo QRS com morfologia complexa.

Deve-se ressaltar que batimentos prematuros podem ocorrer de maneira isolada em indivíduos normais, e não necessariamente são indicativos de patologia. Só quando ocorrem de maneira abundante, e/ou sistemáticas, que implicam numa doença cardíaca.

## Arritmias Atriais



**Figura 2.9:** Exemplo de eletrocardiograma de uma paciente com vibração atrial(cima) e fibrilação atrial(baixo). Fonte: [14]

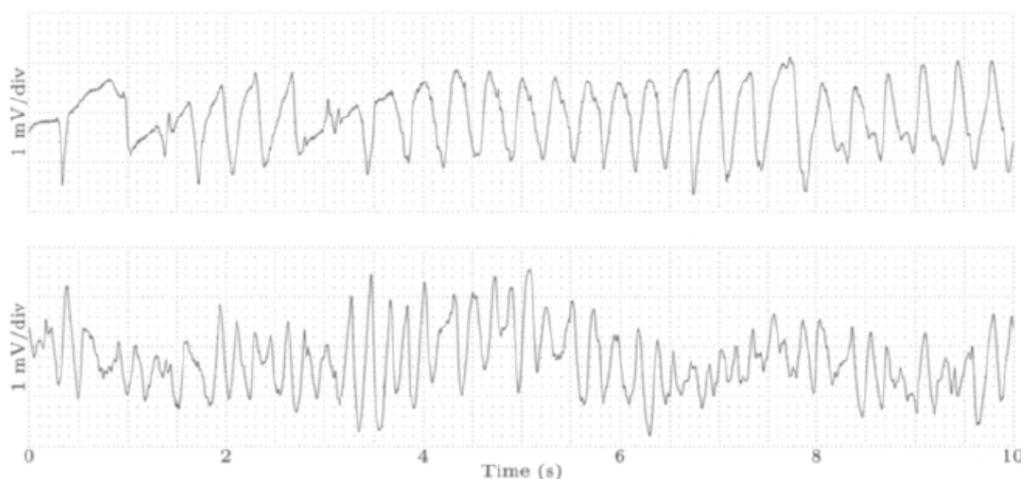
Em geral, arritmias atriais são aquelas que surgem devido a um ou múltiplos focos ectópicos nos átrios e são caracterizadas pela presença de ondas P anormais. Quando os focos ectópicos estão localizados longe do nó sinoatrial, mas próximos do nó atrioventricular a onda P se torna negativa, pois o impulso elétrico se propaga na direção oposta. Quando o foco se encontra próximo ao nó AV e aos ventrículos, a despolarização ventricular é iniciada quase que simultaneamente à dos átrios e, como consequência, o surgimento da onda P coincide com o do complexo QRS, tornando impossível distingui-los no ECG.

Existem três tipos principais de arritmias nos átrios: taquicardias, flutter e fibrilação. O primeiro é caracterizado por uma automaticidade de um ou mais células de marca passo nos focos ectópicos. A maioria dos impulsos são conduzidos aos ventrículos que ocasiona numa frequência cardíaca de 140 a 220 batimentos por minuto. Os dois últimos são taquiarritmias em que há dessincronização entre os átrios e ventrículos, ambos causados pela reentrada contínua de impulso elétrico nos átrios, manifestadas no ECG como um linha de base não modulada que substitui as ondas P. Nesse último caso há um aumento na chance de formação de coágulos no coração devido ao fluxo sanguíneo lento nos átrios.

O flutter atrial é um tipo de arritmia mais organizado, em que há um batimento regular dos átrios numa frequência de 300 batimentos por minuto. Enquanto a fibrilação atrial é um ritmo caótico e acelerado, com frequência cardíaca num intervalo de 400 a 700 batimentos por minuto.

## Arritmias Ventriculares

Os tipos mais comuns de taquiarritmias nos ventrículos resultam dos mesmos mecanismos de reentradas que causam as arritmias nos átrios, mas com diferente manifestação no ECG. As mais comuns são a taquicardia ventricular, a vibração ventricular e a fibrilação ventricular.



**Figura 2.10:** Exemplo de eletrocardiograma de uma paciente com vibração ventricular(cima) e fibrilação ventricular(baixo). Fonte: [14]

A taquicardia ventricular ocorre a uma taxa de 120 batimentos por minuto, e possui morfologia similar a de batimentos prematuros, como alongamento dos complexos QRS e alta amplitude. As ondas P são perdidas recorrentemente devido a esse prolongamento ou à sucessão de ciclos ventriculares causada por ondas prematuras.

O flutter ventricular é um ritmo rápido e organizado sem qualquer complexo QRS ou onda T discernível, figura 2.10. Se assemelha às vibrações atriais, mas possui uma amplitude e flutuações significativas ao longo do tempo.

O caso mais severo de arritmia é a fibrilação ventricular, um ritmo completamente desorganizado em que os ventrículos deixam de despolarizar de maneira ordenada.

Por causa disso, o coração não é capaz de realizar as contrações de maneira adequada para alimentar o sistema circulatório, e assim o cérebro não recebe sangue oxigenado. Em última instâncias, pode levar a ataque cardíaco, perda de respiração e consciência, e até mesmo levar a óbito.

Em suma, anomalias no funcionamento do coração produzem alterações na amplitude e frequência dos sinais elétricos emitidos durante o ciclo cardíaco. Essas alterações podem ser acessadas por meio do eletrocardiograma e utilizadas para o diagnóstico de patologias, por meio da identificação de formas e frequências diferentes das do ritmo sinus normal. No entanto, esse tipo de diagnóstico pode ser demorado, pois envolve a análise manual de um técnico em cardiologia e, por isso, um grande foco de pesquisa na área médica é o de desenvolver técnicas e métodos de análise automatizados.

Apesar de aparentemente regulares, os ritmos cardíacos apresentam um comportamento irregular com variabilidade batimento a batimento que pode ser caótica até mesmo em seu estado normal. Esse tipo de comportamento é esperado, considerando a origem não linear da atividade elétrica no coração. No caso de arritmias, conforme visto nas figuras 2.9 e 2.10, sinais cardíacos evoluem para estados ainda mais irregulares, sem nenhum ritmo característico

aparente. Essa irregularidade, sustentado pela origem não linear do movimento, parece sugerir um comportamento caótico do coração.

Isso posto, é de nosso interesse verificar, primeiramente, se o sinal cardíaco representado por eletrocardiograma é verdadeiramente caótico. E, em caso afirmativo, se é possível distinguir entre diferentes tipos de ritmo cardíaco a partir de medidas quantitativas de caos no sistema. Para isso, utilizaremos os métodos apresentados no próximo capítulo.

# Capítulo 3

## Métodos

### 3.1 Processamento de Sinais Cardíacos

Diversos tipos de processamento de dados podem ser aplicados aos sinais obtidos de um eletrocardiograma, para torná-los propícios a uso adequado, com diferentes propósitos. Desde a filtragem de ruído para facilitar a leitura e análise dos sinais, quanto o próprio uso de algoritmos que permitam extrair informações importantes do sinal como a detecção de complexos QRS e até mesmo a etapa de compressão de dados, visando a transmissão de rápida e eficiente de sinais sem perdas. Em nosso caso, desejamos verificar uma hipótese sobre o tipo de informação que pode ser obtida da análise estatística dos sinais de eletrocardiograma. O foco central está na filtragem: como aplicar filtros de modo a remover ruídos externos à atividade elétrica do coração, sem eliminar informação importante contida na série temporal.

Os dois principais tipos de ruído/artefatos comumente identificados em eletrocardiogramas são os provenientes da interferência da rede elétrica, e os artefatos de baixa frequência associado a outras funções do corpo humano, chamados de *baseline wander*. Para os primeiros, a construção de um filtro rejeita-banda é uma tarefa relativamente fácil, uma vez que possuem frequências distintas das faixas de frequência usual que compõem os sinais cardíacos. No entanto, alguns ruídos do segundo tipo podem ser mais difíceis de lidar, como por exemplo os que surgem devido ao movimento muscular, pois sua frequência se sobrepõe ao espectro de frequências do sinal cardíaco [14].

É importante ainda levar em consideração que, na prática clínica, a filtragem de ECG é contextual, realizada tendo em vista uma informação que se deseja obter. Isso significa que uma filtragem visando informações quanto ao ritmo cardíaco pode não ser apropriada para análises clínicas dependentes de informação quanto a morfologia do sinal.

Em particular, temos interesse nesse trabalho na estrutura mais geral do ciclo cardíaco expresso no sinal de eletrocardiograma, que compreende mais especificamente os ritmos de batimento cardíaco. Dessa forma, durante a aplicação dos filtros, a morfologia das ondas de menor amplitude que formam o sinal de ECG padrão normalmente é distorcida, enquanto os

intervalos RR e os complexos QRS são mantidos com fidelidade.

Iremos considerar dois tipos de filtro, um decorrente de análise de Fourier e outro da análise de Wavelet. A ideia básica é a mesma, usar funções harmônicas de múltiplos de frequências fundamentais para representar o sinal por meio das componentes de frequência, e então aplicar algum critério para a atenuação de algumas frequências e ampliação de outras. Assim, aplicando dois filtros diferentes, poderemos posteriormente compreender de que maneira a análise de Caos realizada em etapas seguintes é afetada pelas componentes eliminadas no filtragem.

### 3.1.1 Filtros

A área de Análise Harmônica, a decomposição de funções em termos de um conjunto completo de funções ortonormais, é um campo frutífero da matemática com muitas aplicações. Ela se inicia com a análise de Fourier, mais especificamente com a representação de funções por meio de séries de cossenos e senos empregadas por Joseph Fourier como um método para a solução de equações diferenciais parciais no problema do transporte de calor. A partir desse empreendimento inicial, foram desenvolvidos diversos tipos de transformações de Fourier que permitem a transposição de um problema em um certo domínio, um espaço de coordenadas, para outro, permitindo uma solução mais simplificada de problemas nas áreas de física, probabilidade, estatística, processamento de sinais e em muitas outras áreas.

As transformações de Fourier são distintas no que se refere a granularidade do espaço do domínio original e do transformado. Isto é, diferentes transformadas devem ser aplicadas para sinais contínuos e discretos, considerando se são periódicos ou não. Mas, com o mesmo objetivo de representar uma série temporal em termos de componentes de frequência.

A ampla aplicação de transformadas de Fourier para filtragem, dentre uma gama de outras aplicações, é possível devido a relativa facilidade e eficiência de se calcular uma transformada discreta de Fourier para sinais digitalizados utilizando o algoritmo de transformada rápida de Fourier [39].

### 3.1.2 Filtro por Análise Fourier

Uma transformada rápida de Fourier (FFT) é um algoritmo específico que permite o cálculo de transformadas discretas de Fourier (DFT) em funções periódicas. A partir da análise de Fourier de uma série temporal, temos acesso ao espaço de frequências do sinal a partir do qual podemos construir o vetor de densidade espectral das potências (PSD). Ambos estes podem ser utilizados para delimitar critérios para a seleção das componentes que constituem a transformada de Fourier.

O uso da FFT como um filtro consiste simplesmente em se determinar parâmetros para uma frequência de corte, de modo a eliminar o ruído. Essa frequência de corte pode ser estabelecida a partir da PSD, selecionando os sinais com maior potência, e que, portanto, contribuem

mais para a "totalidade" do sinal. Podemos ainda escolher diretamente da transformada de Fourier a frequência com componente de maior magnitude, ou delimitar uma região de frequências a ser eliminada com base em informações conhecidas a cerca do processo analisado. Uma vez retirado as frequências indesejadas, o sinal é reconstruído por meio da transformada inversa de Fourier, nesse caso um IFFT.

### Transformada de Fourier

Na física, uma técnica muito utilizada para solução de problemas apresentados na forma de equações diferenciais é a de representação de funções em termos de combinações lineares de suas autofunções. Dessas, a mais amplamente difundida é a representação por meio de funções senoides. Algumas fontes apontam que o uso de somas trigonométricas para a representação de fenômeno periódico tem suas raízes com babilônicos [40]. Na idade moderna, Euler foi o primeiro a utilizar esse tipo de soma através do estudo da corda vibrante, em que ele observou o que hoje é conhecido como modos normais numa corda. Em especial ele notou que a configuração de corda vibrante num instante do tempo  $t$  pode é uma combinação desses modos normais, e o mesmo se mantém para instantes futuros.

No entanto, foi Fourier que observou posteriormente que essa propriedade possui generalidade maior do que o fenômeno de cordas vibrantes. Estudando o fenômeno da difusão e propagação de calor em um corpo, Fourier descobriu que uma representação por meio de séries de senoides harmonicamente relacionados era possível. Concluiu ainda que esse tipo de representação deveria ser válida para qualquer tipo fenômeno periódico. E as condições precisas para essa representação foram determinadas pouco tempo depois por Dirichlet [40].

Desenvolvimentos posteriores da teoria demonstraram que não somente sinais periódicos em tempo contínuo podem ser representados por meio de séries harmônicas, como é o caso dos fenômenos estudados por Fourier. Essa representação é possível para virtualmente qualquer tipo de sinal, contínuo ou discreto, periódico ou aperiódico, salvo alguns casos excepcionais.

Através da teoria de Fourier podemos representar qualquer sinal periódico  $x(t)$  com período  $T$ ,

$$x(t) = x(t + T) \quad \forall t,$$

por uma combinação linear exponenciais complexas harmonicamente relacionadas na forma

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{ik\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{ik(2\pi/T)t}. \quad (3.1)$$

Todos os termos dessa série também são periódicos com período  $T$ , apesar de possuírem período fundamental igual a uma fração de  $T$ . Os termos  $k = \pm 1$ , possuem frequência fundamental igual a  $\omega_0$  e são chamados de primeiros harmônicos. Os demais termos possuem frequências igual a múltiplos da frequência do sinal original. Por exemplo, o  $n$ -ésimo termo,  $k = \pm n$ , possui frequência igual a  $n\omega_0$  e período igual a  $T/n$ .

A ideia da representação por séries de Fourier está na capacidade de decompor os sinais em suas componentes de frequências. Para isso, portanto, é fundamental determinar os coeficientes  $a_k$ . É um processo simples mostrar que o  $k$ -ésimo coeficiente da série de Fourier é dado por

$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-ik\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-ik(2\pi/T)t} dt. \quad (3.2)$$

Já no caso em que os sinais são aperiódicos, podemos representá-lo por meio da transformada de Fourier, que pode ser entendida como a série de Fourier no limite em que o período  $T \rightarrow \infty$ . Nesse caso, o somatório na equação 3.1 se torna uma integral e o limite da integral na equação 3.2 vai para infinito. Assim, podemos escrever o par de transformadas de Fourier como

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \mathcal{F}(f(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \\ f(t) &= \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}(\omega)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \end{aligned} \quad (3.3)$$

### Transformada Discreta de Fourier

Na prática, ao trabalharmos com sinais digitais, devemos levar em consideração que eles são medições instantâneas de um sinal temporal contínuo. Isto é, são obtidos a partir de um processo de amostragem, o que impõe um limite na resolução das frequências que podem ser representadas. Por isso, além das frequências que compõem o sinal, devemos levar em consideração também a frequência de amostragem  $f_n$ . O teorema de Nyquist-Shannon afirma que para que um sinal possa ser representado sem sofrer distorções ou sobreposição nos componentes de frequência, é necessário que a frequência de amostragem seja no mínimo duas vezes maior que a largura de banda do sinal [40].

Para esses sinais, o processo de análise de Fourier também deve ser modificado, e precisamos considerar uma versão discreta da transformada de Fourier, a transformada discreta de Fourier (DFT). Em essência, a DFT de um conjunto de pontos pode ser escrito em termos de uma multiplicação matricial. Considerando um vetor  $\mathbf{f} = [f_1, f_2, \dots, f_n]$  composto de  $n$  pontos obtidos a partir da discretização de um sinal contínuo, desejamos levar cada ponto  $f_i$  num ponto de coordenada transformada  $\hat{f}_i$  definida por

$$\hat{f}_k = \sum_{j=0}^{n-1} f_j e^{-i2\pi \frac{jk}{n}} \quad (3.4)$$

e a transformada inversa de Fourier é dado por

$$f_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \hat{f}_j e^{-i2\pi \frac{jk}{n}}$$

Dessa forma, o DFT é um operador linear que mapeia os pontos em  $\mathbf{f}$  para um domínio de

frequência  $\hat{f}$ :

$$\{f_1, f_2, \dots, f_n\} \xrightarrow{\text{DFT}} \{\hat{f}_1, \hat{f}_2, \dots, \hat{f}_n\}.$$

Esse operador linear pode ser representado como uma matriz. Considerando que todos os termos exponenciais da série podem ser escrito como um múltiplos inteiros de uma frequência fundamental  $\omega_n = e^{-\frac{2\pi i}{n}}$ , a DFT será computada através da multiplicação matricial:

$$\begin{bmatrix} \hat{f}_1 \\ \hat{f}_2 \\ \hat{f}_3 \\ \vdots \\ \hat{f}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_n & \omega_n^2 & \cdots & \omega_n^{n-1} \\ 1 & \omega_n^2 & \omega_n^4 & \cdots & \omega_n^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_n^{n-1} & \omega_n^{2(n-1)} & \cdots & \omega_n^{(n-1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

Dessa forma, podemos ver que a matriz DFT,  $\mathbf{F}$ , é uma matriz unitária de Vandermonde, o que vai ser essencial para a construção do algoritmo da FFT. Além disso, as entradas de  $F$  são complexas, de modo que o vetor da transformada  $\hat{\mathbf{f}}$  possui tanto magnitude quanto fase, o que é útil para a sua interpretação física.

A priori, para a transformada discreta de Fourier é necessário somente aplicar a matriz  $F$ . No entanto, a multiplicação de um vetor por  $F$  envolve um número  $O(n^2)$  de operações, e por isso qualquer aplicação da transformada discreta de Fourier é feita por meio do algoritmo da transformada rápida de Fourier.

### Transformada Rápida de Fourier

A alta demanda computacional de uma implementação direta da DFT é resultado da presença de produtos complexos redundantes na aplicação da matriz  $F$ . Um algoritmo capaz de contornar esse problema foi proposto por James Cooley e John Tuckey em 1965 [39], chamado de transformada rápida de Fourier (FFT). No entanto, trabalhos não publicados de Gauss em 1805 já demonstravam a aplicação de algoritmos rápidos para a implementação da DFT no estudo de asteroides, antes mesmo do trabalho de Fourier [41].

A ideia básica da FFT é que a DFT pode ser implementada de maneira mais eficiente se o número de pontos  $n$  for uma potência de 2. Por exemplo, para uma matriz  $F_{1024}$  com  $n = 1024 = 2^{10}$ , a transformada pode ser escrita como

$$\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{F}_{1024} \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{512} & \mathbf{D}_{512} \\ \mathbf{I}_{512} & -\mathbf{D}_{512} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{512} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_{512} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{\text{par}} \\ \mathbf{f}_{\text{impar}} \end{bmatrix},$$

em que  $\mathbf{f}_{\text{par}}$  contém os elementos de índice par de  $\mathbf{f}$  e  $\mathbf{f}_{\text{impar}}$  contém os elementos ímpares,  $\mathbf{I}_{512}$  é uma matriz identidade  $512 \times 512$  e  $\mathbf{D}_{512}$  é dado por

$$D_{512} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \omega^{511} \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

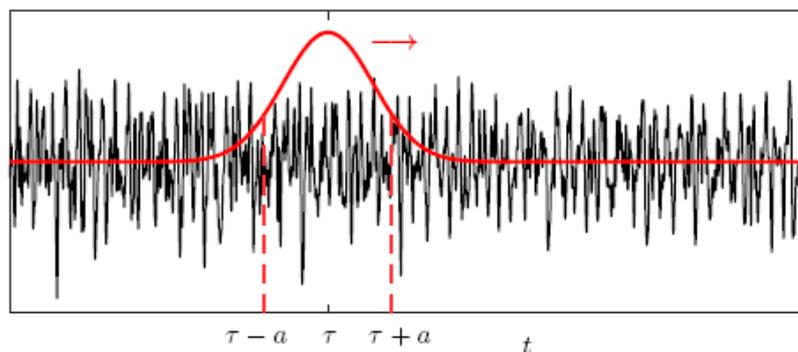
Para o caso em que  $n = 2^p$  esse processo pode ser realizado para a cada uma das matrizes  $F$  resultantes. No caso do exemplo,  $F_{512}$  é expresso em termos de  $F_{256}$ , que pode ser expresso  $F_{128}$ , e assim por diante. E para  $n \neq 2^p$  é mais eficiente preencher o vetor com zeros até alcançar uma potência de 2 do que realizar a transformada diretamente.

No entanto, não precisamos nos preocupar com a implementação do algoritmo do FFT, uma vez que é um dos algoritmos mais populares e acessíveis em diversas bibliotecas de linguagem de programação, e está incluso no MATLAB.

### Transformada de Gabor ou STFT

Uma das limitações da transformada de Fourier, é que, apesar de fornecer informação sobre a composição de frequências de um sinal, não é possível saber em que momento essas frequências ocorrem. De forma que somente sinais estacionários podem ser devidamente caracterizados pela DFT.

No caso de sinais não estacionários, isto é, aqueles cujas frequências variam no tempo, desejamos caracterizar tanto as frequências do sinal quanto sua evolução temporal. Para isso, usamos a transformada de Gabor, ou transformada de Fourier de curta duração (STFT), em que a DFT é calculada separadamente para diferentes segmentos do sinal analisado. Na STFT, definimos uma janela, uma função temporal definida num certo intervalo, que se move ao longo do sinal, e em cada intervalo separado pela janela é calculado a DFT. Conforme podemos ver na figura 3.1, com uma janela gaussiana.



**Figura 3.1:** Ilustração da transformada de Gabor com uma janela gaussiana. Fonte: [39]

A STFT é definida por

$$\mathcal{G}(f)(t, \omega) = \hat{f}_g(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} \bar{g}(\tau - t) d\tau = \langle f, g_{t,\omega} \rangle, \quad (3.7)$$

onde,

$$g_{t\omega}(\tau) = e^{i\omega\tau} g(\tau - t). \quad (3.8)$$

Em que a  $g(\tau - t)$  delimita a janela, e é definido a partir de uma função kernel  $g(t)$ . No caso da janela gaussiana, temos

$$g(t) = e^{-(t-\tau)^2/a^2}, \quad (3.9)$$

em que o parâmetro  $a$  define o quanto a janela de curta direção da transformada de Fourier se estende e  $\tau$  define o centro da janela. A transformada inversa da STFT é dada por:

$$f(t) = \mathcal{G}^{-1}(\hat{f}_g(t, \omega)) = \frac{1}{2\pi \|g\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_g(\tau, \omega) g(t - \tau) e^{i\omega t} d\omega dt. \quad (3.10)$$

Novamente desejamos calcular o caso discreto. Para isso discretizamos frequência e tempo, escrevendo

$$\begin{aligned} \nu &= j\Delta\omega, \\ \tau &= k\Delta t. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Dessa forma a função kernel passa a ser escrita como

$$g_{j,k} = e^{i2\pi j\Delta\omega t} g(t - k\Delta t), \quad (3.12)$$

e transformada de Gabor discreta pode ser escrita como

$$\hat{f}_{j,k} = \langle f, g_{j,k} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \bar{g}_{j,k}(\tau) d\tau. \quad (3.13)$$

Podemos ainda aproximar a integral através de uma soma finita

$$X(n, k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) w(n - ls) e^{-j\frac{2\pi}{N} kn}, \quad (3.14)$$

em que  $k$  é o índice de frequência,  $N$  é o tamanho da FFT,  $w(n)$  é função de janelamento (o kernel),  $l$  é um número inteiro referente a posição da janela e  $s$  é o tamanho do salto entre janelas sucessivas.

Em termos práticos, a STFT é calculada da seguinte maneira para um sinal  $f$ :

- É definida uma subseção do sinal, com tamanho de  $M$  amostras definido de modo que o sinal seja aproximadamente estacionário.
- Essa subseção é multiplicada por uma função janela.

- É realizada a DFT (por meio da FFT) dessa seção que foi ”ponderada pela janela” e os coeficientes espectrais  $\hat{f}_k$  são obtidos e armazenados num vetor.
- É determinado um tamanho de salto de  $s$  amostras, com  $s < M$  de modo que a transformada não seja afetado por termos nas bordas.
- Por fim o ciclo de janelamento, DFT e salto é repetido até que a transformada seja calculada em todo o sinal.

### 3.1.3 Filtro por Análise Wavelet

#### Transformada de Wavelet

Um dos problemas que surge com a transformada de Fourier é decorrente da relação de incerteza. Quanto mais preciso o componente de frequência do sinal, menos precisos são os componentes temporais, e vice-versa. Esse problema surge pois consideramos um largura constante da janela para todas as frequências. Se usarmos uma janela que abranja um grande números de amostras, teremos uma boa definição nas frequências, mas uma resolução ruim no domínio do tempo. E, por outro lado, escolhendo uma janela pequena, temos uma definição boa no domínio temporal, mas ruim no domínio de frequências.

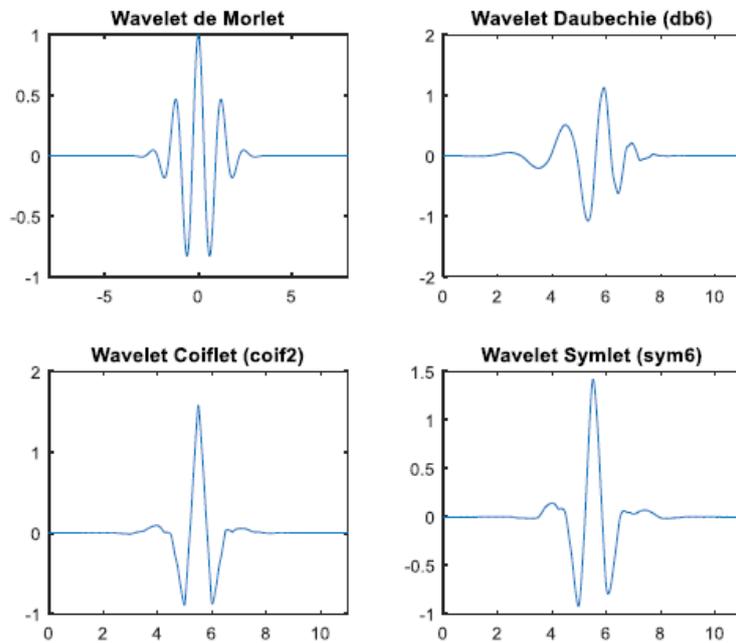
Em alguns casos, é necessário usar uma abordagem mais flexível, que permita uma boa resolução de frequência e de tempo. Uma possibilidade seria considerar uma função janela com tamanho variável. Outra opção para se contornar esses problemas é proposta na ideia da transformada de Wavelet que realiza uma análise em múltiplas resoluções.

Wavelets estendem o conceito de análise de Fourier para uma base ortogonal mais geral. A ideia principal da análise por Wavelet é usar uma função  $\psi(t)$ , conhecida como wavelet mãe e gerar uma família de versões transladadas em diferentes escalas dessa função, expressa por

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad (3.15)$$

onde os parâmetros  $a$  e  $b$  representam os fatores de escala e de deslocamento, respectivamente, da função  $\psi$ . A escolha de  $a$  com valores baixos ( $0 < a < 1$ ) resulta na compressão da wavelet, permitindo uma melhor visualização de detalhes em alta frequência, enquanto a escolha de  $a$  com valores altos ( $a > 1$ ), implica na dilatação da wavelet, permitindo a visualização de detalhes em baixa frequência. Já o parâmetro  $b$  permite que a wavelet se desloque ao longo do eixo temporal, avançando ou retrocedendo, e é o que permite que um sinal seja amostrado através de wavelet.

Muitas wavelets mães foram desenvolvidas e estudadas, e sua escolha para algum tipo de aplicação deve levar em consideração desde critérios de desempenho, até a forma do sinal que se deseja resolver. O exemplo mais simples, e o primeiro a ser desenvolvido, é o da wavelet



**Figura 3.2:** Representação das Wavelet-mãe de Morlet, Daubechie (db6), Coiflet (coif2) e Symlet (sym6).  
Fonte: [42]

de Haar:

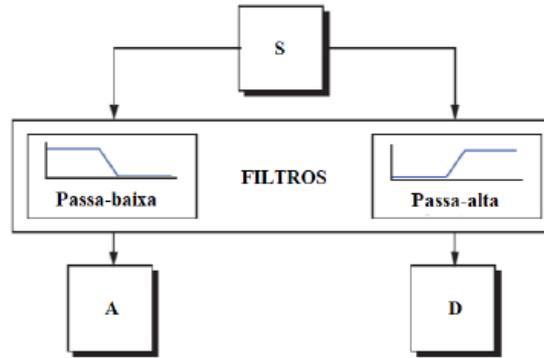
$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \leq t < 1/2, \\ -1 & \text{para } 1/2 \leq t < 1, \\ 0 & \text{caso contrario.} \end{cases} \quad (3.16)$$

As duas primeiras camadas da resolução de multicamada da wavelet Haar, são determinadas pelas funções  $\psi_{1,0}$ ,  $\psi_{1/2,0}$  e  $\psi_{1/2,1/2}$ . Outras wavelets de ampla utilização são as de Daubechies, Symlets, Coiflets, Meyer, Gaussiana, Morlet, Poisson, Bessel, dentre outras. Algumas das quais estão representadas na figura 3.2.

A transformada de Wavelet, portanto, supera o problema da STFT, pois emprega uma janela com tamanho variável no domínio temporal. Sua eficácia está no fato de que a partir dessa janela variável, é possível obter uma alta resolução temporal e baixa resolução de frequências em faixas com frequências maiores, e baixa resolução temporal e alta resolução na frequência em faixas de frequência menores. E, assim como na transformada de Fourier, algoritmos de rápida aplicação também foram desenvolvidos para a transformada de Wavelet.

### Algoritmo de Wavelet

O algoritmo que permitiu a implementação de DWT, conhecido como Algoritmo Piramidal de Mallat ou Análise Multiresolução, foi proposto por Mallat em 1988. Em seu trabalho, Mallat demonstrou que um sinal pode ser decomposto em duas componentes: aproximação e detalhe, que existe uma transformação inversa que permite a reconstrução do sinal a partir dessas componentes. A aproximação pode ser interpretada como um filtro passa-baixa, que contém



**Figura 3.3:** Representação do processo de filtragem na análise de Wavelet. O conteúdo de alta frequência fica contido nas aproximações  $A$ , enquanto o conteúdo de alta frequência fica contido nos detalhes  $D$ . Fonte: [42]

informações de baixa frequência do sinal original. E o detalhe pode ser interpretado como um filtro passa-alta, que contém informações de alta frequência do mesmo sinal original, conforme o diagrama da figura 3.3.

Na análise de multiresolução, o sinal é decomposto em um número de níveis. A wavelet mãe  $\psi(t)$  é correlacionado com um filtro passa-alta, e fornece os detalhes para cada nível. E uma função de escala  $\phi(t)$ , resultado da análise de multi-resolução, se correlaciona com um filtro passa-baixa e fornece as aproximações do sinal.

As funções de escalas podem ser construídas por uma combinação linear de translações, com frequência dobrada, de uma função de escala de base  $\phi(t)$ , expresso por

$$\Phi(\mathbf{t}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sqrt{2}l(k)\phi(2\mathbf{t} - \mathbf{k}), \quad (3.17)$$

em que  $l$  é o conjunto de coeficientes da função de escala (os coeficientes de filtro wavelet). Da mesma forma, a função wavelet-mãe pode ser construída por uma soma de translações com frequência dobrada de uma função de escala de base  $\phi(2t)$

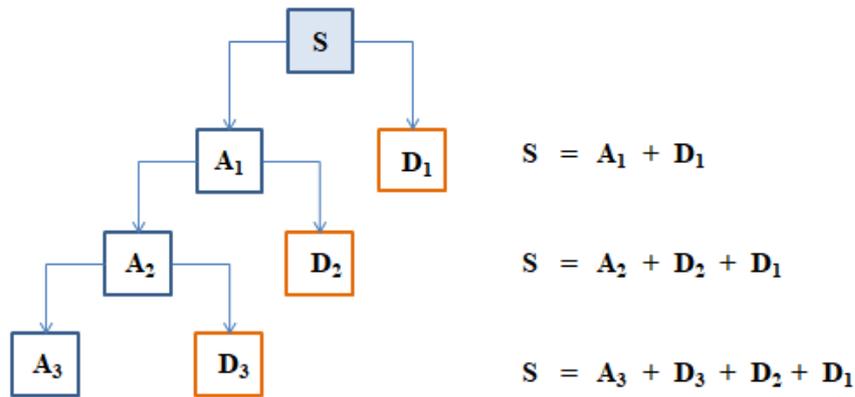
$$\psi(\mathbf{t}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sqrt{2}h(k)\Phi(2\mathbf{t} - \mathbf{k}), \quad (3.18)$$

em que  $h$  é outro conjunto de coeficientes da função de escala. Na análise de multirresolução, definimos  $A_j$ , a aproximação do sinal, e  $D_j$  o detalhe do sinal, conforme

$$\begin{aligned} A_j &= \mathbf{x}(\hat{\mathbf{t}}) * \Phi(\hat{\mathbf{t}}) \\ D_j &= \mathbf{x}(\hat{\mathbf{t}}) * \psi(\hat{\mathbf{t}}) \end{aligned} \quad (3.19)$$

Escrevendo  $A_j$  e  $D_j$  a partir da série para  $\psi(t)$  e  $\phi(t)$ , temos

$$D_j(n) = \sum_k h(k)A_{j-1}(n - k) \quad (3.20)$$



**Figura 3.4:** Representação do processo de decomposição em três níveis de um sinal por meio de uma transformada de Wavelet. Fonte: [42]

e

$$A_j(n) = \sum_k l(k)A_{j-1}(n-k) \quad (3.21)$$

em que  $l(k)$  e  $h(k)$  são os vetores filtros passa-baixa e passa-alta, respectivamente. Assim, ao se realizar uma decomposição em multirresolução em wavelet, no primeiro nível, um sinal discreto  $S$  é decomposto em duas componentes  $A_1$  e  $D_1$ , de forma que:

$$S = A_1 + D_1$$

Em segundo nível, será decomposta a componente de aproximação  $A_1$ :

$$A_1 = A_2 + D_2$$

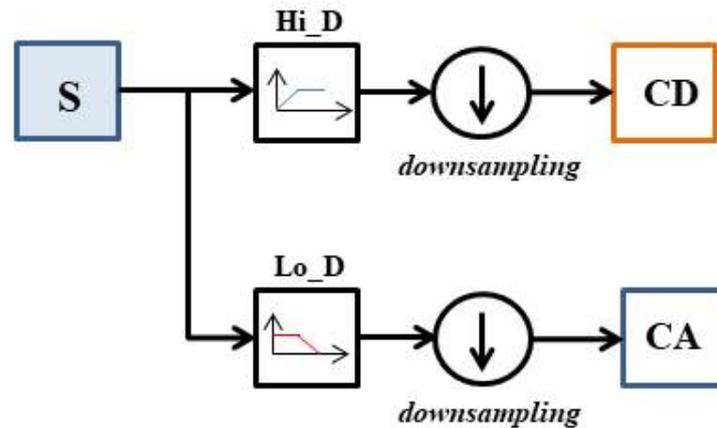
e assim por diante, conforme ilustrado na figura 3.4. Portanto, ao se realizar uma análise em  $n$  níveis, o sinal será decomposto em

$$S = A_n + \sum_i^n D_i \quad (3.22)$$

### Funcionamento no MATLAB

O algoritmo do wavelet está implementado no MATLAB através da Wavelet Toolbox, e funciona em duas partes, decomposição e reconstrução. A decomposição consiste em obter vetores contendo os coeficientes de aproximações e de detalhes do sinal original. Esses vetores são obtidos por meio de convolução do sinal original com um filtro passa-baixa(Lo\_D), para aproximações, e com um filtro passa-alta(Hi\_D) para os detalhes. Em seguida os valores de índice ímpar são eliminados, num processo chamado *downsampling*. Essa etapa de decomposição está ilustrada na figura 3.5.

O processo de decomposição pode então ser iterado de modo a gerar os coeficientes de



**Figura 3.5:** Representação da análise em wavelet enfatizando a redução do número de amostras do sinal original para o sinal decomposto. Os vetores contendo os coeficientes de aproximação e detalhe possuem aproximadamente metade do comprimento do sinal original. Fonte: [43]

aproximação e de detalhe para diferentes níveis, sendo aplicado, após o sinal original, sobre o vetor de aproximação. Dessa forma, o sinal é dividido em várias componentes com resoluções menores, conforme lustrado na figura 3.6.

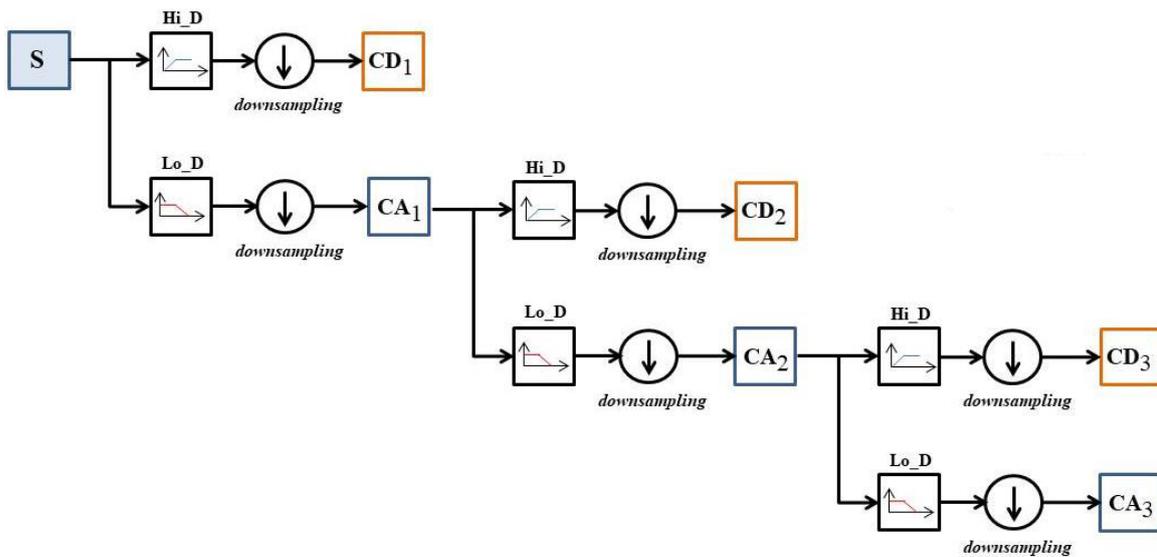
O comprimento de cada filtro é  $2N$ , sendo  $N$  o nível de decomposição desejado. O comprimento do vetor resultante da convolução é  $n+2N-1$ , em que  $n$  é o comprimento do sinal que passará pelo convolução com os filtros. Já os coeficientes  $CA_i$  e  $CD_i$  possuem comprimento  $\frac{n-1}{2} + N$ . Percebemos então, que após cada convolução, o vetor resultante possui aproximadamente metade do tamanho do vetor anterior.

A ideia é, portanto, que para cada nível de resolução do Wavelet, existe uma faixa de frequência correspondentes. E assim, escolhemos o nível com base na faixa de frequência que desejamos analisar. É possível relacionar a faixa de frequência presente nos vetores de detalhes em cada nível, com uma frequência natural da wavelet-mãe e o fator de escala adotado. Essa relação é dada pela equação

$$F_a = \frac{F_c}{a\Delta} = \frac{F_c}{a} F_s$$

em que  $F_a$  é a frequência relativa ao nível,  $F_c$  é a frequência central da wavelet-mãe escolhida e  $a$  é o valor de cada escala por nível e  $\Delta$  é o período de amostragem. No entanto,  $F_a$  é apenas uma pseudo-frequência de referência para caracterizar a frequência dominante da Wavelet [43].

Na prática faixas de frequência da Wavelet são determinados a partir do critério de Nyquist. Como a filtragem em cada resolução corresponde a um *downsampling* pela metade do sinal original, a frequência deve cair pela metade. A metade da faixa de frequência inferior será representada pelos coeficientes de aproximação (que passam por um filtro passa baixa), enquanto a metade superior é representado pelos detalhes (que passam por um filtro passa alta). Para cada nível de resolução os coeficientes de detalhes no  $k$ -ésimo nível correspondem ao  $[\frac{F_s}{2^k}, \frac{F_s}{2^{(k-1)}}]$  e o coeficientes de aproximação correspondem ao intervalo  $[0, \frac{F_s}{2^k}]$ . Por exemplo, considerando um sinal  $S$  de frequência de aquisição  $F_s = 100Hz$ , e uma análise até o segundo



**Figura 3.6:** Processo de decomposição em multinível na análise de wavelet, destacando a diminuição de amostras (*downsampling*) das decomposições em relação ao sinal original. Fonte: [42]

nível, a decomposição é da seguinte forma

$$S = A_2 + D_1 + D_2$$

Nesse caso temos as seguintes faixas de frequência associada a cada um dos níveis, S: [0,100Hz], D1: [25Hz,50Hz], D2: [12.5Hz,25Hz] e A2:[0,12.5Hz]. No entanto, esse valores são aproximados. Os intervalos exatos podem flutuar em torno desses números dependendo do tipo de wavelet mãe utilizada.

## 3.2 Matrizes Aleatórias

Desejamos compreender se a natureza da série temporal de um eletrocardiograma é primariamente formada por sinais determinísticos, com caráter caótico, ou se é predominantemente estocástica. Vimos ao final do capítulo 1 que o processo de identificar estruturas caóticas pode ser bastante complexo, envolvendo primeiro a reconstrução do espaço de fase através de coordenadas atrasadas e posteriormente a análise dos atratores reconstruídos por meio de sua dimensão fractal, ou do grau de sensibilidade às condições iniciais, na forma dos expoentes de Lyapunov.

Esse processo pode ser muito dispendioso computacionalmente, o que inviabiliza, por exemplo, a análise de sistemas através de medidas de caos em tempo real. Assim, exploramos métodos alternativos de caracterizar caos em sistemas empíricos nessa sessão e na próxima.

A análise de Caos por meio de matrizes aleatórias é primariamente qualitativa, com foco em distinguir caos de estocasticidade em séries temporais de caráter errático. Para isso, é necessário transformar a série temporal em matrizes com características típicas dos ensembles

de matrizes aleatórias e comparar suas propriedades com as esperadas do ensemble.

### 3.2.1 Ensemble de Wigner

O uso de matrizes aleatórias na física foi introduzido por Eugene Wigner no estudo do espectro de energia de sistemas de muitos corpos da física nuclear. Partindo do problema de espalhamento de nêutrons em núcleos, descrito por N. Bohr em 1936, acreditava-se que a formação e decaimento de núcleos compostos em sistemas fortemente interagentes de prótons e nêutrons poderia ser descrito por processos quase independentes. Mas, devido ao alto número de corpos, e uma vez que experimentos de espalhamento resultam em reações em cadeias nesse tipo de sistema fortemente interagente, a construção de um hamiltoniano que descreva a dinâmica nuclear é uma tarefa que se demonstrou irrealizável. Por isso, Wigner recorreu a uma abordagem estatística do estudo o espectro nuclear e considerando matrizes com elementos aleatórios, munidos das propriedades adequadas de simetria, foi capaz de demonstrar que estas matrizes são capazes de descrever adequadamente as propriedades do espectro de energia dos sistemas complexos [44].

No contexto da teoria de Schrodinger, existem três tipos de ensembles genéricos que, com base na simetria, foram descritos por Dyson como:

- 1 Ensemble Gaussiano Ortogonal(GOE) : Para sistemas invariantes sobre reversão temporal com simetria rotacional. Suas matrizes são reais e simétricas:

$$H_{mn} = H_{nm} = H_{mn}^*. \quad (3.23)$$

- 2 Ensemble Gaussiano Unitário(GUE): Para sistemas cuja invariância sobre reversão temporal é violada. Suas matrizes são hermitianas:

$$H_{mn} = [H^\dagger]_{nm} \quad (3.24)$$

- 3 Ensemble Gaussiano Simplético(GSE): Para sistemas invariantes a reversão temporal com spin meio inteiro e simetria rotacional quebrada. Suas matrizes podem ser escritas em termos de quatérnions.

Onde  $H$  é a matriz hamiltoniana que descreve o sistema. Uma característica importante de todas essas matrizes é que seus autovalores são reais, e portanto são quantidades mensuráveis. As matrizes do ensemble gaussiano são um caso excepcional por apresentarem duas propriedades que facilitam seu estudo analítico: invariância rotacional e entradas independentes [45]. Enquanto

os demais ensembles, como o de Wishart, possuem apenas uma dessas propriedades. Particularmente, temos interesse na estatística da densidade espectral dos autovalores e do espaçamento de autovalores vizinhos dessas duas matrizes. É possível mostrar que, no limite de ensembles com um grande número  $N$  de matrizes, a média dessas densidades espectrais obedecem à lei do semicírculo e à conjectura de Wigner, respectivamente.

A lei do semicírculo estabelece que para uma matriz com entradas aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d) cujos autovalores  $x_i$  podem ser descritos pela função densidade de probabilidades conjunta (f.d.p.c)

$$p(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{Z_{N,\beta}} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N x_i^2} \prod_{j < k} |x_j - x_k|^\beta, \quad (3.25)$$

apresenta uma densidade espectral  $\rho(x) = \int dx_2 \cdots dx_N \rho(x, x_2, \dots, x_N)$  que, considerando um fator de escala adequado, possui forma semicircular

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{\beta N} \rho(\sqrt{\beta N} x) = \rho_{SC}(x), \quad (3.26)$$

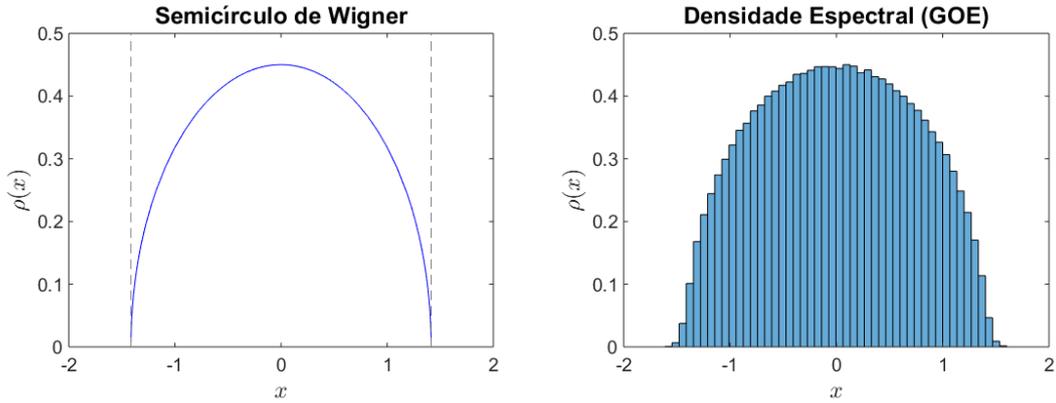
em que  $\rho_{SC}(x) = \frac{1}{\pi} \sqrt{2 - x^2}$ . Isso significa que o histograma de autovalores para um número grande de  $N$  se concentra no intervalo  $[-\sqrt{2\beta N}, \sqrt{2\beta N}]$ . Conforme pode ser visto na figura 3.7 para histogramas de matrizes simetrizadas compostas por números (pseudo)aleatórios gerados computacionalmente.

Já a conjectura de Wigner é um resultado sobre a distribuição do espaçamento de autovalores das matrizes de Wigner. É possível demonstrar que para matrizes com muitos graus de liberdade, o espaçamento espectral é determinado pela função

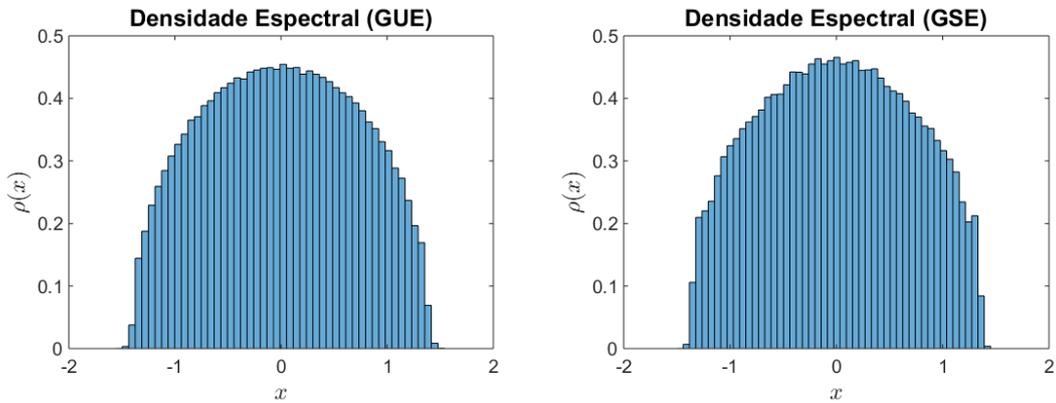
$$\bar{p}(s) = (\pi s/2) \exp\left(-\pi s^2/4\right), \quad (3.27)$$

cuja representação gráfica está apresentada na figura 3.8.

Apesar de sua simplicidade, a conjectura é um resultado profundo que diz que a probabilidade de se encontrar dois autovalores muito próximos tende a zero. Como na física atômica, em que esses resultados foram obtidos primeiramente, os autovalores são representações dos níveis de energia do sistema. É dito que há uma repulsão de nível, como se cada autovalor mantivesse uma distância dos vizinhos, mas sem um distanciamento muito grande. Em comparação para variáveis aleatórias adjacentes i.i.d é possível mostrar que não há repulsão de nível, mas que a distribuição do espaçamento é uma Poisson. Isto é, a probabilidade é máxima para encontrar autovalores com distância zero, e vai caindo para valores mais altos de distância. Esse resultado é significativo, pois demonstra que apesar das matrizes serem compostas por entradas aleatórias, as propriedades de simetria garantem que elas estão correlacionadas.



(a) Densidade espectral dos ensemble gaussianos de Wigner, conforme previsto pela lei do semicírculo (b) Histograma normalizado da distribuição de autovalores de um conjunto de  $N=10000$  matrizes aleatórias simétricas  $50 \times 50$  gerados a partir de uma distribuição gaussiana



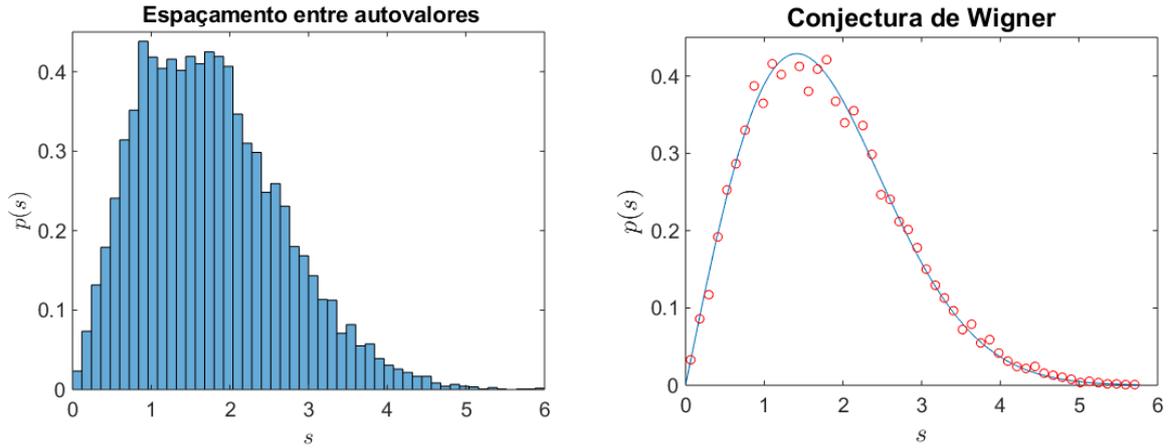
(c) Histograma normalizado da distribuição de autovalores de um conjunto de  $N=10000$  matrizes aleatórias hermitianas  $50 \times 50$  gerados a partir de uma distribuição gaussiana. Fonte: Autor. (d) Histograma normalizado da distribuição de autovalores de um conjunto de  $N=10000$  matrizes aleatórias quaterniônicas  $50 \times 50$  gerados a partir de uma distribuição gaussiana.

**Figura 3.7:** Comparação entre o formato previsto por Wigner na lei do semicírculo com a densidade espectral dos ensembles GOE, GUE e GSE.

### 3.2.2 Ensemble de Wishart-Laguerre

Um dos trabalhos em ensemble de matrizes aleatórias que antecede o de Wigner é o do matemático John Wishart. As matrizes introduzidas por ele são matrizes  $N \times N$  com elementos correlacionados, construídas como  $W = HH^\dagger$  em que  $H$  é uma matriz  $N \times M$ , ( $M \geq N$ ), preenchidos com elementos gaussianos independentes e identicamente distribuídos (i.i.d). Assim como as matrizes de Wigner,  $W$  é hermitiana e portanto possui autovalores reais.

As propriedades espectrais do ensemble de Wishart normalmente envolvem polinômios de Laguerre, dessa forma esse ensemble é comumente referido como de Laguerre e são classificados, de acordo com sua simetria, em *LOE*, *LUE* ou *LSE* para  $\beta = 1, 2, 4$ , respectivamente, em que  $\beta$  é o índice de Dyson.



(a) Histograma do espaçamento entre autovalores em um ensemble de  $N = 10000$  matrizes. Fonte: Autor. (b) Plot em linha da conjectura de Wigner comparando ao delineado do histograma de matrizes aleatórias

**Figura 3.8:** Representações da conjectura de Wigner a partir da forma da função prevista analiticamente e do histograma de autovalores de matrizes aleatórias geradas computacionalmente.

A função densidade de probabilidades conjunta dos elementos da matriz  $W$  [45]

$$\rho[W] \propto e^{-\frac{1}{2}\text{Tr}W} (\det W)^{\frac{\beta}{2}(M-N+1)-1}, \quad (3.28)$$

possui elementos correlacionados devido a presença do determinante, e formam um modelo rotacionalmente invariante. A partir da equação 3.28, podemos escrever a função de densidade de probabilidades conjunta dos autovalores

$$\rho(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{\mathcal{Z}_{N,\beta}^{(L)}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^N x_i} \prod_{i=1}^N x_i^{\alpha\beta/2} \prod_{j<k} |x_j - x_k|^\beta, \quad (3.29)$$

em que  $\alpha = (1 + M - N) - 2/\beta$  e  $\mathcal{Z}_{N,\beta}^{(L)}$  é a constante de normalização, vulgo a função de partição do ensemble.

A partir dessas densidades de probabilidades, o comportamento assintótico, para  $N$  grande, da densidade espectral das matrizes do ensemble de Wishart-Laguerre pode ser calculada. Nesse caso, para  $N, M \rightarrow \infty$ , com  $c = N/M \geq 1$  mantido fixo, a densidade de autovalores médias das matrizes de Wishart assumem a forma

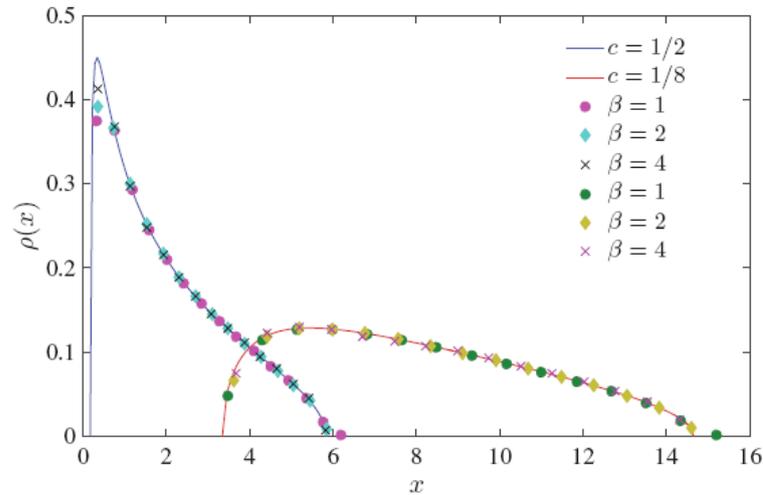
$$\rho(x) \rightarrow \frac{1}{\beta N} \rho_{\text{MP}}\left(\frac{x}{\beta N}\right), \quad (3.30)$$

em que  $\rho_{\text{MP}}$  é a lei de Marchenko-Pastur, uma função independente de  $\beta$  definida como

$$\rho_{\text{MP}}(y) = \frac{1}{2\pi y} \sqrt{(y - \zeta_-)(\zeta_+ - y)}, \quad (3.31)$$

para  $x \in [\zeta_-, \zeta_+]$ , no qual os pontos limites  $\zeta_{\pm}$  são dados por  $\zeta_- = (1 - c^{-1/2})^2$  e  $\zeta_+ = (1 + c^{-1/2})^2$

A forma usual da densidade de Marchenko-Pasteur pode ser verificada na figura 3.9, onde



**Figura 3.9:** Comparação da lei de Marchenko-Pastur para dois diferentes valores do parâmetro  $c = N/M$  obtidos a partir da diagonalização de matrizes aleatórias de Wishart para todos os valores possíveis de  $\beta$ . Fonte [45]

podemos ver que diferente da lei do semicírculo, a forma densidade espectral dos autovalores das matrizes de Wishart dependem da razão  $c = N/M$ .

### 3.2.3 Construindo Matrizes de Correlação

A aplicação do método para distinção entre caos e estocasticidade nas séries temporais se resume à verificação da lei do semicírculo e da conjectura de Wigner para matrizes de Wigner, e da lei de Marchenko-Pasteur para matrizes de Wishart, conforme apresentado por Bin et. al [15].

A partir de uma matriz aleatória  $X$  de ordem  $m \times n$  cujos elementos são distribuídos independentemente segundo uma distribuição Normal, podemos construir uma matriz de Wishart através da normalização  $W = \frac{1}{m} X^T X$ . A lei de Marchenko-Pasteur estabelece que quando ambos  $m$  e  $n$  tendem a infinito, e  $Q = \frac{m}{n} \in [1, \infty)$ , a densidade espectral dos autovalores dessa matriz tende à

$$f(\lambda) = \begin{cases} \frac{Q\sqrt{(\lambda-\lambda_{min})(\lambda_{max}-\lambda)}}{2\pi\lambda} & \lambda_{min} < \lambda < \lambda_{max} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} \quad (3.32)$$

Uma dada série temporal  $\vec{v} = v_1, \dots, v_N$  pode ser interpretada como um vetor contendo  $N$  pontos medidos. Para realizar o cálculo de correlação a partir desse vetor, devemos primeiramente realizar a normalização

$$\hat{v}_i = (v_i - \bar{v})/\sigma, i = 1, \dots, N, \quad (3.33)$$

em que  $\bar{v}$  é a média e  $\sigma$  é o desvio padrão de  $v$ .

Após a normalização, temos um vetor com média nula e desvio padrão unitário, semelhantemente a uma matriz construída a partir de uma distribuição normal, a partir do qual

podemos construir uma matriz  $\tilde{X}$  de ordem  $m \times n$ . Para isso, extraímos segmentos de intervalo iguais dos elementos consecutivos da série temporal normalizada, transformando esses segmentos em matrizes colunas e alocando-os sequencialmente numa matriz. Isto é,

$$\tilde{X}_{m \times n} = (V_1^T V_2^T \cdots V_n^T), \quad (3.34)$$

em que os vetores colunas  $V_i^T$ ,  $m \times 1$ , são determinados por

$$(\hat{v}_1 \hat{v}_2 \cdots \underbrace{\hat{v}_i \cdots \hat{v}_{i+m-1}}_{:=V_1} \underbrace{\hat{v}_{i+m} \cdots \hat{v}_{i+2m-1}}_{:=V_2} \cdots \underbrace{\hat{v}_{i+(n-1)m} \cdots \hat{v}_{i+nm-1}}_{:=V_n} \cdots \hat{v}_N). \quad (3.35)$$

A partir de  $\tilde{X}$  podemos ainda construir uma matriz de correlação  $m \times m$ ,

$$C_1 = \frac{1}{n} \tilde{X} \tilde{X}^T \quad (3.36)$$

que possui uma estrutura similiar à da matriz de Wishart com parâmetro  $Q = \frac{n}{m}$ . De modo semelhante, escolhendo uma série temporal com  $m = n$  e  $N = m^2$ , podemos construir uma matriz  $\tilde{Y}_{m \times m} = (V_1^T V_2^T \cdots V_m^T)$  a partir de  $\hat{v}$  para gerar outra matriz de correlação

$$C_2 = \frac{\tilde{Y} + \tilde{Y}^T}{\sqrt{2m}} \quad (3.37)$$

que possui uma estrutura similiar a matriz de Wigner.

Dessa forma, como as matrizes  $C_1$  e  $C_2$ , contendo as correlações relacionadas ao sistema, são colocadas na forma das matrizes de Wigner e de Wishart, podemos calcular seus respectivos espectros de autovalores, e o espaçamento médio entre eles, para comparar com os resultados da teoria de matrizes aleatórias apresentados anteriormente. Se a série temporal é aleatória, o histograma de autovalores de  $C_1$  irá se aproximar da forma da lei de Marchenko-Pasteur e o histograma de autovalores de  $C_2$  irá se aproximar da forma da lei do semicírculo, enquanto o espaçamento médio entre os autovalores de  $C_2$  irá se aproximar da forma da conjectura de Wigner [15].

Além de sua relevância para a estatística espectral, a matriz de Wishart  $C_1$ , em especial, será importante para aplicação do método a ser discutido na próxima seção. Considerando  $M$  observações empíricas, igualmente espaçadas no tempo para cada variável de um sistema descrito por  $N$  variáveis aleatórias  $\{x_1, \dots, x_N\}$  e as organizando em uma matriz  $X_{N \times M}$  com entradas  $x_i^t$  ( $i = 1, \dots, N$ ,  $t = 1, \dots, M$ ), então a quantidade

$$c_{ij} = \frac{1}{M} \sum_{t=1}^M x_i^t x_j^t, \quad (3.38)$$

é o estimador de Pearson para a correlação entre as variáveis  $x_i$  e  $x_j$ , quando estas estão padronizadas. [45]

No caso em que os estimadores para cada de variáveis no sistema podem ser coletados em matrizes  $N \times N$  então a matriz  $C = XX^T/M$  é a matriz de correlação dos dados em  $X$ . E quando as entradas são correlações aleatórias, o podemos obtê-las a partir do ensemble de Wishart-Laguerre. [45]. De modo que podemos utilizar as matrizes  $C_1$  para a análise de autocorrelação, que será apresentada adiante. Mais especificamente, a primeira coluna ou linha, uma vez que a matriz é simétrica, de  $C_1$  é a função de correlação de um vetor coluna de  $X$  consigo mesmo, isto é, a função de autocorrelação.

### 3.3 Função de Autocorrelação e Densidade de Máximos

Outra forma de se medir o grau de ordem de um sistema é verificando o quão semelhantes entre si são suas partes. Podemos dividir um sistema em diferentes regiões no espaço, ou um processo dinâmico em intervalos de tempo igualmente espaçados, e comparar a similaridade entre essas partes. Esse tipo de medida é útil para se buscar padrões que se repetem e periodicidade num sistema ruidoso. Uma forma de se fazer essa comparação é através da análise de autocorrelação.

Na estatística existem diversos tipos de coeficientes que podem ser calculados para determinar a relação estatística entre duas variáveis. Esses coeficientes, em geral, assumem valores num intervalo de  $[-1, 1]$ , em que os extremos representam o máximo de correlação ou anti-correlação, e o valor nulo é obtido quando as variáveis não possuem relação entre si. O estimador de correlação mais utilizado é o coeficiente de Pearson, definido para um par de variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  como

$$r_{X,Y} = \frac{\sigma_{X,Y}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

em que  $\sigma_{X,Y}$  é a covariância entre  $X$  e  $Y$ , e  $\sigma_X$  e  $\sigma_Y$  são os desvios padrões de  $X$  e de  $Y$ , respectivamente. Pela desigualdade de Schwarz é garantido que  $r_{xy} \leq 1$

No caso em que os sinais  $X$  e  $Y$  são compostos por  $n$  amostras cada,  $\{x_1, \dots, x_n\}$  e  $\{y_1, \dots, y_n\}$ , respectivamente, o coeficiente de Pearson pode ser escrito como

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (\bar{x}_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \quad (3.39)$$

em que  $\bar{x}$  representa a média sobre  $X$ , e de modo análogo para  $Y$ .

Para sinais contínuos que evoluem temporalmente e/ou variam espacialmente, podemos calcular o coeficiente de correlação referente a diferentes funções em momentos no tempo e espaço distintos, de modo que passamos a ter uma função de correlação. Por exemplo, é comum na mecânica estatística definir a função de correlação entre duas variáveis,  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$ , com dependência espacial e temporal como

$$C_{XY}(r, \tau) = \langle \mathbf{X}(R, t) \cdot \mathbf{U}(R+r, t+\tau) \rangle - \langle \mathbf{X}(R, t) \rangle \langle \mathbf{Y}(R+r, t+\tau) \rangle.$$

Mais comumente, o interesse é analisar a correlação de um mesma variável consigo mesmo, de modo que temos

$$C_{XX}(r, \tau) = \langle \mathbf{f}(R, t) \cdot \mathbf{f}(R + r, t + \tau) \rangle - \langle \mathbf{f}(R, t) \rangle \langle \mathbf{f}(R + r, t + \tau) \rangle.$$

Para o caso em que só há dependência temporal, podemos escrever a função de autocorrelação de um observável  $X(t)$  como:

$$C_{XX}(t, t') \equiv \frac{1}{\sigma^2} \langle X(t)X(t') \rangle - \frac{1}{\sigma^2} \langle X(t) \rangle \langle X(t') \rangle \quad (3.40)$$

em que  $\sigma^2 = \langle x(t)^2 \rangle - \langle x(t) \rangle^2$ , e  $\langle \dots \rangle$  denota a média do ensemble

Em sistemas da mecânica estatística, é natural que fora do equilíbrio um sistema apresente propriedades macroscópicas que vão sendo amenizadas pelo comportamento microscópico a medida que o sistema caminha para o equilíbrio. Nessa situação, a função de correlação temporal para essa propriedade decai para um valor nulo a medida que o sistema evolui e, podemos definir uma escala de tempo característica, que representa a duração do decaimento, chamada de tempo, ou comprimento, de correlação  $\tau_c$ .

A partir da função de autocorrelação, um novo método para a caracterização de Caos foi proposto nas referencias [17] e [16], relacionando o tempo de correlação de um sinal oscilatório com sua densidade de máximos. Um máximo local pode ser definido como um ponto em um intervalo  $[t, t + \delta t]$  com  $\delta \rightarrow 0$ , para os quais pontos na esquerda possuem derivada positiva, marcando um auge, e pela direita possuem derivada negativa, marca de uma inclinação negativa. Ou, de modo equivalente, é um ponto em que a primeira derivada é zero, e a segunda derivada é negativa de modo que a função possui concavidade para baixo.

Considerando um ensemble estatístico formado a partir de múltiplas realizações de um sistema que evolui temporalmente a partir de um estado inicial escolhido aleatoriamente, seus estados finais apresentarão mudanças significativas decorrentes dessa pequena mudança entre os estados iniciais, que é característica de comportamento caótico. A partir dessa configuração, podemos estimar, por meio da distribuição de probabilidade conjunta, a densidade média de máximos do ensemble, considerando a probabilidade de encontrar um máximo no intervalo  $[t, t + \delta t]$ , dado pela integral

$$\langle \rho_i \rangle \equiv \frac{1}{\delta t} \int_{-\infty}^0 dx_i'' \int_0^{-x_i'' \delta t} dx_i' P(x_i', x_i'') = - \int_{-\infty}^0 dx_i'' x_i'' P(0, x_i''). \quad (3.41)$$

Considerando que a média do sinal é invariante sob translação temporal, as médias de  $x_i'$  e  $x_i''$  vão para zero, e os momentos estatísticos podem ser obtidos. Por meio do princípio da máxima entropia é possível mostrar que a probabilidade conjunta pode ser escrita como

$$P(0, x_i'') = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\langle x_i'^2 \rangle \langle x_i''^2 \rangle}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{x_i''^2}{\langle x_i''^2 \rangle}\right), \quad (3.42)$$

de modo que, substituindo na equação 3.41, o número de máximos por intervalo de tempo  $\rho_t$  é dada por

$$\langle \rho_t \rangle = \frac{1}{2\pi} \sqrt{-\frac{T_4}{T_2}}, \quad (3.43)$$

em que

$$T_j \equiv \frac{d^j}{d(\delta t)^j} C(\delta t) \Big|_{\delta t=0}.$$

Em sistemas homogêneos que apresentem comportamento oscilatório é possível aproximar  $C(t) = \cos(\omega t + \phi)$  e assim, carregando as devidas derivações e substituindo na equação 3.43 encontramos que  $\langle \rho_t \rangle \sim \omega/2\pi$ . Comumente, o tempo de correlação pode ser estimada como o valor para o qual a função de autocorrelação para a metade. Considerando o decaimento do tipo cosseno, a função atingirá o valor 0.5 quando  $\omega\tau = \pi/3$ . Dessa forma, a densidade de máximos é dada por

$$\langle \rho_t \rangle = \frac{1}{6\tau},$$

que nos permite escrever o tempo de correlação

$$\tau = \frac{1}{6\langle \rho_t \rangle}. \quad (3.44)$$

Portanto, com base nesse resultado, obtido nas referências [17] e [16], podemos estimar o valor do comprimento de correlação  $\tau$  a partir da densidade média de máximos de uma série temporal, e verificar a presença de caos em um sistema a partir da convergência da estimativa do comprimento de correlação.

## 3.4 Aprendizado de Máquina

Uma vez realizado o processamento dos sinais, calculadas suas respectivas densidades de máximo e tempos de queda da autocorrelação, desejamos verificar se esses parâmetros podem ser utilizados para distinguir as condições de arritmia entre diferentes pacientes. Temos, portanto, um problema de classificação, que pode ser atacado utilizando algoritmos de aprendizado de máquina.

### 3.4.1 Classificação

Existem muito exemplos de como problemas de classificação podem surgir. Um exemplo clássico na biogenética é o de se tentar determinar, a partir de uma sequência genética, quais mutações são causadores de doenças e quais não são, a partir de um banco de dados contendo as sequências de DNA de uma grande quantidade de pacientes. Em nosso caso, o problema de classificação consiste em associar um valor, ou intervalo de valores, do tempo de correlação, calculados a partir do eletrocardiograma, a condições específicas de saúde.

Numa configuração de classificação padrão chamamos a variável independente  $x$  de observação, os tempos de correlação em nosso problema, e variável independente  $y$  de classe ou rótulo.. Em nosso caso  $x$  é o comprimento de correlação do sinal de eletrocardiograma, e será utilizado para prever qual a arritmia  $y$  do paciente de qual o eletrocardiograma foi medido.

O treinamento do algoritmo classificador é realizado a partir de um conjunto de observações  $\{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$ , denominado de conjunto de treinamento. Formalmente, seu objetivo é o de construir uma função  $h(x) : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ , comumente chamada de hipótese, que atribua uma classe  $y$  pertence ao espaço de saída  $\mathcal{Y}$  para uma observação  $x$  do espaço de entrada  $\mathcal{X}$ .

Em geral, problemas de classificação podem ser abordados segundo duas abordagens: generativa ou paramétrica, conforme veremos mais adiante nos algoritmos utilizados. No caso paramétrico construímos uma hipótese determinística, construída com base estatística, que determina somente o valor mais provável para  $y$ . Um exemplo é o da regressão logística, em que a hipótese assume uma forma

$$h_{\theta}(x) = g(\theta^T x) = \frac{1}{1 + e^{-\theta^T x}}, \quad (3.45)$$

e durante o treinamento  $\theta$  é ajustado de modo a se adequar a. Nesse caso, podemos dizer que

$$\begin{aligned} P(y = 1 | x; \theta) &= h_{\theta}(x) \\ P(y = 0 | x; \theta) &= 1 - h_{\theta}(x) \end{aligned} \quad (3.46)$$

Na abordagem generativa, os classificadores tentam estimar a probabilidade diretamente. Ao invés de um função  $h(x)$  temos distribuições de probabilidades condicionais  $\Pr(Y|X)$  e o algoritmo de classificação é treinado de modo a maximizar a essa distribuição para uma previsão de  $Y = y$ , isto é

$$\hat{y} = \arg \max_y P(Y = y|X) \quad (3.47)$$

Existem dois tipos de abordagem para se estimar a probabilidade  $\Pr(Y|X)$ . Em **modelos discriminativos**, essa probabilidade é obtida diretamente por meio de definição de fronteira de decisão no espaço  $\mathcal{X}$  dos observáveis. Já em modelos generativos, primeiro se estima  $\Pr(x|y)$  e se considera  $P(y)$  a partir de uma suposição inicial sobre o problema, e então se calcula  $\Pr(y|x)$  a partir do teorema de Bayes. Nesse caso, a distribuição dos preditores  $X$  é modelada separadamente em cada uma das classes de respostas(para cada valor de  $Y$ ), a partir do qual pode-se obter  $\Pr(Y = k|X = x)$

Para o caso em que desejamos classificar uma observação dentre  $K$  classes possíveis,  $K \geq 2$ , em que  $Y$  pode assumir  $K$  valores distintos e desordenados. Seja  $\pi_k \equiv P(Y = k)$  a probabilidade a priori de que uma observação escolhida aleatoriamente venha da  $k$ -ésima classe. E denotando  $f_k(X) \equiv P(X|Y = k)$  como a função de densidade de  $X$  para uma observações que

vem da  $k$ -ésima classe. Podemos escrever pelo teorema de Bayes

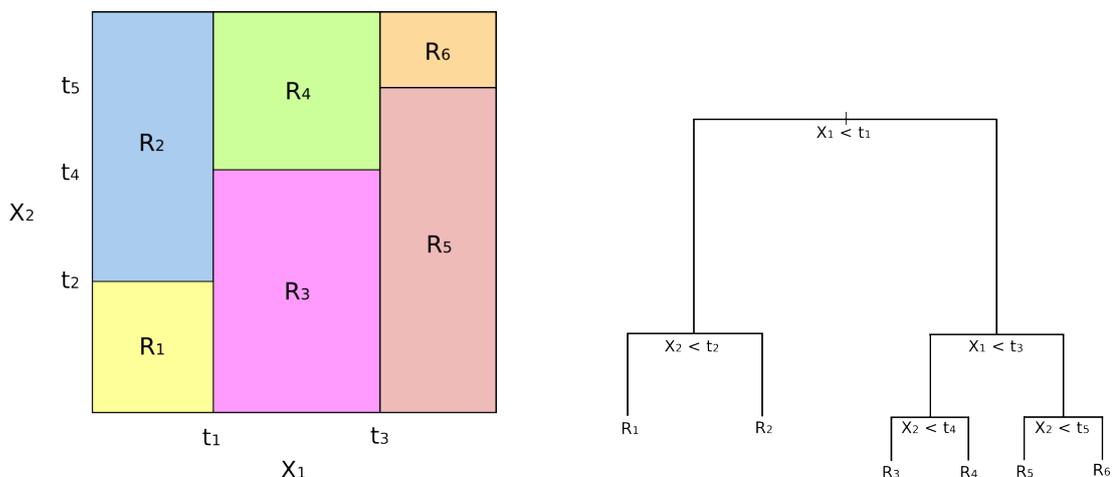
$$\Pr(Y = k|X = x) = \frac{\pi_k f_k(x)}{\sum_{l=1}^K \pi_l f_l(x)}. \quad (3.48)$$

O tipo de abordagem adotada depende da preferência. Abordagens generativas podem ser preferidas por fornecer as probabilidades diretamente, fornecendo assim uma estatística mais completa. No entanto, não são de fácil uso por exigir supor a distribuição de probabilidades a qual os observáveis pertencem. Devido ao baixo número de observações e classes em nosso banco de dados, iremos implementar tantos algoritmos generativos quanto discriminativos.

### 3.4.2 Algoritmos

A implementação algorítmica da classificação será realizada por meio do aplicativo *Classification Learner* do *Statistics and machine learning toolbox* [46] do MATLAB, que permite um processo simplificado de treinamento. O procedimento utilizado consiste em primeiro fornecer um conjunto de treinamento na forma de vetor contendo as observações  $\{x_i\}$  e suas classes  $\{y_i\}$ , separar o sinal numa proporção 90/10, 90% para treinamento e 10% para teste. Dos dados separados para treinamento, realizamos um processo de validação  $k$ -fold com  $k = 5$  seguindo o procedimento descrito em 3.4.3, e por fim o conjunto de dados é utilizado para treinar algoritmos de classificação de fácil aplicação. Ao longo do desenvolvimento do trabalho utilizamos quatro algoritmos e variações – árvores de decisões, K vizinhos mais próximos (do inglês, KNN), análise de discriminante linear e máquina de vetores de suporte (do inglês, SVM) – que serão descritos brevemente a seguir.

#### Árvore de Decisões



(a) Partição de um subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  em seis regiões.

(b) Árvore de decisões com regiões separadas.

**Figura 3.10:** Ilustração da estratificação do espaço numa divisão binária recursiva com cinco fases, e a árvore de decisão associada essa divisão. Fonte: [47]

Árvore de decisões é um método de aprendizado de máquina que pode ser aplicado tanto para regressão quanto para classificação. A ideia é criar um modelo que preveja o valor/rótulo de uma variável alvo por meio de estratificação do espaço dos observáveis em um número de regiões simples. Essas estratificações são realizadas por meios de decisões simples construídas com base nas características dos dados de treinamento.

A estratégia para a construção de uma árvore de classificação segue duas etapas: primeiramente, o espaço de variáveis de entrada é dividido em  $J$  regiões distintas que não se sobrepõem, posteriormente é contado o número total de observações que caem numa região  $R_j$  e verificado qual o maior número de rótulos. Uma variável de teste que caia em  $R_j$  será atribuído o rótulo da classe predominante.

Para a construção das regiões  $R_1, \dots, R_j$ , o espaço de observáveis é dividido em retângulos de alta dimensão, ou simplesmente caixas. A priori qualquer forma poderia ser usada, mas retângulos fornecem maior simplicidade e interpretabilidade dos resultados. O objetivo é encontrar as caixas que  $R_1, \dots, R_j$  que minimizem a taxa de erro de classificação, que é definido simplesmente como a fração das observações de treinamento que não pertencem a classe mais comum:

$$E = 1 - \max_k(\hat{p}_{mk}). \quad (3.49)$$

em que  $p_k$  é a proporção das observações de treino na  $m$ -ésima região que são da  $k$ -ésima classe. Outro índice mais sensível para a determinação das regiões é a entropia

$$D = - \sum_{k=1}^K \hat{p}_{mk} \log \hat{p}_{mk}. \quad (3.50)$$

Como  $0 \leq \hat{p}_{mk} \leq 1$ , então  $0 \leq -\hat{p}_{mk} \log \hat{p}_{mk}$  e, dessa forma, é possível mostrar que a entropia decai para zero quando todas as proporções  $\hat{p}_{mk}$  se aproximam de 0 ou 1.

O processo de construção da árvore é realizado de cima para baixo, no sentido que começa considerando todo o espaço que vai sendo particionado e de modo ganancioso, no sentido de que as divisões realizadas não são escolhidas de modo a otimizar a construção total da árvore, mas é escolhido a melhor divisão em cada passo particular. Esse processo é chamado de divisão binária recursiva. Nele, primeiro selecionamos uma característica  $X_j$  e o ponto de corte  $s$  de tal modo que o espaço das características seja separado em duas regiões  $\{X|X_j < s\}$  e  $\{X|X_j \geq s\}$ , que leva a maior redução da taxa de erro de classificação. Depois de escolhido, definimos, para qualquer  $j$  e  $s$ , o par de meio planos

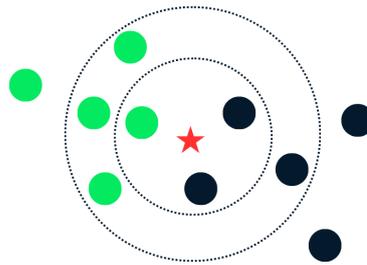
$$R_1(j, s) = \{X|X_j < s\} \text{ e } R_2(j, s) = \{X|X_j \geq s\}. \quad (3.51)$$

Esse processo é repetido para uma das regiões separadas, e vai se repetindo para cada uma das regiões divididas de modo a criar sub-regiões até que algum critério de parada predeterminado seja

alcançado. Por exemplo, no caso de um treinamento arbitrário com seis ramificações podemos obter uma árvore de decisões semelhante à da figura 3.10.

Além do funcionamento básico, outros processos podem ser realizados de modo a melhorar as predições realizadas pela árvore de decisões, como a poda de árvores. No entanto consideraremos apenas a forma mais simples apresentada aqui.

## KNN



**Figura 3.11:** Exemplo de classificação KNN utilizando métrica euclidiana considerando diferentes valores de  $K$ . Para o menor valor de  $K$  (círculo interno), há mais bolinhas pretas do que verdes, e assim a estrela vermelha é classificada como bolinha preta. Já para o maior valor de  $K$  (círculo externo), há mais bolinhas verdes do que pretas e, portanto, a estrela vermelha é classificada como bolinha verde. Fonte: [48]

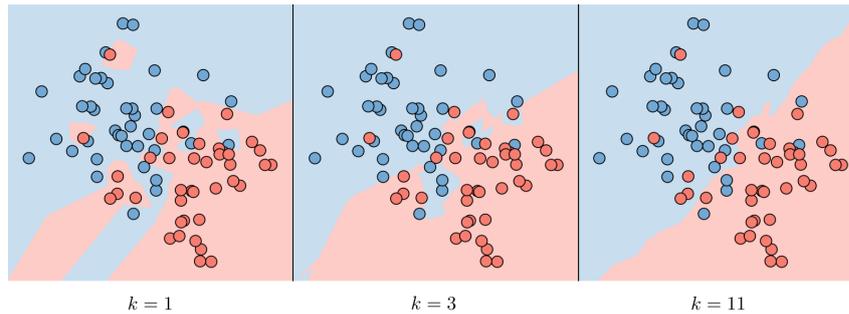
O algoritmo de KNN ("K-nearest neighbors",  $K$  vizinhos mais próximos) é um algoritmo simples que armazena todos os dados de treinamento, compara novos pontos aos armazenados e retorna a classe mais frequente dos  $K$  vizinhos mais próximos. Para isso é necessário que alguma noção de distância entre os pontos seja utilizada para definir uma vizinhança, no qual serão selecionados os  $K$  elementos mais próximos do ponto a ser classificado. Uma vez determinado a quantidade de vizinhos a serem avaliados e o tipo de distância ser usado para determinar a vizinhança  $N_0$ . Para um observável  $x_0$  submetido ao classificador KNN, a probabilidade condicional para uma classe  $j$  é estimada como uma fração do número de pontos em  $N_0$  que pertencem à classe  $j$ :

$$\Pr(Y = j | X = x_0) = \frac{1}{K} \sum_{i \in N_0} I(y_i = j). \quad (3.52)$$

A classe com maior probabilidade então é escolhida como a classe da variável  $x_0$  que se deseja prever.

A fase de treinamento desse algoritmo consiste essencialmente em armazenar o conjunto de treinamentos contendo as observações  $x$  e seus respectivos rótulos  $y$ , o que o torna um algoritmo rápido de treinar. No entanto, por necessitar de todos os dados de treinamento para se realizar uma previsão, é um algoritmo que utiliza muita memória para se executar.

Diferentes tipos de KNN podem ser empregados de acordo com o tipo de distância que se utiliza para se comparar a vizinhança. Usualmente se é utilizado a distância euclidiana. Em



**Figura 3.12:** Exemplo de classificação para números crescentes de  $k$ . É notável que para valores pequenos de  $k$  a classificação tende a se ajustar de modo específico para o conjunto de treinamento usado, de modo que não há uma região bem delimitada. Enquanto para valores altos a região não se adapta as particularidade dos dados de treinamento e tende a ser linear. Fonte: [49]

alguns, casos é possível utilizar uma função de ponderação para as contribuições dos vizinhos, de modo que quanto mais próximo um vizinho estiver maior será a sua contribuição para a classificação. Além disso, a escolha do número  $K$  tem um efeito drástico na classificação obtida, conforme podemos ver na figura 3.12. Normalmente, valores de  $K$  baixo tendem ao problema de *overfitting*, isto é, de se ajustarem aos mínimos detalhes do treinamento, incluindo aos possíveis erros. O que caracteriza um modelo de baixo viés, e alta variância. A medida que  $K$  aumenta, o método se torna menos flexível e as fronteiras de decisão se aproximam da linear. No caso de  $K$  grande, temos um modelo de baixa variância, e alto viés. É desejável, portanto, valores intermediários para uma previsão equilibrada.

### Discriminante Linear

A análise de discriminante linear (LDA) é um método de classificação generativa, que faz uso da equação 3.48 para estimar as probabilidades associadas à obtenção de uma dada classe. Sua aplicação se resume a encontrar uma combinação linear das propriedades que caracterizam, ou separam, duas ou mais classes de objetos. A combinação resultante pode, então, ser utilizada como um classificador linear. É eficaz, principalmente, para a resolução de problemas envolvendo muitas classes, pois as separa através da redução de dimensionalidade dos dados com múltiplas características.

Considerando uma aplicação para classificação binária com entradas  $x$  e saída  $y$ , a LDA parte do pressuposto de que as funções de densidade condicional  $p(\mathbf{x}|y = 0)$  e  $p(x|y = 1)$  são ambas pertencentes a uma distribuição gaussiana com média e covariância definidos como  $(\vec{\mu}_0, \Sigma_0)$  e  $(\vec{\mu}_1, \Sigma_1)$ , respectivamente. Dessa forma, uma solução ótima de Bayes é prever os pontos a partir do log da razão das verossimilhanças

$$\frac{1}{2}(\vec{x} - \vec{\mu}_0)^T \Sigma_0^{-1} (\vec{x} - \vec{\mu}_0) + \frac{1}{2} \ln |\Sigma_0| - \frac{1}{2}(\vec{x} - \vec{\mu}_1)^T \Sigma_1^{-1} (\vec{x} - \vec{\mu}_1) - \frac{1}{2} \ln |\Sigma_1| > T,$$

em que  $T$  é algum limite que delimita a classificação. Além disso, partindo do pressuposto de

que as covariâncias são idênticas então o critério acima pode ser escrito simplesmente como

$$\vec{w}^T \vec{x} > c$$

onde

$$\begin{aligned}\vec{w} &= \Sigma^{-1}(\vec{\mu}_1 - \vec{\mu}_0) \\ c &= \frac{1}{2} \vec{w}^T (\vec{\mu}_1 + \vec{\mu}_0)\end{aligned}$$

Isto é, o limite  $c$  utilizado como critério de classificação determina se uma variável  $\mathbf{x}$  pertence a uma classe  $y$  é função da combinação linear das observações do conjunto de treinamento.

### Máquina de Vetores de Suporte (SVM)

O SVM é um algoritmo de aprendizado supervisionado que serve tanto para classificação quanto para regressão. Nele, os dados são projetados num hiperplano e então uma fronteira de decisão linear é traçada separando todos os pontos de uma classe dos pontos de outras classes. O melhor hiperplano é aquele em que há maior margem entre duas classes, e os dados podem ser separados linearmente. A localização do plano de separação é determinada por um subconjunto das observações de treinamento, chamados de vetores de suporte.

Em um espaço  $p$ -dimensional, um hiperplano é subespaço plano afim de dimensão  $p - 1$ . No caso de  $p = 2$ , o hiperplano é uma linha. No caso de  $p = 3$  é um plano. De modo geral, hiperplanos são hipersuperfícies retas que dividem o espaço em duas regiões. A definição matemática para um hiperplano  $p$ -dimensional, é todo ponto  $X = (X_1, X_2, \dots, X_p)$  que satisfaz a equação

$$\beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_p X_p = 0. \quad (3.53)$$

Buscaremos o hiperplano que melhor separa as observações de treinamento em duas regiões distintas, isto é,

$$\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_p x_{ip} > 0 \text{ se } y_i = 1, \quad (3.54)$$

e

$$\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_p x_{ip} < 0 \text{ se } y_i = -1. \quad (3.55)$$

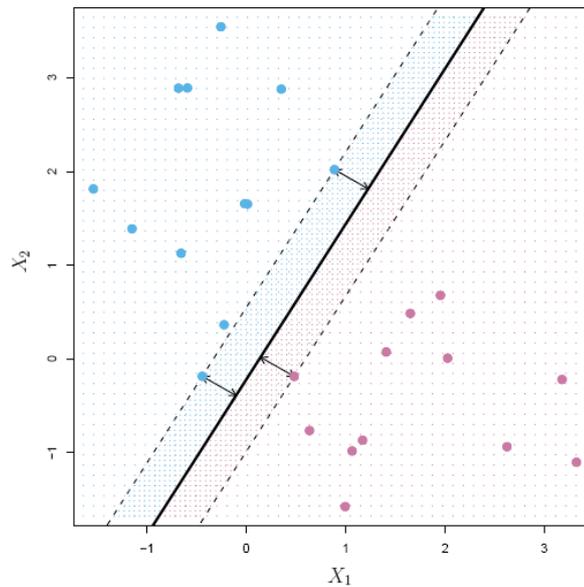
Ou, de modo resumido para os dois casos

$$y_i (\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_p x_{ip}) > 0. \quad (3.56)$$

Se esse hiperplano existe, então é possível construir um classificador de maneira muito natural, em que uma classe é atribuída de acordo com a região do espaço de observáveis que ela está localizada. Isto é, para uma observação de teste  $x^*$ , podemos determinar sua classe a partir do sinal da função  $f(x^*) = \beta_0 + \beta_1 x_1^* + \beta_2 x_2^* + \dots + \beta_p x_p^*$ . Para  $f(x^*)$  positivo, a observação de teste

pertence a classe 1 e para  $f(x^*)$  negativo a observação de teste é avaliada como pertencente a classe  $-1$ . Além disso, a partir da magnitude de  $f(x^*)$  é possível determinar o nível de confiança da previsão.

Uma vez determinado que existe hiperplano capaz de separar perfeitamente duas classes em duas regiões do espaço de observações, então pequenos ajustes geram outros hiperplanos com a mesma característica. A escolha natural, é de buscar o hiperplano com separação ótima, chamado de classificador margem maximal. Que é aquele que maximiza a distância do hiperplano para as observações de treinamento, conforme podemos ver na figura 3.13.



**Figura 3.13:** Hiperplano com margem maximal, linha sólida, definido para duas classes de observação. A margem é definida como a distância do hiperplano para uma das linhas tracejadas, que são definidas pelos vetores de suporte. Fonte: [50]

A construção do classificador de margem maximal, que determina o funcionamento do algoritmo de SVM, é portanto um problema de otimização. Desejamos construir um hiperplano com separação ótima, a partir de um conjunto de  $n$  observações de treinamento  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^p$ , e rótulos de classes associados  $y_1, \dots, y_n \in \{-1, 1\}$ , sujeito ao problema de otimização

$$\max_{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p, M} M \quad (3.57)$$

$$\text{sujeito a } \sum_{j=1}^p \beta_j^2 = 1, \quad (3.58)$$

$$y_i(\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_p x_{ip}) \geq M, \forall i = 1, \dots, n. \quad (3.59)$$

As aplicações padrões desse algoritmo normalmente envolvem problemas de classificação binária, sendo necessário realizar algumas alterações para aplicá-lo a problemas com

múltiplas classes, ou quando não existe uma separação linear bem definida no espaço de variáveis de entrada. Nesse último caso, são utilizados funções chamadas kernel para projetar as variáveis de observação num espaço em que um hiperplano de separação que separe as duas regiões adequadamente possa ser construído.

### 3.4.3 Teste e Validação

Uma parte crucial da classificação, e da teoria de aprendizado estatística no geral, é determinar o sucesso de um algoritmo. Uma vez que não há um algoritmo objetivamente superior, capaz de realizar as melhores previsões independentemente do conjuntos de dados de treinamento, uma das principais etapas no processo de classificação é a escolha adequada do algoritmo para o conjunto de dados. Para isso, necessitamos de uma medida de performance.

A abordagem mais comum é a de se quantificar a acurácia de uma estimativa  $f$  em problemas de classificação a partir da taxa de erro de treinamento [50], isto é, a proporção de erros realizados ao se aplicar o classificador para estimar as observações do conjunto de treino

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(y_i \neq \hat{y}_i), \quad (3.60)$$

em que  $\hat{y}_i$  é classe prevista para  $i$ -ésima observação usando  $\hat{f}$ , e  $I(y_i \neq \hat{y}_i)$  é uma variável indicadora,  $I(y_i \neq \hat{y}_i) = 0$  quando a observação é classificada corretamente, e  $I(y_i \neq \hat{y}_i) = 1$  se incorretamente.

A performance de um algoritmo pode ser medida a partir de sua capacidade de classificar adequadamente observáveis fora do conjunto de treino. Para isso, definimos a taxa de erro de teste associada com um conjunto de observações testes da forma  $x_o, y_o$  como

$$\langle (I(y_o \neq \hat{y}_o)) \rangle \quad (3.61)$$

em que  $\hat{y}_o$  é classe prevista resultante da aplicação do classificador numa observação de teste  $x_o$  e  $\langle \dots \rangle$  denota a média sobre o conjunto de treino. Objetivamente, um bom classificador é aquele que possui a menor taxa de erro teste e, por isso, os algoritmos são implementados com objetivo de minimizar a essa taxa.

No entanto, há ainda o interesse em garantir que o classificador seja o mais geral possível, sem realizar *underfitting* ou *overfitting*. Para o segundo caso, é necessário realizar o procedimento de validação, em que a taxa de erros é minimizado dentro do próprio conjunto de treinamento. Em especial, podemos fazer um processo de validação cruzada *k-fold*, que consiste nas seguintes etapas.

- Um conjunto de treinamento  $S$  contendo  $m$  exemplos é separado em  $k$  subconjuntos disjuntos, cada qual contendo  $m/k$  pontos. Podemos chamar esses subconjuntos de  $S_1, \dots, S_k$

- Para cada modelo  $M_i$  de um algoritmo, avaliamos da seguinte maneira Para  $j = 1, \dots, k$ , o modelo  $M_i$  é treinado em todos os subconjuntos  $S_i$ , exceto  $S_j$ , e uma hipótese  $h_{ij}$  é desenvolvida, através do ajuste de parâmetros. A hipótese  $h_{ij}$  então é testada em  $S_j$  e um erro  $E_{S_j}(h_{ij})$  é avaliado. O erro de generalização do modelo  $M_i$  então é calculado como a média dos erros  $E_{S_j}(h_{ij})$  sobre todos os  $j$
- Por fim, o modelo  $M_i$  com menor erro de generalização é escolhido e treinado em todo o conjunto de treinamento  $S$ . E a hipótese resultante é resultado final.

A partir desses procedimentos, podemos garantir que os algoritmos serão treinados de maneira a capturar as características gerais dos dados utilizados e poderemos avaliar a sua eficiência.

### 3.4.4 Matriz de Confusão

Iremos avaliar e representar a efetividade de um modelo tanto para a validação quanto para os teste utilizando a matriz de confusão. A maneira como uma matriz de confusão funciona é a seguinte. Existem dois tipos de dados ou conjuntos de dados: os reais e os previsto pelo algoritmo de aprendizagem. Consideramos um ensemble, cujos elementos podem ser classificados de  $N$  maneiras. Por exemplo, para um classificação binária  $N = 2$  A classificação real é o rótulo  $y$  da variável  $x$  já conhecida, utilizada no treinamento no caso da validação, ou pertencente ao conjunto de teste.

		Detectada	
		Sim	Não
Real	Sim	Verdadeiro Positivo (VP)	Falso Negativo (FN)
	Não	Falso Positivo (FP)	Verdadeiro Negativo (VN)

**Figura 3.14:** Matriz de confusão para classificação binária com classes genéricas "sim" e "não". Fonte: [51]

Dessa forma, comparamos os casos em que os rótulos previstos pelo algoritmo com aqueles conhecidos de antemão, determinando se a previsão foi realizada corretamente. Para uma matriz  $2 \times 2$ , consideremos que as classes são definidas genericamente como sim ou não, conforme indicado na figura 3.14. Nesse caso, existem 4 possibilidades: verdadeiro positivo (VP), verdadeiro negativo (VN), falso positivo (FP) e falso negativo (FN).

Podemos interpretar os resultados contidos nas matrizes de confusão a partir de umas métricas simples.

- **Acurácia:** É a fração das classes previstas corretamente pelo número total de observações.

$$A = \frac{VP + TN}{VP + VN + FP + FN}$$

- **Precisão:** Determina quantas previsões positivas foram feitas corretamente pelo modelo. É definido como a razão dos verdadeiros positivos pelo número total de positivos previsto:

$$P = \frac{VP}{VP + FP}$$

- **Recall/Sensibilidade** Determina quantas classes positivas reais foram previstas corretamente. É definido como a fração do número de verdadeiros positivos, pelo número total de positivos conhecidos.

$$R = \frac{VP}{VP + FN}$$

A partir dessas três métricas é possível construir outras mais sofisticadas. No entanto para manter a simplicidade da análise, iremos considerar apenas a métrica de acurácia. Para o caso de matriz  $N \times N$ , a a definição acima permanece a mesma. Uma forma simples de se compreender é que a precisão é o número de elementos diagonais da matriz de confusão pelo número total de elementos.

## Capítulo 4

### Resultados

Através dos métodos discutidos no capítulo anterior, desejamos verificar a hipótese de que o sinal cardíaco capturado em eletrocardiograma possui componentes caóticas, e se a partir delas é possível determinar a condição de saúde de um paciente. Para isso, realizamos dois tipos de análise em eletrocardiogramas obtidos na plataforma *Physionet* [52], que contém bancos de dados de acesso livre, dos quais utilizamos quatro, provenientes do *Beth Israel Hospital Arrhythmia Laboratory*, com gravações de pacientes com diferentes tipos de ritmo cardíaco: ritmo sinusal normal (NSRDB) [53], fibrilação atrial (AFDB) [54], ectopia ventricular maligna (VFDB) [55] e arritmia supraventricular (SVDB) [56].

Esses bancos de dados são organizados de modo a agruparem pacientes com condições cardíacas semelhantes. O primeiro grupo (NSRDB) [53] contém sinais de um grupo de 18 pacientes sem arritmias significativas, gravados durante 25 horas a uma frequência de amostragem de  $128\text{Hz}$ , somando um total de 11520000 pontos. O segundo grupo (AFDB) [54] contém gravações de ECG de 25 pacientes, dos quais 23 estão disponíveis. Cada gravação individual possui cerca 10 horas de duração, e contém dois sinais de eletrocardiogramas registrado com frequência de aquisição de  $250\text{Hz}$ , resolução de 12 bits sobre um intervalo de  $\pm 10\text{mV}$ , digitalizados a partir de gravadores de ECG ambulatorios com largura de banda de aproximadamente  $0.1\text{Hz}$  a  $40\text{Hz}$ . O terceiro grupo (SVDB) [56], contém gravações de meia hora de pacientes com arritmia supraventricular registrados com frequência de aquisição de  $128\text{Hz}$ , totalizando 230400 em cada sinal. O quarto grupo (VFDB) [55] contém 22 gravações de meia hora de pacientes com episódios sustentados de diferentes arritmias ventriculares: taquicardia, vibração e fibrilação. E, em cada um desses grupos todos os pacientes foram monitorados a partir de duas derivações de eletrodos, que não foram especificadas, descritas simplesmente por canal 1 e canal 2.

A fim de se realizar uma análise uniforme para todos os grupos, de modo que haja para cada paciente uma estatística suficiente, e também devido ao aumento de custo computacional envolvido nos cálculos das funções de sinais grandes, separamos o sinal de cada paciente em intervalos de  $10^5$  pontos. Para tentar balancear a quantidade de dados provenientes dos sinais de longa duração, consideremos a estatística agrupando os intervalos por pacientes, e sem fazer

essa distinção. Dessa forma, podemos separar esses sinais de duas formas diferentes: em 4 grupos, considerando cada arritmia ou em 2 grupos, um que apresenta sinal com ritmo normal e o outro com sinal contendo arritmias.

Nosso interesse ao utilizar o método das matrizes aleatórias foi obter uma classificação qualitativa dos sinais, verificar se os agrupamentos propostos são adequados e obter uma noção do grau de Caos e Estocasticidade no sinal, por meio do histogramas de autovalores. Por meio do método de densidade de máximos e funções de correlações, pudemos corroborar essa análise qualitativa verificando a convergência do valor de densidade de máximos para a expressão do tempo de queda função de autocorrelação. Esse método por sua vez possui também um valor quantitativo. Portanto, testamos se é possível classificar os dois grupos propostos inicialmente, utilizando a função de autocorrelação, através de algoritmos de aprendizagem de máquina. No entanto, como na medição do sinais cardíacos há captura de ruídos que podem interferir na análise, a primeira etapa a ser realizada é a de aplicação de filtros.

## 4.1 Filtragem

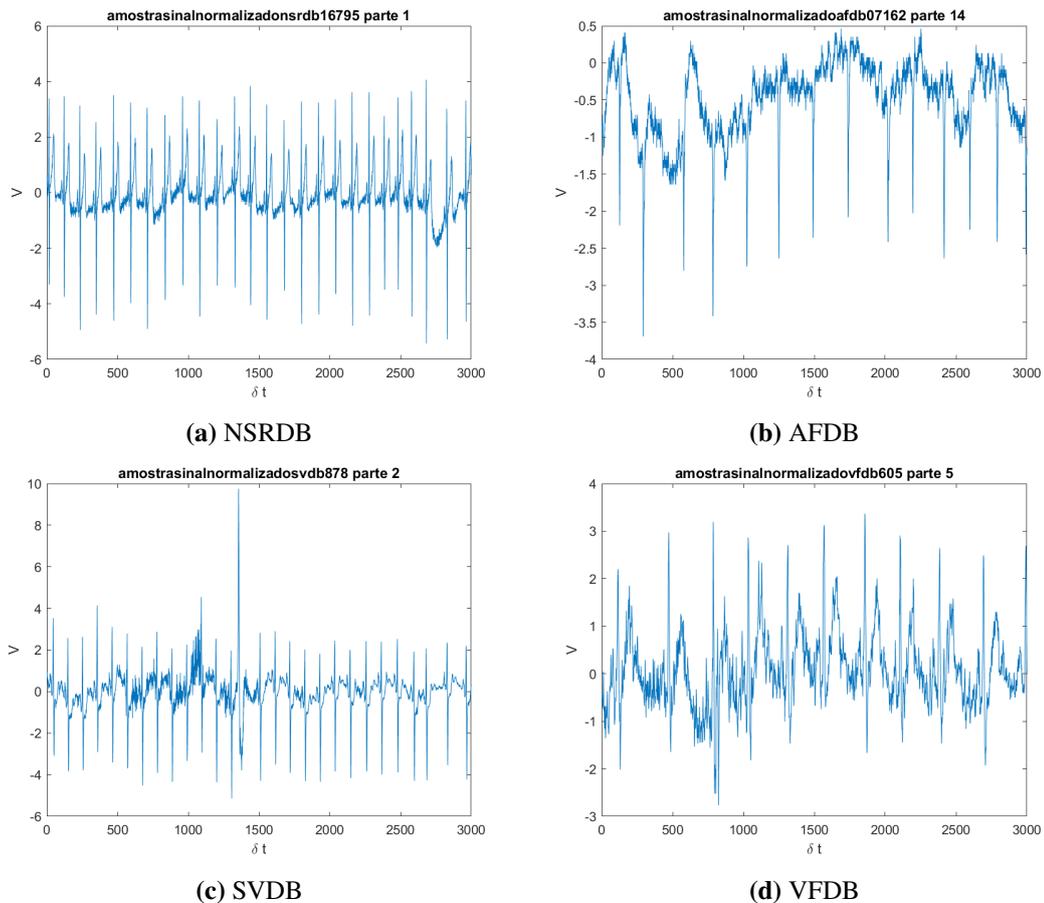
A filtragem dos sinais deve ser realizada por duas razões: primeiramente, porque a medição de eletrocardiogramas está sujeita a diversos tipos de ruídos que interferem na sua leitura, conforme abordado na seção 3.1.1. Segundo, porque é necessário separar as diferentes frequências características que constituem o sinal cardíaco. Dessa forma a análise por meio dos métodos de matrizes aleatórias e de função de autocorrelação. Em que consideramos dois métodos diferentes, conforme apresentados na seção 3.1.1, transformada de Fourier (FFT) e transformada de Wavelet, para garantir que os resultados obtidos nos demais métodos são independentes dos filtros aplicados.

### 4.1.1 Filtro FFT

De modo geral, a aplicação da FFT é feita através representação de um sinal no espaço de frequências, o que permite selecionar faixas de frequências específicas e reconstruir o sinal removendo as componentes ruidosas. Nesse processo, a seleção das frequências a serem amplificadas ou reduzidas é crucial. Em sinais estacionários, com períodos bem definidos, há no espaço de frequências picos bem acentuados correspondentes a esses períodos. Dessa forma, basta ignorar as demais componentes para reconstruir o sinal com ruído atenuado.

Um exemplo de aplicação é em uma função cosseno, figura 4.2, é somente um pico na frequência predominante. No caso em que o sinal é contaminado por um ruído aleatório podemos identificá-lo facilmente através da FFT, desde que a amplitude do ruído não seja da mesma ordem que a do sinal determinístico, conforme pode ser visto na figura 4.2.

No entanto, sinais caóticos possuem comportamento essencialmente aperiódico, o que dificulta a aplicação dos métodos de seleção convencionais, devido a semelhança entre a forma



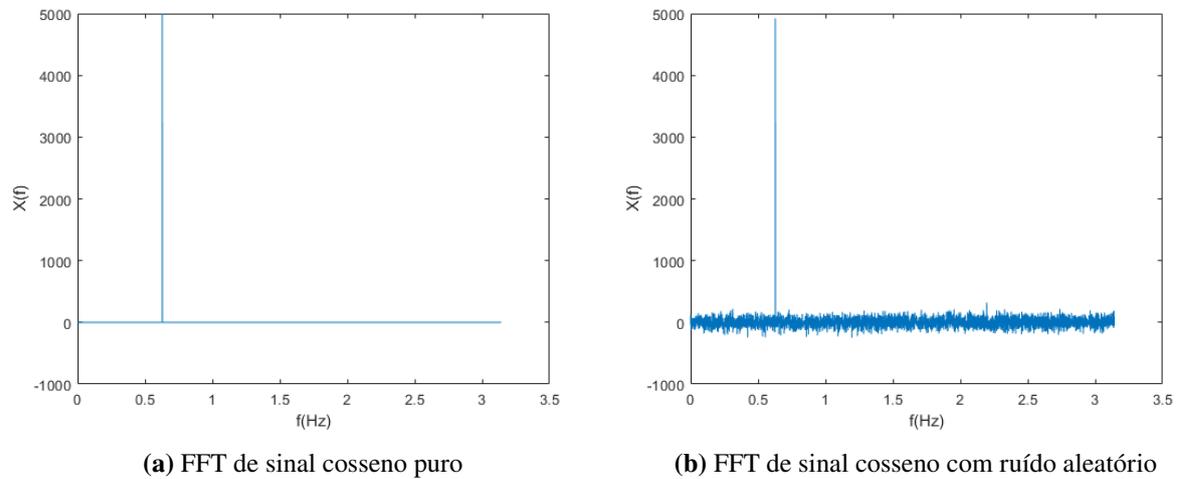
**Figura 4.1:** Sinais não filtrados normalizados de cada um dos bancos de dados utilizados. Em (a) e (c) é possível ver a ruídos característicos de alta frequência, enquanto em (b) e (d) estão presentes também ruídos com amplitude e frequência da ordem de grandeza das ondas características do ciclo cardíaco. Fonte: Autor.

desses sinais com sinais ruidosos, conforme pode ser visto na figura 4.3. Além disso, sinais caóticos são altamente dependentes do sistema, e possuem características bem distintas no espaço de frequências dentre si.

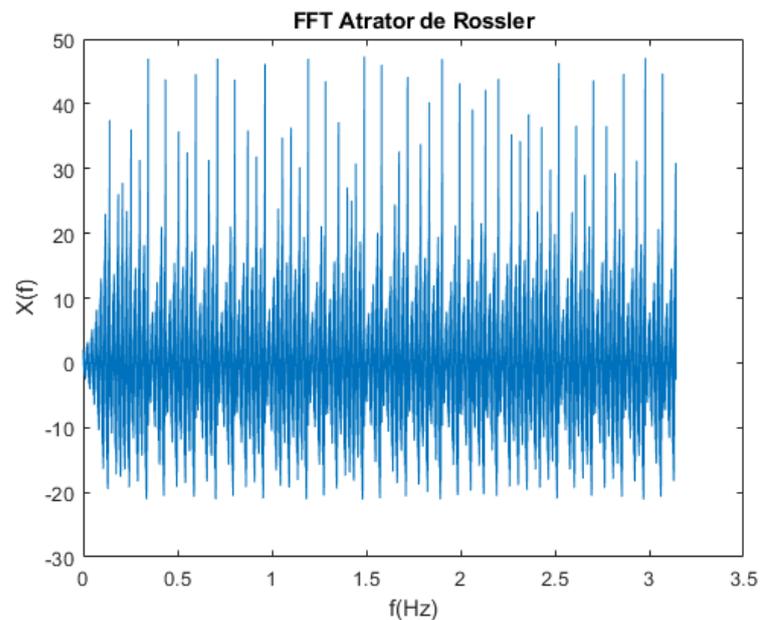
Essas propriedades caóticas são observadas nos sinais de eletrocardiograma encontrados nos bancos de dados utilizados, o que dificulta o uso da abordagem tradicional para delimitar os intervalos de frequência. filtrados. Por isso, escolhemos realizar uma filtragem com um passa bandas ajustado de modo a ter uma frequência central fixa de  $F_c = 2.75H_z$  e um intervalo de frequência igual a  $\Delta F = 2.25$  Hz. Essa faixa de frequência foi escolhida pois é capaz de remover os ruídos usuais catalogados nos bancos de dados [14], e mantém a periodicidade do ciclo cardíaco como um todo, ainda que detalhes a cerca de suas ondas constituintes possam ser perdidos. Nessa configuração, as características principais da onda mantida são os seus intervalos RR, que correspondem, de modo aproximado, ao batimento cardíaco contado em medidores simples, como os presentes em *smart watch*. De forma, que é esperado a aplicação dos demais métodos de análise também possa ser realizada em sinais cardíacos mais simples.

Na prática, utilizamos a aplicação interativa *Ifilter* [57], publicado na biblioteca de

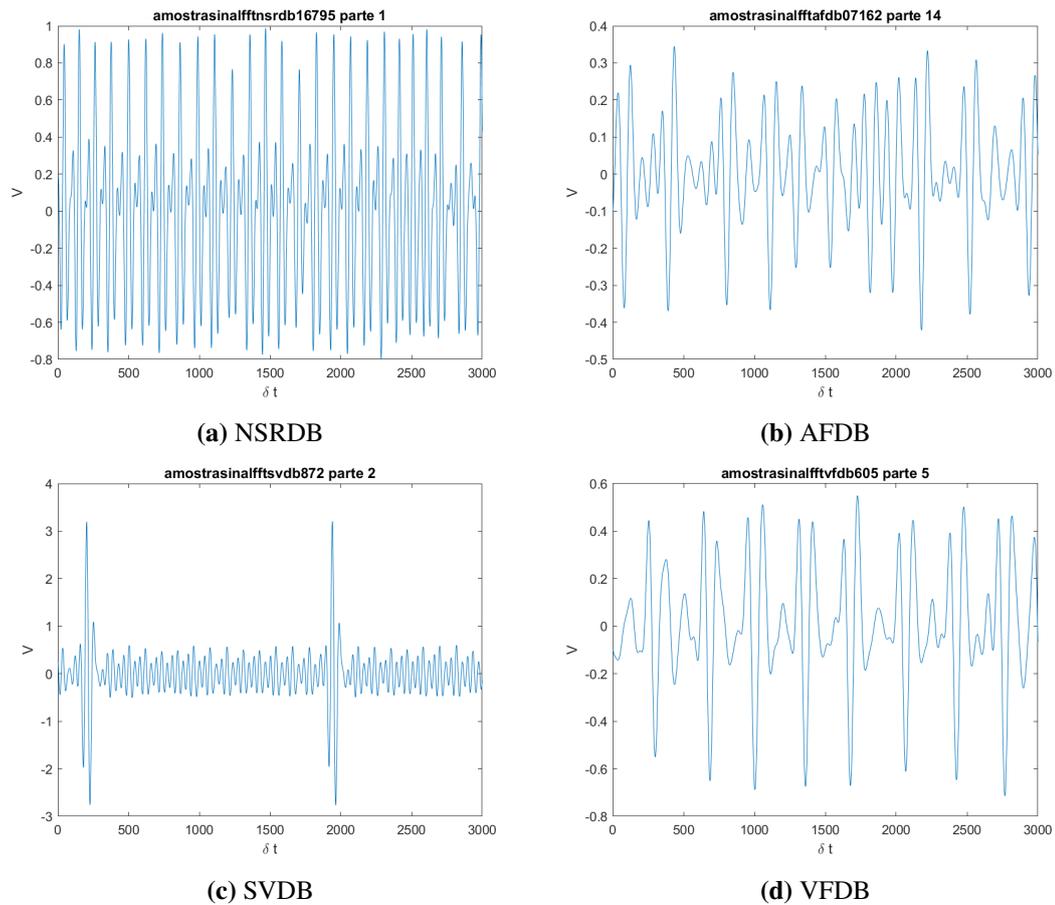
funções do MATLAB, para a realização do filtro FFT. Na figura 4.4 estão apresentados os intervalos de sinais expostos na figura 4.1 depois da aplicação do filtro FFT.



**Figura 4.2:** Transformada de Fourier obtida por FFT em um sinal com frequência bem determinada, com e sem adição de ruído. Fonte: Autor.



**Figura 4.3:** FFT de atrator de Rossler com parâmetros  $a = 0.15$ ,  $b = 0.20$ ,  $c = 10$ . É possível ver que no regime caótico, não é possível selecionar uma frequência característica que defina a dinâmica do sinal. Fonte: Autor.



**Figura 4.4:** Aplicação de filtro por análise de Fourier para os sinais apresentados em 4.1. Fonte: Autor.

### 4.1.2 Filtro Wavelet

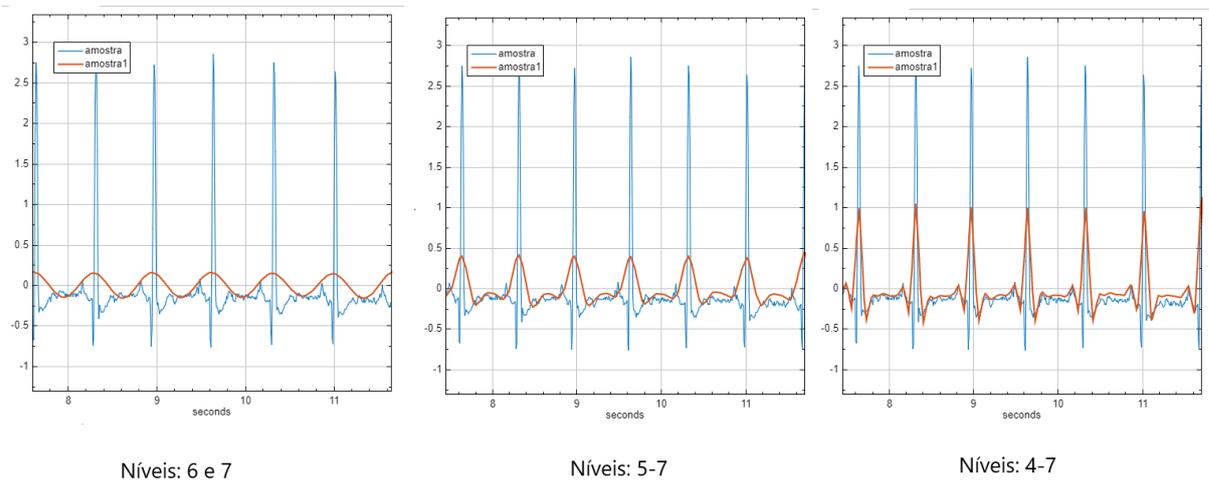
Para o filtro wavelet, escolhemos uma wavelet-mãe padrão do tipo Daubechies de 4ª ordem, fizemos uma decomposição em 7 níveis para os sinais com frequência de amostragem de  $128Hz$  e de 8 níveis para os sinais com frequência de amostragem de  $250Hz$ , de modo a considerar resoluções que ensejassem as frequências no intervalo de aproximadamente  $[0.5Hz, 5Hz]$ , levando em conta os casos mais extremos de frequência cardíaca:  $0.5Hz$ , equivalente a cerca de 30 batimentos por minuto e  $5Hz$ , para os casos mais raros de 300 batimentos por batimento por segundo. Considerando a decomposição nessa quantidade de níveis, a análise multiresolução de Wavelet resulta na faixas de frequências apresentados na tabela 4.1.

Como os limites dos intervalos de frequência de cada nível são determinados pela frequência de aquisição do sinal, foi considerada  $4Hz$  como a frequência máxima do filtro. Levando isso em consideração, foram escolhidos os níveis 6 e 7 da Wavelet. ver a reconstrução do sinal considerando apenas os níveis com frequência adequada na figura 4.5. É notável que os picos referentes aos complexos QRS são os únicos mantidos. E a medida que mais níveis são considerados, mais detalhes são adicionados a forma da onda, recuperando a morfologia característica de um eletrocardiograma. Dessa forma, para uma análise da frequência de batimento cardíaco, é possível considerar somente os níveis 6 e 7 da Wavelet. Levando tudo isso em

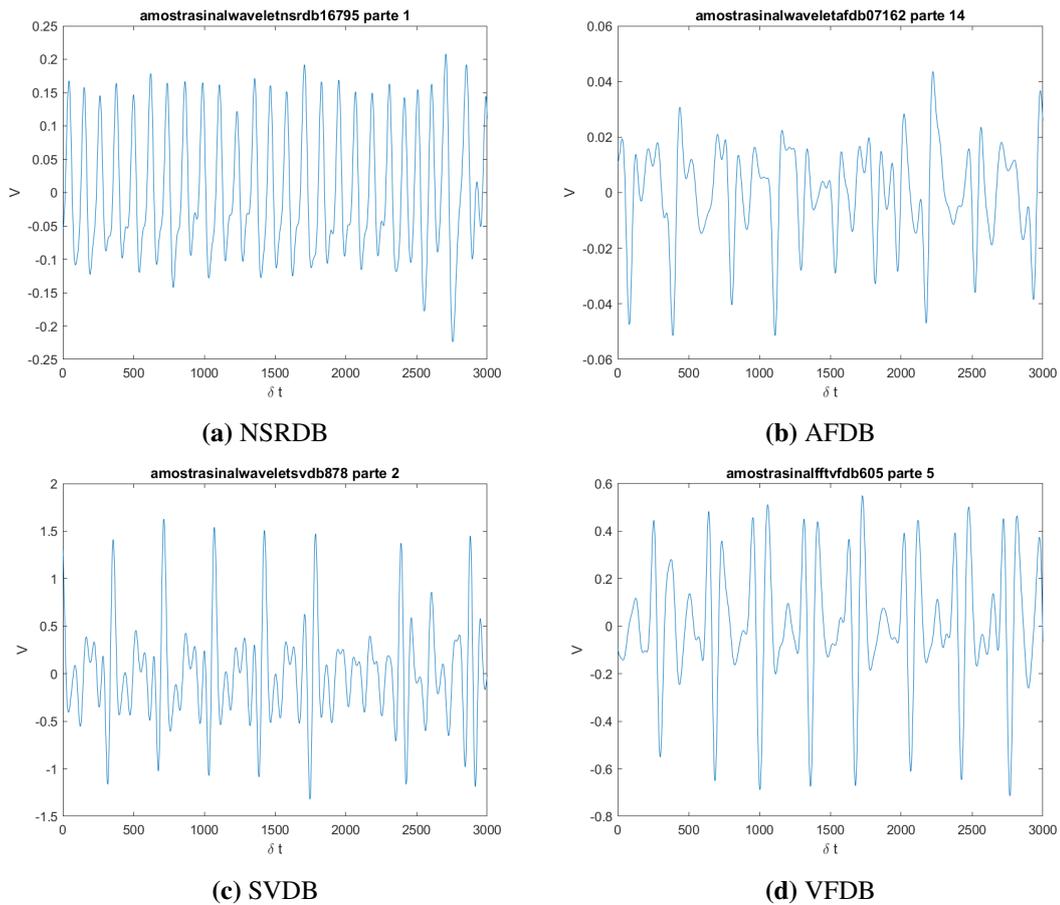
consideração, obtemos os resultados contidos na figura 4.6 para a filtragem do sinal utilizando análise de Wavelet.

**Tabela 4.1:** Níveis de resolução e suas respectivas faixas de frequências para os coeficientes de detalhes de uma transformada de Wavelet com frequências de aquisição  $F_s = 128Hz$  e  $F_s = 250Hz$ . Fonte: Autor.

Nível de Resolução	$F_s = 128Hz$	$F_s = 250Hz$
<b>1</b>	[64, 32]	[125, 62.5]
<b>2</b>	[32, 16]	[62.5, 31.75]
<b>3</b>	[16, 8]	[31.75, 15.62]
<b>4</b>	[8, 4]	[15.62, 7.81]
<b>5</b>	[4, 2]	[7.81, 3.9]
<b>6</b>	[2, 1]	[3.9, 1.95]
<b>7</b>	[1, 0.5]	[1.95, 0.97]
<b>8</b>	[0.5, 0.25]	[0.97, 0.49]



**Figura 4.5:** Demonstração da reconstrução de um sinal decomposto por Wavelet considerando diferentes faixas de frequência, contidos nos níveis de detalhe. Fonte: Autor.

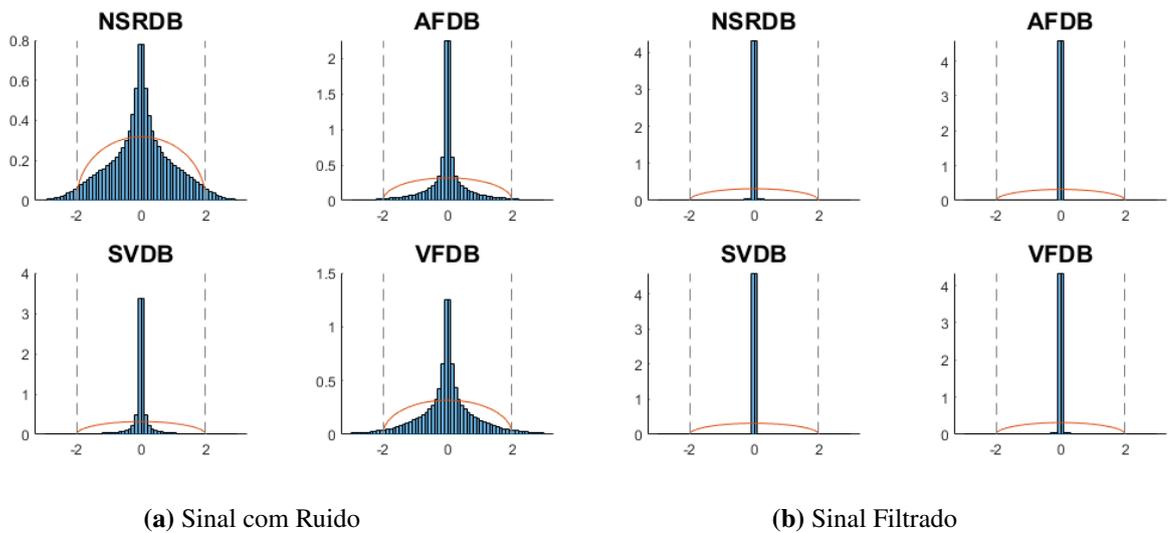


**Figura 4.6:** Aplicação de filtro por análise de Wavelet para o sinais apresentados na figura 4.1. Fonte: Autor.

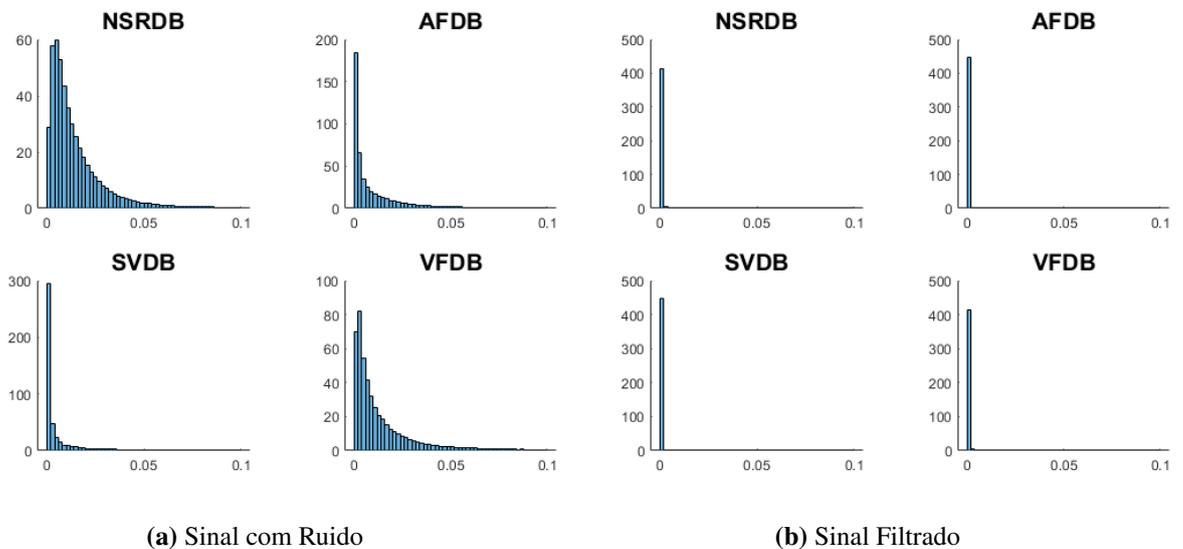
## 4.2 Análise de Caos por Matrizes Aleatórias

Para aplicar o método de análise de caos por matrizes aleatórias, transformamos as séries temporais dos sinais de eletrocardiogramas de cada um dos quatro bancos de dados em matrizes, conforme o procedimento descrito na seção 3.2, calculamos os autovalores dessas matrizes e então agrupamos todos os autovalores em um histograma.

Mais especificamente, conforme discutido no início do capítulo, os sinais de eletrocardiograma são vetores que variam de  $2 \times 10^5$  até cerca de  $10^7$  pontos. Devido a essa discrepância na duração de gravação, subdividimos cada sinal em intervalos de  $10^5$  pontos para que haja um tamanho suficiente para que as matrizes de correlação possuam uma estatística espectral suficientemente boa para comparação, e para que ainda assim seja possível calcular uma estatística para cada paciente, ainda que no pior dos casos, envolvendo somente dois intervalos diferentes. Dessa forma, cada sinal de  $10^5$  amostras, equivalente ao vetor  $\vec{v}$ , foi transformado numa matriz  $50 \times 2000$ , em que cada coluna representa um intervalo de tempo com tamanho de 50 amostras, cerca de  $200ms$  nos sinais com frequência de aquisição  $F_s = 128Hz$  e  $1/10$  para os sinais com  $F_s = 256Hz$ . Dessa forma, foi calculada uma matriz  $C_1$ , de tamanho  $50 \times 50$  para cada subintervalo. No grupo *SVDB* de menor duração, obtemos 2 matriz por paciente enquanto que



**Figura 4.7: Distribuição Espectral de Autovalores de ECG.** Há uma variação inerente à densidade espectral de cada tipo de ritmo cardíaco nos sinais filtrados e ainda que nenhuma recupere exatamente a lei do semicírculo, a forma do histograma sugere a existência de componentes estocásticas no sinal. No entanto, depois do filtro a densidade espectral de todos os ritmos cardíacos apresentam aproximadamente as mesmas características. Fonte: Autor.



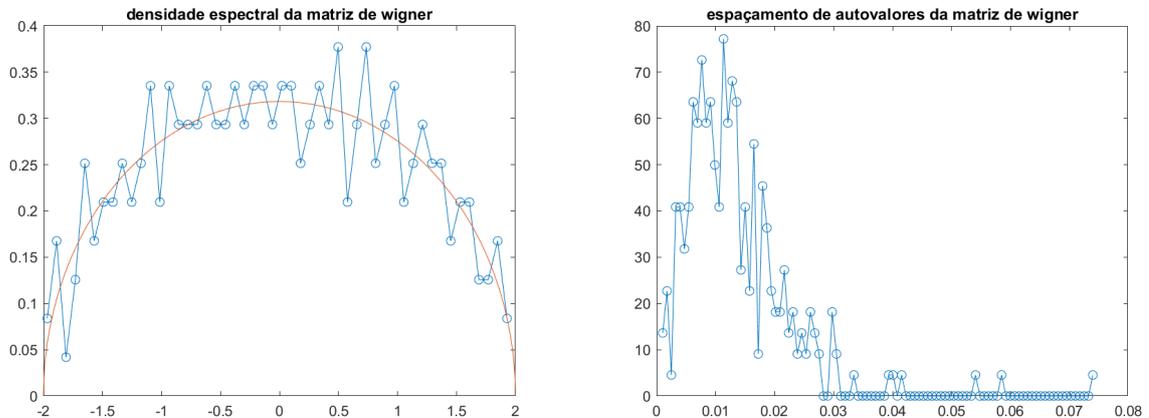
**Figura 4.8: Distribuição Espectral do Espaçamento entre Autovalores de ECG.** O mesmo comportamento da densidade espectral do autovalores está presente no espectro de espaçamento, e a conjectura de Wigner não é recuperada exatamente, ainda que uma forma semelhante tenha sido obtida. Fonte: Autor.

no grupo *NSRDB*, de maior duração, fixamos em 100 subintervalos, e portanto, 100 matrizes.

Para comparar o grau de caos e estocasticidade nos sinais antes e depois do filtro, e verificar se existem componentes estocásticas associadas ao sinal fisiológico, esse procedimento foi aplicado tanto nos sinais não filtrados quanto nos filtrados. Assim como nas duas derivações, disponíveis no banco de dados, em que o eletrocardiograma foi medido. Esse processo nos permite avaliar também se é necessário a filtragem dos sinais para a análise por função de correlação, visando possíveis aplicações desses métodos para diagnóstico de doenças.

Aplicado esse procedimento, podemos ver que o espectro de correlação dos sinais de eletrocardiograma não filtrados estão contidos em sua maior parte no intervalo de  $(-2, 2)$ , mas não recuperam exatamente a forma do semi-círculo. Esse resultado pode ser explicado se considerarmos que a maior parte do sinal cardíaco é determinístico. Quando aplicamos o filtro, a forma da densidade espectral se afasta ainda mais da do semi-círculo, se concentrando em torno do zero. Essa é uma característica apresentada pelos sinais determinísticos estudados por Bin et. al [15]. Dessa forma, podemos entender que o processo de filtragem remove as componentes estocásticas do sinal, ainda que não possamos afirmar se elas são inerentes ao próprio sinal ou provenientes de ruído.

Para efeitos de ilustração, demonstramos a estatística espectral esperada de um sinal aleatório puro, sinais determinísticos e um composto pela mistura dos dois primeiros. Um sinal aleatório cujas entradas sejam independentes e satisfaçam a distribuição gaussiana pode ser simulado através de algoritmos de números pseudoaleatórios amplamente disponíveis nas linguagens de programação mais comuns. Construindo matrizes aleatórias para esses sinais a partir do procedimento discutido anteriormente podemos observar que o histograma de autovalores dessas matrizes satisfaz à lei do Semicírculo, figura 4.9a, e o histograma do vizinhos mais próximos dos autovalores satisfaz à conjectura de Wigner, figura 4.9b. Em concordância com os resultados teóricos, discutidos na seção 3.2.



(a) Comparação dos picos do histograma de autovalores (b) Picos do histograma do espaçamento de autovalores. de matrizes  $C_2$  (pontos azuis) com a lei do semi-círculo (linha laranja).

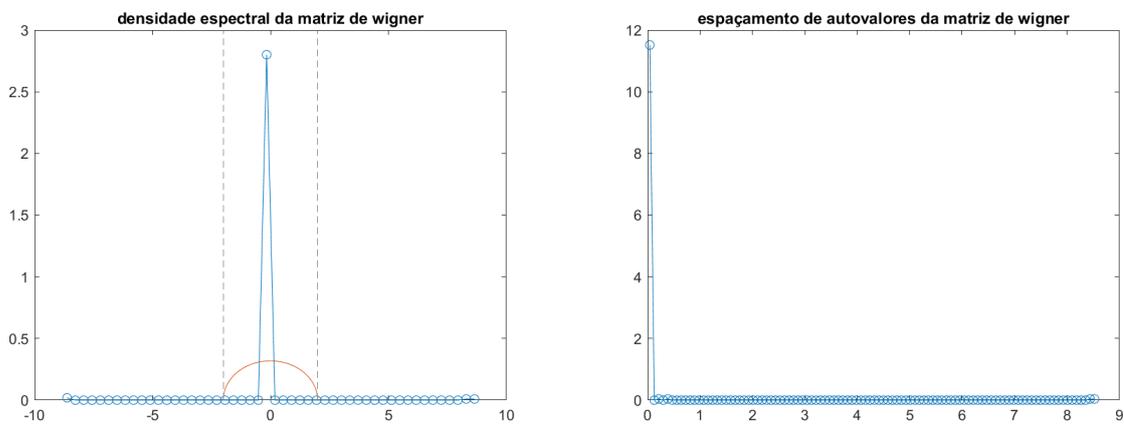
**Figura 4.9:** Aplicação do método de matrizes aleatórias para um **sinal aleatório uniformemente distribuído**. Podemos ver que a construção da matrizes garante as propriedades de simetria para a recuperação das leis assintóticas das densidades espectrais quando o sinal é aleatório, mesmo que seus elementos não sejam distribuídos segundo uma gaussiana.

E para avaliar de como modo um sinal determinístico ruidoso se comporta consideramos, o comportamento de um sinal senoide puro, figura 4.10, e o do mesmo sinal misturado com ruído aleatório 4.11. Podemos ver através desses exemplos, que os sinais aleatórios e até mesmos sinais determinísticos ruidosos, apresentam uma densidade espectral que se assemelha a lei do

semicírculo. Enquanto um sinal determinístico limpo possui um pico acentuado em torno de 0.

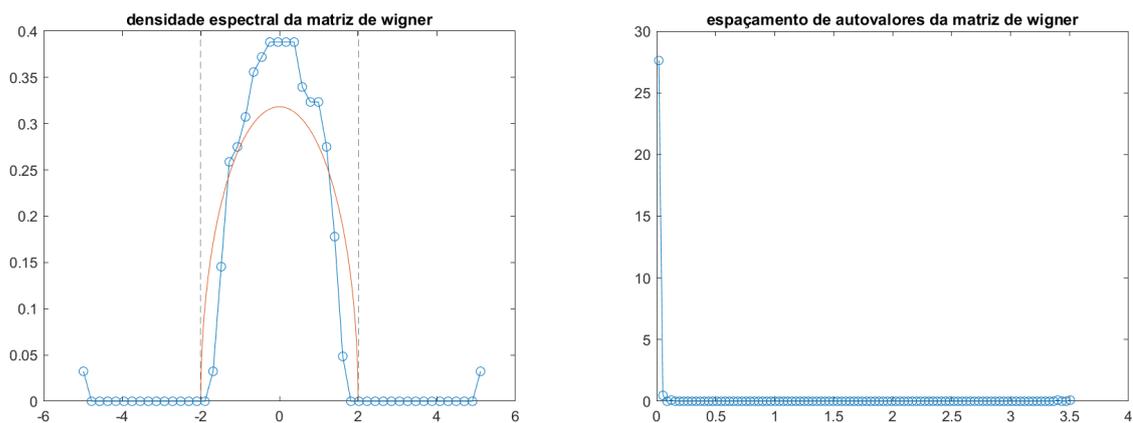
Podemos ainda comparar com as densidades espectrais obtidas a partir de séries temporais de atratores caóticos conhecidos, como os definidos pelas equações de Lorenz, e o atrator de Rossler, apresentados na figura 4.12. Nesse caso, observa-se que a estatística espectral se assemelha a dos eletrocardiograma filtrados, e do seno puro. Isto é, uma característica de sinais determinísticos nos gerais.

Dessa forma, a partir da série temporal do coração que possui característica notadamente aperiódicas, e que por ser um sistema de energia finita e, portanto, com dinâmica fechada num espaço de fases, podemos verificar a existência de Caos.



(a) Comparação dos picos do histograma de autovalores (b) Picos do histograma do espaçamento de autovalores de matrizes  $C_2$  (pontos azuis) com a lei do semicírculo (linha laranja).

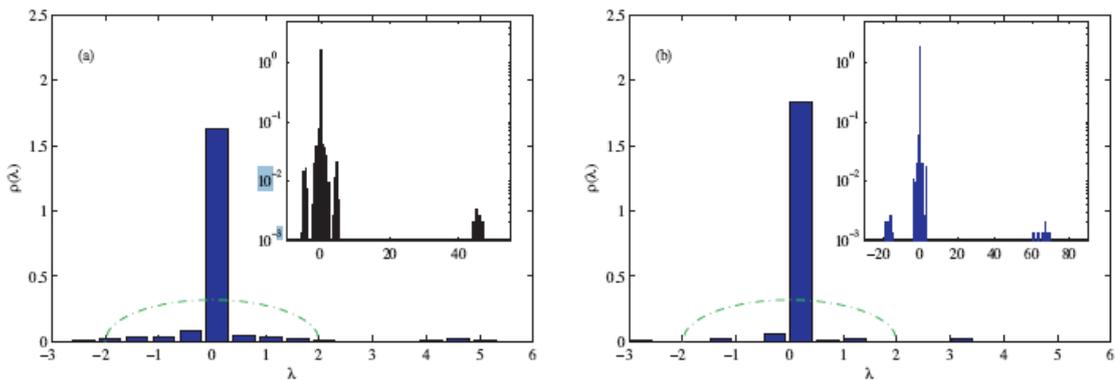
**Figura 4.10:** Aplicação do método de matrizes aleatórias para um **sinal seno**. Fonte: Autor.



(a) Densidade espectral de autovalores

(b) Espectro do espaçamento de autovalores

**Figura 4.11:** Aplicação do método de matrizes aleatórias para um **sinal seno ruidoso**. Nesse caso, é possível ver que ainda que a conjectura de Wigner não tenha sido recuperado, muito provavelmente por fatores de escala, a lei do semicírculo é uma boa aproximação para a densidade espectral do sistema. Fonte: Autor.



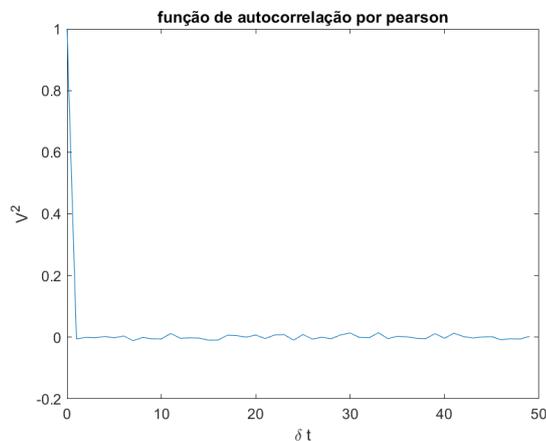
**Figura 4.12:** Densidade de autovalores das matrizes correlação  $C_2$  de sistemas caóticos contínuos. À esquerda, o sistema de Lorenz e à direita, o sistema de Rössler. Fonte: [15]

### 4.3 Análise de Caos por Função de Correlação

Segundo Bin et. al [15], o teste de caos por matrizes aleatórias não é completamente preciso, pois em alguns casos é possível encontrar estatística espectral semelhante entre sinais caóticos contínuos e sinais não caóticos discretos. Portanto, para corroborar os resultados da seção anterior, iremos analisar a função de autocorrelação dos eletrocardiogramas filtrados.

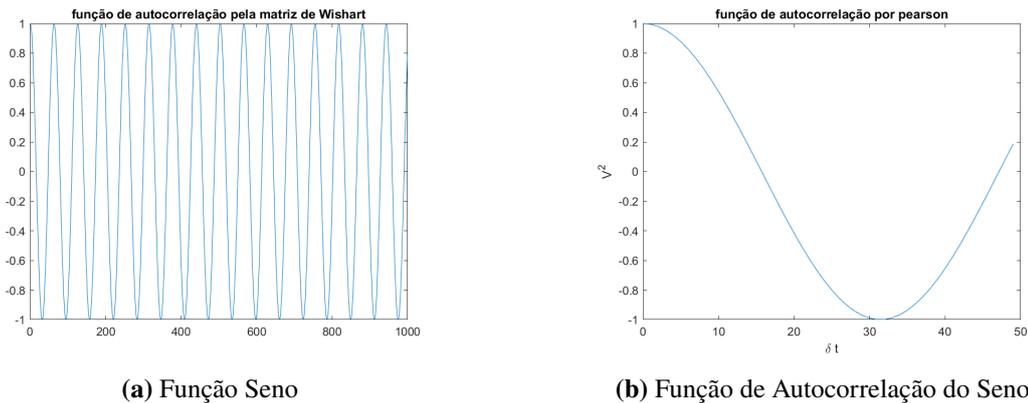
Vimos na seção 3.2, que as matrizes  $C_1$  de Wishart correspondem à matrizes de correlações. Dessa forma, podemos extrair dela a função de autocorrelação e usar os resultados apresentados na seção 3.3 para comparar o tempo de correlação com sua estimativa obtida a partir da densidade de máximos.

Podemos distinguir um sinal caótico de um aleatório através da sua função de autocorrelação. Sinais aleatórios puros estacionários decaem rapidamente para zero, pois não há correlação entre uma variável  $x_t$  e  $x_{t+1}$  para qualquer tempo  $t$ . Portanto, é esperado que a função de autocorrelação seja igual 1 em  $t = 0$  e para qualquer tempo posterior flutue em torno do zero, conforme apresentado na figura 4.13.



**Figura 4.13:** Função de autocorrelação de um sinal aleatório distribuído uniformemente. Fonte: Autor.

Já para um sinal determinístico, a forma da função de autocorrelação depende do sinal, refletindo características importantes sobre ele. Por exemplo, a função de autocorrelação de um senoide é também um senoide, figura 4.14. Sinais caóticos, por outro lado, constituem um caso excepcional pois são, em geral, sinais oscilatórios aperiódicos que se assemelham aos estocásticos, apesar de possuírem uma função subjacente que governa a sua dinâmica. A autocorrelação para esse tipo de sinal irá depender, portanto, do tipo de sistema que ele representa, conforme pode ser visto na figura 4.15.

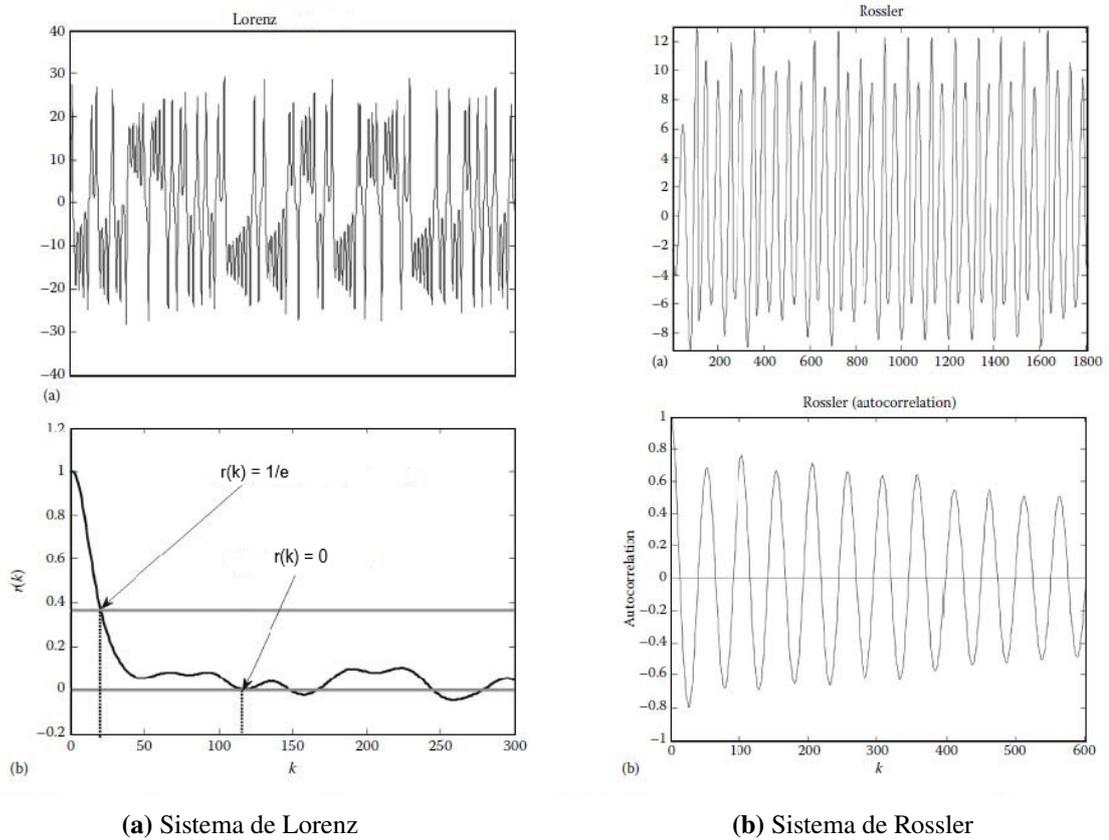


**Figura 4.14:** Função de autocorrelação de um sinal seno considerando dois intervalos de tempo diferentes. Fonte: Autor.

Nos eletrocardiogramas estudados, conforme pode ser observado na figura 4.16, os sinais com ritmo sinusal normal não filtrados apresentam comportamento predominantemente aleatório, decaindo rapidamente a zero. Já aqueles em que foi observada algum tipo de arritmia decaíram mais lentamente no mesmo intervalo avaliado, em alguns casos nem sequer indo a zero, indicando uma possível diferença fundamental entre os tipos de sinais.

Analisando as funções de autocorrelação dos sinais filtrados, apresentados na figura 4.17, podemos observar um comportamento oscilatório amortecido, que indica uma possível relação entre o tempo de correlação e a densidade de máximos do sinal, equação 3.44,  $\langle \tau \rangle \approx 1/6\langle \rho \rangle$ , obtida na seção 3.3. Para verificar essa hipótese, calculamos a densidade de máximos de duas formas diferentes: primeiramente, contando o número de máximos no sinal, dividindo pelo número de pontos, e usando a relação acima para estimar o tempo de queda da função de autocorrelação e através de cálculo direto, interpolando a função de autocorrelação para encontrar o ponto exato em que ela decai pela metade, que corresponde ao tempo de autocorrelação.

Partindo dessa abordagem, os valores obtidos para o comprimento de correlação por meio de cálculo direto estão contidos na tabela 4.2, distribuídos por grupo de arritmia e pelos métodos de filtragem e separação de dados. Na primeira coluna, temos as arritmias, conforme apresentado no início do capítulo, e na primeira linha denotamos o comprimento de correlação por  $\langle \tau_i \rangle_{filtro}$ , em que  $i = 2$  implica que a média foi realizada sobre o ensemble de pacientes, e em  $i = 1$  a média sobre o ensemble de intervalos de sinais com arritmia sem fazer distinção de paciente. De igual modo, estão apresentados na table 4.3 os valores obtidos da densidade de



**Figura 4.15:** Comparação das séries temporais, figuras de cima, e das funções de correlação, figuras de baixo, entre dois sistemas em regime caótico. Fonte: [58]

máximos a partir da equação 3.44.

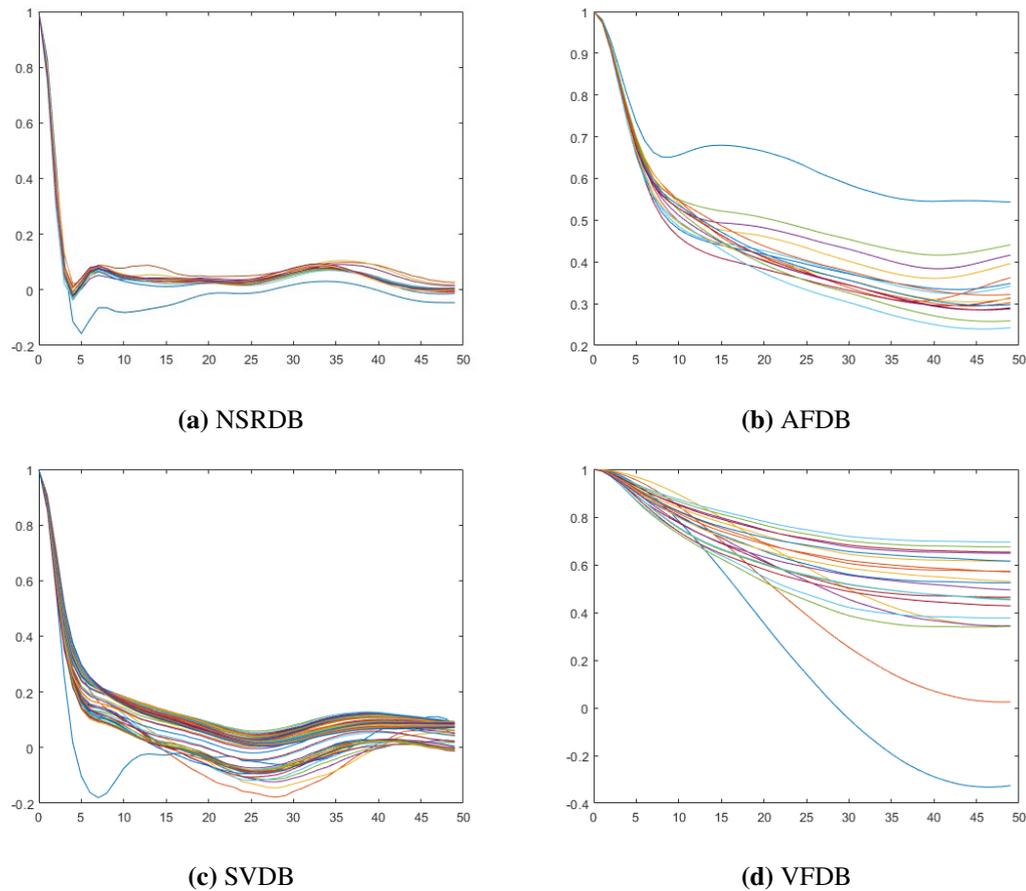
**Tabela 4.2:** Comprimento de autocorrelação obtidos por meio de cálculo direto.

Sinal	$\langle \tau_1 \rangle_{\text{FFT}}$	$\langle \tau_1 \rangle_{\text{WAV}}$	$\langle \tau_2 \rangle_{\text{FFT}}$	$\langle \tau_2 \rangle_{\text{WAV}}$
<b>NSRDB</b>	$0.0559 \pm 0.0040$	$0.1391 \pm 0.0225$	$0.0554 \pm 0.0031$	$0.1380 \pm 0.0116$
<b>SVDB</b>	$0.0624 \pm 0.0054$	$0.1296 \pm 0.0177$	$0.0472 \pm 0.0039$	$0.0982 \pm 0.0132$
<b>VFDB</b>	$0.0633 \pm 0.0074$	$0.0882 \pm 0.0216$	$0.0551 \pm 0.0040$	$0.0780 \pm 0.0126$
<b>AFDB</b>	$0.0616 \pm 0.0054$	$0.0852 \pm 0.0168$	$0.0610 \pm 0.0038$	$0.0833 \pm 0.0113$

**Tabela 4.3:** Comprimento de autocorrelação obtidos por meio da densidade de máximos

Sinal	$\langle \tau_1 \rangle_{\text{FFT}}$	$\langle \tau_1 \rangle_{\text{WAV}}$	$\langle \tau_2 \rangle_{\text{FFT}}$	$\langle \tau_2 \rangle_{\text{WAV}}$
<b>NSRDB</b>	$0.0500 \pm 0.0031$	$0.1311 \pm 0.0238$	$0.0495 \pm 0.0016$	$0.1300 \pm 0.0148$
<b>SVDB</b>	$0.0556 \pm 0.0071$	$0.1133 \pm 0.0206$	$0.0421 \pm 0.0052$	$0.0858 \pm 0.0151$
<b>VFDB</b>	$0.0569 \pm 0.0077$	$0.0655 \pm 0.0144$	$0.0494 \pm 0.0054$	$0.0570 \pm 0.0099$
<b>AFDB</b>	$0.0547 \pm 0.0074$	$0.0589 \pm 0.0090$	$0.0542 \pm 0.0064$	$0.0584 \pm 0.0075$

Para verificar a convergência, calculamos o erro médio absoluto entre os valores obtidos através da densidade de máximos e os por meio da função de autocorrelação. Podemos ver na tabela 4.4 que os valores do tempo de correlação obtidos por meio da contagem de máximos



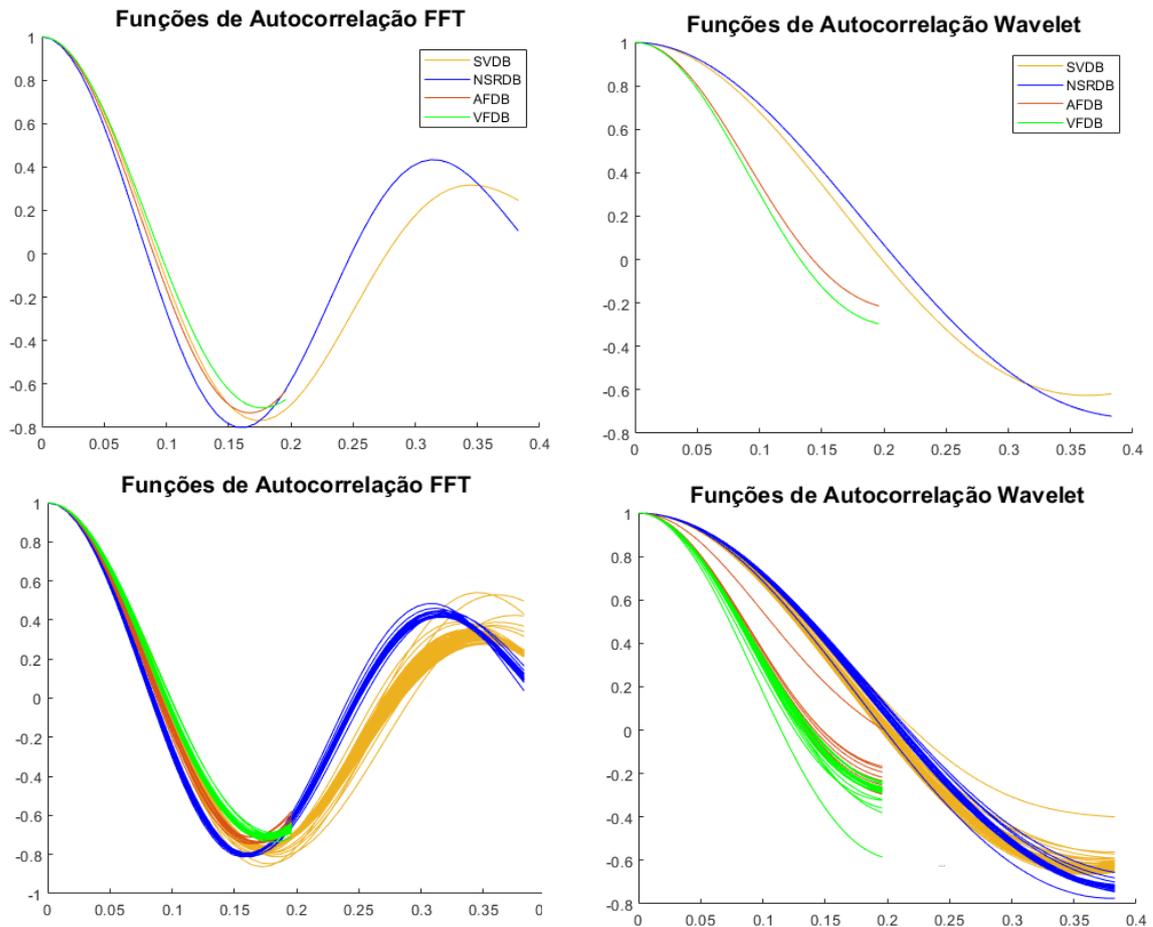
**Figura 4.16:** Funções de Correlação média por pacientes obtida a partir de sinais não filtrados. Fonte: Autor.

**Tabela 4.4:** Erro médio absoluto (MAE) a entre o valor do comprimento de correlação medido diretamente e calculado a partir da densidade de máximos. Fonte: Autor.

Sinal	$MAE(\langle \tau_1 \rangle_{FFT})$	$MAE(\langle \tau_1 \rangle_{WAV})$	$MAE(\langle \tau_2 \rangle_{FFT})$	$MAE(\langle \tau_2 \rangle_{WAV})$
<b>NSRDB</b>	10.55%	5.75%	10.65%	5.80%
<b>SVDB</b>	10.90%	12.58%	10.81%	12.63%
<b>VFDB</b>	10.11%	25.74%	10.34%	26.92%
<b>AFDB</b>	11.20%	23.12%	11.15%	29.89%

convergem relativamente bem para os valores obtidos calculando diretamente da função de correlação, havendo uma diferença de cerca de 6% no melhor dos casos e de 30% no pior deles. Destaca-se que os sinais filtrados por FFT apresentam menor variância no erro médio absoluto, enquanto os sinais filtrados por Wavelet, apesar de apresentarem melhor convergência no ritmo sinus normal, apresentaram maior variância e menor convergência nos pacientes com arritmia cardíaca. Mas, em ambos os casos, essa convergência mais uma vez sugere que os sinais cardíacos são caóticos e ainda mais, fornecem medidas que podem ser usadas para caracterizar os ritmos cardíacos.

Além disso, podemos ver que não há diferença significativa para os valores do comprimento de autocorrelação, obtidos em ambos os métodos, ao se considerar uma média global,



**Figura 4.17:** Na parte de cima está plotada a média da função de correlação por tipo de arritmia, do lado esquerdo considerando sinais filtrados por FFT e a direita por Wavelet. Na parte de baixo, estão plotados as funções de correlação que formam a média de cima. É possível notar que os sinais dos bancos de dados AFDB e VFDB são mais curtos, isso ocorre pois a divisão dos intervalos de tempo foram feitos considerando o número de amostras, e posteriormente convertido para unidades de tempo. Os sinais AFDB e VFDB são mais curtos pois possuem uma maior frequência de amostragem. Fonte: Autor.

denotado nas tabelas por  $\tau_1$  ou a média por paciente,  $\tau_2$ . Esse resultado significa que aspectos fisiológicos individuais a um paciente e que não se expressem na forma de uma arritmia não são significantes para a análise empreendida.

## 4.4 Aprendizado de Máquina

Através da análise de Caos pela densidade de máximos, não só demonstramos que existem componentes caóticas associadas aos sinais cardíacos capturado nos eletrocardiogramas. Mas também obtemos uma medida associada a esse nível de caos, na forma do tempo de correlação, que pode ser estimada com uma boa precisão e com um custo computacional relativamente baixo e é aplicável mesmo para intervalos pequenos do sinal, conforme mostrado em [59]. Resta saber se essas medidas podem ser utilizadas para classificar o tipo de ritmo cardíaco de um paciente.

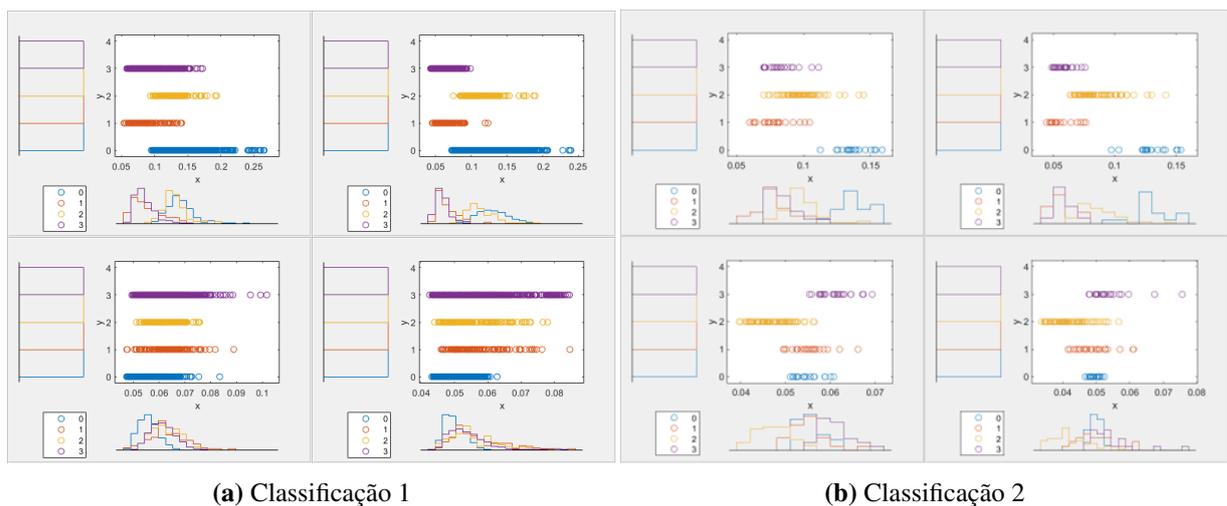
Os comprimentos de correlação  $\tau$  conforme apresentados nas tabelas 4.2 e 4.3, apresen-

tam um sobreposição estatística significativa para alguns dos ritmos cardíacos, o que impede uma classificação analógica. Para obter uma classificação precisa, considerando a variabilidade de  $\tau$  apresentada, usamos alguns algoritmos de classificação da área de aprendizado de máquina, conforme apresentado na seção 3.4.

A classificação será realizada em dois grupos contendo as mesmas variáveis de entrada,  $\tau_i$ , mas rotulados de maneira diferente. No primeiro grupo, o de **classificação por ritmos cardíacos**, associamos aos tempos de correlação dos pacientes o nome do banco de dados do qual o eletrocardiograma foi retirado, o que identifica o seu tipo de ritmo cardíaco. No segundo grupo, o de **classificação binária**, os rótulos associados às variáveis de entrada são apenas variáveis binárias genéricas: 0 quando o paciente não possui nenhum quadro de arritmia, sinal pertencente ao banco NSRDB, e 1, quando o paciente possui qualquer uma das arritmias, sinal pertencente ao banco AFDB, SVDB ou VFDB.

Para cada um dos grupos, consideramos dois esquemas de classificação levemente diferentes em relação às variáveis de entrada  $\tau_i$ , com o objetivo de determinar se características individuais dos pacientes interferem na classificação. No primeiro esquema, no qual iremos nos referir por classificação 1 para os ritmos cardíacos e classificação 3 para o grupo binário, usamos o  $\tau$  calculado nos subintervalos como variável de entrada e no segundo, classificação 2 para o grupo de ritmos cardíacos e classificação 4 para o grupo binário, as observações de exemplo serão as média de  $\tau$  por paciente.

#### 4.4.1 Classificação por Ritmos Cardíacos



**Figura 4.18:** Gráfico do espalhamento de valores do comprimento de correlação classificados por tipo de arritmia de acordo com o banco de dados a que pertencem: NSRDB, AFDB, SVDB ou VFDB. No item (a) estão contidas as correlações por intervalo de tempo (**Classificação 1**) e no item (b) a correlação média por paciente (**Classificação 2**). Fonte: Autor.

Aqui consideramos o problema de classificar os sinais a partir de  $\tau$  sem levar conta de qual paciente veio os intervalos de tempo sob os quais foram calculados. Na figura podemos ver

a distribuição desses valores ao longo da linha, e pelo histograma em quais pontos os valores são mais frequentes. Essa classificação foi feita simultaneamente para o tempo de queda calculado diretamente da função de autocorrelação, e para

Para o esquema de classificação 1, podemos ver na tabela 4.5 o nível de acurácia de validação, que determina a capacidade de generalização do classificador, e na tabela 4.6, o nível de acurácia do teste, que determina a capacidade de realizar previsões fora do conjunto de treinamento.

**Tabela 4.5:** Acurácia da validação (Classificação 1). Fonte: Autor.

<b>Algoritmo</b>	<b>FFT1 (%)</b>	<b>FFT2 (%)</b>	<b>WAV1 (%)</b>	<b>WAV2 (%)</b>
<b>Árvore de Decisões</b>	69.0	61.9	87.6	92.0
<b>KNN</b>	68.7	61.8	87.8	92.1
<b>Discriminante Linear</b>	68.8	61.6	86.7	91.6
<b>SVM Linear</b>	60.3	37.7	63.9	81.3

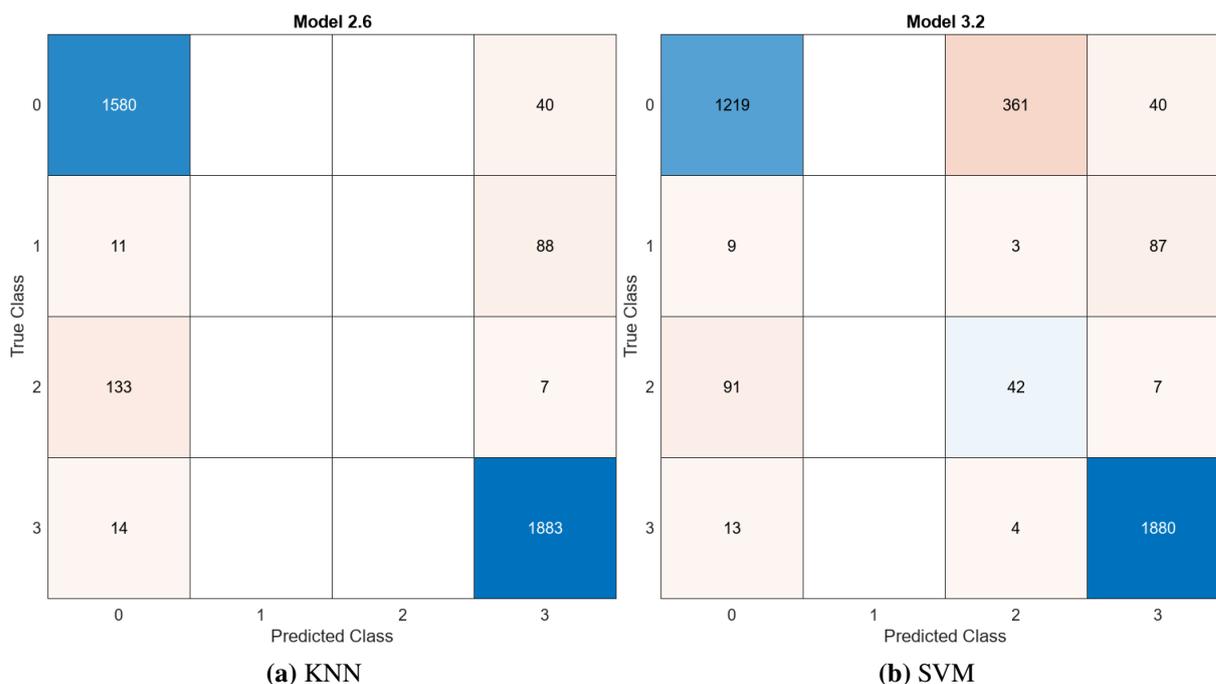
**Tabela 4.6:** Acurácia de Teste (Classificação 1). Fonte: Autor.

<b>Algoritmo</b>	<b>FFT1 (%)</b>	<b>FFT2 (%)</b>	<b>WAV1 (%)</b>	<b>WAV2 (%)</b>
<b>Árvore de Decisões</b>	69.1	65.7	89.2	92.6
<b>KNN</b>	68.6	65.0	89.0	92.8
<b>Discriminante Linear</b>	68.6	64.7	87.1	92.1
<b>SVM Linear</b>	32.6	56.8	51.6	74.1

Inicialmente, vale ressaltar que é esperado a variação no nível de performance apresentada, tanto entre os algoritmos quanto entre diferentes tipos de tratamento aplicado aos dados. Afinal, cada algoritmo é melhor indicado para dados com características específicas. Apesar disso, avaliando a qualidade dos observáveis utilizados, os tempos de correlação, podemos ver que na maioria dos algoritmos foi possível conseguir uma performance de pelo menos 60% das classificações corretas, o que indica um resultado melhor do que se fossem classificados aleatoriamente. O que demonstra que há correlação entre os ritmos cardíacos e os tempos de autocorrelação associados a eles.

Além disso, podemos ver que as classificações utilizando o tempo de queda da função de correlação se saíram tão bem quanto as realizadas por meio da densidade de máximos. E que classificação por meio dos dados filtrados por Wavelet alcançaram melhor performance do que os filtrados por FFT, o que a princípio é contra intuitivo, considerando que o resultados para convergência do tempo de autocorrelação para os sinais filtrados por FFT foram melhores.

Podemos entender essa aparente contradição a partir da matriz de confusão, figura 4.19. Conforme pode ser visto, a maior parte da performance se deve à capacidade dos algoritmos em classificarem corretamente duas classes, a NSRDB(0) e a AFDB(3). Enquanto as demais classes, SVDB e VFDB, raramente foram classificadas corretamente, mas por possuírem menos exemplos no conjunto de treinamento não impactara de modo significativo a acurácia dos



**Figura 4.19:** Matrizes de Confusão para a configuração 1, considerando sinais filtrados por Wavelet, em que foram atribuídos os seguintes índices: 0. NSRDB, 1.VFDB, 2.SVDB e 3.AFDB. É possível ver que apesar da alta taxa de acertos de previsão, o algoritmo KNN não foi capaz de aprender os ritmos AFDB e SVDB. O algoritmo SVM possui melhor generalização, pois tenta fazer previsões da classe 2, mas em decorrência disso apresenta uma performance geral inferior. Fonte: Autor.

classificadores. Esse resultado indica que não houve diferença suficiente nos valores do comprimento de correlação para diferenciar as classes SVDB e VFDB. Mais especificamente, como os valores de  $\tau$  nesse caso estavam mais próximos dos obtidos para AFDB, então mais sinais foram incorretamente classificados como ele.

O SVM Linear, cuja matriz de confusão está representado na figura 4.19, foi capaz de realizar previsões para a terceira classe, referente a arritmia supraventricular, no entanto devido ao número menor de observações em relação as demais, e a diminuição de acerto nas classes restantes, a acurácia total foi menor que a dos outros algoritmos.

Podemos ver também, figura 4.19, que a performance dos algoritmos que usaram os dados obtidos com filtragem por Wavelet pode ser explicada pela capacidade do algoritmo de diferenciar melhor os casos com maior número de observações. Ainda que a maior parte dos algoritmos com acurácia maior que 90% tenham classificado errado sinais de pacientes com arritmia supraventricular como sinal de sinusal ritmo normal, e de pacientes com ectopia ventricular maligna como fibrilação atrial, esse erro não afetou consideravelmente a métrica de acurácia dos algoritmos. Um caso excepcional, novamente, é o do algoritmo SVM Linear que obteve aproximadamente 99% de taxa de verdadeiros positivos para pacientes com fibrilação atrial, e fez previsões para pacientes com arritmia supraventricular. No entanto, teve uma taxa menor de acertos para pacientes com ritmo sinusal normal e por isso teve uma performance abaixo dos demais.

**Tabela 4.7:** Acurácia de Validação (Classificação 2). Fonte: Autor.

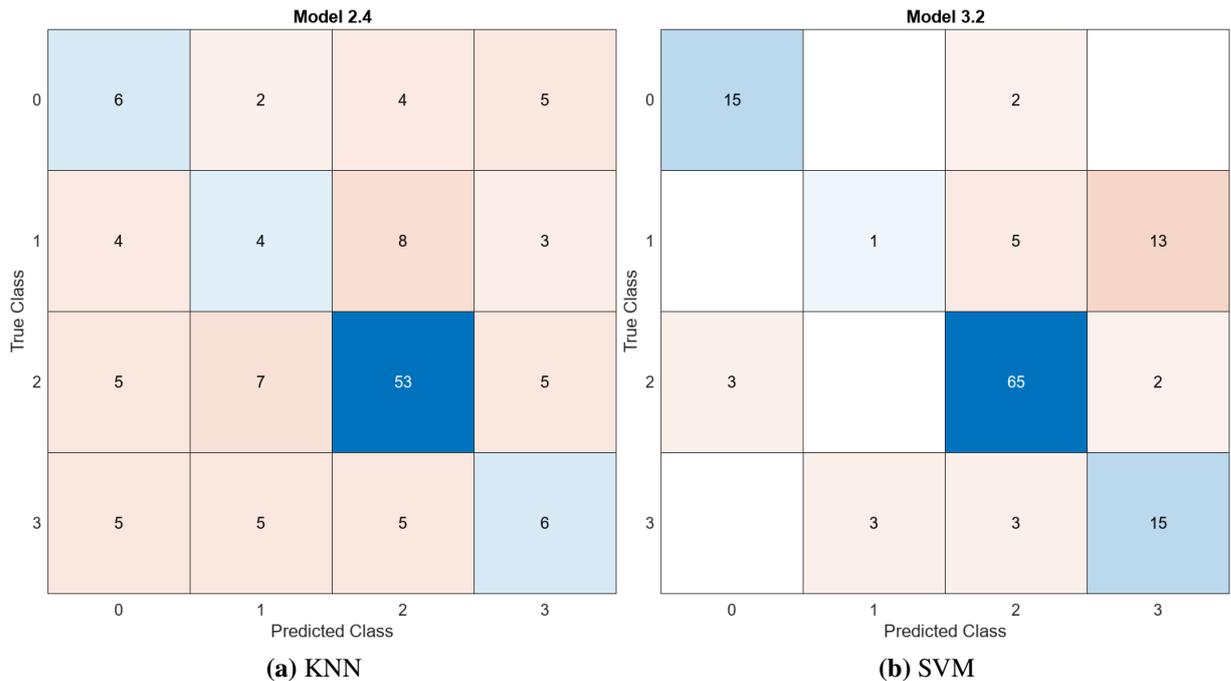
<b>Algoritmo</b>	<b>FFT1 (%)</b>	<b>FFT2 (%)</b>	<b>WAV1( %)</b>	<b>WAV2(%)</b>
<b>Árvore de Decisões</b>	70.9	64.6	65.9	76.4
<b>KNN</b>	55.9	55.9	55.6	55.9
<b>Discriminante Linear</b>	70.1	60.6	71.4	75.6
<b>SVM Linear</b>	69.3	60.6	68.3	76.4

**Tabela 4.8:** Acurácia de Teste (Classificação 2). Fonte: Autor.

<b>Algoritmo</b>	<b>FFT1 (%)</b>	<b>FFT2 (%)</b>	<b>WAV1 (%)</b>	<b>WAV2 (%)</b>
<b>Árvore de Decisões</b>	64.3	50.0	69.2	78.5
<b>KNN</b>	50.0	50.0	61.5	50.0
<b>Discriminante Linear</b>	64.3	64.3	69.2	71.4
<b>SVM Linear</b>	64.3	64.3	69.2	71.4

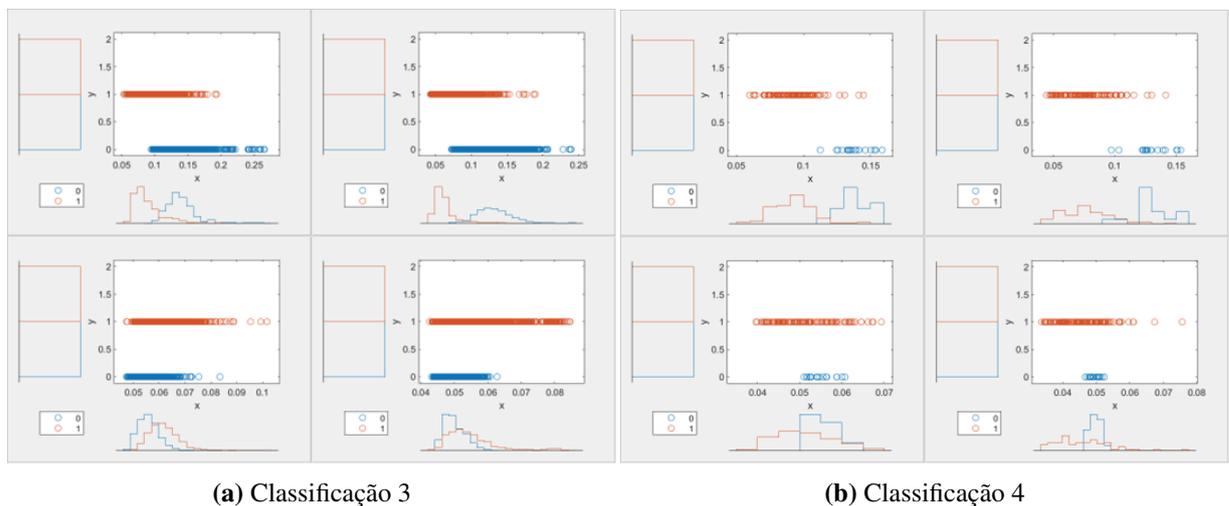
É possível notar através dessa abordagem que as precisões para previsão tanto durante as fases de validação quanto na fase de teste diminuíram significativamente em relação à primeira forma de classificação. Em grande parte esse resultado pode ser atribuído a redução significativa no conjunto de treinamento em relação à classificação anterior. Dessa forma não é possível afirmar categoricamente se esse método de classificação, considerando às condições cardíacas de um paciente como um todo e não apenas segmentos do eletrocardiograma, pode ser considerado uma abordagem melhor.

Na classificação 2, há uma redução significativa do número de observações para os sinais com ritmo sinusal normal e fibrilação atrial. Isso pois alguns dos bancos de dados utilizados possuem sinais de duração muito maior do que a dos outros. Assim, na análise da correlação por segmentos de sinal com arritmia, há um maior número de observações para os sinais de maior duração. Já quando se faz análise por correlação média de paciente, há uma diminuição no número total de observação, maior para o sinais de maior duração. No entanto, ainda há um desbalanço no número de observações entre classes, pois alguns bancos de dados possuem mais sinais do que outros.



**Figura 4.20:** Matrizes de Confusão para a configuração 2, considerando sinais filtrados por Wavelet, em que foram atribuídos os seguintes índices: 0. NSRDB, 1.VFDB, 2.SVDB e 3.AFDB. Nesse caso, podemos ver que apesar da menor acurácia em relação a configuração 1, ambos os algoritmos foram capazes de realizar previsões para todas as classes. Fonte: Autor.

#### 4.4.2 Classificação Binária



**Figura 4.21:** Gráfico do espalhamento de valores do comprimento de correlação classificados binariamente entre ritmo normal(0) e arritmia(1). No item (a) estão contidas as correlações por intervalo de tempo (**Classificação 3**) e no item (b) a correlação média por paciente (**Classificação 4**). Fonte: Autor.

No esquema de classificação 3, podemos ver que há um leve aumento de performance em relação aos dois primeiros esquemas de classificação, que se deve principalmente à redução no desbalanço entre as quantidades de exemplos usados no treinamento. Pois ao se agrupar os 3 grupos de arritmia em um só, a quantidade de pontos pertencente às duas classes, dentro

do conjunto de treinamento, ficou equiparada. Dessa forma, um tipo de arritmia que antes era classificada incorretamente com sendo de outro tipo, agora é corretamente identificada com sendo arritmia, conforme pode ser visualizado na matriz de confusão, figura 4.22a.

Surpreendentemente, comparando com as classificações por tipo de ritmo cardíaco, a redução na quantidade de dados utilizados para o treinamento nesse caso não reduziu o nível de precisão nas previsões. Pelo contrário, tanto utilizando filtro FFT quanto filtro Wavelet, os algoritmos testados foram capazes de melhor classificar os estados dos pacientes, conforme pode ser observado nas tabelas 4.9 e 4.10.

**Tabela 4.9:** Acurácia de Validação (Classificação 3). Fonte: Autor.

<b>Algoritmo</b>	<b>FFT1 (%)</b>	<b>FFT2 (%)</b>	<b>WAV1 (%)</b>	<b>WAV2 (%)</b>
<b>Árvore de Decisões</b>	73.6	67.2	90.1	94.9
<b>KNN</b>	73.5	66.2	90.2	94.9
<b>Discriminante Linear</b>	73.6	66.6	88.5	94.7
<b>SVM Linear</b>	32.2	45.6	89.1	95.0

**Tabela 4.10:** Acurácia de Teste (Classificação 3). Fonte: Autor.

<b>Algoritmo</b>	<b>FFT1 (%)</b>	<b>FFT2 (%)</b>	<b>WAV1 (%)</b>	<b>WAV2 (%)</b>
<b>Árvore de Decisões</b>	72.2	69.3	90.6	94.2
<b>KNN</b>	72.4	67.1	90.9	94.5
<b>Discriminante Linear</b>	72.4	70.7	89.4	94.5
<b>SVM Linear</b>	65.9	48.7	90.9	94.5

Dessa forma, podemos concluir que os algoritmos são bem sucedidos em identificar corretamente pacientes com ritmo sinusal normal, e pacientes com fibrilação atrial, tanto utilizando os resultados obtidos considerando filtragem por FFT quanto para aqueles obtidos por filtragem Wavelet. E pela quantidade de algoritmos, simples e de fácil aplicação, que são capazes de usar o tempo de queda função de autocorrelação, podemos considerar que o sucesso da classificação se deve à qualidade do conjunto de treinamento utilizado.

**Tabela 4.11:** Acurácia de Validação (Classificação 4). Fonte: Autor.

<b>Algoritmo</b>	<b>FFT1 (%)</b>	<b>FFT2 (%)</b>	<b>WAV1 (%)</b>	<b>WAV2 (%)</b>
<b>Árvore de Decisões</b>	85.0	87.4	96.8	96.0
<b>KNN</b>	86.6	86.6	86.5	86.5
<b>Discriminante Linear</b>	86.6	85.8	96.8	96.0
<b>SVM Linear</b>	86.6	86.6	96.0	95.2

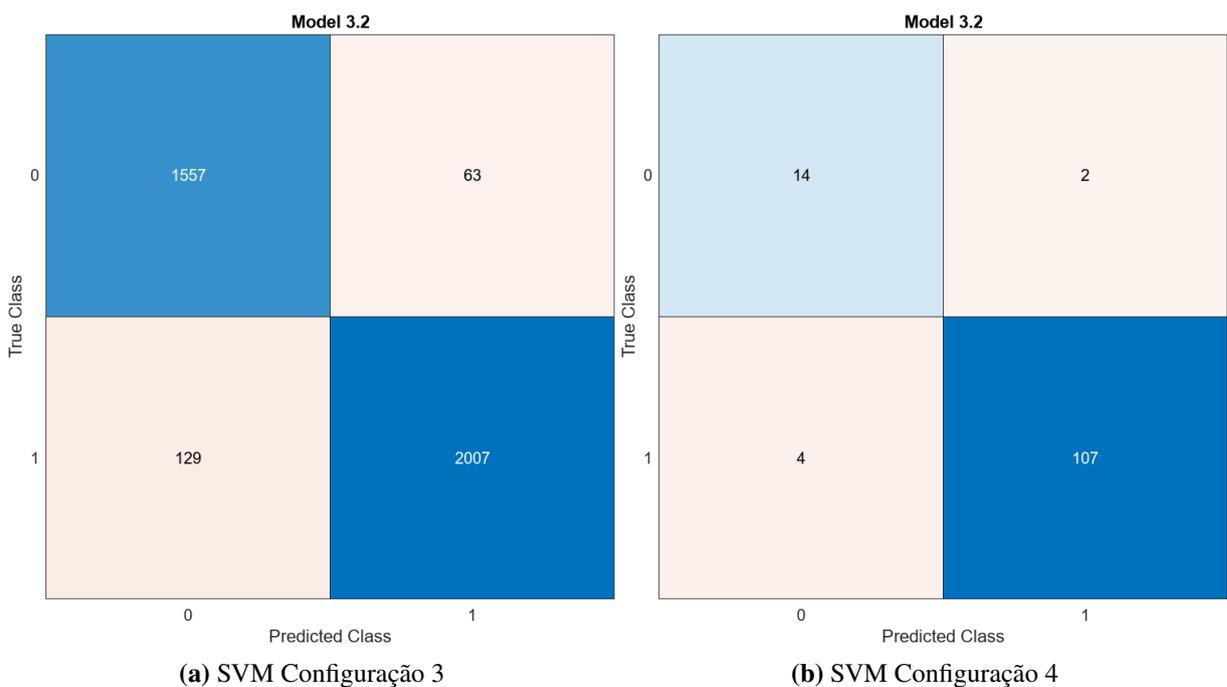
Por fim, no quarto esquema de classificação, em que se é considerado as médias por paciente do tempo de autocorrelação, vemos uma melhora significativa em relação à todos os classificadores, em todos os valores de entradas considerados, conforme pode ser observado nas tabelas 4.11 e 4.12. Ainda se observa maior vantagem em usar os dados filtrados por wavelet

**Tabela 4.12:** Acurácia de Teste (Classificação 4) . Fonte: Autor.

Algoritmo	FFT1 (%)	FFT2 (%)	WAV1 (%)	WAV2 (%)
Árvore de Decisões	85.0	85.7	92.3	92.3
KNN	86.6	92.9	76.9	92.3
Discriminante Linear	86.6	92.9	92.3	92.3
SVM Linear	86.6	92.9	92.3	92.3

para classificação, uma vez que estes alcançam em torno de 90% de eficácia na maioria dos algoritmos, mas a diferença em relação aos dados filtrados por FFT foi muito menor nesse caso.

No entanto, é necessário ainda considerar que há também nesse caso um relativo desbalanço no conjunto de treinamento, pois há um número muito maior de pacientes com ritmo cardíaco normal nos bancos de dados do que pacientes com arritmias, conforme pode ser observado na matriz de confusão, figura 4.22b. Esse tipo de desbalanço é ainda mais significativo quando há um número relativamente baixo de exemplos, como no caso em questão.



**Figura 4.22:** Matrizes de Confusão da validação do algoritmo SVM para as configurações 3 e 4, em que foi atribuído o índice 0 para ritmos normais e 1 para arritmias. Podemos ver que ambas possuem uma alta taxa de acertos de previsão, mantida mesmo quando o número de amostras é reduzida da configuração 3 para a 4. Fonte: Autor.

## Conclusão e Perspectivas

A partir da análise de função de autocorrelação por densidade de máximos e da estatística espectral de matrizes aleatórias, fomos capazes de obter medidas que corroboram a existência de Caos em sinais de eletrocardiograma, somando a outros estudos que têm sido realizado sob essa perspectiva.

Um dos aspectos operacionais mais relevantes para esse tipo de análise é uma aplicação adequada de filtro. Notadamente, a forma das ondas de eletrocardiograma podem ser muito alteradas dependendo do tipo de filtro e dos intervalos de frequência considerado. Filtragens mais básicas, com objetivo de retirar somente os ruídos mais evidentes, são sempre necessárias em uso clínico para a identificação dos intervalos e morfologia das ondas que compõem o sinal de eletrocardiograma. No entanto, o uso de filtros que eliminam porções da informação sobre a morfologia da onda pode ainda ser útil para outros tipos de avaliação. Como um sinal de eletrocardiograma é formado a partir de uma miríade de processos que ocorrem em diferentes regiões do coração, em diferentes fases de um ciclo, a filtragem do sinal representa também a escolha de que tipo de aspecto será estudado.

Partindo dessa perspectiva, pudemos observar que um filtro capaz de reter informações sobre os intervalos RR do coração, que delimita a totalidade do ciclo cardíaco, é capaz de revelar o comportamento caótico do coração e permite ainda compreender a partir de outros métodos, de que maneira esse caos pode ser utilizado para se obter informações uteis para diagnósticos da condição rítmica do coração.

Através dos métodos da teoria de matrizes aleatórias, pudemos discernir de que maneira um sinal caótico e um sinal estocástico podem ser diferenciados. Pudemos verificar que os sinais de eletrocardiograma antes da aplicação do filtro, ao serem transformadas da matrizes características dos ensemble de Wigner e de Wishart-Laguerre, apresentam as formas características das densidades espectrais de sinais aleatórios. Somente após a filtragem pudemos verificar as densidades espectrais típicas de sinais caóticos, evidenciando a necessidade da eliminação de ruídos externos para a identificação de caos. Esses resultados, no entanto, possuem natureza qualitativa.

Medidas quantitativas podem ser realizadas através do método da densidade de máximos e da função de correlação. Nesse caso, a primeira constatação que pudemos fazer, assim como no procedimento anterior, é que em sinais não filtrados os componentes ruidosos são predominantes na maioria dos sinais. Em alguns casos, esse ruídos possuem alta frequência

e baixa amplitude, resultando em uma função que decai rapidamente para zero. Em outros poucos, os ruídos possuem também alta amplitude e baixa frequência de modo que a correlação apresenta um tempo de decaimento extremamente alto. Após o processo de filtragem, pudemos então verificar um comportamento oscilatório esperado da natureza rítmica do ciclo cardíaco. E medindo o comprimento de correlação diretamente pudemos comparar às estimativas que podem ser feitas por meio da densidade média de máximos, verificando uma boa convergência entre os valores que mais uma vez atestam para o comportamento caótico da atividade do coração.

Essas medidas quantitativas obtidas na forma do comprimento de correlação apesar de possuírem valores bem semelhantes para os bancos de dados e filtros considerados, ainda foram suficientes para classificar os sinais, distinguindo um paciente saudável de um que apresenta arritmia. Através dos algoritmos de aprendizado máquina contidos no *Classification Learner* do *Statistics and Machine Learning Toolbox* [46] do MATLAB [60], verificamos diferentes esquemas de classificação. Ficou constatado nas matrizes de confusão que os comprimentos de correlação obtidos não possuem diferença suficiente para classificar cada tipo de ritmo cardíaco de maneira separada. Mesmo os resultados positivos obtidos nesse esquema de classificação ocorreram devido a distribuição irregular dos dados de treinamento entre os tipos de arritmia. Isto é, por causa a quantidade maior de amostras de eletrocardiograma de pacientes com ritmo normal e de pacientes com fibrilação atrial.

No entanto, utilizando um esquema de classificação com dois rótulos: ritmo normal e arritmia, fomos capazes de obter até 96.8% de acurácia para alguns algoritmos, tanto em validação quanto em teste. Um resultado bem positivo. Durante o desenvolvimento do trabalho, consideramos apenas a acurácia com métrica de avaliação dos algoritmos. Mas conforme pôde ser observado da análise das matrizes de confusão para cada uma das configurações, essa métrica pode ser alta mesmo quando classes inteiras são representadas de modo completamente errado. Dessa forma, o processo de avaliação dos algoritmos também pode ser melhorado, incluindo outros tipos de métricas mais elaboradas.

Os resultados apresentados nesse trabalho sugerem, portanto, que com um pouco mais desenvolvimento métodos de diagnóstico em tempo real podem ser realizados a partir de dados referentes aos ritmos cardíacos obtidos de aparelhos portáteis como o Holter, e possivelmente até mesmo relógios digitais com a função de medir batimentos cardíacos.

Ao longo do desenvolvimento do trabalho, pudemos evidenciar alguns problemas e abordagens que podem ser exploradas de modo a refinar os resultados obtidos.

Uma possível abordagem não aplicada durante a realização do trabalho, é a de se fazer filtragem dinâmica, considerando a densidade espectral de potências dos sinais. Essa abordagem não foi considerada pois os sinais de um mesmo banco de dados normalmente apresentam picos em frequências diferentes, normalmente muitos distantes. E dessa forma, esse tipo de filtragem não se alinhou com a perspectiva de se considerar fenômenos de uma mesma origem.

Notamos ainda que a forma e decaimento das funções de autocorrelação podem ser

muito dependentes dos filtros utilizados. Seja pelo intervalo de frequências considerados ou pela forma da wavelet mãe adotado. Determinar as condições adequadas de filtragem parece uma passo essencial no sentido de obter comprimentos de correlações que melhor representem os sinais avaliados, e que assim possam otimizar a classificação das arritmias.

Para essa última, ficou também evidente na análise das matrizes de correlação, que um número equivalente de amostras dos tipos de arritmias usados como rótulo é necessário, de modo a não criar viés nos algoritmos de classificação. Além disso, a limitação nas informações sobre os bancos de dados se demonstrou um ponto de dificuldade. Assumimos, por exemplo, que as derivações utilizadas para obter os sinais foram as mesmas, ainda que informação explícita sobre o tipo de derivação utilizada não pôde ser encontrada.

Outro ponto a ser explorado é também a utilização de sinais obtidos a partir de diferentes derivações como entradas independentes da classificação. Dessa forma, podemos especular que um separamento maior as diferentes classes pode ser alcançado no espaço dos observáveis, o que pode levar a melhor eficiência na classificação. Desde que sejam utilizadas derivações com morfologia suficientemente distintas.

Por fim, face os resultados obtidos, pode se concluir que o estudo de outros tipos de arritmias e até mesmo de séries temporais associadas a outros processos fisiológicos, e suas respectivas patologias, podem se beneficiar dos métodos empregados nesse trabalho.

## Referências Bibliográficas

- [1] LAPLACE, P. de; TRUSCOTT, F.; EMORY, F. *A Philosophical Essay on Probabilities*. [S.l.]: Wiley, 1902. (A Philosophical Essay on Probabilities).
- [2] GLEICK, J. *Chaos: Making a New Science*. USA: Penguin Books, 1987. ISBN 0140092501.
- [3] ELBERT, T. et al. Chaos and physiology: deterministic chaos in excitable cell assemblies. *Physiological Reviews*, v. 74, n. 1, p. 1–47, 1994. PMID: 8295931.
- [4] BILLMAN, G. E. Homeostasis: The underappreciated and far too often ignored central organizing principle of physiology. *Frontiers in Physiology*, v. 11, 2020. ISSN 1664-042X. Disponível em: <<https://www.frontiersin.org/journals/physiology/articles/10.3389/fphys.2020.00200>>.
- [5] GLASS, L.; MACKEY, M. C. *From Clocks to Chaos: The Rhythms of Life*. [S.l.]: Princeton University Press, 1988. ISBN 9780691084961.
- [6] DAS, M.; ZIPES, D. *Electrocardiography of Arrhythmias: A Comprehensive Review: A Companion to Cardiac Electrophysiology*. [S.l.]: Elsevier Health Sciences, 2012. (Clinical-Key 2012). ISBN 9781437720297.
- [7] AZIZ, S.; AHMED, S.; ALOUINI, M.-S. Ecg-based machine-learning algorithms for heartbeat classification. *Scientific Reports*, v. 11, n. 1, p. 18738, Sep 2021. ISSN 2045-2322. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/s41598-021-97118-5>>.
- [8] EBRAHIMI, Z. et al. A review on deep learning methods for ecg arrhythmia classification. *Expert Systems with Applications: X*, v. 7, p. 100033, 2020. ISSN 2590-1885. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2590188520300123>>.
- [9] RIBEIRO, A. H. et al. Automatic diagnosis of the 12-lead ecg using a deep neural network. *Nature Communications*, v. 11, n. 1, p. 1760, Apr 2020. ISSN 2041-1723. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/s41467-020-15432-4>>.
- [10] GOLDBERGER, A. L.; RIGNEY, D. R.; WEST, B. J. Science in pictures: Chaos and fractals in human physiology. *Sci. Am.*, Springer Science and Business Media LLC, v. 262, n. 2, p. 42–49, fev. 1990.

- [11] GLASS, L.; MACKEY, M. C. Pathological conditions resulting from instabilities in physiological control systems. *Ann N Y Acad Sci*, United States, v. 316, p. 214–235, 1979.
- [12] KAPLAN, D. T. et al. Aging and the complexity of cardiovascular dynamics. *Biophys. J.*, Elsevier BV, v. 59, n. 4, p. 945–949, abr. 1991.
- [13] GOLDBERGER, A. Is the normal heartbeat chaotic or homeostatic? *Physiology*, v. 6, n. 2, p. 87–91, 1991. PMID: 11537649.
- [14] SÖRNMO, L.; LAGUNA, P. *Bioelectrical Signal Processing in Cardiac and Neurological Applications*. [S.l.: s.n.], 2005. 669 p. ISBN 0-12-437552-9.
- [15] YE, B. et al. Distinguishing chaotic time series from noise: A random matrix approach. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, v. 44, p. 284–291, 2017. ISSN 1007-5704. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1007570416303021>>.
- [16] BAZEIA, D. et al. A novel procedure for the identification of chaos in complex biological systems. *Scientific Reports*, v. 7, n. 1, p. 44900, Mar 2017. ISSN 2045-2322. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/srep44900>>.
- [17] RAMOS, J. G. G. S. et al. Conductance peaks in open quantum dots. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 107, p. 176807, Oct 2011. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.107.176807>>.
- [18] CVITANOVIĆ, P. et al. *Chaos: Classical and Quantum*. Copenhagen: Niels Bohr Inst., 2016. Disponível em: <<http://ChaosBook.org/>>.
- [19] LORENZ, E. N. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, USA, v. 20, p. 130–141, 1963.
- [20] REICHL, L. *The Transition to Chaos: Conservative Classical Systems and Quantum Manifestations*. Springer New York, 2013. (Institute for Nonlinear Science). ISBN 9781475743500. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=slHuBwAAQBAJ>>.
- [21] MANDELBROT, B. *The Fractal Geometry of Nature*. [S.l.]: Henry Holt and Company, 1983. (Einaudi paperbacks). ISBN 9780716711865.
- [22] MAY, R. M. Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*, v. 261, n. 5560, p. 459–467, Jun 1976. ISSN 1476-4687. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/261459a0>>.
- [23] ALLIGOOD, K. T.; SAUER, T. D.; YORKE, J. A. *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*. [S.l.]: Springer, 1996.

- [24] STROGATZ, S. H. *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering*. 2. ed. Florida: CRC Press, 2018.
- [25] OTT, E. *Chaos in Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 2002. ISBN 9780521811965. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=D41qkMHtDbcC>>.
- [26] GUTZWILLER, M. C. *Chaos in Classical and Quantum Mechanics*. New York: Springer, 1990.
- [27] TAYLOR, J. R. *Classical Mechanics*. Sausalito, California: University Science Books, 2005. ISBN 9781891389221. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=P1kCtNr-pJsC>>.
- [28] GOLDBERGER, A. L.; WEST, B. J. Chaos in physiology: Health or disease? In: \_\_\_\_\_. *Chaos in Biological Systems*. Boston, MA: Springer US, 1987. p. 1–4. ISBN 978-1-4757-9631-5.
- [29] KANTZ, H.; SCHREIBER, T. *The human ECG - nonlinear deterministic versus stochastic aspects*. 1998.
- [30] PERC, M. Nonlinear time series analysis of the human electrocardiogram. *European Journal of Physics*, v. 26, n. 5, p. 757, jun 2005. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1088/0143-0807/26/5/008>>.
- [31] KANTERS, J. K.; HOLSTEIN-RATHLOU, N.-H.; AGNER, E. Lack of evidence for low-dimensional chaos in heart rate variability. *Journal of Cardiovascular Electrophysiology*, v. 5, n. 7, p. 591–601, 1994. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/j.1540-8167.1994.tb01300.x>>.
- [32] KAPLAN, D. T.; COHEN, R. J. Is fibrillation chaos? *Circulation Research*, v. 67, n. 4, p. 886–892, 1990. Disponível em: <<https://www.ahajournals.org/doi/abs/10.1161/01.RES.67.4.886>>.
- [33] OLIVEIRA, D. Vicentini de. *Fisiologia Humana - Unipar EAD - Unidade III: Fisiologia cardiovascular e respiratória*. 2019. Disponível em: <<https://moodle.ead.unipar.br/materiais/webflow/fisiologia-humana/unidade-iii.html>>.
- [34] MALMIVUO, J.; PLONSEY, R. *Bioelectromagnetism: Principles and Applications of Bioelectric and Biomagnetic Fields*. Oxford University Press, 1995. ISBN 9780195058239. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780195058239.001.0001>>.
- [35] ZHU, Z.; WANG, R.; ZHU, F. The energy coding of a structural neural network based on the hodgkin–huxley model. *Frontiers in Neuroscience*, v. 12, 03 2018.

- [36] AIHARA, K.; MATSUMOTO, G. Forced oscillations and routes to chaos in the hodgkin-huxley axons and squid giant axons. In: \_\_\_\_\_. *Chaos in Biological Systems*. Boston, MA: Springer US, 1987. p. 121–131. ISBN 978-1-4757-9631-5.
- [37] GUCKENHEIMER, J.; OLIVA, R. A. Chaos in the hodgkin–huxley model. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, v. 1, n. 1, p. 105–114, 2002.
- [38] TOMAŠIĆ, I.; TROBEC, R. Electrocardiographic systems with reduced numbers of leads—synthesis of the 12-lead ecg. *IEEE Reviews in Biomedical Engineering*, v. 7, p. 126–142, 2014.
- [39] BRUNTON, S. L.; KUTZ, J. N. Fourier and wavelet transforms. In: \_\_\_\_\_. *Data-Driven Science and Engineering: Machine Learning, Dynamical Systems, and Control*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2019. p. 47–83.
- [40] OPPENHEIM, A. V.; WILLSKY, A. S.; NAWAB, S. H. *Signals & systems (2nd ed.)*. USA: Prentice-Hall, Inc., 1996. ISBN 0138147574.
- [41] HEIDEMAN, M.; JOHNSON, D.; BURRUS, C. Gauss and the history of the fast fourier transform. *IEEE ASSP Magazine*, v. 1, n. 4, p. 14–21, 1984.
- [42] LIMA, T. L. d. V. *Métodos não invasivos para detecção e isolamento de falhas em motores de combustão interna baseados em dimensões fractais e análise multiresolução wavelet*. Tese (Doutorado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, UFPB, 2020.
- [43] MISITI, M. et al. *Wavelet Toolbox™4 User's Guide*. Natick, Massachusetts, United States: The MathWorks Inc., 2009. Disponível em: <<https://www.mathworks.com/help/wavelet/>>.
- [44] GUHR, T.; MÜLLER–GROELING, A.; WEIDENMÜLLER, H. A. Random-matrix theories in quantum physics: common concepts. *Physics Reports*, v. 299, n. 4, p. 189–425, 1998. ISSN 0370-1573. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157397000884>>.
- [45] LIVAN, G.; NOVAES, M.; VIVO, P. Introduction to random matrices. *SpringerBriefs in Mathematical Physics*, Springer International Publishing, 2018. ISSN 2197-1765. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-70885-0>>.
- [46] INC., T. M. *Statistics and machine learning toolbox*. Natick, Massachusetts, United States: The MathWorks Inc., 2022. Disponível em: <<https://www.mathworks.com/help/stats/index.html>>.
- [47] Disponível em: <<https://www.quantstart.com/articles/Beginners-Guide-to-Decision-Trees-for-Supervised-Machine-Learning/>>.

- [48] AWAN, A. A. *K-Nearest Neighbors (KNN) classification with R tutorial*. DataCamp, 2023. Disponível em: <<https://www.datacamp.com/tutorial/k-nearest-neighbors-knn-classification-with-r-tutorial>>.
- [49] AMIDI, A.; AMIDI, S. *Machine learning tips and tricks Cheatsheet*. 2018. Disponível em: <<https://stanford.edu/~shervine/teaching/cs-229/cheatsheet-machine-learning-tips-and-tricks>>.
- [50] JAMES, G. et al. *An Introduction to Statistical Learning with Applications in Python*. Cham: Springer, 2023. (Springer Texts in Statistics). ISBN 978-3-031-38746-3. Disponível em: <<https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-031-38747-0>>.
- [51] NOGARE, D. *Performance de Machine Learning - Matriz de Confusão*. 2020. Disponível em: <<https://diegonogare.net/2020/04/performance-de-machine-learning-matriz-de-confusao/>>.
- [52] GOLDBERGER, A. L. et al. Physiobank, physiotoolkit, and physionet. *Circulation*, v. 101, n. 23, p. e215–e220, 2000. Disponível em: <<https://www.ahajournals.org/doi/abs/10.1161/01.CIR.101.23.e215>>.
- [53] MOODY, G.; MARK, R. The impact of the mit-bih arrhythmia database. *IEEE Engineering in Medicine and Biology Magazine*, v. 20, n. 3, p. 45–50, 2001.
- [54] MOODY G B; MARK, R. G. A new method for detecting atrial fibrillation using r-r intervals. *Computers in Cardiology*, v. 10, n. 23, p. 227–230, 1983.
- [55] GREENWALD, S. *Development and analysis of a ventricular fibrillation detector*. Dissertação (Mestrado) — MIT Dept. of Electrical Engineering and Computer Science, 1986.
- [56] GREENWALD, S. *Improved detection and classification of arrhythmias in noise-corrupted electrocardiograms using contextual information*. Tese (Doutorado) — Harvard-MIT Division of Health Sciences and Technology, 1990.
- [57] O’HAVER, T. *A Pragmatic Introduction to Signal Processing with applications in scientific measurement*. [S.l.: s.n.], 2019. 531 p.
- [58] HUNT, N. Autocorrelation function, mutual information, and correlation dimension. In: \_\_\_\_\_. [S.l.: s.n.], 2016. p. 301–342. ISBN 9781315370651.
- [59] BASTOS, H. C. P. d. A. *Densidade de Máximos e Função de Correlação em Mecânica Clássica e Sinais Biológicos*. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Física, UFPB, 2017.
- [60] INC., T. M. *MATLAB version: 9.13.0 (R2022b)*. Natick, Massachusetts, United States: The MathWorks Inc., 2022. Disponível em: <<https://www.mathworks.com>>.