

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Teoria dual no ambiente de classes de sequências e aplicações

Álvaro Rocha de Araújo

João Pessoa – PB
Fevereiro de 2025

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Teoria dual no ambiente de classes de sequências e aplicações

por

Álvaro Rocha de Araújo ¹

sob a orientação do

Prof. Dr. Jamilson Ramos Campos

João Pessoa – PB
Fevereiro de 2025

¹O autor foi bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES durante a elaboração desta dissertação.

Catálogo na publicação
Universidade Federal da Paraíba
Biblioteca Setorial do CCEN

A663t Araújo, Álvaro Rocha de.
 Teoria Dual no ambiente de classes de sequências
 e aplicações / Álvaro Rocha de Araújo. - João
 Pessoa, 2025.
 67 f. : il.

Orientação: Jamilson Ramos Campos.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Classe de sequências. 2. Dualidade. 3. Ideais
de operadores. 4. Ideais maximais. I. Campos,
Jamilson Ramos. II. Título.

UFPB/BC

CDU 512.624.5 (043)

Teoria dual no ambiente de classes de sequências e aplicações

por

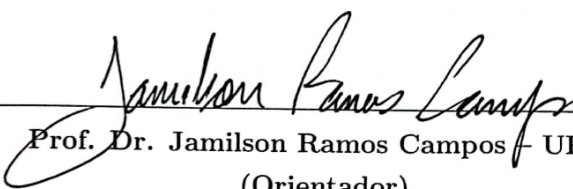
Álvaro Rocha de Araújo

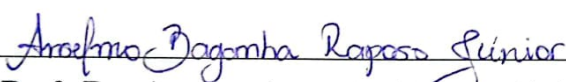
Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

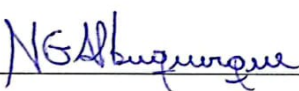
Área de Concentração: Análise

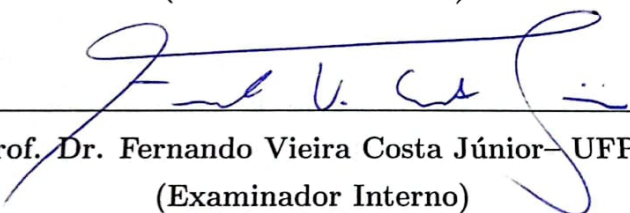
Aprovada em 21 de Fevereiro de 2025.

Banca Examinadora:


Prof. Dr. Jamilson Ramos Campos – UFPB
(Orientador)


Prof. Dr. Anselmo Baganha Raposo Júnior – UFMA
(Examinador Externo)


Prof. Dr. Nacib André Gurgel e Albuquerque – UFPB
(Examinador Interno)


Prof. Dr. Fernando Vieira Costa Júnior – UFPB
(Examinador Interno)

Agradecimentos

A minha mãe, Luzineide, por todo cuidado, apoio e por estar incondicionalmente ao meu lado.

Ao meu avô, Francisco, por ter sido um verdadeiro pai e a minha avó, Maria, por ser uma segunda mãe.

Ao professor Jamilson, por sua orientação, por toda ajuda com a dissertação, pelos conselhos e dicas, por sua paciência, disponibilidade e atenção.

A todos os professores do PPGMAT-UFPB, em especial aos professores que ministraram as disciplinas nas quais fui aluno, pelo grande e valoroso conhecimento.

A todos os meus amigos e colegas da pós-graduação, em especial, a Milena, o Fábio, o João Pedro (JP), a Yasmin, o Felipe, o Elias e o Jean, pelas conversas e bons momentos compartilhados.

Aos meus amigos de graduação, aos quais devo o fato de ter sido parte da melhor turma que alguém poderia ter.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

“Eu só consigo entender uma sociedade na qual o conhecimento seja a razão de ser precípua que o governo dá para a formação do cidadão.” (Dr. Enéas Ferreira Carneiro)

Resumo

O objetivo deste trabalho é apresentar um estudo da teoria dual para ideais de operadores através do conceito do dual de uma classe de sequências. Começaremos apresentando a noção de dual de uma classe de sequências, o qual denotaremos por X^{dual} , e em seguida apresentamos um estudo sobre esta classe, trabalhando condições com as quais a dualidade clássica de espaços de sequências é obtida. Estudaremos os operadores adjuntos e bi-adjuntos neste contexto, além de condições para maximalidade de ideais caracterizados pelo ambiente de classes de sequências.

Palavras-chave: Classes de sequências, dualidade, ideais de operadores, ideais maximais.

Abstract

The objective of this work is to present a study of the dual theory for ideals of operators through the concept of the dual of a class of sequences. We will begin by introducing the notion of the dual of a class of sequences, which we will denote by X^{dual} , and then present a study on this class, working on conditions under which the classical duality of sequence spaces is obtained. We will study the adjoint and bi-adjoint operators in this context, as well as conditions for the maximality of ideals characterized by the environment of classes of sequences.

Keywords: Classes of sequences, duality, operators ideals, maximal ideals.

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	3
1.1 Operadores Lineares	3
1.2 Espaços de Sequências	6
1.3 Ideais de Operadores	9
1.4 Classes de Sequências	11
1.5 Produto Tensorial e Normas Tensoriais	13
2 Teoria Dual	18
2.1 Dual de uma classe de sequências	18
2.2 Dualidade	25
3 Adjuntos e Bi-adjuntos	32
4 Ideais Maximais no ambiente de classe de sequências	41
4.1 Maximalidade	41
4.2 O dual topológico de $E \otimes_{\alpha_{X,Y}} F$	52
Referências	56

Notações

A seguir, listamos algumas notações utilizadas neste trabalho.

- $\mathbb{K}$ denota o corpo $\mathbb{R}$ dos números reais ou o corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos.
- B_E denota a bola unitária fechada de um espaço normado E .
- E' denota o dual topológico de um espaço normado E .
- $E^\#$ denota o dual algébrico de um espaço vetorial E .
- $(x_j)_{j=k}^\infty$ denota a sequência $(0, 0, \dots, 0, x_k, x_{k+1}, \dots)$.
- $(x_j)_{j=1}^k$ denota a sequência $(x_1, \dots, x_k, 0, 0, \dots)$.
- e_j denota a sequência cujo j -ésimo termo é 1 e os demais termos são nulos.
- $x \cdot e_j$ denota a sequência cujo j -ésimo termo é x e os demais termos nulos.
- $E \xhookrightarrow{1} F$ denota $E \subseteq F$ e $\|\cdot\|_F \leq \|\cdot\|_E$.
- $E \stackrel{1}{=} F$ denota que E e F são isomorfos isometricamente.
- BAN denota a família de todos os espaços de Banach;
- $\mathcal{L}(E; F)$ denota o espaço dos operadores lineares e contínuos de E em F .
- $B(E, F; G)$ denota o espaço das aplicações bilineares de $E \times F$ em G .
- $B(E, F)$ denota o espaço das formas bilineares de $E \times F$ em $\mathbb{K}$.
- $\mathcal{F}$ denota a classe dos operadores de posto finito.

- $\mathcal{F}(E; F)$ denota todos os operadores de posto finito E em F .
- $\mathfrak{F}(E)$ denota os subespaços de dimensão finita de E .
- $\mathfrak{CF}(E)$ denota os subespaços de codimensão finita de E .
- $\mathcal{I}$ denota um ideal.
- $\mathcal{I}^{\text{dual}}$ denota o dual do ideal $\mathcal{I}$.
- $E \otimes F$ denota o produto tensorial entre os espaços E e F .
- $x \otimes y$ denota um tensor elementar em $E \otimes F$.
- $E \otimes_{\alpha} F$ denota o produto tensorial $E \otimes F$ munido de uma norma tensorial α .
- $I_M : M \rightarrow E$ denota o operador inclusão do subespaço M em E .
- $Q_L : F \rightarrow F/L$ denota o operador quociente com respeito ao subespaço fechado L de F .
- $T' \in \mathcal{L}(F'; E')$ denota o operador adjunto de $T \in \mathcal{L}(E; F)$.

Introdução

Na década de 1950, A. Dvoretzky e C. Rogers (ver [20]) mostraram que em espaços de dimensão infinita sempre existem sequências incondicionalmente somáveis que não são absolutamente somáveis. Na mesma década, A. Grothendieck introduz o conceito de operador linear absolutamente somante que “transforma” sequências incondicionalmente somáveis em sequências absolutamente somáveis (ver [21]). Na linguagem atual, as sequências incondicionalmente somáveis constituem o espaço $\ell_1^u(E)$ enquanto que as sequências absolutamente somáveis constituem o espaço $\ell_1(E)$. Tal classe de operadores motivou A. Pietsch a generalizar o conceito, surgindo os operadores lineares absolutamente p -somantes (ver [28]), aqueles que transformam sequências fracamente p -somáveis em fortemente p -somáveis.

Um fato demonstrado por Pietsch dá conta de mostrar que se um operador linear é p -somante, então não necessariamente o seu adjunto também é p -somante. A saber, o operador inclusão de ℓ_1 em ℓ_2 é 2-somante e, no entanto, seu adjunto não é 2-somante. Coube a J. S. Cohen (veja [16]) determinar a qual classe de operadores os adjuntos dos operadores p -somantes pertencem, a chamada classe dos operadores Cohen fortemente p -somantes.

Em [29], Pietsch apresenta uma teoria geral que abrange as classes de operadores lineares já citadas e diversas outras classes de operadores que antes eram estudadas isoladamente. A teoria é conhecida hoje como Teoria de Ideais de Operadores. Em 1983, Pietsch generaliza a teoria de ideais para o caso multilinear passando a trabalhar com os chamados ideais multilineares, os quais evidentemente englobam os ideais de operadores lineares [30]. A partir de então, surgem generalizações dos operadores absolutamente somantes e também dos operadores Cohen somantes, como por exemplo podemos ver em [4, 5, 17, 24, 26, 27]

Por sua vez, em [6], G. Botelho e J. R. Campos definem um ambiente abstrato que generaliza ideais caracterizados por transformação de sequências a valores vetoriais, como o caso dos operadores absolutamente somantes e Cohen fortemente somantes. Este ambiente está construído em torno do conceito de Classe de Sequências e foi desenvolvido para o caso de operadores m -lineares (o caso linear é recuperado para

$m = 1$). Desde então, muitos trabalhos foram desenvolvidos utilizando esse tipo de abordagem e entre eles estão as referências [8, 10, 12, 15, 31, 32].

Operadores que são caracterizados no ambiente de classes de sequência constituem os ideais denotados por $\mathcal{L}_{X;Y}$, onde X e Y são classes de sequências associadas ao ideal de operadores em questão. Naturalmente, a pergunta sobre operadores adjuntos surge: se $T \in \mathcal{L}_{X;Y}(E; F)$, então a qual classe de operadores, dependendo de X e Y , o seu adjunto T' pertence? E o seu bi-adjunto T'' ? Motivados a responder esta pergunta, Botelho e Campos desenvolveram em [7] uma teoria dual no ambiente de classes de sequências que dá conta do estudo dessas questões e de outros tipos de resultados de dualidade.

Em seu livro [29], Pietsch apresenta vários conceitos importantes associados à teoria de ideais e, dentre eles, a noção de ideal maximal. Esta e outros tipos de propriedades de ideais são amplamente estudadas, como por exemplo para a classe dos operadores absolutamente p -somantes (ver [19, Chapter 6]). De forma um tanto natural é possível estudar a propriedade de maximalidade de ideais por meio do produto tensorial de espaços de Banach, dada a estreita relação entre a teoria de produtos tensoriais e a teoria de ideais de operadores. A título de exemplo, a norma d_p (norma de Chevet-Saphar) em $E \otimes F$ nos fornece o isomorfismo $\Pi_{p*}(E; F') = (E \otimes_{d_p} F)'$. Sabendo que o clássico teorema de representação para ideais de operadores maximais ([18, Section 17.5]) dá conta de relacionar esta propriedade - a maximalidade - à teoria do produto tensorial, uma pergunta natural surge: É possível caracterizar ou determinar a maximalidade de ideais gerados no ambiente de classes de sequências? O estudo desta questão foi realizado por G. Botelho, J. Campos e L. Nascimento em [9], estudo este que também abordaremos em nosso trabalho.

O trabalho está dividido em 4 capítulos. No primeiro capítulo apresentamos conceitos e resultados que servirão como alicerce para o desenvolvimento do texto. No segundo expomos e estudamos a teoria dual apresentando uma noção de dualidade para uma classe de sequências. No terceiro capítulo exibimos um estudo sobre os operadores adjuntos no que diz respeito à sua relação com ideais caracterizados por classes de sequências. Por fim, no quarto capítulo, apresentamos como aplicação um estudo sobre a maximalidade dos ideais caracterizados por classes de sequências, o qual está intimamente ligado ao conceito de quase-norma tensorial desenvolvida em [9] bem como à caracterização do dual do produto tensorial munido de uma quase-norma tensorial.

Capítulo 1

Preliminares

Vamos começar nosso trabalho com algumas noções preliminares necessárias e básicas da teoria que será explorada nos capítulos seguintes. Aqui se encontram conceitos e resultados acerca do ambiente de classe de sequências, introduzido no artigo [6], bem como resultados úteis de Análise Funcional que podem ser encontrados no livro [11]. Para as aplicações estudadas no Capítulo 4, apresentamos conceitos e resultados acerca da teoria de produtos tensoriais e, para isto, utilizamos como base o trabalho [23] e o livro [33].

Pelo caráter do capítulo, as demonstrações de todos os resultados apresentados serão omitidas e podem ser facilmente encontradas nas referências acima citadas e as demais referências que serão descritas oportunamente em cada subseção.

1.1 Operadores Lineares

Um *operador linear* entre espaços vetoriais E e F sobre $\mathbb{K}$ é uma função $T : E \rightarrow F$ tal que, para todos $x, y \in E$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, temos $T(x + \lambda y) = T(x) + \lambda T(y)$.

Dizemos que um operador linear $T : E \rightarrow F$ entre espaços vetoriais normados é *contínuo* se, para todo $a \in E$ e $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in E, \|x - a\|_E < \delta \Rightarrow \|T(x) - T(a)\|_F < \varepsilon.$$

O espaço de todos os operadores lineares e contínuos entre E e F é denotado por $\mathcal{L}(E; F)$. Não é difícil ver que $\mathcal{L}(E; F)$ é um espaço vetorial com as operações usuais de soma e multiplicação por escalar de funções. Quando $F = \mathbb{K}$, dizemos o operador linear é um funcional linear e, além disso, escrevemos $E' = \mathcal{L}(E; \mathbb{K})$, espaço que é chamado dual topológico de E .

Seja $T : E \rightarrow F$ um operador linear. Os conjuntos $\ker(T) := \{x \in E; T(x) = 0\}$ e

$T(E) := \{T(x); x \in E\}$ são subespaços vetoriais de E e F , respectivamente. O primeiro é denominado *núcleo* de T enquanto o segundo *imagem* de T . Um fato interessante é que se T é contínuo, então $\ker(T)$ é um subespaço fechado de E pois $\ker(T) = T^{-1}(\{0\})$.

Por fim, sempre que não houver confusão sobre a norma dos respectivos espaços em questão, escreveremos $\|x\|$ ao invés de $\|x\|_E$.

A seguir, vamos enunciar algumas caracterizações e resultados úteis sobre operadores lineares e contínuos cujas demonstrações podem ser encontradas em [11].

Proposição 1.1. *Sejam E e F espaços vetoriais normados e $T : E \rightarrow F$ um operador linear. São equivalentes:*

- (a) T é contínuo.
- (b) $\sup\{\|T(x)\|; x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} < +\infty$.
- (c) Existe $C > 0$ tal que $\|T(x)\| \leq C\|x\|$ para todo $x \in E$.

Proposição 1.2. *Seja E e F espaços vetoriais normados.*

- (a) A função $\|\cdot\| : \mathcal{L}(E; F) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\|T\| = \sup_{x \in B_E} \|T(x)\|$ define uma norma em $\mathcal{L}(E; F)$.
- (b) $\|T(x)\| \leq \|T\|\|x\|$, para todos $T \in \mathcal{L}(E; F)$ e $x \in E$.
- (c) Se F é Banach, então $\mathcal{L}(E; F)$ também o é.
- (d) Se $T_1 \in \mathcal{L}(E_1; F)$ e $T_2 \in \mathcal{L}(F; E_2)$, então $T_2 \circ T_1 \in \mathcal{L}(E_1; E_2)$ e $\|T_2 \circ T_1\| \leq \|T_2\|\|T_1\|$.

Uma consequência importante dessa proposição é que $E' = \mathcal{L}(E; \mathbb{K})$ é sempre um espaço de Banach mesmo que E não seja Banach. Outro fato importante é que $\|T\|$ é a menor das constantes que satisfaz $\|T(x)\| \leq C\|x\|$, isto é,

$$\|T\| = \inf\{C > 0; \|T(x)\| \leq C\|x\|\}.$$

Exemplo 1.1. Operadores de posto finito: Sejam E e F espaços normados e $\varphi \in E'$ e $y \in F$. Defina $\varphi \otimes y : E \rightarrow F$ por $\varphi \otimes y(x) = \varphi(x)y$. Claramente, $\varphi \otimes y \in \mathcal{L}(E; F)$, a dimensão de $(\varphi \otimes y)(E)$ é igual a 1 e

$$\|\varphi \otimes y\| = \sup_{x \in B_E} \|\varphi \otimes y(x)\| = \sup_{x \in B_E} \|\varphi(x)y\| = \|\varphi\|\|y\|.$$

Um operador $T : E \rightarrow F$ é dito de *posto finito* se $\dim T(E) < \infty$. O espaço de todos os operadores de posto finito de E em F é denotado por $\mathcal{F}(E; F)$ e contém todos os operadores da forma $\varphi \otimes y$.

A caracterização dos operadores de posto finito apresentada a seguir será de utilidade em nosso trabalho.

Proposição 1.3. *Um operador $T : E \rightarrow F$ é de posto finito se, e somente se, existem $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_j \in E'$, $y_j \in F$, com $j = 1, \dots, n$, tais que*

$$T = \sum_{j=1}^n \varphi_j \otimes y_j.$$

A proposição anterior nos diz que a noção de operador de posto finito e operador de tipo finito são equivalentes para operadores lineares, fato que não é verdade no ambiente multilinear. O operador adjunto de um operador linear é definido como se segue.

Dado $T \in \mathcal{L}(E; F)$, o operador $T' : F' \rightarrow E'$ dado por $T'(\psi)(x) = \psi(T(x))$, para todo $x \in E$, é chamado de *operador adjunto* de T . É fato que $T' \in \mathcal{L}(F'; E')$ e $\|T'\| = \|T\|$.

Como $T' \in \mathcal{L}(F'; E')$ então faz sentido considerarmos $T'' = (T')'$ e o operador $T'' : E'' \rightarrow F''$ é chamado *bi-adjunto* de T .

Definição 1.1. Seja E um espaço de Banach. Um subconjunto N de E' é dito *normante* para E se

$$\|x\| = \sup_{\varphi \in N, \|\varphi\| \leq 1} |\varphi(x)|,$$

para todo $x \in E$.

Exemplo 1.2. Sejam E um espaço de Banach e $J_E : E \rightarrow E''$ a imersão canônica, então $J_E(E)$ é um subconjunto normante para E' .

Agora, enunciaremos alguns resultados clássicos de Análise Funcional necessários ao trabalho. O primeiro deles é o Teorema do Gráfico Fechado, cuja demonstração pode ser encontrada em [11, Teorema 2.5.1].

Teorema 1.1 (Teorema do Gráfico Fechado). *Sejam E e F espaços de Banach e $T : E \rightarrow F$ um operador linear. Então T é contínuo se, e somente se,*

$$G(T) := \{(x, T(x)); x \in E\} \subset E \times F$$

é fechado em $E \times F$.

Proposição 1.4. *Seja $F \subset E$ subespaço tal que $\overline{F} \neq E$. Então, existe um funcional linear $\varphi \in E'$ não nulo tal que $\varphi(x) = 0$, para todo $x \in F$.*

Demonstração. Veja [13, Corollary 1.8]. □

Teorema 1.2 (Princípio da Reflexividade Local Fraco). *Sejam M e F espaços normados com $\dim M < \infty$, $R \in \mathcal{L}(M; F'')$ e N um subespaço de F' com $\dim N < \infty$. Então, para todo $\epsilon > 0$ existe um operador $S \in \mathcal{L}(M; F)$ tal que*

(a) $\|S\| \leq (1 + \epsilon)\|R\|$.

(b) $\varphi(S(y)) = R(y)(\varphi)$, para todos $\varphi \in N$ e $y \in M$.

Demonstração. Ver [18, pág. 73]. □

Finalizando esta subseção, apresentamos uma caracterização para subespaços complementados em espaços de Banach, cuja demonstração pode ser vista em [11, Proposição 3.2.2].

Proposição 1.5. *Sejam E um espaço de Banach e F um subespaço de E . As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) *Existe um operador linear contínuo $P : E \rightarrow E$ cuja imagem coincide com F e $P \circ P = P$. Neste caso, dizemos que P é uma projeção de E sobre F .*

(b) *F é fechado e existe um subespaço G de E tal que $E = F \oplus G$, isto é, F é um subespaço complementado de E . Neste caso, $F = \{x \in E; P(x) = x\}$ e $G = \ker(P)$.*

1.2 Espaços de Sequências

Apresentaremos nesta subseção a definição de alguns espaços de sequências à valores vetoriais. Enunciamos algumas propriedades desses espaços e relações entre eles, quando for o caso. As definições e resultados aqui apresentados podem ser encontradas em [10, 16, 22].

Os espaços ℓ_p e ℓ_∞ são bastantes conhecidos na literatura de Análise Funcional. Tais espaços são constituídos por sequências p -somáveis e por sequências limitadas, respectivamente, a valores em $\mathbb{K}$. Apresentaremos agora esses espaços para sequências à valores vetoriais. Ao longo de toda esta seção, consideraremos E um espaço de Banach.

O espaço das *sequências limitadas* em E é definido por

$$\ell_\infty(E) := \left\{ (x_j)_{j=1}^\infty \in E^{\mathbb{N}}; \sup_j \|x_j\| < +\infty \right\}$$

com a norma $\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_\infty := \sup_j \|x_j\|$. O espaço $\ell_\infty(E)$ é completo com a norma $\|\cdot\|_\infty$.

Seja $1 \leq p < \infty$. O espaço das *sequências p -somáveis* em E é definido por

$$\ell_p(E) := \left\{ (x_j)_{j=1}^\infty \in E^{\mathbb{N}}; \sum_{j=1}^\infty \|x_j\|^p < +\infty \right\}.$$

A expressão $\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_p := \left(\sum_{j=1}^\infty \|x_j\|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ define uma norma completa em $\ell_p(E)$.

É fato bem conhecido que se $1 \leq p \leq q < \infty$, então têm-se $\ell_p(E) \xhookrightarrow{1} \ell_\infty(E)$ e $\ell_p(E) \xhookrightarrow{1} \ell_q(E)$.

Seja $1 \leq p < \infty$. Uma sequência $(x_j)_{j=1}^\infty$ em E é dita *fracamente p -somável* se $\sum_{j=1}^\infty |\varphi(x_j)|^p < +\infty$, para todo $\varphi \in E'$. O espaço de todas as sequências fracamente p -somáveis em E é denotado por $\ell_p^w(E)$, isto é,

$$\ell_p^w(E) := \left\{ (x_j)_{j=1}^\infty \in E^{\mathbb{N}}; \sum_{j=1}^\infty |\varphi(x_j)|^p < +\infty \right\}.$$

A função $\|\cdot\|_{w,p} : \ell_p^w(E) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{w,p} = \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^\infty |\varphi(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

define uma norma completa em $\ell_p^w(E)$.

Também para $1 \leq p < \infty$, o espaço das *sequências incondicionalmente p -somáveis* em E é definido por

$$\ell_p^u(E) := \left\{ (x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^w(E); \lim_{k \rightarrow \infty} \|(x_j)_{j=k}^\infty\|_{w,p} = 0 \right\}.$$

Em geral, tem-se $\ell_p^u(E) \subsetneq \ell_p^w(E)$ e, além disso, o espaço $\ell_p^u(E)$ é fechado em $\ell_p^w(E)$. Com isso, usa-se a norma herdada de $\ell_p^w(E)$ para torná-lo um espaço de Banach.

Proposição 1.6. *Sejam $1 \leq p \leq q < \infty$. Então*

- (a) $\ell_p^w(E) \xhookrightarrow{1} \ell_q^w(E)$ e $\ell_p^u(E) \xhookrightarrow{1} \ell_q^u(E)$.
- (b) $\ell_p(E) \xhookrightarrow{1} \ell_p^u(E) \xhookrightarrow{1} \ell_p^w(E) \xhookrightarrow{1} \ell_\infty(E)$.
- (c) $\ell_p^w(E) = \ell_p(E)$ se, e somente se, $\dim E < \infty$.

Esse último item da proposição anterior é o celebrado Teorema de Dvoretzky-Rogers (ver [20]).

O espaço $c_0(E)$ é definido como o espaço das sequências em E que convergem para 0, ou seja,

$$c_0(E) := \{(x_j)_{j=1}^\infty \in E^{\mathbb{N}}; x_j \rightarrow 0 \text{ em } E\}.$$

As sequências em $c_0(E)$ são convergentes e, portanto, limitadas. Por outro lado, como nem toda sequência limitada é convergente, tem-se $c_0(E) \subsetneq \ell_\infty(E)$. Entretanto, o espaço $c_0(E)$ não demanda de uma norma particular para torná-lo completo uma vez que o mesmo é fechado em $\ell_\infty(E)$, com a norma $\|\cdot\|_\infty$.

Dizemos que uma sequência $(x_j)_{j=1}^\infty \in E^\mathbb{N}$ é *fracamente convergente* para $x \in E$ se $\varphi(x_j) \rightarrow \varphi(x)$, para todo $\varphi \in E'$. O espaço de todas as sequências que convergem fracamente para 0 em E é denotado por $c_0^w(E)$. Simbolicamente,

$$c_0^w(E) := \{(x_j)_{j=1}^\infty \in E^\mathbb{N}; \varphi(x_j) \rightarrow 0, \text{ para todo } \varphi \in E'\}.$$

A função $\|\cdot\|_{c_0^w(E)} : c_0^w(E) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{c_0^w(E)} := \sup_{\varphi \in B_{E'}} \|(\varphi(x_j))_{j=1}^\infty\|_\infty$$

define uma norma completa em $c_0^w(E)$.

Se $(x_j)_{j=1}^\infty \in c_0^w(E)$, então $(x_j)_{j=1}^\infty$ é fracamente limitada e, portanto, é limitada. Logo, $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_\infty(E)$. Além disso,

$$\|x_j\| = \sup_{\varphi \in B_{E'}} |\varphi(x_j)| \leq \sup_{\varphi \in B_{E'}} \|(\varphi(x_j))_{j=1}^\infty\|_\infty = \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{c_0^w(E)}$$

donde segue que $c_0^w(E) \xhookrightarrow{1} \ell_\infty(E)$.

Seja $1 \leq p \leq \infty$. Uma sequência $(x_j)_{j=1}^\infty \in E^\mathbb{N}$ é dita *Cohen fortemente p -somável*, ou simplesmente *Cohen p -somável*, se $\sum_{j=1}^\infty |\varphi_j(x_j)| < \infty$, para toda $(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{p^*}^w(E')$ onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$. O espaço de todas as sequências Cohen p -somáveis em E é denotado por $\ell_p\langle E \rangle$. De forma análoga aos espaços anteriores, a expressão

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{c,p} := \sup_{(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_{p^*}^w(E')}} \sum_{j=1}^\infty |\varphi_j(x_j)|$$

define uma norma completa em $\ell_p\langle E \rangle$.

Para $1 \leq p < \infty$, dizemos que uma sequência $(x_j)_{j=1}^\infty$ em E é *mid- p -somável* se $((\varphi_n(x_j))_{j=1}^\infty)_{n=1}^\infty \in \ell_p(\ell_p)$ sempre que $(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p^w(E')$. O espaço de todas as sequências mid- p -somáveis é denotado por $\ell_p^{\text{mid}}(E)$.

A expressão

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{\text{mid},p} := \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in B_{\ell_p^w(E')}} \left(\sum_{n=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty |\varphi_n(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

define uma norma completa em $\ell_p^{\text{mid}}(E)$.

Encerramos a subseção com o seguinte resultado de inclusões:

Proposição 1.7. *Seja $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Então*

- (a) $\ell_p\langle E \rangle \xhookrightarrow{1} \ell_q\langle E \rangle$.
- (b) Se $1 < p \leq \infty$, então $\ell_p\langle E \rangle \xhookrightarrow{1} \ell_p(E)$ e $\ell_1\langle E \rangle = \ell_1(E)$.
- (c) Se $1 \leq p < \infty$, então $\ell_p(E) \xhookrightarrow{1} \ell_p^{\text{mid}}(E) \xhookrightarrow{1} \ell_p^w(E)$.

Vale ressaltar que podem ocorrer as igualdades $\ell_p(E) = \ell_p^{\text{mid}}(E)$ e $\ell_p^{\text{mid}}(E) = \ell_p^w(E)$ em (c) acima, mesmo sendo E um espaço de dimensão infinita. Estas coincidências podem ser encontradas em [10, Theorem 1.2].

1.3 Ideais de Operadores

Um *ideal de operadores* $\mathcal{I}$ é uma subclasse da classe $\mathcal{L}$ de todos os operadores lineares e contínuos entre espaços de Banach e tal que, para quaisquer E e F Banach, suas componentes $\mathcal{I}(E; F) := \mathcal{L}(E; F) \cap \mathcal{I}$ satisfazem as seguintes propriedades:

- (i) $\mathcal{I}(E; F)$ é subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E; F)$ e $\mathcal{F}(E; F) \subset \mathcal{I}(E; F)$.
- (ii) Se $L \in \mathcal{L}(F_1; F)$, $T \in \mathcal{I}(E_1; F_1)$ e $S \in \mathcal{L}(E; E_1)$, então $L \circ T \circ S \in \mathcal{I}(E; F)$.

Um ideal $\mathcal{I}$ é dito *normado*, se existe uma função $\|\cdot\|_{\mathcal{I}} : \mathcal{I} \rightarrow [0, +\infty)$ satisfazendo:

- (i) A restrição da função $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$ à cada componente $\mathcal{I}(E; F)$ define uma norma em $\mathcal{I}(E; F)$.
- (ii) $\|id_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{I}} = 1$ onde $id_{\mathbb{K}} : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ é o operador identidade em $\mathbb{K}$.
- (iii) $\|T_1 \circ T \circ T_2\|_{\mathcal{I}} \leq \|T_1\| \|T\|_{\mathcal{I}} \|T_2\|$ sempre que $T_1 \in \mathcal{L}(F_0; F)$, $T \in \mathcal{I}(E_0; F_0)$ e $T_2 \in \mathcal{L}(E; E_0)$.

Finalmente, dizemos que um ideal normado $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ é um *ideal de Banach* se $(\mathcal{I}(E; F), \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ é completo para quaisquer espaços de Banach E e F .

Exemplo 1.3. Apresentamos abaixo alguns exemplos de classes que são ideais. Como referência para estes exemplos, podemos citar [29].

- a) A classe $(\mathcal{F}, \|\cdot\|)$ dos operadores de posto finito é um ideal que não é de Banach.
- b) Dizemos que um operador $T \in \mathcal{L}(E; F)$ é *completamente contínuo* se $T(x_n) \rightarrow T(x)$ sempre que $x_n \rightharpoonup x$ em E . Denotamos o espaço de todos os operadores completamente

contínuos de E em F por $\mathcal{CC}(E; F)$. É um fato bem conhecido que $(\mathcal{CC}, \|\cdot\|)$ é um ideal de Banach.

c) As classes Π_p dos operadores absolutamente p -somantes e $\mathcal{D}_p$ dos operadores Cohen fortemente p -somantes são ideais de operadores normados com a norma $\pi_p(\cdot)$ e $d_p(\cdot)$, respectivamente, onde $\pi_p(T) = \|\widehat{T} : \ell_p^w(E) \rightarrow \ell_p(F)\|$ e $d_p(T) = \|\widehat{T} : \ell_p(E) \rightarrow \ell_p(F)\|$. Mais ainda, são ideais de Banach.

Um resultado muito conhecido na teoria é dado pela

Proposição 1.8. *Sejam $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ um ideal normado e E e F espaços de Banach. Então*

- (a) $\|T\| \leq \|T\|_{\mathcal{I}}$, para todo $T \in \mathcal{I}(E; F)$.
- (b) $\|\varphi \otimes y\|_{\mathcal{I}} = \|\varphi\| \|y\|$, $\varphi \in E'$ e $y \in F$.

Seja $\mathcal{I}$ um ideal. Definimos o *ideal dual* de $\mathcal{I}$ pondo, para cada E e F Banach,

$$\mathcal{I}^{\text{dual}}(E; F) := \{T \in \mathcal{L}(E; F); T' \in \mathcal{I}(F'; E')\}.$$

Além disso, se $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ é um ideal normado, definimos

$$\|T\|_{\mathcal{I}^{\text{dual}}} := \|T'\|_{\mathcal{I}},$$

para todo $T \in \mathcal{I}^{\text{dual}}$. Tendo em vista as propriedades dos operadores adjuntos e da norma $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$, vale:

Proposição 1.9. *Se $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ é um ideal normado, então $(\mathcal{I}^{\text{dual}}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}^{\text{dual}}})$ também é um ideal normado.*

Exemplo 1.4. Se $1 \leq p \leq \infty$, então $\mathcal{D}_{p^*}^{\text{dual}} = \Pi_p$. E, se $1 < p^* \leq \infty$, então $\Pi_p^{\text{dual}} = \mathcal{D}_{p^*}$ [16, Theorem 2.2.2].

Um ideal $\mathcal{I}$ é dito *injetivo* se para todo $T \in \mathcal{L}(E; F)$ e para qualquer isometria $I \in \mathcal{L}(F; G)$ tais que $I \circ T \in \mathcal{I}(E; G)$ tem-se $T \in \mathcal{I}(E; F)$.

Exemplo 1.5. As classes dos operadores compactos e fracamente compactos formam ideais injetivos [29, Proposition 4.6.12]. Já a classe dos operadores aproximáveis não forma um ideal injetivo [29, Proposition 4.6.13].

1.4 Classes de Sequências

A Teoria Dual que trabalharemos em nesta dissertação tem como alicerce a teoria de classes de sequências, introduzida por Botelho e Campos em [6]. As definições e resultados apresentados em [6] abrangem os operadores multilineares, mas por conveniência nos restringiremos ao caso linear apresentando todas as definições e resultados deste caso.

Definição 1.2. Uma *classe de sequências* $X(\cdot)$ é uma regra que a cada espaço de Banach E , associa a um espaço de Banach $X(E)$, satisfazendo:

- (i) $c_{00}(E) \subseteq X(E) \xrightarrow{1} \ell_\infty(E)$.
- (ii) $\|x \cdot e_j\|_{X(E)} = \|x\|_E$, para todo $j \in \mathbb{N}$ e todo $x \in E$.

Observação 1.1. A condição $X(E) \xrightarrow{1} \ell_\infty(E)$ implica que se uma sequência $(x^k)_{k=1}^\infty$ em $X(E)$ é tal que $x^k \xrightarrow{k} (x_j)_{j=1}^\infty$ em $X(E)$, onde $x^k = (x_j^k)_{j=1}^\infty \in X(E)$, para todo $k \in \mathbb{N}$, então esta convergência implica convergência coordenada à coordenada, isto é, $x_j^k \xrightarrow{k} x_j$ em E , para todo $j \in \mathbb{N}$.

Exemplo 1.6. As regras $\ell_p(\cdot)$, $\ell_p^w(\cdot)$, $\ell_p^u(\cdot)$, $\ell_p\langle\cdot\rangle$, $\ell_p^{\text{mid}}(\cdot)$, $c_0(\cdot)$, $c_0^w(\cdot)$ e $\ell_\infty(\cdot)$ são classes de sequências.

Dizemos que uma classe de sequências X (em notação mais simples) é *finitamente determinada* quando, para toda $(x_j)_{j=1}^\infty \in E^\mathbb{N}$, vale

$$(x_j)_{j=1}^\infty \in X(E) \Leftrightarrow \sup_k \|(x_j)_{j=1}^k\|_{X(E)} < \infty.$$

Neste caso, tem-se

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{X(E)} = \sup_k \|(x_j)_{j=1}^k\|_{X(E)}.$$

Exemplo 1.7. As classes $\ell_p(\cdot)$, $\ell_p^w(\cdot)$, $\ell_p\langle\cdot\rangle$, $\ell_\infty(\cdot)$ e $\ell_p^{\text{mid}}(\cdot)$ são finitamente determinadas enquanto que as classes $c_0(\cdot)$ e $\ell_p^u(\cdot)$ não são finitamente determinadas.

Definição 1.3. Dizemos que uma classe de sequências é *finitamente dominada* se satisfaz uma das seguintes condições:

- (i) Existe uma classe de sequências finitamente determinada Y tal que $X(E)$ é fechado $Y(E)$, para todo espaço de Banach E . Além disso, para toda $(x_j)_{j=1}^\infty \in Y(E)$, temos $(x_j)_{j=1}^\infty \in X(E)$ se, e somente se, $\lim_k \|(x_j)_{j=1}^k\|_{Y(E)} = 0$.
- (ii) Existe uma classe de sequências finitamente determinada Y tal que $X(E)$ é fechado em $Y(E)$, para todo E espaço de Banach. Além disso, para toda $(x_j)_{j=1}^\infty \in Y(E)$, temos $(x_j)_{j=1}^\infty \in X(E)$ se, e somente se, $\lim_{k,l} \|(x_j)_{j=l}^k\|_{Y(E)} = 0$

Um fato importante é que se uma classe de seqüências X é finitamente dominada, então, para toda seqüência $(x_j)_{j=1}^\infty \in X(E)$, temos $\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{X(E)} = \sup_k \|(x_j)_{j=1}^k\|_{X(E)}$. Com efeito, considere que X é dominada por uma classe de seqüências Y e seja $(x_j)_{j=1}^\infty \in X(E)$. Como $X(E)$ é fechado em $Y(E)$, para todo E espaço de Banach, então a norma em $X(E)$ é a norma induzida por $\|\cdot\|_{Y(E)}$. Pelo fato de Y ser finitamente determinada, temos

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{X(E)} = \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{Y(E)} = \sup_k \|(x_j)_{j=1}^k\|_{Y(E)} = \sup_k \|(x_j)_{j=1}^k\|_{X(E)}.$$

Exemplo 1.8. É imediato que a classe de seqüências $\ell_p^u(\cdot)$ é finitamente dominada pela classe de seqüências $\ell_p^w(\cdot)$.

O resultado a seguir estabelece como operadores caracterizados por transformação de seqüências se adequam ao ambiente de classes de seqüências.

Proposição 1.10. [6, Proposition 2.4] *Sejam X e Y classes de seqüências. Então, para todo $T \in \mathcal{L}(E; F)$, as seguintes condições são equivalentes:*

- (a) $(T(x_j))_{j=1}^\infty \in Y(F)$ sempre que $(x_j)_{j=1}^\infty \in X(E)$.
- (b) A aplicação induzida

$$\widehat{T} : X(E) \rightarrow Y(F)$$

dada por $\widehat{T}((x_j)_{j=1}^\infty) = (T(x_j))_{j=1}^\infty$ é um operador linear contínuo bem definido.

Além disso, os itens acima implicam na condição (c) abaixo, valendo a equivalência quando X e Y forem finitamente determinadas.

- (c) Existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|(T(x_j))_{j=1}^k\|_{Y(F)} \leq C \|(x_j)_{j=1}^k\|_{X(E)}, \quad (1.1)$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ e para todo $x_1, \dots, x_k \in E$. Neste caso, tem-se

$$\|\widehat{T}\| = \inf\{C > 0; C \text{ satisfaz (1.1)}\}$$

Definição 1.4. Sejam X e Y classes de seqüências. Um operador $T \in \mathcal{L}(E; F)$ é dito $(X; Y)$ -somante se $(T(x_j))_{j=1}^\infty \in Y(F)$ sempre que $(x_j)_{j=1}^\infty \in X(E)$. Neste caso, escrevemos $T \in \mathcal{L}_{X;Y}(E; F)$ e definimos

$$\|T\|_{X;Y} = \|\widehat{T}\|_{\mathcal{L}(X(E); Y(F))}$$

Uma classe de seqüências X é dita *linearmente estável* quando $\mathcal{L}_{X;X}(E; F) \stackrel{1}{=} \mathcal{L}(E; F)$, para todo $E, F \in BAN$, isto é, para todo $T \in \mathcal{L}(E; F)$, vale $(T(x_j))_{j=1}^\infty \in X(F)$ sempre que $(x_j)_{j=1}^\infty \in X(E)$ e $\|T\| = \|\hat{T}\|$.

Exemplo 1.9. a) Todas as classes apresentadas no Exemplo 1.6 são linearmente estáveis.

b) A classe de seqüências

$$E \in BAN \mapsto X(E) = \begin{cases} c_0(E), & \text{se } E \text{ é reflexivo} \\ \ell_\infty(E), & \text{caso contrário} \end{cases}$$

não é linearmente estável. De fato, considere o operador linear e contínuo $i: \ell_1 \hookrightarrow \ell_2$. Como ℓ_1 não é reflexivo e ℓ_2 é reflexivo, temos $X(\ell_1) = \ell_\infty(\ell_1)$ e $X(\ell_2) = c_0(\ell_2)$. Note que a seqüência $(e_j)_{j=1}^\infty \in \ell_\infty(\ell_1)$, mas $(e_j)_{j=1}^\infty \notin c_0(\ell_2)$.

O resultado a seguir caracteriza os ideais de Banach no ambiente de classes de seqüências.

Teorema 1.3. [6, Theorem 3.6] *Sejam X e Y classes de seqüências linearmente estáveis tais que $X(\mathbb{K}) \xrightarrow{1} Y(\mathbb{K})$. Então, $(\mathcal{L}_{X;Y}, \|\cdot\|_{X;Y})$ é um ideal de operadores de Banach.*

Exemplo 1.10. Como mencionado anteriormente, os ideais Π_p e $\mathcal{D}_p$ são ideais de Banach. O teorema acima estabelece esse fato de modo direto e imediato. De fato, basta observar que $(\Pi_p, \pi_p(\cdot)) = (\mathcal{L}_{\ell_p^w(\cdot), \ell_p(\cdot)}, \|\cdot\|_{\ell_p^w(\cdot), \ell_p(\cdot)})$, que $\ell_p^w(\mathbb{K}) = \ell_p(\mathbb{K})$ (pelo Teorema de Dvoretzky-Rogers) e que $\ell_p^w(\cdot)$ e $\ell_p(\cdot)$ são classes de seqüências linearmente estáveis. De forma análoga, prossegue-se para $\mathcal{D}_p$.

1.5 Produto Tensorial e Normas Tensoriais

Nesta seção apresentaremos conceitos e resultados sobre produto tensorial entre espaços de Banach e sobre algumas normas tensoriais. Essencialmente, toda a teoria exposta aqui pode ser encontrada no livro [33] e na dissertação [23] (em português). Estes conceitos e resultados serão utilizados no Capítulo 4 quando será tratada a maximalidade de ideais no ambiente de classes de seqüências.

Definição 1.5. Sejam E e F espaços vetoriais. O *produto tensorial* entre E e F , denotado por $E \otimes F$, é dado por

$$E \otimes F := \text{span}\{x \otimes y; x \in E, y \in F\}$$

onde os operadores $x \otimes y : B(E, F) \rightarrow \mathbb{K}$, definidos por $x \otimes y(A) = A(x, y)$, são funcionais lineares chamados de *tensores elementares*.

A definição anterior, nos diz que um elemento típico u no produto tensorial $E \otimes F$ é da forma $u = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \otimes y_j$ com $\lambda_j \in \mathbb{K}$, $x_j \in E$ e $y_j \in F$, $j = 1, \dots, n$. Veremos na próxima proposição que $\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \otimes y_j = \sum_{j=1}^n (\lambda_j x_j) \otimes y_j$ e escrevendo $z_j = \lambda_j x_j$, temos $u = \sum_{j=1}^n z_j \otimes y_j$. Isto significa que a forma de representar um tensor qualquer não é única e podemos escolher representá-lo sempre na forma $\sum_{j=1}^n x_j \otimes y_j$, sem perda de generalidade.

Proposição 1.11. *Sejam E e F espaços vetoriais. Então, para todos $x_1, x_2 \in E$, $y_1, y_2 \in F$ e para todo $\lambda \in \mathbb{K}$, temos*

- (a) $(x_1 + x_2) \otimes y = x_1 \otimes y + x_2 \otimes y$.
- (b) $x \otimes (y_1 + y_2) = x \otimes y_1 + x \otimes y_2$.
- (c) $\lambda(x \otimes y) = (\lambda x) \otimes y = x \otimes (\lambda y)$.
- (d) $0 \otimes y = x \otimes 0 = 0$.

Demonstração. Ver [33, pág. 2]. □

O próximo resultado estabelece quando dois elementos num produto tensorial são iguais entre si ou, equivalentemente, quando um elemento é nulo. A demonstração pode ser encontrada em [33, Proposition 1.2].

Proposição 1.12. *Seja $u = \sum_{j=1}^n x_j \otimes y_j \in X \otimes Y$. São equivalentes:*

- (a) $u = 0$.
- (b) $\sum_{j=1}^n \varphi(x_j) \psi(y_j) = 0$, para todos $\varphi \in X^\#$, $\psi \in Y^\#$.
- (c) $\sum_{j=1}^n \varphi(x_j) y_j = 0$, para todo $\varphi \in X^\#$.
- (d) $\sum_{j=1}^n \psi(y_j) x_j = 0$, para todo $\psi \in Y^\#$.

Uma das importâncias do produto tensorial é o processo de linearização de aplicações bilineares permitindo enxergá-las como aplicações lineares sobre o produto tensorial. Em suma, o produto tensorial é o espaço vetorial que lineariza as aplicações bilineares no seguinte sentido:

Teorema 1.4. *Sejam E, F e G espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Para cada aplicação bilinear $A : E \times F \rightarrow G$ existe uma única aplicação $T_A : E \otimes F \rightarrow G$ linear tal que $A(x, y) = T_A(x \otimes y)$. Além disso, a relação $A \longleftrightarrow T_A$ é um isomorfismo entre os espaços $B(E, F; G)$ e $L(E \otimes F; G)$.*

Demonstração. Ver [33, Proposition 1.4]. $\square$

Sendo $u = \sum_{j=1}^n x_j \otimes y_j$ um elemento qualquer em $E \otimes F$, a *transposta* de u é definida por $u^t = \sum_{j=1}^n y_j \otimes x_j$.

Agora considere $A : E \times F \rightarrow F \otimes E$ dada por $A(x, y) = y \otimes x$. É fácil ver que A é uma aplicação bilinear e, portanto, existe um único operador linear $T_A : E \otimes F \rightarrow F \otimes E$ tal que $T_A(x \otimes y) = y \otimes x$. Logo, $T_A(u) = u^t$ qualquer que seja $u \in E \otimes F$. Tal operador fornece um isomorfismo entre $E \otimes F$ e $F \otimes E$.

Uma propriedade particularmente interessante dos tensores é que podemos enxergá-los sob pontos de vista distintos conforme à necessidade. Como já vimos, os tensores elementares foram definidos como funcionais lineares sobre $B(E, F)$. No entanto, podemos enxergá-los de formas diferentes; à saber, como formas bilineares ou aplicações lineares. Vejamos como isto pode ser feito.

Sejam $x \in E$ e $y \in F$. O operador $B_{x,y} : X^\# \times Y^\# \rightarrow \mathbb{K}$ dado por $B_{x,y}(\varphi, \psi) = \varphi(x)\psi(y)$ é uma forma bilinear. Logo, a função $(x, y) \mapsto B_{x,y}$ é uma aplicação bilinear entre os espaços $E \times F$ e $B(E, F)$. Desta forma, pelo Teorema 1.4, existe um único operador linear $L : E \otimes F \rightarrow B(E, F)$ tal que $L(x \otimes y) = B_{x,y}$. A ação de L num tensor qualquer $u = \sum_{j=1}^n x_j \otimes y_j$ de $E \otimes F$ é simplesmente $L(u) = \sum_{j=1}^n B_{x_j, y_j}$ com a soma usual de funções. É fácil mostrar que L é injetiva e, portanto, podemos enxergar $E \otimes F$ “dentro” do espaço $B(E, F)$, isto é, tensores podem ser visto como formas bilineares.

Por outro lado, dado $u = \sum_{j=1}^n x_j \otimes y_j$ em $E \otimes F$, consideremos as aplicações lineares $L_u : E^\# \rightarrow F$ e $R_u : F^\# \rightarrow E$ dadas por

$$L_u(\varphi) = \sum_{j=1}^n \varphi(x_j)y_j \text{ e } R_u(\psi) = \sum_{j=1}^n \psi(y_j)x_j.$$

Desta forma, as aplicações $u \mapsto L_u$ e $u \mapsto R_u$ são lineares e injetivas e permitem-nos enxergar $E \otimes F$ “dentro” dos espaços $L(E^\#; F)$ e $L(F^\#; E)$, isto é, podemos identificar tensores como aplicações lineares.

O leitor deve ter notado que todo o exposto acima diz respeito à estrutura algébrica do produto tensorial. A partir de agora, sendo os espaços envolvidos espaços de Banach, diversas estruturas topológicas podem ser introduzidas no produto tensorial por meio de normas (tensoriais). Um estudo profundo do tema pode ser encontrado em [33] e aqui apresentamos apenas o que nos é importante neste trabalho.

Definição 1.6. Seja $u \in E \otimes F$. Definimos a norma injetiva de u pondo

$$\varepsilon(u) := \sup \left\{ \left| \sum_{j=1}^n \varphi(x_j)\psi(y_j) \right| ; \varphi \in B_{E'}, \psi \in B_{F'} \right\}.$$

Para cada $u = \sum_{j=1}^n x_j \otimes y_j \in E \otimes F$, podemos definir $B_u : E' \times F' \rightarrow \mathbb{K}$ dado por $B_u(\varphi, \psi) = \sum_{j=1}^n \varphi(x_j)\psi(y_j)$ o qual é uma forma bilinear contínua. Desta forma, podemos enxergar a norma injetiva de u como a norma da forma bilinear B_u , ou seja, $\varepsilon(u) = \|B_u\|$.

Definição 1.7. Seja $u \in E \otimes F$. Definimos a norma projetiva de u pondo

$$\pi(u) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^n \|x_j\| \|y_j\|; u = \sum_{j=1}^n x_j \otimes y_j \right\}$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as representações possíveis de u .

Definição 1.8. Seja $\alpha : E \otimes F \rightarrow \mathbb{K}$ uma norma em $E \otimes F$. Dizemos que α é uma *norma tensorial* se:

(i) α é uma norma razoável, isto é,

R1) $\alpha(x \otimes y) \leq \|x\| \|y\|$, para todo $x \in E$, $y \in Y$;

R2) Para todo $\varphi \in E'$ e $\psi \in F'$, $\varphi \otimes \psi$ é um funcional linear e contínuo sobre $E \otimes F$ e $\|\varphi \otimes \psi\| \leq \|\varphi\| \|\psi\|$.

(ii) α é uniforme, ou seja, se $T \in \mathcal{L}(E; W)$ e $S \in \mathcal{L}(F; Z)$ então o operador linear $T \otimes S : E \otimes_\alpha F \rightarrow W \otimes_\alpha Z$ é contínuo e $\|T \otimes S\| \leq \|T\| \|S\|$.

(iii) α é finitamente gerada, isto é,

$$\alpha(u; E \otimes F) = \inf \{ \alpha(u; M \otimes N); (M, N) \in \mathfrak{F}(E) \times \mathfrak{F}(F) \}$$

onde $\mathfrak{F}(E)$ denota os subespaços de dimensão finita em E .

É claro que o conceito de norma tensorial não depende das normas injetiva e projetiva. No entanto, optamos por apresentá-las primeiro, pois podemos substituir as condições do item (a) na definição acima pela condição $\varepsilon \leq \alpha \leq \pi$ uma vez que tais condições são equivalentes (Ver [33, Proposition 6.1]). Tanto a norma ε quanto a norma π são normas tensoriais.

Seja $u \in E \otimes F$ e $1 \leq p \leq \infty$. As expressões

$$d_p(u) = \inf \left\{ \|(x_j)_{j=1}^n\|_{w,p*} \|(y_j)_{j=1}^n\|_p; u = \sum_{j=1}^n x_j \otimes y_j \right\}$$

e

$$g_p(u) = \left\{ \|(x_j)_{j=1}^n\|_p \|(y_j)_{j=1}^n\|_{w,p*}; u = \sum_{j=1}^n x_j \otimes y_j \right\},$$

onde os ínfimos são tomados sobre toda as representações de u , definem as chamadas *normas de Chevet-Saphar*. Estas são normas tensoriais e detalhes sobre sua construção podem ser obtidos em [33, Chapter 6].

Capítulo 2

Teoria Dual

Na teoria de Ideal de Operadores, um tipo especial de ideal são os ideais de operadores caracterizados por transformação de seqüências à valores vetoriais. Tais ideais passaram a ser amplamente estudados após os trabalhos de Grothendieck (em [21]). Agora, vamos apresentar a Teoria de Dualidade para ideais de operadores caracterizados por transformação de seqüências à valores vetoriais no ambiente de classes de seqüências, trabalho realizado por Botelho e Campos em [7].

2.1 Dual de uma classe de seqüências

Nosso objetivo é apresentar uma noção de dual de uma classe de seqüência o qual denotaremos por X^{dual} . É interessante e razoável que este novo objeto, X^{dual} , ainda seja uma classe de seqüências. Se faz necessário alguns conceitos e resultados auxiliares para essa tarefa.

Definição 2.1. Uma classe de seqüências é dita *esfericamente completa* se $(\lambda_j x_j)_{j=1}^{\infty} \in X(E)$ e $\|(\lambda_j x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{X(E)} = \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{X(E)}$ sempre que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in X(E)$ e $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, com $|\lambda_j| = 1$, para todo $j \in \mathbb{N}$.

São esfericamente completas todas as classes de seqüências do Exemplo 1.6. Vamos mostrar, por exemplo, o caso da classe de seqüências $\ell_p\langle\cdot\rangle$. Com efeito, seja $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p\langle E\rangle$ e $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, com $|\lambda_j| = 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$. As igualdades

$$\begin{aligned} \|(\lambda_j x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\ell_p\langle E\rangle} &= \sup_{(\varphi_j)_{j=1}^{\infty} \in B_{\ell_{p^*}^w(E')} } \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi_j(\lambda_j x_j)| = \sup_{(\varphi_j)_{j=1}^{\infty} \in B_{\ell_{p^*}^w(E')} } \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j \varphi_j(x_j)| \\ &= \sup_{(\varphi_j)_{j=1}^{\infty} \in B_{\ell_{p^*}^w(E')} } \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi_j(x_j)| = \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\ell_p\langle E\rangle} \end{aligned}$$

nos fornece que $(\lambda_j x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p\langle E\rangle$ e a igualdade de normas.

Lema 2.1. *Sejam X uma classe de seqüências esfericamente completa e $(x_j)_{j=1}^\infty \in E^\mathbb{N}$. Então, as seguintes sentenças são equivalentes:*

- (a) *A série $\sum_{j=1}^\infty \varphi_j(x_j)$ converge para toda $(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in X(E')$.*
- (b) *A série $\sum_{j=1}^\infty |\varphi_j(x_j)|$ converge para toda $(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in X(E')$.*

Neste caso,

$$\sup_{(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in B_{X(E')}} \left| \sum_{j=1}^\infty \varphi_j(x_j) \right| = \sup_{(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in B_{X(E')}} \sum_{j=1}^\infty |\varphi_j(x_j)|.$$

Demonstração. (b) $\Rightarrow$ (a) é imediato. Além disso, $\left| \sum_{j=1}^n \varphi_j(x_j) \right| \leq \sum_{j=1}^n |\varphi_j(x_j)|$ para todo $n \in \mathbb{N}$ a como as séries em questão convergem, temos

$$\left| \sum_{j=1}^\infty \varphi_j(x_j) \right| \leq \sum_{j=1}^\infty |\varphi_j(x_j)|$$

para toda $(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in X(E')$. Logo,

$$\sup_{(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in B_{X(E')}} \left| \sum_{j=1}^\infty \varphi_j(x_j) \right| \leq \sup_{(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in B_{X(E')}} \sum_{j=1}^\infty |\varphi_j(x_j)|.$$

(a) $\Rightarrow$ (b) Dividiremos a prova em dois casos:

- Caso 1: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Considere a seqüência $(\psi_j)_{j=1}^\infty$ dada por

$$\psi_j = \begin{cases} \varphi_j, & \text{se } \varphi_j(x_j) \geq 0 \\ -\varphi_j, & \text{se } \varphi_j(x_j) < 0 \end{cases}.$$

Assim, $(\psi_j)_{j=1}^\infty = (\lambda_j \varphi_j)_{j=1}^\infty$ onde $\lambda_j = 1$, se $\varphi_j(x_j) \geq 0$ ou $\lambda_j = -1$, caso contrário. Como X é esfericamente completa, segue que $(\psi_j)_{j=1}^\infty \in X(E')$ e

$$\sum_{j=1}^\infty |\varphi_j(x_j)| = \sum_{j=1}^\infty \psi_j(x_j) \text{ converge.}$$

- Caso 2: $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Neste caso, considere a seqüência $(\psi_j)_{j=1}^\infty$ dada por $\psi_j = e^{-i\theta_j} \varphi_j$ onde θ_j é o argumento principal do número complexo $\varphi_j(x_j)$. Como $|e^{-i\theta_j}| = 1$ e X é esfericamente completa, obtemos que $(\psi_j)_{j=1}^\infty \in X(E')$ e

$$\sum_{j=1}^\infty |\varphi_j(x_j)| = \sum_{j=1}^\infty \psi_j(x_j) \text{ converge.}$$

Por fim, em ambos os casos, se $(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in B_{X(E')}$ então $(\psi_j)_{j=1}^\infty \in B_{X(E')}$. Logo,

$$\sup_{(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in B_{X(E')}} \sum_{j=1}^\infty |\varphi_j(x_j)| = \sup_{(\psi_j)_{j=1}^\infty \in B_{X(E')}} \sum_{j=1}^\infty \psi_j(x_j) \leq \sup_{(\psi_j)_{j=1}^\infty \in B_{X(E')}} \left| \sum_{j=1}^\infty \psi_j(x_j) \right|$$

e obtemos a desigualdade contrária. $\square$

Para definirmos uma noção de dualidade na perspectiva de classes de sequências é razoável nos inspirarmos em dualidades conhecidas dos espaços de sequências como, por exemplo, para $\ell_p(E)$. Como sabemos, o espaço dual de $\ell_p(E)$ é $\ell_{p^*}(E')$ onde a ação de um funcional $\varphi = (\varphi_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{p^*}(E')$ em uma sequência $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p(E)$ é dada pela expressão de dualidade $\sum_{j=1}^\infty \varphi_j(x_j)$. Isto motiva a próxima definição.

Definição 2.2. O *dual* de uma classe de sequências X , denotado por X^{dual} , é uma regra que a cada espaço de Banach E associa o espaço

$$X^{\text{dual}}(E) := \left\{ (x_j)_{j=1}^\infty \in E^{\mathbb{N}}; \sum_{j=1}^\infty \varphi_j(x_j) \text{ converge para toda } (\varphi_j)_{j=1}^\infty \in X(E') \right\}.$$

Veja que $X^{\text{dual}}(E)$ é um subespaço vetorial de $E^{\mathbb{N}}$ com as operações usuais de sequências e que $c_{00}(E) \subset X^{\text{dual}}(E)$. Agora, nosso objetivo é encontrar condições para que X^{dual} seja uma classe de sequências. A proposição seguinte nos oferece uma norma para $X^{\text{dual}}(E)$.

Proposição 2.1. *Seja X uma classe de sequências esfericamente completa. Então:*

(a) *A expressão*

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{X^{\text{dual}}(E)} := \sup_{(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in B_{X(E')}} \sum_{j=1}^\infty |\varphi_j(x_j)| \quad (2.1)$$

define uma norma em $X^{\text{dual}}(E)$.

(b) $X^{\text{dual}}(E) \xhookrightarrow{1} \ell_\infty(E)$.

(c) *A norma em (a) torna $X^{\text{dual}}(E)$ um espaço de Banach.*

Demonstração. (a) Seja $x = (x_j)_{j=1}^\infty \in X^{\text{dual}}(E)$. Defina o operador linear

$$T_x : X(E') \longrightarrow \ell_1$$

$$(\varphi_j)_{j=1}^\infty \longmapsto (\varphi_j(x_j))_{j=1}^\infty.$$

A boa definição de T_x decorre da definição de X^{dual} e do fato de X ser esfericamente completa. Vamos utilizar o Teorema do Gráfico Fechado para mostrar que

T_x é contínua. Seja $(\varphi^k, T_x(\varphi^k))_{k=1}^\infty$ uma sequência em $G(T_x)$ tal que

$$(\varphi^k, T_x(\varphi^k)) \xrightarrow{k} ((\varphi_j)_{j=1}^\infty, (y_j)_{j=1}^\infty).$$

Assim, $\varphi^k \xrightarrow{k} (\varphi_j)_{j=1}^\infty$ e $T_x(\varphi^k) \xrightarrow{k} (y_j)_{j=1}^\infty$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, $\varphi^k = (\varphi_j^k)_{j=1}^\infty \in X(E')$ e, portanto,

$$\varphi_j^k \xrightarrow{k} \varphi_j \text{ e } \varphi_j^k(x_j) \xrightarrow{k} y_j$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Com isto, temos que $\varphi_j^k(x_j) \xrightarrow{k} \varphi_j(x_j)$ qualquer que seja $j \in \mathbb{N}$. Tomando $\varphi = (\varphi_j)_{j=1}^\infty$, temos $T_x(\varphi) = (\varphi_j(x_j))_{j=1}^\infty = (y_j)_{j=1}^\infty$ e o gráfico de T_x é fechado. A continuidade do operador T_x garante que o supremo em (2.1) é finito para cada $(x_j)_{j=1}^\infty \in X^{\text{dual}}(E)$.

Agora, vamos verificar que a expressão (2.1) define uma norma, de fato. Seja $(x_j)_{j=1}^\infty \in X^{\text{dual}}(E)$ tal que $\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{X^{\text{dual}}(E)} = 0$. Como $\|\varphi \cdot e_j\|_{X(E')} = \|\varphi\|$ para todo $j \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned} \|x_j\| &= \sup_{\varphi \in B'_E} |\varphi(x_j)| = \sup_{\varphi \cdot e_j \in B_{X(E')}} \sum_{k=1}^\infty |\varphi \cdot e_{j,k}(x_j)| \\ &\leq \sup_{(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in B_{X(E')}} \sum_{j=1}^\infty |\varphi_j(x_j)| \\ &= \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{X^{\text{dual}}(E)} = 0, \end{aligned}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$, onde $\varphi \cdot e_{j,k}$ é o k -ésimo termo da sequência $\varphi \cdot e_j$. Logo, $(x_j)_{j=1}^\infty$ é a sequência nula. As demais condições que fazem com que a expressão (2.1) seja uma norma são fáceis de verificar.

(b) Observe que a desigualdade anterior nos diz que se $(x_j)_{j=1}^\infty \in X^{\text{dual}}(E)$ é uma sequência qualquer, então $\|x_j\| \leq \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{X^{\text{dual}}(E)}$ qualquer que seja $j \in \mathbb{N}$. Tomando o supremo sobre $j \in \mathbb{N}$, segue que

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_\infty \leq \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{X^{\text{dual}}(E)}.$$

(c) Se $(x^k)_{k=1}^\infty$ é uma sequência de Cauchy em $X^{\text{dual}}(E)$, com $x^k = (x_j^k)_{j=1}^\infty$ para cada $k \in \mathbb{N}$, então pelo item (b) as sequências $(x_j^k)_{k=1}^\infty$ são de Cauchy em E , para todo $j \in \mathbb{N}$. Como o espaço E é Banach, segue que $x_j^k \xrightarrow{k} x_j$, para cada $j \in \mathbb{N}$. Não é difícil mostrar que $x^k \rightarrow (x_j)_{j=1}^\infty \in X^{\text{dual}}(E)$, convergência esta na norma $\|\cdot\|_{X^{\text{dual}}(E)}$. $\square$

Pelo que já foi exposto nesta seção, para que X^{dual} seja uma classe de sequências falta-nos verificar que $\|x \cdot e_j\|_{X^{\text{dual}}(E)} = \|x\|$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Para tanto, sejam $x \in E$,

$j \in \mathbb{N}$ e considerando as seqüências $(\varphi_k)_{k=1}^\infty = \varphi \cdot e_j$ e $(x_k)_{k=1}^\infty = x \cdot e_j$, temos

$$\|x\| = \sup_{\varphi \in B_{E'}} |\varphi(x)| = \sup_{(\varphi_k)_{k=1}^\infty \in B_{X(E')}} \sum_{k=1}^\infty |\varphi_k(x_k)| \leq \|x \cdot e_j\|_{X^{\text{dual}}(E)}. \quad (2.2)$$

Por outro lado, considerando $(x_k)_{k=1}^\infty = x \cdot e_j$ e $(\varphi_k)_{k=1}^\infty$ seqüências quaisquer em $B_{X(E')}$, temos

$$\begin{aligned} \|x \cdot e_j\|_{X^{\text{dual}}(E)} &= \sup_{(\varphi_k)_{k=1}^\infty \in B_{X(E')}} \sum_{k=1}^\infty |\varphi_k(x_k)| \leq \sup_{(\varphi_k)_{k=1}^\infty \in B_{X(E')}} \sum_{k=1}^\infty \|\varphi_k\| \|x_k\| \\ &= \sup_{(\varphi_k)_{k=1}^\infty \in B_{X(E')}} \|\varphi_j\| \|x_j\| = \|x\|, \end{aligned}$$

onde na última igualdade estamos usando que $X^{\text{dual}}(E') \xrightarrow{1} \ell_\infty(E')$.

Assim, temos o

Teorema 2.1. *Se X é uma classe de seqüências esfericamente completa, então X^{dual} é uma classe de seqüências.*

Chamamos a atenção do leitor para o fato de que dada uma classe de seqüências esfericamente completa X , mostrar que uma seqüência $(x_j)_{j=1}^\infty \in E^\mathbb{N}$ pertence a $X^{\text{dual}}(E)$ é equivalente a mostrar, pelo Lema 2.1, que a série $\sum_{j=1}^\infty |\varphi_j(x_j)|$ converge para toda $(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in X(E')$.

Exemplo 2.1. Aqui apresentamos alguns exemplos de classes duais.

(a) Como $\ell_1(\cdot)$ é esfericamente completa, então $\ell_1^{\text{dual}}(\cdot)$ é uma classe de seqüência e $\ell_1^{\text{dual}}(\cdot) = \ell_\infty(\cdot)$. Com efeito, seja E um espaço de Banach qualquer e $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_1^{\text{dual}}(E)$. Como $\varphi \cdot e_j \in \ell_1(E')$ e $\|\varphi \cdot e_j\|_{\ell_1(E')} = \|\varphi\|$, temos

$$\|x_j\| \leq \sup_{\varphi \in B_{E'}} |\varphi(x_j)| \leq \sup_{(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_1(E')}} \sum_{j=1}^\infty |\varphi_j(x_j)| = \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{\ell_1^{\text{dual}}(E)}.$$

Logo, $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_\infty(E)$ e $\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_\infty \leq \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{\ell_1^{\text{dual}}(E)}$. Por outro lado, seja $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_\infty(E)$. Dado $(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in \ell_1(E')$, segue que

$$\sum_{j=1}^\infty |\varphi_j(x_j)| \leq \sum_{j=1}^\infty \|\varphi_j\| \|x_j\| \leq \|(\varphi_j)_{j=1}^\infty\|_1 \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_\infty,$$

o que implica em $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_1^{\text{dual}}(E)$ e $\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{\ell_1^{\text{dual}}(E)} \leq \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_\infty$.

(b) O dual do espaço $\ell_\infty(E)$ não possui uma representação, entretanto, aqui no ambiente de classes de seqüências, vale $\ell_\infty^{\text{dual}}(\cdot) = \ell_1(\cdot)$. Com efeito, sejam E um espaço de Banach qualquer e $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_\infty^{\text{dual}}(E)$. Para cada $j \in \mathbb{N}$, existe $\varphi_j \in E'$ tal que

$\varphi_j(x_j) = \|x_j\|$ e $\|\varphi_j\| = 1$. Sendo assim, $(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in \ell_\infty(E')$ e, portanto,

$$\sum_{j=1}^\infty \|x_j\| = \sum_{j=1}^\infty \varphi_j(x_j) < +\infty. \quad (2.3)$$

Logo, $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_1(E)$. Por outro lado, seja $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_1(E)$ e $(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in \ell_\infty(E')$ qualquer. Temos

$$\sum_{j=1}^\infty |\varphi_j(x_j)| \leq \sum_{j=1}^\infty \|\varphi_j\| \|x_j\| \leq \|(\varphi_j)_{j=1}^\infty\|_\infty \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{\ell_1(E)} < +\infty \quad (2.4)$$

e portanto $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_\infty^{\text{dual}}(E)$. De (2.3) e (2.4) obtemos $\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_1 = \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{\ell_\infty^{\text{dual}}(E)}$.

(c) Segue direto da definição que $(\ell_p^w)^{\text{dual}}(\cdot) = \ell_{p^*}(\cdot)$.

Uma fato que o leitor talvez esteja imaginando é a igualdade $(\ell_p)^{\text{dual}}(\cdot) = \ell_{p^*}(\cdot)$, para $1 < p < \infty$. De fato, esta igualdade é verdadeira e será demonstrada mais à frente após enunciarmos e demonstrarmos o Teorema de dualidade.

Proposição 2.2. *Seja X uma classe de sequência esfericamente completa. Então,*

(a) X^{dual} é esfericamente completa e finitamente determinada.

(b) Se X é linearmente estável, então X^{dual} também o é.

Demonstração. (a) Seja $(x_j)_{j=1}^\infty \in E^\mathbb{N}$. A igualdade

$$\begin{aligned} \sup_k \|(x_j)_{j=1}^k\|_{X^{\text{dual}}(E)} &= \sup_k \sup_{(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in B_{X(E')}} \sum_{j=1}^k |\varphi_j(x_j)| = \sup_{(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in B_{X(E')}} \sup_k \sum_{j=1}^k |\varphi_j(x_j)| \\ &= \sup_{(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in B_{X(E')}} \sum_{j=1}^\infty |\varphi_j(x_j)| = \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{X^{\text{dual}}(E)} \end{aligned}$$

implica em X^{dual} é finitamente determinada.

Agora, vamos provar que X^{dual} é esfericamente completa. Sejam $(x_j)_{j=1}^\infty \in X^{\text{dual}}(E)$ e $(\lambda_j)_{j=1}^\infty \in \mathbb{K}^\mathbb{N}$ tal que $|\lambda_j| = 1$, para todo $j \in \mathbb{N}$. A igualdade

$$\begin{aligned} \|(\lambda_j x_j)_{j=1}^\infty\|_{X^{\text{dual}}(E)} &= \sup_{(\varphi)_{j=1}^\infty \in B_{X(E')}} \sum_{j=1}^\infty |\varphi_j(\lambda_j x_j)| = \sup_{(\varphi)_{j=1}^\infty \in B_{X(E')}} \sum_{j=1}^\infty |\lambda_j \varphi_j(x_j)| \\ &= \sup_{(\varphi)_{j=1}^\infty \in B_{X(E')}} \sum_{j=1}^\infty |\lambda_j| |\varphi_j(x_j)| = \sup_{(\varphi)_{j=1}^\infty \in B_{X(E')}} \sum_{j=1}^\infty |\varphi_j(x_j)| \\ &= \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{X^{\text{dual}}(E)} \end{aligned}$$

nos diz que X^{dual} é esfericamente completa.

(b) Sejam $T \in \mathcal{L}(E; F)$ e $(x_j)_{j=1}^\infty \in X^{\text{dual}}(E)$. Como $T' \in \mathcal{L}(F'; E')$ então, para toda sequência $(\psi_j)_{j=1}^\infty \in X(F')$, tem-se $(T'(\varphi_j))_{j=1}^\infty \in X(E')$ devido à estabilidade linear de X . Desta forma, $(\psi_j \circ T)_{j=1}^\infty = (T'(\psi_j))_{j=1}^\infty \in X(E')$ sempre que $(\psi_j)_{j=1}^\infty \in X(F')$. Logo,

$$\sum_{j=1}^\infty |\psi_j(T(x_j))| = \sum_{j=1}^\infty |\psi \circ T(x_j)| < \infty$$

e $(T(x_j))_{j=1}^\infty \in X^{\text{dual}}(F)$. Isto significa que

$$\begin{aligned} \widehat{T} : X^{\text{dual}}(E) &\longrightarrow X^{\text{dual}}(F) \\ (x_j)_{j=1}^\infty &\longmapsto (T(x_j))_{j=1}^\infty \end{aligned}$$

é um operador linear bem definido. Para a continuidade de $\widehat{T}$ observe que se $(x_j)_{j=1}^\infty \in X^{\text{dual}}(E)$, segue que

$$\begin{aligned} \|(T(x_j))_{j=1}^\infty\|_{X^{\text{dual}}(F)} &= \sup_{(\psi_j)_{j=1}^\infty \in B_{X(F')}} \sum_{j=1}^\infty |\psi_j(T(x_j))| \\ &= \|T\| \sup_{(\psi_j)_{j=1}^\infty \in B_{X(F')}} \sum_{j=1}^\infty \left| \left(\psi_j \circ \frac{T}{\|T\|} \right) (x_j) \right|. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Observe que $\left(\psi_j \circ \frac{T}{\|T\|} \right)_{j=1}^\infty \in B_{X(E')}$ sempre que $(\psi_j)_{j=1}^\infty \in B_{X(F')}$. De fato, se $(\psi_j)_{j=1}^\infty \in B_{X(F')}$, então

$$\left\| \left(\psi_j \circ \frac{T}{\|T\|} \right) \right\|_{X(E')} = \frac{1}{\|T\|} \|(T'(\varphi_j))_{j=1}^\infty\|_{X(E')} \leq \frac{1}{\|T\|} \|\widehat{T}'\| \|(\psi_j)_{j=1}^\infty\|_{X(F')} \leq 1,$$

uma vez que $\|\widehat{T}'\| = \|T'\| = \|T\|$. Disto e por (2.5), segue que

$$\|(T(x_j))_{j=1}^\infty\|_{X^{\text{dual}}(F)} \leq \|T\| \sup_{(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in B_{X(E')}} \sum_{j=1}^\infty |\varphi_j(x_j)| = \|T\| \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{X^{\text{dual}}(E)}$$

donde $\|\widehat{T}\| \leq \|T\|$. Por outro lado, por um argumento similar feito em (2.2), temos

$$\begin{aligned} \|\widehat{T}\| &= \sup_{(x_j)_{j=1}^\infty \in B_{X^{\text{dual}}(E)}} \left\| \widehat{T}((x_j)_{j=1}^\infty) \right\|_{X^{\text{dual}}(F)} = \sup_{(x_j)_{j=1}^\infty \in B_{X^{\text{dual}}(E)}} \|(T(x_j))_{j=1}^\infty\|_{X^{\text{dual}}(F)} \\ &= \sup_{(x_j)_{j=1}^\infty \in B_{X^{\text{dual}}(E)}} \sup_{(\psi_j)_{j=1}^\infty \in B_{X(F')}} \sum_{j=1}^\infty |\psi_j(T(x_j))| \geq \sup_{x \in B_E} \sup_{\psi \in B_{F'}} |\psi(T(x))| = \|T\|. \end{aligned}$$

Portanto, X^{dual} é linearmente estável. $\square$

Exemplo 2.2. O Teorema 2.1 nos permite obter novas classes de sequências: pondo, para cada E Banach, $\ell_p^{\text{mid}}\langle E \rangle := (\ell_p^{\text{mid}})^{\text{dual}}(E)$, obtemos que $\ell_p^{\text{mid}}\langle \cdot \rangle$ é uma classe de

seqüências uma vez que $\ell_{p^*}^{\text{mid}}(\cdot)$ é esfericamente completa (ver [10, pág. 6]). Ainda mais, $\ell_p^{\text{mid}}(\cdot)$ é finitamente determinada, esfericamente completa e linearmente estável, pela Proposição 2.2.

Proposição 2.3. *Seja $1 < p < \infty$. Então, $\ell_p\langle E \rangle \xrightarrow{1} \ell_p^{\text{mid}}\langle E \rangle \xrightarrow{1} \ell_p(E)$.*

Demonstração. Primeiramente, vamos mostrar que $\ell_p\langle E \rangle \xrightarrow{1} \ell_p^{\text{mid}}\langle E \rangle$. Seja $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p\langle E \rangle$. Dessa forma, como $\ell_p^{\text{mid}}(E') \xrightarrow{1} \ell_{p^*}^w(E')$, temos

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{\ell_p^{\text{mid}}\langle E \rangle} = \sup_{(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_{p^*}^{\text{mid}}(E')}} \sum_{j=1}^\infty |\varphi_j(x_j)| \leq \sup_{(\psi_j)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_{p^*}^w(E')}} \sum_{j=1}^\infty |\psi_j(x_j)| \leq \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{\ell_p\langle E \rangle}.$$

Para mostrar $\ell_p^{\text{mid}}\langle E \rangle \xrightarrow{1} \ell_p(E)$, seja $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^{\text{mid}}\langle E \rangle$. Como $\ell_{p^*}(E') \xrightarrow{1} \ell_{p^*}^{\text{mid}}(E')$ segue que

$$\begin{aligned} \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_p &= \sup_{\varphi \in B_{(\ell_p(E))'}} |\varphi((x_j)_{j=1}^\infty)| = \sup_{(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_{p^*}(E')}} \left| \sum_{j=1}^\infty \varphi_j(x_j) \right| \\ &\leq \sup_{(\psi_j)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_{p^*}^{\text{mid}}(E')}} \sum_{j=1}^\infty |\psi_j(x_j)| = \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{\ell_p^{\text{mid}}\langle E \rangle}. \end{aligned}$$

□

2.2 Dualidade

Nesta seção apresentaremos as condições com as quais pode-se obter a dualidade $X^{\text{dual}}(E') = (X(E))'$ pelo isomorfismo natural para dualidade de espaços de seqüências. Ficará, assim, clara a terminologia X^{dual} e a natureza esperada dessa nova classe de seqüências.

Algumas preparações são necessárias para apresentar os resultados desta seção.

Definição 2.3. Dizemos que uma classe de seqüência X é *finitamente injetiva* se

$$\|(x_j)_{j=1}^k\|_{X(E)} \leq \|(i(x_j))_{j=1}^k\|_{X(F)}$$

sempre que $i : E \rightarrow F$ é um operador linear, contínuo e injetivo (injeção métrica), $k \in \mathbb{N}$ e $x_1, \dots, x_k \in E$.

Exemplo 2.3. A classe $\ell_p^w(\cdot)$ é finitamente injetiva. Com efeito, sejam $k \in \mathbb{N}$,

$x_1, \dots, x_k$ e $i \in \mathcal{L}(E; F)$ uma injeção métrica. Então,

$$\begin{aligned} \|(x_j)_{j=1}^k\|_{\ell_p^w(E)} &= \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^k |\varphi(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{j=1}^k \|x_j\|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{j=1}^k \|i(x_j)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_{\psi \in B_{F'}} \left(\sum_{j=1}^k |\psi(i(x_j))|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|(i(x_j))_{j=1}^k\|_{\ell_p^w(F)}. \end{aligned}$$

Observe que, neste caso, ocorreu a igualdade. Na verdade, se uma classe de sequência é finitamente injetiva e linearmente estável, então sempre ocorre a igualdade. De fato, tem-se

$$\|(x_j)_{j=1}^k\|_{X(E)} \leq \|(i(x_j))_{j=1}^k\|_{X(F)} = \left\| \widehat{i}((x_j)_{j=1}^k) \right\|_{X(F)} \leq \|(x_j)_{j=1}^k\|_{X(E)}.$$

Antes de enunciar o teorema principal da seção, apresentaremos um lema técnico que será útil na demonstração do teorema.

Lema 2.2. *Sejam $J : A \rightarrow B$ e $I : B \rightarrow A$ funções entre espaços vetoriais tais que J é linear e injetiva e $I|_{J(A)} = J^{-1}$. Então J é sobrejetiva se, e somente se, I é injetiva.*

Demonstração. Suponha J sobrejetiva. Como J é injetiva, por hipótese, segue que J é uma bijeção. Logo, $J(A) = B$ e $I = J^{-1}$ também é bijeção. Em particular, I é injetiva.

Reciprocamente, considere I injetiva e seja $y \in B$. Daí, $I(y) = a \in A$ e como $I|_{J(A)} = J^{-1}$, temos $I(J(a)) = a = I(y)$. Pela injetividade de I , obtemos $y = J(a)$. Portanto, J é sobrejetiva. $\square$

Agora estamos em condições de estabelecer em quais condições $X(E)'$ é isomorfo a $X^{\text{dual}}(E')$. Vejamos isso no seguinte teorema.

Teorema 2.2. *Seja E um espaço de Banach e X uma classe de sequências linearmente estável, finitamente dominada e esfericamente completa. Então*

(a) *A função*

$$J : X^{\text{dual}}(E') \rightarrow X(E)'$$

dada por $J((\varphi_j)_{j=1}^\infty)((x_j)_{j=1}^\infty) = \sum_{j=1}^\infty \varphi_j(x_j)$ é um operador linear contínuo e injetivo.

Além disso, se X é finitamente injetiva, tem-se:

(b) *J é um isomorfismo isométrico de $X^{\text{dual}}(E')$ em um subespaço complementado de $X(E)'$.*

(c) $J : X^{\text{dual}}(E') \rightarrow X(E)'$ é um isomorfismo isométrico se, e somente se, $c_{00}(E)$ é denso em $X(E)$.

Demonstração. (a) Inicialmente, vamos provar que para cada $(\varphi_j)_{j=1}^{\infty} \in X^{\text{dual}}(E')$ e $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in X(E)$ a série $\sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(x_j)$ converge. Sendo X linearmente estável e considerando a imersão canônica $J_E : E \rightarrow E''$, temos $(J_E(x_j))_{j=1}^{\infty} \in X(E'')$ sempre que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in X(E)$. Logo,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(x_j) = \sum_{j=1}^{\infty} J_E(x_j)(\varphi_j) \text{ converge.}$$

Assim, $J((\varphi_j)_{j=1}^{\infty}) : X(E) \rightarrow \mathbb{K}$ está bem definido para cada $(\varphi_j)_{j=1}^{\infty} \in X^{\text{dual}}(E')$. É evidente que $J((\varphi_j)_{j=1}^{\infty})$ é linear. Vejamos a sua continuidade. Temos,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^n \varphi_j(x_j) \right| &\leq \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{X(E)} \sum_{j=1}^n \left| \varphi_j \left(\frac{x_j}{\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{X(E)}} \right) \right| \\ &\leq \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{X(E)} \sup_{(y_j)_{j=1}^{\infty} \in B_{X(E)}} \sum_{j=1}^n |\varphi_j(y_j)| \\ &= \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{X(E)} \sup_{(y_j)_{j=1}^{\infty} \in B_{X(E)}} \sum_{j=1}^n |J_E(y_j)(\varphi_j)| \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Como J_E é uma isometria e X é linearmente estável, segue que $\|\widehat{J_E}\| = \|J_E\| \leq 1$ e, portanto, $(J_E(y_j))_{j=1}^{\infty} \in B_{X(E'')}$ sempre que $(y_j)_{j=1}^{\infty} \in B_{X(E)}$. Logo,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^n \varphi_j(x_j) \right| &\leq \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{X(E)} \sup_{(y_j)_{j=1}^{\infty} \in B_{X(E)}} \sum_{j=1}^n |J_E(y_j)(\varphi_j)| \\ &\leq \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{X(E)} \sup_{(\psi_j)_{j=1}^{\infty} \in B_{X(E'')}} \sum_{j=1}^n |\psi_j(\varphi_j)| \\ &= \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{X(E)} \|(\varphi_j)_{j=1}^n\|_{X^{\text{dual}}(E')} \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Sendo X esfericamente completa, pela Proposição 2.2, X^{dual} é finitamente determinada. Logo,

$$\left| \sum_{j=1}^n \varphi_j(x_j) \right| \leq \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{X(E)} \sup_n \|(\varphi_j)_{j=1}^n\|_{X^{\text{dual}}(E')} = \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{X(E)} \|(\varphi_j)_{j=1}^{\infty}\|_{X^{\text{dual}}(E')}$$

e fazendo $n \rightarrow \infty$ segue que

$$|J((\varphi_j)_{j=1}^{\infty})((x_j)_{j=1}^{\infty})| \leq \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{X(E)} \|(\varphi_j)_{j=1}^{\infty}\|_{X^{\text{dual}}(E')}. \quad (2.6)$$

Concluimos que $J((\varphi_j)_{j=1}^\infty) \in X(E)'$ e J está bem definido. A desigualdade (2.6) nos fornece

$$\|J((\varphi_j)_{j=1}^\infty)\| \leq \|(\varphi_j)_{j=1}^\infty\|_{X^{\text{dual}}(E')}.$$

Portanto, J é um operador linear (fácil) e contínuo com $\|J\| \leq 1$.

Vamos provar a injetividade de J . Seja $(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in X^{\text{dual}}(E')$ tal que $J((\varphi_j)_{j=1}^\infty) = 0$. Sendo assim, $J((\varphi_j)_{j=1}^\infty)((x_j)_{j=1}^\infty) = 0$ para toda $(x_j)_{j=1}^\infty \in X(E)$ e, em particular, $J((\varphi_j)_{j=1}^\infty)(x \cdot e_j) = \varphi_j(x) = 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$ e $x \in E$. Logo, $\varphi_j = 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

(b) Consideremos $I_j : E \rightarrow X(E)$ dado por $x \mapsto x \cdot e_j$ e $I : X(E)' \rightarrow X^{\text{dual}}(E')$ dado por $\varphi \mapsto (\varphi \circ I_j)_{j=1}^\infty$. Vamos provar que I está bem definido. Para tanto, sejam $(\psi_j)_{j=1}^\infty \in X(E'')$, $n \in \mathbb{N}$, $M = [\psi_1, \dots, \psi_n]$, $N = [\varphi \circ I_1, \dots, \varphi \circ I_n]$ e $\text{id}_{E''}|_M \in \mathcal{L}(M; E'')$. Pelo Teorema 1.2, para todo $\varepsilon > 0$ existe $S \in \mathcal{L}(M; E)$ tal que

$$\|S\| \leq (1 + \varepsilon)\|\text{id}_{E''}\| = 1 + \varepsilon \quad \text{e} \quad \psi_j(\varphi \circ I_j) = \varphi \circ I_j(S(\psi_j))$$

para todo $j = 1, \dots, n$. Sendo $\lambda_j = e^{-i\theta_j}$ onde θ_j é o argumento principal do número complexo $\varphi \circ I_j(S(\psi_j))$, temos

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n |\psi_j(\varphi \circ I_j)| &= \sum_{j=1}^n \varphi \circ I_j(S(\psi_j))\lambda_j = \sum_{j=1}^n \varphi \circ I_j(S(\lambda_j\psi_j)) \\ &= \sum_{j=1}^n \varphi(S(\lambda_j\psi_j) \cdot e_j) = \varphi((S(\lambda_j\psi_j))_{j=1}^n). \end{aligned}$$

Da continuidade de φ e pelo fato de X ser linearmente estável, obtemos

$$|\varphi((S(\lambda_j\psi_j))_{j=1}^n)| \leq \|\varphi\| \|(S(\lambda_j\psi_j))_{j=1}^n\|_{X(E)} \leq \|\varphi\| \|S\| \|(\lambda_j\psi_j)_{j=1}^n\|_{X(M)}$$

e daí

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n |\psi_j(\varphi \circ I_j)| &= \varphi((S(\lambda_j\psi_j))_{j=1}^n) \leq \|\varphi\| \|S\| \|(\lambda_j\psi_j)_{j=1}^n\|_{X(M)} \\ &\leq \|\varphi\| (1 + \varepsilon) \|(\lambda_j\psi_j)_{j=1}^n\|_{X(M)}. \end{aligned}$$

Considerando o operador inclusão de M em E'' e como X é finitamente injetiva, temos

$$\sum_{j=1}^n |\psi_j(\varphi \circ I_j)| \leq \|\varphi\| (1 + \varepsilon) \|(\lambda_j\psi_j)_{j=1}^n\|_{X(M)} = \|\varphi\| (1 + \varepsilon) \|(\lambda_j\psi_j)_{j=1}^n\|_{X(E'')}$$

e sendo X finitamente dominada obtemos

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\psi_j(\varphi \circ I_j)| \leq \|\varphi\|(1 + \varepsilon) \|(\lambda_j \psi_j)_{j=1}^{\infty}\|_{X(E'')}. \quad (2.7)$$

Como X é esfericamente completa então $\|(\lambda_j \psi_j)_{j=1}^{\infty}\|_{X(E'')} = \|(\psi_j)_{j=1}^{\infty}\|_{X(E'')}$ e fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$ em (2.7), obtemos

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\psi_j(\varphi \circ I_j)| \leq \|\varphi\| \|(\psi_j)_{j=1}^{\infty}\|_{X(E'')}.$$

Logo, I está bem definida e a desigualdade acima nos dá

$$\|I(\varphi)\|_{X^{\text{dual}}(E')} \leq \|\varphi\|.$$

Portanto, I é contínua com $\|I\| \leq 1$.

Afirmção: $I \circ J = id_{X^{\text{dual}}(E')}$ e $J \circ I = id_{J(X^{\text{dual}}(E'))}$

De fato, seja $(\varphi_j)_{j=1}^{\infty} \in X^{\text{dual}}(E')$. Para cada $j \in \mathbb{N}$, temos

$$J((\varphi_j)_{j=1}^{\infty}) \circ I_j(x) = J((\varphi_j)_{j=1}^{\infty})(x \cdot e_j) = \varphi_j(x)$$

para todo $x \in E$. Logo,

$$(I \circ J)((\varphi_j)_{j=1}^{\infty}) = I(J((\varphi_j)_{j=1}^{\infty})) = (J((\varphi_j)_{j=1}^{\infty}) \circ I_j)_{j=1}^{\infty} = (\varphi_j)_{j=1}^{\infty}$$

qualquer que seja $(\varphi_j)_{j=1}^{\infty} \in X^{\text{dual}}(E')$. Agora, se $J((\varphi_j)_{j=1}^{\infty}) \in J(X^{\text{dual}}(E'))$, temos

$$J \circ I(J((\varphi_j)_{j=1}^{\infty})) = J(I \circ J((\varphi_j)_{j=1}^{\infty})) = J((\varphi_j)_{j=1}^{\infty}).$$

Concluindo, assim, a afirmação.

Isto implica que $X^{\text{dual}}(E')$ e $J(X^{\text{dual}}(E'))$ são isomorfos. Além disso, $I|_{J(X^{\text{dual}}(E'))}$ é uma isometria (portanto, J também é). Com efeito, dado $\varphi \in J(X^{\text{dual}}(E'))$ temos

$$\|\varphi\| = \|J \circ I(\varphi)\| \leq \|I(\varphi)\|_{X^{\text{dual}}(E')} \leq \|\varphi\|.$$

Vamos provar que $J(X^{\text{dual}}(E'))$ é um subespaço complementado de $X(E)'$. Definamos $P : X(E)' \rightarrow X(E)'$ dado por $P(\varphi) = J \circ I(\varphi)$. É claro que P é linear e contínua uma vez que J e I são lineares e contínuas. Note que $P(X(E)') = J(X^{\text{dual}}(E'))$ e $P \circ P = P$. Pela Proposição 1.5, $J(X^{\text{dual}}(E'))$ é um subespaço complementado de $X(E)'$.

(c) Vamos começar com a seguinte

Afirmção: $I : X(E)' \rightarrow X^{\text{dual}}(E')$ é injetiva se, e somente se, $c_{00}(E)$ é denso em $X(E)$.

De fato, suponha I injetiva, tome $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in X(E)$ e seja $\varphi \in X(E)'$ tal que $\varphi|_{c_{00}(E)} = 0$. Assim, $\varphi(x \cdot e_j) = 0$ para todos $j \in \mathbb{N}$ e $x \in E$ e, portanto, $\varphi \circ I_j = 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Dessa forma, tem-se $I(\varphi) = (\varphi \circ I_j)_{j=1}^{\infty} = 0$ e, pela injetividade de I , segue que $\varphi = 0$. Isto implica que o único funcional em $X(E)'$ que se anula em $c_{00}(E)$ é o funcional nulo. Logo, pela Proposição 1.4, temos que $c_{00}(E)$ é denso em $X(E)$. Reciprocamente, supondo $c_{00}(E)$ denso em $X(E)$ e considerando $\varphi \in X(E)'$ tal que $I(\varphi) = 0$, temos $(\varphi \circ I_j)_{j=1}^{\infty} = 0$. Logo, $\varphi \circ I_j(x) = 0$, isto é, $\varphi(x \cdot e_j) = 0$ qualquer que seja $x \in E$ e $j \in \mathbb{N}$. Dessa forma, dado $(x_j)_{j=1}^k \in c_{00}(E)$ segue que

$$\varphi((x_j)_{j=1}^k) = \varphi\left(\sum_{j=1}^k x_j \cdot e_j\right) = \sum_{j=1}^k \varphi(x_j \cdot e_j) = 0.$$

Portanto, $\varphi|_{c_{00}(E)} = 0$ e como $c_{00}(E)$ é denso em $X(E)$, obtemos $\varphi = 0$ e a afirmação está provada.

Agora, suponha que $c_{00}(E)$ é denso em $X(E)$. Observe que $I|_{J(X^{\text{dual}}(E'))} = J^{-1}$ e I é injetiva. Pelo Lema 2.2, J é sobrejetiva e, portanto, J é um isomorfismo. Reciprocamente, considere J um isomorfismo. Em particular, J é sobrejetiva. Dado $\varphi \in X(E)'$ não nulo existe uma única sequência $(\varphi_j)_{j=1}^{\infty} \in X^{\text{dual}}(E')$ (também não nula) tal que $J((\varphi_j)_{j=1}^{\infty}) = \varphi$. Logo, $\varphi_{j_0} \neq 0$ para algum $j_0 \in \mathbb{N}$ e, portanto, existe $x_{j_0} \in E$ tal que $\varphi_{j_0}(x_{j_0}) \neq 0$. Sendo assim,

$$\varphi(x_{j_0} \cdot e_{j_0}) = J((\varphi_j)_{j=1}^{\infty})(x_{j_0} \cdot e_{j_0}) = \varphi_{j_0}(x_{j_0}) \neq 0.$$

Isto significa que $\varphi|_{c_{00}(E)} \neq 0$ e, portanto, $c_{00}(E)$ é denso em $X(E)$. □

Exemplo 2.4. (a) Seja $1 < p < \infty$. Já vimos que $\ell_p(\cdot)$ satisfaz as condições do Teorema 2.2. Além disso, $c_{00}(E)$ é denso em $\ell_p(E)$, pois dado $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(E)$, temos

$$\|(x_j)_{j=1}^{\infty} - (x_j)_{j=1}^k\|_p = \|(x_j)_{j=k+1}^{\infty}\|_p = \left(\sum_{j=k+1}^{\infty} \|x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Do Teorema 2.2, segue que

$$\ell_p^{\text{dual}}(E') = (\ell_p(E))'$$

de forma isométrica. Adicionando-se o que já é bem conhecido da dualidade de $\ell_p(E)$, temos

$$\ell_p^{\text{dual}}(E') = (\ell_p(E))' = \ell_{p^*}(E'),$$

isto é, a igualdade $\ell_p^{\text{dual}}(\cdot) = \ell_{p^*}(\cdot)$ fica provada apenas para os espaços duais. Agora olhando separadamente as igualdades acima e ajustando os parâmetros p e p^* , temos

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{p^*} = \sup_{(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_p(E')}} \sum_{j=1}^\infty |\varphi_j(x_j)| = \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{\ell_p^{\text{dual}}(E)}.$$

Isto é o que fizemos acima implica em $\ell_p^{\text{dual}}(\cdot) = \ell_{p^*}(\cdot)$.

(b) Observe que $\ell_1(\cdot)$ satisfaz as condições do Teorema 2.2 e $c_{00}(E)$ é denso em $\ell_1(E)$. Portanto, $\ell_1^{\text{dual}}(E') = (\ell_1(E))' = \ell_\infty(E')$ de forma isométrica, recuperando a igualdade (já conhecida) para os espaços duais. Pelo Exemplo 2.1 (a), a igualdade vale para todo E Banach.

c) Se $1 < p < \infty$ segue que $\ell_p^u(\cdot)$ satisfaz as condições do Teorema 2.2. Além disso, $c_{00}(E)$ é denso em $\ell_p^u(E)$, pois dado $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^u(E)$, segue que

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty - (x_j)_{j=1}^k\|_{w,p} = \|(x_j)_{j=k+1}^\infty\|_{w,p} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Logo, pelo Teorema 2.2, temos $(\ell_p^u)^{\text{dual}}(E') = (\ell_p^u(E))'$ isometricamente. Tendo em vista [14, Proposition 6.], podemos adicionar à igualdade acima a igualdade

$$(\ell_p^u)^{\text{dual}}(E') = (\ell_p^u(E))' = \ell_{p^*}(E')$$

e, por argumento semelhante ao desenvolvido no item a), segue que $(\ell_p^u)^{\text{dual}}(\cdot) = \ell_{p^*}(\cdot)$.

Uma outra aplicabilidade interessante acerca do Teorema 2.2 (b) é a possibilidade de encontrar subespaços complementados em duais de espaços de sequências. Considere $X = \ell_p^w(\cdot)$. Sabemos que $c_{00}(E)$ não é denso em $\ell_p^w(E)$ já que $c_{00}(E)$ é denso em $\ell_p^u(E)$ e este está contido estritamente em $\ell_p^w(E)$. Logo, $(\ell_p^w)^{\text{dual}}(E')$ é um subespaço complementado em $(\ell_p^w(E))'$.

Capítulo 3

Adjuntos e Bi-adjuntos

Neste capítulo, nosso objetivo é obter informações sobre o adjunto de um operador no que diz respeito a classes de operadores caracterizadas no ambiente de classe de sequências. Mais precisamente, sob certas condições, vamos conseguir mostrar que

$$T \in \mathcal{L}_{X;Y}(E; F) \Leftrightarrow T' \in \mathcal{L}_{Y^{\text{dual}};X^{\text{dual}}}(F'; E')$$

e

$$T' \in \mathcal{L}_{X;Y}(F'; E') \Leftrightarrow T \in \mathcal{L}_{Y^{\text{dual}};X^{\text{dual}}}(E; F).$$

No que segue, denotaremos por J^X a aplicação J do Teorema 2.2 para ficar explícito que estamos nos referindo à classe de sequências X . Além disso, sempre que uma classe de sequências X satisfazer as condições do Teorema 2.2 (c), isto é, quando J^X é um isomorfismo isométrico, diremos que X é uma classe *dual-representável*.

O Teorema 2.1 juntamente com a Proposição 2.2 nos diz que faz sentido considerarmos a classe de sequências $(X^{\text{dual}})^{\text{dual}}$. Tendo em mente a imersão canônica $J_E : E \rightarrow E''$ já conhecida da literatura clássica, é válido nos perguntarmos se ocorre algo semelhante sob a perspectiva de dual de classes de sequências. Uma versão disso é apresentada no nosso próximo resultado.

Proposição 3.1. *Seja X uma classe de sequências linearmente estável e esfericamente completa. Então, $X(E) \xrightarrow{1} (X^{\text{dual}})^{\text{dual}}(E)$, para todo espaço de Banach E .*

Demonstração. Seja $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in X(E)$. Como X é linearmente estável, temos $(J_E(x_j))_{j=1}^{\infty} \in X(E'')$. Note que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| \frac{J_E(x_j)}{\|(J_E(x_j))_{j=1}^{\infty}\|_{X(E'')}} (\varphi_j) \right| \leq \sup_{(\psi_j)_{j=1}^{\infty} \in B_{X(E'')}} \sum_{j=1}^{\infty} |\psi_j(\varphi_j)| \leq 1 \quad (3.1)$$

sempre que $(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in B_{X^{\text{dual}}(E')}$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} \| (x_j)_{j=1}^\infty \|_{(X^{\text{dual}})^{\text{dual}}(E)} &= \sup_{(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in B_{X^{\text{dual}}(E')}} \sum_{j=1}^\infty |\varphi_j(x_j)| = \sup_{(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in B_{X^{\text{dual}}(E')}} \sum_{j=1}^\infty |J_E(x_j)(\varphi_j)| \\ &= \| (J_E(x_j))_{j=1}^\infty \|_{X(E'')} \sup_{(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in B_{X^{\text{dual}}(E')}} \sum_{j=1}^\infty \left| \frac{J_E(x_j)}{\| (J_E(x_j))_{j=1}^\infty \|_{X(E'')}} (\varphi_j) \right|. \end{aligned}$$

Disto e por (3.1), obtemos

$$\| (x_j)_{j=1}^\infty \|_{(X^{\text{dual}})^{\text{dual}}(E)} \leq \| (J_E(x_j))_{j=1}^\infty \|_{X(E'')} \leq \| (x_j)_{j=1}^\infty \|_{X(E)}$$

já que X é linearmente estável e $\|\widehat{J_E}\| = \|J_E\| = 1$. Logo, temos $X(E) \xrightarrow{1} (X^{\text{dual}})^{\text{dual}}(E)$. $\square$

Exemplo 3.1. Como já vimos, para $1 \leq p \leq \infty$ tem-se $\ell_p^{\text{dual}}(\cdot) = \ell_{p^*}(\cdot)$ e, portanto, $(\ell_p^{\text{dual}})^{\text{dual}}(E) = \ell_p(E)$.

Se uma classe de sequência X é tal que $(X^{\text{dual}})^{\text{dual}} = X$, então X é finitamente determinada e esfericamente completa, devido à Proposição 2.2. Dessa forma, classes de sequências que não são finitamente determinadas não satisfazem $(X^{\text{dual}})^{\text{dual}} = X$ como, por exemplo, $X = \ell_p^u$. Esses exemplos, juntamente com a proposição anterior, motivam a seguinte

Definição 3.1. Seja E um espaço de Banach. Uma classe de sequências X é dita *E-reflexiva* se $(X^{\text{dual}})^{\text{dual}}(E) = X(E)$ e $\| (x_j)_{j=1}^\infty \|_{(X^{\text{dual}})^{\text{dual}}(E)} = \| (x_j)_{j=1}^\infty \|_{X(E)}$ para toda sequência $(x_j)_{j=1}^\infty \in X(E)$.

Dizemos que X é *reflexiva* se é E -reflexiva para todo espaço de Banach E . Se X é E' -reflexiva para todo espaço de Banach E , dizemos que X é *dual-reflexiva*.

A partir daqui estamos em condições de cumprir o que foi prometido no início do capítulo. Começamos então com um dos resultados principais.

Teorema 3.1. *Sejam X e Y classes de sequências e $T \in \mathcal{L}(E; F)$.*

- (a) *Se Y é linearmente estável, finitamente determinada e esfericamente completa, X é dual-representável e $T \in \mathcal{L}_{X;Y}(E; F)$, então $T' \in \mathcal{L}_{Y^{\text{dual}};X^{\text{dual}}}(F'; E')$ e $\|T'\|_{Y^{\text{dual}};X^{\text{dual}}} \leq \|T\|_{X;Y}$;*
- (b) *Se Y é F -reflexiva e $T' \in \mathcal{L}_{Y^{\text{dual}};X^{\text{dual}}}(F'; E')$, então $T \in \mathcal{L}_{X;Y}(E; F)$ e tem-se $\|T\|_{X;Y} \leq \|T'\|_{Y^{\text{dual}};X^{\text{dual}}}$.*

Demonstração. (a) Sendo X dual-representável, J^X é um isomorfismo isométrico e como $T \in \mathcal{L}_{X;Y}(E; F)$, a aplicação composta

$$Y^{\text{dual}}(F') \xrightarrow{J^Y} Y(F)' \xrightarrow{(\widehat{T})'} X(E)' \xrightarrow{(J^X)^{-1}} X^{\text{dual}}(E')$$

está bem definida, é linear e contínua. Para que tenhamos $T' \in \mathcal{L}_{Y^{\text{dual}}; X^{\text{dual}}}(F'; E')$, basta mostrar que $(\widehat{T'}) = (J^X)^{-1} \circ (\widehat{T})' \circ J^Y$. Se $(\varphi_j)_{j=1}^{\infty} \in Y^{\text{dual}}(F')$, então $(\widehat{T})' \circ J^Y((\varphi_j)_{j=1}^{\infty}) \in X(E)'$. Logo, para toda sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in X(E)$ segue que

$$(\widehat{T})' (J^Y((\varphi_j)_{j=1}^{\infty})) ((x_j)_{j=1}^{\infty}) = J^Y((\varphi_j)_{j=1}^{\infty}) (T(x_j)_{j=1}^{\infty}) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j \circ T(x_j). \quad (3.2)$$

Por outro lado, o isomorfismo $(J^X)^{-1}$ atua da seguinte forma: dado $\psi \in X(E)'$ existe uma única sequência $(\xi_j)_{j=1}^{\infty} \in X^{\text{dual}}(E')$ tal que

$$J^X((\xi_j)_{j=1}^{\infty}) ((x_j)_{j=1}^{\infty}) = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j(x_j) = \psi((x_j)_{j=1}^{\infty}).$$

Portanto, por (3.2), temos

$$(J^X)^{-1} \circ (\widehat{T})' \circ J^Y((\varphi_j)_{j=1}^{\infty}) = (\varphi_j \circ T)_{j=1}^{\infty} = (T'(\varphi_j))_{j=1}^{\infty} = (\widehat{T'})((\varphi_j)_{j=1}^{\infty})$$

como queríamos demonstrar. Além disso, na demonstração do Teorema 2.2, vimos que $\|J^Y\| \leq 1$ qualquer que seja a classe de sequência Y satisfazendo as condições do teorema. Sendo assim,

$$\|T'\|_{Y^{\text{dual}}; X^{\text{dual}}} = \|(\widehat{T'})\| \leq \|(J^X)^{-1}\| \left\| (\widehat{T})' \right\| \|J^Y\| \leq \left\| (\widehat{T})' \right\| = \|\widehat{T}\| = \|T\|_{X;Y}.$$

(b) Se $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in X(E) \xrightarrow{1} (X^{\text{dual}})^{\text{dual}}(E)$ e sabemos, por hipótese, que $(T'(\varphi_j))_{j=1}^{\infty} \in X^{\text{dual}}(E')$ sempre que $(\varphi_j)_{j=1}^{\infty} \in Y^{\text{dual}}(F')$, segue que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(T(x_j)) = \sum_{j=1}^{\infty} T'(\varphi_j)(x_j) \text{ é convergente.}$$

Isto significa que $(T(x_j))_{j=1}^{\infty} \in (Y^{\text{dual}})^{\text{dual}}(F) = Y(F)$, visto que Y é F -reflexiva. Portanto, temos $T \in \mathcal{L}_{X;Y}(E; F)$. Além disso, sendo Y F -reflexiva, temos

$$\|T\|_{X;Y} = \|\widehat{T}\| = \sup_{(x_j)_{j=1}^{\infty} \in B_{X(E)}} \|(T(x_j))_{j=1}^{\infty}\|_{Y(F)} = \sup_{(x_j)_{j=1}^{\infty} \in B_{X(E)}} \|(T(x_j))_{j=1}^{\infty}\|_{(Y^{\text{dual}})^{\text{dual}}(F)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sup_{(x_j)_{j=1}^\infty \in B_{X(E)}} \sup_{(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in B_{Y^{\text{dual}}(F')}} \sum_{j=1}^\infty |\varphi_j(T(x_j))| \\
 &= \|T'\|_{Y^{\text{dual}}, X^{\text{dual}}} \sup_{(x_j)_{j=1}^\infty \in B_{X(E)}} \sup_{(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in B_{Y^{\text{dual}}(F')}} \sum_{j=1}^\infty \left| \frac{T'(\varphi_j)}{\|T'\|_{Y^{\text{dual}}, X^{\text{dual}}}}(x_j) \right|.
 \end{aligned}$$

Note que $\left(\frac{T'(\varphi_j)}{\|T'\|_{Y^{\text{dual}}, X^{\text{dual}}}}\right)_{j=1}^\infty \in B_{X^{\text{dual}}(E')}$ sempre que $(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in B_{Y^{\text{dual}}(F')}$. Logo,

$$\begin{aligned}
 \|T\|_{X;Y} &\leq \|T'\|_{Y^{\text{dual}}, X^{\text{dual}}} \sup_{(x_j)_{j=1}^\infty \in B_{X(E)}} \sup_{(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in B_{Y^{\text{dual}}(F')}} \sum_{j=1}^\infty \left| \frac{T'(\varphi_j)}{\|T'\|_{Y^{\text{dual}}, X^{\text{dual}}}}(x_j) \right| \\
 &\leq \|T'\|_{Y^{\text{dual}}, X^{\text{dual}}} \sup_{(x_j)_{j=1}^\infty \in B_{X(E)}} \sup_{(\psi_j)_{j=1}^\infty \in B_{X^{\text{dual}}(E')}} \sum_{j=1}^\infty |\psi_j(x_j)| \\
 &\leq \|T'\|_{Y^{\text{dual}}, X^{\text{dual}}} \sup_{(x_j)_{j=1}^\infty \in B_{X(E)}} \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{(X^{\text{dual}})^{\text{dual}}(E)} \\
 &\leq \|T'\|_{Y^{\text{dual}}, X^{\text{dual}}} \sup_{(x_j)_{j=1}^\infty \in B_{X(E)}} \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{X(E)} \\
 &= \|T'\|_{Y^{\text{dual}}, X^{\text{dual}}}
 \end{aligned}$$

□

Exemplo 3.2. O teorema anterior recupera um resultado clássico: o adjunto de um operador absolutamente (q, p) -somante (está em $\Pi_{q,p}$) é um operador Cohen fortemente (p^*, q^*) -somante (está em $\mathcal{D}_{p^*, q^*}$). De fato, consideremos $X = \ell_p^u(\cdot)$ e $Y = \ell_q(\cdot)$ com $1 \leq p \leq q < \infty$. Se um operador $T \in \Pi_{q,p}(E; F) = \mathcal{L}_{\ell_p^u(\cdot); \ell_q(\cdot)}(E; F)$ (ou seja, T é $(\ell_p^u(\cdot); \ell_q(\cdot))$ -somante) então, pelo Teorema 3.1(a), tem-se $T' \in \mathcal{L}_{\ell_{q^*}(\cdot); (\ell_p^u)^{\text{dual}}(\cdot)}(F'; E') = \mathcal{L}_{\ell_{q^*}(\cdot); \ell_{p^*}(\cdot)}(F'; E') = \mathcal{D}_{p^*, q^*}(F'; E')$. (Veja [3, Theorem 3.2])

O teorema a seguir segue, de certa forma, o “sentido oposto” ao teorema anterior.

Teorema 3.2. *Sejam X e Y classes de seqüências e $T \in \mathcal{L}(E; F)$.*

- (a) *Se X é esfericamente completa, Y é dual-reflexiva, Y^{dual} é dual-representável e $T \in \mathcal{L}_{Y^{\text{dual}}, X^{\text{dual}}}(E; F)$, então $T' \in \mathcal{L}_{X;Y}(F'; E')$ e $\|T'\|_{X;Y} \leq \|T\|_{Y^{\text{dual}}, X^{\text{dual}}}$.*
- (b) *Se X e Y são esfericamente completas e $T' \in \mathcal{L}_{X;Y}(F'; E')$, então tem-se $T \in \mathcal{L}_{Y^{\text{dual}}, X^{\text{dual}}}(E; F)$ e $\|T\|_{Y^{\text{dual}}, X^{\text{dual}}} \leq \|T'\|_{X;Y}$.*

Demonstração. (a) Definamos

$$\begin{aligned}
 L: \quad X(F') &\longrightarrow X^{\text{dual}}(F)' \\
 (\varphi_j)_{j=1}^\infty &\longmapsto L((\varphi_j)_{j=1}^\infty)
 \end{aligned}$$

tal que $L((\varphi_j)_{j=1}^\infty)((y_j)_{j=1}^\infty) = \sum_{j=1}^\infty \varphi_j(y_j)$ para toda sequência $(y_j)_{j=1}^\infty \in X^{\text{dual}}(F)$. A série $\sum_{j=1}^\infty \varphi_j(y_j)$ converge para toda $(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in X(F')$, pela definição de $X^{\text{dual}}(F)$, e portanto $L((\varphi_j)_{j=1}^\infty)$ está bem definido e é linear (fácil). Vejamos a sua continuidade. Para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $(y_j)_{j=1}^\infty \in X^{\text{dual}}(F)$,

$$\left| \sum_{j=1}^n \varphi_j(y_j) \right| \leq \sum_{j=1}^n |\varphi_j(y_j)| = \|(\varphi_j)_{j=1}^\infty\|_{X(F')} \sum_{j=1}^n \left| \frac{\varphi_j}{\|(\varphi_j)_{j=1}^\infty\|_{X(F')}}(y_j) \right|$$

e como $\left(\frac{\varphi_j}{\|(\varphi_j)_{j=1}^\infty\|_{X(F')}} \right)_{j=1}^\infty \in B_{X(F')}$, segue que

$$\sum_{j=1}^n \left| \frac{\varphi_j}{\|(\varphi_j)_{j=1}^\infty\|_{X(F')}}(y_j) \right| \leq \|(y_j)_{j=1}^n\|_{X^{\text{dual}}(F)}$$

e, portanto, temos

$$\left| \sum_{j=1}^n \varphi_j(y_j) \right| \leq \|(\varphi_j)_{j=1}^\infty\|_{X(F')} \|(y_j)_{j=1}^n\|_{X^{\text{dual}}(F)}.$$

Como $X^{\text{dual}}(\cdot)$ é finitamente determinada, segue que

$$\left| \sum_{j=1}^n \varphi_j(y_j) \right| \leq \|(\varphi_j)_{j=1}^\infty\|_{X(F')} \|(y_j)_{j=1}^\infty\|_{X^{\text{dual}}(F)}$$

e fazendo $n \rightarrow \infty$ obtemos

$$\left| L((\varphi_j)_{j=1}^\infty)((y_j)_{j=1}^\infty) \right| \leq \|(\varphi_j)_{j=1}^\infty\|_{X(F')} \|(y_j)_{j=1}^\infty\|_{X^{\text{dual}}(F)} \quad (3.3)$$

e segue a continuidade de $L((\varphi_j)_{j=1}^\infty)$. Logo, L está bem definida e também é fácil ver que é linear. Tomando o supremo sobre $(y_j)_{j=1}^\infty \in B_{X^{\text{dual}}(F)}$ em (3.3), temos

$$\|L((\varphi_j)_{j=1}^\infty)\| \leq \|(\varphi_j)_{j=1}^\infty\|_{X(F')}$$

o que implica na continuidade de L e $\|L\| \leq 1$. Sendo Y dual-reflexiva, segue que a aplicação composta

$$X(F') \xrightarrow{L} X^{\text{dual}}(F)' \xrightarrow{(\widehat{T})'} Y^{\text{dual}}(E)' \xrightarrow{(J^{Y^{\text{dual}}})^{-1}} (Y^{\text{dual}})^{\text{dual}}(E') = Y(E')$$

é linear e contínua. Resta-nos mostrar que $\widehat{(T')} = (J^{Y^{\text{dual}}})^{-1} \circ (\widehat{T})' \circ L$. Para tanto,

consideremos $(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in X(F')$ e $(x_j)_{j=1}^\infty \in Y^{\text{dual}}(E)$ e note que

$$\left((\widehat{T})' \circ L \right) ((\varphi_j)_{j=1}^\infty) ((x_j)_{j=1}^\infty) = L \left(\widehat{T} ((\varphi_j)_{j=1}^\infty) \right) ((x_j)_{j=1}^\infty) = \sum_{j=1}^\infty T \circ \varphi_j(x_j). \quad (3.4)$$

Como Y^{dual} é dual-representável, então $J^{Y^{\text{dual}}}$ é um isomorfismo isométrico e, por (3.4), temos

$$\left(J^{Y^{\text{dual}}} \right)^{-1} \circ (\widehat{T})' \circ L ((\varphi_j)_{j=1}^\infty) = (T \circ \varphi_j)_{j=1}^\infty = (\widehat{T'}) ((\varphi_j)_{j=1}^\infty)$$

e segue a igualdade desejada. Além disso,

$$\|T'\|_{X;Y} = \|(\widehat{T'})\| \leq \left\| \left(J^{Y^{\text{dual}}} \right)^{-1} \right\| \left\| (\widehat{T})' \right\| \|L\| \leq \|(\widehat{T'})\| = \|T\|_{Y^{\text{dual}};X^{\text{dual}}}.$$

(b) Seja $(x_j)_{j=1}^\infty \in Y^{\text{dual}}(E)$. Como $T \in \mathcal{L}_{X;Y}(F'; E')$ então $(T(\varphi_j))_{j=1}^\infty \in Y(E')$ sempre que $(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in X(F')$. Sendo assim, qualquer que seja a sequência $(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in X(F')$ a série

$$\sum_{j=1}^\infty \varphi_j(T(x_j)) = \sum_{j=1}^\infty T'(\varphi_j)(x_j) \text{ converge,}$$

implicando em $(T(x_j))_{j=1}^\infty \in X^{\text{dual}}(F)$. Daí, tem-se $T \in \mathcal{L}_{Y^{\text{dual}};X^{\text{dual}}}(E; F)$. Vejamos a desigualdade de normas. Temos

$$\begin{aligned} \|T\|_{Y^{\text{dual}};X^{\text{dual}}} &= \|\widehat{T}\| = \sup_{(x_j)_{j=1}^\infty \in B_{Y^{\text{dual}}}(E)} \|(T(x_j))_{j=1}^\infty\|_{X^{\text{dual}}(F)} \\ &= \sup_{(x_j)_{j=1}^\infty \in B_{Y^{\text{dual}}}(E)} \sup_{(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in B_{X(F')}} \sum_{j=1}^\infty |\varphi_j(T(x_j))| \\ &\leq \|T\|_{X;Y} \sup_{(x_j)_{j=1}^\infty \in B_{Y^{\text{dual}}}(E)} \sup_{(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in B_{X(F')}} \sum_{j=1}^\infty \left| \frac{T'(\varphi_j)}{\|T\|_{X;Y}}(x_j) \right| \end{aligned}$$

e observe que $\left(\frac{T'(\varphi_j)}{\|T\|_{X;Y}} \right)_{j=1}^\infty \in B_{Y(E')}$ sempre que $(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in B_{X(F')}$. Logo,

$$\begin{aligned} \|T\|_{Y^{\text{dual}};X^{\text{dual}}} &\leq \|T\|_{X;Y} \sup_{(x_j)_{j=1}^\infty \in B_{Y^{\text{dual}}}(E)} \sup_{(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in B_{X(F')}} \sum_{j=1}^\infty \left| \frac{T'(\varphi_j)}{\|T\|_{X;Y}}(x_j) \right| \\ &\leq \|T\|_{X;Y} \sup_{(x_j)_{j=1}^\infty \in B_{Y^{\text{dual}}}(E)} \sup_{(\psi_j)_{j=1}^\infty \in B_{Y(E')}} \sum_{j=1}^\infty |\psi_j(x_j)| \\ &= \|T\|_{X;Y} \sup_{(x_j)_{j=1}^\infty \in B_{Y^{\text{dual}}}(E)} \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{Y^{\text{dual}}(F)} \\ &= \|T\|_{X;Y} \end{aligned}$$

□

Exemplo 3.3. O resultados aqui apresentados recuperam os presentes em [3, Theorem 3.2].

a) Se $1 \leq p \leq q < \infty$ e $T \in \mathcal{L}_{\ell_{q^*}(\cdot); (\ell_p^u)^{\text{dual}}(\cdot)}(E; F) = \mathcal{D}_{p^*, q^*}(E; F)$ então, pelo Teorema 3.2(a), $T' \in \mathcal{L}_{\ell_p^u(\cdot); \ell_q(\cdot)}(F'; E')$, isto é, o seu adjunto é um operador absolutamente (q, p) -somante. Recupera-se, então, um outro resultado clássico: o adjunto de um operador Cohen fortemente (p^*, q^*) -somante é um operador absolutamente (q, p) -somante.

b) Se $T \in \mathcal{L}(E; F)$ é tal que T' é absolutamente (q, p) -somante, noutras palavras, $T' \in \mathcal{L}_{\ell_p^u(\cdot); \ell_q(\cdot)}(F'; E') = \Pi_{q, p}(F'; E')$ então, pelo Teorema 3.2(b), $T \in \mathcal{L}_{\ell_{q^*}(\cdot); (\ell_p^u)^{\text{dual}}(\cdot)}(E; F) = \mathcal{D}_{p^*, q^*}(E; F)$ e novamente temos um caso bem conhecido: se o adjunto T' de um operador T é absolutamente (q, p) -somante, então T é um operador Cohen fortemente (p^*, q^*) -somante.

Vimos nos exemplos anteriores que os Teoremas 3.1 e 3.2 recuperam alguns resultados já conhecidos na literatura. No entanto, estes teoremas não se limitam apenas a isso, podendo nos fornecer novos casos para adjuntos de outras classes de operadores, como veremos no exemplo a seguir.

Exemplo 3.4. Um operador T é dito *mid*-($q; p$)-somante com $1 < p \leq q < \infty$ se $(T(x_j))_{j=1}^\infty \in \ell_q(F)$ sempre que $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^{\text{mid}}(E)$ (veja [10, pág. 6]). Dessa forma, se T' é um operador mid-($q; p$)-somante, noutras palavras, $T' \in \mathcal{L}_{\ell_p^{\text{mid}}(\cdot); \ell_q(\cdot)}(F'; E')$, pelo Teorema 3.2(b), temos que $T \in \mathcal{L}_{\ell_{q^*}(\cdot); \ell_{p^*}^{\text{mid}}(\cdot)}(E; F)$.

Como consequência dos teoremas anteriores estabeleceremos uma equivalência entre um operador T e seu bi-adjunto T'' no que diz respeito à pertinência a um ideal $\mathcal{L}_{X; Y}$. Primeiramente, mostraremos um lema técnico e vamos supor, a partir de agora, que as classes X e Y são tais que $\mathcal{L}_{X; Y}$ é um ideal de Banach com a norma $\|\cdot\|_{X; Y}$.

Lema 3.1. *Sejam X e Y classes de seqüências finitamente determinadas com Y finitamente injetiva. Então o ideal $(\mathcal{L}_{X; Y}, \|\cdot\|_{X; Y})$ é injetivo.*

Demonstração. Sejam $T \in \mathcal{L}(E; F)$ e $S \in \mathcal{L}(F; G)$ uma injeção métrica tais que $S \circ T \in \mathcal{L}_{X; Y}(E; G)$. Queremos mostrar que $T \in \mathcal{L}_{X; Y}(E; F)$. Para tanto, consideremos $(x_j)_{j=1}^\infty \in X(E)$. Como $S \circ T \in \mathcal{L}_{X; Y}(E; G)$ então $(S \circ T(x_j))_{j=1}^\infty \in Y(G)$. Sendo Y finitamente injetiva segue que

$$\|(T(x_j))_{j=1}^k\|_{Y(F)} \leq \|(S \circ T(x_j))_{j=1}^k\|_{Y(G)} \leq \|S \circ T\|_{X; Y} \|(x_j)_{j=1}^k\|_{X(E)}.$$

e tomando o supremo sobre $k \in \mathbb{N}$, já que X e Y são finitamente determinadas, obtemos

$$\|(T(x_j))_{j=1}^\infty\|_{Y(F)} \leq \|S \circ T\|_{X; Y} \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{X(E)}.$$

Portanto, tem-se $(T(x_j))_{j=1}^\infty \in Y(F)$, ou seja, $T \in \mathcal{L}_{X; Y}(E; F)$. □

Corolário 3.1. *Sejam X e Y classes de seqüências.*

- (a) *Se X é dual-representável e Y é esfericamente completa, linearmente estável, finitamente determinada e dual-reflexiva tal que Y^{dual} é dual-representável e $T \in \mathcal{L}_{X;Y}(E; F)$, então $T'' \in \mathcal{L}_{X;Y}(E''; F'')$;*
- (b) *Se $T'' \in \mathcal{L}_{X;Y}(E''; F'')$ então $T \in \mathcal{L}_{X;Y}(E; F)$.*

Nas hipóteses de a), temos então $\|T\|_{X;Y} = \|T''\|_{X;Y}$.

Demonstração. (a) Suponha $T \in \mathcal{L}_{X;Y}(E; F)$ e observe que as classes de seqüências X e Y satisfazem as condições dos Teoremas 3.1(a) e 3.2(a). Pelo Teorema 3.1(a) segue que $T' \in \mathcal{L}_{Y^{\text{dual}}, X^{\text{dual}}}(F'; E')$ e $\|T'\|_{Y^{\text{dual}}, X^{\text{dual}}} \leq \|T\|_{X;Y}$. Por sua vez, pelo Teorema 3.2(a), temos $T'' \in \mathcal{L}_{X;Y}(E''; F'')$ e $\|T''\|_{X;Y} \leq \|T'\|_{Y^{\text{dual}}, X^{\text{dual}}}$. Portanto, $T'' \in \mathcal{L}_{X;Y}(E''; F'')$ e $\|T''\|_{X;Y} \leq \|T\|_{X;Y}$.

(b) Consideremos $T'' \in \mathcal{L}_{X;Y}(E''; F'')$.

Afirmção: $T'' \circ J_E = J_F \circ T$.

De fato, sejam $x \in E$ e $\psi \in F'$. Então,

$$(J_F \circ T)(x)(\psi) = J_F(T(x))(\psi) = \psi(T(x)).$$

Por outro lado,

$$(T'' \circ J_E)(x)(\psi) = J_E(x)(T'(\psi)) = T'(\psi)(x) = \psi(T(x))$$

e segue a afirmação.

Como, por hipótese, $T'' \in \mathcal{L}_{X;Y}(E''; F'')$ então $T'' \circ J_E \in \mathcal{L}_{X;Y}(E; F'')$ e, portanto, $J_F \circ T \in \mathcal{L}_{X;Y}(E; F'')$. Em sendo $J_F : F \rightarrow F''$ uma injeção métrica e $\mathcal{L}_{X;Y}$ um ideal injetivo (pelo lema anterior), obtemos $T \in \mathcal{L}_{X;Y}(E; F)$.

Por fim, como $J_F : F \rightarrow J_F(F)$ é um isomorfismo isométrico então sua inversa $J_F^{-1} : J_F(F) \rightarrow F$ também é um isomorfismo isométrico e, em particular, $\|J_F^{-1}\| \leq 1$. Logo,

$$\|T\|_{X;Y} = \|J_F^{-1} \circ T'' \circ J_E\|_{X;Y} \leq \|J_F^{-1}\| \|T''\|_{X;Y} \|J_E\| \leq \|T''\|_{X;Y}.$$

□

Exemplo 3.5. Tomando $X = \ell_p^u(\cdot)$ e $Y = \ell_p(\cdot)$ e sabendo que X e Y satisfazem as condições do Corolário 3.1(a), segue que se $T \in \mathcal{L}_{\ell_p^u(\cdot); \ell_p(\cdot)}(E; F)$, então $T'' \in \mathcal{L}_{\ell_p^u(\cdot); \ell_p(\cdot)}(E''; F'')$. Por outro lado, pelo Corolário 3.1(b), se $T \in \mathcal{L}(E; F)$ é tal que $T'' \in \mathcal{L}_{\ell_p^u(\cdot); \ell_p(\cdot)}(E''; F'')$ então $T \in \mathcal{L}_{\ell_p^u(\cdot); \ell_p(\cdot)}(E; F)$. Em palavras, isso se traduz no

3. Adjuntos e Bi-adjuntos

seguinte: um operador é absolutamente p -somante se, e somente se, seu bi-adjunto também o é, resultado já bem conhecido que pode ser encontrado em [3, Theorem 3.4].

Capítulo 4

Ideais Maximais no ambiente de classe de sequências

A partir da bem conhecida ligação entre a Teoria de Produtos Tensoriais Topológicos e a Teoria de Ideais de Operadores, Botelho et. al. estudam em [9] condições suficientes sobre as classes de sequências X e Y de modo que o ideal $\mathcal{L}_{X;Y^{\text{dual}}}$ seja maximal. O fato do porquê é usado Y^{dual} acima ficará claro logo no início da seção seguinte.

O objetivo então é alcançado através da definição e estudo de uma quasi-norma tensorial conveniente e o desenvolvimento da teoria dual para produtos tensoriais munidos dessas normas. Vejamos então o desenvolvimento dessa teoria.

4.1 Maximalidade

Provavelmente o leitor esteja se perguntando o motivo de procurarmos condições para a maximalidade de ideais da forma $\mathcal{L}_{X;Y^{\text{dual}}}$, mas não em ideais da forma $\mathcal{L}_{X;Y}$. Vejamos alguns exemplos que podem convencê-lo sobre a escolha do primeiro tipo de ideal em detrimento do segundo.

- Seja $1 \leq p < \infty$. O ideal $\mathcal{C}_p = \mathcal{L}_{\ell_p^w(\cdot);c_0(\cdot)}$ dos *operadores p -convergentes* não é um ideal maximal [2, Theorem 2.7]. Para $p = 1$, estamos diante do ideal dos operadores incondicionalmente somantes [29, 1.7.1].
- O ideal $\mathcal{CC} = \mathcal{L}_{c_0^w(\cdot);c_0(\cdot)}$ dos operadores completamente contínuos, mencionado no Exemplo 1.3, também não é um ideal maximal.

Repare que, em ambos exemplos acima, $c_0(\cdot)$ não é uma classe dual, isto é, não

existe classe de seqüências Y tal que $Y^{\text{dual}} = c_0(\cdot)$. De fato, se existisse tal classe, pelo Teorema 2.2, seguiria-se que $c_0 = c_0(\mathbb{K})$ seria dual de algum espaço, o que sabemos não ser verdade. Assim, a conjectura de que “se Y não é uma classe dual, então $\mathcal{L}_{X,Y}$ não é ideal maximal” faz sentido. O que será exposto aqui no capítulo serão as condições para que isso ocorra sendo Y uma classe dual.

Antes dos resultados principais do capítulo, necessitamos apresentar o ambiente necessário, com suas definições e propriedades.

Definição 4.1. Uma classe de seqüência X é dita *monótona* se, para todo espaço de Banach E e quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$ e $x_1, \dots, x_n \in E$, a seguinte igualdade é satisfeita:

$$\|(\underbrace{0, \dots, 0}_{m \text{ vezes}}, x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots)\|_{X(E)} = \|(x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots)\|_{X(E)}.$$

Exemplo 4.1. É fácil mostrar que as classes de seqüências $\ell_p(\cdot)$, $\ell_p^w(\cdot)$, $\ell_\infty(\cdot)$, $\ell_p^{\text{mid}}(\cdot)$, $c_0(\cdot)$ e $\ell_p\langle\cdot\rangle$ são todas monótonas.

Sejam X e Y classes de seqüências. Com inspiração nas normas de Chevet-Saphar [33, Section 6.2], consideremos a função $\alpha_{X,Y} : E \otimes F \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\alpha_{X,Y}(u) = \inf \left\{ \|(x_j)_{j=1}^n\|_{X(E)} \|(y_j)_{j=1}^n\|_{Y(F)}; u = \sum_{j=1}^n x_j \otimes y_j \right\}.$$

Mesmo estando em um contexto muito abstrato, a ideia agora é estabelecer condições sobre as classes X e Y , as mais fracas possíveis, tais que $\alpha_{X,Y}$ seja uma quasi-norma em $E \otimes F$.

Definição 4.2. Dizemos que uma regra que, a cada par de espaços de Banach E e F , associa uma quasi-norma α em $E \otimes F$ é uma *quasi-norma tensorial* se satisfaz:

- (i) $\alpha(x \otimes y) \leq \|x\| \|y\|$, para todos $E, F \in \text{BAN}$, $x \in E$ e $y \in F$;
- (ii) α é *uniforme*, isto é, se para quaisquer E_1, E_2, F_1 e F_2 Banach e $T_i \in \mathcal{L}(E_i; F_i)$, $i = 1, 2$, o operador $T_1 \otimes T_2 : E_1 \otimes_\alpha E_2 \rightarrow F_1 \otimes_\alpha F_2$ é linear, contínuo e

$$\|T_1 \otimes T_2\| \leq \|T_1\| \|T_2\|.$$

- (iii) α é *finitamente gerada*, ou seja,

$$\alpha(u; E \otimes F) = \inf \{ \alpha(u; M \otimes N); (M, N) \in \mathfrak{F}(E) \times \mathfrak{F}(F) \}.$$

O item (i) da definição anterior é uma condição, digamos, canônica e esperada na teoria de produtos tensoriais topológicos e que faz parte, de fato, da definição de uma norma razoável (ver Definição 1.8). A razão pela qual não exigimos aqui a condição **(R2)** da Definição 1.8 ficará mais clara após o próximo resultado.

Proposição 4.1. *Sejam X e Y classes de seqüências monótonas e suponha que $\varepsilon \leq \alpha_{X,Y}$. Então, para todos os espaços de Banach E e F , $\alpha_{X,Y}$ é uma quasi-norma em $E \otimes F$ e $\alpha_{X,Y}(x \otimes y) \leq \|x\| \|y\|$, para todos $x \in E$ e $y \in Y$.*

Demonstração. Seja $u \in E \otimes F$ tal que $\alpha_{X,Y} = 0$. Logo, pela hipótese $\varepsilon \leq \alpha_{X,Y}$, temos $\varepsilon(u) = 0$ e, portanto, $u = 0$. É fácil ver que $|\lambda| \alpha_{X,Y}(u) = \alpha_{X,Y}(\lambda u)$ qualquer que seja $u \in E \otimes F$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Agora, vamos mostrar que

$$\alpha_{X,Y}(u_1 + u_2) \leq 2(\alpha_{X,Y}(u_1) + \alpha_{X,Y}(u_2)).$$

Para tanto, sejam $u_1, u_2 \in E \otimes F$. Para cada $\delta > 0$, existem representações $u_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} \otimes y_{ij}$ tais que

$$\|(x_{ij})_{j=1}^n\|_{X(E)} \leq \alpha_{X,Y}(u_i) + \delta \quad \text{e} \quad \|(y_{ij})_{j=1}^n\|_{Y(F)} \leq 1$$

com $i = 1, 2$. Tal escolha é possível, pois dado $\delta > 0$ existem representações $u_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} \otimes y_{ij}$ tais que

$$\|(x_{ij})_{j=1}^n\|_{X(E)} \|(y_{ij})_{j=1}^n\|_{Y(F)} \leq \alpha_{X,Y}(u_i) + \delta.$$

Tomando $\lambda = \|(y_{ij})_{j=1}^n\|_{Y(F)}$, $z_{ij} = \lambda x_{ij}$ e $w_{ij} = \frac{y_{ij}}{\lambda}$ segue-se que $u_i = \sum_{j=1}^n z_{ij} \otimes w_{ij}$ é uma representação de u_i , com $i = 1, 2$, de tal forma que

$$\|(z_{ij})_{j=1}^n\|_{X(E)} \leq \alpha_{X,Y}(u_i) + \delta \quad \text{e} \quad \|(w_{ij})_{j=1}^n\|_{Y(F)} = 1.$$

Dai

$$u_1 + u_2 = \sum_{j=1}^n x_{1j} \otimes y_{1j} + \sum_{j=1}^n x_{2j} \otimes y_{2j} = x_{11} \otimes y_{11} + \cdots + x_{1n} \otimes y_{1n} + x_{21} \otimes y_{21} + \cdots + x_{2n} \otimes y_{2n}$$

é uma representação de $u_1 + u_2$ e dessa forma temos

$$\begin{aligned} \alpha_{X,Y}(u_1 + u_2) &\leq \|(x_{11}, \dots, x_{1n}, x_{21}, \dots, x_{2n}, 0, \dots)\|_{X(E)} \\ &\quad \cdot \|(y_{11}, \dots, y_{1n}, y_{21}, \dots, y_{2n}, 0, \dots)\|_{Y(F)} \\ &\leq (\|(x_{11}, \dots, x_{1n}, 0, \dots)\|_{X(E)} + \|(0, \dots, 0, x_{21}, \dots, x_{2n}, 0, \dots)\|_{X(E)}) \\ &\quad \cdot ((y_{11}, \dots, y_{1n}, 0, \dots)\|_{Y(F)} + \|(0, \dots, 0, y_{21}, \dots, y_{2n}, 0, \dots)\|_{Y(F)}). \end{aligned}$$

Da hipótese de X e Y serem classes de seqüências monótonas, obtemos

$$\begin{aligned}\alpha_{X,Y}(u_1 + u_2) &\leq (\|(x_{11}, \dots, x_{1n}, 0, \dots)\|_{X(E)} + \|(x_{21}, \dots, x_{2n}, 0, \dots)\|_{X(E)}) \\ &\quad \cdot (\|(y_{11}, \dots, y_{1n}, 0, \dots)\|_{Y(F)} + \|(y_{21}, \dots, y_{2n}, 0, \dots)\|_{Y(F)}) \\ &\leq (2\alpha_{X,Y}(u_1) + 2\alpha_{X,Y}(u_2) + 2\delta)\end{aligned}$$

Fazendo $\delta \rightarrow 0^+$, temos que $\alpha_{X,Y}(u_1 + u_2) \leq 2(\alpha_{X,Y}(u_1) + \alpha_{X,Y}(u_2))$.

Além disso, temos

$$\alpha_{X,Y}(x \otimes y) \leq \|x \cdot e_1\|_{X(E)} \|y \cdot e_1\|_{Y(F)} = \|x\| \|y\|.$$

□

Observe que, nas condições da definição e da proposição anterior, não ocorre a desigualdade $\varepsilon \leq \alpha_{X,Y} \leq \pi$ o qual é equivalente à $\alpha_{X,Y}$ ser uma norma razoável (ver [33, Proposition 6.1]). Enquanto que a desigualdade $\varepsilon \leq \alpha_{X,Y}$ é imposta pela Proposição 4.1, a desigualdade $\alpha_{X,Y} \leq \pi$ não é esperada pois depende da desigualdade triangular. De fato, se assumirmos que $\alpha_{X,Y}$ satisfaz a desigualdade triangular, isto é, $\alpha_{X,Y}$ é uma norma, então

$$\alpha_{X,Y}(u) = \alpha_{X,Y}\left(\sum_{j=1}^n x_j \otimes y_j\right) \leq \sum_{j=1}^n \alpha_{X,Y}(x_j \otimes y_j) \leq \sum_{j=1}^n \|x_j\| \|y_j\|$$

qualquer que seja $u \in E \otimes F$. Logo, $\alpha_{X,Y} \leq \pi$. Assim, se exigirmos a condição **(R2)** da Definição 1.8 teríamos $\alpha_{X,Y}$ uma norma razoável, o que restringe a nossa definição de quasi-norma.

Para que $\alpha_{X,Y}$ seja uma quasi-norma tensorial faltam apenas as propriedades de ser uniforme e finitamente gerada (ver Definição 4.2). Vejamos agora as hipóteses necessárias para isso.

Proposição 4.2. *Se X e Y são classes de seqüências monótonas, linearmente estáveis e finitamente injetivas e $\varepsilon \leq \alpha_{X,Y}$, então $\alpha_{X,Y}$ é uma quasi-norma tensorial.*

Demonstração. A hipótese de que X e Y são classes de seqüências monótonas e $\varepsilon \leq \alpha_{X,Y}$ nos garante que $\alpha_{X,Y}$ é uma quasi-norma e $\alpha_{X,Y}(x \otimes y) \leq \|x\| \|y\|$, devido à Proposição 4.1. Sendo assim, resta-nos provar que $\alpha_{X,Y}$ é uniforme e finitamente gerada. Começamos mostrando que $\alpha_{X,Y}$ é uniforme e, para tanto, consideremos E_1, E_2, F_1 e F_2 espaços de Banach, $T_i \in \mathcal{L}(E_i; F_i), i = 1, 2$ e $u \in E_1 \otimes_{\alpha_{X,Y}} E_2$. Pelo fato de X e Y

serem ambos linearmente estáveis, segue que

$$\begin{aligned}\alpha_{X,Y}(T_1 \otimes T_2(u)) &= \alpha_{X,Y} \left(\sum_{j=1}^n T_1(x_j) \otimes T_2(y_j) \right) \\ &\leq \|(T_1(x_j))_{j=1}^n\|_{X(F_1)} \|(T_2(y_j))_{j=1}^n\|_{Y(F_1)} \\ &\leq \|T_1\| \|T_2\| \|(x_j)_{j=1}^n\|_{X(E_1)} \|(y_j)_{j=1}^n\|_{Y(E_2)}\end{aligned}$$

e tomando o ínfimo sobre as representações de u , temos

$$\alpha_{X,Y}(T_1 \otimes T_2(u)) \leq \|T_1\| \|T_2\| \alpha_{X,Y}(u).$$

Portanto, $\|T_1 \otimes T_2\| \leq \|T_1\| \|T_2\|$ e $\alpha_{X,Y}$ é uniforme.

Vejamos que $\alpha_{X,Y}$ é finitamente gerada. Seja $u \in E \otimes F$. Consideremos $u = \sum_{j=1}^n x_j \otimes y_j$ uma representação, $M = [x_1, \dots, x_n]$, $N = [y_1, \dots, y_n]$ e os operadores inclusões $I_M : M \rightarrow E$ e $I_N : N \rightarrow F$. Não é difícil verificar que $\|I_N\| = \|I_M\| = 1$ e como $\alpha_{X,Y}$ é uniforme, obtemos que $I_M \otimes I_N : M \otimes_{\alpha_{X,Y}} N \rightarrow E \otimes_{\alpha_{X,Y}} F$ é um operador linear e contínuo e $\|I_N \otimes I_M\| \leq \|I_N\| \|I_M\| = 1$. Logo, $u \in M \otimes N$ e

$$\alpha_{X,Y}(u; E \otimes F) \leq \alpha_{X,Y}(u; M \otimes N). \quad (4.1)$$

Veja que a desigualdade acima vale para toda representação de u em subespaços de dimensão finita $M \in \mathfrak{F}(E)$ e $N \in \mathfrak{F}(F)$ tais que $u \in M \otimes N$. Isto significa que $\alpha_{X,Y}(u; E \otimes F)$ é uma cota inferior do conjunto

$$\{\alpha_{X,Y}(u; M \otimes N); (M, N) \in \mathfrak{F}(E) \times \mathfrak{F}(F)\}.$$

Além disso, dado $\varepsilon > 0$, existe uma representação $u = \sum_{j=1}^n x_j \otimes y_j$ tal que

$$\|(x_j)_{j=1}^n\|_{X(E)} \|(y_j)_{j=1}^n\|_{Y(F)} \leq \alpha_{X,Y}(u; E \otimes F) + \varepsilon$$

e sendo X e Y finitamente injetivas, segue que

$$\begin{aligned}\alpha_{X,Y}(u; M \otimes N) &\leq \|(x_j)_{j=1}^n\|_{X(M)} \|(y_j)_{j=1}^n\|_{Y(N)} \leq \|(x_j)_{j=1}^n\|_{X(E)} \|(y_j)_{j=1}^n\|_{Y(F)} \\ &\leq \alpha_{X,Y}(u; E \otimes F) + \varepsilon.\end{aligned}$$

Disto e por (4.1), segue que

$$\alpha_{X,Y}(u; E \otimes F) = \inf\{\alpha_{X,Y}(u; M \otimes N); M \in \mathfrak{F}(E), N \in \mathfrak{F}(F)\},$$

isto é, $\alpha_{X,Y}$ é finitamente gerada. $\square$

Exemplo 4.2. Algumas normas tensoriais já conhecidas são normas do tipo $\alpha_{X,Y}$ como, por exemplo:

(a) as normas de Chevet-Saphar: Se $1 \leq p \leq \infty$ e para $X = \ell_{p^*}^w(\cdot)$ e $Y = \ell_p(\cdot)$, então

$$\alpha_{X,Y}(u) = \alpha_{\ell_{p^*}^w(\cdot); \ell_p(\cdot)}(u) = \inf \left\{ \|(x_j)_{j=1}^n\|_{w,p^*} \|(y_j)_{j=1}^n\|_p; u = \sum_{j=1}^n x_j \otimes y_j \right\} = d_p(u).$$

Por outro lado, fazendo $X = \ell_p(\cdot)$ e $Y = \ell_{p^*}^w(\cdot)$, obtemos

$$\alpha_{\ell_p(\cdot); \ell_{p^*}^w(\cdot)}(u) = \inf \left\{ \|(x_j)_{j=1}^n\|_p \|(y_j)_{j=1}^n\|_{w,p^*}; u = \sum_{j=1}^n x_j \otimes y_j \right\} = g_p(u).$$

(b) Sejam $1 \leq p \leq \infty$, $X = \ell_p^w(\cdot)$ e $Y = \ell_{p^*}^w(\cdot)$, então

$$\alpha_{\ell_p^w(\cdot); \ell_{p^*}^w(\cdot)}(u) = \inf \left\{ \|(x_j)_{j=1}^n\|_{w,p} \|(y_j)_{j=1}^n\|_{w,p^*}; u = \sum_{j=1}^n x_j \otimes y_j \right\}$$

é uma norma tensorial cuja demonstração pode ser encontrada para o caso multilinear em [1].

Exemplo 4.3. Podemos obter novas normas tensoriais. Sejam $X = \ell_p^{\text{mid}}(\cdot)$ e $Y = \ell_{p^*}(\cdot)$, $1 \leq p < \infty$. Se $u \in E \otimes F$, então a expressão

$$\alpha_{\ell_p^{\text{mid}}(\cdot); \ell_{p^*}(\cdot)}(u) = \left\{ \|(x_j)_{j=1}^n\|_{p,\text{mid}} \|(y_j)_{j=1}^n\|_{p^*}; u = \sum_{j=1}^n x_j \otimes y_j \right\}$$

é uma norma tensorial. Começaremos mostrando que $\varepsilon \leq \alpha_{\ell_p^{\text{mid}}(\cdot); \ell_{p^*}(\cdot)}$. Seja $u \in E \otimes F$ e $u = \sum_{j=1}^n x_j \otimes y_j$ uma representação qualquer. Se $1 < p < \infty$, pela desigualdade de Hölder e pela Proposição 1.7, obtemos

$$\begin{aligned} \varepsilon(u) &= \sup_{\varphi \in B_{E'}} \sup_{\psi \in B_{F'}} \left| \sum_{j=1}^n \varphi(x_j) \psi(y_j) \right| \leq \sup_{\varphi \in B_{E'}} \sup_{\psi \in B_{F'}} \sum_{j=1}^n |\varphi(x_j) \psi(y_j)| \\ &\leq \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^n |\varphi(x_j)|^p \right)^{1/p} \sup_{\psi \in B_{F'}} \left(\sum_{j=1}^n |\psi(y_j)|^{p^*} \right)^{1/p^*} \\ &= \|(x_j)_{j=1}^n\|_{w,p} \|(y_j)_{j=1}^n\|_{w,p^*} \leq \|(x_j)_{j=1}^n\|_{p,\text{mid}} \|(y_j)_{j=1}^n\|_{p^*}. \end{aligned}$$

Se $p = 1$, então

$$\begin{aligned} \varepsilon(u) &\leq \sup_{\varphi \in B_{E'}} \sup_{\psi \in B_{F'}} \sum_{j=1}^n |\varphi(x_j)\psi(y_j)| \leq \|(x_j)_{j=1}^n\|_{1,w} \|(y_j)_{j=1}^n\|_{\infty} \\ &\leq \|(x_j)_{j=1}^n\|_{1,\text{mid}} \|(y_j)_{j=1}^n\|_{\infty}. \end{aligned}$$

Em ambos os casos, tomando o ínfimo sobre as representações de u , segue que $\varepsilon(u) \leq \alpha_{\ell_p^{\text{mid}}(\cdot), \ell_{p^*}(\cdot)}(u)$. Como $\ell_p^{\text{mid}}(\cdot)$ e $\ell_{p^*}(\cdot)$ são classes de seqüências monótonas, linearmente estáveis e finitamente injetivas, segue que $\alpha_{\ell_p^{\text{mid}}(\cdot), \ell_{p^*}(\cdot)}$ é uma quase-norma tensorial. Na verdade, $\alpha_{\ell_p^{\text{mid}}(\cdot), \ell_{p^*}(\cdot)}$ satisfaz a desigualdade triangular (ver [25, Seção 2.2.1]) e, portanto, é uma norma tensorial.

As normas que listaremos a seguir, cujas demonstrações omitiremos, também são normas tensoriais.

- $\alpha_{\ell_p^{\text{mid}}(\cdot), \ell_{p^*}^w(\cdot)}(u) = \left\{ \|(x_j)_{j=1}^n\|_{p,\text{mid}} \|(y_j)_{j=1}^n\|_{w,p^*}; u = \sum_{j=1}^n x_j \otimes y_j \right\}, 1 \leq p < \infty.$
- $\alpha_{\ell_p^{\text{mid}}(\cdot), \ell_{p^*}^{\text{mid}}(\cdot)}(u) = \left\{ \|(x_j)_{j=1}^n\|_{p,\text{mid}} \|(y_j)_{j=1}^n\|_{p^*,\text{mid}}; u = \sum_{j=1}^n x_j \otimes y_j \right\}, 1 < p < \infty.$

Antes de apresentarmos o conceito de ideal maximal estará implícito que existe uma ordem para que possamos compará-los. Mais precisamente, Se $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ e $(\mathcal{J}, \|\cdot\|_{\mathcal{J}})$ são ideais de Banach, dizemos que $\mathcal{I} \leq \mathcal{J}$ se, para quaisquer E e F espaços de Banach, $\mathcal{I}(E; F) \subset \mathcal{J}(E; F)$ e $\|u\|_{\mathcal{J}} \leq \|u\|_{\mathcal{I}}$, para todo u de posto finito. Não é difícil verificar que, de fato, a relação $\leq$ definida na classe dos ideais de operadores de Banach é uma ordem parcial.

Um ideal $\mathcal{I}$ é dito ideal maximal se nenhum ideal é “maior” do que $\mathcal{I}$, no sentido da ordem definida. Mais precisamente,

Definição 4.3. Seja $\mathcal{I}$ um ideal de Banach. Dizemos que $\mathcal{I}$ é um *ideal maximal* se, para todo ideal de Banach $\mathcal{J}$, tal que $\mathcal{I} \leq \mathcal{J}$ implicar em $\mathcal{I} = \mathcal{J}$.

No entanto, nem sempre é fácil ou viável tentar provar se um determinado ideal é maximal ou não por meio da definição e, para isso, geralmente nos valem de uma caracterização para ideais maximais por meio de ideais finitamente gerados. Um ideal de Banach $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ é dito *finitamente gerado* se, para quaisquer E e F espaços de Banach e $T \in \mathcal{I}(E; F)$, tem-se

$$\|T\|_{\mathcal{I}} = \sup\{\|Q_L \circ T \circ I_M\|_{\mathcal{I}}; M \in \mathfrak{F}(E), L \in \mathfrak{CF}(F)\}$$

onde $Q_L : F \rightarrow F/L$ é o operador quociente dado por $Q_L(x) = \bar{x}$.

Teorema 4.1. [33, Theorem 8.11] *Seja $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ um ideal de Banach. Então, $\mathcal{I}$ é maximal se, e somente se, é finitamente gerado.*

Vejamos agora a definição de um operador especial cuja natureza é muito importante para a demonstração do nosso resultado de maximalidade e também nos demais resultados do capítulo.

Dado $T \in \mathcal{L}(E; F)$ definamos a aplicação bilinear $A_T : E \times F' \rightarrow \mathbb{K}$ dada por $A_T(x, \psi) = \psi(T(x))$. Assim, a linearização $\varphi_T : E \otimes F' \rightarrow \mathbb{K}$ de A_T é um operador linear. Aqui usamos o símbolo φ_T para a linearização de A_T fazendo alusão ao fato de que esta é um funcional linear.

O lema a seguir caracteriza a continuidade do funcional φ_T em termos da quasi-norma $\alpha_{X,Y}$.

Lema 4.1. *Seja $T \in \mathcal{L}(E; F)$ e suponha que $\alpha_{X,Y}$ é uma quasi-norma em $E \otimes F'$. Então:*

- (a) *Se $T \in \mathcal{L}_{X;Y^{\text{dual}}}(E; F)$, então $\varphi_T : E \otimes_{\alpha_{X,Y}} F' \rightarrow \mathbb{K}$ é contínuo e $\|\varphi_T\| \leq \|T\|_{X;Y^{\text{dual}}}$.*
- (b) *Se, além disso, X e Y são finitamente determinadas, então vale a equivalência: $\varphi_T : E \otimes F' \rightarrow \mathbb{K}$ é contínuo se, e somente se, $T \in \mathcal{L}_{X;Y^{\text{dual}}}(E; F)$. Neste caso, tem-se $\|T\|_{X;Y^{\text{dual}}} = \|\varphi_T\|$.*

Demonstração. (a) Se $u = \sum_{j=1}^n x_j \otimes \psi_j \in E \otimes F'$, então

$$\begin{aligned} |\varphi_T(u)| &= \left| \sum_{j=1}^n \psi_j(T(x_j)) \right| \leq \sum_{j=1}^n |\psi_j(T(x_j))| \\ &= \|(\psi_j)_{j=1}^n\|_{Y(F')} \sum_{j=1}^n \left| \frac{\psi_j}{\|(\psi_j)_{j=1}^n\|_{Y(F')}}(T(x_j)) \right|. \end{aligned}$$

Como

$$\sum_{j=1}^n \left| \frac{\psi_j}{\|(\psi_j)_{j=1}^n\|_{Y(F')}}(T(x_j)) \right| \leq \|(T(x_j))_{j=1}^n\|_{Y^{\text{dual}}(F)} \leq \|T\|_{X;Y^{\text{dual}}} \|(\psi_j)_{j=1}^n\|_{X(E)},$$

segue que

$$|\varphi_T(u)| \leq \|T\|_{X;Y^{\text{dual}}} \|(\psi_j)_{j=1}^n\|_{X(E)} \|(\psi_j)_{j=1}^n\|_{Y(F')}$$

e tomando o ínfimo sobre as representações de u , obtemos $|\varphi_T(u)| \leq \|T\|_{X;Y^{\text{dual}}} \alpha_{X,Y}(u)$.

Logo, φ_T é contínuo e $\|\varphi_T\| \leq \|T\|_{X;Y^{\text{dual}}}$.

(b) Suponha que φ_T é contínuo. Para $(x_j)_{j=1}^\infty \in X(E)$ e $n \in \mathbb{N}$, da continuidade de φ_T , temos

$$\|(T(x_j))_{j=1}^n\|_{Y^{\text{dual}}(F)} = \sup_{(\psi_j)_{j=1}^\infty \in B_{Y(F')}} \left| \sum_{j=1}^n \psi_j(T(x_j)) \right| = \sup_{(\psi_j)_{j=1}^\infty \in B_{Y(F')}} \left| \varphi_T \left(\sum_{j=1}^n x_j \otimes \psi_j \right) \right|$$

$$\begin{aligned} &\leq \sup_{(\psi_j)_{j=1}^\infty \in B_{Y(F')}} \|\varphi_T\| \alpha_{X,Y} \left(\sum_{j=1}^n x_j \otimes \psi_j \right) \\ &\leq \|\varphi_T\| \| (x_j)_{j=1}^n \|_{X(E)} \sup_{(\psi_j)_{j=1}^\infty \in B_{Y(F')}} \| (\psi_j)_{j=1}^n \|_{Y^{\text{dual}}(F)}. \end{aligned}$$

Como X e Y são finitamente determinados (portanto, Y^{dual} também o é), tomando o supremo sobre $n \in \mathbb{N}$ segue que

$$\|(T(x_j))_{j=1}^\infty\|_{Y^{\text{dual}}(F)} \leq \|\varphi_T\| \| (x_j)_{j=1}^\infty \|_{X(E)}.$$

Assim tem-se $T \in \mathcal{L}_{X;Y^{\text{dual}}}(E; F)$ e $\|T\|_{X;Y^{\text{dual}}} \leq \|\varphi_T\|$. Com a desigualdade contrária do item (a), segue a igualdade das normas. $\square$

Agora estamos em condições de enunciar o resultado mais importante do capítulo o qual fornece condições para a maximalidade de $\mathcal{L}_{X;Y^{\text{dual}}}$. É importante termos em mente um fato que será utilizada na demonstração do próximo teorema: Dado $N \in \mathfrak{F}(F')$ existe $L \in \mathfrak{CF}(F)$ tal que $(F/L)' \stackrel{1}{=} N$. Este fato decorre do Exercício 4.5.31 em [11] juntamente com [13, Proposition 1.9] e [13, Remark 6].

Vamos ao nosso teorema de maximalidade.

Teorema 4.2. *Sejam X e Y classes de seqüências finitamente determinadas e suponha que $\alpha_{X,Y}$ é uma quasi-norma tensorial. Então, o ideal de Banach $\mathcal{L}_{X;Y^{\text{dual}}}$ é maximal.*

Demonstração. A prova consiste essencialmente em mostrar que, nestas condições, $\mathcal{L}_{X;Y^{\text{dual}}}$ é um ideal finitamente gerado. Seja $T \in \mathcal{L}_{X;Y^{\text{dual}}}(E; F)$ e denotemos

$$s := \sup\{\|Q_L \circ T \circ I_M\|_{X;Y^{\text{dual}}}; M \in \mathfrak{F}(E), L \in \mathfrak{CF}(F)\}.$$

Se $M \in \mathfrak{F}(E)$ e $L \in \mathfrak{CF}(F)$, pela propriedade de ideal, temos $Q_L \circ T \circ I_M$ e

$$\|Q_L \circ T \circ I_M\|_{X;Y^{\text{dual}}} \leq \|Q_L\| \|T\|_{X;Y^{\text{dual}}} \|I_M\|.$$

Com um cálculo simples, é fácil mostrar que $\|Q_L\| = \|I_M\| = 1$ e então

$$\|Q_L \circ T \circ I_M\|_{X;Y^{\text{dual}}} \leq \|T\|_{X;Y^{\text{dual}}}$$

quaisquer que sejam $M \in \mathfrak{F}(E)$ e $L \in \mathfrak{CF}(F)$. Tomando o supremo na expressão acima, sobre M e L , obtemos $s \leq \|T\|_{X;Y^{\text{dual}}}$.

Por outro lado, consideremos $u \in E \otimes F'$ e $\varepsilon > 0$. Como $\alpha_{X,Y}$ é finitamente gerado, existem $M \in \mathfrak{F}(E)$, $N \in \mathfrak{CF}(F')$ e uma representação $u = \sum_{j=1}^n x_j \otimes \varphi_j \in M \otimes N$ tais

que

$$\alpha_{X,Y}(u; M \otimes N) \leq (1 + \varepsilon)\alpha_{X,Y}(u; E \otimes F'). \quad (4.2)$$

Seja $L \in \mathfrak{CF}(F)$ tal que $(F/L)' \stackrel{1}{=} N$, cujo isomorfismo é dado por $Q_L^* : (F/L)' \rightarrow N$. Tome $\psi_j \in (F/L)'$ tais que $Q_L^*(\psi_j) = \varphi_j, j = 1, \dots, n$ e veja que

$$M \otimes_{\alpha_{X,Y}} N \xrightarrow{Id_M \otimes (Q_L^*)^{-1}} M \otimes_{\alpha_{X,Y}} (F/L)' \xrightarrow{\varphi_{Q_L \circ T \circ I_M}} \mathbb{K}$$

é um operador linear e contínuo. De fato, como $\alpha_{X,Y}$ é uniforme, então $Id_M \otimes (Q_L^*)^{-1}$ é linear e contínuo. Além disso, $\varphi_{Q_L \circ T \circ I_M}$ é a linearização da aplicação bilinear $A_{Q_L \circ T \circ I_M} : E \times (F/L)' \rightarrow \mathbb{K}$ dada por $A_{Q_L \circ T \circ I_M}(x, \gamma) = \gamma(Q_L \circ T \circ I_M(x))$, o qual é contínuo devido ao Lema 4.1. Logo,

$$\begin{aligned} |\varphi_T(u)| &= \left| \sum_{j=1}^n \varphi_j(T(x_j)) \right| = \left| \sum_{j=1}^n Q_L^*(\psi_j)(T(x_j)) \right| = \left| \sum_{j=1}^n \psi_j(Q_L(T(x_j))) \right| \\ &= \left| \sum_{j=1}^n A_{Q_L \circ T \circ I_M}(x_j, \psi_j) \right| = \left| \sum_{j=1}^n \varphi_{Q_L \circ T \circ I_M}(x_j \otimes \psi_j) \right| \\ &= \left| \sum_{j=1}^n \varphi_{Q_L \circ T \circ I_M} \circ (Id_M \otimes (Q_L^*)^{-1})(x_j \otimes \varphi_j) \right| \end{aligned}$$

e devido à linearidade e continuidade do operador $\varphi_{Q_L \circ T \circ I_M} \circ (Id_M \otimes (Q_L^*)^{-1})$, segue que

$$\begin{aligned} |\varphi_T(u)| &= \left| \sum_{j=1}^n \varphi_{Q_L \circ T \circ I_M} \circ (Id_M \otimes (Q_L^*)^{-1})(x_j \otimes \varphi_j) \right| \\ &= \left| \varphi_{Q_L \circ T \circ I_M} \circ (Id_M \otimes (Q_L^*)^{-1}) \left(\sum_{j=1}^n x_j \otimes \varphi_j \right) \right| \\ &\leq \|\varphi_{Q_L \circ T \circ I_M}\| \|Id_M \otimes (Q_L^*)^{-1}\| \alpha_{X,Y}(u; M \otimes N). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Note que o Lema 4.1(b) já nos fornece $\|\varphi_{Q_L \circ T \circ I_M}\| = \|Q_L \circ T \circ I_M\| \leq s$. Além disso, pelo fato de $\alpha_{X,Y}$ ser uma quase norma tensorial (em particular, uniforme), temos $\|Id_M \otimes (Q_L^*)^{-1}\| \leq \|Id_M\| \|(Q_L^*)^{-1}\| = 1$. Logo, por (4.2) e (4.3), obtemos

$$|\varphi_T(u)| \leq s(1 + \varepsilon)\alpha_{X,Y}(u; E \otimes F')$$

para todo $\varepsilon > 0$. Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0^+$, temos

$$|\varphi_T(u)| \leq s \cdot \alpha_{X,Y}(u; E \otimes F').$$

Isto e o Lema 4.1 implicam em $\|T\|_{X,Y^{\text{dual}}} = \|\varphi_T\| \leq s$ e o resultado está demonstrado. $\square$

Uma observação importante é que o teorema anterior e o Lema 4.1 (b) também é válido se X é uma classe de seqüências finitamente dominada e, neste caso, a demonstração segue de forma inteiramente análoga e pode ser encontrada em [25]. Segue alguns exemplos decorrentes do Teorema 4.2.

Exemplo 4.4. O teorema anterior recupera casos conhecidos de ideais maximais, entre eles:

a) Se $1 \leq p \leq q < \infty$, então o ideal $(\Pi_{q,p}, \pi_{q,p}) = (\mathcal{L}_{\ell_p^w(\cdot), [\ell_{q^*}(\cdot)]^{\text{dual}}}, \pi_{q,p})$ é maximal. Com efeito, $\alpha_{\ell_p^w(\cdot), \ell_{q^*}(\cdot)}$ é uma norma tensorial e $\ell_p^w(\cdot)$ e $\ell_{q^*}(\cdot)$ são finitamente determinadas, logo o Teorema 4.2 garante o resultado.

b) Analogamente, tem-se que $(\mathcal{D}_{q,p}, d_{q,p})$ é um ideal maximal uma vez que $\alpha_{\ell_p(\cdot), \ell_{q^*}^w(\cdot)}$ é uma norma tensorial e as classes envolvidas são finitamente determinadas.

Exemplo 4.5. O Teorema 4.2 também gera novos ideais maximais. Se $1 \leq p \leq q < \infty$, o ideal $\mathcal{L}_{\ell_p^u(\cdot), \ell_q(\cdot)} = \mathcal{L}_{\ell_p^u(\cdot), [\ell_{q^*}^w(\cdot)]^{\text{dual}}}$ é maximal. De fato, sabemos que as classes de seqüências $X = \ell_p^u(\cdot)$ e $Y = \ell_{q^*}^w(\cdot)$ são monótonas, linearmente estáveis, finitamente injetivas, X é finitamente dominada e Y é finitamente determinada. Resta-nos mostrar que $\varepsilon \leq \alpha_{X,Y}$ para concluirmos que $\alpha_{X,Y}$ é uma quasi-norma tensorial (Proposição 4.2) e, assim, pelo Teorema 4.2, obtermos a maximalidade de $\mathcal{L}_{\ell_p^u(\cdot), \ell_q(\cdot)}$. Para tanto, sejam $\varphi \in E', \psi \in F'$ e $u = \sum_{j=1}^n x_j \otimes y_j \in E \otimes F$. Daí,

$$\left| \sum_{j=1}^n \varphi(x_j) \psi(y_j) \right| \leq \sum_{j=1}^n |\varphi(x_j)| |\psi(y_j)| \leq \left(\sum_{j=1}^n |\varphi(x_j)|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^n |\psi(y_j)|^{p^*} \right)^{1/p^*}$$

e tomando o supremo sobre $\varphi \in B_{E'}$ e $\psi \in B_{F'}$, obtemos $\varepsilon(u) \leq \|(x_j)_{j=1}^n\|_{w,p} \|(y_j)_{j=1}^n\|_{w,p^*}$. Como $p \leq q$, então $q^* \leq p^*$ e, conseqüentemente, $\ell_{q^*}^w(F) \xhookrightarrow{1} \ell_{p^*}^w(F)$. Desta forma, temos

$$\varepsilon(u) \leq \|(x_j)_{j=1}^n\|_{w,p} \|(y_j)_{j=1}^n\|_{w,q^*}$$

e assim $\varepsilon(u) \leq \alpha_{X,Y}(u)$ qualquer seja $u \in E \otimes F$.

O Corolário 3.1 estabelece uma equivalência entre os operadores e seus bi-adjuntos no que diz respeito à pertinência ao ideal $\mathcal{L}_{X,Y}$. Como consequência do Teorema 4.2, podemos obter a mesma equivalência para os ideais da forma $\mathcal{L}_{X,Y^{\text{dual}}}$. Em sendo $\mathcal{L}_{X,Y^{\text{dual}}}$ maximal, o resultado [18, Corollary 4, p. 207] nos fornece o

Corolário 4.1. *Seja $u \in \mathcal{L}(E; F)$. Sob as condições do Teorema 4.2, temos $T \in \mathcal{L}_{X,Y^{\text{dual}}}(E; F)$ se, e somente se, $T'' \in \mathcal{L}_{X,Y^{\text{dual}}}(E''; F'')$. Neste caso, $\|T\|_{X,Y^{\text{dual}}} = \|T''\|_{X,Y^{\text{dual}}}$.*

4.2 O dual topológico de $E \otimes_{\alpha_{X,Y}} F$

É sabido da teoria de produto tensorial que podemos enxergar funcionais lineares e contínuos de um produto tensorial topológico como classes de formas bilineares e também como classes de operadores lineares e contínuos (veja [33, Section 2.2]). Nesta última seção, apresentamos algo análogo no contexto de ideais caracterizados por classes de seqüências. As condições com as quais a norma $\alpha_{X,Y}$ é quasi-norma razoável serão aceitas tacitamente neste capítulo.

Antes de apresentarmos nosso primeiro resultado que caracteriza o dual em termos de operadores lineares, faz-se necessário um lema técnico.

Lema 4.2. *Sejam F um espaço de Banach e Y uma classe de seqüências esfericamente completa, linearmente estável, finitamente determinada (ou dominada) e finitamente injetiva. Se $(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in Y^{\text{dual}}(F')$, então*

$$\|(\varphi_j)_{j=1}^\infty\|_{Y^{\text{dual}}(F')} = \sup_{(y_j)_{j=1}^\infty \in B_{Y(F)}} \left| \sum_{j=1}^\infty \varphi_j(y_j) \right|.$$

Demonstração. Observe que estamos nas condições do Teorema 2.2(b) e, portanto, a aplicação $J : Y^{\text{dual}}(F') \rightarrow Y(F)'$ é uma isometria.

$$\|(\varphi_j)_{j=1}^\infty\|_{Y^{\text{dual}}(F')} = \|J((\varphi_j)_{j=1}^\infty)\|_{Y(F)'} = \sup_{\Psi \in B_{Y(F)'}} |\Psi(J((\varphi_j)_{j=1}^\infty))| \quad (4.4)$$

Tendo em mente que $J_{Y(F)}(Y(F))$ é um subconjunto normante para $Y(F)'$, a igualdade (4.4) nos fornece

$$\begin{aligned} \|(\varphi_j)_{j=1}^\infty\|_{Y^{\text{dual}}(F')} &= \sup_{\Psi \in B_{J_{Y(F)}(Y(F))}} |\Psi(J((\varphi_j)_{j=1}^\infty))| \\ &= \sup_{(y_j)_{j=1}^\infty \in B_{Y(F)}} |J_{Y(F)}((y_j)_{j=1}^\infty)(J((\varphi_j)_{j=1}^\infty))| \\ &= \sup_{(y_j)_{j=1}^\infty \in B_{Y(F)}} |J((\varphi_j)_{j=1}^\infty)((y_j)_{j=1}^\infty)| \\ &= \sup_{(y_j)_{j=1}^\infty \in B_{Y(F)}} \left| \sum_{j=1}^\infty \varphi_j(y_j) \right|. \end{aligned}$$

□

Teorema 4.3. *Sejam X e Y classes de seqüências linearmente estáveis e finitamente determinadas, com Y finitamente injetiva. Então,*

$$(E \otimes_{\alpha_{X,Y}} F)' \stackrel{1}{=} \mathcal{L}_{X;Y^{\text{dual}}}(E; F').$$

Demonstração. Defina $\Psi : \mathcal{L}_{X;Y^{\text{dual}}}(E; F') \rightarrow (E \otimes_{\alpha_{X,Y}} F)'$ dada por $T \mapsto \psi(T)$ onde $\Psi(T)$ é a linearização da forma bilinear $A_T : E \times F \rightarrow \mathbb{K}$ dada por $A_T(x, y) = T(x)(y)$. Para provarmos a boa definição da Ψ , basta mostrarmos que $\Psi(T)$ é contínua qualquer que seja $T \in \mathcal{L}_{X;Y^{\text{dual}}}(E; F')$. Considerando $J_F : F \rightarrow F''$, temos

$$\begin{aligned} |\Psi(T)(u)| &\leq \sum_{j=1}^n |T(x_j)(y_j)| = \sum_{j=1}^n |J_F(y_j)(T(x_j))| \\ &= \|(J_F(y_j))_{j=1}^n\|_{Y(F'')} \sum_{j=1}^n \left| \frac{J_F(y_j)}{\|(J_F(y_j))_{j=1}^n\|_{Y(F'')}} (T(x_j)) \right| \end{aligned}$$

Como $\left(\frac{J_F(y_j)}{\|(J_F(y_j))_{j=1}^n\|_{Y(F'')}} \right)_{j=1}^n \in B_{Y(F'')}$, segue que

$$\sum_{j=1}^n \left| \frac{J_F(y_j)}{\|(J_F(y_j))_{j=1}^n\|_{Y(F'')}} (T(x_j)) \right| \leq \|(T(x_j))_{j=1}^n\|_{Y^{\text{dual}}(F')}.$$

Disto, do fato de que $T \in \mathcal{L}_{X;Y^{\text{dual}}}(E; F')$ e da estabilidade linear de Y , obtemos

$$\begin{aligned} |\Psi(T)(u)| &\leq \|(T(x_j))_{j=1}^n\|_{Y^{\text{dual}}(F')} \|(J_F(y_j))_{j=1}^n\|_{Y(F'')} \\ &\leq \|T\|_{X;Y^{\text{dual}}} \|(x_j)_{j=1}^n\|_{X(E)} \|(y_j)_{j=1}^n\|_{Y(F)} \end{aligned}$$

Portanto,

$$|\Psi(T)(u)| \leq \|T\|_{X;Y^{\text{dual}}} \alpha_{X,Y}(u)$$

e segue a boa definição da Ψ . Uma vez bem definida, é fácil mostrar que Ψ é linear e a expressão anterior nos fornece ainda $\|\Psi(T)\| \leq \|T\|_{X;Y^{\text{dual}}}$, isto é, a aplicação Ψ é contínua.

Agora, verifiquemos que Ψ é sobrejetiva e uma isometria. Sendo $\varphi \in (E \otimes_{\alpha_{X,Y}} F)'$, defina $T_\varphi : E \rightarrow F'$ dado por $T_\varphi(x)(y) = \varphi(x \otimes y)$. É fácil verificar que T_φ está bem definido é linear e contínuo. Pelo lema anterior, temos

$$\begin{aligned} \|(T_\varphi(x_j))_{j=1}^n\|_{Y^{\text{dual}}(F')} &= \sup_{(y_j)_{j=1}^\infty \in B_{Y(F)}} \left| \sum_{j=1}^n T_\varphi(x_j)(y_j) \right| = \sup_{(y_j)_{j=1}^\infty \in B_{Y(F)}} \left| \sum_{j=1}^n \varphi(x_j \otimes y_j) \right| \\ &= \sup_{(y_j)_{j=1}^\infty \in B_{Y(F)}} \left| \varphi \left(\sum_{j=1}^n x_j \otimes y_j \right) \right| \\ &\leq \|\varphi\| \|(x_j)_{j=1}^n\|_{X(E)} \sup_{(y_j)_{j=1}^\infty \in B_{Y(F)}} \|(y_j)_{j=1}^n\|_{Y(F)}. \end{aligned}$$

Disto e do fato de que Y é finitamente determinada, segue-se que

$$\|(T_\varphi(x_j))_{j=1}^n\|_{Y^{\text{dual}}(F')} \leq \|\varphi\|(x_j)_{j=1}^n\|_{X(E)}$$

e pela Proposição 1.10 temos $T_\varphi \in \mathcal{L}_{X;Y^{\text{dual}}}(E; F')$. Um cálculo imediato mostra que $\Psi(T_\varphi) = \varphi$ e a expressão acima nos dá

$$\|T_\varphi\|_{X;Y^{\text{dual}}} \leq \|\varphi\|. \quad (4.5)$$

Agora, considere $\gamma : (E \otimes_{\alpha_{X,Y}} F)' \rightarrow \mathcal{L}_{X;Y^{\text{dual}}}(E; F')$ dado por $\gamma(\varphi) = T_\varphi$. Do que já fizemos, é claro que γ está bem definida, é linear (fácil) e a desigualdade (4.5) implica na continuidade de γ . Além disso, é imediato que

$$\Psi \circ \gamma = \text{Id}_{(E \otimes_{\alpha_{X,Y}} F)'} \quad \text{e} \quad \gamma \circ \Psi = \text{Id}_{\mathcal{L}_{X;Y^{\text{dual}}}(E; F')}$$

e, portanto,

$$\|\varphi\| = \|\Psi \circ \gamma(\varphi)\| \leq \|\gamma(\varphi)\|_{X;Y^{\text{dual}}} \leq \|\varphi\|.$$

□

Exemplo 4.6. Sejam $1 \leq p \leq \infty$, $X = \ell_p^w(\cdot)$ e $Y = \ell_p(\cdot)$. Tendo em mente as expressões apresentadas no Exemplo 4.2, temos

$$(E \otimes_{d_p} F)' = (E \otimes_{\alpha_{\ell_p^w(\cdot), \ell_p(\cdot)}} F)' \stackrel{1}{=} \mathcal{L}_{\ell_p^w(\cdot), \ell_p(\cdot)}(E; F') = \Pi_{p^*}(E; F')$$

e

$$(E \otimes_{g_p} F)' = (E \otimes_{\alpha_{\ell_p(\cdot), \ell_p^w(\cdot)}} F)' \stackrel{1}{=} \mathcal{L}_{\ell_p(\cdot), \ell_p^w(\cdot)}(E; F') = \mathcal{D}_p(E; F'),$$

ambos resultados bem conhecidos (veja [33, Section 6.3]).

Exemplo 4.7. Um resultado novo. Sejam $1 \leq p \leq q \leq \infty$, $X = \ell_p^{\text{mid}}(\cdot)$ e $Y = \ell_{q^*}(\cdot)$, com $p \neq \infty$. Como X e Y satisfazem as condições do teorema anterior, temos

$$(E \otimes_{\alpha_{\ell_p^{\text{mid}}(\cdot), \ell_{q^*}(\cdot)}} F)' \stackrel{1}{=} \mathcal{L}_{\ell_p^{\text{mid}}(\cdot), \ell_{q^*}(\cdot)}(E; F),$$

cujos ideal é a classe dos operadores absolutamente mid- $(q; p)$ -somantes apresentado no Exemplo 3.4.

O próximo resultado caracteriza funcionais lineares do produto tensorial $E \otimes_{\alpha_{X,Y}} F$ como formas bilineares de $E \times F$ em $\mathbb{K}$ e sua demonstração será omitida por conta de nossos objetivos e porque é, de certa forma, muito semelhante à demonstração do Teorema 4.3.

A definição abaixo é usada no enunciado do resultado.

Definição 4.4. Uma classe de seqüências X é dita *finitamente limitadamente completa* (abreviadamente FBC) se, para todo $n \in \mathbb{N}$, $(x_j)_{j=1}^n \in X(E)$ e $(\lambda_j)_{j=1}^n \in \ell_\infty$, tem-se

$$\|(\lambda_j x_j)_{j=1}^n\|_{X(E)} \leq \|(\lambda_j)_{j=1}^n\|_\infty \|(x_j)_{j=1}^n\|_{X(E)}.$$

Teorema 4.4. *Sejam X e Y classes de seqüências finitamente determinadas. Se X ou Y é FBC, então*

$$(E \otimes_{\alpha_{X,Y}} F)' \stackrel{1}{=} \mathcal{L}_{X,Y;\ell_1}(E, F; \mathbb{K}).$$

Demonstração. Veja [9, Theorem 3.1]. □

Em [18, Exercise 17.2]) encontra-se o seguinte fato: Um ideal $\mathcal{I}$ é maximal se, e somente se, existe uma norma tensorial finitamente gerada tal que

$$\mathcal{I}(E; F) \stackrel{1}{=} (E \otimes_\alpha F')' \cap (E; F).$$

Em virtude disso, e para referências futuras, vamos enunciar o resultado complementar apresentado em [9, Theorem 3.3]. Este resultado dá conta de obter a maximalidade do ideal $\mathcal{L}_{X,Y^{\text{dual}}}$ e, para isso, estaremos considerando X e Y classes de seqüências linearmente estáveis, monótonas, finitamente injetivas e $\varepsilon \leq \alpha_{X,Y}$. Eis a caracterização.

Teorema 4.5. [9, Theorem 3.3] *Se X e Y são classes de seqüências finitamente determinadas. Então, para todo E e F Banach, tem-se*

$$\mathcal{L}_{X,Y^{\text{dual}}}(E; F) \stackrel{1}{=} (E \otimes_{\alpha_{X,Y}} F')' \cap \mathcal{L}(E; F).$$

Referências Bibliográficas

- [1] ACHOUR, D.; BELAIB, M. T., *Tensor norms related to the space of Cohen p -nuclear multilinear mappings*, Ann. Funct. Anal. **2**, n. 1, 2011, 128–138.
- [2] ALEJANDRO CHÁVEZ-DOMÍNGUEZ, J.; CHEN D.; LI, L., *p -converging operators and Dunford-Pettis property of order p* , J. Math. Anal. Appl. **461**, 2018, 1043–1066.
- [3] APIOLA, H., *Duality between spaces of p -summable sequences, (p, q) -summing operators and characterizations of nuclearity*, Mathematische Annalen **219**, 1976, 53–64.
- [4] BERNARDINO, A. T. L.; *Remarks on cotype and absolutely summing multilinear operators*, Cubo A. Mathematical Journal **14**, n.1, 2012, 21–27.
- [5] BLASCO O.; BOTELHO G.; PELLEGRINO D.; RUEDA P., *Summability of multilinear mappings: Littlewood, Orlicz and beyond*, Monatsh Math. **163**, 2011, 131–147.
- [6] BOTELHO, G.; CAMPOS, J. R., *On the transformation of vector-valued sequences by linear and multilinear operators*, Monatsh Math **183**, 2017, 415–435.
- [7] BOTELHO, G.; CAMPOS, J. R., *Duality theory for generalized summing linear operators*, Collectanea Mathematica, v. 74, n. 2, 2022, p, 457–472.
- [8] BOTELHO, G.; CAMPOS, J. R., *Type and cotype of multilinear operators*, Rev. Mat. Complut. **29**, n. 3, 2016, 659–676.
- [9] BOTELHO, G.; CAMPOS, J. R.; NASCIMENTO L., *Maximal Ideals of Generalized Summing Linear Operators*, Mediterr. J. Math. **24**, 2024.
- [10] BOTELHO, G.; CAMPOS, J. R.; SANTOS, J., *Operator ideals related to absolutely summing and Cohen strongly summing operators*, Pacific J. Math. **287**, 2017, 1–5.
- [11] BOTELHO, G.; PELLEGRINO, D.; TEIXEIRA, E., *Fundamentos de Análise Funcional*, Sociedade Brasileira de Matemática, 2ª Ed., 2015.

- [12] BOTELHO, G.; WOOD, R., *Hyper-ideals of multilinear and two-sided polynomial ideals generated by sequence classes*, Mediterr . J. Math. **20**, 2023, 35.
- [13] BREZIS, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and partial differential equations*, Springer, 2011.
- [14] BU, Q.; EMANNUELE, G., *The projective and injective tensor products of $L^P[0, 1]$ and X being Grothendieck spaces*, Rocky Mountain J. Math. **35**, n. 3, 2005, 713–726.
- [15] CAMPOS, J. R.; SANTOS, J., *Mid summable sequences: an anisotropic approach*, Colloq. Math. **161**, 2020, 35–49.
- [16] COHEN, J. S., *Absolutely p -summing, p -nuclear operators and their conjugates*, Mathematische Annalen **201**, 1973, 177–200.
- [17] ÇALISKAN, E.; PELLEGRINO D., *On the multilinear generalizations of the concept of absolutely summing operators*, Rocky Mountain J. Math. **37**, 2007, 1137–1154.
- [18] DEFANT, A.; FLORET, K., *Tensor Norms and Operator Ideals*, New York (NY), North Holland, 1993.
- [19] DIESTEL, J.; JARCHOW, T.; TONGE, A., *Absolutely Summing Operators*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **43**, Cambridge University Press, 1995.
- [20] DVORETZKY, A.; ROGERS, C., *Absolutely and unconditional convergence in normed linear spaces*, Proceedings of the National Academy of Sciences of USA **36**, 1950, 192–197.
- [21] GROTHENDIECK, A., *Sur certaines classes de suites dans les espaces de Banach et le théorème de Dvoretzky-Rogers*. Boletim da Sociedade Matemática de São Paulo **8**, 1956, 81–110.
- [22] LEITE, F. S. S., *Operadores Lineares Cohen Fortemente Somantes*, Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal da Paraíba, 2016, 106p.
- [23] MADRUGA, A. C., *Produto tensorial entre espaços de Banach e aplicações*, Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa - PB, 2018, 96p.
- [24] MATOS, M. C., *Nonlinear absolutely summing mappings*, Math. Nachr. **258**, 2003, 71–89.

- [25] NASCIMENTO, L., *Quasi-normas tensoriais e operadores associados no ambiente de classes de sequências* (Tese), UFPB, 2021.
- [26] PELLEGRINO D., *Cotype and nonlinear absolutely summing mappings*, Math. Proc. R. Ir. Acad. **105**, 2005, 75–91.
- [27] PELLEGRINO, D.; RUEDA, P.; SANCHEZ-PEREZ, E. A., *Surveying the spirit of absolute summability on multilinear operators and homogeneous polynomials*, Rev. R. Acad. Cienc. Exacts. Fís. Nat. Ser. A Mat. RACSAM **110**, 2016, 285–302.
- [28] PIETSCH, A., *Absolut p -summierende Abbildungen in normierten Räumen*, Studia Math. **28**, 1967, 333–353.
- [29] PIETSCH, A., *Operator Ideals*, New York (NY), North Holland, 1980.
- [30] PIETSCH A., *Ideals of multilinear functionals*, Proceedings of the second conference on Operator Algebras, Ideals and their Applications in theoretical Physics, Teubner-Texte, Leipzig, 1983, 185–199.
- [31] RIBEIRO, J.; SANTOS, F., *Generalized multiple summing multilinear operators on Banach spaces*, Mediterr. J. Math. **16**, 2019, 1–20.
- [32] RIBEIRO, J.; SANTOS, F., *Absolutely summing polynomials*, Methods Funct. Anal. Topology **27**, 2021, 74–87.
- [33] RYAN, R. A., *Introduction to tensor products of Banach spaces*, Springer-Verlag, 2002.