



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Experimentos com Nêutrons e Gravidade Modificada

Jesriel Matias da Rocha

Tese de Doutorado

JOÃO PESSOA

- 2025 -



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Experimentos com Nêutrons e Gravidade Modificada

Jesriel Matias da Rocha

Tese realizada sob a orientação do Prof. Dr. Fábio Leal de Melo Dahia, apresentada ao Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Física da Universidade Federal da Paraíba, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Física.

JOÃO PESSOA

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

R672e Rocha, Jesriel Matias da.
Experimentos com nêutrons e gravidade modificada /
Jesriel Matias da Rocha. - João Pessoa, 2025.
141 f. : il.

Orientação: Fábio Leal de Melo Dahia.
Tese (Doutorado) - UFPB/CCEN.

1. Gravidade - modificações. 2. Vínculos
gravitacionais. 3. Teoria das dimensões extras. 4.
Branas. I. Dahia, Fábio Leal de Melo Dahia. II. Título.

UFPB/BC CDU 531.5(043)



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Física

Ata da Sessão Pública da Defesa de tese de Doutorado do aluno Jesriel Matias da Rocha, candidato ao Título de Doutor em Física na Área de Concentração Gravitação e Cosmologia.

Aos vinte e sete dias do mês de fevereiro do ano de dois mil e vinte e cinco, às 10h00, na sala virtual meet.google.com/zzd-bows-eua, reuniram-se os membros da Banca Examinadora constituída para avaliar a tese de Doutorado, na área de Gravitação e Cosmologia, de **Jesriel Matias da Rocha**. A banca foi composta pelos(as) professores(as) doutores(as): Fábio Leal de Melo Dahia (PPGF/UFPB), orientador e presidente da banca examinadora, Carlos Augusto Romero Filho (PPGF/UFPB), Valdir Barbosa Bezerra (PPGF/UFPB), Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos (UFCG) e Shahram Jalalzadeh (UFPE). Dando início aos trabalhos, o Prof. Fábio Leal de Melo Dahia comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a palavra para o candidato para que o mesmo fizesse, oralmente, a exposição da pesquisa de tese intitulada “*Experimentos com nêutrons e Gravidade Modificada*”. Concluída a exposição, o candidato foi arguido pela Banca Examinadora, que emitiu o parecer “**aprovado**”. Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba expedir o respectivo diploma de Doutor em Física na forma da lei. E para constar, Ana Beatriz Cândido Vieira, Assistente em Administração, redigiu a presente ata que vai assinada pelos membros da Banca Examinadora. João Pessoa, Paraíba, **27 de fevereiro de 2025**.

Prof. Dr. Fábio Leal de Melo Dahia
Orientador - PPGF/UFPB

Documento assinado digitalmente
gov.br CARLOS AUGUSTO ROMERO FILHO
Data: 05/03/2025 12:54:38-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Carlos Augusto Romero Filho
PPGF/UFPB

Documento assinado digitalmente
gov.br EDUARDO MARCOS RODRIGUES DOS PASSOS
Data: 28/02/2025 11:09:48-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos
UFCG

Documento assinado digitalmente
gov.br VALDIR BARBOSA BEZERRA
Data: 03/03/2025 11:44:20-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Valdir Barbosa Bezerra
PPGF/UFPB

Prof. Dr. Shahram Jalalzadeh
UFPE

Dedico à Talita Rocha.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente ao meu Deus, que tem me ajudado e me capacitado para chegar nesse momento tão especial em minha vida.

Agradeço a minha esposa Talita por estar sempre ao meu lado, nos melhores e piores momentos que me ocorreram ao longo desses 4 anos. Sem o seu auxílio não teria chegado até onde cheguei hoje. Também agradeço a minha família, meus pais Roberto e Maria que me incentivaram a estudar ciência desde a infância, nutrindo em mim o desejo de entender desde cedo como as coisas funcionam. Aos meus irmãos Daniele, Danila e Abner, pelo incentivo e o amor de vocês.

Gostaria de agradecer também aos professores do departamento de pós-graduação de Física da UFPB. Sou muito grato por ter encontrado professores tão capacitados ao longo da minha formação. Em especial, sou grato ao professor Dr. Carlos Romero, que desde a graduação me prendia com toda a sua didática e humor em sala de aula. Sou grato também ao professor Dr. Jorge Gabriel, que conheci desde a graduação. Sua didática e empenho me influenciou a não buscar atalhos na Física. Também sou muito grato ao professor Dr. Eugênio pelo esforço em transmitir aos alunos a paixão que sente ao falar de Física. Em especial agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Fábio Dahia por toda a sua orientação. Sou muito grato por todo o seu esforço e dedicação na minha formação. Seu cuidado com os detalhes, seu humor e didática formaram o físico que sou hoje.

Também sou grato aos meus amigos Mauro, Fabiano, Alisson, Willames, Jeferson, Jabes, e Emanuel. Vocês não sabem o quanto me ajudaram nos momentos difíceis que passei. Também agradeço ao Prof. Dr. Adiel Lemos por toda ajuda quando precisei.

Por fim (mas não menos importante), sou grato aos meus amigos e irmãos da minha igreja Assembleia de Deus em Mataraca-PB. Que Deus abençoe as suas vidas. Sou muito agradecido pelo amor fraternal que vocês têm por mim.

Por fim, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Nas últimas décadas temos visto o surgimento de várias propostas de modificação da teoria da gravitação. Nesse contexto, destacamos a teoria de dimensões extras de grande escala, que originariamente foi elaborada como uma tentativa de explicar a razão da gravidade ser muito mais fraca em comparação com as demais forças. Evidentemente, toda formulação teórica nova precisa passar pelo crivo experimental. Uma das consequências interessantes da teoria de dimensões extras de grande escala é a previsão de amplificação da força gravitacional em curtas distâncias. Neste trabalho damos destaque a alguns experimentos com nêutrons. Essa partícula, por ser eletricamente neutra, se mostra bastante útil na busca por interações gravitacionais anômalas em curtas distâncias. Iniciamos nossa discussão considerando o experimento de estados ligados do nêutron, no qual nêutrons lentos ficam verticalmente aprisionados entre um espelho perfeitamente reflexivo e o campo gravitacional terrestre. No cenário de dimensões extras, investigamos como a interação gravitacional entre o nêutron e o espelho poderia influenciar os estados ligados do nêutron. A partir dessa análise, conseguimos determinar novos vínculos para os parâmetros livres do modelo de dimensão extra. Nossos resultados foram baseados no modelo de branas com espessura. Dessa forma pudemos evitar problemas de divergências no cálculo do potencial gravitacional anômalo e estender resultados anteriores da literatura, cuja análise está restrita a codimensões menores do que cinco. Também consideramos experimentos de espalhamento do nêutron por núcleos pesados que visam à determinação da polarizabilidade do nêutron. Mostramos que experimentos desse tipo nos permitem estudar a interação gravitacional do nêutron com uma fonte não-bariônica, a saber, a energia do campo elétrico gerado pelo núcleo pesado. Como veremos, com esta análise podemos estabelecer novos vínculos experimentais sobre o comportamento de certos parâmetros pós-newtonianos associados à medida da capacidade da pressão e da energia interna de produzir gravitação. Esse método fornece um vínculo muito mais restritivo, no domínio abaixo da escala do picômetro, em comparação com limites prévios extraídos de outros

experimentos. Por fim, analisamos experimentos de reflectometria comumente empregados na determinação do comprimento de espalhamento do nêutron. Estudando esse experimento no cenário de branas com espessura, determinamos novos vínculos para os parâmetros livres do modelo. Os vínculos obtidos são comparáveis em ordem de magnitude aos limites experimentais extraídos da espectroscopia de certos átomos exóticos obtidos recentemente.

Palavras-chave: dimensões extras, branas, modificações da gravidade, vínculos gravitacionais.

Abstract

In recent decades, several proposals for modifying gravitational theory have emerged. In this context, we highlight the large extra dimensions theory, originally developed as an attempt to explain why gravity is significantly weaker compared to the other fundamental forces. Evidently, any new theoretical formulation must undergo experimental scrutiny. One of the interesting consequences of the large extra dimensions theory is the predicted enhancement of the gravitational force at short distances. In this work, we focus on some neutron-based experiments. Due to its electrically neutral nature, the neutron proves to be particularly useful in the search for anomalous gravitational interactions at short distances. We begin our discussion by considering the neutron bound-state experiment, in which slow neutrons are vertically confined between a perfectly reflective mirror and the Earth's gravitational field. In the extradimensional scenario, we investigate how the gravitational interaction between the neutron and the mirror could influence the neutron's bound states. Based on this analysis, we derive new constraints on the free parameters of the extradimensional model. Our results are based on the thick-brane model, which allows us to avoid divergence issues in the calculation of the anomalous gravitational potential and extend previous results in the literature, whose analysis is restricted to codimensions smaller than five. We also consider neutron scattering experiments involving heavy nuclei, which aim to determine the neutron's polarizability. We show that such experiments enable the study of the gravitational interaction between the neutron and a non-baryonic source—namely, the energy of the electric field generated by the heavy nucleus. As we will see, this analysis allows us to establish new experimental constraints on the behavior of certain post-Newtonian parameters associated with the ability of pressure and internal energy to generate gravity. This method provides a significantly more stringent constraint, in the sub-picometer scale domain, compared to previous limits derived from other experiments. Finally, we analyze reflectometry experiments commonly used to determine the neutron scattering length. By studying this experiment within the thick-brane scenario, we derive new

constraints on the free parameters of the model. The obtained constraints are comparable in order of magnitude to the experimental limits recently extracted from the spectroscopy of certain exotic atoms.

Keywords: extra dimensions, branes, modifications of gravity, gravitational bonds.

Lista de Figuras

2.1	Compactação da dimensão extra introduzida por Klein. Nessa compactação a dimensão extra seria infinita nas coordenadas quadridimensionais usuais e finita na coordenada z , onde seu comprimento é $2\pi R$, sendo R o raio da dimensão. Figura retirada da referência [33].	10
2.2	Torre de Kaluza-Klein. Distância de separação na escala de energia proporcional ao inverso de R . No limite $R \rightarrow \infty$ os modos se aproximam de um contínuo. Figura retirada da referência [34].	12
2.3	Potencial com dois mínimos separados por um estado de falso vácuo. Figura retirada de [33].	16
2.4	Solução do tipo parede de domínio. Figura retirada de [33].	16
2.5	Densidade de energia da parede de domínio. Figura retirada de [33].	17
2.6	Compactação da dimensão extra (lado esquerdo). Do lado direito temos a dimensão aberta. Do ponto de vista do observador em O , linhas de campo surgirão de massas topológicas, situadas a uma distância de $2\pi R$ da massa original. Figura retirada de [33].	22
2.7	Superfície gaussiana que envolve as massas imagens. Figura retirada de [13].	23
3.1	Esquema da balança de torção idealizado pelo grupo Eöt-Wahs. A separação discos está exagerada. Os lasers podem ser vistos no canto superior esquerdo e servem para medir o sinal de um torque anômalo. Figura retirada de [43].	30
3.2	Último setup experimental do grupo Eot-Wash realizado em 2020. As massas faltantes nele são muito maiores em número, quando comparada com seus antecessores. Figura retirada de [9].	31

3.3	Limites experimentais impostos sobre os parâmetros de Yukawa. O experimento de 2020 restringiu ainda mais o valor de α para um λ entre 10^{-5} e 10^{-4} . Figura retirada de [9].	32
3.4	Esquema da força de Casimir. Quando muito próximas, as placas sofrem uma atração devido as flutuações quânticas, representadas em verde. Figura editada da referência [45].	33
3.5	Vínculos sobre os parâmetros de Yukawa usando a força de Casimir. Os experimentos <i>Casimir 1,2 e 3</i> dizem respeito às diferentes forças de Casimir consideradas em uma superfície e o vínculo Casimir-less foi obtido com experimentos que visavam a minimização da força de Casimir. Figura retirada de [12].	35
3.6	Vínculos espectroscópicos quando comparados com outros testes de gravidade modificada. Como podemos ver, vínculos espectroscópicos são bastante restritivos para um alcance da ordem de $10^{-3}\text{Å}-1\text{Å}$. O vínculo obtido da frequência de transição $3S - 1S$ está indicado pela linha azul tracejada. Figura retirada de [11].	37
3.7	Vínculos espectroscópicos sobre os parâmetros de Yukawa, quando comparados com os demais testes experimentais. O novo limite com o $\mu^4\text{He}$ se mostraram mais restritivos dos que os da transição $1S-3S$ do hidrogênio e outros testes espectroscópicos. Figura retirada de [12].	38
4.1	Ilustração do espalhamento de algumas partículas ao adentrar um meio material. Como podemos ver, o nêutron consegue penetrar mais profundamente o meio material. Figura retirada de [16].	40

4.2	Representação esquemática do experimento COW. Após a colisão com a primeira placa do interferômetro (A), o feixe se divide nos caminhos I e II. Dada a inclinação ϕ do aparato, o caminho II está sob a ação do campo gravitacional. Ao se recombinarem em D, os feixes atingem os detectores, representados por C_2 e C_3 . Figura retirada de [13].	42
4.3	Contagem dos nêutrons que chegam ao detector. Como podemos observar, a intensidade depende do ângulo de inclinação do aparato. Isso demonstra a ação do campo gravitacional sobre a fase do nêutron. Figura retirada de [50].	44
4.4	Diversos testes realizados com a interferometria de nêutrons. Figura editada da referência [15].	44
4.5	Comparação entre os vínculos espectroscópicos com o obtido usando a interferometria. Como podemos observar, para $1,4 \times 10^{-7}$ m e 10^{-4} m o vínculo da interferometria é mais restritivo do que os demais nessa escala. Figura retirada de [12].	49
4.6	Esquema do aparato experimental para a detecção dos estados ligados do nêutron. Após cair parabolicamente e colidir com o espelho sucessivamente, o nêutron atinge o detector. Figura adaptada de [17].	50
4.7	Comparação dos vínculos extraídos por Abele (2003) em comparação com vínculos obtidos de anos anteriores. Figura adaptada de [19].	52
4.8	Comparação entre os limites de uma possível interação do tipo Yukawa em um experimento de espalhamento. O vínculo discutido nesta seção pode ser visto na linha vermelha sólida. Lembrando que $\alpha = (1,34 \times 10^{37}) g^2$. Figura retirada de [59].	56
4.9	Comparação do vínculo do trabalho da Science, onde utilizou medidas interferométricas do padrão de pêndulo. Figura adaptada de [60].	57

5.1	Comportamento das funções de Airy $Ai(x)$ e $Bi(x)$. Conforme elas vem de $-x$ e se aproximam de 0 perdem o padrão oscilante. A função $Ai(x)$ decai muito rapidamente no eixo positivo de x , enquanto que a função $Bi(x)$ cresce rapidamente.	63
5.2	Configuração do estado ligado do nêutron. A linha sólida representa o potencial gravitacional mgz que atua no nêutron. No interior do espelho temos o pseudo-potencial de Fermi, considerado infinito neste experimento. Assim, os autoestados do nêutron encontram-se confinados. Nesta figura, apenas os autoestados com n até 4 foram considerados. Figura adaptada de [63].	64
6.1	Comparação do vínculo obtido nesse trabalho usando a polarizabilidade (linha sólida em azul) com os da espectroscopia (linhas laranja e cinza), do experimento MTV-G (linha marrom) e da interferometria (em vermelho). Figura obtida com os dados extraídos de [12].	89
7.1	Esquema do experimento da reflectometria. Após passar pelas fendas o nêutron cai parabolicamente até atingir o espelho. Os nêutrons que não conseguem penetrar o espelho atingem o detector, onde mede-se a taxa de reflexão. Figura retirada de [27].	92
7.2	Função da reflectividade do nêutron para o Bismuto e o Chumbo. Figura retirada da referência [28].	93
7.3	Vínculo obtido sobre a nova escala de energia Λ em função de b_N do Chumbo. Os valores dentro da faixa azul correspondem a 1σ enquanto que os demais valores correspondem a 2σ de confiança.	96

Conteúdo

Lista de Figuras

1	Introdução	1
2	Revisão Teórica	7
2.1	A Teoria de Kaluza-Klein	7
2.1.1	Mecanismo de Compactação de Klein	10
2.2	O Modelo ADD	13
2.2.1	Confinamento de Matéria	15
2.2.2	Potencial Gravitacional em um Espaço Extradimensional	20
2.2.3	Potencial Gravitacional com Dimensões Extras Compactas	21
3	Testes Experimentais da Gravitação em Curtas Distâncias	27
3.1	Parametrizações	28
3.2	Balança de Torção	29
3.2.1	Grupo Eötvös-Wash	29
3.3	Efeito Casimir	31
3.4	Vínculos Espectroscópicos	34
3.4.1	Frequência de Transição $1S - 3S$ do Hidrogênio	36
4	O Uso de Nêutrons na Busca por Vínculos Experimentais	39
4.1	Vínculos da Interferometria de Nêutrons	41

4.1.1	O Experimento COW	41
4.1.2	Vínculos sobre Teorias de Gravidade Modificada Utilizando a Interferometria de Neutrons	45
4.1.2.1	Interferometria de nêutrons com fonte não-bariônica	46
4.2	Vínculos de Experimentos de Estados Ligados do Nêutron	50
4.3	Experimentos de Espalhamento de Nêutrons e Interações de Curtas Distâncias Anômalas	52
5	Vínculos Sobre Teorias Extra Dimensionais em Experimentos de Barreira Quântica Gravitacional	59
5.1	A Barreira Quântica Gravitacional	61
5.2	Potencial Gravitacional Modificado em Branas com Espessura	66
5.2.1	O Potencial Gravitacional Anômalo Produzido pelo Espelho	68
5.2.1.1	Potencial Interno	69
5.3	Novos Vínculos	72
6	Estrutura Não-Bariônica Como Fonte do Campo Gravitacional em Experimentos de Polarizabilidade do Nêutron	76
6.1	Polarizabilidade do Nêutron	77
6.2	Potencial Gravitacional Gerado pelo Campo Elétrico	78
6.2.1	Amplitude de Espalhamento Modificada	82
6.2.2	Seção de Choque	85
7	Novos Vínculos da Reflectometria de Nêutrons	90

7.1 Reflectometria de Nêutrons	91
7.2 Novos Vínculos da Reflectometria de Nêutrons	94
8 Conclusões	98
9 Apêndices	101
Apêndice A	101
A Expansão Pós-Newtoniana	101
Apêndice B	108
Expansão da Função de Airy	108
Apêndice C	110
Cálculos da Seção de Choque Total do Nêutron	110
Bibliografia	115

1 Introdução

Com a formulação teórica da Física Clássica, por volta do século XVII, principalmente baseada nas ideias de Galileu e Newton, a humanidade pôde vislumbrar a beleza e riqueza das leis que governam o universo. O trabalho de Newton sugeria que, apesar de toda a complexidade, o universo parece ser regido por leis relativamente simples, que somos capazes de entender e formular. O próprio Einstein disse que “*o eternamente incompreensível no universo é o fato de ele ser compreensível*” [1]. Um dos aspectos de simplicidade que os físicos buscam no universo são as unificações, elas trazem ordem e beleza na descrição de fenômenos que antes pareciam desconexos. Um dos exemplos mais famosos de unificação ocorreu já no século XVII quando Newton descobriu que os corpos celestes interagem gravitacionalmente da mesma forma que os objetos na Terra, criando assim a Lei da Gravitação Universal. Essa unificação deu à humanidade uma poderosa ferramenta! O universo agora parecia se abrir para os nossos olhos tão limitados. O movimento de asteroides, cometas, planetas, etc., podiam ser então mapeados com uma precisão surpreendente. Como dito acima, a unificação traz uma ordem, por isso que quando Einstein concebe a sua Teoria da Relatividade Geral no início do século passado, houve um esforço para tentar unificá-la com o já conhecido Eletromagnetismo de Maxwell. Unificar as duas interações conhecidas na época de Einstein, a gravidade e o eletromagnetismo, seria um grande trunfo para qualquer cientista. O próprio Einstein tentou unificá-las até seu último dia de trabalho no Instituto de Estudos Avançados em Princeton, mas não conseguiu.

É nesse esforço que um físico-matemático por nome de Kaluza propõe uma solução para unificar a Relatividade Geral com o Eletromagnetismo [2]. Sua teoria consistia em um universo com uma dimensão espacial extra, ou seja, o universo agora seria penta dimensional. Essa extensão possibilitou deduzir as equações de Einstein e as do Eletromagnetismo a partir de uma métrica penta dimensional e de um universo que é vazio na quinta dimensão. Com a condição cilíndrica, Kaluza justificou a ausência dessa quinta dimensão para os nossos sentidos quadrimensionais. Anos posteriores, Klein introduziu

a ideia de compactação na teoria de Kaluza [3]. Agora, a quinta dimensão teria a topologia de um círculo, e esse círculo deveria ter o comprimento de Planck, cerca de 10^{-35} m. Com esse tamanho ínfimo, não haveria qualquer chance de detectarmos a dimensão extra, proposta pela então teoria de Kaluza-Klein.

Motivados pelo problema de Hierarquia, em 1998, N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos e G. Dvali, propuseram um modelo de dimensões extras (modelo ADD) [4]. Com a noção de que agora temos 4 forças fundamentais, a saber, a gravidade, a eletromagnética e as forças fraca e forte, físicos se perguntaram o porquê de a força da gravidade ser muito mais fraca do que as demais forças. Podemos ver essa disparidade no nosso dia a dia no fato de que um ímã na nossa geladeira não cai com a atração do planeta. Na escala subatômica a força da gravidade é tão desprezível que não é mencionada. Para termos uma ideia do quão fraca é a gravidade frente as outras forças, considere um átomo de Hidrogênio, onde o próton e o elétron interagem via força de Coulomb. A força gravitacional é cerca de 10^{39} vezes *menor* do que a força coulombiana. Outro fato desconcertante é que caso a força que liga as duas partículas fosse a gravitacional, o raio de Bohr correspondente deveria ser aproximadamente 10^{13} anos luz, que é maior do que o raio do universo observável [5]! Isso serve para nos mostrar o abismo que existe entre a gravidade e as demais forças. O modelo ADD traz uma explicação para essa disparidade teorizando que todas as forças, com exceção da gravidade, estão presas, confinadas no espaço de três dimensões espaciais (a 3-brana) enquanto que a gravidade poderia escapar e acessar as dimensões superiores [4]. Esse acesso exclusivo da gravidade geraria um efeito de diluição, fazendo com que ela se tornasse mais fraca do que as outras forças, para longas distâncias.

Por outro lado, uma previsão importante desse modelo reside no fato de que a gravidade sofre uma amplificação para curtas distâncias. Do ponto de vista fenomenológico, essa previsão é riquíssima. Caso haja sinais de violação da lei gravitacional de Newton em curtas distâncias, isso poderia ser por causa de dimensões extras. Outro fato interessante do Modelo ADD é que a previsão dele sobre o raio da dimensão extra poderia ser da ordem do milímetro, o que é muito maior do que o comprimento de Planck. Sendo

assim, o Modelo ADD passou a ser conhecido como um modelo de dimensão extra de grande escala e trouxe uma motivação enorme aos físicos que estudavam possíveis modificações da lei do inverso do quadrado de Newton em curtas distâncias. Várias frentes de pesquisas se desenvolveram com o intuito de achar tais sinais anômalos [6]. Podemos citar testes feitos com balanças de torção [6] [7] [8] [9], efeito Casimir [10], testes com espectroscopia [11] [12], Interferometria de nêutrons [13] [14], entre outros.

No capítulo 4 daremos destaques aos experimentos com nêutrons na busca por modificações da gravidade em curtas distâncias. Como veremos, o nêutron se mostrou muito útil se quisermos estudar o quanto a gravidade modificada pode atuar na escala das interações subatômicas. Por ser eletricamente neutro, o nêutron tem a capacidade de penetrar mais profundamente na matéria [15] [16]. Assim, a interação gravitacional anômala entre ele e os núcleos (por diversas vezes, pesados) pode ser teorizada e o controle sobre as demais interações pode facilitar o objetivo de buscar sinais de violações.

Alguns experimentos com nêutrons são estudados neste trabalho. O primeiro que trataremos está no capítulo 5 e é o experimento de estados ligados do nêutron. Ao fazer nêutrons passarem por uma fenda criada por um espelho na parte inferior e um absorvedor na parte superior, as partículas incidentes colidem com o espelho diversas vezes até atingirem um detector, posicionado logo após o espelho. Observou-se que a contagem de nêutrons que chegavam no detector dependia de valores específicos da altura da fenda, de uma forma diferente da previsão clássica [17] [18] [19] [20]. Para entendermos esse fenômeno devemos levar em consideração o potencial gravitacional na descrição quântica do nêutron. O nêutron sente o campo gravitacional terrestre; ao adentrar na fenda criada pelo espelho e o absorvedor, ele cai parabolicamente e atinge o espelho. Como a energia dos nêutrons é muito pequena (comparada com o potencial interno do espelho) os nêutrons não conseguem penetrar o espelho e, portanto, são perfeitamente refletidos. O campo gravitacional atua sobre o nêutron fazendo ele colidir com o espelho várias vezes antes de chegar ao detector. Nesse sistema, portanto, é criada uma configuração de estado ligado. Sendo assim, as energias dos estados acessíveis para o nêutron estão discretizadas, de maneira similar ao que acontece

no problema de uma partícula presa entre barreiras de potencial. Essas energias discretizadas se traduzem em alturas permitidas que o nêutron pode alcançar após a reflexão com o espelho. Como veremos, essas alturas correspondem aos pontos de retorno clássicos. O cenário extradimensional pode ser introduzido no contexto desse experimento por meio da adição do potencial gravitacional modificado gerado pelo espelho sobre o nêutron [21]. A hipótese é que esse potencial perturbará os estados ligados do nêutron, gerando correções nas alturas permitidas. Essa perturbação pode ser estimada por meio do valor médio da energia potencial anômala avaliado nos autoestados originais do nêutron. Os vínculos são determinados comparando essa previsão teórica com os valores experimentais das alturas. É importante destacar que nessa análise, consideramos que a brana no espaço extradimensional possui uma espessura σ . Devido à espessura não-nula, pode-se calcular o potencial gravitacional interno do espelho sem os problemas de divergências, inerentes aos cenários de branas sem espessura. Por meio dessa nova contribuição, mostramos que é possível obter mais um vínculo, agora sobre uma escala de energia efetiva, Λ , que depende da espessura da brana e do número de dimensões extras.

No capítulo 6 veremos que é possível explorar um experimento dedicado à determinação da polarizabilidade do nêutron na busca por limites experimentais de desvios do comportamento usual da gravitação em domínios curtos. [22] [23] [24] [25]. Como sabemos, o nêutron é composto de quarks. Dada a sua constituição interna, foi teorizado [26] que ele poderia ter um momento de dipolo elétrico induzido em resposta a um campo elétrico muito intenso (cerca de 10^{23}V/m , na vizinhança de um núcleo pesado [23]). Esse momento de dipolo seria dado pela polarizabilidade do nêutron, α_n . Schmiedmayer conseguiu medir o primeiro valor não-nulo da polarizabilidade do nêutron em 1991 [23], demonstrando que de fato este reage a um campo elétrico por meio de um momento de dipolo não-nulo. Esse experimento pode ser utilizado para se investigar a interação gravitacional do nêutron com uma fonte não-bariônica, a saber, a energia do campo elétrico produzido por um núcleo pesado. Isso é possível porque ambas interações — a que descreve a polarizabilidade e a gravitacional — dependem do

quadrado da intensidade do campo elétrico. Um aspecto interessante dessa discussão é a possibilidade de investigarmos o comportamento de potenciais pós-newtonianos em laboratório, através de possíveis efeitos adicionais na interação nêutron-núcleo. A teoria da Relatividade Geral prevê que toda forma de energia pode curvar o espaço-tempo; a própria pressão também teria essa capacidade. Assim, a análise desse experimento permite impor vínculos experimentais para certos parâmetros do formalismo PPN (parameterized post-Newtonian formalism), que estão associados com a medida da capacidade da pressão e da energia interna de produzirem gravitação. Para uma escala de distância inferior a $10^{-12}m$, os vínculos obtidos aqui serão mais restritivos do que os limites extraídos de outros experimentos como o polarímetro Mott para experimentos de Violação-T, cuja sigla é MTV-G (a letra “G” refere-se à gravidade), espectroscopia [11] [12] e a da interferometria de nêutrons [14].

No capítulo 7 estudaremos experimentos de Reflectometria, que são usados para determinar o comprimento de espalhamento do nêutron nas interações com núcleos pesados via força nuclear forte [27] [28] [29] [30]. Nesse experimento, nêutrons caem de certa altura e atingem um espelho posicionado abaixo. Caso os nêutrons caiam de uma altura superior a um certo patamar denominado *altura crítica*, os nêutrons conseguiram penetrar o espelho. Uma forma de determinar a altura crítica se dá por meio da medida da reflectividade [28], que é a taxa com que o nêutron refletido pelo espelho atinge o detector que está ao lado. Elevando a altura da queda, os nêutrons adquirem energia maior do que o potencial óptico do espelho e começam a penetrar o espelho. Nesse caso, a taxa de reflexão cai e torna-se possível determinar a altura crítica. O grande trunfo da reflectometria é que, por meio da medida precisa da altura crítica, pode-se inferir o valor do potencial óptico do espelho e, conseqüentemente, determinar o comprimento de espalhamento relativo à interação do nêutron com o núcleo que forma o espelho. Para estudar os efeitos de dimensões escondidas sobre a taxa de reflexão, consideramos o cenário de uma brana com espessura não-nula. No cenário de dimensões extras, o potencial óptico do espelho sentido pelo nêutron será influenciado pela interação gravitacional anômala entre o nêutron e os átomos que constituem o espelho. No

modelo de branas com espessura podemos calcular explicitamente o termo anômalo, contornando problemas de divergência. A modificação do potencial óptico dependerá de uma escala de energia efetiva Λ da nova interação, que por sua vez é definida em termos dos parâmetros livres do modelo: a constante gravitacional do espaço maior, a espessura da brana e o número de dimensões extras. A partir dos dados experimentais da reflectometria, estabelecemos novos vínculos para λ . Como veremos, esses vínculos são comparáveis, em ordem de magnitude, com os limites experimentais extraídos de testes espectroscópicos do Hélio muônico, analisados recentemente [12].

2 Revisão Teórica

Neste capítulo trataremos das motivações que levaram ao surgimento de teorias extradimensionais na Física. Falaremos da contribuição de Theodor Kaluza, pioneiro nesse campo de estudo concebendo o primeiro trabalho extradimensional que incorporava a Relatividade Geral de Einstein com o Eletromagnetismo de Maxwell, assim como os aperfeiçoamentos subsequentes vindos de Klein. Também analisaremos um modelo extradimensional muito conhecido, o Modelo ADD e suas implicações, como a localização da matéria e as previsões desse modelo para a gravitação.

2.1 A Teoria de Kaluza-Klein

A primeira teoria extradimensional no contexto de unificação que temos conhecimento surge em 1921 pelo físico-matemático Theodor Kaluza [2]. Sua teoria tinha por motivação unificar a recente Teoria Geral da Relatividade de Einstein, publicada 6 anos antes, com a teoria do eletromagnetismo sintetizada por Maxwell cerca de 50 anos antes. Essa unificação das teorias motivou o próprio Einstein na busca por uma teoria que contemplasse esses dois campos, entretanto, sem êxito.

A teoria de Kaluza trazia um novo elemento, a adição de mais uma dimensão (espacial) no espaço-tempo, que denotaremos por z . Logo, podemos representar o novo espaço-tempo $(4+1)$ -dimensional sendo (x^μ, z) , onde $\mu = 0, 1, 2, 3$.

Esse espaço-tempo maior poderia ser descrito seguindo o formato 4-dimensional já conhecido, mas agora para 5 dimensões. A equação de campo de Einstein nessa nova configuração seria [31]

$$G_{AB} = \kappa T_{AB},$$

onde $A, B = 0, 1, 2, 3, 4$; κ é uma constante de acoplamento, T_{AB} é o tensor momento-energia e o tensor de Einstein penta dimensional é descrito como $G_{AB} = R_{AB} - Rg_{AB}$,

onde R_{AB} é o tensor de Ricci, R é o escalar de curvatura e g_{AB} é a métrica desse espaço-tempo penta dimensional.

Inicialmente, o universo na dimensão extra, z , foi suposto ser vazio de campos e matéria. Logo, ele seria composto apenas de geometria, o que implica

$$G_{AB} = R_{AB} = 0. \quad (2.1)$$

Com a métrica agora “expandida”, Kaluza pôde incorporar o eletromagnetismo na métrica por meio do quadri-potencial, A_μ . Assim, a métrica nesse novo espaço-tempo penta dimensional proposta por Kaluza contém a parte quadridimensional da métrica conhecida, $g_{\mu\nu}$, o potencial eletromagnético e um campo escalar ϕ , organizados da seguinte forma^[1]:

$$g_{AB} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + \kappa^2 \phi^2 A_\mu A_\nu & \kappa \phi^2 A_\mu \\ \kappa \phi^2 A_\nu & \phi^2 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Uma condição imposta por Kaluza, que simplifica bastante os cálculos das quantidades tensoriais nesse espaço-tempo de 5 dimensões, é a chamada *Condição Cilíndrica* ^[31]:

$$\frac{\partial g_{AB}}{\partial z} = 0. \quad (2.3)$$

A independência da métrica em relação à dimensão extra possui uma motivação observacional; não vemos no nosso universo visível os efeitos de dimensões espaciais adicionais. A exemplo do mundo de *Flatland*^[2], onde todos os habitantes viviam presos em um mundo bidimensional, sem qualquer acesso a uma 3^a dimensão, nossos “sentidos quadridimensionais” parecem excluir qualquer extensão do universo em outras direções, pelo menos, acima de uma certa escala. Com essa condição, o novo panorama concebido por Kaluza consiste do espaço-tempo usual, quadridimensional, como um subconjunto do espaço-tempo maior.

¹A assinatura de $g_{\mu\nu}$ é $(+ - - -)$. Aqui também adotamos $c = \hbar = 1$.

²*Flatland: A Romance of Many Dimensions*, escrito por Edwin Abbott Abbott em 1884.

O tensor de Ricci definido para esse novo espaço-tempo fica [31]

$$R_{AB} = \partial_C \Gamma_{AB}^C - \partial_B \Gamma_{AC}^C + \Gamma_{CD}^C \Gamma_{AB}^D - \Gamma_{BD}^C \Gamma_{AC}^D, \quad (2.4)$$

onde os símbolos de Christoffel em 5 dimensões são

$$\Gamma_{AB}^C = \frac{1}{2} g^{CD} (\partial_A g_{DB} + \partial_B g_{DA} - \partial_D g_{AB}). \quad (2.5)$$

Impondo a condição cilíndrica em (2.4) e (2.5), vemos que a equação para o tensor de Ricci (equação 2.1) nos dará três equações conhecidas [32]

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= \frac{\kappa^2 \phi^2}{2} T_{\mu\nu}^{EM} - \frac{1}{\phi} (\nabla_\mu (\partial_\nu \phi) - g_{\mu\nu} \square \phi), \\ \nabla^\mu F_{\mu\nu} &= -3 \frac{\partial^\mu \phi}{\phi} F_{\mu\nu}, \\ \square \phi &= \frac{\kappa^2 \phi^3}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \end{aligned}$$

onde $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - R g_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein 4-dimensional e $T_{\mu\nu}^{EM} = g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} / 4 - F_\gamma^\alpha F_{\rho\alpha}$ é o tensor momento-energia eletromagnético, também em 4 dimensões, e $\square = g_{\mu\nu} \nabla^\mu \nabla^\nu$, onde ∇^μ é a derivada covariante.

Considerando o campo escalar constante, de valor $\phi = 1$, obtemos precisamente as equações de Einstein e Maxwell para o eletro-vácuo!

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= \kappa T_{\mu\nu}^{EM}, \\ \nabla^\mu F_{\mu\nu} &= 0. \end{aligned}$$

Esse “milagre”, como foi referido, demonstrou que era possível uma unificação entre essas duas teorias a partir de um universo em 5 dimensões.

2.1.1 Mecanismo de Compactação de Klein

Cerca de meia década depois de Kaluza formular sua teoria, o matemático Oscar Klein propôs o que ficou conhecido como *Mecanismo de Compactação de Klein* [3], no qual assumiu que a nova coordenada espacial da recente teoria de Kaluza, z , deveria ter a topologia de um círculo (veja a Fig. 2.1).

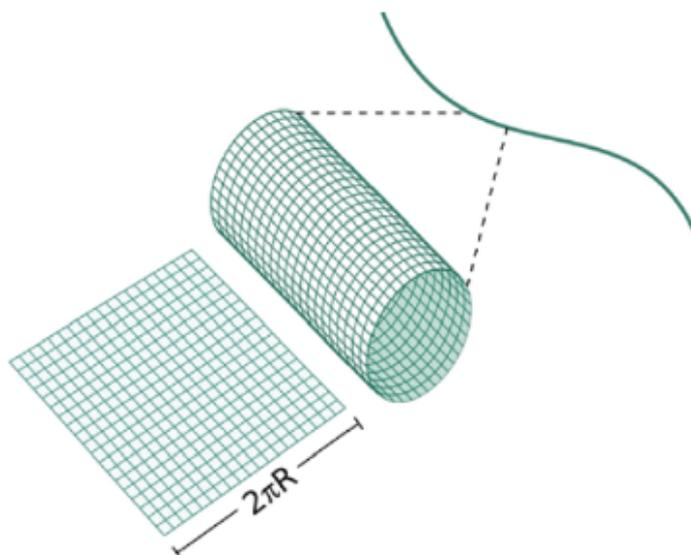


Figura 2.1: Compactação da dimensão extra introduzida por Klein. Nessa compactação a dimensão extra seria infinita nas coordenadas quadridimensionais usuais e finita na coordenada z , onde seu comprimento é $2\pi R$, sendo R o raio da dimensão. Figura retirada da referência [33].

Para um campo escalar qualquer, descrito por $\phi(x^\mu, z)$, se considerarmos que a topologia da quinta dimensão é de um círculo, poderemos escrever

$$\phi(x^\mu, z) = \phi(x^\mu, z + 2\pi R),$$

onde R é o raio da quinta dimensão³.

Com esse mecanismo, podemos supor que qualquer campo que dependa de z será periódico em relação a essa coordenada. Matematicamente, podemos expandir esses

³É comum o uso da expressão *Raio de Compactação* para R . Essa designação será usada nesse trabalho.

campos e a métrica numa série de Fourier da seguinte forma

$$\phi(x^\mu, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi^{(n)}(x^\mu) e^{\frac{inz}{R}}, \quad (2.6)$$

$$g_{\mu\nu}(x^\mu, z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_{\mu\nu}^{(n)}(x^\mu) e^{\frac{inz}{R}}. \quad (2.7)$$

Observe que para o modo zero de Fourier, $n = 0$, o campo e a métrica independem da dimensão extra.

Uma forma de ilustrarmos o efeito de uma dimensão adicional sobre um determinado campo escalar é utilizando a equação de Klein-Gordon. Assumindo que esse campo escalar não possui massa, que o cilindro da compactação acima é homogêneo e a métrica do espaço-tempo é plana, teremos

$$\square_{(5)}\phi = 0,$$

onde $\square_{(5)} = \square + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ é o d'Alembertiano em 5 dimensões.

Utilizando o método de separação de variáveis

$$\phi(x^\mu, z) = \chi(x^\mu) \varphi(z),$$

é fácil demonstrar [13] que a parte quadridimensional do campo escalar, ou seja, $\chi(x^\mu)$, apresentará um conjunto de valores permitidos para a massa, isto é, satisfará a equação de campo do seguinte tipo:

$$\square\chi^{(n)}(x^\mu) = m_n^2\chi^{(n)}(x^\mu),$$

onde

$$m_n = \frac{n}{R},$$

com n inteiro positivo. Essa condição sobre a massa segue da periodicidade do campo na direção extra.

Assim, além do modo zero ($n = 0$ na equação 2.6), também teremos um conjunto de modos para o campo escalar denominados comumente de *Modos Kaluza Klein* (ou Modos KK) para $n > 0$. A energia desses modos excitados é da ordem da massa de repouso, $m_n = n/R$. Isso configura uma discretização na energia de repouso, fazendo com que os modos superiores (para valores de n maiores) não sejam alcançados a não ser que ultrapassemos determinados patamares de energia (Fig. 2.2). Além disso, pode-se interpretar cada modo de Kaluza-Klein como sendo uma nova partícula, no panorama quadridimensional com massa igual a $m_n = n/R$.

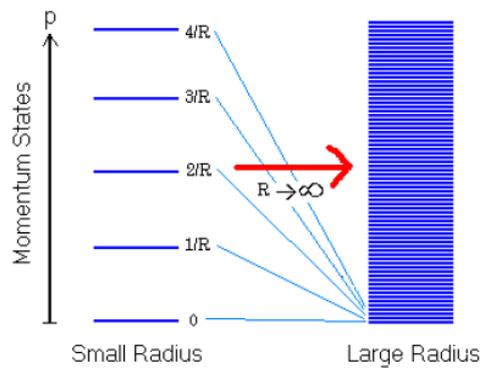


Figura 2.2: Torre de Kaluza-Klein. Distância de separação na escala de energia proporcional ao inverso de R . No limite $R \rightarrow \infty$ os modos se aproximam de um contínuo. Figura retirada da referência [34].

Algo que foi logo notado por Klein é que, se conseguíssemos alcançar uma energia da ordem da massa de repouso dos modos para $n > 0$, ou seja, $E \sim R^{-1}$, poderíamos finalmente detectar um efeito da dimensão extra. Para não entrar em contradição com o fato de que nenhum sinal de dimensão extra havia sido detectado até então, Klein assumiu que a escala de comprimento do raio de compactação deveria ser da ordem do comprimento de Planck [32], ou seja

$$l_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \sim 1,6 \times 10^{-35} m,$$

onde \hbar é a constante reduzida de Planck, G é a constante da gravitação universal e c é a velocidade da luz.

Essa escolha da escala de comprimento faz com que a massa dos modos KK sejam da ordem da massa de Planck, o que faz com que as energias de cada modo atinjam valores absurdos de energia, da ordem de 10^{19}GeV . Isso equivale a aproximadamente 10^{16} vezes maior que a escala de energia atual dos aceleradores de partículas⁴. Com isso, os efeitos de uma hipotética quinta dimensão sobre o nosso mundo quadridimensional ganhavam o status de inalcançável, dada a limitação experimental da época. Isso, claro, fez com que a recém criada teoria de Kaluza-Klein perdesse atenção. Contudo, décadas depois, um novo modelo de dimensões extras surgia atraindo grande interesse por sugerir um raio de compactação que, em princípio, poderia ser de uma escala de comprimento alcançável em laboratório. Esse modelo trouxe novamente a atenção de físicos para uma teoria extradimensional e é sobre esse modelo que falaremos a partir de agora.

2.2 O Modelo ADD

Um dos modelos de dimensões extras mais conhecidos é o chamado Modelo ADD⁵. Uma de suas principais vantagens foi fornecer um modelo extradimensional com dimensões extras compactas cujo comprimento é muito maior do que foi proposto por seus precursores (seção anterior), podendo, em princípio, chegar à escala submilimétrica [4].

O modelo ADD teve um papel significativo num conhecido problema, chamado de Problema da Hierarquia [36], no qual nos deparamos com a enorme disparidade entre as duas escalas fundamentais da natureza, a escala eletrofraca $m_{EW} \sim 10^3\text{GeV}$ e a escala de Planck, $M_{Pl} \sim 10^{18}\text{GeV}$, onde os efeitos quânticos da gravidade se tornariam relevantes. A diferença entre estas escalas é tão considerável que gerou um grande esforço por partes de físicos teóricos na busca de teorias e mecanismos a fim de explicar tal disparidade. A busca também se deu experimentalmente, uma vez que, por meio dela, poderia-se garantir qual mecanismo seria o mais adequado.

⁴O nível atual de energia dos aceleradores é de 13 TeV [35].

⁵Em homenagem a Arkani-Hamed, Savas Dimopoulos e Gia Dvali.

Ainda do ponto de vista experimental, temos outra grande diferença entre essas escalas fundamentais; as interações da escala eletrofraca já foram confirmadas em distâncias da ordem de m_{EW}^{-1} , enquanto que a interação gravitacional tem sido testada apenas na escala submilimétrica [4]. Em razão do embasamento experimental da escala fraca, os autores do Modelo ADD propuseram, então, que esta deveria ser a escala fundamental de curtas distâncias da natureza. Nesse novo modelo, a força da gravidade poderia ser descrita com a introdução de dimensões extras compactas (finitas) de raio R . A nova escala extradimensional $M_{Pl(4+n)}$ é tomada como sendo $\sim m_{EW}$ a fim de resolver o problema da Hierarquia.

Assumindo que essa nova escala extradimensional $M_{Pl(4+n)} \sim m_{EW}$, podemos estimar o valor de R compatível com a nova escala fundamental de Planck [4]:

$$R \sim 10^{\frac{30}{n}-17} cm \left(\frac{1TeV}{m_{EW}} \right)^{1+2/n}.$$

Observe que essa relação para o raio de compactação exclui o caso em que temos apenas uma dimensão extra. Para esse caso, o raio teria que ser $R \sim 10^{11}m$, uma distância da ordem do sistema solar. Nesse caso, um desvio da gravitação já poderia ter sido detectado. No entanto, para duas dimensões extras, $n = 2$, o raio de compactação pode estar logo abaixo do milímetro! Para essa escala de comprimento há cada vez mais avanços nos estudos da gravidade, como os experimentos usando balança de torção [6], interferometria [14] e quantum bouncer [21] que vamos tratar nos próximos capítulos.

Uma coisa muito importante que devemos levar em consideração é que as forças do Modelo Padrão têm sido estudadas na distância da escala fraca, m_{EW} , o que não ocorre com a gravitação, como dito acima. Isso levou aos autores do Modelo ADD a teorizar que as partículas do modelo padrão não alcançam a dimensão extra livremente [4]. Estas partículas e interações estariam confinadas numa subvariedade. A única interação que poderia escapar para esse espaço extradimensional maior seria a gravidade, por meio do gráviton. Um aspecto importante desse modelo é o processo de confinamento da matéria e dos campos nessa subvariedade. Trataremos desse aspecto nas próximas

subseções.

2.2.1 Confinamento de Matéria

Como dito acima, o modelo ADD traz um novo cenário sobre a dinâmica das partículas e campos do modelo padrão; ele reside num confinamento da matéria conhecida no espaço-tempo de $(3 + 1)$ dimensões, enquanto que a gravidade, por meio do gráviton, é a única interação que escaparia para o espaço maior extradimensional. Essa ideia de confinamento das partículas é anterior ao próprio modelo ADD; ela surge com Rubakov e Shaposhnikov 15 anos antes [37]. Nesse trabalho precursor, os autores concebem um mecanismo que é capaz de confinar a matéria ordinária em uma hipersuperfície de um espaço maior. Nessa configuração, as partículas só poderiam escapar na direção extra apenas por meio de processos envolvendo energias altíssimas.

O mecanismo de aprisionamento da matéria pressupõe um campo escalar habitando todo o espaço pentadimensional. A ação correspondente deste campo escalar é dada por

$$S = \int \left[\frac{1}{2} (\partial_A \varphi)^2 - V(\varphi) \right] d^4 x dz, \quad (2.8)$$

onde $A = 0, \dots, 4$ e $V(\varphi)$ é o potencial que descreve a autointeração desse campo.

Um exemplo de um potencial que ilustra um aprisionamento como citado acima, tem a seguinte forma:

$$V(\varphi) = \frac{\lambda^2}{8} (\varphi^2 - \nu^2)^2. \quad (2.9)$$

Na figura 2.3, vemos o gráfico do potencial em função do valor do campo. Os mínimos de energia encontram-se em $\pm \nu$ e, em $\nu = 0$ temos um máximo instável.

Usando a lagrangeana da ação (Eq. 2.8), encontramos, via equações de Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_A \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_A \varphi)} \right) = 0,$$

a equação de campo que governa o comportamento de φ em um espaço-tempo de

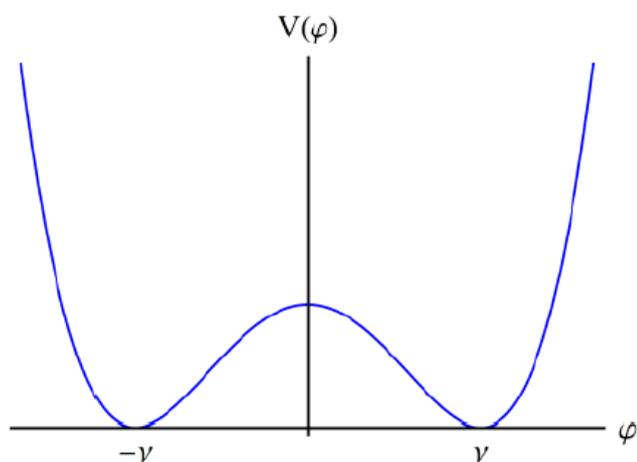


Figura 2.3: Potencial com dois mínimos separados por um estado de falso vácuo. Figura retirada de [33].

Minkowski com cinco dimensões.

Uma solução estacionária que obtemos dessa equação, admitindo que o campo depende apenas de z , tem a seguinte forma:

$$\varphi_0(z) = k \tanh\left(\frac{\lambda v z}{2}\right). \quad (2.10)$$

Essa solução, conhecida como Parede de Domínio [37] (Fig. 2.4), é por vezes chamada de Kink. Ela separa os dois estados de vácuos do campo φ em regiões assintóticas. No centro da parede, o campo é encontrado no estado de falso vácuo.

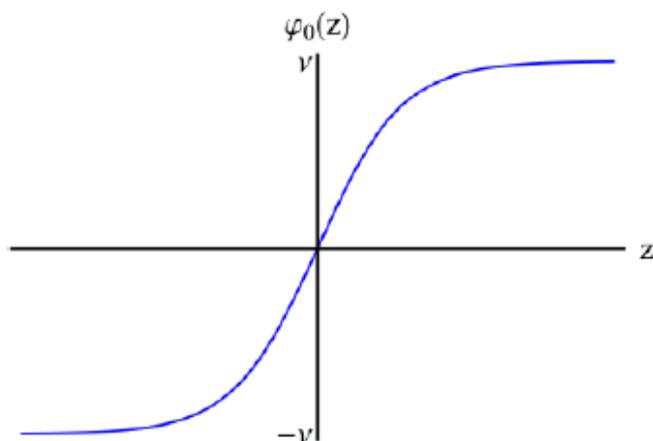


Figura 2.4: Solução do tipo parede de domínio. Figura retirada de [33].

A densidade de energia dessa parede de domínio, \mathcal{H}_0 , pode ser obtida integrando a densidade da hamiltoniana na dimensão extra, z . Uma vez que o espaço é tido pentadimensional, essa densidade de energia terá dimensão de energia por 4-volume.

Como \mathcal{H}_0 é dado em termos da lagrangiana via $\mathcal{H}_0 = \Pi\dot{\varphi} - \mathcal{L}$, onde $\Pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}$ é o momento canonicamente conjugado, podemos obter uma expressão para a densidade de energia a partir da solução estacionária (Fig. 2.5) que obtemos anteriormente (Eq. 2.10)

$$\mathcal{H}_0 = \left(\frac{\lambda\nu^2}{2}\right)^2 \cosh^{-4}\left(\frac{\lambda\nu z}{2}\right).$$

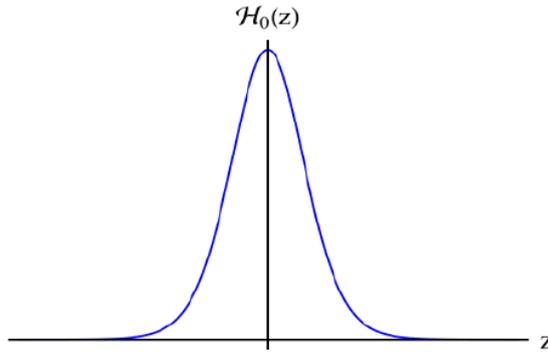


Figura 2.5: Densidade de energia da parede de domínio. Figura retirada de [33].

Com essa densidade de energia, integrando sobre a dimensão extra, obtemos a energia da parede de domínio por unidade de volume (tridimensional):

$$\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}_0 dz = \frac{2\lambda\nu^3}{3}.$$

Podemos extrair informações valiosas desses resultados. Primeiramente, vemos que há uma concentração da energia em torno do ponto $z = 0$ [37] (Fig. 2.5), e essa concentração depende da quantidade λ que, a partir da Eq. 2.10, vemos que está relacionada com o inverso da espessura da parede. Essa solução pode ser interpretada como um modelo, da teoria de campos, de uma brana com espessura. No limite em que $\lambda \rightarrow \infty$ e σ é mantido constante, a solução representaria a chamada 3-brana infinitamente fina,

onde a matéria ficará concentrada.

Para entendermos isso, vamos adicionar os férmions nesse contexto extradimensional. Levando em conta as 5 dimensões espaciais, a equação de campo de Dirac pentadimensional [38], que descreve um espinor pentadimensional livre (Ψ) tem a seguinte forma:

$$(i\Gamma^A \partial_A - m) \Psi = 0,$$

onde m é a massa do férmion e as matrizes Γ^A satisfazem a mesma álgebra das matrizes de Dirac 4×4

$$\Gamma^A \Gamma^B + \Gamma^B \Gamma^A = 2g^{AB}.$$

O confinamento dos férmions no interior da parede pode ser realizado por meio de uma interação do tipo Yukawa entre os férmions e o campo φ .

$$S = \int (i\bar{\psi}\Gamma^A \partial_A \psi - m\bar{\psi}\psi - h\varphi_0 \bar{\Psi}\Psi) d^4x dz,$$

onde h é uma constante de acoplamento e φ_0 é a solução da barreira já mencionada (Eq. 2.10).

Essa equação pode ser simplificada para o caso em que temos um férmion de massa nula, $m = 0$. As equações de movimento que obtemos em seguida são

$$i\Gamma^z \partial_z \Psi + i\Gamma^\mu \partial_\mu \Psi - h\varphi_0 \Psi = 0.$$

A partir do método de separação de variáveis, escrevemos o espinor Ψ em termos do espinor quadridimensional (ψ) multiplicado por uma função f que só depende da dimensão extra, $\Psi = \psi(x^\mu) f(z)$. As equações para f e ψ se separam, introduzindo-se uma constante m que pode ser interpretada como a massa do espinor quadridimensional. Por sua vez, a equação para a função f é dada por [13]:

$$\frac{df(z)}{dz} = (m - h\varphi_0) f(z). \quad (2.11)$$

Para o caso do férmion sem massa (também chamada de modo zero), temos

$$\frac{df(z)}{dz} = -h\varphi_0 f(z).$$

A solução dessa última equação já é conhecida, resultando numa expressão para o perfil extradimensional do espinor sem massa

$$f(z) = \exp\left(-h \int_{z_0}^z \varphi_0(z) dz\right).$$

Observe que para z grande essa função cai exponencialmente muito rápido. Como o espinor é diretamente proporcional a $f(z)$, isso garante que a localização do férmion se dê dentro da brana, o que faz com que não esteja em desacordo com a física conhecida [33].

Além do fato da localização dos férmions está assegurada para o modo zero, como vimos acima, podemos ainda estudar o caso em que $m \neq 0$ (Eq. 2.11). Dessa equação podemos extrair os possíveis valores para m . Estes valores, assim como os Modos KK, trazem um “espectro” para a massa. Cada modo será proporcional a uma quantidade $m_5 = h\nu$. Caso ν seja muito grande, a energia necessária para saltar de um modo para o outro será gigantesca, evitando, desse modo, violações na física conhecida, como apontado pelo próprio Rubakov [37]. Essa impossibilidade, mais uma vez, garante a fenomenologia da teoria.

Na formulação desse modelo de universo em que a brana é descrita por uma parede de domínio, Rubakov não incluiu a gravitação. Como mencionamos no início do capítulo, isso é feito pelo modelo ADD e é sobre esse aspecto que estudaremos a partir de agora.

2.2.2 Potencial Gravitacional em um Espaço Extradimensional

Conforme dito no início dessa seção, no modelo ADD apenas a gravitação poderia acessar a dimensão extra, explicando, dessa forma, o porquê da sua intensidade menor, quando comparada com as demais forças. Agora vamos analisar essa ideia com mais detalhes.

Primeiramente, consideremos o campo newtoniano clássico \vec{g} , que satisfaz

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{g} = -4\pi G\rho, \quad (2.12)$$

onde G é a constante da gravitação universal e ρ é a densidade de massa.

Com essa equação, podemos calcular o campo gravitacional gerado por uma massa com simetria esférica num cenário de dimensões extras, sem a necessidade de tomá-las compactas; esse próximo passo se dará na próxima subseção. Consideremos uma 2-esfera $S^2(r)$ cujo raio é r em torno de m e uma 3-Bola $B^3(r)$. Integrando a equação anterior sobre essa 3-Bola, teremos [38]

$$\int_{B^3} (\vec{\nabla} \cdot \vec{g}) dV = -4\pi G \int_{B^3} \rho dV.$$

A integral do lado direito dessa equação nos dá simplesmente a massa m , fonte desse campo gravitacional. Já o lado esquerdo pode se desenvolver usando o teorema da divergência:

$$\int_{S^2} \vec{g} \cdot d\vec{A} = -4\pi Gm.$$

O campo, como sabemos, é radial, dependendo apenas de r . Assim, obtemos um campo gravitacional para um espaço de 4 dimensões espaciais cujo comportamento corrobora com o campo gravitacional newtoniano usual:

$$g(r) = -\frac{Gm}{r^2}.$$

Agora, vamos considerar que existem n dimensões espaciais e obter uma expressão para o campo gravitacional nesse novo cenário. Integrando a equação (2.12) sobre a Bola $B^n(r)$ cujo contorno é uma esfera $S^{n-1}(r)$, obtemos [13]

$$\int_{B^n} (\vec{\nabla} \cdot \vec{g}) dV = -4\pi G^{(n)} \int_{B^n} \rho dV.$$

Mais uma vez, utilizando o teorema da divergência, podemos obter uma expressão para o campo gravitacional

$$g(r) = -\frac{2\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) G^{(n)} m}{\pi^{\frac{n-2}{2}} r^{n-1}},$$

onde usamos o fato de que o volume de uma esfera n -dimensional é [13]

$$Vol(S^{n-1}(r)) = \frac{2\pi^{n/2} r^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

O potencial gravitacional, obtido a partir de g é simplesmente

$$\varphi(r) = -\frac{2\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) G^{(n)} m}{\pi^{\frac{n-2}{2}} (n-2) r^{n-2}}.$$

Observe que para 3 dimensões espaciais o potencial gravitacional recai no caso newtoniano. Há, contudo, um comportamento novo: esse potencial modificado pelas n dimensões sofre uma amplificação para curtas distâncias para $n > 3$ e decresce rapidamente para grandes distâncias. Essa previsão é muito rica, do ponto de vista fenomenológico. Sobre esse último aspecto, trataremos mais adiante nesse trabalho.

2.2.3 Potencial Gravitacional com Dimensões Extras Compactas

Até agora consideramos o potencial gravitacional num contexto de dimensões extras sem considerar seu comprimento. Nesta subseção, contudo, as trataremos como finitas, ou compactas. Esta condição foi proposta no Modelo ADD e traz fortes consequências para a teoria e sua fenomenologia.

Nesse novo cenário, tomemos as dimensões extras como sendo compactas cuja topologia é um círculo de raio R . Como a gravidade é a única interação que consegue acessar essa dimensão, sua atuação (ou linhas de campo) se moldará em decorrência da topologia cilíndrica.

Para entendermos melhor essa imagem, suponha um observador próximo a um corpo de massa m (Fig. 2.6). As linhas do campo gravitacional do corpo de massa m percorreram o espaço e chegam ao observador. Contudo, uma vez que a gravidade acessa as dimensões superiores, essas linhas de campo também percorreram a dimensão com essa topologia. Para o observador, a direção dessas linhas não serão apenas radiais, em direção à massa, mas surgirão de outras direções, em decorrência da topologia. Esse observador teria a impressão de que, além da massa que o atrai, há outras massas o atraindo para outras direções. Essas massas adicionais são por vezes denominadas de *Imagens topológicas* (ou massas imagens). Essa denominação reforça o fato de que não são novos corpos com massa atraindo o observador, na verdade é um efeito gerado pela topologia que o espaço suplementar possui.

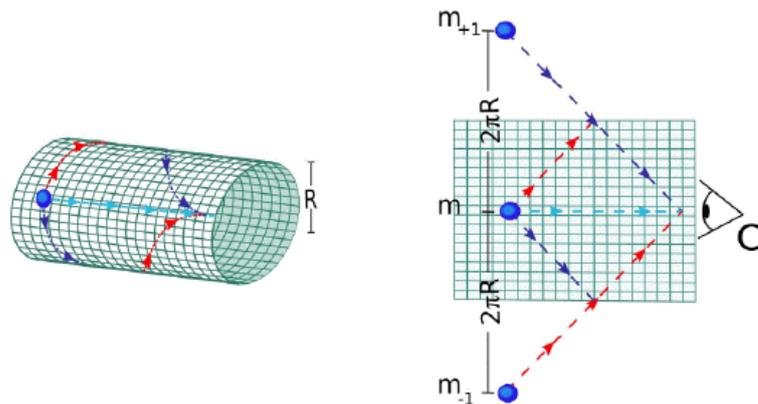


Figura 2.6: Compactação da dimensão extra (lado esquerdo). Do lado direito temos a dimensão aberta. Do ponto de vista do observador em O, linhas de campo surgirão de massas topológicas, situadas a uma distância de $2\pi R$ da massa original. Figura retirada de [33].

Agora, vamos determinar o potencial gravitacional dentro desse novo panorama. Dada a topologia da dimensão extra, as imagens topológicas ficarão separadas uma

das outras por uma distância $2\pi R$. Caso o observador esteja a uma distância $r \gg R$ ele poderá inferir que existe uma distribuição contínua de imagens topológicas ao longo de uma linha que passa pela massa m . Assim, se tomarmos a Lei de Gauss, podemos obter uma expressão para o potencial que contempla essa distribuição de imagens topológicas. Considerando uma hipersuperfície cilíndrica como mostrada na Fig. 2.7, a Lei de Gauss fica

$$\int \vec{g} \cdot d\vec{A} = -4\pi G^{(5)} M,$$

onde M é a massa total dentro do cilindro, ou seja, a massa m e as massas aparentes (imagens topológicas).

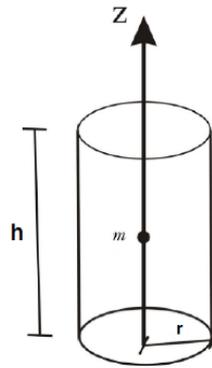


Figura 2.7: Superfície gaussiana que envolve as massas imagens. Figura retirada de [13].

Como as massas imagens estão dispostas periodicamente por $2\pi R$, logo, para altura h , o número dessas massas imagens é simplesmente $h / (2\pi R)$. Assim, podemos escrever essa quantidade de massa total como

$$M = \frac{h}{2\pi R} m.$$

Note também que o campo gravitacional é perpendicular à direção das imagens topológicas, de modo que este campo é puramente radial em relação ao eixo que contém

as massas. Sendo assim, a Lei de Gauss torna-se

$$g(r) \int dA = -4\pi G^{(5)} \frac{h}{2\pi R} m.$$

Como estamos considerando um espaço com uma dimensão extra, temos que a base da superfície cilíndrica gaussiana é, na verdade, uma esfera. Logo, a integral de superfície é simplesmente $4\pi r^2 \times h$, assim

$$g(r) = -\frac{G^{(5)} m}{2\pi R r^2}. \quad (2.13)$$

O potencial gravitacional, por consequência, fica

$$\varphi(r) = -\frac{G^{(5)} m}{2\pi R r}.$$

Identificando a constante da gravitação do espaço maior em termos da constante universal do espaço ordinário como

$$G^{(4)} = \frac{G^{(5)}}{2\pi R},$$

o potencial gravitacional que obtemos num contexto de dimensões extras com topologia cilíndrica toma a forma newtoniana da Lei do inverso do quadrado para o campo gravitacional (Eq. [2.13](#)). Em outras palavras, para longas distâncias, o comportamento usual do potencial gravitacional é recuperado, ou seja,

$$\varphi(r) = -\frac{G^{(4)} m}{r}.$$

Podemos também expandir essa análise para dimensões superiores. Para um cenário em que temos $\delta + 3$ dimensões, onde δ denomina as dimensões extras com topologia toroidal, a Lei de Gauss nos dá a seguinte expressão para o potencial gravitacional, para

longas distâncias ($r \gg R$) [13]

$$\varphi(r) = -\frac{G^{(4)}m}{r},$$

onde faz-se a identificação entre a constante da gravitação do espaço ordinário com a constante da gravitação do espaço maior:

$$G^{(4)} = \frac{\pi^{\frac{\delta+2}{2}}}{2\Gamma\left(\frac{4+\delta}{2}\right)} \frac{G^{(4+\delta)}}{V^{(\delta)}},$$

e $V^{(\delta)} = (2\pi R)^\delta$ é o volume do espaço superior para essa topologia.

Por sua vez, pode-se mostrar que, para uma distância $r \ll R$, o potencial adquire a seguinte forma [13]

$$\varphi(r) = -G^{(4+\delta)} \frac{m}{r^{\delta+1}}.$$

Observe que nessa escala de comprimento temos um desvio do potencial newtoniano conhecido $1/r$. Agora, ocorre uma amplificação do potencial gravitacional. Essa previsão teórica estimulou a busca em laboratórios por modificações da gravitação.

Conforme demonstrado com detalhes em [13], podemos obter um resultado mais exato para o potencial gravitacional onde consideremos os efeitos das imagens topológicas nessa topologia toroidal. De fato, podemos mostrar que para longas distâncias, i.e., $r \gg R$, o potencial pode ser aproximado por:

$$V_{n+4} = -\frac{G^{(4)}M}{r} (1 + \alpha e^{-r/R}), \quad (2.14)$$

onde $\alpha = 2\delta$, para a topologia toroidal

Nessa forma vemos, mais uma vez, que as dimensões extras modificam o potencial gravitacional através de uma correção ao potencial gravitacional já conhecido. Comumente, encontramos na literatura esse resultado referenciado como a parametrização de Yukawa, em homenagem ao físico japonês Hideki Yukawa, que estudou as interações

dos núcleos e sugeriu que essa interação deveria ser do tipo [39] $V(r) = V_0 e^{-\alpha r} / (\alpha r)$, onde $1/\alpha$ pode ser interpretado como o alcance do potencial.

3 *Testes Experimentais da Gravitação em Curtas Distâncias*

Como vimos no capítulo anterior, a introdução de modelos alternativos da gravitação e suas previsões, tais como a modificação da lei do inverso do quadrado em curtas distâncias, acrescentou uma riqueza conceitual muito grande para a física teórica. Com o surgimento do modelo ADD, os físicos tinham uma explicação inusitada para o problema da Hierarquia. Nesse cenário, os campos do modelo padrão estão presos na brana. A única exceção seria o campo gravitacional. Este último poderia escapar para o espaço maior (extradimensional, onde as dimensões são compactas), o que explicaria sua diluição e a consequente redução de sua intensidade em relação às demais forças fundamentais.

Como discutimos no capítulo 2, a gravidade newtoniana possui uma intensidade muito menor do que as demais forças da natureza. Além disso, enquanto que a lei de Coulomb já foi testada em escalas de comprimento da ordem de $10^{-18}m$, a lei de gravitação só foi confirmada até a escala da ordem de dezenas de microns. Essa discrepância levou até a uma conclusão de que a gravidade ainda não foi confirmada em escalas microscópicas! Logo, a previsão do modelo ADD, de um desvio da lei do inverso do quadrado de Newton numa escala de comprimento da ordem submilimétrica, desencadeou uma busca por sinais de uma modificação da gravidade nessa escala de comprimento, como discutiremos nesse capítulo.

Nessa busca, experimentos como balança de torção e Efeito Casimir foram bastante usados na verificação de uma possível violação da gravidade newtoniana em curtas distâncias. Vale lembrar que esse desvio previsto tem sido estudado por diversas frentes, o que inclui a espectroscopia, interferometria, reflectometria, entre outros. Nesse capítulo discutiremos o uso das balanças de torção, o efeito Casimir, a

¹Interações leptônicas, e^+e^- em colisores de altas energias ()

espectroscopia e a Interferometria de nêutrons nessa busca pelo desvio da gravitação newtoniana.

3.1 Parametrizações

Nas últimas décadas, físicos têm usado certas parametrizações para descrever os supostos desvios da força gravitacional. As primeiras buscas por tais desvios usavam uma forma modificada da força newtoniana do tipo [41]

$$F(r) = G \frac{m_1 m_2}{r^{2+\varepsilon}}.$$

Como sabemos, o expoente 2 da equação usual surge por uma questão geométrica, dessa forma, a potência ε não possuía uma motivação teórica forte inicialmente [41].

Hoje, temos duas formas principais de parametrização. A primeira é denominada Parametrização de Yukawa (veja a equação 2.14 do capítulo anterior)

$$V(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r} (1 + \alpha e^{-r/\lambda}), \quad (3.1)$$

onde α é a intensidade do potencial modificado e λ é o alcance desse potencial. Com essa parametrização, podemos estudar os limites sobre esses parâmetros do ponto de vista fenomenológico a partir de um gráfico do tipo $\alpha - \lambda$. Um dos primeiros a usar essa abordagem dos parâmetros foi Talmadge [42].

Outra forma de parametrização é a chamada Lei de Potências, do tipo

$$V(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r} \left(1 + \alpha_N \left(\frac{r_0}{r} \right)^{N-1} \right),$$

onde α_N é uma constante adimensional e r_0 é a escala de comprimento associada com um processo não-newtoniano [6]. Essa parametrização está, claramente, ligada às correções do potencial gravitacional próximo de uma fonte puntiforme provocadas pelas

dimensões extras.

Caso um desvio da lei de Newton seja detectado, seria relevante também verificar como essa violação se comporta, ou seja, sua forma funcional; podemos fazer isso utilizando as parametrizações citadas anteriormente.

A parametrização comumente usada é a de Yukawa (equação 3.1), pois, ela pode descrever correções que podem ser motivadas por diferentes origens físicas. Nas próximas seções vamos entrar em mais detalhes como alguns testes da lei do inverso do quadrado foram realizados.

3.2 Balança de Torção

O uso das balanças de torção para estudar a gravidade não é exclusivo do período posterior ao Modelo ADD. Já antes da previsão teórica desse modelo — de que uma modificação da gravidade poderia ser detectada na escala submilimétrica — físicos as usavam buscando desvios da lei do inverso do quadrado, motivados por uma possível dependência da constante de Newton com a escala de comprimento [6] [40]². Um dos grupos de pesquisa que se destacaram foi o grupo de Washington, o Eötvös-Wash.

3.2.1 Grupo Eötvös-Wash

A figura 3.1 mostra o tipo de balança de torção utilizada pelo grupo Eötvös-Wash [7]. Essa balança de baixas frequências possui um anel de alumínio contendo 10 furos (esses furos também são chamados de “massas faltantes”³). Esse anel é denominado de detector (Fig. 3.1). Abaixo dele há dois discos coaxiais de cobre, também perfurados com furos espaçados. Estes discos são chamados de atratores. Todo esse aparato era suspenso por uma fibra de Tungstênio. O espelho na parte superior da balança atuava

²Para um resumo do uso da balança de torção na busca por limites de uma nova interação, recomendamos a leitura de [40].

³Missing masses.

como colimador. Um laser era emitido sobre o espelho, de onde podia-se obter o valor do torque entre a balança e o atrator.

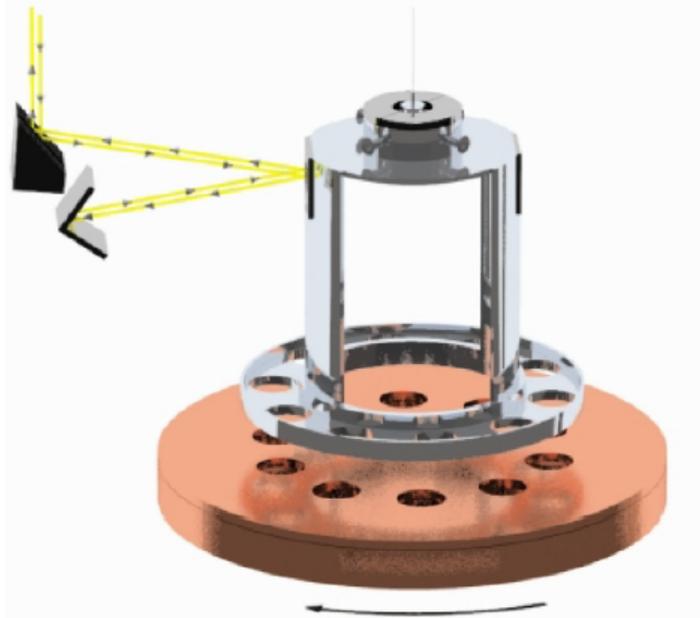


Figura 3.1: Esquema da balança de torção idealizado pelo grupo Eöt-Wahs. A separação discos está exagerada. Os lasers podem ser vistos no canto superior esquerdo e servem para medir o sinal de um torque anômalo. Figura retirada de [43].

Na ausência dos furos, o disco inferior atrairia o pêndulo para baixo sem provocar torção. Contudo, com a presença dos furos, haverá um torque que dependerá da frequência de rotação do disco atrator, ω . Para “cancelar” a gravitação newtoniana sobre o detector, os furos do disco atrator possuíam um tamanho tal que, ao girarem num sentido, geravam um torque newtoniano no sentido contrário ao do detector, compensando a interação newtoniana. Dessa forma, caso um torque fosse detectado, ele seria decorrente de uma nova força de curto alcance atuando gravitacionalmente⁴.

Utilizando a parametrização de Yukawa, constatou-se que, para $\lambda \simeq 1,5\text{mm}$, a intensidade do potencial anômalo deveria ser de $\alpha \leq 0,0079$, para 95% de confiança [7]. Considerando que a modificação tem origem nas dimensões extras, o tamanho do raio de compactação das dimensões extras também foi estimado, sendo $R \leq 160\mu\text{m}$.

⁴Vale ressaltar que efeitos eletromagnéticos também foram compensados de tal maneira a restar uma interação puramente gravitacional no interior do dispositivo.

Para duas dimensões extras, o valor da massa de unificação também foi estimado, $M > 1,7\text{TeV}/c^2$.

Esse experimento foi atualizado em 2020 [9], onde houve grandes avanços na quantidade de massas faltantes (Fig. 3.2), além da escala de comprimento envolvida ser a menor até agora para esse tipo de experimento ($52\mu\text{m}$)



Figura 3.2: Último setup experimental do grupo Eot-Wash realizado em 2020. As massas faltantes nele são muito maiores em número, quando comparada com seus antecessores. Figura retirada de [9].

Nesse experimento, constatou-se que o raio de compactação da dimensão extra deve ser $R < 30\mu\text{m}$.

Podemos ver na figura 3.3 os vínculos sobre uma interação do tipo Yukawa com alguns experimentos utilizando balanças de torção comparando com outros experimentos

Como podemos ver, o teste da balança de torção em 2020 impôs os vínculos mais restritivos sobre os parâmetros de Yukawa para balanças de torção até então.

3.3 Efeito Casimir

Como vimos até agora, ao procurarmos por desvios da lei do inverso do quadrado de Newton em curtas distâncias, podemos testar teorias que predizem esse comportamento

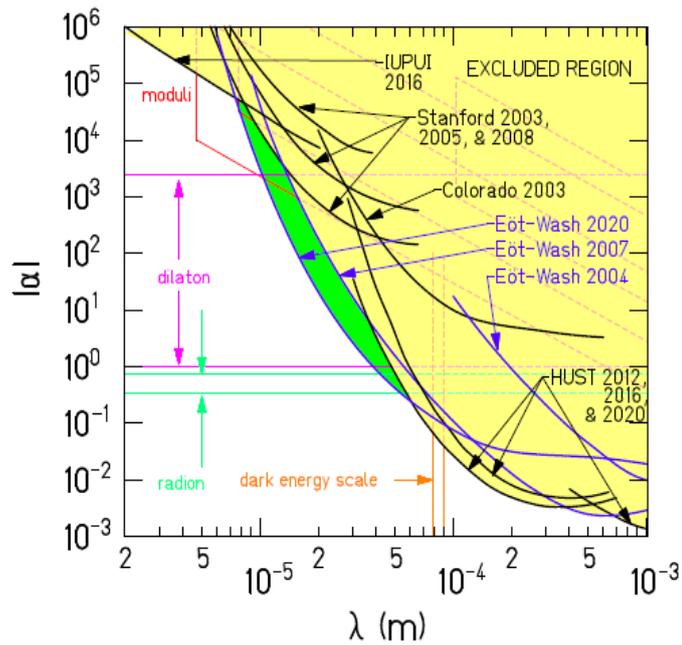


Figura 3.3: Limites experimentais impostos sobre os parâmetros de Yukawa. O experimento de 2020 restringiu ainda mais o valor de α para um λ entre 10^{-5} e 10^{-4} . Figura retirada de [9].

para a gravidade. Um dos testes experimentais usados para esse propósito tinha como fundamento o Efeito Casimir [44]⁵, um efeito que só pode ser explicado do ponto de vista quântico.

Caso coloquemos duas placas metálicas eletricamente neutras próximas uma da outra, a uma distância da ordem de micrômetros, completamente isoladas dentro de uma câmara selada a vácuo, observamos um efeito de *atração* entre elas (Fig. 3.4).

Do ponto de vista clássico, não há motivo para ocorrer uma atração. A força gravitacional newtoniana entre elas, por exemplo, produzirá um efeito de atração desprezível. Logo, os físicos precisaram recorrer a outra explicação para o fenômeno. Foi então que a física quântica, criada décadas antes da descoberta do efeito Casimir, forneceu tal explicação.

Como sabemos, o vácuo quântico não é desprovido de nada, como o nome *vácuo* pode sugerir. De acordo com a física quântica, o vácuo quântico possui flutuações as-

⁵Hendrik Brugt Gerhard Casimir, físico holandês que teorizou o fenômeno em 1948.

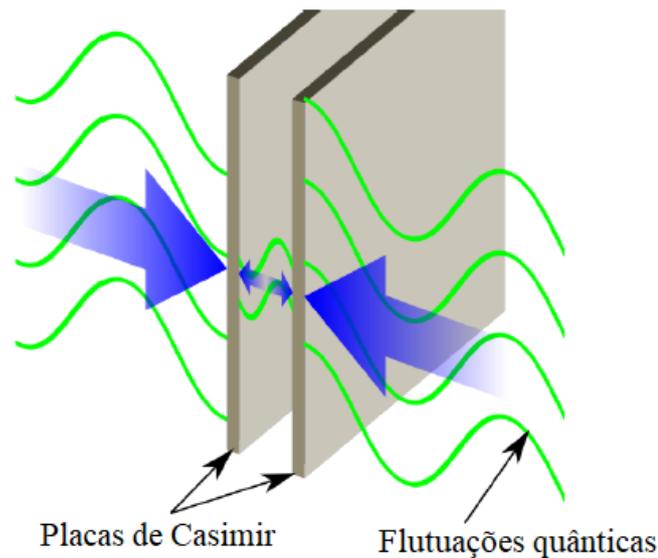


Figura 3.4: Esquema da força de Casimir. Quando muito próximas, as placas sofrem uma atração devido as flutuações quânticas, representadas em verde. Figura editada da referência [45]

sociadas com a Energia de Ponto Zero e essas flutuações são intrínsecas da natureza, ou seja, não há como eliminá-las. A energia de ponto zero está associada ao oscilador harmônico quântico e diz respeito à menor energia que um oscilador pode ter, que é $E_0 = h\nu/2$, onde h é a constante de Planck e ν é a frequência dos osciladores.

Logo, do ponto de vista da física quântica, ao colocarmos duas placas muito próximas uma da outra, criamos condições para o vácuo quântico de se manifestar. De que maneira? No vácuo quântico, partículas virtuais podem surgir e retornar ao vácuo em tempos muito curtos, uma dessas partículas é o fóton. Com a presença das placas, os fótons virtuais que surgem do vácuo dentro dessa região limitada sofrem restrições quanto ao tamanho do comprimento de onda que eles podem ter. Bem, em razão disso, teremos um número menor de fótons entre as placas do que fora dessa região, resultando em uma região com menor densidade de energia, quando comparada com a região externa, e é essa diferença que gera uma atração entre as placas (veja novamente a Fig. 3.4).

Casimir demonstrou que a força entre as placas é inversamente proporcional à

quarta potência da distância entre elas, ou seja,

$$F = -A \frac{\pi^2 \hbar c}{240 d^4},$$

onde d é a distância entre as placas, A é a área das placas, c é a velocidade da luz no vácuo e \hbar é a constante de Planck reduzida. Dada a relação entre a força de Casimir e a distância d , podemos deduzir que esse efeito só pode ser observado experimentalmente para distâncias muito pequenas. Essa característica faz com que o efeito Casimir seja levado em consideração, por exemplo, na nanotecnologia, com a fabricação de microchips [46].

E como podemos utilizar o Efeito Casimir na busca por desvios da lei do inverso do quadrado de Newton? Como dito ainda nesta seção, a interação gravitacional newtoniana entre as placas não produz um efeito considerável, de modo que esse sistema se torna favorável para procurarmos um sinal anômalo. Como vimos no capítulo 2, em teorias de dimensões extras, um efeito previsto para o potencial gravitacional é a sua amplificação para curtas distâncias. Assim, podemos supor que, caso essas previsões estejam corretas, haverá uma contribuição advinda da modificação do potencial gravitacional. Os limites sobre os parâmetros extradimensionais podem, portanto, ser extraídos da observação experimental. Como os dados até agora não nos dão indícios de uma modificação do potencial, vários vínculos foram impostos sobre o alcance e intensidade dessa modificação. Bezerra *et al* [47], por exemplo, obteve $\alpha < 1,12 \times 10^{11}$ para um alcance de $\lambda = 1 \mu m$. Vínculos mais recentes podem ser encontrados na referência [12], e estão resumidos na figura 3.5.

3.4 Vínculos Espectroscópicos

Ao ler as seções anteriores desse capítulo, poderíamos imaginar que testes da modificação da gravitação estão limitados no alcance de alguns micrômetros (como nos experimentos de balança de torção ou efeito Casimir). Contudo, a espectroscopia pos-

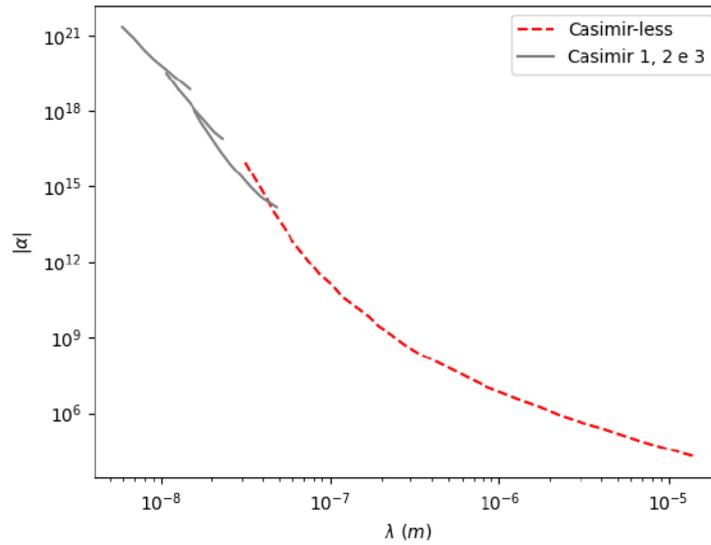


Figura 3.5: Vínculos sobre os parâmetros de Yukawa usando a força de Casimir. Os experimentos *Casimir 1, 2 e 3* dizem respeito às diferentes forças de Casimir consideradas em uma superfície e o vínculo Casimir-less foi obtido com experimentos que visavam a minimização da força de Casimir. Figura retirada de [12].

sibilitou estudos dessa natureza em escalas de comprimentos ainda menores, da ordem do raio de Bohr! Como exemplo, vínculos foram obtidos da análise das transições do Hélio antiprotônico [11]. Nesse átomo artificial, substitui-se um elétron do Hélio natural por um antipróton. Como a massa do antipróton é muito maior do que a do elétron, cerca de 2000 vezes, espera-se que a interação gravitacional entre eles seja amplificada. No caso do Hélio antiprotônico com um número quântico alto, n , é possível obtê-lo num tempo de vida da ordem de microssegundos⁶, o que possibilita estudá-los dentro da nossa capacidade atual.

Os estados de Rydberg desse átomo foram estudados com o intuito de observar alguma correção da interação gravitacional entre o núcleo e o antipróton. Dado o acordo entre os valores calculados com a QED (Quantum Electrodynamics) e os dados experimentais, uma nova interação seria possível apenas para uma intensidade $\alpha < 10^{28}$ com um alcance $\lambda \sim 1\text{\AA}$, para 1σ de nível de confiança.

⁶Ocorre que, para um n grande, a distância entre o núcleo de Hélio e o antipróton equivale ao raio de Bohr. Para essa distância, a probabilidade da função de onda do antipróton se sobrepor com a do núcleo diminui e isso acarreta no aumento do tempo de vida do átomo como um todo.

3.4.1 Frequência de Transição $1S - 3S$ do Hidrogênio

Ainda dentro da espectroscopia, outros dados que podem ser utilizados na imposição de vínculos experimentais são as medidas das frequências de transição do átomo de Hidrogênio. Um exemplo da precisão nessas medidas pode ser encontrado no valor experimental da frequência de transição do nível $1S$ para o nível $3S$ [11]:

$$f_{1S-3S}^{\text{exp}} = 2922743278671,6(1,4)\text{kHz}.$$

A precisão relativa nesse caso é da ordem de 10^{-12} e o erro combinado com o valor teórico ($f_{1S-3S}^{\text{teo}} = 2922743278671,5(2,6)\text{kHz}$) é cerca de 3kHz . Isso significa que ambos os valores teórico e experimental concordam. Esse nível de precisão é fundamental se quisermos procurar sinais anômalos nas interações interatômicas.

Para o caso de haver uma interação gravitacional modificada, como a prevista pelo modelo ADD, essa interação poderia causar correções na frequência de transição. Como ainda não há um sinal dessa modificação detectado, devemos supor que ela deve ser menor do que o erro combinado. Podemos calcular essa correção pelo método perturbativo. A hamiltoniana da interação gravitacional entre o elétron e o próton no átomo de Hidrogênio pode ser escrita como

$$H_G^0 = m_e \varphi,$$

onde m_e é a massa do elétron e φ é o potencial gravitacional modificado do tipo Yukawa, ou seja

$$\varphi(r) = -\frac{Gm_p}{r} (1 + \alpha e^{-r/\lambda}).$$

Dada a natureza atrativa desse potencial, espera-se que essa nova interação diminuirá a energia de cada estado e a quantidade de energia será $\langle H_G^0 \rangle$, ou seja, o valor médio da energia calculado no estado ψ . Essa modificação acarretará em uma correção no valor

da frequência de transição Δf que, na primeira ordem, é escrita da seguinte forma

$$\Delta f = \frac{\langle H_G^0 \rangle_{3S} - \langle H_G^0 \rangle_{1S}}{h},$$

onde h é a constante de Planck.

Impondo que o valor de Δf deve ser menor do que o erro combinado dos valores experimentais e teóricos, podemos estimar o valor dessa correção [11] [12]. Na Fig. 3.6 podemos observar o limite para os parâmetros de Yukawa obtidos com essa técnica (linha tracejada em azul). Nessa mesma figura podemos comparar os vínculos da espectroscopia quando comparados com outros testes experimentais, alguns dos quais já citamos neste capítulo.

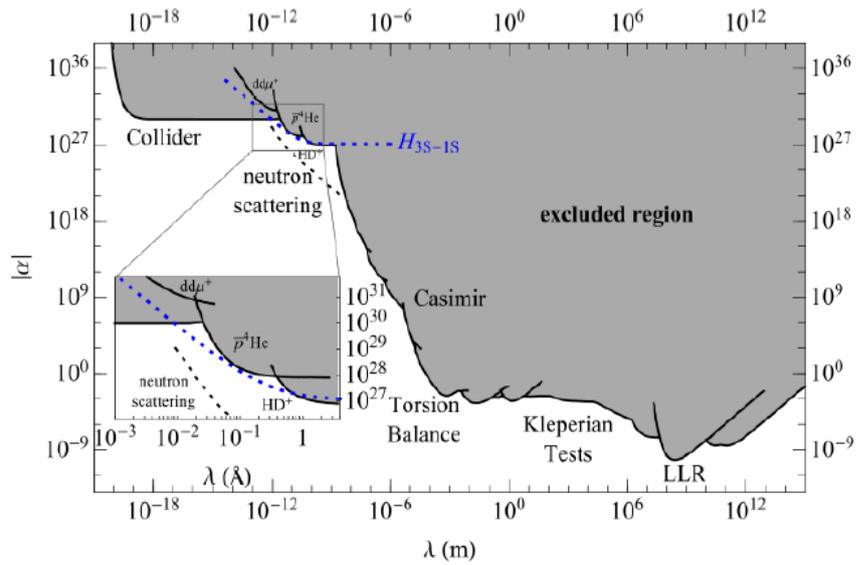


Figura 3.6: Vínculos espectroscópicos quando comparados com outros testes de gravidade modificada. Como podemos ver, vínculos espectroscópicos são bastante restritivos para um alcance da ordem de $10^{-3}\text{\AA}-1\text{\AA}$. O vínculo obtido da frequência de transição $3S - 1S$ está indicado pela linha azul tracejada. Figura retirada de [11].

Mais recentemente novas transições foram analisadas com esse mesmo objetivo de buscar sinais de uma interação gravitacional anômala na transição $2S - 2P$ do Hélio-4 muônico. Esse átomo consiste de um núcleo de Hélio; um elétron é retirado e, no lugar do outro elétron, coloca-se um múon. Mais uma vez, como a massa do múon é 200 vezes maior do que a massa do elétron, a interação gravitacional entre o múon e

o núcleo é amplificada. Outro ponto a favor das buscas por modificações do potencial gravitacional é que o raio de Bohr para um átomo muônico é bem menor do que o raio de Bohr para o átomo natural [12], resultando numa aproximação maior entre as massas, aumentando a interação gravitacional.

Utilizando a parametrização de Yukawa e o formalismo de perturbação (como citamos anteriormente), pode-se obter o valor de correção da energia da transição $2S - 2P$. Impondo que essa correção deve ser inferior ao erro total da medida do desvio de Lamb, δE , conseguiu-se deduzir que [12]

$$\alpha < \frac{4a_0^* \delta E}{GM_\alpha m_\mu} \left[\frac{2\lambda^2}{(\lambda + a_0^*)^2} - \frac{4\lambda^3}{(\lambda + a_0^*)^3} + \frac{2\lambda^4}{(\lambda + a_0^*)^4} \right]^{-1},$$

onde $a_0^* = 1.3039422757 \times 10^{-13} m$ é o raio de Bohr para o Hélio muônico, M_α é a massa do núcleo de Hélio-4, m_μ é a massa do múon e G é a constante da gravitação de Newton.

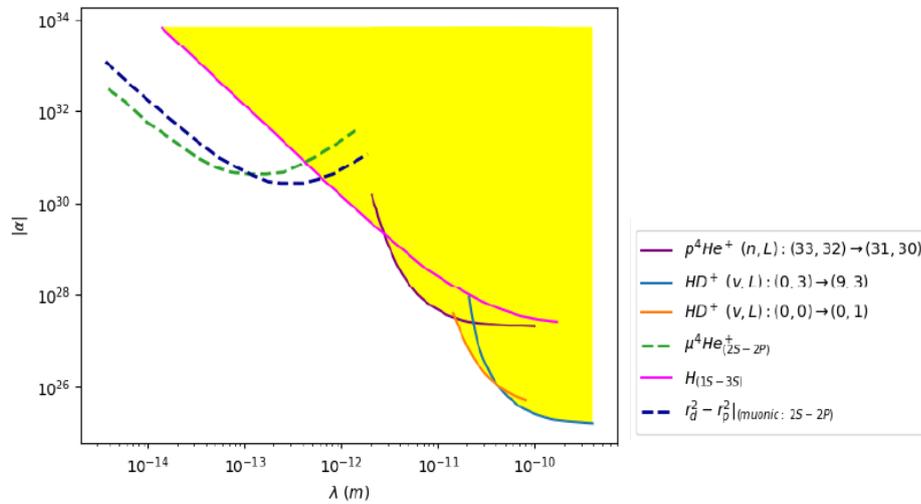


Figura 3.7: Vínculos espectroscópicos sobre os parâmetros de Yukawa, quando comparados com os demais testes experimentais. O novo limite com o $\mu^4 He$ se mostraram mais restritivos dos que os da transição $1S - 3S$ do hidrogênio e outros testes espectroscópicos. Figura retirada de [12].

A figura 3.7 mostra a relação desse vínculo quando comparado com outros testes espectroscópicos e alguns testes da gravitação já citados nesse capítulo.

4 *O Uso de Nêutrons na Busca por Vínculos Experimentais*

Com as previsões de teorias, como o Modelo ADD, de uma possível violação da Lei do inverso do quadrado de Newton em escalas de comprimento da ordem de milímetros, físicos buscaram tais sinais em uma gama de experimentos, sendo que alguns deles foram citados no capítulo anterior. Em meio a tais avanços experimentais, o nêutron foi reconhecido como um grande aliado nos estudos de uma gravidade modificada em curtas escalas.

Dada a sua neutralidade, o nêutron possui grande vantagem quando comparado com outras partículas no estudo das interações interatômicas. Como ele não possui carga, a principal interação que o nêutron percebe ao interagir com a matéria é a força nuclear, que é de curto alcance, da ordem do femtômetro, 10^{-15}m ! Além disso, nêutrons térmicos, cujas energias são $\sim 25\text{meV}$, possuem um comprimento de onda de de Broglie muito próximo ao espaçamento interatômico, nos possibilitando estudar a dinâmica e estrutura da matéria por meio dele [15]. Outro fato que colabora para o fato de o nêutron ir mais fundo na matéria do que raio X, por exemplo, é que os núcleos de um material (os centros espalhadores) são cerca de 100.000 vezes menores do que a própria distância entre estes núcleos. Isso implica que uma vez dentro de uma amostra, num experimento de espalhamento, por exemplo, o nêutron penetrará bem profundamente na amostra antes de ser absorvido ou espalhado por um núcleo. Podemos ver a diferença entre a capacidade de penetrar num meio material por meio do nêutron e de outras partículas também usadas em estudos de espalhamento na figura 4.1.

Essa capacidade do nêutron de ir mais fundo numa amostra é fundamental para entendermos a estrutura da matéria. Com o uso da técnica de difração de nêutrons, por exemplo, pode-se estudar estruturas atômicas cuja escala de comprimento vai de 10^{-11} a 10^{-9}m . Além disso, podemos estudar os diversos efeitos que podem surgir dada

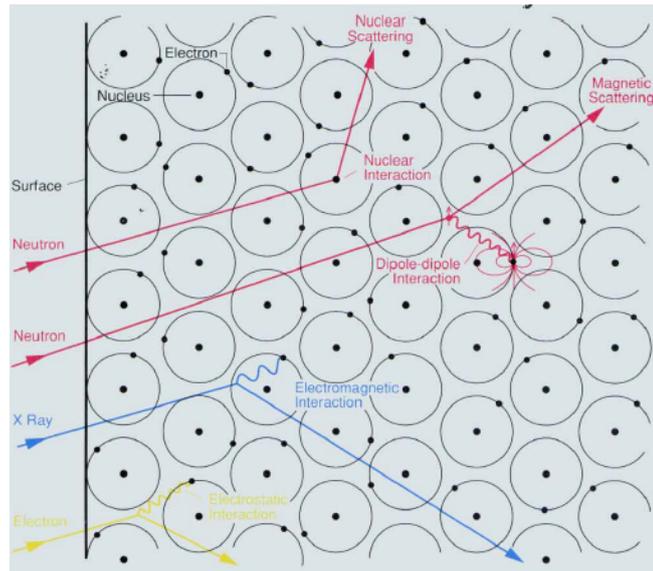


Figura 4.1: Ilustração do espalhamento de algumas partículas ao adentrar um meio material. Como podemos ver, o nêutron consegue penetrar mais profundamente o meio material. Figura retirada de [16].

a interação do nêutron com os núcleos de uma rede cristalina, como efeito Schwinger em cristais não-centrossimétricos, fônons, espalhamento magnético, entre outros. Além disso, como o nêutron interage com os núcleos de uma amostra mais vezes, quando comparado com outras partículas, podemos estudar como uma hipotética interação gravitacional poderia ocorrer nessa escala de comprimento muito pequena. Um excelente resumo de várias técnicas experimentais onde usa-se o nêutron em estudos de interações como, por exemplo, momento de dipolo elétrico, polarizabilidade e teorias não-newtonianas da gravitação podem ser encontradas na referência [48].

Uma outra característica interessante do nêutron é o seu tempo de vida. Uma vez fora do núcleo, o nêutron torna-se instável e entra num processo de decaimento¹, fazendo com que o seu tempo médio de vida seja cerca de 15 minutos [49]. Com uma meia-vida considerável, testes experimentais onde procura-se estudar a influência do campo gravitacional, por exemplo, tornam-se possíveis. Exemplos de testes dessa natureza podem ser encontrados no experimento COW, onde usou-se a interferometria de nêutrons (próxima seção), e Estados Ligados do nêutron. Neste capítulo falaremos

¹O nêutron decai emitindo um elétron e um neutrino, tornando-se um próton.

destes experimentos, além de outros onde a interação forte é a dominante.

4.1 Vínculos da Interferometria de Nêutrons

Nesta seção discutiremos como a interferometria de nêutrons pode nos ajudar na busca por vínculos sobre comportamentos anômalos da gravitação.

Como vimos em seções passadas, dado o surgimento de teorias prevendo desvios da lei do inverso do quadrado de Newton, físicos buscaram cada vez mais sinais de uma perturbação na gravitação newtoniana. À medida que experimentos eram feitos, cada vez mais vínculos eram estabelecidos sobre os parâmetros dessas novas teorias. Foi com o uso da interferometria de nêutrons que se encontrou os vínculos mais fortes, dentro da escala de comprimento de $10^{-12}m$ a $10^{-9}m$. Em razão disso, falaremos sobre os experimentos que utilizaram essa ferramenta.

4.1.1 O Experimento COW

Iniciaremos nossa discussão citando o experimento COW [50]² porque este foi pioneiro em estudar como a gravidade da Terra atua em partículas subatômicas, particularmente na fase de onda do nêutron.

Nesse experimento, um feixe de nêutrons de comprimento de onda λ_n é emitido e percorre um interferômetro de placa tripla. Após passar pela primeira placa, o feixe é dividido em dois. Um dos feixes passa por um caminho que possui uma elevação H em relação ao solo, enquanto o outro feixe percorre um caminho na mesma altura do feixe incidente. Por estar a uma altura H , o feixe que passa pelo caminho elevado sofre uma interação adicional, vinda da gravidade, ou seja, $mgH = mgH_0 \sin \phi$, onde g é a aceleração da gravidade terrestre. Após os dois feixes se reencontrarem na terceira placa, eles interagem e chegam aos detectores de ^3He , conforme a Fig. 4.2. Como o

²Em homenagem a Colella, Overhauser e Werner.

interferômetro é girado num ângulo ϕ em relação à base do equipamento, podemos ter uma relação entre a quantidade que chega nos detectores (essa quantidade recebe o nome de Intensidade) e o ângulo ϕ . Conforme veremos mais adiante, essa relação se dá devido a fase da onda do nêutron.

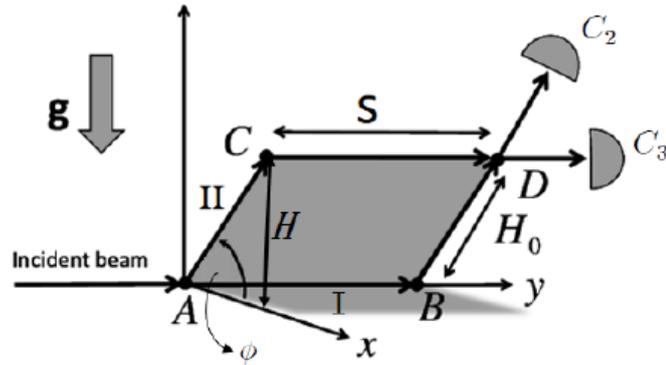


Figura 4.2: Representação esquemática do experimento COW. Após a colisão com a primeira placa do interferômetro (A), o feixe se divide nos caminhos I e II. Dada a inclinação ϕ do aparato, o caminho II está sob a ação do campo gravitacional. Ao se recombinarem em D, os feixes atingem os detectores, representados por C_2 e C_3 . Figura retirada de [13].

É conhecido que a fase da função de onda de uma partícula na posição x e tempo t , $\Phi(x, t)$, acumula ao longo de um período pode ser derivada a partir da sua lagrangeana, \mathcal{L} :

$$\Phi(x, t) = \frac{1}{\hbar} \int \mathcal{L} dt'.$$

Logo, se um feixe percorre dois caminhos distintos, ele terá um desvio de fase quando os feixes interagirem no fim do caminho

$$\Delta\Phi = \Phi_{II} - \Phi_I.$$

É possível demonstrar [13] que, dado dois feixes cujos momentos \vec{p} permanecem constantes, a diferença de fase entre eles será

$$\Delta\Phi = (\Delta k) S,$$

onde Δk é a variação do vetor de onda entre os feixes e S é a distância do caminho percorrido por um dos feixes (Fig. 4.2).

Da conservação da energia, podemos obter uma expressão para a variação de momento no experimento COW:

$$\Delta k = -\frac{m^2 g H}{h^2 k_0},$$

onde h é a constante de Planck e k_0 é o vetor de onda do nêutron incidente.

Logo, a diferença de fase entre os dois caminhos percorridos fica

$$\Delta\Phi = -\frac{2\pi m^2 g A \lambda}{h^2} \sin \phi,$$

onde $A = H_0 S$ é a área do paralelograma, conforme indicada na figura 4.2.

Conforme demonstrado em [13], a intensidade dos nêutrons que atingem os detectores de ^3He depende da diferença de fase, $\Delta\Phi$. Como o feixe de nêutrons se divide na primeira placa do interferômetro, pode-se mostrar que a diferença entre as intensidades desses dois feixes é uma função senoidal, dada por

$$I_O - I_H = A - B + 2A \cos \Delta\Phi,$$

onde I_O e I_H são as intensidades dos feixes nas direções incidente e refletido, respectivamente. Aqui, A e B são constantes.

Realizado o experimento, os idealizadores do experimento COW puderam observar essa dependência da diferença de intensidades em termos do ângulo de rotação do aparato experimental, ϕ , conforme a figura 4.3.

Como observado em [13], o feixe de nêutrons é tão preciso que se pode controlar a passagem de um nêutron por vez no aparato. Mesmo que um nêutron passe por vez, ainda se observa o padrão de interferência acima. Do ponto de vista da mecânica quântica, o nêutron passou por *ambos* os caminhos simultaneamente, sendo submetido às duas configurações de potenciais distintos!

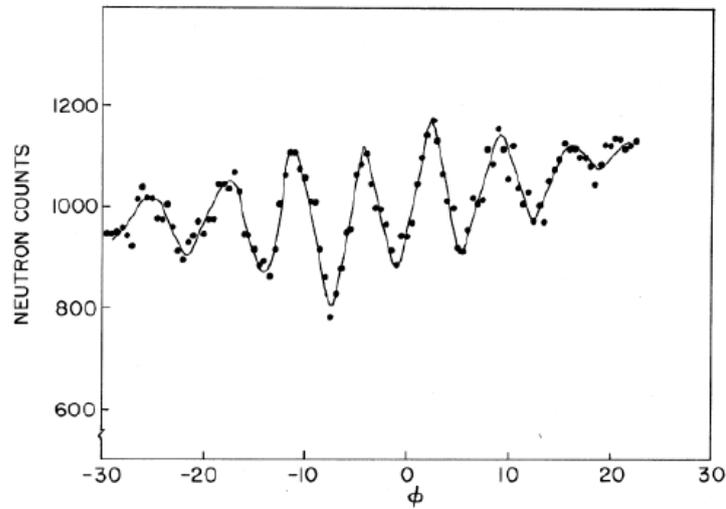


Figura 4.3: Contagem dos nêutrons que chegam ao detector. Como podemos observar, a intensidade depende do ângulo de inclinação do aparato. Isso demonstra a ação do campo gravitacional sobre a fase do nêutron. Figura retirada de [50].

O uso da interferometria não ficou restrito a apenas a estudos das forças nucleares e da gravitação (COW). Com a precisão alcançada usando essa ferramenta experimental, vários trabalhos foram realizados com a interferometria de nêutrons a fim de estudar mais interações. A figura 4.4 mostra alguns experimentos com interferometria de nêutrons. Recomendamos a referência [15] para uma leitura detalhada dessa técnica.

Interação	Potencial	Desvio de Fase	Referências
Nuclear	$\frac{2\pi\hbar^2}{m}b_c\delta(r)$	$-Nb_c\lambda D$	Rauch et al. (1974)
Magnética	$-\mu \cdot B(r)$	$\pm \frac{\mu B m \lambda D}{2\pi \hbar^2}$	Rauch et al. (1975)
Gravidade	$mg \cdot r$	$\frac{m^2 g \lambda A \sin \alpha}{2\pi \hbar^2}$	Collela et al. (1975)
Coriolis	$-\hbar\omega \cdot (r \times k)$	$\frac{2m}{\hbar} \omega_c \cdot A$	Werner et al. (1979)
Aharonov-Casher (Schwinger)	$-\mu \cdot (v \times E)/c$	$\pm \frac{2\mu}{\hbar c} E \cdot D$	Cimmino et al. (1989)
Aharonov-Bohm escalar	$-\mu \cdot B(t)$	$\pm \frac{\mu B T}{\hbar}$	Allman et al. (1992)
Josephson magnético	$-\mu \cdot B(t)$	$\pm \omega t$	Badurek et al. (1986)
Fizeau	—	$-Nb_c\lambda D \left(\frac{v_x}{v_x - ic_x} \right)$	Klein et al. (1981a)

Figura 4.4: Diversos testes realizados com a interferometria de nêutrons. Figura editada da referência [15].

4.1.2 Vínculos sobre Teorias de Gravidade Modificada Utilizando a Interferometria de Neutrons

Com a demonstração de que a gravidade newtoniana poderia gerar um efeito sobre um feixe de nêutrons numa escala de comprimento muito pequena, alguns físicos se perguntaram se uma gravidade modificada poderia ser considerada nesse tipo de experimento.

Cerca de 11 anos após o experimento de COW, Bertolami considerou uma gravitação modificada do tipo Yukawa e analisou os limites experimentais sobre essa nova interação [51]. Para estar de acordo com os dados experimentais da época, os vínculos obtidos por ele sobre os parâmetros de Yukawa foram

$$\alpha\lambda^2 < 3,43 \times 10^3 m^2.$$

Outro trabalho que utilizou a interferometria de nêutrons num contexto de gravitação modificada foi o de Greene e Gudkov [52]. Nesse experimento, os caminhos percorridos estavam à mesma altura do solo, diferentemente do experimento COW, contudo, em um dos caminhos se introduziu duas placas de ouro. Uma dessas placas ficava imóvel enquanto que a outra poderia se mover até 100 micrômetros ao longo da direção do feixe. Esse método foi chamado de Método de Translação. Utilizando a parametrização de Yukawa, Greene obteve o seguinte desvio de fase

$$\Delta\Phi = \frac{4\pi G\alpha m\rho\lambda^3}{k_0} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right) (1 - e^{-L/\lambda}),$$

onde L é a distância entre as duas placas, m é a massa do nêutron, ρ é a densidade uniforme das placas e k_0 é o vetor de onda do nêutron incidente. Com uma sensibilidade experimental de $\Delta\Phi$ da ordem de 10^{-4} rad, $\rho = 19,6g/cm^3$ e nêutrons térmicos, o

vínculo sobre os parâmetros de Yukawa seria

$$\alpha\lambda^3 \leq 3 \times 10^{-3} m^3.$$

4.1.2.1 Interferometria de nêutrons com fonte não-bariônica

Recentemente, um estudo sobre a interferometria de nêutrons e gravitação modificada utilizou como fonte para a gravitação modificada uma fonte não-bariônica [13] [14]. Neste trabalho anterior, utilizamos um campo elétrico como fonte do campo gravitacional. No conhecido efeito Aharonov-Casher (AC), onde feixes de nêutrons atravessam um capacitor, ocorre um acúmulo na fase do nêutron em razão da interação do momento magnético $\vec{\mu}$ do nêutron com o campo elétrico no interior do capacitor. Do ponto de vista da Relatividade Geral, qualquer campo contendo energia, pode gerar um campo gravitacional. Evidentemente, para um campo elétrico gerado em laboratório a intensidade desse campo gravitacional seria desprezível. Contudo, no cenário em que estamos considerando neste trabalho (gravitação modificada), vimos que a interação gravitacional pode sofrer uma amplificação em pequenas escalas de comprimento (Capítulo 2).

Para o regime de campo fraco, e admitindo uma parametrização do tipo lei de potência para descrever as modificações da gravidade na brana, mostramos que o potencial gravitacional produzido pela energia do campo elétrico num ponto \vec{x} no interior do capacitor é, para $\delta > 2$,

$$V(\vec{x}) = -\frac{2\pi\zeta\hat{G}_D\epsilon_0 E^2}{\varepsilon^{\delta-2} c^2}, \quad (4.1)$$

onde [14] $\zeta = \frac{\delta(\delta+2)}{8(\delta+1)} \frac{\Gamma(\frac{\delta-2}{2})\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{\delta+1}{2})}$, $\hat{G}_D = 4G_D \frac{\Gamma(\frac{\delta+3}{2})}{(\delta+2)\pi^{\frac{\delta+1}{2}}}$, e G_D está relacionado com o volume do espaço suplementar, $G_D = G(2\pi R)^\delta$. Também temos que ε é uma grandeza relacionada com a espessura da brana [14]. Exploraremos mais a frente esse fato interessante da dependência quadrática do campo elétrico exibida pela energia potencial gravitacional.

Com esse potencial, equação (4.1), calculamos o desvio de fase gerado sobre um feixe de nêutrons que passa pelo capacitor enquanto que o outro feixe é blindado. Logo, a relação que obtemos para o desvio de fase é a seguinte

$$\Delta\Phi = \frac{4\pi^2 m^2}{h^2} \left(\frac{\zeta \hat{G}_D}{\varepsilon^{\delta-2}} \epsilon_0 \frac{E^2}{c^2} \right) \lambda_n L, \quad (4.2)$$

onde λ_n é o comprimento de onda do nêutron.

A equação acima é obtida, como já mencionamos, usando a parametrização do tipo lei de potência. Mas, se adotarmos a parametrização de Yukawa para descrever o comportamento anômalo da gravitação, poderíamos obter o seguinte desvio de fase

$$\Delta\Phi = \frac{G\alpha\lambda^2 m^2 \epsilon_0 \lambda_n L}{h^2 c^2} E^2. \quad (4.3)$$

É interessante destacar que o efeito dessa suposta interação proposta pode, a princípio, ser distinta do efeito Aharonov-Casher, uma vez que a dependência do desvio de fase agora é quadrática no campo elétrico, e não linear, como no efeito AC. Logo, a busca por um efeito anômalo no desvio de fase do nêutron em virtude de uma modificação da gravidade ganha força, dado os comportamentos distintos entre as dependências de $\Delta\Phi$ com o campo elétrico.

Para um campo elétrico da ordem de 30 kV/mm, $L = 2,53$ cm e o comprimento de onda do nêutron sendo $\lambda_n \simeq 1,5$ Å, os efeitos do potencial modificado sobre a fase do nêutron podem ser estimados num limite em que não ultrapasse a sensibilidade experimental para o desvio de fase, η , que é da ordem de 10^{-3} rad. Sendo assim, o vínculo encontrado foi

$$\alpha\lambda^2 < 0,26 \times 10^{20} m^2 \left(\frac{\eta}{10^{-3}} \right) \left(\frac{\text{Å}}{\lambda_n} \right) \left(\frac{cm}{L} \right) \left(\frac{30kV/mm}{E} \right)^2. \quad (4.4)$$

Apesar de ser um limite pouco restritivo, quando comparado com outros cujas fontes são bariônicas, devemos salientar que este limite pode ser utilizado em escalas de com-

primentos menores que a do tamanho do núcleo.

Note que, para obter esse resultado, assumimos que a fonte do campo gravitacional não é simplesmente um corpo com uma massa de repouso, mas a energia produzida por um campo elétrico, E . Neste caso, podemos utilizar o formalismo Pós-Newtoniano na descrição desse potencial gravitacional. O formalismo pós-newtoniano surge com a adição de correções na expansão do formalismo newtoniano em regiões de campo fraco, como o nosso sistema solar³. O formalismo é utilizado com o objetivo de testar a gravitação newtoniana, além de correções da Relatividade Geral na estabilidade e estruturas das estrelas, por exemplo. Podemos ainda, de forma bem abrangente, estudar qualquer teoria métrica a partir desse formalismo. A distinção entre uma teoria métrica e outra se dará através de parâmetros (chamados de *parâmetros PPN*). Aliás, dependendo do valor desses parâmetros, o formalismo PPN pode ser idêntico ao limite pós-newtoniano da Relatividade Geral ou da teoria de Dicke-Brans-Jordan [53] (veja o Apêndice A).

Foi com esse formalismo que conseguimos obter mais um vínculo sobre os parâmetros da teoria modificada que utilizamos neste trabalho. Ocorre que, o potencial obtido V pode ser considerado como uma correção de curtas distâncias de um potencial pós-newtoniano, uma vez que a fonte de V não é uma massa de repouso. Ele é gerado pela densidade de energia elétrica e pela pressão (ou estresse) desse campo, que têm a mesma ordem de magnitude. Logo, o coeficiente α da equação (4.4) pode ser relacionado com parâmetros pós-newtonianos, mais especificamente os parâmetros β_3 e β_4 [14]. Como discutido no apêndice A, o parâmetro β_3 mede a capacidade da energia interna produzir gravidade. Já β_4 seria um parâmetro associado a capacidade da pressão curvar o espaço-tempo. Em teorias métricas que não violam as equações de conservação de energia, momento linear e momento angular, $\beta_3 = 1$, i.e., concorda com a Relatividade Geral. Por sua vez, o parâmetro β_4 está relacionado com outro parâmetro pós-newtoniano, γ , este último está associado com a curvatura das seções puramente espaciais do espaço-tempo (Apêndice A). Portanto, o vínculo acima (Eq. 4.4) pode ser

³Para se ter uma ideia, o valor do potencial newtoniano no sistema solar é proporcional a 10^{-6} e a velocidade quadrática do nosso sistema solar relativo ao centro da nossa galáxia é proporcional a 10^{-7} !

visto como uma restrição experimental para este parâmetro γ .

Na escala do sistema solar, o valor experimental desse parâmetro é ^[4], $\gamma = 1 + (2, 1 \pm 2, 3) \times 10^{-5}$. Aqui obtivemos novos vínculos para esse parâmetro numa escala de curtas distâncias, usando testes de interferometria de nêutrons atravessando campos elétricos. Abaixo temos um gráfico que relaciona o novo vínculo para γ com outros testes experimentais: O MTV-G, onde se estudou a precessão do spin de um elétron causado pelo campo gravitacional anômalo produzido por um núcleo ^[11], e o vínculo obtido da frequência de transição $2P_{1/2} - 2P_{3/2}$ do Hidrogênio ^[11], onde também foi estudado como a presença de uma interação gravitacional modificada poderia perturbar as transições de energias, e a transição do Hélio-4 muônico ^[12]. Nesses três testes — o MTV-G e as transições fina entre níveis $2P$ — o parâmetro γ está presente por causa da interação spin-órbita gravitacional.

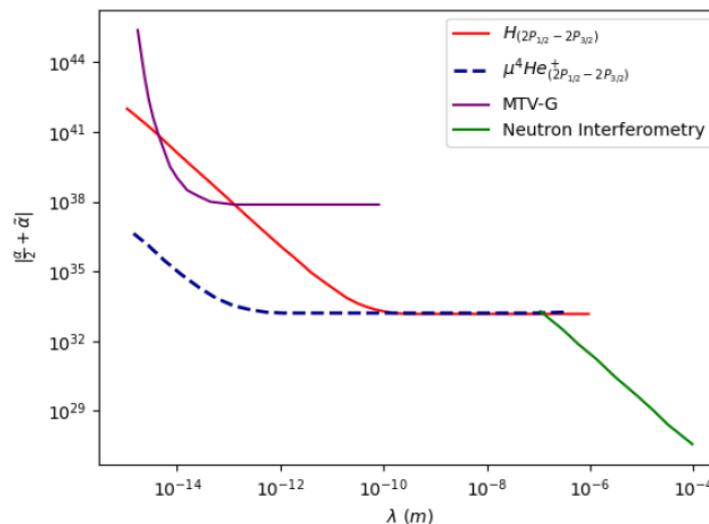


Figura 4.5: Comparação entre os vínculos espectroscópicos com o obtido usando a interferometria. Como podemos observar, para $1, 4 \times 10^{-7}$ m e 10^{-4} m o vínculo da interferometria é mais restritivo do que os demais nessa escala. Figura retirada de ^[12].

Como podemos observar, o vínculo utilizando a interferometria de nêutrons é mais restritivo para o valor de α para um λ entre $1, 4 \times 10^{-7}$ m e 10^{-4} m em relação aos vínculos obtidos pelo MTV-G e da espectroscopia ^[14].

⁴Valor obtido com o auxílio da nave Cassini ao analisar o atraso temporal e a deflexão das ondas de rádio sob a ação do campo gravitacional do Sol ^[13] ^[14] ^[54].

4.2 Vínculos de Experimentos de Estados Ligados do Nêutron

Um dos experimentos que utilizou nêutrons com o objetivo de estudar a interação gravitacional foi o experimento chamado de *quantum bouncer* [17] [20] [18] [55]. Sobre esse experimento entraremos em mais detalhes no capítulo 5. Nesse experimento, nêutrons são emitidos sobre uma superfície (espelho). De acordo com a física clássica, a trajetória dessas partículas após atingirem o espelho serão parabólicas. Assim, ao entrar no aparato experimental que consiste de um espelho na parte inferior e um absorvedor na parte superior (responsável por limitar a velocidade vertical dos nêutrons), o nêutron atingirá o espelho até chegar no detector, conforme a figura 4.6. O potencial no interior do espelho é tido como sendo o pseudo-potencial de Fermi [56], que, dada a energia do nêutron sendo muito menor que o potencial de Fermi, garante que os nêutrons sejam todos refletidos na superfície do espelho.

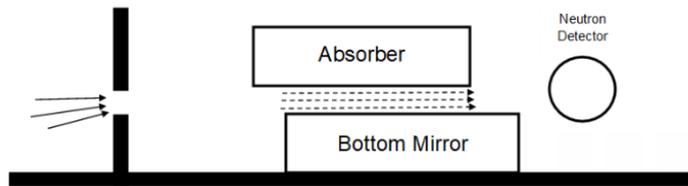


Figura 4.6: Esquema do aparato experimental para a detecção dos estados ligados do nêutron. Após cair parabolicamente e colidir com o espelho sucessivamente, o nêutron atinge o detector. Figura adaptada de [17].

Para a região acima do espelho, a interação que o nêutron experimenta é puramente gravitacional:

$$V = m_n g z,$$

onde m_n é a massa do nêutron e g é a aceleração da gravidade terrestre.

Foi observado que para esse sistema o nêutron experimenta um confinamento, semelhante àqueles do tipo poço de potencial. E, de maneira análoga, a energia do nêutron

passa a ser discretizada! Isso implica que as alturas que o nêutron adquire após a reflexão com o espelho também devem ter apenas alguns valores permitidos [18]. Com essa grande descoberta alguns físicos se perguntaram o que aconteceria se considerássemos uma interação gravitacional modificada, por esse motivo, muitos trabalhos foram realizados baseados nesse experimento com a finalidade de examinar desvios da gravitação newtoniana em escalas de comprimentos da ordem de micrômetros.

Um dos primeiros trabalhos realizados nesse sentido foi o de Abele *et. al.* [19], no qual consideraram uma parametrização para o potencial gravitacional do espelho sendo do tipo Yukawa. Logo, o potencial de interação entre o nêutron, de massa m_n , e o espelho cuja densidade de massa é ρ , foi

$$V = 2\pi m_n \rho \alpha \lambda^2 G e^{-|z|/\lambda}.$$

Com os dados experimentais, Abele e colaboradores conseguiram encontrar limites para essa possível nova interação. Abaixo podemos ver o limite sobre os parâmetros de Yukawa, α e λ . Os vínculos obtidos se mostraram mais restritivos que testes anteriores sobre uma possível modificação da gravidade para λ entre $1\mu m$ e $3\mu m$ (Figura 4.7).

Outros trabalhos que buscaram obter vínculos sobre parâmetros de teorias extradimensionais usando essa técnica experimental podem ser encontrados em [20] [18] [56] [57]. As referências [20] e [58] também utilizaram uma nova interação gravitacional, contudo, levaram em consideração uma possível aniquilação de estados ligados por meio desta nova interação. Dessa forma, eles conseguiram impor limites sobre parâmetros dessas teorias extradimensionais. Na referência [58], por exemplo, utilizando a parametrização da lei de potências, observou-se que o potencial gravitacional modificado não permitiria estados ligados para $\delta \geq 5$, onde δ é o número de dimensões extras, dado os problemas de divergência que surgem ao considerar um universo onde a brana não possui espessura⁵. Anos depois, Nesvizhevsky *et al.* [20] estudaram como uma interação do tipo Yukawa para o potencial gravitacional poderia modificar

⁵Voltaremos a tratar desse resultado no capítulo 5, onde traremos uma solução para esse problema.

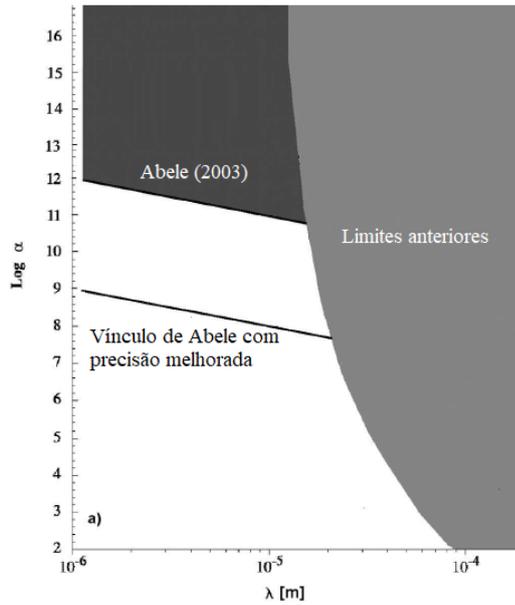


Figura 4.7: Comparação dos vínculos extraídos por Abele (2003) em comparação com vínculos obtidos de anos anteriores. Figura adaptada de [19].

os estados ligados do nêutron. Nesse cenário, o espelho atua como fonte desse potencial modificado. O limite sobre os parâmetros de Yukawa foram obtidos tendo como pressuposto que uma nova interação gravitacional não criaria um novo estado ligado, resultando no seguinte vínculo

$$\alpha = 1 \times 10^{15} \left(\frac{1\mu m}{\lambda} \right)^4.$$

Anos depois do artigo de Nesvizhevsky, Zimmer [56] o analisou e considerou que poderia haver não apenas uma interação do nêutron com o espelho na parte externa, mas também uma contribuição do tipo Yukawa no interior do espelho.

4.3 Experimentos de Espalhamento de Nêutrons e Interações de Curtas Distâncias Anômalas

Uma das formas de estudar os efeitos de uma hipotética força sobre o nêutron foi investigada por Nesvizhevsky *et al* [59] ao analisar dados de espalhamento de nêutrons.

Para ser mais geral, e considerar novas interações que podem ter outras origens físicas, por exemplo, devido à troca de bósons hipotéticos, a energia potencial da interação foi escrita da seguinte forma [59]:

$$V(r) = Q_1 Q_2 \frac{g^2 \hbar c}{4\pi r} e^{-r/\lambda}, \quad (4.5)$$

onde g é a constante de acoplamento, Q_1 e Q_2 são as cargas dos férmions sob essa nova interação e λ é o alcance dessa interação. No caso em que (4.5) representa uma correção da interação gravitacional, teríamos que fazer as seguintes identificações: Q seria proporcional a massa do férmion, e poderia ser escrita como $Q = A$ (onde A é número de massa do núcleo) e o coeficiente $g^2 \hbar c / (4\pi)$ seria $\alpha G m^2$, onde m é a massa do nêutron. Assim $\alpha = (1,34 \times 10^{37}) g^2$.

Sabemos da teoria do espalhamento quântico que, quando uma partícula incidente na direção, digamos, x , cuja função de onda é $\psi(x) = A e^{ikx}$, interage com um centro espalhador, a função de onda após a interação será modificada. Para uma grande distância do centro espalhador, $r \gg s$, onde s compreende a região em torno do centro espalhador onde há o potencial de interação $V(r)$, a função de onda da partícula pode ser escrita da seguinte forma [39]

$$\psi(r) = e^{ikx} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r}, \quad (4.6)$$

onde $f(\theta)$ é chamada de *Amplitude de Espalhamento*, que descreve a amplitude de probabilidade da onda esférica da saída (na direção θ) em relação à onda plana incidente e, portanto, está relacionada a coordenada θ . De fato, em uma colisão elástica, temos [59]: $q = 2k \sin(\theta/2)$.

Na aproximação de Born, onde considera-se que a onda plana incidente é levemente alterada pelo potencial de interação, podemos ter uma expressão para a amplitude de espalhamento [39]

$$f(\vec{q}) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} V(r) d^3r, \quad (4.7)$$

onde $\vec{q} = \vec{k}' - \vec{k}$ mede a variação do momento linear da partícula incidente.

Considerando o potencial hipotético (4.5), os autores estudaram como essa nova interação modificaria a amplitude de espalhamento total de nêutrons lentos ao atravessarem um certo material. Levando-se em conta os diferentes tipos de interação entre o nêutron incidente e os átomos do material, podemos decompor a amplitude total da seguinte forma [59]:

$$f(\vec{q}) = f_{nucl}(\vec{q}) + f_{ne}(\vec{q}) + f_B(\vec{q}), \quad (4.8)$$

onde $f_{nucl}(\vec{q})$ é a amplitude de espalhamento que surge da interação entre nêutron-núcleo, que é de onde vem a maior contribuição para $f(\vec{q})$. Para baixas energias ela pode ser dada apenas pelo comprimento de espalhamento coerente, $f_{nucl}(\vec{q}) = -b$, i.e., independente de θ . O segundo termo, $f_{ne}(\vec{q})$, é a chamada interação nêutron-elétron, que descreve a interação com as distribuições de cargas no interior do átomo. O termo extra $f_B(\vec{q})$ vem da interação hipotética, equação (4.5).

Quando comparados os comprimentos de espalhamento para dois valores de q , isto é, para o espalhamento óptico onde $q = 0$ e para a difração de Bragg onde $q_{BD} = 10\text{nm}^{-1}$, teremos a seguinte razão [59]

$$\frac{b_{\text{óptico}}}{b_{BD}} \approx 1 + \frac{A}{b} \frac{mc^2}{2\pi\hbar c} g^2 \lambda^2 \frac{(q_{BD}\lambda)^2}{1 + (q_{BD}\lambda)^2}, \quad (4.9)$$

onde A é o número atômico do núcleo.

A equação (4.9) mostra que a interação anômala modificaria a relação usual entre o espalhamento direto e o espalhamento na primeira direção de Bragg. Se levássemos em conta apenas a interação nuclear, eles seriam iguais para nêutrons lentos. A partir da previsão (4.9), é possível impor vínculos para a hipotética interação. Comparando os dados experimentais de 13 núcleos, os autores impuseram um limite experimental para o termo extra da equação (4.9) [59]:

$$g^2 \lambda^2 \frac{(q\lambda)^2}{1 + (q\lambda)^2} \leq 0,0013\text{fm}^2. \quad (4.10)$$

Os autores também compararam a nova interação (Eq. 4.5) com a interação eletromagnética, dada por $f_{ne}(\vec{q})$. Agora, em vez de compararmos o caso da difração de Bragg com a óptica (Eq. 4.9), a grandeza usada foi o comprimento de espalhamento total, extraído de colisões envolvendo nêutrons incidentes de energia de 1eV. Essa grandeza foi comparada com o comprimento de espalhamento para o caso óptico, $\vec{q} = 0$. Para nêutrons lentos, a contribuição da interação nuclear será a mesma para os dois casos. Por isso, a diferença entre esses dois comprimentos de espalhamento será dominada pela interação eletrônica entre o nêutron e átomo. De acordo com [59], temos:

$$b(1\text{eV}) - b(0) = Zb_{ne} - A \frac{mc^2}{2\pi\hbar c} g^2 \lambda^2 \frac{(q\lambda)^2}{1 + (q\lambda)^2} \left(1 - \frac{\ln \left(1 + 4 \left(\frac{\lambda}{5\text{pm}} \right)^2 \right)}{4 \left(\frac{\lambda}{5\text{pm}} \right)^2} \right), \quad (4.11)$$

onde Z é o número atômico.

Agora, o termo extra representa os efeitos da interação anômala no espalhamento. A partir da expressão acima (eq. 4.11), é possível estabelecer novos vínculos para a nova interação, utilizando os dados experimentais da medida do comprimento de espalhamento na interação nêutron-elétron, $b_{ne}^{\text{exp}} = \frac{b(1\text{eV}) - b(0)}{Z}$. Com as discrepâncias conhecidas nas medidas dessa quantidade, b_{ne}^{exp} , que é dada por $\Delta b_{ne} \leq 6 \times 10^{-4} \text{fm}$, pôde-se concluir que [59]

$$\frac{mc^2}{2\pi\hbar c} g^2 \lambda^2 \frac{(q\lambda)^2}{1 + (q\lambda)^2} \left(1 - \frac{\ln \left(1 + 4 \left(\frac{\lambda}{5\text{pm}} \right)^2 \right)}{4 \left(\frac{\lambda}{5\text{pm}} \right)^2} \right) \leq \Delta b_{ne}.$$

Na figura 4.8, esse vínculo é representado pela linha azul tracejada.

Ainda sobre espalhamentos de nêutron por núcleos, em um trabalho recente utilizou-se a interferometria de nêutron para se obter dados precisos dos fatores de estrutura do espalhamento entre o nêutron e o silício [60]. Além de colaborar para se obter valores dos raios de carga do nêutron, dada a ótima precisão requerida, os autores conseguiram obter limites fortíssimos sobre parâmetros de teorias alternativas da gravitação.

Após interagir com uma placa de silício, a onda de nêutrons incidentes será de-

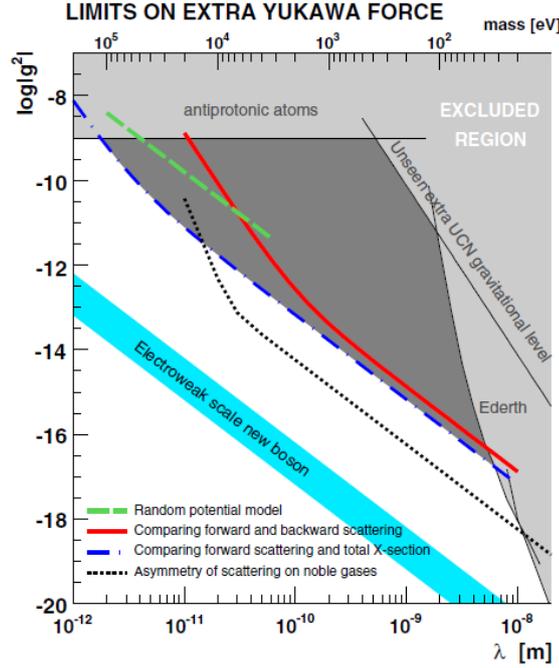


Figura 4.8: Comparação entre os limites de uma possível interação do tipo Yukawa em um experimento de espalhamento. O vínculo discutido nesta seção pode ser visto na linha vermelha sólida. Lembrando que $\alpha = (1,34 \times 10^{37}) g^2$. Figura retirada de [59].

composta em duas ondas, uma difratada e a outra transmitida. A diferença de fase entre as ondas difratadas e transmitida gerará picos de interferência dentro do cristal, fazendo surgir um padrão de interferência conhecido como *Pendellösung*⁶. Esse desvio de fase de pêndulo depende dos fatores de estrutura do material. Numa interação com nêutrons, esses fatores de estrutura podem ser descritos em termos das amplitudes de espalhamento elástica coerente de um único átomo [60]

$$f(\vec{q}) = \frac{2me^{-W}\tilde{V}(\vec{q})}{\hbar^2}, \quad (4.12)$$

onde $\tilde{V}(\vec{q})$ é a transformada de Fourier do potencial de interação entre o nêutron e o núcleo. O fator de Debye-Waller, $W = Bq^2/(16\pi^2)$, descreve o movimento térmico dos átomos na rede, onde B é determinado pelo deslocamento atômico térmico quadrático médio, $B = 8\pi^2 \langle u^2 \rangle$ [60].

Como vimos ainda nesse capítulo, uma interação anômala — que os autores tam-

⁶Do alemão, sig. *solução de pêndulo*.

bém denominaram de “quinta força” — pode ser estudada desde que seja incorporada na amplitude de espalhamento total, resultando em uma sensibilidade de $f(q)$ às interações BSM (Beyond Standard Model)! Logo, uma interação do tipo Yukawa nesse estudo serviria para empregarmos vínculos sobre esses novos parâmetros.

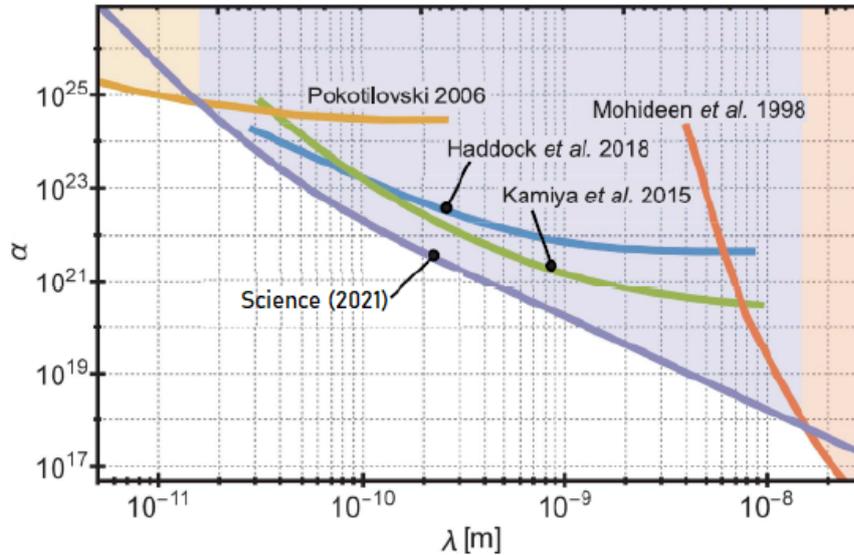


Figura 4.9: Comparação do vínculo do trabalho da Science, onde utilizou medidas interferométricas do padrão de pêndulo. Figura adaptada de [60].

Os autores perceberam que a comparação da amplitude de espalhamento Pendellösung para um determinado \vec{q} com o espalhamento direto, $f(0)$, possibilita extrairmos limites para uma interação anômala. Caso exista uma interação do tipo Yukawa entre o nêutron e o núcleo de silício, ela iria influenciar o espalhamento, e a modificação na razão entre $b(q)$ (o comprimento de espalhamento para um determinado q) e $b(0)$ seria dada pelo termo adicional expresso abaixo [60]:

$$\delta \left[\frac{b(q)}{b(0)} \right] e^W = \alpha \left(3,9 \times 10^{-27} \text{Å}^{-2} \lambda^2 \right) \frac{(q\lambda)^2}{1 + q^2 \lambda^2},$$

para o silício ($Z = 14$). O vínculo imposto naquele trabalho pode ser visualizado na figura 4.9

Os autores demonstram que os resultados obtidos são um aumento da ordem do vínculo em quase 3 décadas [60]! Eles também comentam que, caso o Germânio ($Z = 32$)

seja usado em futuras medidas, pode-se aumentar ainda mais esse vínculo sobre α em um fator de 5.

5 Vínculos Sobre Teorias Extra Dimensionais em Experimentos de Barreira Quântica Gravitacional

Neste capítulo vamos rediscutir o experimento do estado ligado do nêutron, considerando agora cenários de branas com espessura. Como veremos, isso nos permitirá evitar problemas de divergências no cálculo do potencial gravitacional anômalo, enfrentados por análises anteriores, que estudaram correções do tipo lei de potência para a gravitação. Por meio desse procedimento conseguimos superar limitações de trabalhos passados, encontrando novos vínculos para os parâmetros livres do modelo em qualquer dimensão.

Como já mencionamos anteriormente, os nêutrons, por sua capacidade de penetração na matéria, têm sido de grande ajuda para físicos que buscam estudar suas interações com os núcleos atômicos, conforme vimos no capítulo anterior. Sua neutralidade nos permite evitar a interação coulombiana, fazendo com que possamos testar a interação gravitacional numa escala de comprimento submilimétrica. Nos experimentos com nêutrons, estes interagem com os núcleos atômicos principalmente pela interação forte. Os dados extraídos são usados para determinar, com uma precisão altíssima, quantidades físicas importantes como a seção de choque e o comprimento de espalhamento direto do nêutron, por exemplo.

Neste capítulo, consideraremos mais uma vez o experimento que ficou conhecido como “quantum bouncer” [48], em que o nêutron fica verticalmente aprisionado entre um espelho refletor e o campo gravitacional terrestre. Sendo assim, submetido a ação da gravidade terrestre, o nêutron apresentaria uma quantização de sua energia. Essa quantização pode ser expressa por meio da altura máxima (pico de probabilidade) que o nêutron adquiriria após colidir com o espelho, que é da ordem de micrômetros. Do

ponto de vista conceitual isso é riquíssimo, pois demonstraria um efeito quântico (a discretização das alturas permitidas) sobre a matéria causada, em partes, pela gravidade newtoniana. Tendo em vista toda essa riqueza fenomenológica e conceitual, vários experimentos foram realizados a fim de demonstrar esse efeito, alguns deles foram citados no capítulo anterior.

O fato de a gravidade desempenhar um papel fundamental nessa escala de comprimento nos abre portas para estudar o quanto que a gravitação modificada de curto alcance poderia ser testada. Numa interação entre o nêutron e os núcleos que compõem o espelho, embora a interação gravitacional newtoniana seja desprezada, uma interação gravitacional anômala de curto alcance pode ser relevante, em princípio. De fato, usando a parametrização de Yukawa, trabalhos teóricos foram feitos com o objetivo de impor limites sobre os parâmetros α e λ [20] [18] [56] [57] [20] [58]. Na referência [20] concluiu-se que para que uma interação desse tipo ocorra é necessário que o fator de amplificação da gravidade modificada seja $\alpha < 10^{15}$, para um alcance de $\lambda = 1\mu m$. Por outro lado, usando a parametrização do tipo lei de potências, limites foram obtidos para essa perturbação em cenários onde $\delta \leq 4$ [58]. Ainda sobre esse tipo de parametrização, lei de potências, trazemos uma forma de evitar os problemas de divergências que ocorrem no cálculo do potencial interno nesse cenário de dimensões mais altas. Como mostrado por [58] (e brevemente discutido no capítulo anterior), no caso de $\delta > 4$, em um cenário onde a brana não tem espessura, surgem divergências que impedem a formação de estados ligados para esse número de dimensões extras. No entanto, como demonstraremos, ao considerar uma brana com espessura finita σ , obtemos um resultado interno finito, a partir do qual é possível extrair vínculos sobre os parâmetros extradimensionais.

5.1 A Barreira Quântica Gravitacional

Experimentos do tipo quantum bouncer foram desenvolvidos com o objetivo de analisar se a interação gravitacional poderia criar estados ligados em nêutrons ultra frios. Nesse tipo de configuração, nêutrons são emitidos e, ao atravessar uma fenda, percorrem uma região limitada por um espelho na parte inferior, cujo comprimento é de 10cm , e um absorvedor na parte superior, formando outra fenda, cuja abertura pode ser ajustável (veja novamente a Fig. 4.6). Essa fenda ajustável serve, entre outras finalidades, para filtrar a velocidade vertical dos nêutrons que chegam ao detector. Por exemplo, caso a fenda formada pelo absorvedor e o espelho seja de $125\mu\text{m}$, apenas nêutrons com velocidade vertical abaixo de 5cm/s evitariam entrar em contato com o absorvedor e poderiam chegar ao detector [21].

A interação dominante com o espelho (um bloco de vidro com $10\text{cm} \times 10\text{cm} \times 3\text{cm}$) se dá via interação nuclear. Para nêutrons ultra frios, o potencial de interação pode ser descrito pelo pseudopotencial de Fermi [56]. Dado o grande comprimento de onda do nêutron desse experimento, essa interação pode ser escrita em termos do potencial óptico [15]

$$U_{\text{óptico}} = \frac{2\pi\hbar^2}{m}Nb, \quad (5.1)$$

onde m é a massa do nêutron, b é o comprimento médio de espalhamento e N é o número de densidade atômica do espelho. Vale ressaltar que o potencial óptico é uma quantidade fenomenológica, ou seja, é obtido de maneira empírica. Para o espelho usado nesse tipo de experimento, o valor de $U_{\text{óptico}}$ é, aproximadamente, 100neV [21]. Com isso já podemos constatar o poder de reflexão do espelho nesse experimento pois, os nêutrons possuem velocidades verticais muito baixas, da ordem de alguns peV , ou seja, muito menor do que o potencial óptico. Sob tais condições, o espelho pode ser considerado perfeitamente reflexivo.

Seguindo essa descrição, podemos escrever o potencial total desse sistema da seguinte

forma [21] [62]:

$$U(z) = \begin{cases} \infty, & \text{para } z < 0, \\ mgz, & \text{para } z \geq 0, \end{cases}$$

onde z é a altura do nêutron em relação ao espelho e g é a aceleração da gravidade da Terra.

A equação de Schrödinger independente do tempo para $z \geq 0$ fica

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dz^2} + mgz\psi = E\psi.$$

Podemos desenvolver essa equação em termos de quantidades adimensionais [62]:

$$\frac{d^2}{d(z/z_0)^2} \psi(z) - \left(\frac{z}{z_0} - \frac{2mz_0^2}{\hbar^2} E \right) \psi(z) = 0, \quad (5.2)$$

onde

$$z_0 = \left(\frac{\hbar^2}{2m^2g} \right)^{1/3}$$

é um comprimento característico cujo valor para o nêutron é $z_0 \simeq 5,8\mu\text{m}$ [18] [21].

Podemos ainda reescrever a equação (5.2) por [62] [21]

$$\frac{d^2}{dy^2} \psi(y) - (y - \varepsilon) \psi(y) = 0,$$

onde definimos $y = z/z_0$ e $\varepsilon \equiv E/E_0$, com

$$E_0 \equiv \frac{\hbar^2}{2mz_0^2}.$$

Por fim, definindo $\xi = y - \varepsilon$, finalmente chegamos à equação de Airy¹

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \psi(\xi) - \xi \psi(\xi) = 0.$$

¹A equação leva o nome do do astrônomo e físico britânico George Biddell Airy que a descobriu em 1938 após seus estudos sobre óptica.

A solução dessa equação é dada pela função de Airy

$$\psi(\xi) = N Ai(\xi) + M Bi(\xi),$$

cujos comportamentos podem ser vistos na figura abaixo

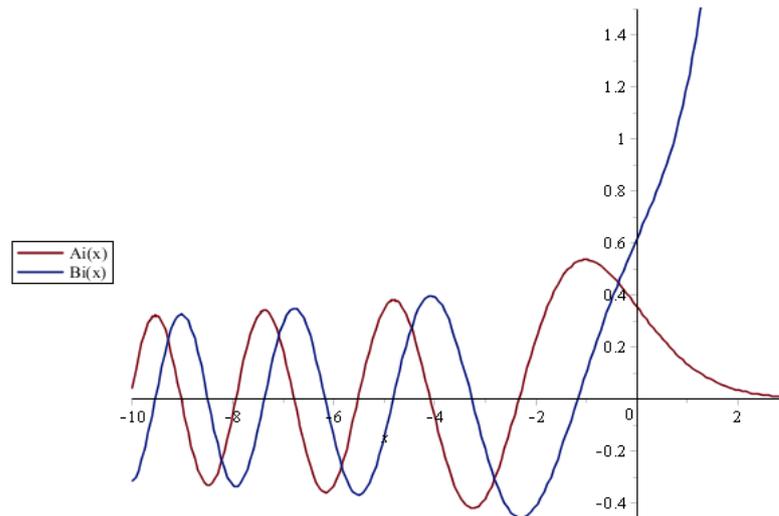


Figura 5.1: Comportamento das funções de Airy $Ai(x)$ e $Bi(x)$. Conforme elas vem de $-x$ e se aproximam de 0 perdem o padrão oscilante. A função $Ai(x)$ decai muito rapidamente no eixo positivo de x , enquanto que a função $Bi(x)$ cresce rapidamente.

Voltando para a variável z , teremos

$$\psi(z) = N Ai\left(\frac{z - E/mg}{z_0}\right) + M Bi\left(\frac{z - E/mg}{z_0}\right).$$

Contudo, a função de Airy $Bi\left(\frac{z - E/mg}{z_0}\right)$ diverge assintoticamente, de modo que a solução da equação de Airy que descreve o estado ligado deve ser do tipo:

$$\psi(z) = N Ai\left(\frac{z - E/mg}{z_0}\right).$$

Para satisfazer a condição de contorno no espelho, i.e, $\psi = 0$ em $z = 0$, o argumento da função Ai , ou seja, $-E/(mgz_0)$, deve ser igual a uma raiz da função Ai . Como as raízes dessa função (ver a figura acima, por exemplo) formam um conjunto discreto,

então, conclui-se que a energia dos estados ligados esta quantizada. Dessa forma, a função de onda do nêutron normalizada pode ser escrita como:

$$\psi_n(\zeta) = N_n Ai(\zeta - \zeta_n), \quad (5.3)$$

onde $\zeta = z/z_0$, a constante de normalização, N_n é dada por [58]

$$N_n = \frac{z_0^{-1/2}}{|Ai'(-\zeta_n)|},$$

onde $\zeta_n = \frac{E_n}{z_0 mg}$ corresponde às raízes da função de Airy, de modo a satisfazer as condições de contorno em $z = 0$. Note que $\zeta_n z_0$ pode ser visto também como os pontos de retorno clássicos. Assim, fica claro o surgimento de uma discretização na energia do nêutron que se traduz em certas alturas permitidas que o nêutron pode alcançar após a colisão com o espelho (veja a Fig.5.2).

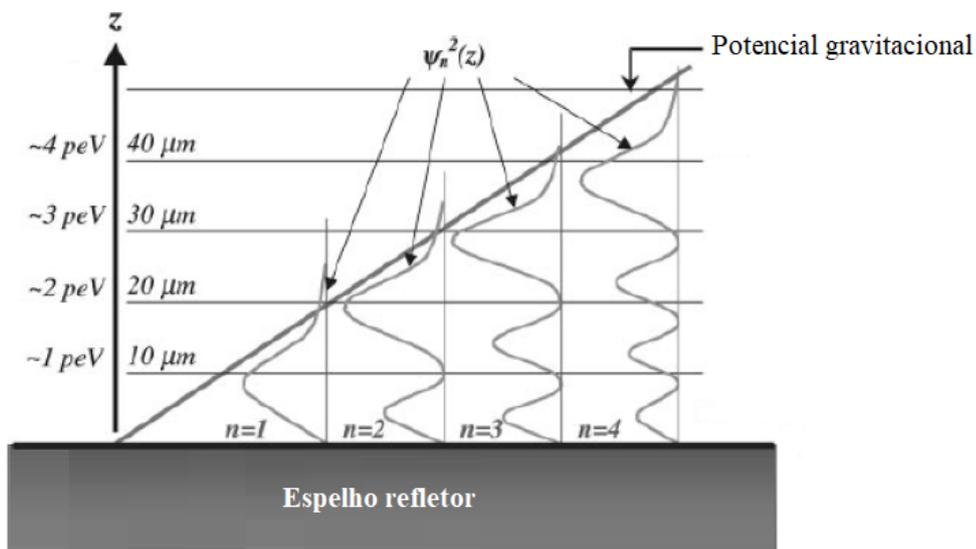


Figura 5.2: Configuração do estado ligado do nêutron. A linha sólida representa o potencial gravitacional mgz que atua no nêutron. No interior do espelho temos o pseudo-potencial de Fermi, considerado infinito neste experimento. Assim, os autoestados do nêutron encontram-se confinados. Nesta figura, apenas os autoestados com n até 4 foram considerados. Figura adaptada de [63].

Esse caráter quântico sobre as alturas que o nêutron pode atingir, impacta diretamente na taxa de transmissão dos nêutrons que chegam ao detector. Por exemplo, se

a fenda formada pelo espelho e o absorvedor for menor do que a altura correspondente ao ponto de retorno mais baixo (ou seja, $z_0 \zeta_1 = 13,7 \mu m$), não haverá nêutrons chegando no detector. Esse comportamento não pode ser explicado de forma clássica, uma vez que tendo um fluxo de partículas clássicas cujas velocidades estão distribuídas uniformemente, podemos esperar que partículas alcancem o detector sempre, para qualquer separação entre o espelho e o absorvedor.

Experimentos foram realizados a fim de observar esse padrão discreto. De acordo com [58], o estado mais baixo, ou seja, $n = 1$, deve ter a seguinte altura:

$$h_1^{\text{exp}} = 12,2 \mu m \pm (1,8_{\text{sys}} + 0,7_{\text{stat}}) \mu m.$$

Observe que o valor teórico [58] ($h_1^{\text{teórico}} = 13,7 \mu m$) está próximo do valor experimental. Com esses valores para 1σ de nível estatístico, pode-se dizer que eles coincidem. Sendo assim, essa concordância impõe limites sobre uma nova e hipotética interação gravitacional.

Para essa escala de comprimento, é natural ignorar a gravitação newtoniana entre o nêutron e o espelho, contudo, para uma interação modificada, podemos ter uma amplificação da sua intensidade. Tendo isso em vista, a energia potencial do sistema, além do termo newtoniano terrestre, pode ter um novo termo, que denotaremos por $U_A(z)$ [21]

$$U_G = mgz + U_A(z).$$

Com a adição desse novo termo, a consequência que esperamos é que haja uma perturbação nos autovalores de energia do nêutron. Essa perturbação poderia se manifestar na mudança das alturas permitidas do nêutron. Vale lembrar que, uma vez que os valores teórico e experimental das alturas dos estados ligados estão em acordo, essa modificação nas alturas não deve exceder o erro experimental.

Nas próximas seções iremos calcular esse termo anômalo considerando um cenário

de dimensões extras e depois vamos estudar o quão grande esse termo pode ser, sem contradizer os dados experimentais disponíveis.

5.2 Potencial Gravitacional Modificado em Branas com Espessura

Como discutido no capítulo 2, no modelo ADD o universo possui dimensões extras cuja topologia é a de um toro. Numa topologia fechada, o raio da dimensão extra, R , poderia ser, em princípio, da ordem submilimétrica, sem contradição com os dados experimentais [4]. Caso haja matéria neste espaço-tempo extradimensional, ocorrerá mudanças na geometria, dada a distribuição de massa. Para campos confinados, a energia e o momento ficarão concentrados na brana. Essa configuração pode ser descrita por um tensor momento-energia com a seguinte forma [10] [21]:

$$T_{AB} = \eta_A^\mu \eta_B^\nu T_{\mu\nu}(x) f(w). \quad (5.4)$$

A notação usada aqui usa as letras latinas, A e B , indo de 0 até $3 + \delta$, ou seja, descrevem todo o espaço, e as letras gregas vão de 0 a 3, descrevendo o espaço-tempo ordinário no interior da brana. Temos também que a coordenada x descreve os pontos na brana e a coordenada w descreve pontos no espaço extradimensional. O tensor η_{AB} é a métrica do espaço-tempo de Minkowski, $T_{\mu\nu}(x)$ é o tensor momento-energia usual definido na brana e a função $f(w)$ descreve a distribuição de energia na direção transversal da brana. Caso consideremos a brana como não tendo espessura, a função $f(w)$ é uma função do tipo delta de Dirac, caso a brana possua uma espessura não-nula, a função $f(w)$ toma a forma de uma função regular e normalizada.

Como sabemos, no regime de campo fraco a métrica pode ser escrita como

$$g_{AB} = \eta_{AB} + h_{AB},$$

onde h_{AB} obedece às equações linearizadas de Einstein [14] [21]

$$\square h_{AB} = -\frac{16\pi G_D}{c^4} \bar{T}_{AB}, \quad (5.5)$$

em um gauge harmônico. \square é o operador d'Alembertiano associado com a métrica de Minkowski, onde a assinatura usada é $(-, +, \dots, +)$. A constante gravitacional G_D extradimensional é diretamente proporcional à constante gravitacional universal usual, a relação entre elas depende do volume do espaço extradimensional, ou seja, $G_D = (2\pi R)^\delta G$ [10]. O termo de fonte é expresso como

$$\bar{T}_{AB} = T_{AB} - \frac{1}{\delta + 2} \eta_{AB} T^C_C. \quad (5.6)$$

A solução da equação (5.5) pode ser obtida e depende da topologia que estamos adotando. Para curtas distâncias, podemos apenas considerar o termo dominante. No regime estático, teremos [14] [21]

$$h_{AB}(\vec{X}) = \frac{16\pi\Gamma\left(\frac{\delta+3}{2}\right) G_D}{(\delta+1) 2\pi^{(\delta+3)/2} c^4} \int \frac{\bar{T}_{AB}(\vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|^{1+\delta}} d^{3+\delta} X', \quad (5.7)$$

onde \vec{X} e \vec{X}' são coordenadas do espaço total. Como já apontado pela referência [14], essa aproximação não depende em detalhes da topologia do espaço extradimensional que estamos adotando. Como vimos no capítulo 2, num espaço com dimensões extras compactas com topologia de um toro, a solução completa pode ser obtida em termos das imagens topológicas, que surgem em decorrência da compactação toroidal. Na equação acima a solução depende apenas do termo dominante, conseqüentemente, ela se torna uma aproximação conservadora, dado que estamos ignorando a contribuição das demais massas imagens [14]. Contudo, embora seja uma aproximação conservadora, ela ainda pode ser útil para estudarmos vínculos sobre tais teorias extradimensionais.

No regime de campo fraco, a solução (5.7) pode ser usada para determinar o poten-

cial gravitacional produzido pelo espelho, uma vez que

$$\varphi = -\frac{c^2 h_{00}}{2}. \quad (5.8)$$

Com esse potencial poderemos calcular a energia gravitacional correspondente, $U_A = m\varphi$.

5.2.1 O Potencial Gravitacional Anômalo Produzido pelo Espelho

Dada escala de comprimento envolvida, considere o espelho como uma placa semi-infinita, como sendo a fonte do potencial gravitacional. Como se trata de uma fonte não-relativística, logo, a componente do tensor momento-energia que utilizaremos será simplesmente a componente 00, ou seja [21]

$$T_{00} = c^2 \varrho(x) f_N(w). \quad (5.9)$$

Nessa equação, ϱ é a densidade de massa do espelho e $f_N(w)$ é o perfil da distribuição de massa dos núcleos na direção ortogonal à brana. Usando esse tensor momento-energia, podemos determinar a energia potencial gravitacional. Substituindo (5.9) em (5.7) e (5.8), obtemos:

$$U_{A,ext}(z) = -\frac{2\pi m \hat{G}_D \rho}{(\delta - 1)} \int \frac{f_N(w') dz' d^\delta w'}{[(z - z')^2 + w'^2]^{(\delta-1)/2}},$$

onde a constante \hat{G}_D é definida da seguinte forma [14]:

$$\hat{G}_D = \frac{4\Gamma\left(\frac{\delta+3}{2}\right)}{(\delta+2)\pi^{(\delta+1)/2}} G_D. \quad (5.10)$$

No limite em que $z \gg \sigma$, podemos determinar a energia sem depender da função $f(w)$. Assim, o resultado é obtido como se tivéssemos calculado a energia num cenário em que a brana não possui espessura. Para $\delta > 2$, temos que o potencial gravitacional

fica

$$\varphi_{ext}(z) = -\frac{2\pi\hat{G}_D\rho}{(\delta-1)(\delta-2)}\frac{1}{z^{\delta-2}}. \quad (5.11)$$

Embora esse potencial possui uma divergência em $z = 0$, o valor médio da energia potencial associada é finito para os nêutrons que se encontram em estados ligados. Podemos demonstrar isso expandindo a função de Airy nas vizinhanças de $z = 0$ (apêndice B)

Como veremos adiante, ao assumir que a brana possui uma espessura, é possível obter o potencial interno. Logo, o potencial externo (equação 5.11) deve recair na expressão do potencial interno quando tomarmos $z = 0$. Uma forma simples de fazer isso é modificar o potencial externo introduzindo um termo $v\sigma$ (onde v é um parâmetro adimensional) de modo a satisfazer a continuidade do potencial dentro e fora do espelho [58]

$$\varphi_{ext}(z) = -\frac{2\pi\hat{G}_D\rho}{(\delta-1)(\delta-2)}\frac{1}{(z+v\sigma)^{\delta-2}}, \text{ para } \delta > 2. \quad (5.12)$$

5.2.1.1 Potencial Interno

Como já falamos anteriormente, caso consideremos a brana com uma espessura infinitamente fina, aparecerão problemas de divergência no cálculo do potencial no interior do espelho (nesse caso a distribuição de massa será dada por uma delta de Dirac), inviabilizando a determinação da energia potencial interna. Podemos contornar esse problema assumindo que a brana possui uma espessura não-nula. Dessa forma, a massa bariônica da matéria confinada está distribuída de forma regular ao longo da dimensão extra e será descrita por uma função não-singular $f_N(w)$ [14]. Para um ponto \vec{x} no centro da brana (ou seja, $w = 0$), o potencial interno fica

$$\varphi_{int}(\vec{x}) = -\hat{G}_D \int \frac{\rho f_N(w')}{[|\vec{x} - \vec{x}'|^2 + w'^2]^{\frac{\delta+1}{2}}} d^3x' d^\delta w'.$$

Assumindo que a densidade de massa do material é praticamente constante dentro

da placa, a integração sobre a 3-bola suficientemente pequena (com um raio da ordem da espessura da brana), em torno de x nos dá, em primeira ordem,

$$\varphi_{int}(x) \simeq -\beta \frac{G_D \rho}{\sigma^{\delta-2}}, \quad (5.13)$$

onde β é uma constante que depende apenas do número de dimensões extras [21]

$$\beta = 4 \frac{(\delta + 1)}{(\delta^2 - 4) \pi^{(\delta-1)/2}}, \quad (5.14)$$

e a quantidade σ está relacionado com a distribuição de massa na direção transversal através da expressão [14]:

$$\frac{1}{\sigma^{\delta-2}} = \Gamma\left(\frac{\delta}{2}\right) \int \frac{f_N(w)}{w^{\delta-2}} d^\delta w.$$

Com isso, podemos concluir que a maior contribuição para o potencial interno vem do valor esperado de $w^{\delta-2}$ com respeito a função de distribuição $f_N(w)$.

Uma vez obtido o potencial interno, podemos usar a condição de continuidade do potencial dentro e fora do espelho em $z = 0$ para determinar o valor que o parâmetro v deve assumir na equação (5.12). Dessa forma, usando (5.10) e (5.14) na condição de continuidade do potencial, obtemos a seguinte expressão para v :

$$v = \left[\frac{\Gamma\left(\frac{\delta+1}{2}\right)}{(\delta-1)} \right]^{\frac{1}{\delta-2}}, \text{ para } \delta > 2.$$

Como podemos ver pela expressão (5.1) o potencial óptico é dado em termos do comprimento de espalhamento b do nêutron interagindo com os núcleos do espelho. Aqui vamos supor que esse comprimento de espalhamento possui uma contribuição extra decorrente da interação gravitacional anômala. Dessa forma, o comprimento de espalhamento efetivo pode ser escrito como $b = \bar{b}_N + \bar{b}_A$, onde \bar{b}_N é a média do comprimento de espalhamento da interação nuclear do nêutron com os núcleos do material e

\bar{b}_A é a contribuição vinda da interação gravitacional modificada com os núcleos [21].

Usando a aproximação de Born (equação 4.7), o comprimento de espalhamento b_A pode ser descrito em termos do potencial gravitacional produzido por um único átomo, $\varphi_a(\vec{x})$, ou seja [64]

$$b_A = \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int m\varphi_a(\vec{x}) d^3x. \quad (5.15)$$

Como dito antes, caso o cálculo seja feito considerando a brana infinitamente fina, esse cálculo divergirá, para $\delta > 2$, contudo, para um cenário de brana com espessura evitamos esse problema. O potencial atômico possui o mesmo comportamento que vimos em (5.13). Contudo, o potencial φ_a de um único átomo será proporcional à *densidade nuclear* [14] e não à densidade atômica, ρ . Logo, o comprimento de espalhamento obtido da equação (5.15) terá contribuições majoritariamente da região nuclear. Conforme demonstrado em [14], com o potencial calculado na região nuclear, o comprimento de espalhamento obtido depende da massa do núcleo atômico. Tomando a média de b_A sobre os diferentes átomos do material, obtemos o comprimento de espalhamento médio, \bar{b}_A . Assim, a contribuição do potencial modificado para o potencial óptico pode ser calculada substituindo \bar{b}_A em 5.1. Essa contribuição será dada pela média da energia potencial gravitacional do nêutron dentro do núcleo, $U_{A,int} = m\varphi_{int}$. Com isso, podemos concluir que o potencial óptico, no cenário de brana com espessura, pode ser escrito da seguinte forma [21]:

$$U_{op} = \frac{2\pi\hbar^2}{m} N b_N - \frac{m\beta G_D \rho}{\sigma^{\delta-2}}. \quad (5.16)$$

Outras interações como nêutron-elétron, são muito pequenas, quando comparadas com a interação nuclear dominante, por esse motivo não estão sendo levadas em consideração neste experimento.

5.3 Novos Vínculos

Vimos que a nova interação adicionou um termo extra na energia do sistema. Nossa hipótese é que isso provoca perturbações nos níveis de energia do nêutron, uma vez que a interação modificada é menor que a interação nêutron-Terra. Usando o formalismo de teoria de perturbação, sabemos que o desvio na energia é igual ao valor médio da energia potencial gravitacional modificada calculada nos autoestados, dados na Eq. (5.3). Assim, a energia do nêutron sofrerá uma perturbação dada pela seguinte quantidade

$$\begin{aligned}\langle U_A \rangle_n &= -\frac{2\pi m \hat{G}_D \rho}{(\delta-1)(\delta-2)} \int_0^\infty N_n^2 \left| Ai \left(\frac{z}{z_0} - \zeta_n \right) \right|^2 \frac{1}{(z + v\sigma)^{\delta-2}} dz, \\ &= -\frac{2\pi m \hat{G}_D \rho}{(\delta-1)(\delta-2)} \frac{z_0^{-1}}{|Ai'(-\zeta_n)|^2 z_0^{\delta-2}} \int_0^\infty \frac{Ai^2 \left(\frac{z+v\sigma}{z_0} - \zeta_n - \frac{v\sigma}{z_0} \right)}{\left(\frac{z+v\sigma}{z_0} \right)^{\delta-2}} dz.\end{aligned}$$

Definindo $\eta = (z + v\sigma)/z_0$, a expressão fica

$$\langle U_A \rangle_n = -\frac{2\pi m \hat{G}_D \rho}{(\delta-1)(\delta-2)} \frac{z_0^{2-\delta}}{|Ai'(-\zeta_n)|^2} \int_{v\sigma/z_0}^\infty \frac{Ai^2(\eta - \zeta_n - v\sigma/z_0)}{\eta^{\delta-2}} d\eta. \quad (5.17)$$

Observe que essa quantidade é negativa, o que era esperado para uma interação supostamente atrativa. Isso implica que a interação entre o nêutron e o espelho causará uma diminuição nas alturas dos pontos de retorno dos nêutrons em estados ligados.

Como essa quantidade não pode exceder o erro experimental, podemos estimar um limite superior para a intensidade da interação anômala. Para o primeiro estado, $n = 1$, a mudança na altura não pode exceder $2,5 \mu m$ [21]. Isso implica que $|\langle U_A \rangle_1| < 0,3 \text{ peV}$. Essa condição impõe vínculos sobre os parâmetros do modelo que estamos utilizando. Para escrever esse limite em termos de G_D e σ , podemos utilizar a equação anterior. Um limite para $\langle U_A \rangle_1$ pode ser realizado tomando a função de Airy pela unidade, uma vez

que, $|Ai|^2 < 1$. Dessa forma, para $\delta > 3$, teremos que a equação (5.17) se torna

$$\langle U_A \rangle_n < \frac{2\pi\gamma m \hat{G}_D \rho}{(\delta - 1)(\delta - 2)(\delta - 3)} \frac{(v\sigma)^{2-\delta}}{|Ai'(-\zeta_n)|^2} \left(\frac{\sigma}{z_0} \right). \quad (5.18)$$

Logo, comparando esse resultado com o potencial interno que obtivemos (Eq. 5.13), podemos ver que esse limite é menor que a energia potencial interna por um fator proporcional a σ/z_0 que, para branas realísticas [21] ($\sigma \sim 10^{-19}m$), é menor que 10^{-12} . Podemos ainda obter uma estimativa mais precisa desse limite tomando uma expansão da autofunção sobre a superfície da placa (Apêndice B):

$$\langle U_A \rangle_n \simeq -\frac{2\pi m \hat{G}_D \rho v^3}{(\delta - 1)(\delta - 2)(\delta - 5)} (v\sigma)^{2-\delta} \left(\frac{\sigma}{z_0} \right)^3.$$

Podemos ver que essa contribuição é menor do que a energia potencial interna por um fator de $(\sigma/z_0)^3$. Com base nessas observações, somos levados a concluir que os melhores limites neste experimento devem ser obtidos da análise da influência do potencial gravitacional interno no potencial óptico.

Mesmo sendo considerado uma quantidade semi-fenomenológica, cálculos *ab initio* do potencial óptico do nêutron para alguns elementos produziram ótimos resultados [65], isto é, concordam com os valores experimentais. Dessa forma, a obtenção do potencial óptico por primeiros princípios reforça a confiança do modelo padrão da física nuclear mesmo em regimes de baixas energias [65]. Assim, como predito pelo modelo padrão, o potencial óptico terá como parte dominante a interação nuclear entre o nêutron e os núcleos, ou seja, o potencial óptico deverá ser praticamente igual ao pseudo-potencial de Fermi. Isso implica que uma nova interação, como a gravitacional modificada, não deverá ser da mesma ordem que U_F . Caso isso não seja respeitado, haverá nêutrons que não serão refletidos, impossibilitando a formação dos estados ligados na direção vertical.

Tendo isso em mente, podemos tomar mais um limite para essa nova interação,

$$\frac{m\beta G_D \rho}{\sigma^{\delta-2}} < U_F = 10^{-7} \text{eV}. \quad (5.19)$$

Com isso, obtemos um novo vínculo para os parâmetros G_D e σ . Com esses dois parâmetros podemos definir uma escala de energia dada por $\Lambda = hc (\sigma^{\delta-2}/l_D^{\delta+2})^{1/4}$, onde $l_D^{\delta+2} = G_D \hbar/c^3$ é a escala de comprimento associada com a constante extradimensional G_D [21]. Assim, as quantidades G_D e σ em termos dessa escala de energia efetiva ficam

$$\frac{G_D}{\sigma^{\delta-2}} = \frac{2\pi h^3 c^7}{\Lambda^4}. \quad (5.20)$$

Logo, podemos reescrever a condição sobre o potencial modificado agora escrito em termos de Λ :

$$U_F > \beta \frac{m G_D \rho}{\sigma^{\delta-2}},$$

$$\Lambda^4 > \frac{8(\delta+1)}{(\delta^2-4)\pi^{(\delta-3)/2}} \frac{h^3 c^7 m \rho}{U_F}, \quad (5.21)$$

onde utilizamos a definição de β , dada na equação (5.14).

Para $\rho \simeq 2,5 \text{g/cm}^3$, aproximadamente a densidade do espelho usado no experimento, obtemos os seguintes limites para Λ

	$\delta = 3$	$\delta = 4$	$\delta = 5$	$\delta = 6$
$\Lambda >$	0,94 GeV	0,69 GeV	0,54 GeV	0,44 GeV

Vale lembrar que esses vínculos são muito fracos, quando comparados com os vínculos obtidos com colisões de partículas em altas energias em colisores, como o LHC. Contudo, as energias envolvidas em experimentos de quantum bouncer são da ordem de peV. Assim, podemos testar o modelo de dimensões extras numa escala muito menor do que a escala de energia alcançada em colisores (ordem de TeV [66]). Além disso, a dependência de Λ em relação a σ é um resultado interessante, uma vez que σ pode de-

pende da natureza da partícula em certas versões de modelos de brana com espessura. Nestes modelos é teorizado que partículas diferentes estão localizadas em diferentes locais na brana [67]. Dessa forma, utilizar esse experimento com nêutrons também pode auxiliar na análise dessa hipótese, já que as partículas envolvidas em quantum bouncer são de natureza distinta das usadas em experimentos de colisores de altas energias.

Outro ponto que vale mencionar é que em trabalhos anteriores, o potencial gravitacional modificado, na parametrização da lei de potências, só poderia ser calculado para um número pequeno de dimensões extras, $\delta < 5$. Isso ocorre porque os modelos de brana adotados até então levavam a problemas de divergências, quando se calculava o potencial de interação modificado entre o nêutron e o núcleo no interior do espelho. Conforme vimos neste capítulo, conseguimos evitar esse problema considerando que a brana possui uma espessura finita, σ . Assim, podemos observar que estados ligados do nêutron são permitidos para cenários em que $\delta > 5$.

6 *Estrutura Não-Bariônica Como Fonte do Campo Gravitacional em Experimentos de Polarizabilidade do Nêutron*

Como mostrado no capítulo 4 (seção 4.1), é possível utilizar a técnica da interferometria para investigar a interação gravitacional entre um nêutron como partícula incidente e uma amostra extensa, num cenário de dimensões extras, por exemplo. Outro aspecto destacado anteriormente, foi a possibilidade de usar a interferometria para examinar desvios na interação gravitacional entre o nêutron e a energia de um campo elétrico produzido em um capacitor. Essa interação, não prevista pela gravitação newtoniana, está de acordo com a Relatividade Geral dado que, o campo elétrico possui energia, e qualquer forma de energia é capaz de curvar o espaço-tempo, isto é, gerar um campo gravitacional.

Com esse estudo foi possível observar o quanto a fase do nêutron se modificava ao atravessar o interior de um capacitor, onde havia um campo elétrico atuante [14]. Vimos que (equação 4.2) o desvio de fase gerado por essa interação gravitacional pós-newtoniana depende da intensidade do campo elétrico ao quadrado. No experimento que analisamos, se produz um campo com intensidade de 30 kV/mm. Mesmo com essa intensidade relativamente alta para campos gerados em laboratório, os vínculos experimentais que encontramos foram muito fracos [14]. Tentando determinar vínculos mais restritivos, pretendemos analisar essa interação, examinando agora o espalhamento do nêutron por um núcleo pesado. No processo de colisão com o espelho, o nêutron estará em contato com o campo elétrico produzido pelo núcleo. Na vizinhança de um núcleo, o campo tem intensidade da ordem de 10^{23} V/m [23]. Portanto, muitas vezes maior do que o campo de um capacitor. Com este propósito, analisaremos os experimentos de colisão voltados para a medição da polarizabilidade elétrica do nêutron. A razão disso é que a interação entre o campo elétrico e momento de dipolo induzido do nêutron

também depende do quadrado da intensidade elétrica. Como veremos, com base nos dados desse experimento, vamos determinar vínculos muito mais fortes sobre desvios dessa interação gravitacional pós-newtoniana.

6.1 Polarizabilidade do Nêutron

Sabemos que partículas, como Hádrons, possuem uma estrutura interna [26] [22] [23] [68]. Com esse fato teorizou-se que o nêutron teria uma polarizabilidade elétrica e magnética, α_n e β , respectivamente¹ [23]. Caso o nêutron esteja submetido a um campo elétrico \vec{E} externo, o momento de dipolo elétrico induzido será [69]

$$\vec{D} = 4\pi\epsilon_0\alpha_n\vec{E}, \quad (6.1)$$

onde α_n tem dimensão de comprimento ao cubo.

Por sua vez, a energia potencial da interação entre o dipolo e campo elétrico é proporcional ao produto $\vec{D} \cdot \vec{E}$. Assim, como o dipolo do nêutron é induzido, a energia de interação é quadrática no campo elétrico:

$$V_p = -2\pi\epsilon_0\alpha_n E^2. \quad (6.2)$$

Essa resposta do nêutron ao campo elétrico externo possui grande importância para modelos que visam entender a estrutura interna do nêutron, como o modelo de quarks [69], além da própria física nuclear, onde essa estrutura interna do nêutron pode ser explorada.

Diversos modelos surgiram para estimar o valor da polarizabilidade elétrica. Modelos como do quark de valência e outros [23] chegaram a um valor de $\sim 1 \times 10^{-3} fm^3$ para α_n . Tal valor extremamente pequeno faz com que o campo elétrico necessário para

¹Chamamos a atenção do leitor neste momento para não confundir α_n (polarizabilidade do nêutron) com o parâmetro de Yukawa, α , utilizado neste trabalho.

evidenciar esse efeito tenha que ser necessariamente grande, algo nada trivial do ponto de vista prático. Contudo, vale lembrar que os campos elétricos mais forte disponíveis são encontrados perto da superfície de núcleos pesados, como o ^{208}Pb . Esses campos podem alcançar valores como 10^{23}V/m [23]!. Para fins de comparação, os campos elétricos artificiais mais fortes alcançados na Terra possuem o valor de $10^{13} - 3 \times 10^{14}\text{V/m}$ [70]. É por esse motivo que se utiliza núcleos pesados em estudos de polarizabilidade do nêutron. Nesses estudos investiga-se a amplitude de espalhamento do nêutron com núcleo pesado e, conseqüentemente, sua seção de choque. Em especial, a parte da seção de choque linear no vetor de onda, k . Veremos ainda nesse capítulo o quanto essa contribuição proporcional a k é fundamental na determinação da polarizabilidade do nêutron.

6.2 Potencial Gravitacional Gerado pelo Campo Elétrico

Como discutido no capítulo 4, no regime de campo fraco, é possível obter uma solução para o potencial extradimensional. Nesse regime, a métrica linearizada é dada por

$$g_{AB} = \eta_{AB} + h_{AB},$$

onde h_{AB} satisfaz as equações linearizadas de Einstein,

$$\square h_{AB} = -\frac{16\pi G_D}{c^4} \bar{T}_{AB}.$$

O tensor reduzido \bar{T}_{AB} é escrito em termos do tensor momento energia T_{AB} que, no cenário em que os campos estão confinados na brana, é escrito da seguinte forma:

$$T_{AB} = \eta_A^\mu \eta_B^\nu T_{\mu\nu}(x) f(w), \quad (6.3)$$

onde $f(w)$ descreve a distribuição de energia na direção transversal à brana.

Como o nêutron incidente no experimento que iremos analisar pode ser considerado uma partícula não-relativística, o efeito gravitacional sobre o seu movimento pode ser descrito pela componente h_{00} . A partir da equação de campo [6.3](#), podemos verificar que o seu termo de fonte é a componente 00 do tensor energia-momento reduzido (\bar{T}_{00}). Decompondo o tensor da fonte em termos da densidade de energia (u) e da pressão média (\hat{P}), temos [\[14\]](#):

$$\bar{T}_{00} = \frac{(\delta + 1)}{(\delta + 2)}u + \frac{3}{(\delta + 2)}\hat{P}. \quad (6.4)$$

Assim, a equação para h_{00} pode ser escrita como:

$$\square h_{00} = -\frac{16\pi G_D}{c^4} \left[\frac{(\delta + 1)}{(\delta + 2)}u + \frac{3}{(\delta + 2)}\hat{P} \right]. \quad (6.5)$$

Caso consideremos o campo elétrico como sendo a fonte (não-bariônica) para o campo gravitacional, devemos levar em consideração seu tensor energia-momento que, em termos do tensor eletromagnético ($F_{\mu\nu}$) é dado por:

$$T_{\mu\nu}^{EM} = \epsilon_0 c^2 \left(F_{\mu\lambda} F_{\nu}^{\lambda} - \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right). \quad (6.6)$$

Para um campo eletrostático, como o produzido pelo núcleo, a densidade de energia é $u = \epsilon_0 E^2/2$ e a pressão média será $\hat{P} = u/3$.

Substituindo essas relações na equação [6.5](#), obtemos a seguinte relação para h_{00} :

$$h_{00}(\vec{X}) = \frac{16\pi\Gamma\left(\frac{\delta+3}{2}\right)}{(\delta+1)2\pi^{(\delta+3)/2}c^4} G_D \frac{1}{2}\epsilon_0 \int \frac{E^2(x')f(z)}{(|\vec{x}-\vec{x}'|^2+z^2)^{\frac{1+\delta}{2}}} d^3x' d^\delta z, \quad (6.7)$$

onde $f(z)$ aqui descreve o perfil transversal do campo elétrico em relação à brana.

Se considerarmos que o campo varia muito pouco numa escala de comprimento comparável ao comprimento da brana (ϵ), podemos tirar E^2 da integral e ficamos, na

ordem dominante, com a seguinte expressão [14]:

$$V = -\frac{4\pi m_n \epsilon_0 \zeta \hat{G}_D}{2\epsilon^{\delta-2} c^2} E^2, \text{ para } \delta > 2, \quad (6.8)$$

onde m_n é a massa do nêutron, $\zeta = \frac{\delta(\delta+2)}{8(\delta+1)} \frac{\Gamma(\frac{\delta-2}{2})\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{\delta+1}{2})}$, E é a amplitude do campo elétrico, \hat{G}_D é diretamente proporcional a G e ϵ é definido por (veja a equação 4.1)

$$\frac{1}{\epsilon^{\delta-2}} = \frac{2}{\delta} \int \frac{f(w)}{w^{\delta-2}} d^\delta w.$$

Note que a energia potencial de interação entre o nêutron e o campo elétrico externo (Eq. 6.2), mediada pelo campo gravitacional no cenário de branas, também é quadrática no campo elétrico. Aqui podemos especular que, dada a similaridade formal com a energia potencial da interação dipolo-campo, essa modificação da gravidade poderia provocar um efeito adicional na medida da polarizabilidade elétrica do nêutron. Isto é, nas interações do nêutron teremos um novo termo cuja dependência com o campo elétrico é a mesma que a interação dipolo-campo. Como consequência, a contribuição do potencial gravitacional anômalo deve ser levada em conta no experimento, para podermos fazer a correta inferência sobre o valor da polarizabilidade do nêutron, α_n . Em outras palavras, o potencial gravitacional poderia mimetizar uma certa polarizabilidade adicional $\bar{\alpha}$, dada por:

$$\bar{\alpha} = \frac{m_n \zeta}{\epsilon^{\delta-2} c^2} \frac{4\Gamma(\frac{\delta+3}{2})}{(\delta+2)\pi^{(\delta+1)/2}} G_D, \quad (6.9)$$

onde usamos a relação (5.10).

De acordo com as medidas atuais da polarizabilidade do nêutron [71], o valor experimental está de acordo com o valor teórico previsto por meio de modelos padrão para o núcleo [23], dentro do erro experimental que é cerca de $2,5 \times 10^{-4} fm^3$. Assim, uma interação gravitacional anômala não pode produzir uma contribuição adicional tal

que ultrapassasse a incerteza experimental. Portanto,

$$\bar{\alpha} \leq 2,5 \times 10^{-4} fm^3. \quad (6.10)$$

Essa condição impõe restrições para os parâmetros livres da teoria extradimensional, G_D e ε . Assim como fizemos no capítulo anterior, podemos estudar esse vínculo em termos da escala de energia Λ , definida por

$$\frac{G_D}{\varepsilon^{\delta-2}} = \frac{2\pi h^3 c^7}{\Lambda^4}.$$

Dessa forma, o vínculo (6.10) se torna um limite inferior para a escala de energia, isto é,

$$\Lambda \geq \left[\frac{8\pi m_n h^3 c^5}{\delta \alpha_n} \frac{4\Gamma\left(\frac{\delta+3}{2}\right)}{(\delta+2)\pi^{(\delta+1)/2}} \zeta \right]^{1/4}, \quad (6.11)$$

onde $\delta \alpha_n$ corresponde ao erro experimental na medida da polarizabilidade do nêutron.

Substituindo as constantes, podemos obter limites para a escala de energia no contexto de brana com espessura. Abaixo temos uma tabela com alguns limites:

	$\delta = 3$	$\delta = 4$	$\delta = 5$	$\delta = 6$
$\Lambda >$	10 GeV	8,2 GeV	7,3 GeV	6,8 GeV

A partir da equação (6.10) também podemos estimar limites para o raio de compactação. Por exemplo, para $\delta = 3$, o limite obtido é cerca de

$$R \lesssim \frac{1}{2\pi} [0,843 \times 10^6 m^2 \varepsilon]^{1/3}, \quad (6.12)$$

onde usamos o fato de que $\hat{G}_D \propto R^\delta$ (veja a equação 4.1).

Assumindo mais uma vez que ε é da ordem da espessura da brana, $\varepsilon \sim 10^{-19}m$, o limite para o raio de compactação fica $R \leq 6,98\mu m$. Nesse mesmo cenário, para $\delta = 6$, por exemplo, o valor do raio deve ser menor que $0,435 \times 10^{-12}m$. Vemos, portanto, que

o limite obtido em nosso trabalho é mais restritivo em comparação com outras previsões para o mesmo número de dimensões extras [21].

Devemos ressaltar que nessa seção nossa análise se baseou nas correções do campo gravitacional na forma de uma lei de potência. Na próxima seção, no entanto, o comportamento anômalo será modelado pela parametrização de Yukawa.

6.2.1 Amplitude de Espalhamento Modificada

Em uma colisão do nêutron com um átomo, a interação elétrica V_p entre o seu dipolo induzido e o campo elétrico do núcleo produzirá a seguinte amplitude de espalhamento [24] (veja a equação 4.7)

$$f_p = -\frac{m_n}{2\pi\hbar^2} \int e^{iq \cdot r'} V_p(r') d^3r'. \quad (6.13)$$

Utilizando a energia potencial da polarizabilidade, equação (6.2), teremos

$$f_p = \frac{m_n \epsilon_0 \alpha_n}{\hbar^2} \int e^{iq \cdot r} E^2 d^3r'. \quad (6.14)$$

Modelando o núcleo pesado, a fonte do campo elétrico, como uma esfera carregada cujo raio de carga é R_N , temos, $E(r) = Ze / (4\pi\epsilon_0 r^2)$, na região externa ao núcleo. Substituindo acima, encontramos a seguinte amplitude de espalhamento [22] [23] [72], no limite em que $qR_N \ll 1$,

$$f_p = \alpha_n \beta_n \left[\frac{6}{5} - \frac{1}{4} \pi q R_N + \frac{1}{2} (q R_N)^2 \sum_n \frac{(-1)^n (q R)^{2n}}{(2n+1)(2n+1)!} \right], \quad (6.15)$$

onde

$$\beta_n = \frac{m_n (Ze)^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2 R_N}. \quad (6.16)$$

Para a interação do nêutron com o Chumbo, o valor de β_n é aproximadamente $3,28 \times$

$10^{31}m^{-2}$, onde utilizamos a aproximação conhecida [26] para o raio de carga $R_N(fm) = 1,2027A^{1/3}$, onde A é o número atômico de massa.

De acordo com [23], o segundo termo, linear em q , é característico de uma interação do tipo de um dipolo elétrico induzido no campo de Coulomb de uma esfera carregada, cujo comportamento no espaço físico é $1/r^4$. Com isso, é da determinação do coeficiente desse termo linear em q a partir dos dados experimentais que se consegue medir a polarizabilidade do nêutron. Na próxima seção discutiremos mais sobre a importância desse termo.

Vamos agora considerar a interação gravitacional hipotética. Dado que a nossa fonte não-bariônica é o campo elétrico gerado pelo núcleo, sabemos que esse campo possui uma densidade de energia e pressão, que, por sua vez, gera um campo gravitacional (Eq. 6.5). Utilizando a parametrização de Yukawa para essa energia potencial [14], teremos

$$V_g = -\frac{m_n \alpha G \epsilon_0}{c^2} \int \frac{E^2(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} e^{-|\vec{r} - \vec{r}'|/\lambda} d^3 r'. \quad (6.17)$$

Uma vez encontrada essa expressão para a energia potencial, a amplitude de espalhamento fica diretamente determinada, logo:

$$\begin{aligned} f_g &= -\frac{m_n}{2\pi\hbar^2} \int V_g(\vec{r}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} d^3 r, \\ &= \frac{m_n^2 \alpha G \epsilon_0}{2\pi\hbar^2 c^2} \int \left(\int \frac{E^2(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} e^{-\frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{\lambda}} d^3 r' \right) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} d^3 r, \\ &= \frac{m_n^2 \alpha G \epsilon_0}{2\pi\hbar^2 c^2} \int E^2(\vec{r}') e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}'} d^3 r' \int \frac{e^{-\frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{\lambda}}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} e^{i\vec{q}\cdot(\vec{r} - \vec{r}')} d^3 r. \end{aligned}$$

A integral em r é simplesmente a transformada de Fourier do potencial de Yukawa, cuja solução é conhecida [29], logo

$$\begin{aligned} f_g &= \frac{m_n^2 \alpha G \epsilon_0}{2\pi\hbar^2 c^2} \int E^2(\vec{r}') e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}'} d^3 r' \left(\frac{4\pi}{q^2 + \lambda^{-2}} \right), \\ &= \frac{m_n^2 \alpha G \epsilon_0}{\hbar^2 c^2} \frac{1}{q^2 + \lambda^{-2}} \int E^2(\vec{r}') e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}'} d^3 r'. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Observe que a equação (6.18) apresenta mais uma vez uma transformada de Fourier do campo elétrico quadrático, algo que apareceu antes na equação (6.14). Isso faz com que a nossa amplitude gravitacional modificada apresente um fator com a mesma dependência em q e R_N que observamos na amplitude de espalhamento da polarizabilidade do nêutron. Modelando mais uma vez o núcleo pesado como uma esfera cujo raio de carga é R_N , obtemos a seguinte expressão para a amplitude de espalhamento gravitacional:

$$f_g = \frac{m_n^2 \alpha G Z^2 e^2}{\hbar^2 c^2 4\pi \epsilon_0 R_N} \frac{1}{q^2 + \lambda^{-2}} \left[\frac{6}{5} - \frac{1}{4} \pi q R_N + \frac{1}{2} (q R_N)^2 \sum_n \frac{(-1)^n (q R_N)^{2n}}{(2n+1)(2n+1)!} \right].$$

Podemos ainda reescrever essa amplitude de espalhamento modificada da seguinte forma:

$$f_g = \frac{\tilde{\alpha}_n}{1 + q^2 \lambda^2} \beta_n \left[\frac{6}{5} - \frac{1}{4} \pi q R_N + \frac{1}{2} (q R_N)^2 \sum_n \frac{(-1)^n (q R_N)^{2n}}{(2n+1)(2n+1)!} \right], \quad (6.19)$$

onde β_n é recuperado (veja a equação 6.16) e $\tilde{\alpha}_n = 2m_n G \alpha \lambda^2 / c^2$ faz o papel de uma pseudo polarizabilidade, que foi criada pela interação anômala e sobre a qual podemos impor limites. No limite em que $q\lambda \ll 1$ podemos estimar o quanto $\tilde{\alpha}_n$ pode contribuir para o valor da polarizabilidade do nêutron, α_n . Mais uma vez, usando o erro experimental em [71], a interação gravitacional deve possuir o seguinte limite superior:

$$\frac{2m_n G \alpha \lambda^2}{c^2} \leq \Delta \alpha_n. \quad (6.20)$$

onde $\Delta \alpha_n$ é o erro experimental da medida de α_n .

Substituindo os valores das constantes, obtemos o seguinte limite para os parâmetros de Yukawa:

$$\alpha \lambda^2 \leq 2,01 \times 10^5 m^2. \quad (6.21)$$

Dada a faixa de energia envolvida nos experimentos de Schmiedmayer, por exemplo, para um momento da ordem de $q \simeq 10^{-3} fm^{-1}$ e a relação $q\lambda \ll 1$, podemos concluir

que esse vínculo vale para um alcance de $\lambda \ll 10^{-12}m$. Logo, para um alcance da força gravitacional modificada da ordem de $\lambda \simeq 1\text{fm}$, a intensidade de nova interação seria de $\alpha \lesssim 10^{35}$. Esse novo limite é cerca de 14 ordens de grandeza mais restritivo do que o limite obtido usando a técnica de interferometria de nêutrons [14]! Podemos também obter uma expressão para o caso em que $q\lambda \gg 1$ na obtenção da equação (6.19). Nesse caso, o limite sobre α dependeria diretamente do valor da energia envolvida no processo de espalhamento do nêutron, dada por q . Dessa forma, limites cada vez mais fortes seriam alcançados para valores de q cada vez menores.

Além de utilizar a amplitude de espalhamento, podemos estudar o quando o potencial gravitacional modificado interfere numa quantidade importantíssima em estudos de espalhamentos, a seção de choque total, de onde também é possível extrair os valores da polarizabilidade do nêutron com alta precisão. Focaremos nesse objetivo doravante.

6.2.2 Seção de Choque

A partir da abordagem não-newtoniana da gravitação podemos estudar sua influência na seção de choque total do nêutron com um núcleo pesado, como o ^{208}Pb . Com a amplitude de espalhamento modificada, equação (6.19), podemos determinar a sua contribuição para a seção de choque total σ da interação do nêutron com o núcleo pesado. A relação entre essas duas quantidades é bastante conhecida [39]

$$\sigma(k) = \int |f_T|^2 d\Omega, \quad (6.22)$$

onde f_T é a amplitude total que inclui a interação nuclear, que é dominante na colisão do nêutron com o átomo.

Como vimos, a amplitude de espalhamento gravitacional f_g possui um termo que, assim como a amplitude de espalhamento da polarizabilidade f_p , é proporcional a q (o momento transferido) [23]. Essa dependência particular torna possível o estudo dos efeitos da gravitação sobre a seção de choque de forma separada da interação nuclear

(que domina sobre as demais interações). No cálculo da seção de choque total essa dependência gera um termo linear em k , do qual extrairemos novos vínculos.

A seção de choque total da interação nêutron-núcleo pode ser parametrizada da seguinte forma [22] [23] [72] [25]

$$\sigma(k) = \sigma_0 + \sigma_1 k + \sigma_2 k^2 + \mathcal{O}(k^4),$$

levando-se em consideração correções para ressonâncias e as interações nêutron-elétron e Schwinger.

Como dito acima, σ_1 é o coeficiente que possui informações acerca da polarizabilidade. De fato, da análise de ondas parciais, podemos determinar esse parâmetro como sendo [73] (Apêndice C)

$$\sigma_1 \simeq \frac{8\pi^2 \alpha_n b_N m_n (Ze)^2}{3\hbar^2 4\pi\epsilon_0}, \quad (6.23)$$

onde b_N é o comprimento de espalhamento da interação nuclear do nêutron com o ^{208}Pb e m_n é a massa do nêutron.

Uma vez que admitimos uma nova interação cuja energia possui a mesma forma que a da polarizabilidade, ou seja, proporcional a E^2 , essa nova interação produzirá uma correção no termo linear da seção de choque, Equação (6.23). Por se tratar de uma correção, podemos usar o erro experimental para impor um limite sobre os parâmetros de Yukawa. No experimento realizado no Oak Ridge Electron Linear Accelerator (ORELA), no qual a faixa de energia do nêutron foi de 50eV a 40keV, os valores experimentais da seção de choque encontrados foram os seguintes [23]:

$$\sigma_T = 11,508(5) + 0,69(9)k - 448(3)k^2 + 9500(400)k^4,$$

onde o termo linear em k está em unidades de $\text{barn} \times fm = 10^2 fm^3$.

O erro experimental do termo proporcional a k estabelece limites para a interação gravitacional anômala. Considerando a similaridade formal com a energia potencial

da interação dipolo-campo, podemos concluir que o potencial pós-newtoniano anômalo modifica o coeficiente σ_1 , acrescentando um termo extra que depende da pseudo polarizabilidade gravitacional. A relação desse novo termo com $\tilde{\alpha}_n$ tem a mesma forma de (6.23). Dessa forma, um limite para a pseudo polarizabilidade $\tilde{\alpha}_n$ (equação 6.19), pode ser imposto supondo que esta não deve perturbar σ_1 por uma quantidade maior do que o erro experimental, assim:

$$\tilde{\alpha}_n \leq \frac{3\epsilon_0\hbar^2}{2\pi b m_n (Ze)^2} \Delta\sigma_1, \quad (6.24)$$

onde $\Delta\sigma_1$ é o erro experimental reportado por Schmiedmayer [23], que é cerca de $9 fm^3$

Como $\tilde{\alpha}_n = 2m_n G\alpha\lambda^2/c^2$, teremos

$$\frac{2m_n G\alpha\lambda^2}{c^2} \leq \frac{3\epsilon_0\hbar^2}{2\pi b m_n (Ze)^2} \Delta\sigma_1. \quad (6.25)$$

Substituindo os valores das constantes, finalmente chegamos ao seguinte vínculo

$$\alpha\lambda^2 \leq 1,25 \times 10^5 m^2. \quad (6.26)$$

Note que esse valor é muito próximo ao obtido anteriormente (Equação 6.21), a partir da amplitude de espalhamento modificada, equação 6.19. Utilizando os dados da referência [25] o vínculo fica um pouco menos restritivo, sendo $\alpha\lambda^2 \lesssim 1,22 \times 10^6 m^2$.

Assim como discutimos na seção 4.1.2, esse parâmetro α está relacionado a parâmetros do formalismo PPN. Vimos que a fonte desse campo é a energia de um campo elétrico (uma fonte não-bariônica) e a pressão exercida por este campo, que é, vale ressaltar, da mesma ordem de magnitude da densidade de energia do campo. Portanto, a condição empírica (6.26) pode ser entendida como uma restrição para os parâmetros PPN β_3 e β_4 (ver apêndice A), que medem a capacidade da energia interna e da pressão produzirem gravitação, respectivamente. Na Teoria Geral da Relatividade, ambos valem um, o que significa que, teriam a mesma capacidade da massa bariônica de curvar o espaço-tempo. Como discutido no apêndice A, em teorias métricas que não violam as equações de con-

servação de energia e de momento, o parâmetro β_3 é igual a 1, concordando com a Relatividade Geral. Neste mesmo cenário, o parâmetro β_4 , que mede a capacidade da pressão curvar o espaço, está relacionado com o parâmetro γ por meio de $\beta_4 = \gamma$. Lembrando que o parâmetro γ está relacionado à capacidade da massa bariônica de curvar a seção puramente espacial do espaço-tempo (Apêndice A). De acordo com a Relatividade Geral, $\gamma = 1$. Sendo assim, o limite para α na equação [6.26](#), imposto pelo experimento da polarizabilidade, também serve para estabelecermos uma restrição para o parâmetro γ . Esse resultado é interessante porque nos permite comparar o novo vínculo obtido aqui com outros limites para γ , determinados através de outros experimentos. No experimento MTV-G, por exemplo, estudou-se a precessão do spin de um elétron induzida por um campo gravitacional modificado produzido pelo núcleo de um átomo [\[11\]](#). A hamiltoniana da interação gravitacional anômala entre o spin \vec{S} do elétron e o núcleo é da seguinte forma

$$H_G = \frac{1}{mc^2} \frac{1}{r} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial r} \right) \vec{S} \cdot \vec{L}, \quad (6.27)$$

onde \vec{L} é o momento angular orbital e as funções φ e $\tilde{\varphi}$ são os potenciais produzidos pela massa M do núcleo, sendo $\varphi = GM/r$ e $\tilde{\varphi} = GM/r(1 + \tilde{\alpha})$ na parametrização de Yukawa no limite em que $r \ll \lambda$. O potencial φ é a correção da componente 00 da métrica e o potencial $\tilde{\varphi}$ é a correção das componentes puramente espaciais (i.e., h_{ii}). Como discutido em [\[11\]](#), $(1 + \tilde{\alpha})$ está relacionado com o parâmetro γ , de modo que a interação dada por [6.27](#) é uma ferramenta para impormos vínculos sobre o parâmetro γ .

Vínculos independentes para γ em curtas distâncias também foram obtidos a partir da análise de dados espectroscópicos da transição entre os níveis $2P_{3/2}$ e $2P_{1/2}$, do hidrogênio [\[11\]](#) e, mais recentemente, do hélio muônico [\[12\]](#). Essa transição depende da chamada estrutura fina do átomo. A influência da gravitação sobre essa transição ocorre por meio da interação spin-órbita gravitacional, escrita em [\(6.27\)](#). Como esta interação depende do potencial $\tilde{\varphi}$, então, seus efeitos na transição podem ser usados para impor restrições experimentais para desvios do parâmetro γ em curtas distâncias.

Assim, como podemos ver na figura 6.1, o vínculo encontrado do nosso estudo da polarizabilidade do nêutron, no cenário onde usamos uma fonte não bariônica, é mais restritivo na escala de comprimento menor que 10^{-12}m quando comparado com outros trabalhos, como o MTV-G e vínculos espectroscópicos.

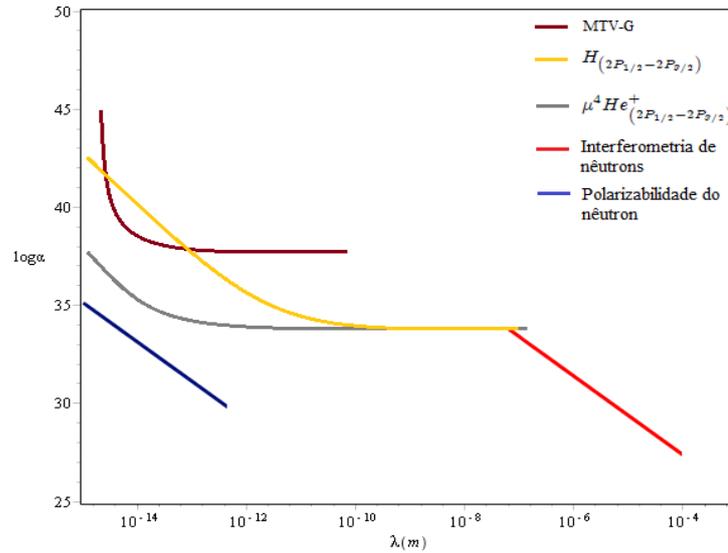


Figura 6.1: Comparação do vínculo obtido nesse trabalho usando a polarizabilidade (linha sólida em azul) com os da espectroscopia (linhas laranja e cinza), do experimento MTV-G (linha marrom) e da interferometria (em vermelho). Figura obtida com os dados extraídos de [12].

7 *Novos Vínculos da Reflectometria de Nêutrons*

Como citamos no capítulo 5 e no capítulo 4 (seção 4.3), o comprimento de espalhamento contém importantes informações sobre as interações que ocorrem entre uma partícula, por exemplo, o nêutron, e um núcleo de uma determinada amostra. Ao longo dos anos, algumas técnicas foram usadas a fim de determinar valores dos comprimentos de espalhamento nuclear. A reflectometria, que se baseia na medida do índice de refração de uma partícula incidente sobre um material [30], é uma das técnicas pioneiras. Como sabemos, com a revolucionária descoberta feita por de Broglie de que partículas materiais podem manifestar características de onda, uma série de experimentos se propuseram a buscar essa evidência ondulatória da matéria. Anos posteriores a de Broglie, já dispomos de incontáveis experimentos que demonstram essa dualidade.

O nêutron, assim como as demais partículas subatômicas, teve suas propriedades ondulatórias estudadas. Dois anos após a sua descoberta em 1932, Fermi propôs que, sob certas condições, o movimento do nêutron no interior da matéria, tem similaridades com a propagação de um raio luminoso em um fenômeno de refração da luz [30]. A partir da equação de Schrödinger [15], podemos mostrar que a relação entre o índice de refração para um nêutron, com uma energia E , e o potencial $V(r)$ do meio em que ele se move, tem a seguinte forma [30]:

$$n = \left(1 - \frac{V(r)}{E}\right)^{1/2}. \quad (7.1)$$

Para o caso em que o potencial atuante sobre o nêutron é o potencial óptico, $V_{op} = (2\pi\hbar^2/m) Nb$, onde b é o comprimento de espalhamento e N é a densidade de átomos do material, a determinação do índice de refração (equação 7.1) nos daria a seguinte

expressão [15], no limite que $E \gg V$:

$$n = 1 - \frac{\lambda_n^2 Nb}{2\pi}, \quad (7.2)$$

onde usamos a relação de de Broglie na energia do nêutron, i.e., $E = p^2/(2m) = h^2/(2m\lambda_n^2)$. Nesta equação, λ_n é o comprimento de onda do nêutron. Com essa relação, pôde-se medir os comprimentos de espalhamento de diversos materiais¹.

Além do índice de refração, outras técnicas baseadas na reflexão em superfícies se mostraram importantes para determinar valores de comprimento de espalhamento, como filmes finos, interfaces de vapor-líquido, entre outros [30]. Nesse trabalho, daremos especial atenção a técnica de reflectometria pela gravidade. Ela se mostrou uma técnica poderosa para determinar comprimentos de espalhamento. Assim como vimos no capítulo 4 (subseção 4.1.1) e no capítulo 5, sobre o experimento COW e de estados ligados do nêutron, trata-se de outra técnica experimental em que o campo gravitacional da Terra é usado na determinação de propriedades quânticas do nêutron.

7.1 Reflectometria de Nêutrons

Como dito acima, a reflectometria de nêutrons é uma técnica de reflexão de nêutrons em uma superfície chamada de espelhos. Nesse experimento, nêutrons saem de um reator com velocidade horizontal [28]. Eles passam por algumas fendas (que servem para controlar a velocidades desse feixe de nêutrons) e caem com a ação do campo gravitacional (conforme vemos na figura 7.1). Após uma queda parabólica por uma distância horizontal de $l \simeq 100\text{m}$ (em relação ao ponto de saída do reator), os nêutrons atingem um espelho e, após a colisão, os nêutrons refletidos chegam ao detector que está próximo do espelho:

Como vimos no capítulo 5 sobre estados ligados do nêutron, caso a energia desse nêutron seja menor do que a energia interna do espelho, ele será completamente re-

¹Recomendamos a leitura da referência [30] com os diversos dados experimentais dos valores obtidos.

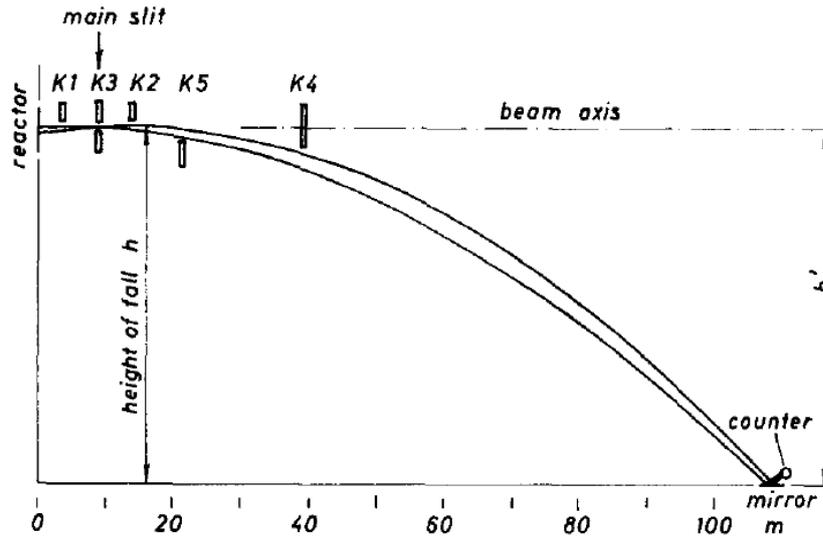


Figura 7.1: Esquema do experimento da reflectometria. Após passar pelas fendas o nêutron cai parabolicamente até atingir o espelho. Os nêutrons que não conseguem penetrar o espelho atingem o detector, onde mede-se a taxa de reflexão. Figura retirada de [27].

fletido e atingirá o detector próximo. A probabilidade de reflexão total diminui à medida que a energia do nêutron incidente aumenta. Caso os nêutrons incidam no espelho com energias maiores do que o potencial interno, ou seja, $p_z^2 / (2m) > V_{op}$, onde p_z é o momento do nêutron na direção vertical no ponto de contato com a superfície, há probabilidade de penetração no espelho [27]. Uma outra forma de descrever essa condição é em termos da altura da queda desses nêutrons. Caso os nêutrons não caiam de uma altura mínima (também chamada de altura crítica), que chamaremos de H_0 , eles não conseguirão penetrar o espelho. Abaixo dessa altura de queda, eles serão totalmente refletidos. Logo, a condição básica da reflectometria pode ser expressa como [27]

$$mgH_0 = V_{op} = \frac{2\pi\hbar^2}{m}Nb. \quad (7.3)$$

Observe que o comprimento de espalhamento agora é determinado apenas por constantes fundamentais e por medidas precisas de N e da altura crítica H_0 !

Para determinar a altura crítica, mede-se o coeficiente de reflexão do nêutron na superfície, R . Este coeficiente é obtido do módulo quadrado da razão das amplitudes

das ondas incidentes com a refletida $R = |B/A|^2$ e mede a taxa de nêutrons que são refletidos pelo espelho que chegam no detector [27]. Para o caso de uma superfície ideal, a reflectividade assume a mesma forma que a reflectividade de Fresnel [75], corroborando a natureza ondulatória do nêutron. Assim, em termos da altura crítica, a reflectividade é dada por [28]:

$$R = \left| \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{H_0}{H} + i\frac{A}{H}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{H_0}{H} + i\frac{A}{H}}} \right|^2,$$

onde H é a altura da queda, e a quantidade A da parte imaginária diz respeito a possibilidade de absorção pelo espelho, e pode ser medida de maneira independente em outros experimentos. Acontece que, para os átomos do espelho usado no experimento, o termo imaginário, A/H é da ordem de 10^{-6} [28].

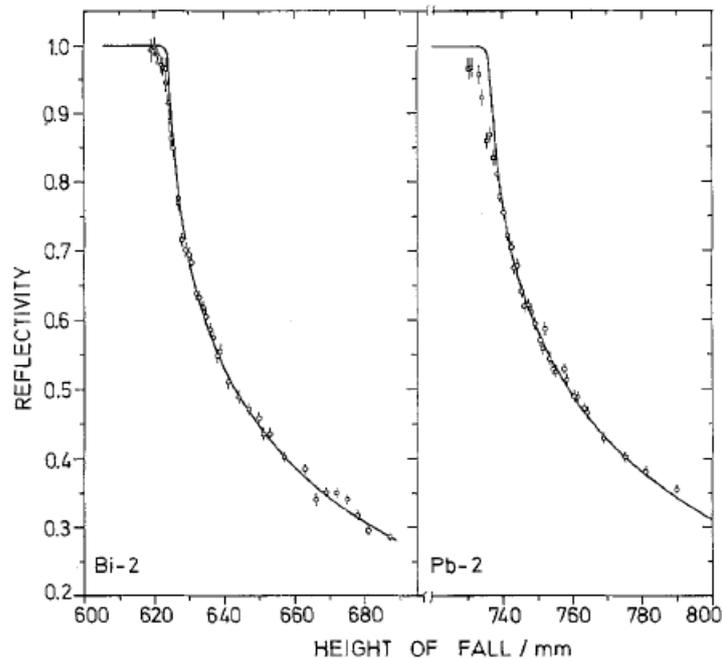


Figura 7.2: Função da reflectividade do nêutron para o Bismuto e o Chumbo. Figura retirada da referência [28].

Em um experimento realizado por [28], o comportamento da reflectividade pode ser visto na figura 7.2. Como é de se esperar, o valor de R decresce para valores de H maiores que a altura crítica para cada elemento (para o Bismuto e Chumbo, as alturas

críticas são 623,18mm e 735,98mm respectivamente [28]). Com o valor de H_0 determinado, o comprimento de espalhamento é diretamente obtido, via equação (5.19). Assim, para o Chumbo, o comprimento de espalhamento da interação nêutron-núcleo é, portanto, $b = 9,405 \pm 0,003\text{fm}$ [28]. Esse valor está de acordo com os valores experimentais mais recentes para o Chumbo [76], usando outras técnicas.

7.2 Novos Vínculos da Reflectometria de Nêutrons

Como discutido nos demais capítulos até então, teorias extradimensionais como o Modelo ADD fornecem previsões para a modificação da interação gravitacional em curtas distâncias. Na referência [75] um potencial gravitacional modificado do tipo Yukawa entre o nêutron e o espelho foi suposto nesse experimento. Levando-se em conta que o espelho é um corpo extenso, é possível mostrar que a energia potencial do nêutron devido a interação gravitacional anômala com o espelho, tem a seguinte forma:

$$V(z) = \begin{cases} V_g e^{2k_g z}, & \text{acima do espelho } (z < 0), \\ V_F + V_g (2 - e^{-2k_g z}), & \text{dentro do espelho } (z > 0), \end{cases}$$

onde V_F é o potencial de Fermi (da interação entre o nêutron com o núcleo), ρ é a densidade do material, $k_g = 1/\lambda$, $V_g = \beta/(2k_g^2)$ e $\beta = -Gm\pi\rho\alpha$. Como podemos observar, o potencial modificado é suposto atuar tanto externamente ao espelho, quanto na parte interna deste. Resolvendo a equação de Schrödinger, conseguiu-se obter a reflectividade [75]. A partir dela, foi possível deduzir o efeito do potencial anômalo na função de reflexão. Para $\lambda = 10\text{nm}$, o limite superior para a intensidade da interação anômala é limitado por $\alpha < 10^{20}$ [75].

Assim, podemos ver que a reflectometria de nêutrons também pode ser usada em investigações de violações da lei do inverso do quadrado. Neste capítulo vamos estudar modificações da gravitação na forma de leis de potência, como previsto pelas teorias extradimensionais para curtas distâncias. Para evitar problemas de divergências no

cálculo do potencial, teremos de recorrer aos modelos de branas com espessura. Como vimos no capítulo 5 (seção 5.3), em um cenário de brana fina, o potencial interno de um meio material é dado por

$$\varphi_{int}(x) = -\beta \frac{G_D \rho}{\sigma^{\delta-2}},$$

onde ρ é a densidade do material, β é um fator numérico cujo valor depende da dimensão e σ está associado com a espessura da brana.

A presença desse potencial extra modificará o potencial óptico sentido pelo nêutron ao atingir o espelho. De fato, nesse cenário, temos $U_{op} = U_F + m\varphi_{int}$. Obviamente, essa modificação tem impacto na reflectometria do nêutron.

No novo cenário de brana fina, a condição básica da reflectometria será modificada da seguinte forma

$$mgH_0 = \frac{2\pi\hbar^2}{m} N b_N - \frac{\beta G_D m_n \rho}{\sigma^{\delta-2}}. \quad (7.4)$$

Usando a equação acima, podemos descrever o efeito da interação gravitacional anômala como uma modificação do comprimento de espalhamento total. De fato, podemos escrever (lembrando que $G_D/\sigma^{\delta-2} = 2\pi\hbar^3 c^7/\Lambda^4$):

$$b_T = b_N - \frac{4\pi^2 \beta m^2 \rho \hbar c^7}{N \Lambda^4}. \quad (7.5)$$

Com esta definição, a equação (7.4) pode ser escrita da seguinte forma:

$$b_T = \frac{m^2 g H_0}{2\pi\hbar^2 N}.$$

Com a medição de H_0 realizada pelo experimento [28] é possível extrair o valor experimental do comprimento de espalhamento total. De acordo com os dados experimentais [28], temos $b_{exp} = 9,405\text{fm}$ para o chumbo, com um erro igual $\delta b_{exp} = 0,003\text{fm}$.

Sendo assim, segue de (7.5), a seguinte relação:

$$b_{\text{exp}} - \delta b_{\text{exp}} \leq b_N - \frac{4\pi^2 \beta m^2 \rho h c^7}{N \Lambda^4} \leq b_{\text{exp}} + \delta b_{\text{exp}}.$$

Essa condição acima estabelece uma restrição experimental conjunta para b_N (comprimento de espalhamento nuclear) e Λ . Ainda não há, até onde sabemos, cálculos teóricos, baseado em primeiros princípios, para o b_N com chumbo. É importante ressaltar que algumas previsões teóricas, com base em modelos padrões do núcleo, têm sido feitas recentemente para outros elementos e alcançado sucesso, no sentido de que o valor previsto concorda com o valor experimental. Como não temos uma previsão teórica para o b_N do chumbo, então, o que podemos fazer a partir da condição acima é restringir o valor de Λ em função do valor de b_N do chumbo. Essa análise está ilustrada na figura 7.3.

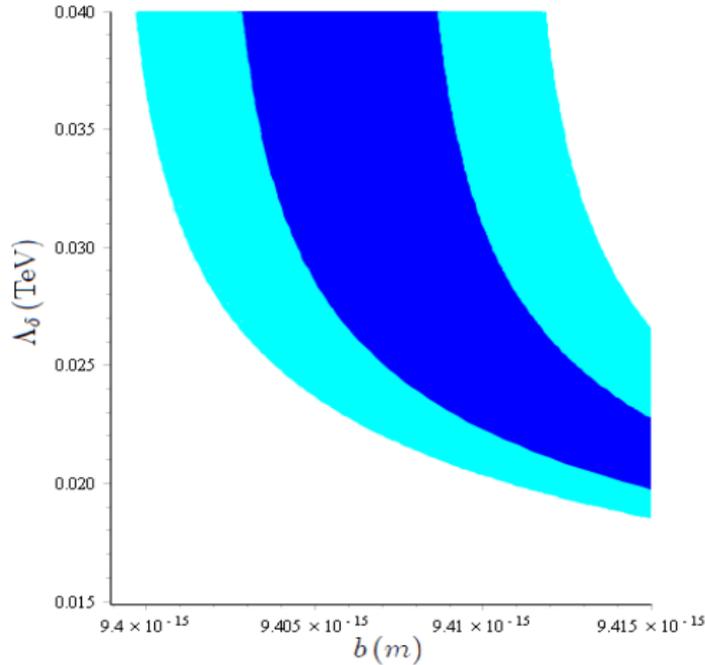


Figura 7.3: Vínculo obtido sobre a nova escala de energia Λ em função de b_N do Chumbo. Os valores dentro da faixa azul correspondem a 1σ enquanto que os demais valores correspondem a 2σ de confiança.

Como podemos notar, os limites encontrados nesse capítulo sobre Λ são mais restritivos quando comparados com os vínculos extraídos do trabalho de estados ligados do

nêutron. É interessante destacar também que um trabalho recente [80] investigou os efeitos do rádion (partícula hipotética relacionada com flutuações do volume do espaço extradimensional) no espectro de energia da transição $2P - 2S$ do Hélio muônico e impôs vínculos sobre a escala de energia Λ (equação 5.20) da mesma ordem de magnitude do nosso resultado.

8 *Conclusões*

Teorias extradimensionais mostraram-se importantes ferramentas nos estudos sobre a unificação das forças da natureza. As previsões de modificações do potencial gravitacional levaram a um esforço de muitos físicos em procurar qualquer sinal de anomalia em testes de desvios da lei do inverso do quadrado de Newton. Neste trabalho analisamos alguns testes envolvendo o nêutron e impomos novos limites sobre parâmetros extradimensionais. Dada as suas características únicas, o nêutron tem sido usado com frequência em experimentos que visam estudar uma hipotética interação gravitacional. Sua neutralidade facilita extrair um possível sinal gravitacional anômalo de interações com núcleos pesados, por exemplo.

Os testes sobre estados ligados do nêutron e da reflectometria já possuem o campo gravitacional terrestre atuando sobre o nêutron, de modo que teorizar um campo gravitacional modificado pode ser considerado um caminho natural. No experimento de estados ligados utilizamos o fato de que o potencial interno, quando calculado num cenário de brana com espessura finita, não diverge. Com isso, podemos calcular o potencial externo de modo a satisfazer a condição de contorno na superfície do espelho. Podemos usar esse potencial modificado e calcular a perturbação que ele pode causar nas alturas dos estados ligados do nêutron. Como o nêutron encontra-se preso num sistema onde há um potencial considerado infinito no interior do espelho e um gravitacional acima dele, o nêutron terá apenas alguns valores de energias possíveis, que podemos visualizar por meios de alturas específicas que ele pode alcançar após a reflexão com o espelho. Impondo que a perturbação não deve ser maior do que o erro experimental, o vínculo é obtido. Além disso, podemos introduzir um novo vínculo através de uma escala de energia efetiva, Λ , escrita em termos da espessura da brana e do raio de compactação da dimensão extra. Considerando que a interação nuclear deve permanecer dominante no interior do espelho, mesmo no cenário de dimensões extras, extraímos vínculos empíricos para essa escala de energia efetiva. Por exemplo, para $\delta = 3$, o tamanho da escala de energia deve ser maior do que 0,94 GeV. Este nosso

resultado representa um avanço em relação a estudos prévios encontrados na literatura, dedicados a investigar uma correção para o potencial gravitacional com a parametrização do tipo lei de potências. Devido à problemas de divergência no cálculo do potencial gravitacional anômalo, chegou-se a cogitar que a existência dos estados ligados do nêutron poderia ser considerada uma evidência contra modelos de dimensões extras com codimensão superior a 4. No entanto, como demonstramos neste trabalho, considerando o cenário de brana com espessura finita, contornamos o problema de divergência e encontramos explicitamente o potencial gravitacional anômalo. Dessa forma, além determinar novos vínculos para os parâmetros livres do modelo, demonstramos que a existência de estados ligados não pode ser usada como um argumento para descartar teorias de dimensões extras.

Também utilizamos a reflectometria como um teste para desvios da lei do inverso do quadrado. Mais uma vez, consideramos que o potencial gravitacional modificado é do tipo lei de potências no cenário de branas com espessura. Usando essa abordagem, determinamos os efeitos da interação gravitacional anômala sobre o potencial óptico, ao qual o nêutron fica submetido ao colidir com o espelho. Essa modificação pode ser escrita em termos de uma escala de energia efetiva, Λ . Com esse potencial óptico perturbado, determinamos uma correção para o comprimento de espalhamento total do chumbo, introduzida pela interação gravitacional anômala entre o nêutron e o espelho. Considerando o valor experimental do comprimento de espalhamento do chumbo obtido do experimento de reflectometria e a incerteza experimental dessa medida, conseguimos estabelecer novos vínculos para a escala de energia efetiva Λ em função de b_N (o comprimento de espalhamento nuclear). Nossos resultados são comparáveis em ordem de magnitude a vínculos experimentais sobre Λ extraídos da análise de dados espectroscópicos do hélio muônico, examinado recentemente.

Do teste da polarizabilidade, utilizamos as vantagens do nêutron no espalhamento com núcleos pesados. Nesse estudo, investigamos a interação do nêutron com um campo gravitacional produzido por uma fonte não-bariônica (a energia do campo elétrico). Observamos que o potencial de interação gravitacional pós-newtoniano, entre o nêutron

e campo elétrico, é proporcional ao quadrado da intensidade do campo elétrico. Portanto, é formalmente equivalente a energia potencial que descreve a interação entre o campo elétrico e momento de dipolo induzido no nêutron. Essa semelhança formal nos permitiu estudar a interação gravitacional modificada como uma perturbação no experimento de medida da polarizabilidade do nêutron. Conseguimos calcular uma amplitude de espalhamento gravitacional e estabelecer limites experimentais para desvios desse potencial gravitacional pós-newtoniano. Os vínculos encontrados em nossa abordagem são mais fortes, na escala abaixo do picômetro, do que limites extraídos de outros experimentos como MVT-G, testes espectroscópicos envolvendo transições finas do hidrogênio e do hélio muônico, além do vínculo da interferometria do nêutron.

Como perspectiva, podemos ressaltar que outras técnicas foram desenvolvidas para medir as transições diretas no experimento de estados ligados do nêutron. Dessa forma, os vínculos obtidos no nosso trabalho podem se tornar mais fortes com resultados experimentais mais precisos. Nos demais experimentos analisados nesta tese, os vínculos obtidos podem se tornar mais restritivos caso sejam disponibilizados dados mais precisos sobre a medida da polarizabilidade e da seção de choque total do nêutron com o chumbo (Capítulo 6), bem como da altura crítica do nêutron (Capítulo 7). Além disso, o cenário de brana fina se mostrou uma forma muito interessante de investigar uma interação gravitacional modificada numa escala de comprimento na ordem do raio do núcleo. Isso abre a possibilidade de comparar a interação gravitacional anômala com outras interações interatômicas em trabalhos futuros.

9 Apêndices

Apêndice A

A Expansão Pós-Newtoniana

Em um cenário de campo gravitacional fraco, podemos considerar a expansão desse campo como sendo o espaço-tempo vazio e plano na ordem zero, o tratamento newtoniano na primeira ordem e correções pós-newtonianas na segunda ordem. Esse formalismo composto da teoria newtoniana somada com correções pós-newtonianas é chamado de *Aproximação Pós-Newtoniana*. Todas as teorias métricas possuem uma aproximação pós-newtoniana específica. A teoria genérica que contém todas essas aproximações é chamada de *Formalismo Pós-Newtoniano Parametrizado*, ou *Formalismo PPN*.

No formalismo PPN, o sistema de coordenadas é globalmente Lorentz e a métrica tem a seguinte expressão:

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}, \quad (\text{A-1})$$

onde $|h_{\alpha\beta}| \ll 1$. Nesse caso, o formalismo PPN é como a teoria linearizada [53].

Nesse sistema de coordenadas, a matéria possui o seguinte campo de velocidade coordenada

$$v_j = \frac{dx_j}{dx^0}, \quad (\text{A-2})$$

e as quantidades que descrevem o estado da matéria são [53]

$\rho \equiv$ densidade da massa-energia total,

$\rho_0 \equiv$ densidade da massa de bárion,

$\Pi \equiv \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \equiv$ densidade de energia interna específica,

$t_{ij} \equiv$ componentes do tensor de estresse,

$$p \equiv \text{pressão} = \frac{1}{3} (t_{\hat{x}\hat{x}} + t_{\hat{y}\hat{y}} + t_{\hat{z}\hat{z}}) = \text{m\u00e9dia do estresse nas tr\u00eas dire\u00e7\u00f5es.}$$

A aproxima\u00e7\u00e3o p\u00f3s-newtoniana \u00e9 obtida a partir da expans\u00e3o da m\u00e9trica com respeito a um par\u00e2metro de expans\u00e3o adequado. A quantidade importante que serve para esse prop\u00f3sito \u00e9 ϵ^2 , definida como [53]

$$\epsilon^2 \equiv \text{o valor m\u00e1ximo do potencial newtoniano } U, \quad (\text{A-3})$$

onde

$$U \equiv -\Phi \equiv \int \frac{\rho_0(x')}{|x - x'|} d^3x'. \quad (\text{A-4})$$

Aqui estamos considerando unidades em que $G = 1$ e $c = 1$.

Nesse cen\u00e1rio, temos tamb\u00e9m que as derivadas temporais de uma quantidade qualquer, que chamamos de A , s\u00e3o inferiores, quando comparadas com as derivadas espaciais. A raz\u00e3o disso vem do fato de que as velocidades das partes que cont\u00eam nosso sistema de estudo s\u00e3o muito pequenas. Assim,

$$\left| \frac{\partial A / \partial t}{\partial A / \partial x_j} \right| \sim |v_j| \lesssim \epsilon \text{ para qualquer quantidade } A. \quad (\text{A-5})$$

Logo, a expans\u00e3o da m\u00e9trica [A-1] ser\u00e1 feita em termos de pot\u00eancias de ϵ . As quantidades $U, v^2, p/\rho_0, |t_{ij}|/\rho_0$ e Π s\u00e3o consideradas da ordem de $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ e as derivadas temporais da ordem de ϵ .

Algo que deve ser mencionado \u00e9 que termos \u00edmpares em ϵ (como ϵ^3) mudam o sinal numa revers\u00e3o temporal. Isso tamb\u00e9m ocorre na m\u00e9trica, mais especificamente em g_{0j} ($g_{\bar{0}j} = -g_{0j}$). Contudo, essa mudan\u00e7a via revers\u00e3o temporal n\u00e3o acontece para g_{00} e g_{jk} . Assim, podemos dizer que g_{0j} *deve* conter apenas termos \u00edmpares em ϵ , enquanto que g_{00} e g_{jk} *devem* conter apenas termos pares em ϵ .

A expans\u00e3o da m\u00e9trica no limite de campo fraco j\u00e1 \u00e9 conhecida. Agora, adicionando

a isso a expansão pós-newtoniana, teremos

$$g_{00} = -1 + 2U + (\text{termos } \lesssim \epsilon^4), \quad (\text{A-6})$$

$$g_{0j} = (\text{termos } \lesssim \epsilon^3), \quad (\text{A-7})$$

$$g_{ij} = \delta_{ij} + (\text{termos } \lesssim \epsilon^2), \quad (\text{A-8})$$

onde tomamos $\Phi = -U$.

Vamos focar nessas correções pós-newtonianas (que denotaremos doravante por $k_{\alpha\beta}$) da métrica. Podemos deduzir essas correções por meio de alguns argumentos [53]: **(1)** elas devem ser da ordem pós-newtoniana, ou seja, $k_{00} \sim \epsilon^4$, $k_{0j} \sim \epsilon^3$, $k_{ij} \sim \epsilon^2$. **(2)** Devem ser adimensionais. **(3)** k_{00} deve ser um escalar sob rotações, k_{0j} deve ser componentes de um 3-vetor, e k_{jk} deve ser componentes de um 3-tensor. **(4)** As correções devem sumir à medida que nos afastamos do sistema, resultando em coordenadas globalmente lorentzianas e o espaço-tempo plano para $r \rightarrow \infty$. **(5)** Podemos assumir que as componentes da métrica devem conter apenas $\rho_0, \rho_0\Pi, |t_{ij}|, p$, e produto dessas quantidades com v_j e derivadas temporais dessas quantidades.

Da parte puramente espacial da métrica, de onde $k_{ij} \sim \epsilon^2$, temos que existem apenas dois funcionais de $\rho_0, \rho_0\Pi, |t_{ij}|, p$ e v_j que satisfazem as condições listadas acima:

$$\delta_{ij}U(x, t); \quad (\text{A-9})$$

$$U_{ij}(x, t) = \int \frac{\rho_0(x', t) (x_i - x'_i) (x_j - x'_j)}{|x - x'|^3} d^3x'. \quad (\text{A-10})$$

Logo, as correções na parte puramente espacial da métrica devem conter estes dois termos. Uma forma de escrever essa dependência é a seguinte forma:

$$k_{ij} = 2\gamma\delta_{ij}U + 2\Gamma U_{ij}, \quad (\text{A-11})$$

onde γ e Γ são chamados de *Parâmetros PPN*.

Vale ressaltar que, para uma transformação de coordenadas infinitesimal, é possível eliminar a dependência do parâmetro Γ . Por esse motivo ele não será mais mencionado ao longo deste apêndice.

Com isso, a parte puramente espacial da métrica poderá ser escrita da seguinte forma

$$g_{ij} = \delta_{ij} + k_{ij}, \quad (\text{A-12})$$

$$g_{ij} = \delta_{ij} (1 + 2\gamma U) + \mathcal{O}(\epsilon^4). \quad (\text{A-13})$$

Da equação (A-13), observamos que o parâmetro γ está relacionado com a quantidade de curvatura da seção espacial ($t = \text{constante}$) que a massa de repouso produz.

Para as correções do tipo $k_{0j} \sim \epsilon^3$, existem apenas dois funcionais vetoriais que satisfazem as condições citadas anteriormente:

$$V_j(x, t) = \int \frac{\rho_0(x', t) v_j(x', t)}{|x - x'|} d^3x', \quad (\text{A-14})$$

$$W_j(x, t) = \int \frac{\rho_0(x', t) [(x - x') \cdot v(x', t)] (x_j - x'_j)}{|x - x'|^3} d^3x'. \quad (\text{A-15})$$

Uma forma de escrever k_{0j} em termos dessas duas quantidades é:

$$g_{0j} = k_{0j}, \quad (\text{A-16})$$

$$g_{0j} = -\frac{7}{2}\Delta_1 V_j - \frac{1}{2}\Delta_2 W_j + \mathcal{O}(\epsilon^5), \quad (\text{A-17})$$

onde os parâmetros Δ_1 e Δ_2 também são chamados de parâmetros PPN. O parâmetro Δ_1 está relacionado com a velocidade e densidade (equações A-14 e A-17) e diz respeito à quantidade de arrastamento de referenciais inerciais produzida pelo momento $\rho_0 v$. Já o parâmetro Δ_2 diz respeito a diferença entre os momentos radial e transversal no arrastamento de referenciais inerciais (equação A-15).

Por fim, a parte 00 da métrica onde teremos as correções PPN da ordem de $\mathcal{O}(\epsilon^4)$, e

que satisfazem as condições acima, pode ser escrita como

$$g_{00} = -1 + 2U - 2\beta U^2 + 4\Psi - \zeta\mathcal{A} - \eta\mathfrak{D}, \quad (\text{A-18})$$

onde

$$\Psi(x, t) = \int \frac{\rho_0(x', t) \psi(x', t)}{|x - x'|} d^3x', \quad (\text{A-19})$$

$$\psi = \beta_1 v^2 + \beta_2 U + \frac{1}{2}\beta_3 \Pi + \frac{3}{2}\beta_4 p / \rho_0, \quad (\text{A-20})$$

$$\mathcal{A}(x, t) = \int \frac{\rho_0(x', t) [(x - x') \cdot v(x', t)]^2}{|x - x'|^3} d^3x', \quad (\text{A-21})$$

$$\mathfrak{D}(x, t) = \int \frac{\left[t_{j\hat{k}}(x', t) - \frac{1}{3}\delta_{jk}t(x', t) \right] (x_j - x'_j)(x_k - x'_k)}{|x - x'|^3} d^3x'. \quad (\text{A-22})$$

Nestas equações, as constantes $\beta, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \zeta$ e η são parâmetros PPN. O parâmetro β (equação [A-18](#)) quantifica a não-linearidade na lei de superposição da gravidade. Note que, das equações [A-19](#) e [A-20](#), o parâmetro β_1 nos diz qual a capacidade da energia cinética $\rho_0 v^2/2$ de produzir gravidade. Por sua vez, os parâmetros β_2, β_3 e β_4 nos dizem quanta gravidade é produzida pela energia potencial gravitacional, $\rho_0 U$, pela energia interna, $\rho_0 \Pi$, e pela pressão, p , respectivamente. Já os parâmetros ζ e η dizem respeito a quanta gravidade adicional é produzida pela energia cinética radial em relação à energia cinética transversal e, quanta gravidade é produzida a mais pelo estresse radial do que pelo estresse transversal, respectivamente.

Logo, para qualquer teoria métrica da gravidade, com a precisão na ordem pós-newtoniana, os coeficientes da métrica com as perturbações serão dados em termos dos parâmetros PPN. Uma teoria se distingue da outra pelos diferentes valores que os 10 parâmetros PPN podem adquirir. Para a Relatividade Geral, os parâmetros PPN assumem os seguintes valores [\[53\]](#):

$$\gamma = 1, \quad (\text{A-23})$$

$$\beta = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 1, \quad (\text{A-24})$$

$$\zeta = \eta = 0, \quad (\text{A-25})$$

$$\Delta_1 = \Delta_2 = 1. \quad (\text{A-26})$$

Há ainda uma outra notação em que os parâmetros PPN estão relacionados [79]:

$$\gamma = \gamma,$$

$$\beta = \beta,$$

$$\alpha_1 = 7\Delta_1 + \Delta_2 - 4\gamma - 4,$$

$$\alpha_2 = \Delta_2 + \zeta - 1,$$

$$\alpha_3 = 4\beta_1 - 2\gamma - 2 - \zeta,$$

$$\zeta_1 = \zeta,$$

$$\zeta_2 = 2\beta + 2\beta_2 - 3\gamma - 1,$$

$$\zeta_3 = \beta_3 - 1,$$

$$\zeta_4 = \beta_4 - \gamma,$$

$$\xi = \frac{1}{10} (3\eta - 12\beta + 3\gamma + 3\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\zeta_1 + \zeta_2 + 9).$$

Nessa notação, os parâmetros α_1 , α_2 e α_3 dizem respeito aos efeitos do referencial preferencial e α_3 , ζ_1 , ζ_2 , ζ_3 e ζ_4 estão relacionados com a falta de conservação de energia, momento linear e angular (o parâmetro α_3 está relacionado com dois efeitos [79]).

Para a Reatividade Geral, os valores desses novos parâmetros são conhecidos [79]

$$\gamma = \beta = 1,$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = \zeta_4 = \xi = 0.$$

Observe que, como $\zeta_3 = 0$, o valor de β_3 (que diz respeito a quanto a energia interna produz gravidade) fica determinado, $\beta_3 = 1$, corroborando com o valor imposto pela Relatividade Geral (equação A-24). Além disso, o fato de $\zeta_4 = 0$ implica em $\beta_4 = \gamma$,

relacionando a quantidade de gravidade produzida pela pressão com o parâmetro γ da parte puramente espacial.

Para analisar o desvio desses parâmetros em curtas distâncias devemos considerar que os potenciais (A-19) até (A-22) são corrigidos pela parametrização de Yukawa em cada integral.

Apêndice B

Expansão da Função de Airy

Nossa integral fundamental é dada por

$$I_n = \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{Ai^2(\eta - \epsilon - \zeta_n)}{\eta^{\delta-2}} d\eta, \quad (\text{B-1})$$

onde

$$\eta = \frac{z + \gamma\sigma}{z_0}$$
$$\epsilon = \frac{\gamma\sigma}{z_0}.$$

Vamos expandir a função de Airy em torno de $\eta = \epsilon$ ou seja, $z = 0$, próximo da superfície do espelho:

$$Ai(\eta - \epsilon - \zeta_n) = Ai(-\zeta_n) + Ai'(-\zeta_n)(\eta - \epsilon) + \frac{1}{2}Ai''(-\zeta_n)(\eta - \epsilon)^2 + \dots \quad (\text{B-2})$$

Contudo, vale lembrar que a função de Airy e sua segunda derivada aplicadas em qualquer raiz ζ_n é nula, tal que consideraremos apenas a expansão até a terceira ordem, logo:

$$Ai(\eta - \epsilon - \zeta_n) = Ai'(-\zeta_n)(\eta - \epsilon) + \frac{1}{3!}Ai'''(-\zeta_n)(\eta - \epsilon)^3 + \dots \quad (\text{B-3})$$

Tomando o quadrado de [B-3](#), teremos

$$Ai^2(\eta - \epsilon - \zeta_n) = Ai'^2(-\zeta_n)(\eta - \epsilon)^2 \left[1 + \frac{1}{3!} \frac{Ai'''(-\zeta_n)}{Ai'(-\zeta_n)} (\eta - \epsilon)^2 + \mathcal{O}((\eta - \epsilon)^3) \right]^2. \quad (\text{B-4})$$

Assim, a integral da equação (B-1) fica

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{Ai^2(\eta - \epsilon - \zeta_n)}{\eta^{\delta-2}} d\eta, \\
&= Ai'^2(-\zeta_n) \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{(\eta - \epsilon)^2 \left[1 + \frac{1}{3!} \frac{Ai'''(-\zeta_n)}{Ai'(-\zeta_n)} (\eta - \epsilon)^2 + \mathcal{O}((\eta - \epsilon)^3) \right]^2}{\eta^{\delta-2}} d\eta, \\
&= Ai'^2(-\zeta_n) \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\eta^2 \left[1 + \frac{1}{3} \frac{Ai'''(-\zeta_n)}{Ai'(-\zeta_n)} \eta^2 + \dots \right]}{\eta^{\delta-2}} d\eta \\
&= Ai'^2(-\zeta_n) \left[\int_{\epsilon}^{\infty} \eta^{4-\delta} d\eta + \frac{1}{3} \frac{Ai'''(-\zeta_n)}{Ai'(-\zeta_n)} \int_{\epsilon}^{\infty} \eta^{6-\delta} d\eta + \dots \right], \\
&\simeq Ai'^2(-\zeta_n) \frac{1}{\delta - 5} \left(\frac{z_0}{\gamma\sigma} \right)^{\delta-5}.
\end{aligned}$$

Dessa forma, a média da energia gravitacional se torna (Eq. 5.17):

$$\begin{aligned}
\langle U_A \rangle_n &= -\frac{2\pi m \hat{G}_D \rho}{(\delta - 1)(\delta - 2) |Ai'(-\zeta_n)|^2} \frac{z_0^{2-\delta}}{\int_{\epsilon}^{\infty} \frac{Ai^2(\eta - \epsilon - \zeta_n)}{\eta^{\delta-2}} d\eta}, \\
&\simeq -\frac{2\pi m \hat{G}_D \rho}{(\delta - 1)(\delta - 2)} z_0^{2-\delta} \frac{1}{\delta - 5} \left(\frac{z_0}{\gamma\sigma} \right)^{\delta-5}, \\
&= -\frac{2\pi m \hat{G}_D \rho \gamma^3}{(\delta - 1)(\delta - 2)(\delta - 5)} \frac{\gamma^{2-\delta}}{z_0^3} \frac{1}{\sigma^{\delta-5}}, \\
&= -\frac{2\pi m \hat{G}_D \rho \gamma^3}{(\delta - 1)(\delta - 2)(\delta - 5)} (\gamma\sigma)^{2-\delta} \left(\frac{\sigma}{z_0} \right)^3.
\end{aligned}$$

Essa é a quantidade de energia obtida da adição do potencial modificado na interação nêutron-espelho num cenário em que a brana possui espessura finita, σ .

Apêndice C

Cálculos da Seção de Choque Total do Nêutron

Vamos considerar que a amplitude de espalhamento total é dada pela parte nuclear e da polarizabilidade, tal que

$$f_T = \frac{1}{k} \sum_l (2l + 1) f_l P_l(\cos \theta) + \alpha_n \beta_n \left(\frac{6}{5} - \frac{\pi}{4} q R_N + \dots \right),$$

onde

$$f_l = \frac{e^{2i\delta_l} - 1}{2i}.$$

Tomando apenas o termo de ordem $l = 0$ (limite de baixa energia), teremos

$$\begin{aligned} f_{T,l=0} &= \frac{1}{k} f_0 P_0(\cos \theta) + \alpha_n \beta_n \left(\frac{6}{5} - \frac{\pi}{4} q R_N + \dots \right), \\ &= \frac{1}{k} f_0 + \alpha_n \beta_n \left(\frac{6}{5} - \frac{\pi}{4} q R_N + \dots \right), \\ &= \frac{1}{k} e^{i\delta_0} \frac{(e^{i\delta_0} - e^{-i\delta_0})}{2i} + \alpha_n \beta_n \left(\frac{6}{5} - \frac{\pi}{4} q R_N + \dots \right), \\ &= \frac{1}{k} (\cos \delta_0 + i \sin \delta_0) \sin \delta_0 + \alpha_n \beta_n \left(\frac{6}{5} - \frac{\pi}{4} q R_N + \dots \right), \\ &= \frac{1}{k} (\cos^2 \delta_0 \tan \delta_0 + i \sin^2 \delta_0) + \alpha_n \beta_n \left(\frac{6}{5} - \frac{\pi}{4} q R_N + \dots \right). \end{aligned}$$

Sabendo que [78]

$$\tan \delta_0 = -bk,$$

logo, a amplitude de espalhamento total fica

$$f_{T,0} = -b \cos^2 \delta_0 + \frac{i}{k} \sin^2 \delta_0 + \alpha_n \beta_n \left(\frac{6}{5} - \frac{\pi}{4} q R_N + \dots \right).$$

Tomando o módulo quadrado dela, teremos

$$|f_{T,0}|^2 = \left[-b \cos^2 \delta_0 + \frac{i}{k} \sin^2 \delta_0 + \alpha_n \beta_n \Sigma_p \right]^* \left[-b \cos^2 \delta_0 + \frac{i}{k} \sin^2 \delta_0 + \alpha_n \beta_n \Sigma_p \right],$$

onde definimos

$$\Sigma_p = \frac{6}{5} - \frac{\pi}{4} q R_N + \dots$$

Logo,

$$\begin{aligned} |f_{T,0}|^2 &= (b \cos^2 \delta_0) b \cos^2 \delta_0 + (-b \cos^2 \delta_0) \frac{i}{k} \sin^2 \delta_0 + (-b \cos^2 \delta_0) \alpha_n \beta_n \Sigma_p +, \\ &+ \left(\frac{i}{k} \sin^2 \delta_0 \right) (b \cos^2 \delta_0) + \left(-\frac{i}{k} \sin^2 \delta_0 \right) \frac{i}{k} \sin^2 \delta_0 + \left(-\frac{i}{k} \sin^2 \delta_0 \right) \alpha_n \beta_n \Sigma_p + \\ &+ \alpha_n \beta_n \Sigma_p (-b \cos^2 \delta_0) + \alpha_n \beta_n \Sigma_p \frac{i}{k} \sin^2 \delta_0 + \alpha_n^2 \beta_n^2 \Sigma_p^2, \\ &= b^2 \cos^4 \delta_0 - 2b \cos^2 \delta_0 \alpha_n \beta_n \Sigma_p + \alpha_n^2 \beta_n^2 \Sigma_p^2 + \frac{\sin^4 \delta_0}{k^2}, \\ &\simeq b^2 - 2b \alpha_n \beta_n \Sigma_p + \alpha_n^2 \beta_n^2 \Sigma_p^2. \end{aligned} \tag{C-1}$$

Vamos agora calcular as contribuições do segundo e do terceiro termo de (C-1) para a seção de choque total (equação 6.22) a fim de extrairmos o valor da polarizabilidade do nêutron. Iniciemos com o terceiro termo de (C-1). Integrando sobre o ângulo sólido, teremos

$$\begin{aligned} \int \alpha_n^2 \beta_n^2 \left(\frac{6}{5} - \frac{\pi}{4} q R_N + \dots \right)^2 d\Omega &= 2\pi \alpha_n^2 \beta_n^2 \int \left(\frac{6}{5} - \frac{\pi}{4} q R_N + \dots \right)^2 \sin \theta d\theta, \\ &= 2\pi \alpha_n^2 \beta_n^2 \int \left(\frac{36}{25} - \frac{3}{5} \pi q R_N + \dots \right) \sin \theta d\theta. \end{aligned}$$

Como $q = 2k \sin \theta/2$, podemos escrever

$$\int \alpha_n^2 \beta_n^2 \left(\frac{6}{5} - \frac{\pi}{4} q R_N + \dots \right)^2 d\Omega = 2\pi \alpha_n^2 \beta_n^2 \int \left(\frac{36}{25} - \frac{6}{5} \pi k \sin \frac{\theta}{2} R_N + \dots \right) \sin \theta d\theta.$$

Tomando apenas o termo proporcional a k — o termo relevante para extrairmos o valor de α_n —, teremos:

$$\begin{aligned} \int \alpha_n^2 \beta_n^2 \left(\frac{6}{5} - \frac{\pi}{4} q R_N + \dots \right)^2 d\Omega &\propto -\frac{12}{5} \pi^2 k R_N \alpha_n^2 \beta_n^2 \int_0^\pi \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta d\theta, \\ &= -\left(\frac{48}{15} \pi^2 R_N \alpha_n^2 \beta_n^2 \right) k. \end{aligned} \quad (\text{C-2})$$

Estimando o tamanho do termo (C-2) na seção de choque total, teremos

$$\begin{aligned} \frac{48}{15} \pi^2 R_N \alpha_n^2 \beta_n^2 &= \frac{48}{15} \pi^2 (7,117 \times 10^{-15} m) (1,2 \times 10^{-3} 10^{-45} m^3)^2 (3,28 \times 10^{31} m^{-2})^2, \\ &= 3,49 \times 10^{-46} m^3, \\ &= 0,349 fm^3. \end{aligned} \quad (\text{C-3})$$

Agora, calculemos a contribuição do segundo termo, o termo cruzado, de $|f_{T,0}|^2$ na obtenção da seção de choque. Integrando nos ângulos sólidos, temos

$$\begin{aligned} \sigma_{Np} &= -2b\alpha_n\beta_n \int \left(\frac{6}{5} - \frac{\pi}{4} q R_N + \dots \right) \sin \theta d\theta d\phi, \\ &= -4\pi b\alpha_n\beta_n \int \left(\frac{6}{5} - \frac{\pi}{4} 2k R_N \sin \frac{\theta}{2} + \dots \right) \sin \theta d\theta, \\ &\propto 2\pi^2 k R_N b\alpha_n\beta_n \int \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta d\theta, \\ &= \frac{8}{3} b\alpha_n\beta_n \pi^2 R_N k, \end{aligned}$$

onde mais uma vez usamos o fato de que $q = 2k \sin(\theta/2)$.

Identificando quem é o σ_1 nessa expressão e substituindo o valor de β_n , obtemos a seguinte equação

$$\sigma_1 = \frac{8\pi^2}{3} \alpha_n b m_n \frac{(Ze)^2}{\hbar^2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \quad (\text{C-4})$$

de onde obtemos o seguinte valor, substituindo as constantes,

$$\sigma_1 = \frac{2\pi (1,2 \times 10^{-3} 10^{-45} m^3) (9,494 \times 10^{-15} m) (1,675 \times 10^{-27} kg) (82 \times 1,6 \times 10^{-19} C)^2}{3 (1,0546 \times 10^{-34} J.s)^2 (8,85 \times 10^{-12} C^2 N^{-1} m^{-2})},$$

$$= 69,86 fm^3. \quad (C-5)$$

Observe que o valor de σ_1 extraído do termo cruzado (equação [C-5](#)) é cerca de 1000 vezes maior do que o σ_1 extraído do termo puramente da polarizabilidade ([C-3](#)), isto é,

$$\frac{0,349 fm^3}{69,86 fm^3} \simeq 5 \times 10^{-3},$$

o que nos diz que o termo cruzado domina sobre o termo totalmente puro da polarizabilidade. Isso nos permite ignorar o terceiro termo da amplitude total ([C-1](#)) nos cálculos dos limites dos parâmetros de Yukawa.

Por último, além do fato de que ([C-4](#)) é a mesma expressão obtida por Alexandrov em 1992 [[73](#)] (a menos do fator numérico $1/(4\pi\epsilon_0)$, por escolha de convenção), observe que, utilizando essa expressão para o σ_1 e usando os dados reportados por Schmiedmayer, encontramos um valor para α_n muito próximo ao obtido por este último experimentalmente:

$$\frac{8\pi^2}{3} \alpha_n b m_n \frac{(Ze)^2}{\hbar^2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 0,69 \times 10^2 fm^3,$$

$$\therefore \alpha_n = \frac{3\epsilon_0 \hbar^2 (0,69 \times 10^2 fm^3)}{2\pi b m_n (Ze)^2},$$

$$\alpha_n = 1,18 \times 10^{-3} fm^3.$$

Bibliografia

- [1] EINSTEIN, Albert. *Physik und Realität* [Física e Realidade], 1936. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/S1806-11172006000100003>. Acesso em: 12 mar. 2025.
- [2] KALUZA, Theodor. *On the Unification Problem in Physics*, 1921. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/1803.08616.pdf>. Acesso em: 11 mar. 2025.
- [3] KLEIN, Oskar. *Quantum theory and five-dimensional relativity theory*. The Oskar Klein Memorial Lectures, v. 1, p. 67-80, 1999.
- [4] ARKANI-HAMED, N.; DIMOPOULOS, S.; DVALI, G. The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter. *Physics Letters B*, v. 429, p. 263-272, 1998. DOI: 10.1016/S0370-2693(98)00466-3. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/S0370-2693\(98\)00466-3](https://doi.org/10.1016/S0370-2693(98)00466-3). Acesso em: 11 mar. 2025.
- [5] SAKURAI, J. J.; NAPOLITANO, Jim. *Mecânica Quântica Moderna*. 2. ed. Porto Alegre: Bookman, 2013.
- [6] ADELBERGER, E. G.; HECKEL, B. R.; NELSON, A. E. Tests of the gravitational inverse-square law. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, v. 53, p. 77-121, 2003. DOI: 10.1146/annurev.nucl.53.041002.110503.
- [7] THE EÖT-WASH GROUP. Laboratory tests of gravitational and sub-gravitational physics. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/hep-ph/0405262.pdf>. Acesso em: 11 mar. 2025
- [8] KAPNER, D. J.; COOK, T. S.; ADELBERGER, E. G.; et al. Tests of the gravitational inverse-square law below the dark-energy length scale. *Physical Review Letters*, v. 98, 2007. DOI: 10.1103/PhysRevLett.98.021101.
- [9] LEE, J. G.; ADELBERGER, E. G.; COOK, T. S.; FLEISCHER, S. M.; HECKEL, B. R. New test of the gravitational $1/r^2$ law at separations down to 52

m. *arXiv:2002.11761*, 2020. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2002.11761>. Acesso em: 11 mar. 2025.

- [10] GIUDICE, G. F.; RATAZZI, R.; WELLS, J. D. Quantum gravity and extra dimensions at high-energy colliders. *Nuclear Physics B*, v. 544, p. 3-38, 1999. DOI: 10.1016/S0550-3213(99)00044-9. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/S0550-3213\(99\)00044-9](https://doi.org/10.1016/S0550-3213(99)00044-9). Acesso em: 11 mar. 2025.
- [11] LUNA, G. C. Testes de modificações da gravitação na escala atômica. 2020. Tese (Doutorado em Física) – Departamento de Física, Universidade Federal da Paraíba, 2020.
- [12] MATIAS, João Elias Juvito. Testes espectroscópicos de modificações da gravitação em átomos muônicos. 2024. Dissertação (Mestrado em Física) – Departamento de Física, Universidade Federal da Paraíba, 2024.
- [13] ROCHA, M. J. Testes de modificações da gravitação em curtas distâncias e a interferometria de nêutrons. 2021. Dissertação (Mestrado em Física) – Departamento de Física, Universidade Federal da Paraíba, 2021.
- [14] ROCHA, J. M.; DAHIA, F. Tests of gravitational theories in the context of higher-dimensional models. *Physical Review D*, v. 103, p. 124014, 2021. DOI: 10.1103/PhysRevD.103.124014. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.103.124014>. Acesso em: 11 mar. 2025.
- [15] RAUCH, Helmut; WERNER, Samuel A. *Neutron interferometry: lessons in experimental quantum mechanics, wave-particle duality, and entanglement*. 2. ed. Oxford: Oxford University Press, 2015.
- [16] PYNN, Roger. Neutron scattering—a primer. *Los Alamos Science*, 1990.
- [17] NESVIZHEVSKY, V.; BÖRNER, H.; PETUKHOV, A. et al. Quantum states of neutrons in the Earth’s gravitational field. *Nature*, v. 415, p. 297-299, 2002. DOI: 10.1038/415297a. Disponível em: <https://doi.org/10.1038/415297a>. Acesso em: 11 mar. 2025.

- [18] NESVIZHEVSKY, V. V. et al. Study of the neutron quantum states in the gravity field. *European Physical Journal C*, v. 40, p. 479-491, 2005. DOI: 10.1140/epjc/s2005-02135-y. Disponível em: <https://doi.org/10.1140/epjc/s2005-02135-y>. Acesso em: 11 mar. 2025.
- [19] ABELE, H.; BÄSSLER, S.; WESTPHAL, A. Quantum states of neutrons in the gravitational field and limits for non-Newtonian interaction in the range between 1 micron and 10 microns. *arXiv:hep-ph/0301145v1*, 2003. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/hep-ph/0301145v1>. Acesso em: 11 mar. 2025.
- [20] NESVIZHEVSKY, V. V.; PROTASOV, K. V. Constrains on non-Newtonian gravity from the experiment on neutron quantum states in the Earth's gravitational field. *Classical and Quantum Gravity*, v. 21, p. 4557, 2004. DOI: 10.48550/arXiv.hep-ph/0401179. Disponível em: <https://doi.org/10.48550/arXiv.hep-ph/0401179>. Acesso em: 11 mar. 2025.
- [21] ROCHA, J. M.; DAHIA, F. Constraints on extra dimensions theories from gravitational quantum barrier experiments. *Classical and Quantum Gravity*, v. 41, p. 165001, 2024. DOI: 10.1088/1361-6382/ad5f70. Disponível em: <https://doi.org/10.1088/1361-6382/ad5f70>. Acesso em: 11 mar. 2025.
- [22] SCHMIEDMAYER, J.; RAUCH, H.; RIEHS, P. Measurement of the electric polarizability of the neutron. *Physical Review Letters*, v. 61, p. 1065, 1988. DOI: 10.1103/PhysRevLett.61.1065. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.61.1065>. Acesso em: 11 mar. 2025.
- [23] SCHMIEDMAYER, J.; RIEHS, P.; HARVEY, J. A.; HILL, N. W. Measurement of the electric polarizability of the neutron. *Physical Review Letters*, v. 66, n. 8, p. 1015-1018, 1991. DOI: 10.1103/PhysRevLett.66.1015. PMID: 10043974.
- [24] THALER, R. M. Polarizability of the neutron. *Physical Review*, v. 114, p. 827, 1959. DOI: 10.1103/PhysRev.114.827. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRev.114.827>. Acesso em: 11 mar. 2025.

- [25] ALEXANDROV, Y. A.; NIKOLENKO, V. G.; GUSEVA, I. S.; LAPTEV, A. B.; PETROV, G. A.; SHCHERBAKOV, O. A. Measurement of the neutron total cross sections for Bi and Pb: estimate of the electric polarizability of the neutron. In: QAIM, S. M. (org.). *Nuclear data for science and technology*. Research Reports in Physics. Berlin: Springer, 1992. DOI: 10.1007/978-3-642-58113-7_50. Disponível em: https://doi.org/10.1007/978-3-642-58113-7_50. Acesso em: 11 mar. 2025.
- [26] KOESTER, L. et al. Experimental study on the electric polarizability of the neutron. *Zeitschrift für Physik A: Hadrons and Nuclei*, v. 329, p. 229-234, 1988. DOI: 10.1007/BF01283779. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/BF01283779>. Acesso em: 11 mar. 2025.
- [27] KOESTER, L.; NISTLER, W. New determination of the neutron-proton scattering amplitude and precise measurements of the scattering amplitudes on carbon, chlorine, fluorine and bromine. *Zeitschrift für Physik A: Hadrons and Nuclei*, v. 272, p. 189-196, 1975. DOI: 10.1007/BF01408146. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/BF01408146>. Acesso em: 11 mar. 2025.
- [28] REINER, G.; WASCHKOWSKI, W.; KOESTER, L. Neutron scattering lengths of molten metals determined by gravity refractometry. *Zeitschrift für Physik A: Hadrons and Nuclei*, v. 337, p. 221-228, 1990. DOI: 10.1007/BF01294295. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/BF01294295>. Acesso em: 11 mar. 2025.
- [29] SNOW, W. M. et al. Internal consistency of neutron coherent scattering length measurements from neutron interferometry and from neutron gravity reflectometry for exotic Yukawa analyses. 2020. *arXiv:1910.14271v2 [nucl-ex]*. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1910.14271v2>. Acesso em: 11 mar. 2025.
- [30] KLEIN, A. G.; WERNER, S. A. Neutron optics. *Reports on Progress in Physics*, v. 46, 1983. DOI: 10.1088/0034-4885/46/3/001. Disponível em: <https://doi.org/10.1088/0034-4885/46/3/001>. Acesso em: 11 mar. 2025.

- [31] WESSON, P. S.; OVERDUIN, J. M. *Principles of space-time-matter: cosmology, particles and waves in five dimensions*. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2019.
- [32] OVERDUIN, J. M.; WESSON, P. S. Kaluza-Klein gravity. *Physics Reports*, v. 283, n. 5-6, p. 303-378, 1997.
- [33] LEMOS, A. S. Efeitos das dimensões extras em sistemas atômicos e o problema do raio do próton. 2018. Tese (Doutorado em Física) - Departamento de Física, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2018.
- [34] PIERRE, J. *Strings and extra dimensions*. Disponível em: <https://www.sukidog.com/jpierre/strings/extradim.htm>. Acesso em: 11 mar. 2025.
- [35] CERN. *Science: Accelerators*. Disponível em: <https://home.cern/science/accelerators>. Acesso em: 11 mar. 2025.
- [36] AQUINO, P. M. Física além do modelo padrão em teorias de dimensões extras. 2007. Dissertação (Mestrado em Ciências) - Instituto de Física, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007.
- [37] RUBAKOV, V. A.; SHAPOSHNIKOV, M. E. Do we live inside a domain wall? *Physics Letters B*, v. 125, n. 2-3, p. 136-138, 1983. DOI: 10.1016/0370-2693(83)91253-4. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(83\)91253-4](https://doi.org/10.1016/0370-2693(83)91253-4). Acesso em: 11 mar. 2025.
- [38] ZWIEBACH, B. *A first course in string theory*. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
- [39] MERZBACHER, Eugen. *Quantum Mechanics*. 3. ed. New York: Wiley, 1998.
- [40] MURATA, J.; TANAKA, S. A review of short-range gravity experiments in the LHC era. *Classical and Quantum Gravity*, v. 32, p. 033001

- (32pp), 2015. DOI: 10.1088/0264-9381/32/3/033001. Disponível em: <https://doi.org/10.1088/0264-9381/32/3/033001>. Acesso em: 11 mar. 2025.
- [41] FISCHBACH, E.; KRAUSE, D. E. Extra dimensions, new forces, and non-Newtonian gravity. 2001.
- [42] FISCHBACH, E.; TALMADGE, C. L. *The search for non-Newtonian gravity*. New York: Springer Science & Business Media, 1998. ISBN 0387984909, 9780387984902.
- [43] EÖT-WASH GROUP. *Inverse square law*. Disponível em: <https://www.npl.washington.edu/eotwash/inverse-square-law>. Acesso em: 11 mar. 2025.
- [44] PINTO, M. V. C.; FARINA, C.; TORT, A. O efeito Casimir. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 22, n. 1, 2000.
- [45] WIKIPEDIA. *Ficheiro: Casimir plates.svg*. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Casimir_plates.svg. Acesso em: 11 mar. 2025.
- [46] INOVAÇÃO TECNOLÓGICA. Força Casimir é usada para controlar e manipular objetos. Disponível em: <https://www.inovacaotecnologica.com.br/noticias/noticia.php?artigo=forca-casimir-usada-controlar-manipular-objetos&id=010165200811>. Acesso em: 11 mar. 2025.
- [47] BEZERRA, V. B.; KLIMCHITSKAYA, G. L.; MOSTEPANENKO, V. M.; ROMERO, C. Constraints on non-Newtonian gravity from measuring the Casimir force in a configuration with nanoscale rectangular corrugations. *Physical Review D*, v. 83, p. 075004, 2011. DOI: 10.1103/PhysRevD.83.075004. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.83.075004>. Acesso em: 11 mar. 2025.
- [48] ABELE, H. The neutron. Its properties and basic interactions. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, v. 60, p. 1-81, 2008.

- [49] GALILEU. Medição mais precisa já feita estima expectativa de vida de nêutrons. Disponível em: <https://revistagalileu.globo.com/Ciencia/noticia/2021/10/medicao-mais-precisa-ja-feita-estima-expectativa-de-vida-de-neutrons.html>. Acesso em: 11 mar. 2025.
- [50] OVERHAUSER, A. W.; COLELLA, B. Observation of gravitationally induced quantum interference. *Physical Review Letters*, v. 33, p. 1237, 1974. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.33.1237>. Acesso em: 11 mar. 2025.
- [51] BERTOLAMI, O. On the gravitational attraction between two bodies at small distances. *Modern Physics Letters A*, v. 1, n. 6, p. 383-388, 1986. DOI: 10.1142/S0217732386000476.
- [52] GREENE, G. L.; GUDKOV, V. Precision measurement of neutron charge form factor. *Physical Review C*, v. 75, p. 015501, 2007. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.75.015501>. Acesso em: 11 mar. 2025.
- [53] MISNER, C. W.; THORNE, K. S.; WHEELER, J. A. *Gravitation*. San Francisco: W.H. Freeman and Company, 1973. ISBN 0-7167-0334-3. ISBN 0-7167-0344-0 (pbk).
- [54] BERTOTTI, B.; IESS, L.; TORTORA, P. A test of general relativity using radio links with the Cassini spacecraft. *Nature*, v. 425, p. 374-376, 2003.
- [55] WESTPHAL, A. et al. Quantum mechanical description of gravitationally bound states. *European Physical Journal C*, v. 51, p. 367-375, 2007. Disponível em: <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-007-0283-x>. Acesso em: 11 mar. 2025.
- [56] ZIMMER, O.; KAISER, N. On the non-Newtonian gravitational force in a model with extra dimensions. *Classical and Quantum Gravity*, v. 23, p. 6077-6080, 2006. Disponível em: <https://doi.org/10.48550/arXiv.hep-ph/0602127>. Acesso em: 11 mar. 2025.

- [57] WESTPHAL, A. et al. Analytically derived limits on short-range fifth forces from quantum states of neutrons in the Earth's gravitational field. 2007. Disponível em: <https://doi.org/10.48550/arXiv.hep-ph/0703108>. Acesso em: 11 mar. 2025.
- [58] BUISSERET, F. et al. Gravity with a Kaluza-Klein mechanism and the consequences for short-range forces. *Classical and Quantum Gravity*, v. 24, p. 855-865, 2007. Disponível em: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0264-9381/24/4/006>. Acesso em: 11 mar. 2025.
- [59] NESVIZHEVSKY, V. V.; PIGNOL, G.; PROTASOV, K. V. Gravitational quantum states of neutrons and tests of gravitational theories. *Physical Review D*, v. 77, p. 034020, 2008. DOI: 10.1103/PhysRevD.77.034020. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.77.034020>. Acesso em: 11 mar. 2025.
- [60] HEACOCK, R. et al. Pendellösung interferometry probes the neutron charge radius, lattice dynamics, and fifth forces. *Science*, v. 373, p. 1239-1243, 2021. DOI: 10.1126/science.abc2794. Disponível em: <https://www.science.org/doi/10.1126/science.abc2794>. Acesso em: 11 mar. 2025.
- [61] NAVAS, S. et al. (Particle Data Group). Review of Particle Physics. *Phys. Rev. D*, v. 110, p. 030001, 2024. Disponível em: <https://pdg.lbl.gov/2024/listings/rpp2024-list-n.pdf>. Acesso em: 11 mar. 2025.
- [62] WALLIS, H.; DALIBARD, J.; COHEN-TANNOUJDI, C. Trapping atoms in a gravitational cavity. *Appl. Phys. B*, v. 54, p. 407-419, 1992. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/BF00325387>. Acesso em: 11 mar. 2025.
- [63] NESVIZHEVSKY, V.V. et al. Search for quantum states of the neutron in a gravitational field: gravitational levels. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A*, v. 440, p. 754-759, 2000. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/S0168-9002\(99\)01077-3](https://doi.org/10.1016/S0168-9002(99)01077-3). Acesso em: 11 mar. 2025.

- [64] LEEB, H.; SCHMIEDMAYER, J. Constraint on hypothetical light interacting bosons from low-energy neutron experiments. *Physical Review Letters*, v. 68, p. 1472, 1992. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.68.1472>. Acesso em: 11 mar. 2025.
- [65] IDINI, A.; BARBIERI, C.; NAVRÁTIL, P. Ab initio optical potentials and nucleon scattering on medium mass nuclei. *Physical Review Letters*, v. 123, p. 092501, 2019. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.123.092501>. Acesso em: 11 mar. 2025.
- [66] PANKOV, A. A.; PAVERC, N. Identification of indirect new physics effects at e^+e^- colliders: The large extra dimensions case. *Physical Review D*, v. 72, p. 035012, 2005. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.72.035012>. Acesso em: 11 mar. 2025.
- [67] ARKANI-HAMED, N.; SCHMALTZ, M. Hierarchies without symmetries from extra dimensions. *Physical Review D*, v. 61, p. 033005, 2000. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.61.033005>. Acesso em: 11 mar. 2025.
- [68] SCHMIEDMAYER, J.; RAUCH, H.; RIEHS, P. The electric polarizability of the neutron. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A*, v. 284, n. 1, p. 137-142, 1989. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/0168-9002\(89\)90267-2](https://doi.org/10.1016/0168-9002(89)90267-2). Acesso em: 11 mar. 2025.
- [69] LEEB, H.; EDER, G.; RAUCH, H. The Effect of the Electric Polarizability of the Neutron on Neutron-Nucleus Scattering. *Journal de Physique Colloques*, v. 45, p. C3-47-C3-50, 1984. DOI: 10.1051/jphyscol:1984310ff. Disponível em: <https://hal.science/jpa-00224024/document>. Acesso em: 11 mar. 2025.
- [70] PULSE PHYSIK. *Basics of Physics*. Disponível em: <https://www.pulse.physik.uni-muenchen.de/education/basics/index.html>. Acesso em: 11 mar. 2025.

- [71] ALEXANDRU, A.; LEE, F. X. Neutron electric polarizability. *arXiv:0911.2520*, 2009. Disponível em: <https://doi.org/10.48550/arXiv.0911.2520>. Acesso em: 11 mar. 2025.
- [72] ALEXANDROV, Yu. A. *Revista Mexicana de Física*, v. 42, n. 2, p. 283-293, 1996.
- [73] ALEXANDROV, Y.A. et al. Measurement of the neutron total cross sections for Bi and Pb: estimate of the electric polarizability of the neutron. In: QAIM, S.M. (Ed.). *Nuclear Data for Science and Technology. Research Reports in Physics*. Berlin: Springer, 1992. p. 50-63. Disponível em: https://doi.org/10.1007/978-3-642-58113-7_50. Acesso em: 11 mar. 2025.
- [74] AMSLER, C. *Nuclear and Particle Physics*. 1. ed. 2015. Online ISBN: 978-0-7503-1140-3. Disponível em: <https://iopscience.iop.org/book/mono/978-0-7503-1140-3>. Acesso em: 11 mar. 2025.
- [75] TAKETANI, Kaoru. *Effect of non-Newtonian gravity on the amplitude of neutron reflection from bulk materials. J. Phys.: Conf. Ser.*, v. 340, p. 012050, 2012. Disponível em: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/340/1/012050/pdf>. Acesso em: 11 mar. 2025.
- [76] NATIONAL INSTITUTE OF STANDARDS AND TECHNOLOGY. *Neutron scattering lengths for Pb*. Disponível em: <https://www.nsnr.nist.gov/resources/n-lengths/elements/pb.html>. Acesso em: 11 mar. 2025.
- [77] ALEXANDROV, Yu. A. et al. Determination of the neutron scattering length of ^{208}Pb . *Z. Phys. A - Atomic Nuclei*, v. 334, p. 359-360, 1989. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/BF01284565>. Acesso em: 11 mar. 2025.
- [78] AMSLER, C. *Scattering*. Disponível em: <https://amsler.web.cern.ch/NPIOP/Scattering.pdf>. Acesso em: 11 mar. 2025.
- [79] WILL, Clifford M.; NORDTVEDT, Kenneth Jr. *Conservation laws and preferred frames in relativistic gravity*. OAP-284, 1972.

- [80] DAHIA, F.; LEMOS, A. S. The alpha particle charge radius, the radion and the proton radius puzzle. *Eur. Phys. J. C*, v. 84, p. 1173, 2024. Disponível em: <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-024-13582-z>. Acesso em: 11 mar. 2025.