

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS APLICADAS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Josemberg Oliveira da Silva

**O uso do Geogebra em dispositivos móveis: Uma ferramenta prática
para o estudo dos vetores**

Rio Tinto – PB
2017

Josemberg Oliveira da Silva

**O uso do Geogebra em dispositivos móveis: Uma ferramenta prática
para o estudo dos vetores**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado a
Coordenação do Curso de Licenciatura em
Matemática da Universidade Federal da Paraíba,
como Requisito parcial para a obtenção do título
de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Claudilene Gomes da
Costa

Rio Tinto – PB
2017

ficha catalográfica

--

Josemberg Oliveira da Silva

O uso do Geogebra em dispositivos móveis: Uma ferramenta prática para o estudo dos vetores

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para obtenção do título de licenciado em Matemática.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Claudilene Gomes da Costa

Aprovado em ____/____/____

BANCA EXAMINADORA

Prof^a. Dr^a. Claudilene Gomes da Costa (Orientadora) (CCAIE – DCX – UFPB)

Prof^a. Ms. Agnes Liliane Lima Soares de Santana (CCAIE – DCX – UFPB)

Prof^a. Ms. Surama Santos Ismael da Costa (CCAIE – DCX – UFPB)

Dedico esse trabalho ao meus pais, José Mario da Silva e Maria Nazaré Oliveira da Silva (in memoriam) pelos momentos felizes que me proporcionaram e ensinaram que é possível uma família humilde, viver com dignidade e amor.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus pela graça concedida. À minha família, especialmente à minha esposa Ana Maria Cândido da Silva, pelo companheirismo nos momentos difíceis e pela compreensão nos momentos de ausência no lar, os quais foram necessários para o desenvolvimento e conclusão deste trabalho.

Aos meus colegas de classe pela amizade dispensada nos momentos difíceis e compartilhada nos momentos alegres.

À minha professora e orientadora Dr^a. Claudilene Gomes da Costa, pelos ensinamentos e orientações e, principalmente, pelas palavras de incentivo que nos deram ânimo e força para concluir este trabalho acadêmico.

A todos os professores pelo ótimo trabalho realizado no Curso de Licenciatura em Matemática Campus IV.

RESUMO

As tecnologias estão cada vez mais presentes na vida das pessoas e nesse contexto os dispositivos móveis vêm ganhando grande destaque na sociedade e conseqüentemente no ambiente escolar. Visando aproveitar o potencial tecnológico destes dispositivos tão utilizados pelos alunos fora da sala de aula, como também a importância em agregar novas tecnologias ao processo de ensino-aprendizagem, a presente pesquisa teve como principal objetivo apresentar um estudo sobre vetores, utilizando como recurso didático o software matemático Geogebra desenvolvido para dispositivos móveis. O estudo foi desenvolvido com os alunos da disciplina de Cálculo Vetorial e Geometria Analítica, do curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Federal da Paraíba/Campus IV, em Rio Tinto – PB, surgindo a partir das dificuldades de aprendizagem dos alunos no que diz respeito ao estudo dos vetores. Para atingir o objetivo proposto, a metodologia utilizada foi quanto aos procedimentos técnicos foram a pesquisa bibliográfica e o estudo de caso, quanto aos objetivos foram a pesquisa exploratória e descritiva e quanto ao método da abordagem foi utilizada tanto a pesquisa qualitativa quanto a quantitativa. A amostra foi composta por vinte alunos e os instrumentos utilizados na coleta de dados foram uma atividade realizada com o auxílio do Geogebra em dispositivos móveis e um questionário diagnóstico, contendo onze questões fechadas. Com relação aos resultados, foi possível observar atividades feitas com o uso de lápis e papel, que os alunos ainda sentem dificuldades em desenvolver o raciocínio geométrico dos vetores. Ao desenvolver as mesmas atividades no Geogebra, os alunos conseguiram fazer a ponte entre o tratamento algébrico e o geométrico. Ao final da pesquisa, os alunos opinaram que o uso de dispositivos móveis no tratamento de vetores facilitou bastante a compreensão destes conceitos e que esta metodologia também poderia ser utilizada em outras disciplinas do Curso de Licenciatura em Matemática.

Palavras-chaves: Vetores. Dispositivos Móveis. Geogebra. Ensino da Matemática.

ABSTRACT

Technologies are increasingly present in people's lives and in this context mobile devices have been gaining prominence in society and consequently in the school environment. Aiming to take advantage of the technological potential of these devices used by students outside the classroom, as well as the importance of adding new technologies to the teaching-learning process, the present research had as main objective to present a study on vectors, using as didactic resource the Geogebra software developed for mobile devices. The study was developed with the students of the discipline of Vectorial Calculus and Analytical Geometry, of the Mathematics Degree course of the Federal University of Paraíba / Campus IV, in Rio Tinto - PB, arising from the students' learning difficulties in respect to the study of vectors. In order to reach the proposed objective, the methodology used was as far as the technical procedures were the bibliographic research and the case study, as far as the objectives were the exploratory and descriptive research and as far as the approach method was used both qualitative and quantitative research. The sample consisted of twenty students and the instruments used in the data collection were an activity performed with the aid of Geogebra in mobile devices and a diagnostic questionnaire, containing eleven closed questions. Regarding the results, it was possible to observe activities made with the use of pencil and paper, that the students still feel difficulties in developing the geometric reasoning of the vectors. By developing the same activities in Geogebra, students were able to bridge the algebraic and geometric treatment. At the end of the research, the students considered that the use of mobile devices in the treatment of vectors facilitated a lot of understanding of these concepts and that this methodology could also be used in other disciplines of the Degree in Mathematics.

Keywords: Vectors. Mobile devices. Geogebra. Mathematics Teaching.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Interface Geogebra.....	24
Figura 2 - Interface Geogebra 3d.....	24
Figura 3- Barra de ferramentas.....	25
Figura 4- Janela de visualização.....	25
Figura 5- Vetor.....	28
Figura 6- Soma de Vetores.....	28
Figura 7- Diferença de Vetores.....	29
Figura 8- Multiplicação por escalar.....	29
Figura 9- Produto interno.....	30
Figura 10- Módulo de um Vetor.....	30
Figura 11- Ângulo entre dois Vetores.....	31
Figura 12- Print da questão 1.....	38
Figura 13- Resposta incorreta atividade 2.....	39
Figura 14- Print da questão 2.....	39
Figura 15- Resposta correta questão 3.....	40
Figura 16- Print da questão 3.....	40
Figura 17- Resposta correta questão 4.....	41
Figura 18- Print da questão 4.....	42
Figura 19- Atividade 5 incompleta.....	43
Figura 20- Print da questão 5.....	43

LISTA DE TABELAS

Tabela 1- Questão 1.....	37
Tabela 2- Questão 2.....	38
Tabela 3- Questão 3.....	39
Tabela 4- Questão 4.....	41
Tabela 5- Questão 5.....	42

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1: Você utiliza computador em casa?.....	44
Gráfico 2: Você faz uso de algum dispositivo de tecnologia móvel?.....	44
Gráfico 3: Você tem acesso à internet em casa?.....	45
Gráfico 4: Qual o principal aparelho utilizado para acessar a internet ?.....	45
Gráfico 5: Qual o principal aparelho de acesso à internet na maior parte do seu tempo?.....	46
Gráfico 6: Você conhecia o Geogebra?.....	46
Gráfico 7: Você já utilizou o Geogebra no seu dispositivo móvel?.....	47
Gráfico 8: O Geogebra ajudou você a compreender o conteúdo abordado?.....	47
Gráfico 9: Como você analisa a ideia de utilizar dispositivos móveis em sala de aula, para fins educativos?.....	48

LISTA DE ABREVIATURAS

2D	Bidimensional
3D	Tridimensional
IF	Instituto Federal
m-learning	<i>Mobile Learning</i>
PB	Paraíba
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
Print Screen	Imagem capturada da tela
RS	Rio Grande do Sul
UFPB	Universidade Federal da Paraíba

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	15
1.1	Apresentação do tema.....	15
1.2	Problemática e Justificativa.....	16
1.3	Objetivos.....	18
1.3.1	Objetivo Geral.....	18
1.3.2	Objetivos Específicos.....	18
1.4	Organização do Trabalho.....	18
2	REFERENCIAL TEÓRICO.....	20
2.1	Os PCN e as novas tecnologias no contexto social e escolar.....	20
2.2	O uso das tecnologias computacionais na educação Matemática.....	21
2.3	O Geogebra.....	22
2.3.1	Interface do Geogebra.....	23
2.3.2	Algumas ferramentas do Geogebra.....	25
2.4	Vetores.....	26
2.4.1	Uma síntese histórica.....	27
2.4.2	Conceitos iniciais e operações no Geogebra.....	27
2.5	O uso dos dispositivos móveis no processo de ensino-aprendizagem.....	31
3	METODOLOGIA.....	34
3.1	Tipologias da Pesquisa.....	34
3.1.1	Quanto aos objetivos.....	34
3.1.2	Quanto aos procedimentos técnicos.....	34
3.1.3	Quanto a abordagem.....	35
3.1.4	Quanto ao método.....	35
3.2	Instrumento de coleta de dados.....	35
3.3	Universo e Amostra da pesquisa.....	36
4	ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS.....	37
4.1	Atividade sobre vetores e a utilização do Geogebra.....	37
4.2	Questionário.....	43
	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	49

REFERÊNCIAS.....	51
APÊNDICE.....	53

1 INTRODUÇÃO

1.1 Apresentação do Tema

A sociedade vem se tornando cada vez mais dependente das tecnologias para subsistir no mundo globalizado. Aparelhos desenvolvidos para promover tanto a comunicação quanto a informação, têm se tornado indispensáveis à vida das pessoas. Como não poderia ser diferente, o uso de computadores, notebooks, tablets e smartphones, têm sido imprescindíveis para os alunos nas escolas. Diante desses fatos, abre-se um leque de possibilidades para o professor desenvolver uma metodologia de ensino muito mais dinâmica. Dentre o vasto conteúdo oferecido pela presente tecnologia na área da educação, destacam-se, como uma poderosa ferramenta no Ensino da Matemática, os softwares matemáticos.

Os PCN (BRASIL, 1998) de Matemática destacam tanto a importância do uso dos recursos tecnológicos no processo de ensino e aprendizado da Matemática, quanto sua influência no cotidiano da sociedade:

É esperado que nas aulas de Matemática se possa oferecer uma educação tecnológica, que não signifique apenas uma formação especializada, mas, antes, uma sensibilização para o conhecimento dos recursos da tecnologia, pela aprendizagem de alguns conteúdos sobre sua estrutura, funcionamento e linguagem e pelo reconhecimento das diferentes aplicações da informática, em particular nas situações de aprendizagem, e valorização da forma como ela vem sendo incorporada nas práticas sociais. (BRASIL, 1998, p. 46).

Dentre os aparelhos tecnológicos mais utilizados na atualidade pela população, os que mais se destacam são os de telefonia móvel. Os avanços tecnológicos e a mudança de hábitos de consumo em todos os setores da sociedade têm motivado as empresas a investirem cada vez mais na comodidade do consumidor, sendo assim a tecnologia que antes ficava restrita ao computador de mesa, já está presente nos smartphones e tablets, sendo assim, esse tipo de aparelho já ultrapassa o simples papel de telefone, para assumir o de computador móvel, tornando-se artefato indispensável para quem busca informação. Através da internet, as redes sociais estimulam o uso do aparelho pelo público jovem, por isso o smartphone é uma realidade também presente no cotidiano escolar, uma tendência que deve ser levada em consideração, como mostram os PCN (BRASIL, 2000):

As novas tecnologias da comunicação e da informação permeiam o cotidiano, independente do espaço físico, e criam necessidades de vida e convivência que precisam ser analisadas no espaço escolar. A televisão, o rádio, a informática, entre outras, fizeram com que o homem se aproximasse por imagens e sons de mundos antes inatingíveis. (BRASIL, 2000, p.11).

De acordo com Valente (1997b; 1998), o computador é uma ferramenta que pode ser utilizada pelo professor a fim de promover a aprendizagem, autonomia e criatividade do aluno. Mas, para que isto aconteça, é necessário que o professor reconheça que é dele o papel de mediador dessa interação entre aluno-conhecimento-computador. Quando o professor não faz uso dessas tecnologias, ele não está acompanhando as mudanças velozes que a sociedade e a escola vem vivenciando e assim prejudica a qualidade do ensino, desmotivando o aluno e comprometendo assim, o processo de ensino-aprendizagem.

Diante disso, esse estudo pretende apresentar uma metodologia diferenciada que possa vir a auxiliar a compreensão dos alunos da disciplina de Cálculo Vetorial do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Paraíba/Campus IV, no tratamento dos conceitos de vetores utilizando o software GeoGebra na versão desenvolvida para dispositivos móveis.

1.2 Problemática e Justificativa

Os softwares matemáticos, através de pesquisas realizadas na área da educação matemática, mostram-se cada vez mais, excelentes ferramentas de auxílio ao professor no processo de ensino-aprendizagem, com o intuito de fundamentar o tema escolhido, serão apresentadas duas pesquisas realizadas com o auxílio dos softwares matemáticos, direcionadas ao estudo de elementos das Geometria Plana, Espacial e Analítica.

A pesquisa de Mestrado realizada por Halberstadt (2015) envolvendo alunos do terceiro ano do Ensino Médio de uma escola da cidade de Santa Maria/RS, teve como finalidade estudar a compreensão de conceitos e propriedades da Geometria Analítica do Ensino Médio utilizando os softwares matemáticos GrafEq e o GeoGebra. Foram trabalhados nas atividades os objetos reta, circunferência e parábola. Os resultados apontam um bom desenvolvimento dos alunos ao longo de toda sequência didática, mediante o tratamento exposto com o uso dos softwares, ocorreu uma melhor compreensão devido a representação geométrica dos elementos algébricos. Mesmo não havendo uma compreensão plena do conteúdo abordado, pôde-se observar que as atividades promoveram um estudo diferenciado em relação aos já vistos anteriormente, possibilitando os alunos a fazerem novos questionamentos, por exemplo, quando não obtinham o resultado gráfico desejado, após digitar uma relação algébrica, os alunos questionavam o porquê desse resultado.

Santos (2008) aborda em sua pesquisa realizada em duas turmas do segundo ano do

Nível Médio em uma escola da rede privada de Porto Alegre, a utilização das tecnologias, especificamente o software matemático GrafEq, no processo de ensino-aprendizagem da Geometria Analítica. Para isso foi implantada uma sequência de atividades envolvendo a construção de elementos da Geometria, tais como retas, triângulos e retângulos, trabalhados no plano cartesiano. Dessa maneira, de acordo com os dados coletados, a pesquisa mostrou-se bastante coesa, os resultados obtidos com a utilização do software matemático deixou evidente ao aluno a relação de equivalência existente entre a representação geométrica e a representação algébrica, promovendo ainda um ambiente atualizado e interativo entre os alunos.

A falta de interação com o cotidiano é um dos fatores que torna o Ensino da Geometria Analítica incompreensível e pouco interessante para os alunos, em acordo com o pensamento de Furlani e Grossi:

A Geometria Analítica, por exemplo, é um conteúdo da Matemática em que os alunos possuem muitas dificuldades, pois geralmente é apresentado de forma abstrata, fechada e com roteiro definido para resolução de exercícios, sendo assim, os alunos não encontram relação com o seu cotidiano e nem com o espaço em que vivem. (FURLANI; GROSSI, 2016, p.1).

Nesse contexto é papel do professor promover práticas que proporcionem aos alunos um ambiente favorável à construção do conhecimento e, ao mesmo tempo, próximo do seu cotidiano, assim na busca de novas práticas que torne as aulas mais dinâmicas, os softwares matemáticos voltados ao Ensino da Geometria tendem a ser um recurso, atualmente, indispensável na compreensão de conteúdos que necessitem de tratamento tanto algébrico quanto geométrico, como é o caso dos vetores.

Diante do que foi exposto, entende-se que o referido trabalho tem respaldo nas pesquisas apresentadas, dessa maneira há indícios que esta pesquisa contribuirá de maneira significativa ao tema abordado e conseqüentemente, com a ajuda do software matemáticos Geogebra e a praticidade dos smartphones, espera-se que a presente proposta de ensino-aprendizagem seja proveitosa no estudo e compreensão dos conceitos de vetores.

Para o meio acadêmico este trabalho deverá ser de grande relevância, devido ao fato que os alunos poderão aplicar seus conceitos teóricos em relação as operações algébricas com vetores e ao mesmo tempo visualizarão os resultados, agilizando a compreensão da relação entre o tratamento algébrico e o geométrico, visto que os alunos quando se deparam com a disciplina de Cálculo Vetorial apresentam dificuldades em utilizar lápis e papel para expressar graficamente os vetores, tanto no plano quanto no espaço.

Para a prática profissional, confia-se que a pesquisa auxilie os docentes a refletir sobre a importância em manter-se atualizado e assim agregarem novos valores às suas práticas pedagógicas e seus conhecimentos acerca do conteúdo lecionado. Acredita-se que a oportunidade de apresentar este trabalho será uma realização pessoal, pois sempre acreditamos que, aliado ao software matemático, o smartphone pode ser um recurso facilitador e prazeroso no estudo da Matemática.

Nesse contexto, espera-se que a metodologia apresentada neste trabalho ajude no desenvolvimento de novas práticas pedagógicas que venham propiciar, cada vez mais, melhorias no ambiente de aprendizado da disciplina de Cálculo Vetorial e Geometria Analítica do Curso de Licenciatura em Matemática-UFPB/Campus IV.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo Geral

Apresentar um estudo sobre vetores, utilizando como recurso didático o software matemático Geogebra desenvolvido para dispositivos móveis.

1.3.2 Objetivos Específicos

- Mostrar ao aluno o software Geogebra como um eficiente ferramenta de construção geométrica;
- Verificar quais os possíveis obstáculos para os alunos no estudo dos vetores;
- Levar o aluno a compreender o conceito de vetores através da sua visualização geométrica;
- Mostrar ao aluno uma possibilidade de uso do seu dispositivo móvel no estudo da Matemática;
- Verificar a viabilidade de utilização dos dispositivos móveis em sala de aula, por alunos e professores.

1.4 Organização do Trabalho

O presente trabalho encontra-se dividido em quatro capítulos, além de apresentar as

considerações finais, as referências utilizadas na construção desse trabalho e os apêndices contendo a atividade e o questionário diagnóstico realizados na oficina.

No primeiro capítulo, encontra-se a introdução do trabalho, nela é feita a apresentação do tema, o qual buscou respaldo junto aos PCN, em seguida têm-se a problemática e a justificativa; os objetivos e a metodologia da pesquisa, demonstrando todos os procedimentos utilizados para que os objetivos do trabalho fossem atingidos.

No segundo capítulo, é evidenciado o referencial teórico, visando dar embasamento ao tema abordado. Para isso, há a apresentação de assuntos relacionados à algumas orientações dos PCN sobre o uso de novas tecnologias na educação Matemática. Abordou-se também, sobre a importância do aplicativo Geogebra e sua utilização no Ensino da Matemática com a devida fundamentação teórica. O capítulo é fechado com uma síntese histórica, conceitos básicos e definições de vetores apresentados no Geogebra.

No terceiro capítulo descreve a metodologia da pesquisa, demonstrando todos os procedimentos utilizados para que os objetivos do trabalho fossem atingidos, caracterizando o tipo da pesquisa, quanto aos seus objetivos, procedimentos técnicos e abordagem. Para encerrar, são apresentados os instrumentos de coleta de dados, que foram a oficina e o questionário, seguidos do universo e a amostra utilizadas para esta pesquisa.

No quarto capítulo encontra-se a análise e discussão dos resultados da pesquisa, obtidos por meio dos dados levantados a partir das atividades e do questionários utilizados na oficina. Por fim, serão apresentadas as considerações finais e sugestões para futuras pesquisas.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Os PCN e as novas tecnologias no contexto social e escolar

As pessoas buscam na educação escolar a garantia na obtenção de conhecimentos e assim chegar a um futuro promissor. No entanto, com o avanço tecnológico que a sociedade vive atualmente se faz necessário que a escola acompanhe essas transformações e seja capaz de criar novos cenários, numa linguagem de tempos e espaços diferentes. Os PCN (BRASIL, 2000) de Matemática, afirmam que:

Descobertas humanas foram pensadas para o homem e assim devem ser entendidas. Os sistemas tecnológicos, na sociedade contemporânea, fazem parte do mundo produtivo e da prática social de todos os cidadãos, exercendo um poder de onipresença, uma vez que criam formas de organização e transformação de processos e procedimentos. (BRASIL, 2000, p.12) .

No passado, o aluno deveria se adaptar a padrões tradicionais de ensino pré-estabelecidos pelas escolas, independentemente das necessidades presentes em seu cotidiano, apesar dos esforços de estudiosos na área da educação, muitas dessas práticas perduram até hoje. Tais circunstâncias levam os jovens estudantes à questionarem se o conhecimento oferecido na escola será válido para sua realidade. Os PCN (BRASIL, 1998) salienta que:

O saber difundido na escola, em geral, é visto como um amontoado de conteúdos, com pouca relação com a realidade em que vivem, não despertando interesse, nem oferecendo referências culturais. Uma vez que o conhecimento escolar não ajuda a compreender o mundo, o sentido do estudo encontra-se apenas na continuidade dos estudos, tendo em vista a obtenção do diploma (que nem sempre é alcançada). É comum que alunos estabeleçam uma oposição entre o conhecimento difundido pela escola, avaliado como maçante e distanciado da realidade, e o conhecimento obtido em outros espaços (na família, no trabalho, na mídia, na rua) avaliado como o conhecimento significativo, o conhecimento da vida real. (BRASIL, 1998, p.124).

No momento atual, os jovens vivem em um ambiente cada vez mais digital e conectados ao mundo através da rede global de computadores, a internet. Portanto, desenvolver uma educação utilizando recursos tecnológicos torna-se algo crucial na produção de conhecimentos necessários para subsistir nesse ambiente. Nessa questão, Para os PCN (BRASIL, 2000), a escola deve criar meios para que o aluno seja capaz de compreender o impacto das tecnologias da comunicação e da informação na sua vida, nos processos de produção, no desenvolvimento do conhecimento e na vida social. Para que seja alcançado esse objetivo é imprescindível que a escola absorva essa nova realidade e desenvolva práticas educativas a fim de formar profissionais qualificados à ingressar no mercado de trabalho,

estando aptos a interagir socialmente de forma ativa, dinâmica e significativa, pois os PCN (BRASIL, 2000) afirmam que:

Cabe à escola, em parceria com o mercado, o Estado e a sociedade, fazer do jovem um cidadão e um trabalhador mais flexível e adaptável às rápidas mudanças que a tecnologia vem impondo à vida moderna. A educação permanente será uma das formas de promover o contínuo aperfeiçoamento e as adequações necessárias às novas alternativas de ocupação profissional. (BRASIL, 2000, p.61).

Existem, obviamente, alguns pontos que devem ser considerados importantes e por isso é preciso ter cautela quanto ao uso das tecnologias, a sua utilização sem planejamento pode tornar-se inadequada e não promover os efeitos desejados para o processo de ensino-aprendizagem. Como adverte os PCN (BRASIL, 1998):

A incorporação das inovações tecnológicas só tem sentido se contribuir para a melhoria da qualidade do ensino. A simples presença de novas tecnologias na escola não é, por si só, garantia de maior qualidade na educação, pois a aparente modernidade pode mascarar um ensino tradicional baseado na recepção e na memorização de informações. (BRASIL, 1998, p.140).

2.2 O uso das tecnologias computacionais na educação Matemática

De acordo com Kenski (2012, p. 19), “As tecnologias invadem as nossas vidas, ampliam a nossa memória, garantem novas possibilidades de bem-estar e fragilizam as capacidades naturais do ser humano”. Dessa maneira, com o uso das tecnologias nosso sistema de ensino tenderá a estimular a criatividade e a dinâmica no processo de ensino-aprendizagem dos alunos na prática escolar, tornando o ambiente escolar mais estimulante e interativo.

Pesquisas apontam que o uso de recursos tecnológicos na sala de aula é um excelente recurso didático no Ensino da Matemática. Como por exemplo, Gravina e Basso (2010).

A tecnologia digital coloca à nossa disposição diferentes ferramentas interativas que descortinam na tela do computador objetos dinâmicos e manipuláveis. E isso vem mostrando interessantes reflexos nas pesquisas em Educação Matemática, especialmente naquelas que têm foco nos imbricados processos de aprendizagem e de desenvolvimento cognitivo nos quais aspectos individuais e sociais se fazem presentes. (GRAVINA, BASSO, 2010, p. 13).

Essas tecnologias têm amplo conteúdo destinado ao Ensino da Matemática. O dinamismo de suas ferramentas proporcionam uma interatividade entre o aluno e o objeto a ser estudado, favorecendo a compreensão dos conceitos matemáticos. Ainda, Gravina e Basso (2010), afirmam que:

Hoje, a variedade de recursos que temos à nossa disposição permite o avanço na discussão que trata de inserir a escola na cultura do virtual. A tecnologia digital coloca à nossa disposição ferramentas interativas que incorporam sistemas dinâmicos de representação na forma de objetos concreto- abstratos. São concretos porque existem na tela do computador e podem ser manipulados e são abstratos porque respondem às nossas elaborações e construções mentais.(GRAVINA, BASSO, 2010, p. 14).

Dentre os recursos tecnológicos mais utilizados para o Ensino da Matemática estão softwares matemáticos. Para Santos (2008) o software expande a capacidade de investigação, pois leva o aluno a refletir sobre os conceitos matemáticos.

Representações de processos matemáticos no meio digital, e aliado às explorações e manipulações dos estudantes, desencadeiam um real aprendizado que dificilmente pode ser obtido com textos e figuras estáticos. O emprego de softwares gráficos na Educação Matemática aumenta as capacidades natas de exploração, gerando introspecção de conceitos matemáticos envolvidos nas construções de sala de aula . (SANTOS 2008, p. 39)

No entanto, a presença de computadores, laboratórios de informática, internet e demais tecnologias nas aulas de Matemática não garantem a propagação do conhecimento. Tais recursos tecnológicos são ferramentas de apoio didático ao Ensino da Matemática e não substitui o papel do professor no processo de ensino-aprendizagem.

O professor continua sendo quem planeja e desenvolve situações de ensino a partir do conhecimento que possui sobre o conteúdo, sobre os processos de aprendizagem, sobre a didática das disciplinas e sobre a potencialidade da ferramenta tecnológica como um recurso para a aprendizagem. (BRASIL, 1998, p.155).

2.3 O Geogebra

Existem vários softwares desenvolvidos para o estudo da Matemática, mas levando em consideração que o conteúdo foco da desta pesquisa é o estudo dos vetores, sendo assim o trabalho se restringirá aos softwares de construções geométricas, especificamente o GeoGebra, por ser considerado, pelo meio acadêmico, como um excelente software matemático, gratuito e de interface relativamente simples. O Geogebra, vem ganhando destaque cada vez maior no estudo da Matemática, como destaca Nascimento (2012).

O GeoGebra está rapidamente ganhando popularidade no ensino e aprendizagem da Matemática em todo o mundo. Atualmente, o GeoGebra é traduzido para 58 idiomas, utilizado em 190 países e baixado por aproximadamente 300.000 usuários em cada mês. Esta utilização crescente obrigou o estabelecimento do Internacionais

GeoGebra Insitute (GII), que serve como uma organização virtual para apoiar GeoGebra locais iniciativas e institutos. (NASCIMENTO, 2012. p.128).

O GeoGebra é um software muito utilizado no meio acadêmico, por se tratar de uma ferramenta pedagógica muito eficiente e dinâmica que contribui na compreensão de conceitos algébricos e geométrico, em acordo com o pensamento de Furlani e Grossi (2016) quando destaca que:

Assim, através da realização das atividades propostas, os alunos puderam sedimentar os conhecimentos teóricos adquiridos pela prática através de construções geométricas, dessa forma os alunos puderam compreender a relação existente entre a escrita algébrica e a construção geométrica. Os alunos mostraram facilidade em seguir os procedimentos no Geogebra e fizeram questionamentos relevantes na construção dos conceitos almejados. (FURLANI; GROSSI, 2016, p.10).

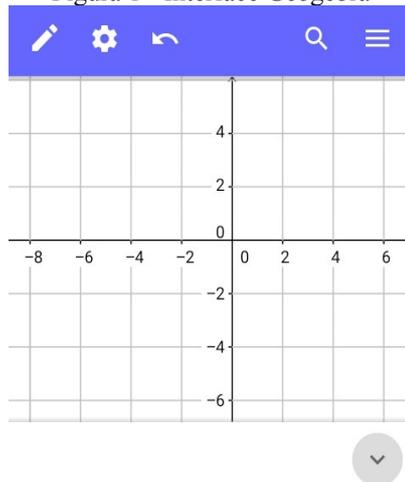
Assim o recurso visual proporcionado pelo Geogebra pode favorecer a compreensão dos conceitos de vetor, minimizando as dificuldades que muitos alunos têm quando estudam esse conteúdo apenas com lápis e papel. É o que acredita Furlani e grossi (2016, p.11) sobre o potencial do Geogebra no estudo dos vetores, quando defende que “Dessa forma, acredita-se que as atividades propostas aos alunos utilizando o conceito de vetor na Geometria Analítica com o auxílio do Geogebra foi bem proveitosa e contribuiu significativamente no processo de ensino aprendizagem deste assunto”.

Por se tratar de uma multiplataforma, o Geogebra pode ser instalado em computadores com Windows, Linux ou Mac OS. Outro diferencial é sua disponibilidade para tablets e smartphones disponível nos sistemas Android, IOS e Windows Phone. O Software também está disponível como extensão no navegador de internet Google Chrome.

2.3.1 Interface do Geogebra

O programa permite ao usuário construir qualquer representação geométrica, sua área de trabalho é bastante agradável e dinâmica, a janela inicial divide-se em duas partes: a superior, a parte algébrica; a inferior, a parte geométrica. Sua principal característica é possibilitar que o usuário ao manuseá-lo, visualize em um ambiente 2D e 3D , elementos da geometria e da álgebra simultaneamente. A figura 1 mostra a tela inicial do software.

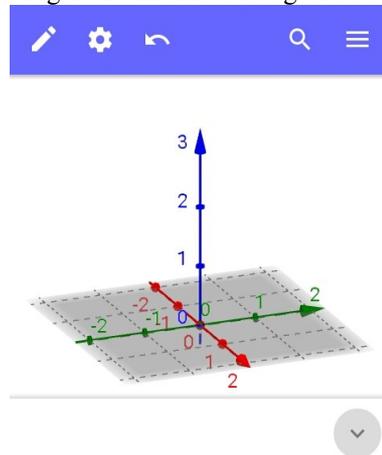
Figura 1 - Interface Geogebra



Fonte: Produção do autor.

A figura 2 mostra a tela inicial do Geogebra 3d.

Figura 2 - Interface Geogebra 3d



Fonte: Produção do autor.

Sua barra de ferramentas (figura 3) pode ser visualizada e acessadas através do ícone

 na barra de menu, facilitando o trabalho do usuário.

Figura 3- Barra de ferramentas



Fonte: Produção do autor.

O ícone  possibilita alterar o modo de visualização da janela gráfica (figura 4) .

Como por exemplo: exibir ou esconder os eixos cartesianos, modificar a grade do sistema de eixos

Figura 4- Janela de visualização



Fonte: Produção do autor.

2.3.2 Algumas ferramentas do Geogebra

A barra de menu inicialmente dispõe de ícones, que tem a função semelhante à atalhos para outras ferramentas. Existem muitas ferramentas no Geogebra capazes de abrangerem os mais diversos conteúdos matemáticos, no entanto, serão expostas apenas

algumas consideradas como fundamentais para desenvolver este trabalho.

Barra de menu



Mover : Arrasta ou seleciona objetos. Ferramenta muito útil, principalmente na versão para dispositivos móveis, sua função é selecionar e movimentar objetos dentro da janela gráfica



Retornar: retorna ao comando realizado anteriormente ou desfaz alguma ação indesejada.



Ponto: Criar um ponto com as respectivas coordenadas ao tocar no campo da janela gráfica.



Reta definida por dois pontos: seleciona dois pontos e por eles traça uma reta.



Segmento definido por dois pontos: seleciona dois pontos e traça um segmento orientado.



Vetor definido por dois pontos: seleciona dois pontos e cria um vetor a partir deles.



Ângulos: seleciona três pontos ou duas retas e calcula o ângulo entre elas.



Mover: move a janela de visualização gráfica.

2.4 Vetores

De acordo com Furlani e Grossi (2016, p.1) “Ensinar Matemática tem se tornado uma tarefa cada vez mais difícil, primeiramente devido ao pré-conceito que se tem com a disciplina ao considerá-la difícil e enfadonha, depois pelo desafio que o professor tem de despertar o interesse dos alunos e motivar a sua participação durante as aulas.”. Nesse contexto é papel do professor promover práticas que proporcionem aos alunos um ambiente favorável à construção do conhecimento e, ao mesmo tempo, próximo do seu cotidiano, assim

na busca de novas práticas que tornem as aulas mais dinâmicas, os softwares matemáticos voltados ao Ensino da Geometria tendem a ser um recurso, atualmente, indispensável na compreensão de conteúdos que necessitem de tratamento tanto algébrico quanto geométrico, como é o caso dos vetores.

2.4.1 Uma síntese histórica

O conceito de vetores para chegar à forma que é conhecida atualmente, percorreu um longo trajeto ao longo da história. Registros¹ históricos apontam que O conceito de vetor surgiu na Mecânica com o engenheiro flamengo Si-mon Stevin - o "Arquimedes holandês". Em 1586 apresentou, em sua Estática e Hidrostática, o problema da composição de forças e enunciou uma regra empírica para se achar a soma de duas forças aplicadas num mesmo ponto. Tal regra, a conhecemos hoje como regra do paralelogramo. Os vetores aparecem considerados como "linhas dirigidas" na obra a Representação da Direção, publicada em 1797 por Gaspar Wessel, matemático dinamarquês.

A sistematização da teoria vetorial ocorreu no século XIX com os trabalhos do irlandês William Hamilton (notavelmente precoce: aos 5 anos lia grego, latim e hebraico), do alemão Hermann Grassmann e do físico norte-americano Josiah Gibbs.

2.4.2 Conceitos iniciais e operações no Geogebra

A ciência conhece dois conjuntos de grandezas: as escalares e as vetoriais. Camargo (1987) define de maneira intuitiva estas duas grandezas da seguinte forma:

Existem grandezas, chamadas escalares, que são caracterizadas por um número (e a unidade correspondente): 50 dm² de área, 4 m de comprimento, 7 kg de massa. Outras, no entanto, requerem mais do que isso. Por exemplo, para caracterizarmos uma força ou uma velocidade, precisamos dar a direção, a intensidade (ou módulo) e o sentido, tais grandezas são chamadas vetoriais. (CAMARGO, 1987, p.3).

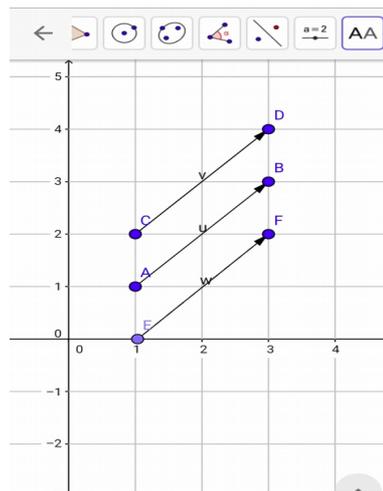
Alguns conceitos são fundamentais no estudo das grandezas vetoriais. A seguir serão exibidos alguns deles acompanhados, respectivamente, do procedimento executado no Geogebra.

Vetor: É possível definir o vetor como sendo o conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes, ou seja, seguimentos que tenham a mesma direção, mesmo sentido e mesmo

1 VENTURI, Jacir J., 1949-Álgebra Vetorial e Geometria Analítica / Jacir J. Venturi 10. ed

comprimento. Notação $u = AB = B-A$. Para criar um vetor no Geogebra, define-se o ponto A em seguida o ponto B, agora utiliza-se a ferramenta  “vetor definido por dois pontos” para seleccionar o ponto inicial A à extremidade B. Outra opção é digitar na caixa de entrada as coordenadas do vetor, por exemplo: $u = (1,4)$

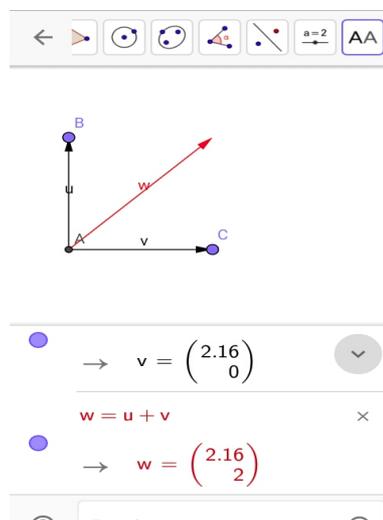
Figura 5- Vetor



Fonte: Produção do autor.

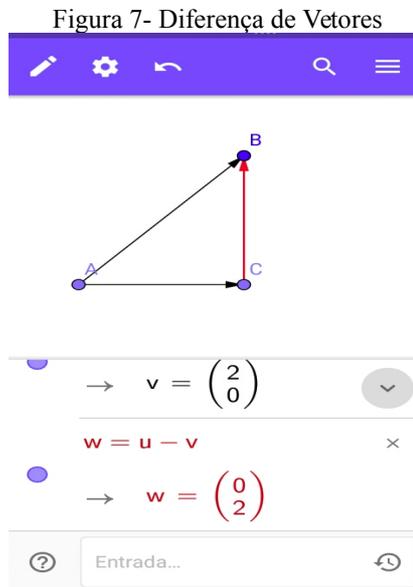
soma de vetores : O vetor $\vec{u} + \vec{v}$ é o vetor resultante da soma dos vetores \vec{u} e \vec{v} . Geometricamente, pode-se obter a soma dois ou mais vetores movimentando os vetores de maneira que extremidade de um coincida com a origem do seguinte, dessa maneira a soma será o vetor que partirá da origem do primeiro vetor coincidindo com a extremidade do último. Para realizar a soma de dois vetores no Geogebra, basta digitar na caixa de entrada $\vec{u} + \vec{v}$, aparecerá o vetor \vec{w} resultante da soma de \vec{u} e \vec{v} . Como mostra a figura 6.

Figura 6- Soma de Vetores



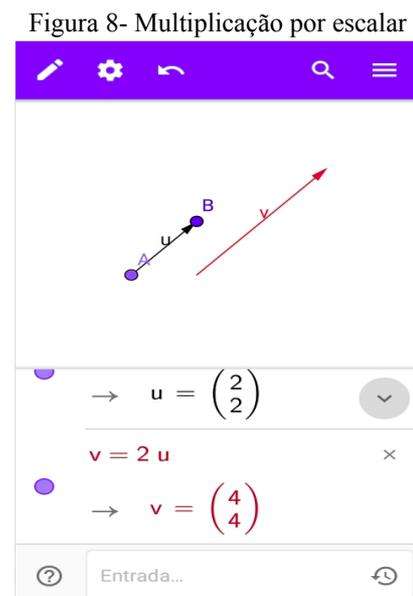
Fonte: Produção do autor.

Diferença de vetores : O vetor $\vec{u} - \vec{v}$ é o vetor resultante da diferença entre os vetores \vec{u} e \vec{v} . Geometricamente, obtém-se a diferença entre \vec{u} e \vec{v} fazendo com que coincidam as suas origens. No Geogebra, o procedimento é o mesmo da soma, no campo entrada digita-se: $\vec{u} - \vec{v}$. Como mostra a figura 7.



Fonte: Produção do autor.

Multiplicação de um vetor por um escalar: Dado um vetor \vec{u} e um escalar λ a multiplicação $\lambda \cdot \vec{u}$ resultará no vetor $\lambda \vec{u}$. Para proceder a multiplicação de um número real por um vetor, basta digitar campo de entrada: $2 \cdot \vec{v}$. Como mostra a figura 8.

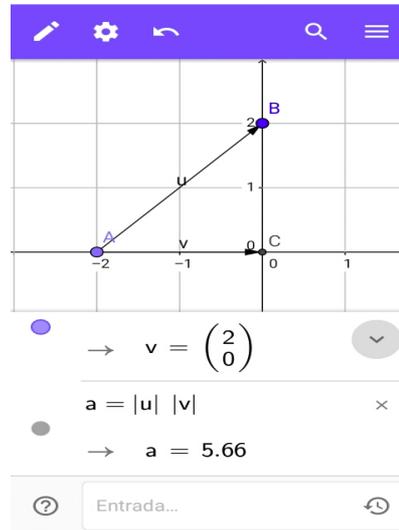


Fonte: Produção do autor.

Produto interno: O produto interno, também chamado de produto escalar, entre dois vetores é um número, tal que: $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta$, onde θ é a medida do ângulo formado entre os

vetores \vec{u} e \vec{v} . No geogebra o produto interno é calculado digitando no campo de entrada o comando: $\vec{u} \cdot \vec{v}$. Como mostra a figura 9.

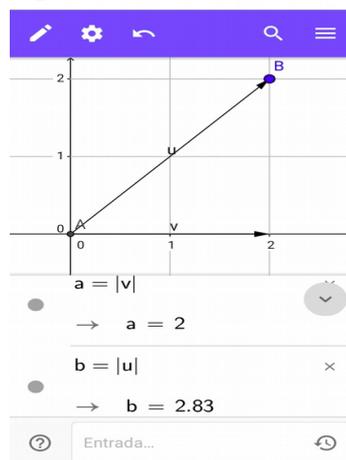
Figura 9- Produto interno



Fonte: Produção do autor.

Módulo de um vetor: Partindo do produto interno, é possível calcular o módulo de um vetor, note que $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}| \cdot |\vec{u}| \cos 0^\circ$, daí: $|\vec{u}|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} \Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$. No geogebra, para encontrar o módulo do vetor \vec{u} , digita-se no campo de entrada o comando: $|\vec{u}|$. Como mostra a figura 10.

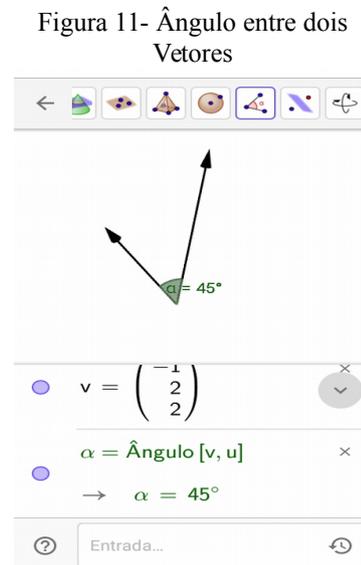
Figura 10- Módulo de um Vetor



Fonte: Produção do autor.

Ângulo entre dois vetores: Da mesma forma, é possível calcular o ângulo de dois vetores a partir do produto interno. Isolando o $\cos \theta$, tem-se: $\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|}$. No Geogebra para

saber o ângulo entre dois vetores, basta escolher a ferramenta “ângulo”  e seleciona um vetor \vec{u} e em seguida o vetor \vec{v} . Como mostra a figura 11.



2.5 O uso dos dispositivos móveis no processo de ensino-aprendizagem

Os aparelhos de tecnologia móvel já se tornaram indispensáveis no cotidiano da sociedade, porém sua utilização nas escolas sempre foi motivo de questionamentos, sendo seu uso restrito ou até mesmo proibido em forma de lei, como por exemplo o Decreto nº 52.625, de 15 de Janeiro de 2008, que proíbe o uso de celulares por alunos durante o horário das aulas. Não se sabe ao certo, as razões pelas quais muitas instituições de ensino insiste nesse tipo de prática, é o que afirma Saccol, Schlemmer e Barbosa (2011, p.30, apud BENTO; CAVALCANTE, 2013, p. 114) “ Em boa parte das instituições formais de ensino o uso de telefones celulares é restrito, por uma espécie de convenção social” .

As novas tecnologias, principalmente as móveis, estão cada dia mais presente no cotidiano das pessoas e se tornam cada vez mais necessárias, portanto, sua presença no ambiente escolar é um fato o qual a escola precisa ficar atenta, devendo adaptar-se aos acontecimentos importantes que influenciam o comportamento das pessoas na sociedade. Quanto a isso os PCN (BRASIL, 2000) faz a seguinte orientação:

No momento em que se verifica uma revolução na vida e no trabalho, através do processo de automação, a escola precisa mudar, não só de conteúdos, mas aceitando novos elementos que possibilitem a integração do estudante ao mundo que o circunda. (BRASIL, 2000, p.61).

Apoiado pelo pensamento de Bento e Cavalcante (2013, p.2) quando afirma que “[...] Essa prática precisa ser revista se esse dispositivo for usado com fins educacionais”, os dispositivos móveis oferecem recursos tecnológicos que podem contribuir de forma impactante com a educação e seu uso poderia ser estimulado nas escolas, desde que destinado à produção de conhecimento.

Os dispositivos móveis possibilitam o seu uso em qualquer lugar a qualquer momento, é como ter sempre à mão um computador móvel com seus inúmeros recursos, características estas que tornam sua utilização muito pertinente para a educação. Como enfatiza Oliveira et al (2012):

O aparelho permite ao educando pesquisar, digitar, ler e interagir com aplicativos dinamizando a aula. Uma das principais razões para a adoção da ferramenta no ensino é a digitalização das apostilas e livros, diminuindo o peso carregado pelos alunos, aumentando a mobilidade para a leitura, conectando com a internet, além dos benefícios ecológicos. (OLIVEIRA et al., 2012, p. 408).

Nessa visão, o dispositivo móvel indica ser uma ferramenta pedagógica bastante promissora para o Ensino da Matemática, tornando o ambiente de ensino muito mais interativo, aumentando significativamente as possibilidades do aluno em desenvolver o pensamento reflexivo. Mas para que isso ocorra é necessário haver um bom planejamento, possibilitando seu uso de forma ajustada. Quanto a sua utilização, Oliveira et al (2012) ressalta ainda que:

Porém, para ser positiva, a adoção desta tecnologia deve possuir a adaptação dos professores e alunos, uma vez que nenhum recurso garante o aprendizado, mas pode auxiliar na construção do conhecimento, formando cidadãos reflexivos, dinâmicos, críticos e capazes de construir o seu próprio conhecimento através de experiências e vivências. (OLIVEIRA et al., 2012, p. 408).

A tecnologia dos dispositivos móveis, quando destinado a produção do saber e a busca da informação, permitem aos alunos construir ideias e produzir conhecimento, assim favorecendo o caminho para o professor trabalhar os conceitos Matemáticos de forma bem mais dinâmica.

Sobre a utilização de dispositivos móveis existe o M-Learning (Mobile Learning ou aprendizagem móvel), que é um campo de pesquisa que investiga como os dispositivos móveis podem contribuir no processo da aprendizagem do aluno.

Em sua pesquisa Batista (2011) desenvolveu o M-LearnMat, um modelo pedagógico baseado em M-Learning voltado para Ensino da Matemática, cujo objetivo era direcionar práticas educativas que envolvessem o uso, não exclusivo, de tecnologias móveis no ensino

superior. O experimento ocorreu durante todo período com os alunos de duas turmas, uma do 1º período de 2011.1 do Bacharelado em Sistemas de Informação e outra do Curso de Tecnologia em Análise e Desenvolvimento de Sistemas, ambos do Instituto Federal Fluminense.

O referido modelo segue uma Arquitetura Pedagógica e estratégias para sua aplicação, elaborada em ambiente virtual para aparelhos móveis, formando assim uma comunidade virtual onde os alunos e professores envolvidos, realizavam atividades relacionadas ao conteúdo de Matemática. Vale salientar que este trabalho foi direcionado à tecnologia móvel, porém não excluía o uso de outros materiais como computadores e livros. Foi disponibilizada uma versão da plataforma moodle para celular, o MLE-Moodle. As atividades, detalhava o conteúdo a ser trabalhado, levantava questões referente ao conteúdo em forma quizz, indicava qual o software matemático para celular seria adequado para tal atividade e o link para o seu download. As atividades eram feitas tanto virtualmente, quanto presencialmente, já que o dispositivo móvel possibilitava a realização das atividades a qualquer tempo e lugar.

Os dados foram coletados a partir de uma pesquisa mista, englobando abordagens quantitativas e qualitativas, após análise dos dados constatou-se que o M-learnMat atingiu o objetivo para o qual foi proposto. O dispositivo móvel revelou-se uma ferramenta em potencial para contribuir no aprendizado da matemática. É importante enfatizar que a referida pesquisa foi realizada no ano de 2011, por isso a autora aponta como uma dificuldade o fato de que nem todos os alunos dispunham de smartphones com tecnologia Java e os planos de internet oferecidos pelas operadoras não eram tão acessíveis como nos dias atuais, onde os serviços de acesso à internet móvel se tornaram bem acessíveis à população.

3 METODOLOGIA

Esta parte do trabalho trata detalhadamente da metodologia adotada para alcançar os objetivos desejados nesta pesquisa no tocante à sua tipologia, procedimentos utilizados para coleta de dados, natureza dos dados coletados e os sujeitos.

3.1 Tipologias da Pesquisa

3.1.1 Quanto aos objetivos

Quanto aos objetivos, a pesquisa caracteriza-se como descritiva e exploratória. Descritiva pelo fato de buscar mostrar as dificuldades iniciais enfrentadas pelos alunos na compreensão da disciplina de Cálculo Vetorial, sem que haja intervenção por parte do pesquisador, a fim de obter informações reais, para que posteriormente sejam analisadas e interpretadas. “Tal pesquisa observa, registra, analisa e ordena dados, sem manipulá-los, isto é, sem interferência do pesquisador. Procura descobrir a frequência com que um fato ocorre, sua natureza, suas características, causas, relações com outros fatos”(PRODANOV; FREITAS. p.52). Exploratória, pois busca sondar por informações que favoreçam o processo compreensão do conteúdo das aulas de Cálculo Vetorial.

Quando a pesquisa se encontra na fase preliminar, tem como finalidade proporcionar mais informações sobre o assunto que vamos investigar, possibilitando sua definição e seu delineamento, isto é, facilitar a delimitação do tema da pesquisa; orientar a fixação dos objetivos e a formulação das hipóteses ou descobrir um novo tipo de enfoque para o assunto. (PRODANOV; FREITAS. p.51).

3.1.2 Quanto aos procedimentos técnicos

Quanto aos procedimentos técnicos, a pesquisa é de natureza bibliográfica e estudo de caso. Bibliográfica, pois buscou-se um contato direto com as informações registradas a partir de publicações existentes sobre o assunto abordado. Tais como: livros, artigos científicos, dissertações, teses e internet. Caracteriza-se como um Estudo de caso, pois investigou-se os alunos do primeiro período de Licenciatura em Matemática da UFPB Campus IV, através da coleta e análise de dados por intermédio de um questionário e oficina. O objetivo foi de promover um estudo sobre vetores utilizando o software Geogebra como ferramenta de auxílio didático. “O estudo de caso consiste em coletar e analisar informações sobre determinado indivíduo, uma família, um grupo ou uma comunidade, a fim de estudar aspectos variados de sua vida, de acordo com o assunto da pesquisa” (PRODANOV ;

FREITAS, 2013 p. 60).

3.1.3 Quanto a abordagem

Quanto aos métodos de abordagem, foi utilizado tanto o qualitativo, quanto o quantitativo. Utilizou-se a abordagem quantitativa, visto que foi necessário coletar informações que mensurasse o nível de interação das tecnologias na vida dos alunos.

Essa forma de abordagem é empregada em vários tipos de pesquisas, inclusive nas descritivas, principalmente quando buscam a relação causa-efeito entre os fenômenos e também pela facilidade de poder descrever a complexidade de determinada hipótese ou de um problema, analisar a interação de certas variáveis, compreender e classificar processos dinâmicos experimentados por grupos sociais, apresentar contribuições no processo de mudança, criação ou formação de opiniões de determinado grupo e permitir, em maior grau de profundidade, a interpretação das particularidades dos comportamentos ou das atitudes dos indivíduos. (PRODANOV ; FREITAS, 2013 p. 70).

E qualitativa, pois o intuito deste trabalho também é analisar o comportamento dos alunos, a fim de obter indicativos que apontem o grau de interesse deles a respeito do uso dos softwares educacionais, desenvolvidos para dispositivos móveis, nas aulas. “Considera que há uma relação dinâmica entre o mundo real e o sujeito, isto é, um vínculo indissociável entre o mundo objetivo e a subjetividade do sujeito que não pode ser traduzido em números”. (PRODANOV; FREITAS, 2013 p. 70).

3.1.4 Quanto ao método

O método adotado foi o indutivo, visto que este método observa um caso particular e a partir dele, trabalhar casos gerais. “No raciocínio indutivo, a generalização deriva de observações de casos da realidade concreta. As constatações particulares levam à elaboração de generalizações” .(PRODANOV; FREITAS, 2013 p. 28).

Apoiado nesse raciocínio, foi feita a observação o efetivo de alunos do segundo período do Curso de Licenciatura em Matemática da disciplina Cálculo Vetorial e Geometria Analítica, a fim de gerar uma proposta de ensino que favoreça, de maneira geral, a compreensão dos alunos nas aulas da disciplina, particularmente no estudo de vetores.

3.2 Instrumento de coleta de dados

Na pesquisa foram utilizados dois instrumentos de coleta de dados. Primeiramente foi promovida uma oficina pedagógica: nela, desenvolvemos uma atividade, com os alunos,

relacionada ao conteúdo de vetores utilizando o software matemático Geogebra em seus dispositivos móveis. Em seguida, um questionário composto de onze questões fechadas, com o intuito de coletar informações a respeito do uso de internet, computadores e, principalmente, a concepção deles quanto ao uso do Geogebra e dos dispositivos móveis na sala de aula para fins didáticos.

3.3 Universo e Amostra da pesquisa

O universo selecionado para esta pesquisa foi a Universidade Federal da Paraíba Campus IV, pois se trata de um ambiente propício para gerar a amostra necessária para a pesquisa, pois reúne indivíduos com características e objetivos em comum, concordando com o pensamento de Prodanov e Freitas (2013 p. 98), quando diz que “População (ou universo da pesquisa) é a totalidade de indivíduos que possuem as mesmas características definidas para um determinado estudo”.

O tamanho da amostra foram 20 alunos do segundo período do Curso de Licenciatura em Matemática, matriculados na disciplina de Cálculo Vetorial e Geometria Analítica. A amostra se torna válida, pois pelo fato dos alunos terem objetivos e características em comum, reúnem os atributos necessários para representar o universo. “Amostra é parte da população ou do universo, selecionada de acordo com uma regra ou um plano. Refere-se ao subconjunto do universo ou da população, por meio do qual estabelecemos ou estimamos as características desse universo ou dessa população”. (PRODANOV; FREITAS, 2013 p. 98).

Devido ao horário vespertino que realizou-se a oficina, de 17: 00h às 19:00h, obteve-se um número reduzido de alunos em relação à quantidade matriculada na disciplina, pois a maioria deles moram em outras cidades e dependem do transporte público.

4 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Será feita nesta seção a análise e discussão dos resultados obtidos na pesquisa. Solicitou-se previamente aos alunos que instalassem o aplicativo Geogebra Graphing Calculator e o Gráfico Geogebra 3D (para visualizações no espaço) nos seus dispositivos móveis.

4.1 Atividade sobre vetores e a utilização do Geogebra

Anteriormente à atividade, foi apresentado o software Geogebra no dispositivo móvel, as atividades propostas abordaram conceitos e operações básicas sobre vetores, tais como: soma de vetores, cálculo do produto interno entre dois vetores e cálculo do ângulo formado entre dois vetores.

Foi proposto aos alunos que respondessem inicialmente as questões utilizando apenas lápis e papel, portanto os resultados apresentados nesta subseção foram obtidos sem o uso do Geogebra, pois o objetivo era verificar as dificuldades de compreensão enfrentadas por eles. Posteriormente, as mesmas seriam resolvidas com auxílio do Geogebra.

O objetivo da questão 1, foi verificar o conhecimento dos alunos quanto ao ao tratamento algébrico. Os resultados estão dispostos na tabela 1.

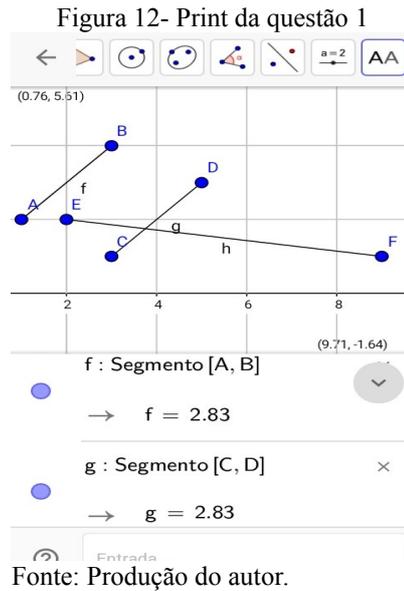
Tabela 1- Questão 1

VETOR	ACERTOS	%ACERTOS	ERROS	%ERROS
AB	11	100%	0	0,00%
CD	11	100%	0	0,00%
EF	11	100%	0	0,00%

Fonte: Produção do autor.

Quando as questões abordavam apenas o tratamento algébrico dos vetores, os alunos não mostraram dificuldades. Foi o que ocorreu na questões 1, todos os alunos responderam corretamente .

A resolução correta, feita no Geogebra, pode ser observada na figura 12, com o print screen da tela do dispositivo móvel.



A questão 2 dispunha de quatro opções sobre operações de soma de vetores. O desempenho dos alunos está representado na tabela 2.

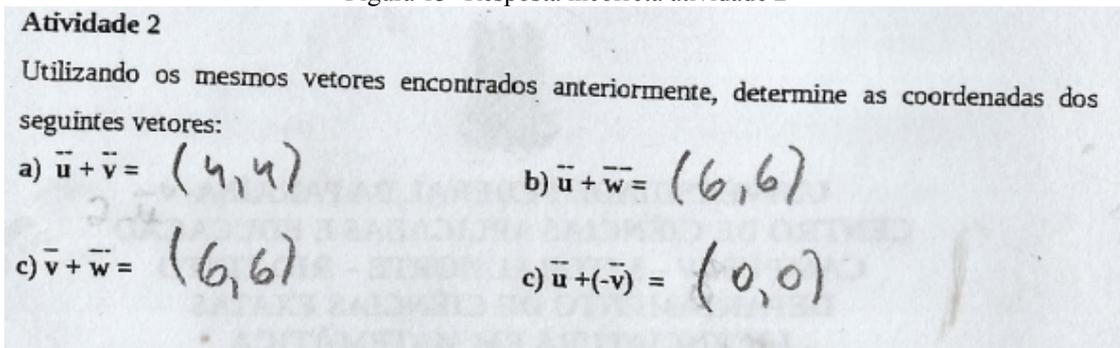
Tabela 2- Questão 2

VETOR	ACERTOS	%ACERTOS	ERROS	%ERROS
$u + v$	11	100	0	0
$u + w$	9	81,8	2	18,2
$v + w$	9	81,8	2	18,2
$u + (-v)$	11	100	0	0

Fonte: Produção do autor, 2017.

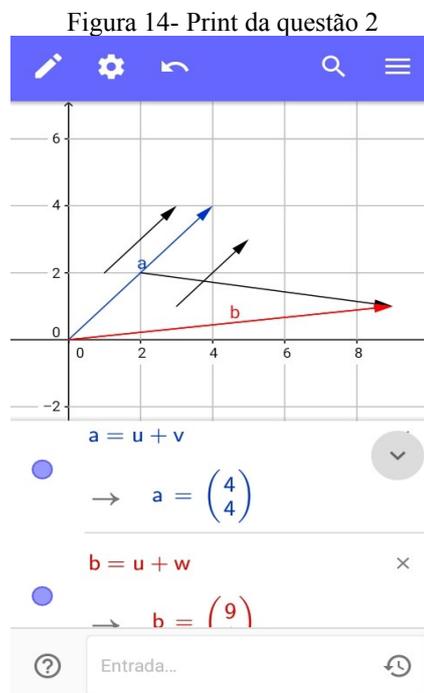
Ao analisar a tabela 2, verifica-se que apesar do percentual de acertos ser inferior à questão anterior, ainda sim os alunos conseguem manter um ótimo desempenho nas questões com soma de vetores. Os erros ocorreram possivelmente por falta de atenção e organização dos dados. Observa-se que ele tentou fazer os cálculos diretamente, sem anotar os vetores encontrados na questão anterior. Como é possível observar na figura 13.

Figura 13- Resposta incorreta atividade 2



Fonte: Produção do autor.

A resolução correta, feita no Geogebra, pode ser observada na figura 14, com o print screen da tela do dispositivo móvel.



Fonte: Produção do autor.

Na questão 3, o aluno deveria marcar uma das opções dadas após observar três figuras distintas e analisar qual ou quais delas representavam a relação $\vec{w} = \vec{u} + (-\vec{v})$. A tabela 3 mostra os resultados.

Tabela 3- Questão 3

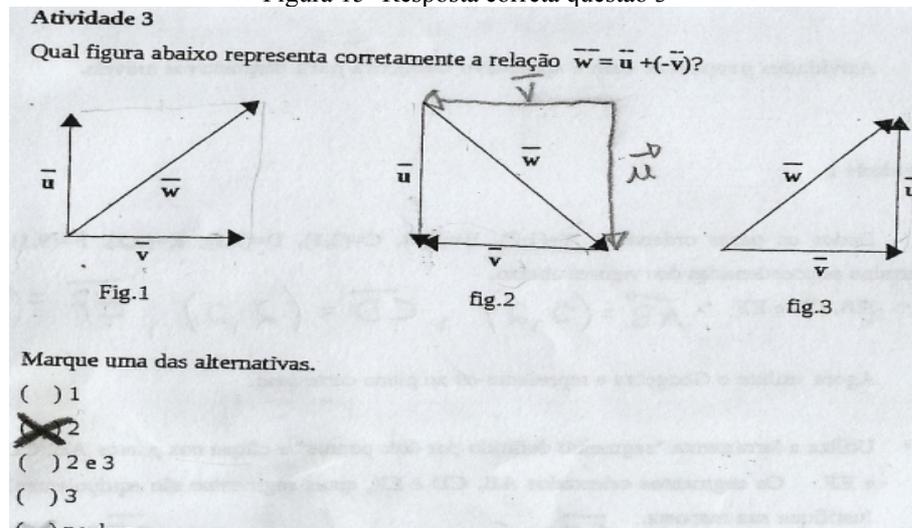
ACERTOS	%ACERTOS	ERROS	%ERROS
8	72,7	3	27,3

Fonte: Produção do autor.

Analisando a tabela 3, percebe-se que os alunos apresentam dificuldades no tratamento geométrico dos vetores, pois a questão para ser resolvida era necessário que

observassem a figura e perceberem que $w = u - v$. Outra possibilidade seria movimentar o posicionamento dos vetores u e v de maneira que coincidissem os pontos iniciais, e assim concluir que w é o resultado da diferença entre eles. Tal procedimento foi feito pelo aluno A, procedimento exposto na figura 15.

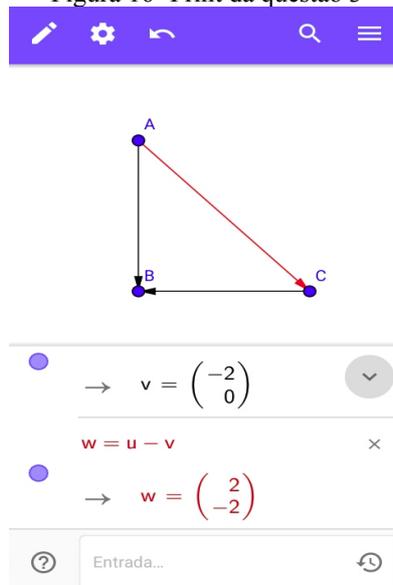
Figura 15- Resposta correta questão 3



Fonte: Produção do autor.

A resolução correta, feita no Geogebra, pode ser observada na figura 16, com o print screen da tela do dispositivo móvel.

Figura 16- Print da questão 3



Fonte: Produção do autor.

A questão 4, pedia que o aluno observasse a figura e determinasse um vetor v com origem no ponto A e que ao somá-lo aos vetores AB e AC resultassem no vetor nulo. A tabela

4 indica os resultados obtidos.

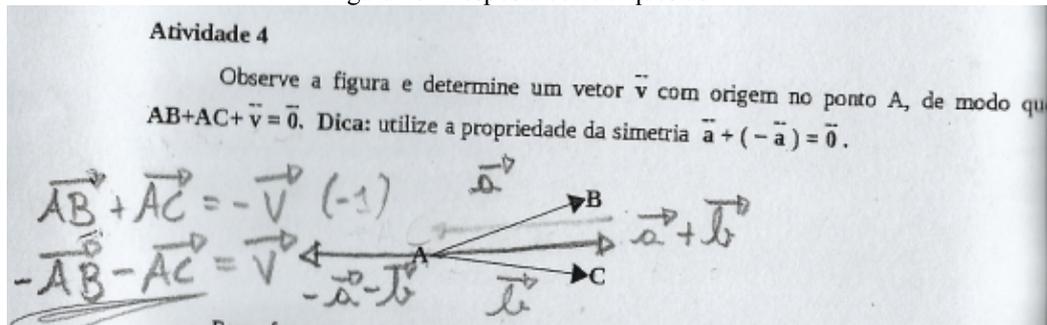
Tabela 4- Questão 4

ACERTOS	%ACERTOS	ERROS	%ERROS	BRANCO	%BRANCO
5	45,4	0	0,0%	6	54,6

Fonte: Produção do autor.

Ao analisar o resultado apresentado no gráfico 4, nota-se que apesar de ser uma questão de simples resolução, os alunos mostraram um desempenho muito inferior em relação às questões anteriores, pois 54,55% deles mal sequer tentou respondê-la. O fato da questão requerer uma análise geométrica e algébrica dos vetores, causou dificuldades para assimilarem as informações necessárias para encontrarem a solução. Constata-se tal fato ao verificar que os alunos que responderam corretamente (45,45%), foram justamente os que registraram a solução de forma algébrica e geométrica. A figura 17 exemplifica tal fato.

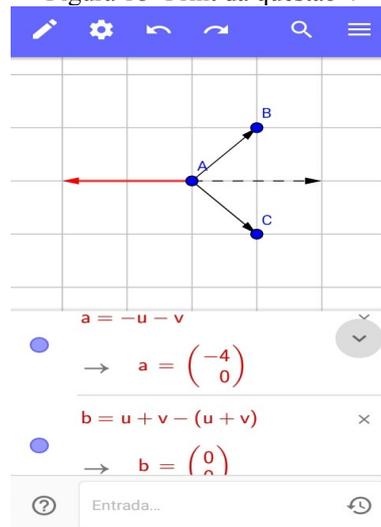
Figura 17- Resposta correta questão 4



Fonte: Produção do autor.

A resolução correta, feita no Geogebra, pode ser observada na figura 18, com o print screen da tela do dispositivo móvel.

Figura 18- Print da questão 4



Fonte: Produção do autor.

A questão 5 verificou se os alunos saberiam calcular o ângulo formado entre dois vetores no espaço. A tabela 5 mostra o resultado das respostas.

Tabela 5- Questão 5

ACERTOS	%ACERTOS	ERROS	%ERROS	INCOMP	%INCOMP	BRANCO	%BRANCO
5	45,3	1	9,1	3	27,3	2	18,3

Fonte: Produção do autor.

Ao analisar os dados informados na tabela, percebe-se que os alunos mostraram um desempenho razoável, é necessário destacar que 27,27% não concluiu a questão, pois eles não atentaram que para encontrar o ângulo referente ao valor do cosseno encontrado, que era o que pedia o enunciado da questão, deveriam utilizar a função arccos. Observe um exemplo na figura 19.

Figura 19- Atividade 5 incompleta

Atividade 5

Calcule o ângulo formado entre os vetores $\vec{u} = (1,1,4)$ e $\vec{v} = (-1,2,2)$. Em seguida, abra o Geogebra 3d e digite os seguintes comandos na caixa de entrada comandos:

$||u||$ - para encontrar a norma.

$u*v$ - para encontrar o produto interno

Para encontrar o ângulo entre os dois vetores utilize a ferramenta " ângulo", em seguida seleccione os vetores \vec{u} e \vec{v} .

$$\cos \alpha = \frac{|(1,1,4) \cdot (-1,2,2)|}{\sqrt{1^2+1^2+4^2} \cdot \sqrt{(-1)^2+2^2+2^2}} = \frac{|-1+2+8|}{\sqrt{1+1+16} \cdot \sqrt{1+4+4}} = \frac{9}{\sqrt{18} \cdot \sqrt{9}}$$

$$= \frac{9}{\sqrt{18} \cdot 3} = \frac{9}{3\sqrt{18}} = \frac{9}{3 \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{9}{9\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Fonte: Produção do autor.

A resolução correta, feita no Geogebra, pode ser observada na figura 20, com o print screen da tela do dispositivo móvel.

Figura 20- Print da questão 5

The screenshot shows the Geogebra 3D interface. At the top, there is a toolbar with various icons. Below the toolbar, a 3D coordinate system is displayed with a gray plane. Two vectors, \vec{u} (red) and \vec{v} (blue), are shown originating from the origin. The angle between them is labeled as $\alpha = 45^\circ$. Below the 3D view, there is a list of objects:

- $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$
- $\alpha = \text{Ângulo}[v, u]$
- $\alpha = 45^\circ$

At the bottom, there is an input field labeled "Entrada..." with a question mark icon on the left and a refresh icon on the right.

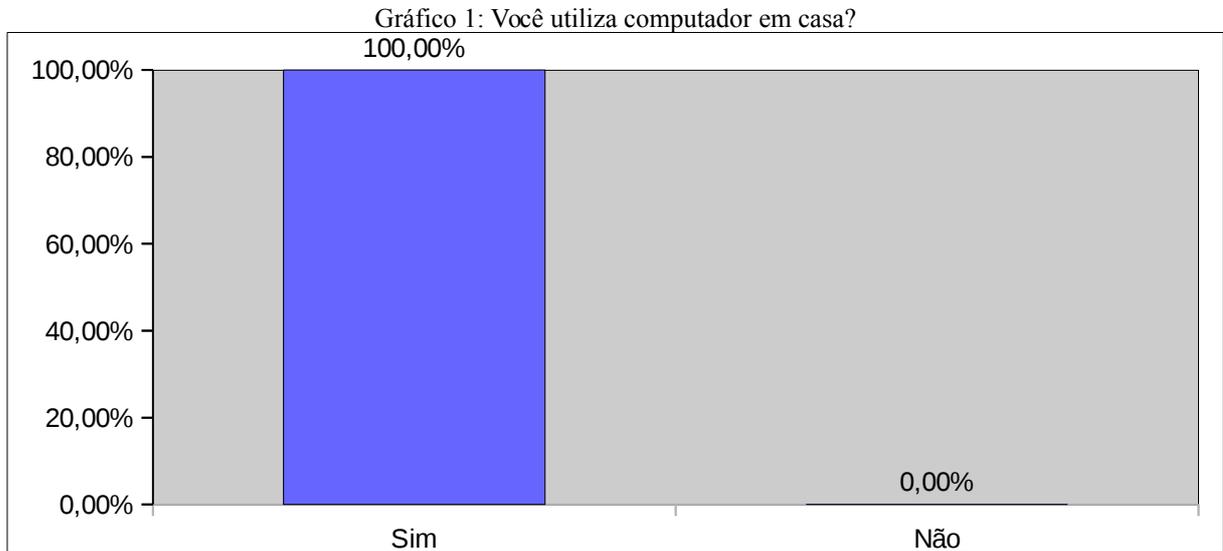
Fonte: Produção do autor.

4.2 Questionário

Após a oficina, foi aplicado um questionário composto de onze perguntas fechadas, cujo o objetivo foi conhecer um pouco do perfil dos alunos e suas impressões a respeito da utilização do software Geogebra e o uso dos dispositivos móveis na sala de aula.

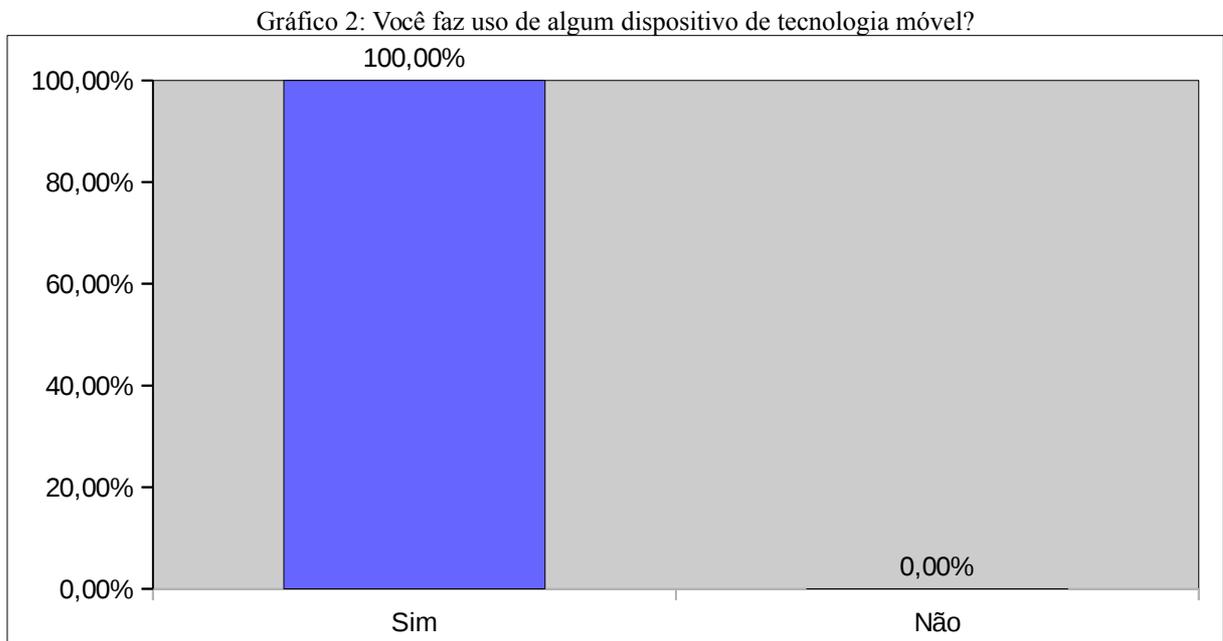
Ao analisar os dados obtidos no questionário, logo percebe-se alguns resultados bastante interessantes para nossa pesquisa. Inicialmente Verifica-se que o computador, nos

dias de hoje, é um item comum nas casas dos alunos, pois todos eles possuíam computadores em suas residências. Conforme pode ser visto no gráfico 1.



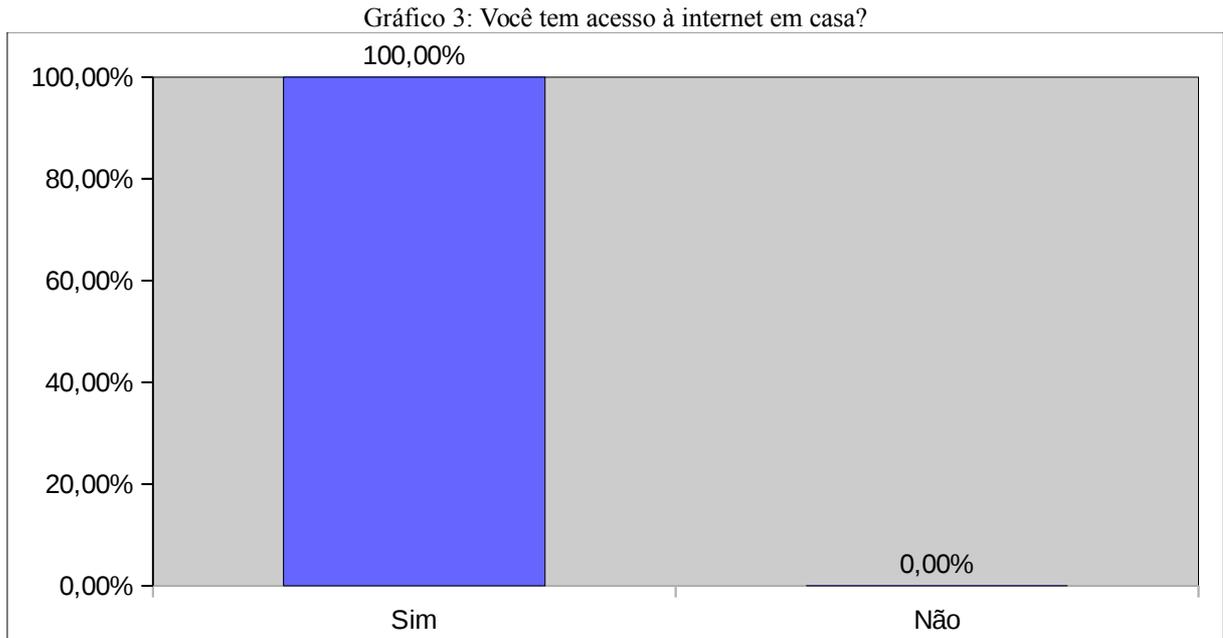
Fonte: Produção do autor.

Semelhantemente, todos os alunos possuem dispositivos de tecnologia móvel, como mostra o gráfico 2.



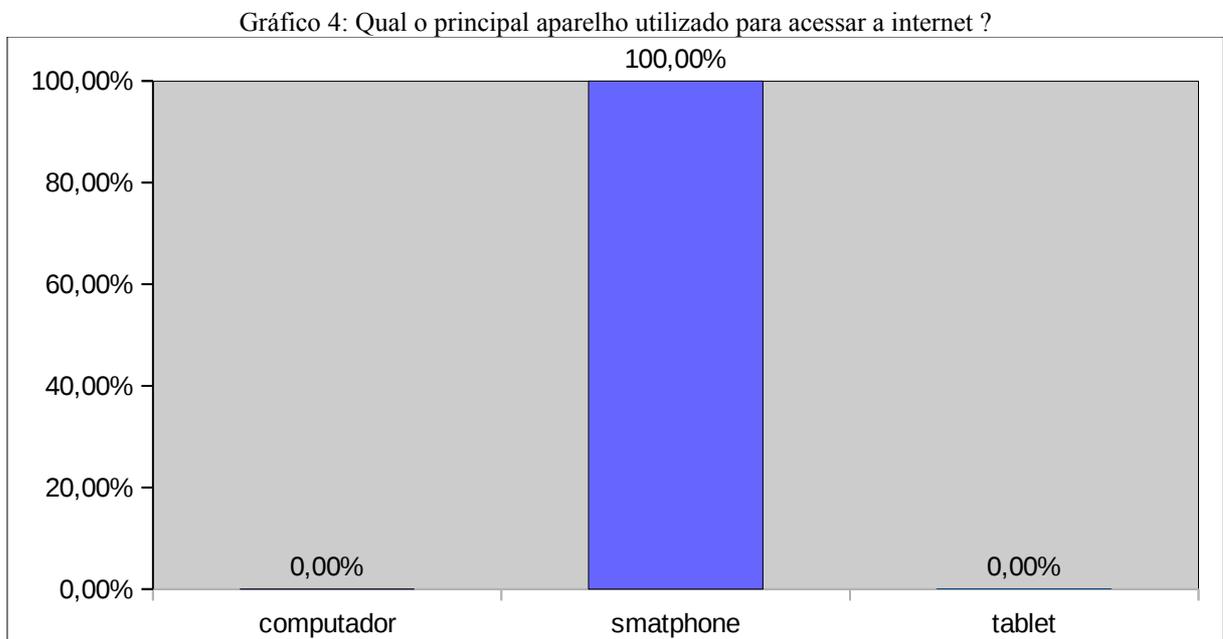
Fonte: Produção do autor.

Nota-se que os números apresentados no gráfico 3, confirmam a expansão da economia digital através da popularização da internet, pois todos os alunos confirmaram que utilizam o serviço de internet em casa.



Fonte: Produção do autor.

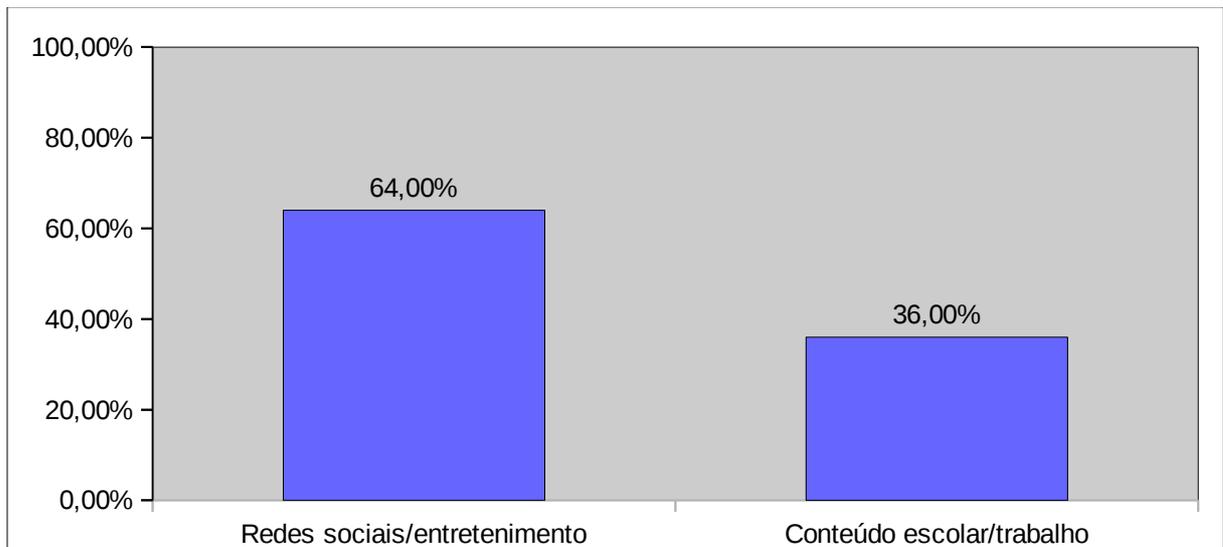
Surpreendentemente, mesmo possuindo computador em casa, o smartphone aparece, de forma unânime, como o aparelho mais utilizado para acessar a internet. A tecnologia desses aparelhos toma o espaço antes dominado pelos computadores de mesa.



Fonte: Produção do autor.

No entanto, apesar do vasto conteúdo informativo e educativo oferecidos pela internet, os alunos preferem navegar pelas redes sociais e sites de entretenimento. Como mostra o gráfico5.

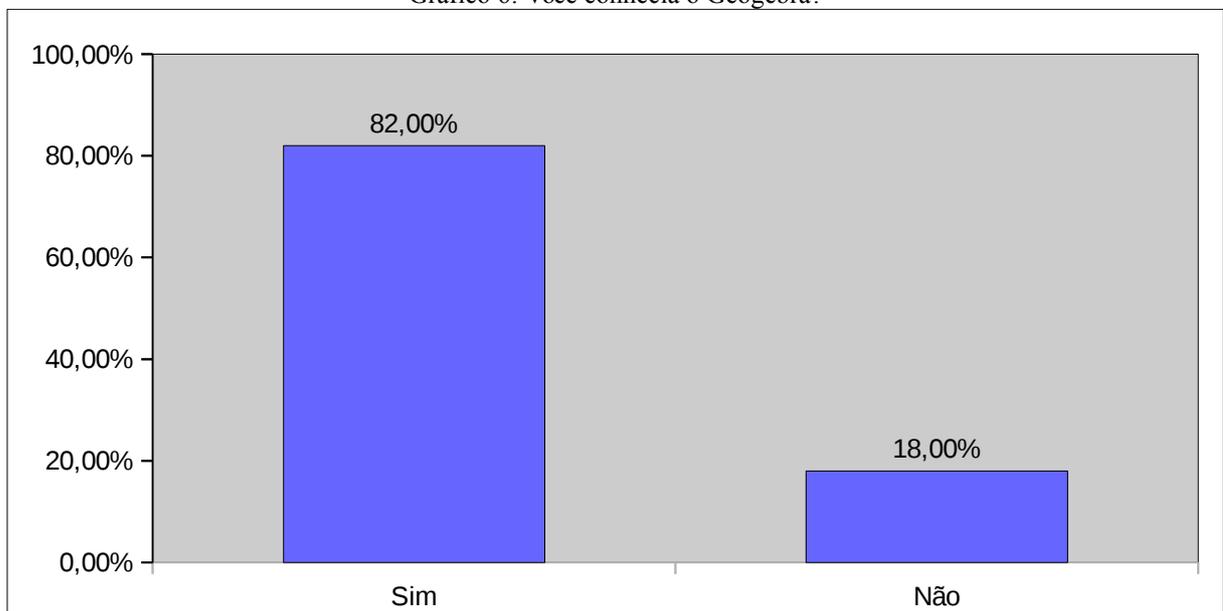
Gráfico 5: Qual o principal aparelho de acesso à internet na maior parte do seu tempo?



Fonte: Produção do autor.

Apesar da preferência dos alunos não ser o conteúdo escolar quando acessam a internet, a maioria deles já conhecia o Geogebra, como destaca o gráfico 6:

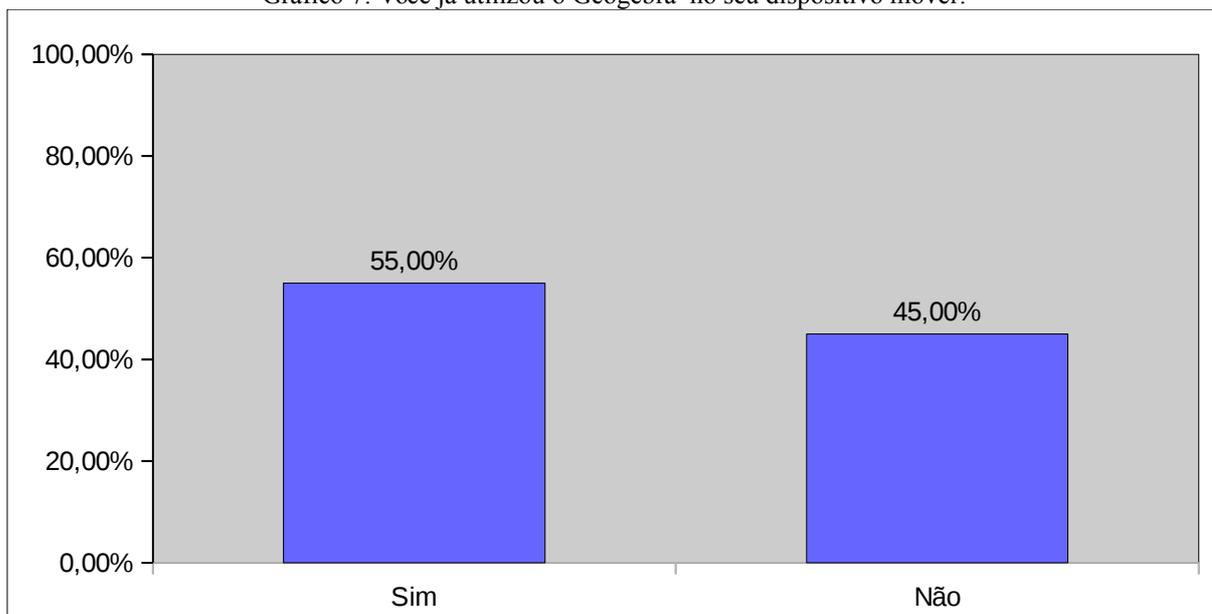
Gráfico 6: Você conhecia o Geogebra?



Fonte: Produção do autor.

Todavia, os resultados do gráfico 7 apontam que apesar de passarem maior parte do tempo utilizando smartphones e terem conhecimento do Geogebra, quase metade dos alunos ainda não conhecia a versão do software desenvolvida para dispositivos móveis.

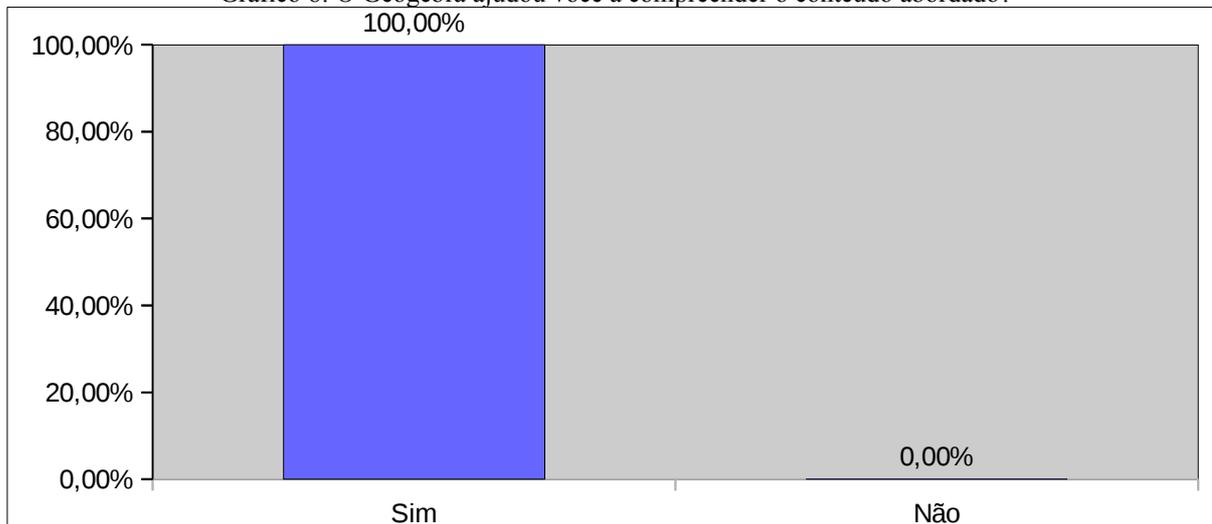
Gráfico 7: Você já utilizou o Geogebra no seu dispositivo móvel?



Fonte: Produção do autor.

Apesar de alguns alunos (45%) nunca terem utilizado o geogebra em seus dispositivos móveis, não houve dificuldades, por parte deles em utilizá-lo, pois todos afirmaram que o software cumpriu o objetivo proposto, que era ajudá-los na compreensão do conteúdo abordado. É o que indica o gráfico 8.

Gráfico 8: O Geogebra ajudou você a compreender o conteúdo abordado?

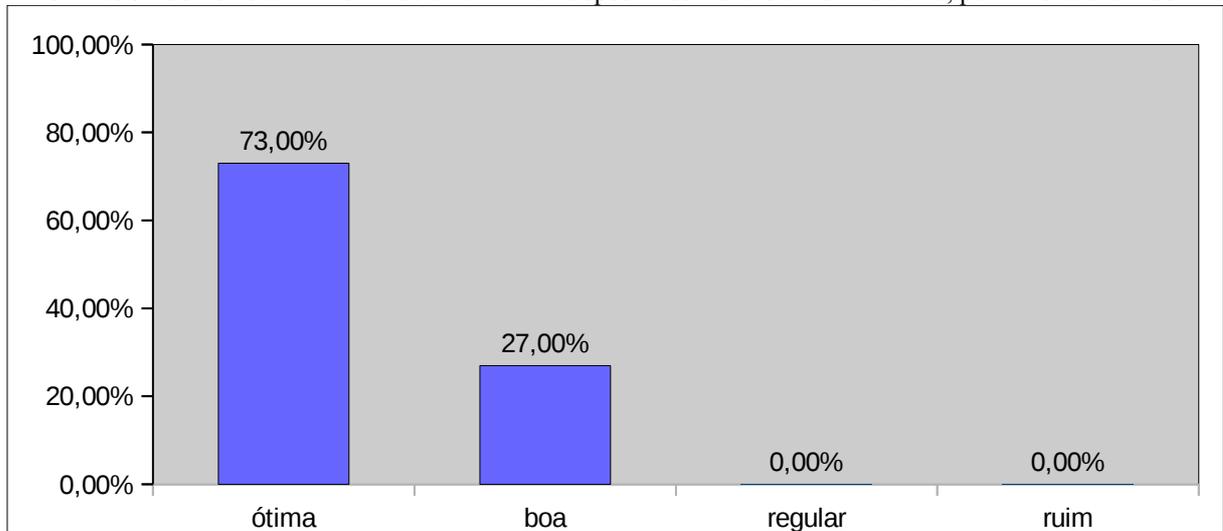


Fonte: Produção do autor.

Os resultados apresentados anteriormente, confirmam que todos os alunos têm acesso aos recursos tecnológicos necessários para fazerem uso do Geogebra em seus dispositivos móveis, com isso, todos foram de comum acordo que o Software Geogebra para dispositivos móveis pode ser utilizado em sala de aula como uma ferramenta de auxílio didático Ensino da Matemática. Testifica-se tal fato ao verificar os resultados mostrados no

gráfico 9.

Gráfico 9: Como você analisa a ideia de utilizar dispositivos móveis em sala de aula, para fins educativos?



Fonte: Produção do autor.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Incorporar as tecnologias na educação sempre foi motivo de muita discussão, mesmo as escolas dispondo de computadores e até mesmo de laboratórios de informática a realidade parece ainda estar submetida a métodos tradicionais de ensino, o que acaba tornando as aulas com quadro e giz pouco interessante para alunos que vivem conectados ao mundo oferecido pela internet. Entendendo que o momento é propício ao uso de novas tecnologias na educação, o presente trabalho propôs um estudo do conteúdo de vetores, que teve como objetivo explorar os recursos oferecidos pelo, conceituado, software matemático Geogebra. O diferencial foi a utilização da sua versão para dispositivos móveis.

Diante dos resultados obtidos na pesquisa por meio de uma atividade desenvolvida na sala de aula, pois os smartphones permite isso, verificou-se pelas atividades feitas com o uso de lápis e papel, que os alunos ainda sentem dificuldades em desenvolver o raciocínio geométrico dos vetores, mesmo diante de questões mais simples. Ao desenvolver as mesmas atividades no Geogebra, os alunos conseguiram fazer a ponte entre o tratamento algébrico e o geométrico. Sendo assim o Geogebra ampliou os conhecimentos obtidos pelos alunos na disciplina de Cálculo Vetorial.

Os dispositivos móveis demonstraram, nesta pesquisa, ser um recurso viável, quando destinado à educação. Devido ao seu potencial tecnológico não houve limitações, pois foram utilizados na própria sala de aula, sem que houvesse a necessidade de ir a um laboratório de informática, os alunos ficaram muito à vontade e não tiveram dificuldades quanto ao seu uso. Desse modo fica evidente que os dispositivos móveis podem ser utilizados em sala de aula para fins educacionais.

Após a análise das respostas do questionário pelos alunos, observou-se que os alunos concordaram que o Geogebra para dispositivos móveis os ajudou a compreender os conceito de vetores e todos aprovaram a proposta de utilizá-lo na sala de aula, considera-se então, que alcançamos os objetivos anteriormente desejados.

É importante frisar que não buscou-se um estudo aprofundado sobre vetores, e sim, uma forma diferenciada de abordar o conteúdo, pois a tecnologia não deve ser tratada como um método isolado de ensino, mas sim fazer parte de um conjunto de ideias e ações que favoreçam a produção de conhecimento.

Entende-se que a conclusão deste trabalho é só uma etapa, já que o tema deixa

muitas oportunidades abertas para estudos futuros , abordando novos conteúdos em diferentes contextos.

REFERÊNCIAS

BATISTA, M-Learnmat: **Modelo Pedagógico para Atividades de M-Learning em Matemática**. Universidade Federal do Rio Grande do Sul Centro Interdisciplinar de Novas Tecnologias na Educação Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação (2011).

BENTO, M.C.M; CAVALCANTE, R. S. **Tecnologias Móveis em Educação: o uso do celular na sala de aula**. ECCOM, v. 4, n. 7, jan./jun. 2013. Disponível em: <> Acesso em 19 fev. 2017.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. (2000). “**Parâmetros curriculares nacionais: Matemática / Secretaria de Educação Fundamental**”, Brasília: MEC / SEF.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. “**Parâmetros curriculares nacionais: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: introdução aos parâmetros curriculares nacionais**”. Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília : MEC/SEF, 1998.

BOULOS, P.; CAMARGO, I. **Geometria Analítica - um tratamento vetorial**. Makron Books do Brasil Editora Ltda. São PauloRua Tabapu, 1987.

FURLANI, C. ; GROSSI, L. **O uso do Conceito de Vetores e do Software Geogebra no Estudo de Geometria Analítica no Ensino Médio**. I V SINTEC 2016, Disponível em < > Acesso em 20 fev. 2017.

GRAVINA, M. A; BASSO, M. V. de A. **Mídias digitais na Educação Matemática**. In:GRAVINA, M. A. et al. (Org.). Matemática, Mídias Digitais e Didática - tripé para formação de professores de Matemática. Porto Alegre: UFRGS, [200.]. Disponível em:<http://www.ufrgs.br/espmat/livros/livro2-matematica_midiasdigitais_didatica.pdf>. Acesso em 19 fev. 2017.

HALBERSTADT. **A aprendizagem da Geometria Analítica do Ensino Médio e suas representações semióticas no Grafeq**. Dissertação (mestrado) Universidade Federal de Santa Maria Centro de Ciências Naturais e Exatas Curso de Pós-Graduação em Educação Santa

Matemática e Ensino de Física (2015).

NASCIMENTO, E.G.A. **Avaliação do uso do software Geogebra no ensino de geometria: reflexão da prática na escola.** Artigo. GeoGebra Uruguay, 2012 . Disponível em <<http://www.geogebra.org.uy/2012/actas/67.pdf>>. Acesso em 19 fev. 2017.

OLIVEIRA, J. B. et al. **O uso de Tablets e o Geogebra como ferramentas auxiliaadoras no ensino da Matemática.** GeoGebra Uruguay 2012. Disponível em: <<http://www.geogebra.org.uy/2012/actas/66.pdf>> Acesso em 20 fev. 2017.

PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. **Metodologia do trabalho científico [recurso eletrônico] : métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico– 2. ed.** – Novo Hamburgo: Feevale, 2013.

SANTOS, **Tecnologias digitais na sala de aula para aprendizagem de conceitos de Geometria Analítica: manipulações no software Grafeq.** Dissertação (Mestrado) Universidade Federal do Rio Grande do Sul Instituto de Matemática Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (2008).

VALENTE, J.A.; ALMEIDA, F. J. **Visão Analítica da Informática na Educação no Brasil: A Questão da Formação do Professor.** Revista Brasileira de Informática da Educação – Número I. São Paulo, 1997.

VENTURI, J. J., 1949-**Álgebra Vetorial e Geometria Analítica / 10. ed.** – Curitiba, PR. 20015. Disponível em : <<http://www.geometriaanalitica.com.br/livros/av.pdf>> Acesso em 14 mai.2017.

APÊNDICE**APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO APLICADO AOS ALUNOS.**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS APLICADAS E EDUCAÇÃO
CAMPUS IV – LITORAL NORTE – RIO TINTO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

**Orientando: Josemberg Oliveira da Silva
Orientadora: Claudilene Gomes da Costa**

Oficina: O Uso do Geogebra em Dispositivos Móveis: uma ferramenta prática para o estudo dos vetores.

Questionário:

1) Você utiliza computador em casa?

Sim Não

2) Você faz uso de algum dispositivo de tecnologia móvel? Qual (is)?

Smartphone Tablet Outros

3) Você tem acesso à internet em casa?

Sim Não

4) Qual o principal aparelho que você utiliza para acessar a internet na maior parte do seu tempo?

Computador Tablet

Smartphone TV

5) Quando você entra na internet, qual o conteúdo mais acessado?

Redes Sociais Pesquisa ou Conteúdo Escolar

Entretenimento Trabalho

6) Como você classifica a sua compreensão dos conteúdos matemáticos?

Ótima Boa

Regular Ruim

7) você já utilizou algum software educativo voltado ao Ensino da Matemática ?

Sim Não

8) Você conhecia o Geogebra?

Sim Não

9) O Geogebra ajudou você a compreender o conteúdo abordado?

Sim Não

10) Você já utilizou o Geogebra ou algum outro software matemático no seu dispositivo móvel?

Sim Não

11) Como você analisa a ideia de utilizar dispositivos móveis (smartphones, tablets, etc) em sala de aula, para fins educativos?

Ruim Regular

Boa Ótima

APÊNDICE B – ATIVIDADE COM OS ALUNOS



**UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS APLICADAS E EDUCAÇÃO
CAMPUS IV – LITORAL NORTE – RIO TINTO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

**Orientando (a): Josemberg Oliveira da Silva
Orientador (a): Claudilene Gomes da Costa**

Oficina: O Uso do Geogebra em Dispositivos Móveis: uma ferramenta prática para o estudo dos vetores.

Atividades propostas com o aplicativo Geogebra para dispositivos móveis.

Atividade 1

Dados os pares ordenados $A=(1,2)$, $B=(3,4)$, $C=(3,1)$, $D=(5,3)$, $E=(2,2)$, $F=(9,1)$. determine as coordenadas dos vetores abaixo.

- \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{CD} e \overrightarrow{EF}

Agora utilize o Geogebra e represente-os no plano cartesiano.

- Utilize a ferramenta “segmento definido por dois pontos” e clique nos pontos \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{CD} e \overrightarrow{EF} . Os segmentos orientados \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{CD} e \overrightarrow{EF} , quais segmentos são equipolentes? Justifique sua resposta.
- Agora utilize a ferramenta “vetor definido por dois pontos”, em seguida faça o mesmo procedimento descrito anteriormente. Podemos afirmar que os vetores $\mathbf{v} = \mathbf{u}$? Justifique sua resposta.

Atividade 2

Utilizando os mesmos vetores encontrados anteriormente, determine as coordenadas dos seguintes vetores:

a) $u + v =$

b) $u + w =$

c) $v + w =$

c) $u + (-v) =$

Represente graficamente o resultado as operações de adição dos vetores no Geogebra. Selecione o vetor u com a ferramenta “selecionar” e arraste-o de maneira que seu ponto de origem coincida com o ponto final do vetor v , em seguida utilize “segmento definido por dois pontos” e o ponto de origem de u e em seguida o ponto final de v , **o novo vetor será o vetor resultante da soma** . Podemos também digitar na caixa de entrada o comando $u+v$.

Atividade 3

Qual figura abaixo representa corretamente a relação $w = u + (-v)$?

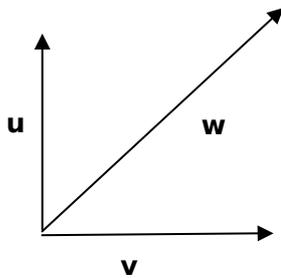


Fig.1

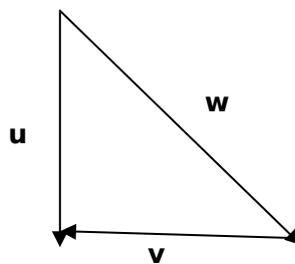


fig.2

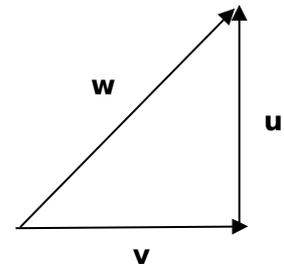


fig.3

Marque uma das alternativas.

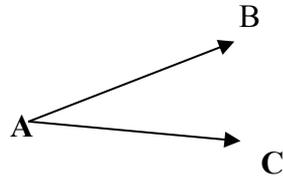
- fig.1
 fig. 2
 fig. 2 e 3
 fig. 3
 nenhuma

Agora utilizaremos o Geogebra para reproduzir os vetores e analisar a relação $w = u + (-v)$.

Atividade 4

Observe a figura e determine um vetor v com origem no ponto A, de modo que $AB+AC+v = 0$. **Dica:** utilize a propriedade da simetria $a + (-a) = 0$.

Para fazermos a atividade no Geogebra vamos construir os vetores **AB** e **AC** utilizando a ferramenta “vetor definido por dois pontos”, digitar na caixa de entrada $\mathbf{u}+\mathbf{v}$, utilizaremos o simétrico do vetor encontrado. Ao substituí-lo na equação verificamos que o resultado será o vetor nulo.



Atividade 5

Calcule o ângulo formado entre os vetores $\mathbf{u} = (1,1,4)$ e $\mathbf{v} = (-1,2,2)$. Em seguida, abra o Geogebra 3d e digite os seguintes comandos na caixa de entrada comandos:

$|\mathbf{u}|$ - para encontrar a norma.

$\mathbf{u}*\mathbf{v}$ – para encontrar o produto interno

Para encontrar o ângulo entre os dois vetores utilize a ferramenta “ ângulo”, em seguida selecione os vetores \mathbf{u} e \mathbf{v} .