Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Teoria espectral para semigrupos de operadores lineares e limitados e aplicações

Maria Jaislayne Moisés da Silva

João Pessoa – PB
Agosto de 2021

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Teoria espectral para semigrupos de operadores lineares e limitados e aplicações

por

Maria Jaislayne Moisés da Silva

sob a orientação do

Prof. Dr. Flank David Morais Bezerra

João Pessoa – PB
Agosto de 2021

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S586t Silva, Maria Jaislayne Moisés da.
Teoria espectral para semigrupos de operadores lineares e limitados e aplicações / Maria Jaislayne Moisés da Silva. - João Pessoa, 2021.
186 f. : il.

Orientação: Flank David Morais Bezerra.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Matemática - Semigrupos. 2. Operadores setoriais. 3. Semigrupos de operadores lineares e limitados. 4. Potências fracionárias. 5. Operadores fechados e densamente definidos. I. Bezerra, Flank David Morais. II. Título.

UFPB/BC CDU (043)512.53

Elaborado por GRACILENE BARBOSA FIGUEIREDO - CRB-15/794

Teoria espectral para semigrupos de operadores lineares e limitados e aplicações

por

Maria Jaislayne Moisés da Silva [1]

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós–Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada em 12 de agosto de 2021.

Banca Examinadora:

Flank DM Bezerra

Prof. Dr. Flank David Morais Bezerra – UFPB
(Orientador)

Prof. Dr. Marcelo José Dias Nascimento – UFSCar
(Examinador Externo)

Gleiciane da Silva Aragão

Profa. Dra. Gleiciane da Silva Aragão – UNIFESP
(Examinadora Externa)

Profa. Dra. Silvia Sastre-Gómez – Universidad de Sevilla
(Examinadora Externa)

[1]A autora foi bolsista da CAPES durante todo o curso de mestrado acadêmico em Matemática da UFPB.

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, à Deus por ter me dado força e coragem durante toda essa trajetória, e por tudo o que Ele tem planejado para mim.
Sou a primeira da minha família a ingressar em uma universidade federal pública, a primeira a concluir um ensino superior, e a ingressar em um programa de pós-graduação. Não poderia deixar de reconhecer que tudo isso só foi possível graças aos aos meus pais e aos sacrifícios que ambos precisaram fazer para que fosse possível que eu trilhasse meu caminho e seguisse os meus sonhos. Sem eles, não haveria sequer uma vírgula neste trabalho. Então, o meu agradecimento infinito à minha mãe, Jailma, por todo o apoio, companheirismo e amor sublime desde sempre; e ao meu pai, Zé Moisés, o qual desde sempre me incentivou a estudar e buscar "ser alguém"na vida.
Agradeço ao meu irmãozinho, Moisés, o meu melhor amigo, companheiro e ouvinte fiel, por todo encorajamento, alegrias, momentos de descontração, apoio e por todas as infinitas coisas que jamais caberiam aqui escritas ou em qualquer outro lugar.
Agradeço aos meus amigos e colegas de curso por todos os momentos compartilhados, incentivos, e por toda ajuda e conhecimentos trocados.
Agradeço à todos os meus professores que contribuíram de alguma forma na minha caminhada até aqui, em especial, ao meu orientador, Flank Bezerra, por todos os ensinamentos, toda a paciência e por toda a ajuda e compreensão durante os estudos para a realização deste trabalho.
Agradeço aos professores Marcelo, Gleiciane e Silvia por terem aceitado o convite para compor a banca examinadora da minha dissertação.
Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

Aos meus pais, Jailma e Zé Moisés.
Ao meu irmão, Moisés.

Resumo

Neste trabalho dissertamos sobre a teoria espectral para semigrupos de operadores lineares e limitados; a saber, estudamos a teoria espectral de operadores fechados e densamente definidos em espaços de Banach, semigrupos de operadores lineares e limitados, operadores setoriais no sentido de Henry, e a teoria de potências fracionárias para operadores lineares do tipo K-positivo no sentido do Amann. Além disso, apresentamos algumas aplicações desta teoria a partir do estudo dos artigos: A. Cwiszewski e K. P. Rybakowski, "Dynamics of strongly damped beam equation", Journal of Differential Equations, (2009); S. Chen e R. Triggiani, "Proof of extensions of two conjectures on structural damping for elastic systems", Pacific J. Math., (1989); J. A. Goldstein, "Some remarks on infinitesimal generators of analytic semigroups", Proceedings of the American Mathematical Society, (1969).

Palavras-chave: Semigrupos de operadores lineares e limitados, operadores setoriais, potências fracionárias, operadores fechados e densamente definidos.

Abstract

In this work we discuss the spectral theory for semigroups of bounded linear operators; namely, we study the spectral theory of closed and densely defined operators in Banach spaces, semigroups of bounded linear operators, sectorial operators in Henry's sense, and fractional power theory for K-positive linear operators in Amann's sense. Furthermore, we present some applications of this theory from the study of papers: A. Cwiszewski and K. P. Rybakowski, “Dynamics of strongly damped beam equation”, Journal of Differential Equations, (2009); S. Chen and R. Triggiani, “Proof of extensions of two conjectures on structural damping for elastic systems”, Pacific J. Math., (1989); J. A. Goldstein, “Some remarks on infinitesimal generators of analytic semigroups”, Proceedings of the American Mathematical Society, (1969).

Keywords: Semigroups of bounded linear operators, sectorial operators, fractional powers, closed and densely defined operators.

Sumário

Notação

A seguir, listamos algumas notações utilizadas neste trabalho.

• E denota um espaço de Banach;

• E^* denota o dual topológico de um espaço de Banach E;

• H denota um espaço de Hilbert;

• Denotamos por $\mathcal{L}(E,F)$ o espaço dos operadores lineares limitados de E em F munido da norma usual, onde F é também um espaço de Banach;

• Denotamos por $\mathcal{L}(E)$ o espaço dos operadores lineares limitados de E em E munido da norma usual;

• Denotamos por $R(A)$ a imagem de E pelo operador A;

• Denotamos por $\ker(A)$ o núcleo do operador A;

• $\rho(A)$ denota o conjunto resolvente do operador A;

• $\sigma(A)$ denota o espectro do operador A;

• $\sigma_r(A)$ denota o espectro residual do operador A;

• $\sigma_p(A)$ denota o espectro pontual do operador A;

• $\sigma_c(A)$ denota o espectro contínuo do operador A;

• $|\cdot|$ denota a norma euclidiana do $\mathbb{R}^n$ (quando não for feito menção em contrário);

• Usaremos $\|\cdot\|$ ao invés de $\|\cdot\|_E$ para denotar a norma no espaço de Banach E, omitindo o E. Quando não estivermos fazendo menção a norma neste espaço, deixaremos claro em qual espaço estaremos definindo a norma;

• Usaremos a denominação C_0-semigrupo para nos referirmos aos semigrupos fortemente contínuos de operadores lineares limitados;

• $supp(\phi)$ denota o suporte da função ϕ;

• Ω é um aberto conexo de $\mathbb{R}^n$;

• $C(X)$ denota o espaço das funções contínuas em X;

• $C^k(X)$ denota o espaço das funções $k-$vezes continuamente diferenciáveis $(k \geqslant 1)$ em X;

• $L^p(I)$ denota o espaço das funções p integráveis à Lebesgue;

• $W^{1,p}(I)$ denota o espaço de Sobolev das funções p integráveis à Lebesgue com derivadas de primeira ordem p integráveis;

• $W_0^{k,p}(I) = \overline{C_0^k}(I)$

• $H^1(I) = W^{1,2}(I)$;

• $H^k(I) = W^{k,2}(I)$;

• $H_0^1(I) = W_0^{1,2}(I)$;

• $H_0^k(I) = W_0^{k,2}(I)$;

• $X \hookrightarrow Y$ se $X \subset Y$ é a imersão contínua;

• $u' = u_t = \dfrac{\partial}{\partial t}u = \dfrac{d}{dt}u$;

• Usaremos 'sen' para fazer menção a função seno, e 'arcsen ' para fazer menção a função arco seno.

• E^α é o espaço das potências fracionárias $D(A^\alpha)$, onde este, quando munido da norma $\|\cdot\|_{E^\alpha} = \|A^\alpha \cdot\|$, é um espaço de Banach; quando $\alpha = 0$ e $\alpha = 1$ temos $E^0 = E$ e $E^1 = D(A)$;

• Denotaremos por BIP o conjunto das potências imaginárias limitadas;

• A^α é o operador potência fracionária de A; quando $\alpha = 0$, temos $A^0 = I$;

• $A_\mu = \mu A(\mu I - A)^{-1}$ é a aproximação de Yosida de A;

- □ denota o final de uma demonstração.

Lista de Figuras

Introdução

O principal objetivo deste trabalho é esclarecer um dos pontos cruciais na agenda comumente utilizada para o estudo de problemas de valor inicial (problemas de Cauchy) em espaços de Banach E sobre um corpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) do tipo

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = f(u), \quad t > 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{1}$$

onde $A : D(A) \subset E \to E$ é um operador linear fechado e densamente definido, geralmente não limitado, f é uma aplicação não linear com alguma condição de regularidade definida em algum subespaço de E e tomando valores em E, e $u : [0, +\infty) \to E$ é a função a ser determinada, em algum sentido, tal que $u(0) = u_0$.

Existem várias maneiras de entendermos o que é solução do problema (1); por exemplo, diremos que uma função $u : [0, T) \to E$ é uma solução clássica do problema (1) sobre o intervalo $[0, T)$ quando $u \in \mathcal{C}((0, T); D(A)) \cap \mathcal{C}^1((0, T); E)$ e u satisfaz (1) sobre o intervalo $[0, T)$. Diremos que uma função $u : [0, T) \to E$ é uma *mild solution* do problema (1) sobre o intervalo $[0, T]$ quando $u \in \mathcal{C}([0, T]; E)$ e u satisfaz

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s) f(u(s)) ds$$

sobre o intervalo $[0, T]$, onde $\{S(t); t \geqslant 0\}$ é o operador solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = 0, \quad t > 0, \\ u(0) = I, \end{cases} \tag{2}$$

no sentido da teoria de semigrupos de operadores lineares e limitados sobre E (conteúdo principal deste trabalho).

À saber, a compreensão de técnicas de análise de problemas do tipo (1) se faz necessária porque uma quantidade significativa de equações diferenciais parciais (EDP's) autônomas utilizadas para modelar matematicamente fenômenos da natureza sob certas suposições físicas, químicas, biológicas, econômicas e até psicológicas são EDP's autônomas semilineares; e problemas de valores de iniciais e de fronteira associados a estas EDP's podem comumente ser traduzidos como problemas do tipo (1).

Quanto à análise de problemas de valores de iniciais e de fronteira associados à EDP's autônomas semilineares a técnica que temos em mente e que pretendemos compreender neste trabalho passa pela seguinte agenda acompanhando o método de análise e solução de problemas:

Etapa 1 (Identificação do problema). Tomar conhecimento da EDP autônoma semilinear a ser considerada e restrições técnicas dos seus parâmetros, restrições estas provenientes de certas suposições físicas, químicas, biológicas, econômicas e até psicológicas. Destacamos aqui que nos concentraremos em EDP's propostas em domínios limitados e de fronteira suficientemente suave do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^N$ com $N \geqslant 1$; a saber, EDP's propostas em abertos conexos e limitados Ω cuja fronteira $\partial\Omega$ é de classe C^{2m}; isto é, $\partial\Omega$ é localmente o sub-gráfico de uma C^{2m}-função com respeito a alguma escolha de sistema de coordenadas ortogonais. Em outras palavras, para qualquer $p \in \partial\Omega$, sob uma mundança de coordenadas ortogonais, existe um conjunto aberto $V \subset \mathbb{R}^{N-1}$, e uma função Lipschitz contínua $\phi : V \to (a,b)$ tal que $U = V \times (a,b)$ é uma vizinhança do ponto p e

$$\Omega \cap U = \{(x,t) \in U; t < \phi(x)\}.$$

Etapa 2 (Observação). Dados como, a ordem da EDP, a natureza da sua "linearidade", o fato desta ser autônoma, as restrições dos parâmetros escalares e funcionais, nos permitirá identificar espaços de fases aquedados para investigar existência, unicidade, regularidade e o comportamento assintótico das soluções de problemas de valores de iniciais e de fronteira associados a EDP's autônomas semilineares.

Etapa 3 (Análise). Com a identificação do problema e observação mencionados acima, o que devemos fazer em seguida é transcrever o problema de valor de inicial e de fronteira associado a EDP autônoma semilinear como um problema de valor inicial do tipo (1). Aqui, destacamos que se faz necessário encontrar o espaço de Banach E a ser considerado como o espaço de fases; na prática, uma análise sobre a equação de energia associada a EDP (ou as EDP's em questão, pode nos orientar na escolha do espaço de Hilbert a ser considerado como espaço de fase. Os termos que definem a EDP dão origem a lei de formação do operador linear A (que em geral é não limitado), e comumente as condições de fronteira homogêneas são incorporadas no domínio do operador linear A, tudo isso é feito, com o cuidado que ao final tenhamos um operador fechado e densamente definido. Quanto ao termo não linear, este é definido pelos termos não lineares que aparecem na EDP e pela condições de fronteira não homogêneas.

Esta é a etapa em que nos referimos ao momento em que damos luz à Análise Funcional inerente ao problema em questão.

Etapa 4 (Plano de ação). É exatamente sobre etapa que dissertaremos neste trabalho. Uma técnica comumente empregada é dividir a análise em duas partes, uma **Análise Linear**, conteúdo deste trabalho de dissertação de mestrado, e posteriormente uma **Análise Não Linear**.

Etapa 4.1 (Análise Linear). Nesta etapa, consideraremos o problema linear

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = 0, \quad t > 0, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{3}$$

A fim de obter resultados de existência, unicidade, regularidade e o comportamento assintótico das soluções de (3), devemos primeiro entender o que significa ser solução do problema (3).

Etapa 4.2 (Análise Não Linear). Nesta etapa, recuperamos o problema inicial (1) e devemos trabalhar, a fim de obter resultados de regularidade a Fréchet para a não linearidade f.

Etapa 5 (Ação). Quanto à resolução do problema (3) tomaremos a seguinte decisão. Se A fosse uma matriz quadrada de ordem n cujas entradas são elementos do corpo $\mathbb{K}$, então poderíamos resolver o problema (3) considerando a família de matrizes quadradas de ordem n cujas entradas são elementos do corpo $\mathbb{K}$

$$\left\{ e^{tA} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i A^i}{i!} \in M_n(\mathbb{K});\ t \geqslant 0 \right\}$$

e a aplicação

$$\begin{aligned} u : [0,\infty) &\to X \\ t &\mapsto u(t) = e^{tA} u_0 = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i A^i}{i!} u_0. \end{aligned}$$

Agora, sendo $A : D(A) \subset E \to E$ um operador linear fechado e densamente definido, geralmente não limitado e E um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), então devemos recorrer a teoria dos semigrupos de operadores lineares e limitados, e trabalhar, a fim de provar que o operador A possui propriedades espectrais suficientes para que possamos garantir a existência de um semigrupo de operadores lineares e limitados sobre E; a saber, uma família de operadores lineares e limitados $\{S(t); t \geqslant 0\}$ definidos sobre E tal que $S(0) = I$, onde I denota o operador identidade sobre E, e

$$S(t+s) = S(t)S(s)$$

para todos $t, s \geqslant 0$, de modo que a aplicação $u : [0, \infty) \to E$ definida por

$$u(t) = S(t)u_0,$$

para todo $t \geqslant 0$ é solução do problema (3). Desta forma, para cada $t \geqslant 0$, "o operador $S(t)$ é responsável por mapear a evolução do ponto $u_0 \in E$ no instante de tempo t". A Figura 1 propõe uma maneira de como o nosso apelo intuitivo pode ser usado para entender o que acontece quando temos um semigrupo de operadores lineares e limitados $\{S(t); t \geqslant 0\}$ definido sobre E associado ao problema (3). Na ilustração 0_E denota o vetor nulo do espaço E e s, t, σ denotam números reais positivos.

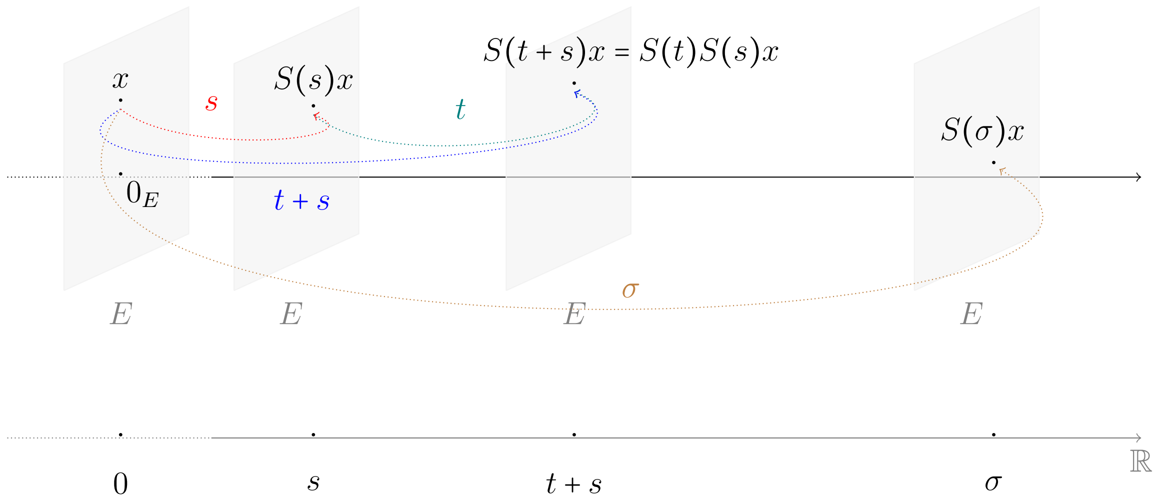

Figura 1: A evolução do ponto $x \in E$ por um semigrupo $\{S(t);\ t \geqslant 0\}$

Etapa 6 (Verificação). Apresentaremos algumas aplicações, após leitura dos artigos "*Proof of extensions of two conjectures on structural damping for elastic systems: The case* $\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1$" escrito por S. Chen e R. Triggiani, e "*Singular dynamics of strongly damped beam equation*" escrito por Aleksander Cwiszewski e Krzysztof P. Rybakowski. Dissertamos aqui sobre as contas contidas nestes trabalhos, e detalhes sobre as passagens são apresentados para faciliar a compreensão do leitor. Aproveitamos também para ilustrar alguns exemplos ao longo do trabalho.

Etapa 7 (Padronização). O detalhamento das contas mencionadas acima vem, em geral, com comentários sobre possíveis generalizações sobre resultados dos artigos supracitados.

Etapa 8 (Conclusão). Por fim, entendemos que a teoria de semigrupo de operadores lineares e limitados pode ser uma elegante alternativa para a análise de problemas de valores iniciais e de fronteira assoaciados a EDP's semilineares autônomas por apresentar uma via de mão dupla entre, pelo menos, duas linhas de pesquisa, Análise de EDP's e Análise Funcional.

Estrutura do trabalho: Apesar de estarmos aqui apresentando métodos alternativos de resolução de problemas aplicados, este trabalho é, em sua totalidade, escrito utilizando-se de argumentos de Análise Funcional. Em todo o trabalho são utilizados construções abstratas e argumentos voltados para a matemática pura. O mesmo está dividido em 5 capítulos.

No **Capítulo 1**, intitulado por 'Análise espectral de operadores lineares', reunimos uma coleção de resultados da teoria espectral de operadores lineares definidos em espaços de Banach, os quais envolvem os conceitos de conjunto resolvente e espectro, operadores fechados e fecháveis, operadores com resolvente compacto e operadores duais e autoadjutos. A importância desses resultados será evidenciada ao longo de todo o trabalho. Nele, seguiremos de perto as referências [1], [4], [5], [19], [23], e [24].

No **Capítulo 2**, intitulado por 'Semigrupos de operadores lineares', apresentaremos as definições, características e principais resultados de semigrupos e grupos de operadores lineares limitados, indispensáveis ao entendimento das técnicas de solução de problemas hiperbólicos semilineares. Caracterizaremos os semigrupos $\{T(t);\ t \geqslant 0\}$ e grupos $\{T(t);\ t \in \mathbb{R}\}$, com o objetivo de apresentar a teoria de semigrupos fortemente contínuos, definidos num espaço de Banach E. Nossa discussão será concentrada na caracterização dos geradores infinitesimais dos semigrupos e grupos fortementre contínuos, já que nas aplicações da teoria, em geral, conhecemos a equação diferencial e não o operador solução. Com isso grandes teoremas são invocados, tais como: o Teorema de Hille-Yosida, o Teorema de Lumer-Phillips e o Teorema de Stone. Nele, utilizaremos como referências principais [1], [5], [6], e [23].

No **Capítulo 3**, intitulado por 'Operadores setoriais e semigrupos analíticos', introduziremos o conceito de operadores setoriais no sentido de Henry [16], em espaços de Banach, exibiremos alguns resultados importantes relacionados à teoria, e apresentaremos uma importante classe dos semigrupos fortemente contínuos: a classe dos semigrupos analíticos. Além disso, apresentaremos um dos teoremas mais importantes do trabalho, o teorema que caracteriza os geradores infinitesimais de semigrupos analíticos, e além disso, estabelece uma relação entre o semigrupo e o conjunto resolvente do gerador infinitesimal. Nele, seguiremos de perto as referências [5], [12], [13], [14], [15], [16].

No **Capítulo 4**, intitulado por 'Potências fracionárias de operadores lineares', vamos inicialmente estudar e apresentar a construção das potências fracionárias de operadores lineares definidos num espaço de Hilbert, que têm resolvente compacto, espectro não vazio, e que é autoadjunto, satisfazendo uma desigualdade do tipo

$$\langle Au, u\rangle \geqslant \delta\|u\|^2,$$

para algum $\delta > 0$, onde $A : D(A) \subset H \to H$ é um operador linear, e H denota um espaço de Hilbert. Depois, veremos a definição e as principais propriedades das potências fracionárias de operadores lineares do tipo positivo. Também, estudaremos os espaços das potências fracionárias H^α, com $0 < \alpha \leqslant 1$, os quais tem menos regularidade do que o domínio do operador em questão. Além disso, apresentamos ainda uma coletânea de resultados, em uma seção, sobre potências imaginárias limitadas. Nele, seguiremos de perto as referências [1], [5], [9], [16], e [23].

No **Capítulo 5**, intitulado por 'Aplicações', apresentamos algumas aplicações do conteúdo abordado neste trabalho, obtidas a partir da leitura dos artigos [8] e [11].

Capítulo 1

Análise espectral de operadores lineares

Neste capítulo, dissertaremos sobre resultados da teoria espectral de operadores lineares definidos em espaço de Banach, os quais serão de extrema importância para o estudo dos semigrupos de operadores lineares e os demais assuntos abordados neste trabalho. Aqui, seguiremos de perto as referências[1], [4], [5], [19], [23], e [24]. É importante salientar que não temos nenhuma pretenção com a originalidade dos argumentos aqui apresentados nas demonstrações dos resultados. No entanto, o conteúdo das observações, as soluções dos exercícios propostos nas referências supra citadas e as figuras aqui apresentadas são de autoria da própria autora.

1.1 Conjunto resolvente e espectro

Dentre os objetos que serão estudados aqui, chamamos a atenção para os grandes protagonistas deste capítulo, os conjuntos resolvente e espectro de um operador linear definido sobre espaços de Banach. Eles farão parte da grande maioria dos resultados desse trabalho e serão aspectos decisivos na obtenção de alguns resultados, como por exemplo, quando estivermos estudando resultados relacionados a geradores infinitesimais de semigrupos de operadores lineares e limitados. Nesta seção definiremos cada um desses conjuntos e apresentaremos alguns exemplos. Mais à frente, quando tivermos as ferramentas necessárias, falaremos mais sobre eles.

1.1.1 Motivação

Seja A uma $n \times n$ matriz com entradas em $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), denotamos por $\sigma(A)$ o espectro de A; a saber, o conjunto dos autovalores de A. Dado $\lambda \in \mathbb{K}$ tem-se que $\lambda \in \sigma(A)$ se existe $v \neq 0$ tal que

$$(\lambda I - A)v = 0 \ (\ker(\lambda I - A) \neq \{0\})$$

ou se o seguinte determinante se anula

$$det(\lambda I - A) = 0$$

ou se o operador é não-invertível

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| = \infty.$$

Note que o objeto que está dentro das barrinhas representa um operador matricial, então, esta expressão está indicando o que chamaríamos de "norma de uma matriz", e podemos definir isto como sendo

$$\|M\| = \ \max \ \{|a_{ij}|; \ i, j \in \{1, 2, ..., n\}\},$$

onde a_{ij} representa os elementos das entradas da matriz M. É fácil ver que de fato $\|\cdot\|$ é uma norma.

Esta última definição será traduzida para operadores em espaços de Banach de dimensão infinita. Em outras palavras, as definições dadas acima podem ser descritas também como $\lambda \in \sigma(A)$ se, e somente se,

$$\overline{R(\lambda I - A)} \neq E$$

ou

$$(\lambda I - A)^{-1} \text{ não existe}$$

ou

$$(\lambda I - A)^{-1} \text{ não é limitado em } R(\lambda I - A).$$

1.1.2 Definições e propriedades

Definição 1.1. Seja E um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), e seja $A : D(A) \subset E \to E$ um operador linear. O conjunto

$$\{\lambda \in \mathbb{C}; \overline{R(\lambda I - A)} = E, (\lambda I - A)^{-1}\text{existe}, (\lambda I - A)^{-1} \text{ é limitado em } R(\lambda I - A)\}$$

é chamado o *conjunto resolvente do operador* A e é denotado por $\rho(A)$. O conjunto $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ é chamado o *espectro do operador* A.

De agora em diante, salvo expressa menção em contrário, sempre que for mencionado um corpo $\mathbb{K}$ estaremos nos referindo a $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Definição 1.2. Seja E um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$, e seja $A : D(A) \subset E \to E$ um operador linear. Seja $\lambda \in \rho(A)$, o operador $(\lambda I - A)^{-1}$ é chamado o *operador resolvente de* A. Operadores resolventes são as vezes denotados por $R_\lambda(A), A_\lambda^{-1}$ ou $R(\lambda; A)$.

Definição 1.3. Seja E um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$, e seja $A : D(A) \subset E \to E$ um operador linear. O conjunto

$$\{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda I - A \text{ é injetivo e } \overline{R(\lambda I - A)} \neq E\}$$

é chamado o *espectro residual do operador* A e denotado por $\sigma_r(A)$.

Definição 1.4. Seja E um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$, e seja $A : D(A) \subset E \to E$ um operador linear. O conjunto

$$\{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda I - A \text{ não é injetivo } \}$$

é chamado o *espectro pontual do operador* A e denotado por $\sigma_p(A)$.

Definição 1.5. Seja E um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$, e seja $A : D(A) \subset E \to E$ um operador linear. O conjunto

$$\{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda I - A \text{ é injetivo }, R(\lambda I - A) \neq E \text{ e } \overline{R(\lambda I - A)} = E\}$$

é chamado o *espectro contínuo do operador* A e denotado por $\sigma_c(A)$.
Note que

$$\sigma(A) = \sigma_r(A) \cup \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A)$$

é uma união disjunta.
Com essas definições, são pertinentes algumas observações que faremos abaixo. Dado um operador linear e um número complexo, faz-se necessário questionar sobre a classificação espectral deste número, ou seja, saber se ele é um elemento do resolvente ou do espectro do operador em questão, e sendo este, um elemento do espectro, saber em qual conjunto exatamente este elemento se encontra.
Em espaços vetoriais de dimensão finita, segue do Teorema do Núcleo e da Imagem

que $\sigma(A) = \sigma_p(A)$. Contudo, em espaços vetoriais de dimensão infinita, os conjuntos $\sigma_r(A)$ e $\sigma_c(A)$ não são necessariamente vazios.

Proposição 1.1. Seja E um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$, e seja $A : D(A) \subset E \to E$ um operador linear fechado. Considere $\lambda \in \rho(A)$. Então valem as seguintes afirmações:

(i) $\sigma((\lambda I - A)^{-1}) \setminus \{0\} = (\lambda I - \sigma(A))^{-1}$.

(ii) $\sigma_p((\lambda I - A)^{-1}) \setminus \{0\} = (\lambda I - \sigma_p(A))^{-1}$.

Demonstração. Vamos provar (i) e a prova de (ii) é análoga. Tome $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Observe que temos

$$\mu I - (\lambda I - A)^{-1} = \left((\lambda - \frac{1}{\mu})I - A\right)\mu(\lambda I - A)^{-1}.$$

Desde que $\lambda \in \rho(A)$, o operador $\mu(\lambda I - A)^{-1}$ é bijetivo. Desse modo, $\mu I - (\lambda I - A)^{-1}$ é bijetivo se, e somente se, $\left((\lambda - \frac{1}{\mu})I - A\right)$ é bijetivo. Assim, $\mu \in \rho((\lambda I - A)^{-1})$ se, e somente se, $\lambda - \frac{1}{\mu} \in \rho(A)$. E concluímos a demonstração. $\square$

Exemplo 1.1. Seja $E = C([0,1];\mathbb{K})$ munido com a norma do supremo e seja $A : D(A) \subset E \to E$ um operador linear, onde $D(A) = C^1([0,1])$ e $Af = f'$. Então, $\sigma(A) = \mathbb{C} = \sigma_p(A)$ e $\rho(A) = \varnothing$.

De fato, note que se $\lambda \in \mathbb{C}$ então a função $\phi(t) = e^{\lambda t}$ satisfaz $A\phi(t) = \lambda\phi(t)$. É claro que $\sigma_p(A) \subset \mathbb{C}$ logo, $\sigma_p(A) = \mathbb{C} = \sigma(A)$ e portanto $\rho(A) = \varnothing$ pois $\rho(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$.

1.2 Operadores fechados e fecháveis

Nesta seção iremos estudar a teoria espectral de operadores fechados e fecháveis em espaços de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$.

Definição 1.6. Seja E um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$, e seja $A : D(A) \subset E \to E$ um operador linear. Dizemos que A é um *operador fechado* se seu gráfico $G(A) = \{(x, Ax) \in E \times E; x \in D(A)\}$ é um subconjunto fechado de $E \times E$.

Definição 1.7. Seja E um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$, e seja $A : D(A) \subset E \to E$ um operador linear. Dizemos que A é um *operador fechável* se existe uma extensão fechada $B : D(B) \subset E \to E$, onde $D(A) \subset D(B)$.

Observação 1.1. Operadores fechados são às vezes chamados de operadores pré-fechados.

Dizemos que $\overline{A}$ é o fecho do operador fechável se esta é a menor extensão fechada de A, no sentido de que se B é uma outra extensão fechada de A, então $D(\overline{A}) \subset D(B)$.

Definição 1.8. Seja E um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$, e seja $A : D(A) \subset E \to E$ um operador linear. Dizemos que A é um *operador densamente definido* se $\overline{D(A)} = E$.

Teorema 1.2. *Sejam E um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $A : D(A) \subset E \to E$ um operador linear fechado. Seja $\alpha \in \mathbb{K}$ então os operadores $-A$ e $\alpha I - A$ são fechados.*

Demonstração. Seja $x_n \in D(\alpha I - A)$ com $x_n \to x$ e $(\alpha I - A)x_n \to y$. Temos que

$$(\alpha I - A)x_n = \alpha x_n - Ax_n \to \alpha x - Ax = (\alpha I - A)x,$$

pois

$$-Ax_n \to y \implies Ax_n \to -y \implies -y = Ax \implies -Ax_n \to -Ax \text{ e } x \in D(A).$$

E assim, segue a afirmação. □

Exemplo 1.2. Seja $E = C([0,1]; \mathbb{K})$ munido da norma do supremo e seja $A : D(A) \subset E \to E$ um operador linear, onde $D(A) = C^1([0,1])$ e $Af = f'$ como no Exemplo 1.1 . Então, A é fechado e densamente definido, mas não é limitado.

De fato, seja f_n uma sequência de funções em E tal que $f_n \to f$ e $Af_n \to g$ quando $n \to \infty$. Então, segue do Teorema A.8 que $f \in D(A)$ e $Af = g$. Portanto, concluímos que A é fechado.
Note que as funções $u_n \in D(A)$ dadas por $u_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}}\operatorname{sen}(nx)$ são tais que

$$\|u_n\| = \frac{1}{\sqrt{n}}|\operatorname{sen}(nx)|$$

que tende a 0 quando $n \to \infty$ pelo teorema do confronto. E

$$\|Au_n\| = \sup_x |\sqrt{n}\cos(nx)| \geqslant |u_n'(0)| = \sqrt{n} \to \infty, \text{ quando } n \to \infty.$$

Por fim, a densidade de $D(A)$ segue do Teorema da aproximação de Weierstrass [1].

[1] Ver apêndice

Exemplo 1.3. Seja $E = C([0,1];\mathbb{K})$ munido da norma do supremo e seja $A : D(A) \subset E \to E$ um operador linear, onde $D(A) = \{f \in C^1([0,1]); f(0) = f'(0) = 0\}$ e $Af = f'$. Então, A é fechado e densamente definido.
De fato, seja $f_n \in D(A)$ com $f_n \to f$ e $Af_n = f_n' \to g \in E$, quando $n \to \infty$, então $f \in D(A)$ e $Af = g$, visto que

$$0 = f_n(0) \to f(0), \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Lema 1.3. Seja E um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$, e seja $A : D(A) \subset E \to E$ um operador linear. Então as seguintes afirmações são verdadeiras:

(i) A é fechável (fechado) se, e somente se, para cada sequência $x_n \in E$ tal que $x_n \to 0$ $(x_n \to x)$ com $Ax_n \to y$, então $y = 0$ $(x \in D(A)$ e $Ax = y)$.

(ii) Se A é injetivo, então A é fechado se, e somente se, A^{-1} é fechado.

(iii) Se A é um operador linear injetivo, tal que A^{-1} é fechável e seu fecho é injetivo então A é fechável.

(iv) Se A é um operador linear injetivo fechado com $A^{-1} : R(A) \subset E \to E$ limitado, então $R(A)$ é fechado.

Demonstração. (i) Suponha que $A : D(A) \subset E \to E$ é fechável, então existe uma extensão fechada $B : D(B) \subset E \to E$ de A onde $D(A) \subset D(B)$, isto é, $B(x) = A(x)$, para todo $x \in D(A)$. Seja $x_n \in D(A)$ tal que $x_n \to 0$ e $Ax_n \to y$. Pelas observações feitas acima temos $Bx_n = Ax_n \to y$ isto é, $Bx_n \to y$. Note que temos $(x_n, Bx_n) \in G(B)$ tal que $(x_n, Bx_n) \to (0, y)$, como B é fechado temos $G(B) = \overline{G(B)}$, logo $(0, y) \in G(B)$ e portanto, $y = B(0) = 0$.
Reciprocamente, suponha que para cada sequência $\{x_n\}_n \in D(A)$ com $x_n \to 0$ e $Ax_n \to y$ tem-se $y = 0$.
Considere $D(B) = \{x \in E;\ \exists\ x_n \in D(A), x_n \to x,\ Ax_n \to y\}$.

Afirmação 1.1. $D(B)$ é subespaço vetorial de E. De fato, denotando por 0 a sequência cujos termos são todos nulos temos $0 \in D(B)$ pois $D(A)$ é subespaço vetorial de E, logo $0 \in D(A)$. Agora, sejam $x, z \in D(B)$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, então existem sequências $x_n, z_n \in D(A)$ tais que $x_n \to x, Ax_n \to y, z_n \to z$ e $Az_n \to h$. Desde que ambas as sequências são convergentes, pelas propriedades de limite segue que $\alpha x_n + z_n$ é convergente e é tal que $\alpha x_n + z_n \to \alpha x + z$. Como $D(A)$ é subespaço vetorial, temos que $\alpha x_n + z_n \in D(A)$, logo $\alpha x + z \in D(B)$. Donde concluímos a afirmação.

Agora, defina

$$Bx = y,\ x \in D(B).$$

Vamos mostrar que y não depende da sequência $\{x_n\}_n$. Com efeito, seja u_n uma outra sequência em $D(A)$ com $u_n \to x$ e $Au_n \to h$. Nosso objetivo é mostrar que $y = h$. Note que $x_n - u_n \to 0$ e $Ax_n - Au_n \to y - h$, isto é, $A(x_n - u_n) \to y - h$. Como $x_n - u_n \in D(A)$ e $x_n - u_n \to 0$, temos por hipótese que $y - h = 0$ e logo $y = h$. Portanto, B está bem definido em $D(B)$. É fácil ver que B é um operador linear. Resta agora mostrar que

Afirmação 1.2. B é um operador fechado. De fato, seja $x_n \in D(B)$ tal que $x_n \to x$ e $Bx_n \to y$. Vamos mostrar que $x \in D(B)$ e $y = Bx$. Desde que para cada n, $x_n \in D(B)$ existe $u_n \in D(A)$ tal que

$$\|x_n - u_n\| + \|Bx_n - Au_n\| < \frac{1}{n},$$

quando $n \to \infty$ temos $u_n \to x$ e $Au_n \to y$. Assim, temos $x \in D(B)$ e $y = Bx$.

Agora suponha que A é fechado, então $G(A)$ é um conjunto fechado. Seja x_n uma sequência em $D(A)$ tal que $x_n \to x$ e $Ax_n \to y$, isto é, temos $(x_n, Ax_n) \in G(A)$ e $(x_n, Ax_n) \to (x, y)$, como $G(A) = \overline{G(A)}$, segue que $(x, y) \in G(A)$, isto é, $x \in D(A)$ e $y = Ax$. Reciprocamente, seja $(x_n, Ax_n) \in G(A)$ com $(x_n, Ax_n) \to (x, y)$, por hipótese temos $x \in D(A)$ e $y = Ax$, isto é, $(x, y) \in G(A)$, pela arbitrariedade de $(x_n, Ax_n) \in G(A)$, segue que $G(A) = \overline{G(A)}$. Portanto, A é fechado.

(ii) Seja A um operador linear injetivo. Então, o operador $A^{-1} : R(A) \to D(A)$ está bem definido. Suponha que A é fechado. Seja $y_n \in R(A)$ com $y_n \to y$ e $A^{-1}y_n \to x$, queremos mostrar que $y \in R(A)$ e $x = A^{-1}y$. Note que, desde que $y_n \in R(A)$, existe $x_n \in D(A)$ tal que $Ax_n = y_n \to y$ e $x_n = A^{-1}y_n \to x$, ou seja, temos $x_n \to x$ e $Ax_n \to y$, como A é fechado, segue que $x \in D(A)$ e $y = Ax$, ou seja, $y \in R(A)$ e $x = A^{-1}y$.
Reciprocamente, assuma que A^{-1} é fechado. Seja $x_n \in D(A)$ com $x_n \to x$ e $Ax_n \to y$. Note que $A^{-1}(Ax_n) = x_n \to x$, como A^{-1} é fechado, segue que $(y, x) \in G(A^{-1})$, isto é, $x = A^{-1}y$, o que implica $x \in D(A)$ e $y = Ax$. Portanto, A é fechado.

(iii) Seja $\{x_n\}_n \in D(A)$ com $x_n \to 0$ e $Ax_n \to y$, vamos mostrar que $y = 0$. Note que Ax_n é um sequência em $R(A)$, como A^{-1} está bem definido, temos $A^{-1}(Ax_n) = x_n \to 0$. Logo, $(y, 0) \in \overline{G(A^{-1})} = G(\overline{A^{-1}})$, isto é, $y \in D(\overline{A^{-1}})$ e $0 = \overline{A^{-1}}y$, mas $\overline{A^{-1}}$ é injetivo por hipótese, logo $\ker(\overline{A^{-1}}) = \{0\}$ e temos, $y = 0$. Portanto, A é fechável.

(iv) Assuma que A é um operador linear injetivo, fechado e que A^{-1} é limitado. Seja $\{y_n\}_n$ uma sequência em $R(A)$ tal que $y_n \to y$. Suponhamos por contradição que $y \notin R(A)$. Pela escolha de $\{y_n\}_n$, existe $\{x_n\}_n \in D(A)$ tal que $Ax_n = y_n$. Note que $\{x_n\}_n$ não converge, pois estamos assumindo que $y \notin R(A)$ e A é fechado por hipótese.

Assim, para cada $x \in E$ e $\epsilon > 0$ existe uma subsequência x_{n_k} de x_n tal que

$$\forall\ k \in \mathbb{N},\ \|x_{n_k} - x\| > \epsilon.$$

Em particular, para $x = 0$ e $\epsilon = \|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(R(A);E)} \sup \|y_n\|$, existe uma subsequência x_{n_k} de x_n tal que

$$\forall\ k \in \mathbb{N},\ \|x_{n_k}\| > \epsilon.$$

Por outro lado, temos

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ \|x_n\| = \|A^{-1}y_n\| \leqslant \|A^{-1}\|\|y_n\| \leqslant \|A^{-1}\| \sup \|y_n\|$$

isto é,

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ \|x_n\| \leqslant \|A^{-1}\| \sup \|y_n\| = \epsilon.$$

O que é uma contradição. Portanto, $y \in R(A)$ e concluímos que $R(A)$ é um subespaço fechado de E. □

Lema 1.4. Seja E um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$ e seja $A_0 : D(A_0) \subset E \to E$ um operador linear fechável. Se $A : D(A) \subset E \to E$ denota o fecho de A_0, então $\rho(A) = \rho(A_0)$.

Demonstração. Seja $\lambda \in \rho(A)$, então $\lambda - A$ é injetivo, $\overline{R(\lambda - A)} = E$ e $(\lambda - A)^{-1}$ é limitado. Daí, temos $\lambda - A|_{D(A_0)} = \lambda - A_0$ injetivo, e então está bem definido e é limitado o operador $(\lambda - A_0)^{-1}$. Assim, resta mostrar que $\overline{R(\lambda - A_0)} = E$.
Seja $y \in E$, então $y \in \overline{R(\lambda - A)} = E$ e assim, existe uma sequência $\{y_n\}_n \in R(\lambda - A)$ tal que $y_n \to y$. Como $y_n \in R(\lambda - A)$, existe $\{x_n\}_n \in D(\lambda - A)$ tal que $(\lambda - A)^{-1}y_n = x_n$. Como $(\lambda - A)^{-1}$ é limitado por hipótese, temos

$$x_n = (\lambda - A)^{-1}y_n \to (\lambda - A)^{-1}y.$$

Seja $x = (\lambda - A)^{-1}y$, então $(x_n, (\lambda - A)x_n) \to (x, y)$. Assim,

$$(x, y) \in G(\lambda - A) = \overline{G(\lambda - A_0)},$$

isto é, existe uma sequência $z_n \in D(\lambda - A_0)$ tal que $z_n \to x$ e $(\lambda - A_0)z_n \to y$, donde concluímos que $y \in \overline{R(\lambda - A_0)}$ e portanto, $\overline{R(\lambda - A_0)} = E$.
Reciprocamente, seja $\lambda \in \rho(A_0)$. Então $\overline{R(\lambda - A_0)} = E$ e $(\lambda - A_0)^{-1} : R(\lambda - A_0) \to E$ é limitado, assim podemos estender $(\lambda - A_0)^{-1}$ continuamente de modo que $(\lambda - A)^{-1}$

seja limitado em $R(\lambda - A)$. Por outro lado, $R(\lambda - A_0) \subset R(\lambda - A)$ logo

$$E = \overline{R(\lambda - A_0)} \subset \overline{R(\lambda - A)}.$$

Donde concluímos que $\overline{R(\lambda - A)} = E$. Agora, vamos provar que $(\lambda - A)$ é injetivo.
Seja $x \in D(A)$ tal que $(\lambda - A)x = 0$, isto é, $x \in \ker(\lambda - A)$. Assim, $(x,0) \in G(\lambda - A) = \overline{G(\lambda - A_0)}$. Logo, existe $x_n \in D(A_0)$ tal que $x_n \to x$ e $(\lambda - A)x_n \to 0$. Desde que $(\lambda - A_0)^{-1}$ é limitado temos:

$$(\lambda - A_0)^{-1}(\lambda - A_0)x_n \to (\lambda - A_0)^{-1}0 = 0$$

ou seja, $x_n \to 0$, e pela unicidade do limite, segue que $x = 0$. Pela arbitrariedade de $x \in \ker(\lambda - A)$, segue que $(\lambda - A)$ é injetivo. □

Lema 1.5. Seja E um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$ e seja $A_0 : D(A_0) \subset E \to E$ um operador linear com $\rho(A_0) \neq \varnothing$.

(i) Se para algum $\lambda_0 \in \rho(A_0)$ o operador $\overline{(\lambda I - A_0)^{-1}}$ é injetivo, então A_0 é um operador fechável.

(ii) Se A_0 é um operador fechável, então para cada $\lambda \in \rho(A_0)$ o operador $\overline{(\lambda I - A_0)^{-1}}$ é injetivo.

Demonstração. (i) Seja $\{x_n\}_n \in D(A_0)$ tal que $x_n \to 0$ e $A_0 x_n \to y$, graças ao Lema 5.15, basta mostrarmos que $y = 0$.
Seja $\lambda_0 \in \rho(A_0)$. Pelas propriedades de limite, temos $\lambda_0 x_n \to 0$ e $\lambda_0 x_n - A_0 x_n \to -y$, logo $(\lambda_0 I - A_0)x_n \to -y$. Observe que

$$(\lambda_0 I - A_0)x_n \in R(\lambda_0 I - A_0) \subset D((\lambda_0 I - A_0)^{-1}) \subset, \overline{D(\lambda_0 I - A_0)^{-1}} \qquad (1.1)$$

como $(\lambda_0 I - A_0)^{-1}$ é limitado, temos

$$x_n = (\lambda_0 I - A_0)^{-1}(\lambda_0 I - A_0)x_n \to (\lambda I - A_0)^{-1}(-y)$$

pela unicidade do limite obtemos $(\lambda I - A_0)^{-1}(-y) = 0$, mas $(\lambda I - A_0)^{-1}(-y) = \overline{(\lambda I - A_0)^{-1}}(-y)$ e daí $\overline{(\lambda I - A_0)^{-1}}(-y) = 0$. Desde que $\overline{(\lambda I - A_0)^{-1}}$ é injetivo, segue que $-y = 0$ e portanto $y = 0$.
(ii) Inicialmente, vamos provar a seguinte igualdade:

$$R(\lambda I - A) = D(\overline{(\lambda I - A_0)^{-1}}). \qquad (1.2)$$

Com efeito, seja $y \in R(\lambda I - A)$, então existe $x \in D(\lambda I - A)$ tal que $(\lambda I - A)x = y$, assim, $(x, y) \in G(\lambda I - A) = \overline{G(\lambda I - A_0)}$. Logo, existem sequências $y_n \in R(\lambda I - A_0)$ e $x_n \in D(\lambda I - A_0)$ tais que $y_n \to y$ e $x_n = (\lambda I - A_0)^{-1} y_n = \overline{(\lambda I - A_0)^{-1}} y_n \to x$. Como o operador $\overline{(\lambda I - A_0)^{-1}}$ é fechado, segue que $y \in D(\overline{(\lambda I - A_0)^{-1}})$. Pela arbitrariedade da escolha de y, temos $R(\lambda I - A) \subseteq D(\overline{(\lambda I - A_0)^{-1}})$.
Agora, tome $y \in D(\overline{(\lambda I - A_0)^{-1}})$ então existe $x \in R(\overline{(\lambda I - A_0)^{-1}})$ tal que $x = \overline{(\lambda I - A_0)^{-1}} y$, assim $(y, x) \in G(\overline{(\lambda I - A_0)^{-1}}) = \overline{G((\lambda I - A_0)^{-1})}$. Daí, existe uma sequência $x_n \in R((\lambda I - A_0)^{-1}) = D(\lambda I - A_0)$ tal que $x_n \to x$ e $(\lambda I - A_0)x_n \to y$, logo $(x, y) \in \overline{G(\lambda I - A_0)} = G(\lambda I - A)$, e por conseguinte $y \in R(\lambda I - A)$. Desse modo, obtemos $D(\overline{(\lambda I - A_0)^{-1}}) \subseteq R(\lambda I - A)$ e portanto temos a igualdade em (1.2).
Considerando (1.2), vamos provar a sentença (ii).
Seja $y \in \ker(\overline{(\lambda I - A_0)^{-1}})$ então $\overline{(\lambda I - A_0)^{-1}} y = 0$, assim $(y, 0) \in G(\overline{(\lambda I - A_0)^{-1}}) = \overline{G((\lambda I - A_0)^{-1})}$. Logo, existe $(y_n, x_n) \in G((\lambda I - A_0)^{-1})$ de modo que $y_n \to y$ e $x_n \to 0$. Desde que $(\lambda I - A_0)^{-1}$ é linear e limitado, temos

$$(\lambda I - A_0)^{-1} y_n = x_n \to 0 \implies (\lambda I - A_0)^{-1} y_n \to 0 \implies y_n \to 0.$$

Pela unicidade do limite, segue que $y = 0$. Pela arbitrariedade de $y \in \ker(\overline{(\lambda I - A_0)^{-1}})$, segue que $\overline{(\lambda I - A_0)^{-1}}$ é injetivo. □

Teorema 1.6. *Seja E um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$, e seja $A : D(A) \subset E \to E$ um operador linear fechado, então*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ \lambda I - A \text{ é bijetivo em } E\}.$$

Demonstração. Seja $\lambda \in \rho(A)$ então $\lambda I - A$ é injetivo e pelo Lema 5.15 segue que

$$R(\lambda I - A) = \overline{R(\lambda I - A)} = E,$$

logo $\lambda \in \{\lambda \in \mathbb{C};\ \lambda I - A \text{ é bijetivo em } E\}$. Reciprocamente, seja $\lambda \in \{\lambda \in \mathbb{C};\ \lambda I - A \text{ é bijetivo em } E\}$ então, basta mostrarmos que $(\lambda I - A)^{-1} : R(\lambda I - A) \subset E \to E$ é limitado. Novamente fazendo uso do Lema 5.15, obtemos que $(\lambda I - A)^{-1}$ é fechado e segue do Teorema do Gráfico Fechado[2] que $(\lambda I - A)^{-1}$ é limitado. □

Teorema 1.7. *Seja E um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$, e seja $A : E \to E$ um operador linear com $\|A\| < 1$. Então $I - A$ é invertível e a série de Neumann converge,*

[2]Ver apêndice

isto é,

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n,$$

onde a série do lado direito converge uniformemente em $\mathcal{L}(E)$.

Demonstração. As reduzidas da série geométrica

$$\forall\ x \in E,\ n \in \mathbb{N},\ S_n x = (I + A + \cdots + A^n)x$$

satisfazem

$$\begin{aligned}\|S_m x - S_n x\| &= \|(A^{n+1} + \cdots + A^m)x\| \\ &\leqslant (\|A\|^{n+1} + \cdots + \|A\|^m)\|x\|\end{aligned}$$

para todo $m,\ n \in \mathbb{N}$. Portanto, $S_n x$ é uma sequência de Cauchy, logo converge para $s = \lim S_n x$.

Note que

$$\begin{aligned}(I - A)(I + A + \cdots + A^n) &= I - A + A - A^2 + A^2 - A^3 + \cdots - A^{n+1} \\ &= I - A^{n+1}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$(I - A)s = (I - A)\lim S_n x = \lim(I - A)S_n x = \lim x - A^{n+1}x = x.$$

$\square$

Lema 1.8. Seja E um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$ e seja $A : D(A) \subset E \to E$ um operador linear limitado, então

$$\{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| > \|A\|\} \subset \rho(A),$$

e

$$(\lambda I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}}.$$

Demonstração. Considere $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| > \|A\|$ e $B_\lambda = \dfrac{1}{\lambda}A$, então

$$\|B_\lambda\| = \left\|\frac{1}{\lambda}A\right\| = \frac{1}{|\lambda|}\|A\| < 1.$$

Segue do Teorema 1.7 que $I - B_\lambda$ tem inverso e é limitado, dado pela série

$$(I - B_\lambda)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_\lambda^n.$$

Assim, temos $(I - \dfrac{1}{\lambda}A)^{-1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{\lambda^n}$. Escreva $\lambda I - A = \lambda(I - \dfrac{1}{\lambda}A)$, então observe que

$$\begin{aligned}(\lambda I - A)^{-1} &\overset{(*)}{=} \frac{1}{\lambda}(I - \frac{1}{\lambda}A)^{-1}\\ &= \frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{\lambda^n}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{\lambda^{n+1}}.\end{aligned}$$

A igualdade em $(*)$ nos garante que $(\lambda I - A)$ é invertível e limitado, desde que temos $(I - B_\lambda)^{-1} = (I - \dfrac{1}{\lambda}A)^{-1}$. Assim, concluímos que $\lambda \in \rho(A)$. □

Teorema 1.9. *Seja E um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$, e seja $A : D(A) \subset E \to E$ um operador linear fechado. Então, para todo $\lambda, \mu \in \rho(A)$, temos:*

$$(\lambda I - A)^{-1} - (\mu I - A)^{-1} = (\mu I - \lambda I)(\lambda I - A)^{-1}(\mu I - A)^{-1}$$

e

$$(\mu I - A)^{-1}(\lambda I - A)^{-1} = (\lambda I - A)^{-1}(\mu I - A)^{-1}.$$

Demonstração. Observe que

$$\begin{aligned}(\lambda I - A)^{-1} - (\mu I - A)^{-1} &= [(\lambda I - A)^{-1}(\mu I - A) - I](\mu I - A)^{-1}\\ &= [(\lambda I - A)^{-1}((\mu I - A) - (\lambda I - A))](\mu I - A)^{-1}\\ &= (\lambda I - A)^{-1}(\mu I - \lambda I)(\mu I - A)^{-1}.\end{aligned}$$

Da primeira igualdade, temos

$$
\begin{aligned}
(\lambda I - A)^{-1} &= (\mu I - \lambda I)(\lambda I - A)^{-1}(\mu I - A)^{-1} + (\mu I - A)^{-1} \\
(\lambda I - A)^{-1} &= (\lambda I - A)^{-1}(\mu I - A)^{-1}[(\mu I - \lambda I) + (\lambda I - A)] \\
(\mu I - A)^{-1}(\lambda I - A)^{-1} &= (\lambda I - A)^{-1}(\mu I - A)^{-1}.
\end{aligned}
$$

□

Teorema 1.10. *Seja E um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$, e seja $A : D(A) \subset E \to E$ um operador linear fechado.*

(i) *Então $\rho(A)$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{C}$, e consequentemente $\sigma(A)$ é um subconjunto fechado de $\mathbb{C}$;*

(ii) *Se $\mu \in \rho(A)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ é tal que $|\mu - \lambda| \|(\mu I - A)^{-1}\| < 1$, então $\lambda \in \rho(A)$ e*

$$
(\lambda I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^n (\mu I - A)^{-n-1}.
$$

Demonstração. Se $\mu \in \rho(A)$, então $(\mu I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(E)$. Se $\lambda \in \mathbb{C}$, temos

$$
(\lambda I - A) = (\mu I - A)[I - (\mu - \lambda)(\mu I - A)^{-1}]
$$

e se $|\mu - \lambda| \|(\mu I - A)^{-1}\| < 1$, então podemos inverter o operador do lado direito da igualdade, pela série de Neumann.
Logo, existe um disco aberto no plano complexo com centro μ que está totalmente contido em $\rho(A)$, e consequentemente

$$
\begin{aligned}
[I - (\mu - \lambda)(\mu I - A)^{-1}]^{-1}(\mu I - A)^{-1} &= (\mu I - A)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^n (\mu I - A)^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^n (\mu I - A)^{-n-1}.
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
(\lambda I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^n (\mu I - A)^{-n-1}.
$$

□

1.3 Operadores fechados com resolvente compacto

Frequentemente, operadores compactos aparecem como inversos de operadores ilimitados. Estes operadores são também chamados de operadores com resolvente compacto. Esta propriedade é de extrema importância na análise espectral de operadores, por além de outras razões, nos permitir classificar o espectro de um operador, como veremos a seguir.

Definição 1.9. Seja E um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$ e seja $A : D(A) \subset E \to E$ um operador linear com $\rho(A) \neq \varnothing$. Dizemos que A tem resolvente compacto se para algum $\lambda_0 \in \rho(A)$ o operador $(\lambda_0 I - A)^{-1}$ é compacto.

Lema 1.11. Seja E um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$ e seja $A : D(A) \subset E \to E$ um operador linear com $\rho(A) \neq \varnothing$. Se A tem resolvente compacto então $(\lambda I - A)^{-1}$ é compacto para todo $\lambda \in \rho(A)$.

Demonstração. Seja $\lambda \in \rho(A)$ e se para algum $\lambda_0 \in \rho(A)$ o operador $(\lambda_0 I - A)^{-1}$ é compacto, pela identidade do resolvente

$$(\lambda I - A)^{-1} = (\lambda_0 - \lambda)(\lambda_0 I - A)^{-1}(\lambda I - A)^{-1} + (\lambda_0 I - A)^{-1}$$

concluímos que $(\lambda I - A)^{-1}$ é compacto. □

Teorema 1.12 (Teorema de Riesz-Schauder em termos de teoria espectral)**.** *Seja E um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) com $\dim E = \infty$, e seja $A : D(A) \subset E \to E$ um operador linear compacto. Então, as seguintes afirmações são verdadeiras*

(*i*) $\sigma(A) = \{0\} \cup \{\lambda_j ; j \in J\}$, *onde* $J = \varnothing, \mathbb{N}, \{1, 2, \ldots, n\}; n \in \mathbb{N}$*;*

(*ii*) *Se* $\sigma(A) \backslash \{0\} = \sigma_p(A)$. *Para todo* $\lambda \in \sigma(A) \backslash \{0\}$ *a imagem de* $\lambda I - A$ *é fechada*

$$\dim \ker(\lambda I - A) = codim R(\lambda I - A) < \infty;$$

(*iii*) *Para todo* $\varepsilon > 0$ *o conjunto* $\sigma(A) \backslash B_\varepsilon(0)$ *é finito. Logo,* $\lambda_j \to 0$ *quando* $j \to \infty$ *se* $J = \mathbb{N}$.

Demonstração. Inicialmente, observe que se $0 \in \rho(A)$ então A é invertível e por conseguinte $I = A^{-1}A$ é compacto. O que é um absurdo, pois estamos assumindo que $\dim E = \infty$. Logo, $0 \in \sigma(A)$. Para provar (i), é suficiente mostrar que para todo número real $k > 0$, o conjunto de todos os $\lambda \in \sigma_(A)$ tais que $|\lambda| \geqslant k$ é finito. Para isto, vamos supor o contrário, isto é, suponha que existe $k_0 > 0$ tal que o conjunto dos $\lambda \in \sigma(A)$ tais que $|\lambda| \geqslant k_0$ é infinito. Então, existe uma sequência $\lambda_n \in \sigma(A)$ de termos distintos, tal que $|\lambda_n| \geqslant k_0$. E, existe $\{x_n\}_n \in E$ tal que $Ax_n = \lambda_n x_n$ para algum $x_n \neq 0$. Como estamos supondo que os termos da sequência λ_n são distintos, temos que o conjunto dos $x_n's$ é linearmente independente. Considere $M_n = \langle x_1, \cdots, x_n \rangle$, então dado $x \in M_n$, este é escrito unicamente como sendo

$$x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n.$$

Assim,

$$(\lambda_n I - A)x = \alpha_1(\lambda_n - \lambda_1)x_1 + \cdots + (\lambda_n - \lambda_{n-1})x_{n-1}.$$

Note que no lado direito da igualdade acima não aparece x_n, então $(\lambda_n I - A)x \notin M_n$. Mas, $(\lambda_n I - A)x \in M_{n-1}$, para todo $x \in M_n$.
Recordemos que se X é um espaço vetorial normado e M um subespaço vetorial de X de dimensão finita, então M é fechado. Deste modo, temos que para cada n, M_n é fechado. Logo, pelo Lema de Riesz[3], existe uma sequência y_n tal que

$$y_n \in M_n, \quad \|y_n\| = 1, \quad \text{e} \ , \ \forall x \in M_{n-1}, \ \|y_n - x\| \geqslant \frac{1}{2}.$$

Afirmação 1.3. Dados $n > m$, temos $\|Ay_n - Ay_m\| \geqslant \dfrac{1}{2}k_0$. Com efeito, note que podemos escrever

$$Ay_n - Ay_m = \lambda_n y_n - \hat{x}$$

onde $\hat{x} = \lambda_n y_n - Ay_n + Ay_m$. Vamos mostrar que $\hat{x} \in M_{n-1}$. Como $m \leqslant n-1$, segue que $y_m \in M_m \subset M_{n-1} = \langle x_1, \cdots, x_{n-1} \rangle$, logo $Ay_m \in M_{n-1}$. Além disso, observe que

$$\lambda_n y_n - Ay_n = (\lambda_n I - A)y_n \in M_{n-1}.$$

Assim, $\hat{x} \in M_{n-1}$.
Desde que $\lambda_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, podemos considerar $x = {\lambda_n}^{-1}\hat{x} \in M_{n-1}$. Logo,

$$\|Ay_n - Ay_m\| = \|\lambda_n y_n - \hat{x}\| = |\lambda_n| \|y_n - x\| \geqslant \frac{1}{2}|\lambda_n| \geqslant \frac{1}{2}k_0.$$

Desde que $k_0 > 0$, concluímos que Ay_n não possui subsequência convergente, o que é um absurdo, pois A é compacto e y_n é limitada. Portanto, concluímos o resultado.
(ii) Vamos mostrar que $\ker(\lambda I - A)$ tem dimensão finita. Para isso, vamos mostrar que a bola $B = \{x \in \ker(\lambda I - A);\ \|x\| \leqslant 1\}$ é compacta.

[3]Ver apêndice

Tome $x_n \in B$, então x_n é limitada. Desde que A é compacto, temos que Ax_n possui uma subsequência convergente, digamos Ax_{n_k}. Por outro lado, $x_n \in \ker(\lambda I - A)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Assim,

$$(\lambda I - A)x_n = 0 \implies Ax_n = \lambda x_n \implies x_n = \lambda^{-1}Ax_n \text{ (pois } \lambda \neq 0).$$

Desde que Ax_{n_k} é convergente, x_{n_k} também o é, ou seja, dado uma sequência em B, é possível mostrar que ela possui subsequência convergente. Portanto, B é compacta e por conseguinte, concluímos que $\dim \ker(\lambda I - A)$.

Agora, vamos mostrar que $R(\lambda I - A)$ é fechado. Vamos mostrar por contradição e dividir a prova em etapas, como explicado abaixo.

Etapa 1. Consideraremos $y \in \overline{R(\lambda I - A)} \setminus R(\lambda I - A)$ e uma sequência $(\lambda I - A)x_n \to y$. Vamos mostrar que $x_n \notin \ker(\lambda I - A)$, mas $\ker(\lambda I - A)$ contém uma sequência z_n tal que $\|x_n - z_n\| < 2\delta_n$, onde δ_n é a distância de x_n à $\ker(\lambda I - A)$.

Etapa 2. Vamos mostrar que $a_n \to \infty$, onde $a_n = \|x_n - z_n\|$.

Etapa 3. Vamos obter uma contradição antecipada, por considerar a sequência w_n, onde $w_n = {a_n}^{-1}(x_n - z_n)$.

Os detalhes são como segue.

Suponhamos que $R(\lambda I - A)$ não é fechado. Então, existem $y \in \overline{R(\lambda I - A)} \setminus R(\lambda I - A)$ e uma sequência $x_n \in E$ tal que $(\lambda I - A)x_n \to y$.

Afirmação 1.4. $x_n \notin \ker(\lambda I - A)$. De fato, pois temos $y \neq 0$, do contrário, teríamos $y = 0 \in R(\lambda I - A)$, já que $R(\lambda I - A)$ é subespaço vetorial. Assim, $(\lambda I - A)x_n \neq 0$, e logo $x_n \notin \ker(\lambda I - A)$ para todo n suficientemente grande. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $x_n \notin \ker(\lambda I - A)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (de fato, se existir n_0 de modo que $x_{n_0} \in \ker(\lambda I - A)$ basta descartar tal termo. Note que as propriedades de convergência da sequência serão mantidas). Como $\ker(\lambda I - A)$ é um subconjunto fechado, a distância δ_n de x_n à $\ker(\lambda I - A)$ é positiva, isto é,

$$\delta_n = \inf_{z \in \ker(\lambda I - A)} \|x_n - z\| > 0.$$

Pela definição de ínfimo, existe $z_n \in \ker(\lambda I - A)$ tal que $a_n = \|x_n - z_n\| < 2\delta_n$.

Afirmação 1.5. $a_n \to \infty$, quando $n \to \infty$. Com efeito, suponha o contrário. Então, $(x_n - z_n)$ possui uma subsequência limitada. Desde que A é compacto, temos que $A(x_n - z_n)$ possui subsequência convergente. Desde que $\lambda \neq 0$, temos $I = -\lambda^{-1}(A_\lambda - A)$, onde $A_\lambda = A - \lambda I$. Daí,

$$\begin{aligned} x_n - z_n &= -\lambda^{-1}(A_\lambda - A)(x_n - z_n) \\ &= -\lambda^{-1}(A_\lambda x_n - A(x_n - z_n)) \\ &= \lambda^{-1}(A(x_n - z_n) - A_\lambda x_n). \end{aligned}$$

Como observado acima, $A(x_n - z_n)$ possui subsequência convergente e $-A_\lambda x_n \to y$, logo, concluímos que $(x_n - z_n)$ possui subsequência convergente, digamos $x_{n_k} - z_{n_k} \to \nu$. Desde que A é compacto, temos A contínuo, e vale o mesmo para $(\lambda I - A)$. Logo

$$(\lambda I - A)(x_{n_k} - z_{n_k}) \to (\lambda I - A)\nu,$$

o que nos diz que $(\lambda I - A)x_{n_k} \to (\lambda I - A)\nu$, pois, $z_{n_k} \in \ker(\lambda I - A)$. Pela unicidade do limite, segue que $y = (\lambda I - A)\nu$, ou seja, $y \in R(\lambda I - A)$. O que contradiz o que estamos supondo na Etapa 1. Logo, $a_n \to \infty$.
Agora, seja $w_n = a^{-1}(x_n - z_n)$. Desse modo, temos $\|w_n\| = 1$. Além disso, temos

$$(\lambda I - A)w_n = {a_n}^{-1}(\lambda I - A)(x_n - z_n) = {a_n}^{-1}(\lambda I - A)x_n \to 0, \tag{1.3}$$

pois, $\dfrac{1}{a_n} \to 0$ quando $n \to \infty$ e $(\lambda I - A)x_n$ é convergente (e portanto, limitada).
Usando novamente $I = -\lambda^{-1}(A_\lambda - A)$, temos

$$w_n = -\lambda^{-1}(A_\lambda w_n - Aw_n) = \lambda^{-1}(Aw_n - A_\lambda w_n). \tag{1.4}$$

Recordemos que estamos assumindo A compacto, e desde que w_n é limitada, segue que Aw_n possui subsequência convergente, em vista disso e de (1.4), concluímos que w_n possui subsequência convergente, digamos, w_{n_k}, com

$$w_{n_k} \to w. \tag{1.5}$$

Da convergência acima e de (1.3), segue que $(\lambda I - A)w = 0$. Logo, $w \in \ker(\lambda I - A)$. Como $z_n \in \ker(\lambda I - A)$, temos $u_n = z_n + a_n w \in \ker(\lambda I - A)$, logo, devemos ter $\|x_n - u_n\| \geqslant \delta_n$, daí

$$\delta_n \leqslant \|x_n - u_n\| = \|x_n - z_n - a_n w\| = \|a_n w_n - a_n w\| = a_n\|w_n - w\|,$$

mas lembre que $a_n < 2\delta_n$, logo $a_n\|w_n - w\| < 2\delta_n\|w_n - w\|$. Assim, temos

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \delta_n < 2\delta_n\|w_n - w\| \implies \frac{1}{2} < \|w_n - w\|$$

o que é uma contradição, em vista de (1.5). Portanto, concluímos que $R(\lambda I - A)$ é fechada. Por fim, provaremos (iii). A prova deste item segue os mesmos passos da prova do item (i). Vamos supor que para algum $\epsilon_0 > 0$, o conjunto $\sigma(A) \smallsetminus B_{\epsilon_0}(0)$ é infinito. Então, existe uma sequência $\lambda_n \in \sigma(A) \smallsetminus B_{\epsilon_0}(0)$ de termos distintos, isto é, existem $\lambda_n \in \sigma(A) \smallsetminus B_{\epsilon_0}(0)$ com $\lambda_n \neq \lambda_m$ para todo $n \neq m \in \mathbb{N}$. E, existe $\{x_n\}_n \in E$ tal que $Ax_n = \lambda_n x_n$ para algum $x_n \neq 0$. Como estamos supondo que os termos da sequência λ_n são distintos, temos que o conjunto dos $x_n's$ é linearmente independente. Considere $M_n = \langle x_1, \cdots, x_n\rangle$, então dado $x \in M_n$, este é escrito unicamente como sendo

$$x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n.$$

Assim,

$$(\lambda_n I - A)x = \alpha_1(\lambda_n - \lambda_1)x_1 + \cdots + (\lambda_n - \lambda_{n-1})x_{n-1}.$$

Note que no lado direito da igualdade acima não aparece x_n, então $(\lambda_n I - A)x \notin M_n$. Mas, $(\lambda_n I - A)x \in M_{n-1}$, para todo $x \in M_n$.

Recordemos que se X é um espaço vetorial normado e M um subespaço vetorial de X de dimensão finita, então M é fechado. Deste modo, temos que para cada n, M_n é fechado. Logo, pelo Lema de Riesz[4], existe uma sequência y_n tal que

$$y_n \in M_n, \quad \|y_n\| = 1 \quad \text{e} \quad \forall x \in M_{n-1},\ \|y_n - x\| \geqslant \frac{1}{2}.$$

Afirmação 1.6. Dados $n > m$, temos $\|Ay_n - Ay_m\| \geqslant \dfrac{1}{2}\epsilon_0$. Com efeito, note que podemos escrever

$$Ay_n - Ay_m = \lambda_n y_n - \hat{x},$$

onde $\hat{x} = \lambda_n y_n - Ay_n + Ay_m$. Vamos mostrar que $\hat{x} \in M_{n-1}$. Como $m \leqslant n-1$, segue que $y_m \in M_m \subset M_{n-1} = \langle x_1, \cdots, x_{n-1}\rangle$, logo $Ay_m \in M_{n-1}$. Além disso, observe que

$$\lambda_n y_n - Ay_n = (\lambda_n I - A)y_n \in M_{n-1}.$$

Assim, $\hat{x} \in M_{n-1}$.

[4]Ver apêndice

Desde que $\lambda_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, podemos considerar $x = {\lambda_n}^{-1}\hat{x} \in M_{n-1}$. Logo,

$$\|Ay_n - Ay_m\| = \|\lambda_n y_n - \hat{x}\| = |\lambda_n| \|y_n - x\| \geqslant \frac{1}{2}|\lambda_n| \geqslant \frac{1}{2}\epsilon_0.$$

Desde que $\epsilon_0 > 0$, concluímos que Ay_n não possui subsequência convergente, o que é um absurdo, pois A é compacto e y_n é limitada. Portanto, concluímos o resultado. $\square$

Teorema 1.13. *Seja E um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$ com $\dim E = \infty$, e seja $A : D(A) \subset E \to E$ um operador linear fechado com resolvente compacto. Então, valem as seguintes afirmações:*

(i) *$\sigma(A)$ ou é vazio ou $\sigma(A) = \sigma_p(A)$ contém no máximo um número enumerável de autovalores λ_j;*

(ii) *Se $\sigma(A)$ é infinito, então $\lim_{j\to\infty} |\lambda_j| = \infty$;*

(iii) *Para todo $\lambda_j \in \sigma(A)$, então a imagem $\lambda_j I - A$ é fechada e $\dim Ker(\lambda_j I - A) = codim R(\lambda_j I - A) < \infty$.*

Demonstração. Fixe $\mu \in \rho(A)$. Então, o operador $(\mu I - A)^{-1}$ é compacto. Logo, pelo Teorema 1.12, temos

$$\sigma((\mu I - A)^{-1}) = \{0\} \cup \{\mu_j;\ j \in J\},$$

onde J é como no Teorema 1.12. Além disso, se

$$\sigma((\mu I - A)^{-1}) \setminus \{0\} = \sigma_p((\mu I - A)^{-1}) \setminus \{0\}$$

então a imagem de $\mu_j I - (\mu I - A)^{-1}$ é fechada e

$$\dim(\ker(\mu_j I - (\mu I - A)^{-1})) = \mathrm{codim}(R(\mu_j I - (\mu I - A)^{-1})) < \infty,$$

para todo j. Pela Proposição 1.1, temos $(\mu - \sigma(A))^{-1} = \sigma((\mu I - A)^{-1})\backslash\{0\}$ e $(\mu - \sigma_p(A))^{-1} = \sigma_p((\mu I - A)^{-1})\backslash\{0\}$. Daí, concluímos a demonstração dos itens (i) e (ii), onde $\lambda_j = \mu - \frac{1}{\mu_j}$. Observe que

$$\lambda_j I - A = \frac{1}{\mu_j}(\mu_j I - (\mu I - A)^{-1})(\mu I - A).$$

Assim, a prova do item (iii) segue daí e do Teorema 1.12. $\square$

Exemplo 1.4. Seja $E = C([0,1];\mathbb{K})$ munido da norma do supremo e seja $A : D(A) \subset E \to E$, onde $D(A) = C^1([0,1])$ e $Af = f'$ como no Exemplo 1.1.

Já vimos que A é fechado e densamente definido com $\rho(A) = \emptyset$. Portanto, A não tem resolvente compacto.

Exemplo 1.5. Seja $E = C([0,1];\mathbb{K})$ munido com a norma do supremo e seja $A : D(A) \subset E \to E$, onde $D(A) = \{f \in C^1([0,1]); f(0) = f'(0) = 0\}$ e $Af = f'$ como no Exemplo 1.3. Note que A é um operador linear fechado e densamente definido com $0 \in \rho(A)$. Além disso, A tem resolvente compacto.
Desde que $0 \in \rho(A)$ basta mostrarmos que A^{-1} é compacto, isto é, que $\overline{A^{-1}(B_E)}$ é compacto. Note que A^{-1} é limitado e assim $A^{-1}(B_E) \subset D(A)$ é limitado. Seja f_n uma sequência de funções em $A^{-1}(B_E)$ então, f_n é limitada e equicontínua, logo, segue do Teorema de Ascoli-Arzelá[5] que $\overline{A^{-1}(B_E)}$ é compacto.

Teorema 1.14. *Seja E um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$, e seja $A : D(A) \subset E \to E$ um operador linear fechado com $0 \in \rho(A)$. Defina a norma do gráfico $\|\cdot\|_{G(A)} = \|\cdot\| + \|A\cdot\|$ em $D(A)$ e denote por Y o espaço $D(A)$ munido da norma $\|\cdot\|_{G(A)}$. Mostre que Y é um espaço de Banach e se o operador identidade de Y sobre E é compacto, então A tem resolvente compacto. Além disso, $\|\cdot\|_{G(A)}$ é equivalente a norma $\|\cdot\|_A = \|A\cdot\|$ em $D(A)$.*

Demonstração. Note que se x_n é uma sequência de Cauchy em Y então, x_n é de Cauchy em E, logo, existe $x \in E$ tal que $x_n \to x$. Além disso, Ax_n é de Cauchy em E então, existe y tal que $Ax_n \to y$. Desde que A é fechado, temos $x \in D(A)$ e $y = Ax$, assim $x_n \to x \in E$.
Note que $A^{-1} : E \to E$ é dado por $A^{-1} = i \circ A^{-1}$, onde $i : Y \to E$ denota o operador identidade.
Finalmente,

$$\|\cdot\|_A = \|A\cdot\| \leqslant \|\cdot\| + \|A\cdot\| = \|\cdot\|_{G(A)}$$

e

$$\|\cdot\|_{G(A)} = \|\cdot\| + \|A\cdot\| \leqslant \|A^{-1}\|\|A\cdot\| + \|A\cdot\| = (\|A^{-1}\| + 1)\|A\cdot\|.$$

□

Teorema 1.15. *Seja E um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$, e sejam $A : D \subset E \to E$ e $B : D \subset E \to E$ operadores lineares fechados. Então para algum*

[5] Ver apêndice

$\lambda \in \rho(A) \cap \rho(B)$ temos

$$(\lambda I - A)^{-1} - (\lambda I - B)^{-1} = (\lambda I - A)^{-1}(A - B)(\lambda I - B)^{-1}.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}(\lambda I - A)^{-1} - (\lambda I - B)^{-1} &= [(\lambda I - A)^{-1}(\lambda I - B) - I](\lambda I - B)^{-1}\\ &= (\lambda I - A)^{-1}[(\lambda I - B) - (\lambda I - A)](\lambda I - B)^{-1}\\ &= (\lambda I - A)^{-1}(A - B)(\lambda I - B)^{-1}.\end{aligned}$$

□

Teorema 1.16. *Seja E um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$, e seja $A : D(A) \subset E \to E$ um operador linear com $\rho(A) \neq \varnothing$. Então,*

(i) A aplicação $\rho(A) \ni \lambda \mapsto (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(E)$ é contínua;

(ii) A aplicação $\rho(A) \ni \lambda \mapsto (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(E)$ é analítica.

Demonstração. Inicialmente, observe que φ é contínua em $\rho(A)$. De fato, dado $\epsilon > 0$, considere

$$\delta = \min\left\{\frac{1}{\|(\lambda_0 I - A)^{-1}\|}, \epsilon\right\}.$$

Se $\lambda \in \mathbb{C}$ é tal que $|\lambda - \lambda_0| < \delta$, pelo Teorema 1.10, temos $\lambda \in \rho(A)$ e

$$(\lambda I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda_0 - \lambda)^n(\lambda - A)^{-n-1}.$$

Note que a série acima converge para $\dfrac{1}{2\|\lambda_0 I - A)^{-1}\|}$. Assim,

$$\begin{aligned}\|\varphi(\lambda) - \varphi(\lambda_0)\| &= \|(\lambda I - A)^{-1} - (\lambda_0 I - A)^{-1}\|\\ &= \|(\lambda_0 - \lambda)(\lambda - A)^{-1}(\lambda_0 - A)^{-1}\|\\ &\leqslant |\lambda_0 - \lambda|\|(\lambda I - A)^{-1}\|\|(\lambda_0 I - A)^{-1}\|\\ &< \frac{|\lambda_0 - \lambda|}{2}\\ &< \epsilon.\end{aligned}$$

O que nos diz que φ é contínua em $\lambda_0 \in \rho(A)$. Pela arbitrariedade de $\lambda_0 \in \rho(A)$, segue que φ é contínua para todo $\lambda_0 \in \rho(A)$. Além disso, note que

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda - \lambda_0}[(\lambda I - A)^{-1} - (\lambda_0 - A)^{-1}] &= \frac{1}{\lambda - \lambda_0}[(\lambda_0 - \lambda)(\lambda I - A)^{-1}(\lambda_0 I - A)^{-1}] \\ &= -(\lambda I - A)^{-1}(\lambda_0 I - A)^{-1}.\end{aligned}$$

Daí, temos

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \frac{(\lambda I - A)^{-1} - (\lambda_0 I - A)^{-1}}{\lambda - \lambda_0} = -\lim_{\lambda\to\lambda_0}(\lambda I - A)^{-1}(\lambda_0 I - A)^{-1} = -(\lambda_0 - A)^{-2}.$$

o que implica

$$-(\lambda_0 - A)^{-2} = \lim_{\lambda-\lambda_0} \frac{(\lambda I - A)^{-1} - (\lambda_0 I - A)^{-1}}{\lambda - \lambda_0} = \lim_{\lambda-\lambda_0} \frac{\varphi(\lambda) - \varphi(\lambda_0}{\lambda - \lambda_0} = \varphi'(\lambda_0).$$

Provando assim, que φ é analítica para todo $\lambda_0 \in \rho(A)$. □

1.4 Operadores duais, adjuntos e simétricos

Nesta seção definiremos e apresentaremos alguns resultados importantes de algumas classes de operadores lineares, os operadores duais, os adjuntos, os simétricos, e por fim, definiremos os operadores autoadjuntos, os quais serão de extrema importância no estudo que faremos no Capítulo 4.

Definição 1.10. Sejam E e F espaços de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$ e seja $A : D(A) \subset E \to F$ um operador linear densamente definido. Sejam E^* e F^* os espaços duais de E e F, respectivamente. O dual $A^* : D(A^*) \subset F^* \to E^*$ de A é o operador definido por

$$D(A^*) := \{y^* \in F^*;\ \text{ existe } z^* \in E^* \text{ com } \langle Ax, y^*\rangle = \langle x, z^*\rangle \text{ para todo } x \in D(A)\}.$$

Se $y^* \in D(A^*)$ defina

$$A^* y^* := z^*,$$

onde z^* é o único elemento de E^* tal que $\langle Ax, y^*\rangle = \langle x, z^*\rangle$ para todo $x \in D(A)$.

Lema 1.17. Seja E um espaço de Banach reflexivo sobre um corpo $\mathbb{K}$ e seja $A : D(A) \subset E \to E$ um operador linear densamente definido. Então $A^* : D(A^*) \subset E^* \to E^*$ é um operador linear fechado e densamente definido.

Demonstração. Seja $x_n^* \in D(A^*)$ com $x_n^* \to x^* \in F^*$ e $A^* x_n^* \to y^*$. Desde que $x_n^* \in D(A^*)$

temos que existe $z^* \in E^*$ tal que

$$\langle Ax, x_n^* \rangle = \langle x, z^* \rangle \implies \langle x, A^* x_n^* \rangle = \langle x, z^* \rangle \overset{n\to\infty}{\implies} \langle x, y^* \rangle = \langle x, z^* \rangle \implies y^* = z^*.$$

Assim

$$\langle Ax, x^* \rangle = \langle x, y^* \rangle \implies \langle x, A^* x^* \rangle = \langle x, y^* \rangle,$$

donde concluímos que A^* é fechado.

Vamos agora mostrar que $\overline{D(A^*)} = E^*$.

Suponha que $\overline{D(A^*)} \neq E^*$, então existe $x^{**} \in E^{**}$ tal que $x^{**} \neq 0$ e $\langle y^*, x^{**} \rangle = 0$ para todo $y^* \in D(A^*)$. Como E é um espaço de Banach reflexivo, então as afirmações acima equivalem a dizer que existe $x \in E$ tal que $x \neq 0$ e $\langle x, x^* \rangle = 0$ para todo $x^* \in D(A^*)$. Como A é fechado, em particular linear, temos que $(0, x) \notin G(A)$. Note que $G(A)$ é fechado e $(0, x)$ é compacto, ambos convexos, então do Teorema de Hahn-Banach existem $x_1^*, x_2^* \in E^*$ tais que $\langle x, x_1^* \rangle - \langle Ax, x_2^* \rangle = 0$ para todo $x \in D(A)$, e $\langle 0, x_1^* \rangle - \langle x, x_2^* \rangle \neq 0$. Da segunda relação, temos $x_2^* \neq 0$ e $\langle x, x_2^* \rangle \neq 0$. Por outro lado, da primeira relação obtemos que $x_2^* \in D(A^*)$ e $A^* x_2^* = x_1^*$. Isto implica que $\langle x, x_2^* \rangle = 0$ o que é uma contradição. Sendo assim, concluímos que $D(A^*)$ é denso em E^*. □

Lema 1.18. Sejam E e F espaços de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$ e seja $A : D(A) \subset E \to F$ um operador linear limitado. Então $A^* : D(A^*) \subset F^* \to E^*$ é um operador limitado com $\|A^*\|_{\mathcal{L}(F^*, E^*)} = \|A\|_{\mathcal{L}(E,F)}$.

Demonstração. Desde que A é limitado, temos $|\langle v, Au \rangle| \leqslant \|A\|_{\mathcal{L}(E,F)} \|u\| \|v\|$ para todo $v \in F^*$ e para todo $u \in D(A)$, assim $D(A^*) = F^*$. Como $\langle v, Au \rangle = \langle A^* v, u \rangle$, segue que A^* é limitado e

$$\forall\ v \in F^* \text{ e } \forall\ u \in D(A), \quad |\langle A^* v, u \rangle| \leqslant \|A\|_{\mathcal{L}(E,F)} \|u\| \|v\|.$$

Daí, temos $\sup\limits_{u \in E} |\langle A^* v, u \rangle| \leqslant \|A\|_{\mathcal{L}(E,F)} \|v\|$ que implica em $\|A^* v\| \leqslant \|A\|_{\mathcal{L}(E,F)} \|v\|$, e logo $\|A^*\|_{\mathcal{L}(F^*, E^*)} \leqslant \|A\|_{\mathcal{L}(E,F)}$, para u com $\|u\| \leqslant 1$. Por outro lado, $|\langle v, Au \rangle| \leqslant \|A^*\|_{\mathcal{L}(F^*, E^*)} \|u\| \|v\|$ para todo $u \in E$, e para todo $v \in F^*$.

Daí, $\sup\limits_{v \in F^*} |\langle v, Au \rangle| \leqslant \|A^*\|_{\mathcal{L}(F^*, E^*)} \|u\|$ implica em $\|Au\| \leqslant \|A^*\|_{\mathcal{L}(F^*, E^*)} \|u\|$ e logo, $\|A\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leqslant \|A^*\|$, para v com $\|v\| \leqslant 1$. Portanto, $\|A\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \|A^*\|_{\mathcal{L}(F^*, E^*)}$. □

Teorema 1.19. *Seja E um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$, e seja $A : D \subset E \to E$ um operador linear densamente definido. Se $\alpha \in \mathbb{K}$ e $B : D \subset E \to E$ um operador* *linear, então*

$$(A \pm B)^* = A^* \pm B^*$$

e

$$(\alpha A)^* = \alpha A^*.$$

Demonstração. Se $y^* \in D$ então existem $z^*, w^* \in E^*$ tais que $A^* y^* = z^*$ e $B^* y^* = w^*$. Daí

$$\begin{aligned}
\langle x, (A \pm B)^* y^* \rangle &= \langle (A \pm B)x, y^* \rangle \\
&= \langle Ax, y^* \rangle \pm \langle Bx, y^* \rangle \\
&= \langle x, z^* \rangle \pm \langle x, w^* \rangle \\
&= \langle x, A^* y^* \rangle \pm \langle x, B^* y^* \rangle \\
&= \langle x, A^* y^* \pm B^* y^* \rangle.
\end{aligned}$$

Pela linearidade dos operadores duais, temos $\langle x, (A^* \pm B^*) y^* \rangle$. Além disso,

$$\langle x, (\alpha A)^* y^* \rangle = \langle (\alpha A)x, y^* \rangle = \alpha \langle Ax, y^* \rangle = \langle x, \alpha z^* \rangle = \langle x, A^* y^* \rangle.$$

□

Teorema 1.20. *Seja E um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$, e seja $A : D(A) \subset E \to E$ um operador linear densamente definido. Então, $\rho(A) = \rho(A^*)$ e para cada $((\lambda I - A)^{-1})^* = (\lambda I^* - A^*)^{-1}$.*

Demonstração. Seja $\lambda \in \rho(A)$. Vamos começar mostrando que

(i) $\forall x^* \in D(A^*)$, $((\lambda I - A)^{-1})^* (\lambda I^* - A^*) x^* = x^*$;

(ii) $\forall x^* \in D(((\lambda I - A)^{-1})^*), (\lambda I^* - A^*)((\lambda I - A)^{-1})^* x^* = x^*$.

Demonstração. (i) Seja $x^* \in D(A^*)$, então para todo $x \in R(\lambda I - A)$, temos

$$\begin{aligned}
\langle x, x^* \rangle &= \langle (\lambda I - A)(\lambda I - A)^{-1} x, x^* \rangle \\
&= \langle (\lambda I / - A)^{-1} x, (\lambda I - A)^* x^* \rangle \\
&= \langle (\lambda I - A)^{-1} x, (\lambda I^* - A^*) x^* \rangle.
\end{aligned}$$

Daí, segue que $(\lambda I - A)^* x^* \in D((\lambda I - A)^{-1})$, isto é, $R(\lambda I - A)^{-1} \subset D((\lambda I - A)^{-1})$. Como $\overline{R(\lambda I - A)} = E$ concluimos (i).

(ii) Seja $x^* \in D(((\lambda I - A)^{-1})^*)$ e $x \in D(A)$ então

$$\begin{aligned}\langle x, x^* \rangle &= \langle (\lambda I - A)^{-1}(\lambda I - A)x, x^* \rangle \\ &= \langle (\lambda I - A)x, ((\lambda I - A)^{-1})^* x^* \rangle.\end{aligned}$$

Logo, $((\lambda I - A)^{-1})^* x^* \in D((\lambda I - A)^*)$, e como $\overline{D(A)} = E$ concluímos (ii).
Vamos agora mostrar que $\rho(A) = \rho(A^*)$. Seja $\lambda \in \rho(A^*)$, note que A^* é fechado e $(\lambda I^* - A^*)^{-1} \in \mathcal{L}(E^*)$. Vamos mostrar que $\lambda I - A$ é injetivo, $\overline{R(\lambda I - A)} = E$ e que $(\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(E)$.
Seja $x \in D(A)$ com $(\lambda I - A)x = 0$ e $x^* \in D(A^*)$, então

$$0 = \langle (\lambda I - A)x, x^* \rangle = \langle x, (\lambda I - A)^* x^* \rangle.$$

Desde que $R((\lambda I - A)^*) = E^*$, temos $x = 0$, e portanto concluímos que $\lambda I - A$ é injetivo.
Agora, seja $x^* \in E^*$ tal que $0 = \langle (\lambda I - A)x, x^* \rangle$ para todo $x \in D(A)$. Daí, $x^* \in D(A^*)$ e $0 = \langle x, (\lambda I - A)^* x^* \rangle$ para todo $x \in D(A)$. Como $\overline{D(A)} = E$ segue que $(\lambda I - A)^* x^* = 0$. Contudo, $\lambda \in \rho(A^*)$, logo $x^* = 0$.
Vamos agora mostrar que $(\lambda I - A)^{-1}$ é limitado. Note que, se $x^* \in E^* = R(\lambda I^* - A^*) \subset D(((\lambda I - A)^{-1})^*)$ e $x \in R(\lambda I - A)$, temos

$$\begin{aligned}\langle (\lambda I - A)^{-1} x, x^* \rangle &= \langle x, ((\lambda I - A)^{-1})^* x^* x^* \rangle \\ &\overset{(i) \text{ e } (ii)}{=} \langle x, (\lambda I^* - A^*)^{-1} x^* \rangle \\ &\leqslant \|(\lambda I^* - A^*)^{-1}\| \|x\| \|x^*\|.\end{aligned}$$

Desde que $\lambda \in \rho(A^*)$ temos $(\lambda I^* - A^*)^{-1}$ limitado, e consequentemente, pelo que vimos acima, $(\lambda I - A)^{-1}$ é limitado. Agora, seja $\lambda \in \rho(A)$. Então, $(\lambda I - A)^{-1}$ é limitado, e logo $(\lambda I^* - A^*)^{-1} \in \mathcal{L}(E^*)$. Observe que de (i) e (ii) temos $(\lambda I^* - A^*)^{-1} = ((\lambda I - A)^{-1})^*$, assim $\lambda \in \rho(A^*)$. □

Definição 1.11. Seja H um espaço de Hilbert sobre um corpo $\mathbb{K}$ com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, e seja $A : D(A) \subset H \to H$ um operador linear densamente definido. O operador adjunto $A^\bullet : D(A^\bullet) \subset H \to H$ de A é definido por $D(A^\bullet) = \{u \in H;\ D(A) \ni v \mapsto \langle Av, u \rangle \in \mathbb{K} \text{ é limitada}\}$ e se $u \in D(A^\bullet)$ então $A^\bullet u$ é o único elemento de H tal que $\langle v, A^\bullet u \rangle = \langle Av, u \rangle$ para todo $v \in D(A)$.

Teorema 1.21. *Seja H um espaço de Hilbert sobre um corpo $\mathbb{K}$ com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, e seja $A : D \subset H \to H$ um operador linear densamente definido. Se $\alpha \in \mathbb{K}$ e*

$B : D \subset H \to H$ *é um operador linear, então*

$$(A \pm B)^\bullet = A^\bullet \pm B^\bullet$$

e

$$(\alpha A)^\bullet = \overline{\alpha} A^\bullet.$$

Demonstração. A prova da primeira igualdade é semelhante a prova da primeira igualdade do Teorema 1.19.
Para a segunda igualdade, note que $(\alpha A)^\bullet : D((\alpha A)^\bullet) \subset H \to H$ é definido por $D((\alpha A)^\bullet) = \{u \in H;\ D(A) \ni v \mapsto \langle \alpha A v, u\rangle \in \mathbb{K}$ é limitado $\} = \{u \in H;\ D(A) \ni v \mapsto \langle Av, u\rangle \in \mathbb{K}$ é limitado $\} = D(A^\bullet)$, e se $u \in D((\alpha A)^\bullet)$, então $(\alpha A)^\bullet u$ é o único elemento de H tal que $\langle v, (\alpha A)^\bullet u\rangle = \langle \alpha A v, u\rangle = \overline{\alpha}\langle Av, u\rangle = \overline{\alpha}\langle v, A^\bullet u\rangle = \langle v, \overline{\alpha} A^\bullet u\rangle$; à saber, $(\alpha A)^\bullet = \overline{\alpha} A^\bullet$.
Seja H um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{C}$ com produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$, e seja $E : H \to H^*$ definido por $Eu(v) = \langle v, u\rangle$. A identificação entre H e H^* consiste em identificar u com Eu. Se A^* é o dual de A, então

$$A^\bullet = E^{-1} \circ A^* \circ E.$$

$\square$

Definição 1.12. Seja H um espaço de Hilbert sobre um corpo $\mathbb{K}$ com produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$, e seja $A : D(A) \subset H \to H$ um operador linear. Dizemos que A é um operador simétrico (ou Hermitiano se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) se A é densamente definido e $A \subset A^*$, isto é, $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ para todo $x, y \in D(A)$. Dizemos que A é auto-adjunto se $A = A^*$.

Lema 1.22. Seja H um espaço de Hilbert sobre um corpo $\mathbb{K}$ com produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$, e seja $A : D(A) \subset H \to H$ um operador linear densamente definido. Então $A^\bullet : D(A^\bullet) \subset H \to H$ é fechado. Além disso, se A é fechado, tem-se $A^\bullet$ densamente definido.

Demonstração. A demonstração deste resultado segue de perto os passos da demonstração do Lema 1.17. $\square$

Lema 1.23. Seja H um espaço de Hilbert sobre um corpo $\mathbb{K}$ com produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$, e seja $A : D(A) \subset H \to H$ um operador linear densamente definido. Então, $G(A^*) = \{(-Ax, x); x \in D(A)\}^\perp$ (aqui $M^\perp$ representa o ortogonal de M).

Demonstração. Observe que temos $G(A^*) = \{(x, A^*x);\ x \in D(A^*)\}$. Por outro lado, note que

$$\begin{aligned}\{(-Ax, x); x \in D(A)\}^{\perp} &= \{(u,v); \langle (u,v), (-Ax, x)\rangle\} \\ &= \{(u,v); \langle u, -Ax\rangle + \langle v, x\rangle = 0\} \\ &= \{(u,v); \langle v, x\rangle = \langle u, Ax\rangle\}.\end{aligned}$$

Daí, temos $v = A^*u$. Logo,

$$\{(-Ax, x); x \in D(A)\}^{\perp} = \{(u, A^*u); u \in D(A)\} = G(A^*).$$

E está provado o resultado. □

Proposição 1.24. Seja H um espaço de Hilbert sobre um corpo $\mathbb{K}$ com produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Se $A : D(A) \subset H \to H$ é um operador linear auto-adjunto, injetor e com imagem densa, então A^{-1} é auto-adjunto.

Demonstração. Desde que A é autoadjunto, é fácil ver que

$$\{(-Ax, x); x \in D(A)\}^{\perp} = \{(Ax, x); x \in D(A)\} = G(A^{-1}).$$

Por hipótese, A é injetor e $\overline{D(A^{-1})} = \overline{R(A)} = H$, então, segue do Lema 1.23 que

$$G((A^{-1})^*) = \{(-A^{1}x, x); x \in R(A)\}^{\perp} = G(A^{-1}).$$

Portanto, $A^{-1} = (A^{-1})^*$. □

Lema 1.25. Seja H um espaço de Hilbert sobre um corpo $\mathbb{K}$ com produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$, e seja $A : D(A) \subset H \to H$ um operador linear densamente definido. Se A é simétrico com $R(A) = H$, então A é auto-adjunto.

Demonstração. Para isso, usaremos fortemente o Lema 1.23 e a Proposição 1.24, então, começaremos provando que A e A^* são injetivos. Seja $x \in D(A)$ com $Ax = 0$, então desde que A é simétrico temos $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ para todo $y \in D(A)$, isto é, $0 = \langle x, Ay\rangle$ para todo $y \in D(A)$. Como $R(A) = H$, concluímos que $x = 0$. Além disso, como $N(A^*) = R(A)^{\perp} = H^{\perp} = \{0\}$, vemos que também é injetor o operador A^*.

Afirmação 1.7. A é fechado. De fato, tome $x_n \in D(A) \subset D(A^*)$ com $x_n \to x$ em H e $Ax_n = A^*x_n \to y$. Desde que A^* é fechado, pois é densamente definido, segue que $x \in D(A^*)$ e $A^*x = y$. Por hipótese, A é sobrejetor, então existe $u \in D(A)$ tal que $Au = A^*u = A^*x$. Mas, pela injetividade de A^* segue que $u = x$. Logo, $x \in D(A)$ e

$Ax = A^*x = y$, e concluímos a afirmação. Daí, segue do Teorema do Gráfico Fechado que A^{-1} existe e é limitado.
Desde que A é bijetivo, e usando o Lema 1.23 temos

$$G((A^{-1})^*) = \{(-A^1 x, x); x \in R(A)\}^{\perp} = G(A^{-1}).$$

Assim, $A^{-1} = (A^{-1})^*$, e vemos que A^{-1} é autoadjunto. Logo, segue da Proposição 1.24 que A é autoadjunto. □

Teorema 1.26. *Sejam H um espaço de Hilbert e $A : D(A) \subset H \to H$ um operador autoadjunto, então $\sigma(A) \subset [m, \infty)$.*

Demonstração. Vamos mostrar que para um operador linear autoadjunto A entre espaços de Hilbert, seu espectro está contido no intervalo $[m, M]$, onde

$$m = \inf_{\|x\|=1} \langle Ax, x\rangle$$

e

$$M = \sup_{\|x\|=1} \langle Ax, x\rangle,$$

logo, para concluir o resultado, basta notarmos que neste caso $M = +\infty$. Dado $\epsilon > 0$, considere $\lambda_\epsilon = M + \epsilon$, então vamos mostrar que para qualquer $\epsilon > 0$ tem-se que $\lambda_\epsilon \in \rho(A)$. Tome $x \in D(A), x \neq 0$ e $v = \|x\|^{-1}x$. Desse modo, temos $x = \|x\|v$ e

$$\langle Ax, x\rangle = \langle A\|x\|v, \|x\|v\rangle = \|x\|^2\langle Av, v\rangle \leqslant \|x\|^2 \sup_{\|x\|=1}\langle Av, v\rangle = \langle x, x\rangle M.$$

Assim,

$$-\langle Ax, x\rangle \geqslant -\langle x, x\rangle M \quad \Longrightarrow \quad \lambda_\epsilon\langle x, x\rangle - \langle Ax, x\rangle \geqslant \lambda_\epsilon\langle x, x\rangle - M\langle x, x\rangle.$$

Daí, temos

$$\|(\lambda_\epsilon - A)x\|\|x\| \geqslant \epsilon\|x\|,$$

o que implica em $\lambda_\epsilon \in \rho(A)$. De forma análoga, obtemos que qualquer $\lambda_\delta = M - \delta$, com $\delta > 0$, pertence a $\rho(A)$, e assim, concluímos o resultado. □

Capítulo 2

Semigrupos de operadores lineares limitados

Neste capítulo, apresentaremos os conceitos de semigrupos e grupos de operadores lineares limitados. Caracterizaremos os semigrupos $\{T(t);\ t \geqslant 0\}$ e grupos $\{T(t);\ t \in \mathbb{R}\}$ fortemente contínuos, e os semigrupos e grupos uniformemente contínuos, definidos num espaço de Banach E. Nossa discussão será concentrada nas características e propriedades dos semigrupos fortemente contínuos. Veremos que existe um operador linear A de modo que poderemos escrever

$$T(t) = e^{At},$$

para todo $t \geqslant 0$ (também é possível para o caso em que $t \in \mathbb{R}$, porém, concentraremos nossas discussões ao caso em que $t \geqslant 0$). Este operador linear receberá o nome de *gerador infinitesimal* do semigrupo. Na maioria dos casos este será ilimitado, e é definido em um subespaço denso $D(A)$ de E. Neste capítulo, estaremos interessados em estabelecer condições para que um operador A seja gerador de um semigrupo (ou grupo) de operadores lineares limitados.
Aqui, seguiremos de perto as referências [1], [5], [6], e [23]. É importante salientar que não temos nenhuma pretenção com a originalidade dos argumentos aqui apresentados nas demonstrações dos resutados. No entanto, o conteúdo das observações, as soluções dos exercícios propostos nas referências supra citadas e as figuras aqui apresentadas são de autoria da própria autora.

2.1 Definições e propriedades

Definição 2.1. Seja E um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$. Um semigrupo em $\mathcal{L}(E)$ é uma família $\{S(t); t \geqslant 0\} \subset \mathcal{L}(E)$ que satisfaz:

(*i*) $S(0) = I$;

(*ii*) (Propriedade de semigrupo) $S(t)S(s) = S(t+s)$ para cada $t, s \geqslant 0$;
Se além disso

(*iii*) Para cada $x \in E, \|S(t)x - x\| \to 0$ quando $t \to 0^+$, dizemos que o semigrupo é fortemente contínuo;

(*iv*) Se $\|S(t) - I\| \to 0$ quando $t \to 0^+$ então, dizemos que o semigrupo é uniformemente contínuo.

Observação 2.1. Se E é um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $\{S(t);\ t \geqslant 0\} \subset \mathcal{L}(E)$ é um semigrupo, os operadores do semigrupo satisfazem para todo $t, s \geqslant 0$:

$$S(t)S(s) = S(s)S(t)$$

visto que

$$S(t)S(s) = S(t+s) = S(s+t) = S(s)S(t).$$

Definição 2.2. Seja E um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$. Um grupo em $\mathcal{L}(E)$ é uma família $\{S(t) :\ t \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{L}(E)$ que satisfaz:

(*i*) $S(0) = I$;

(*ii*) $S(t)S(s) = S(t+s)$ para cada $t, s \in \mathbb{R}$;
Se além disso

(*iii*) Para cada $x \in E, \|S(t)x - x\| \to 0$ quando $t \to 0$, dizemos que o grupo é fortemente contínuo;

(*iv*) Se $\|S(t) - I\| \to 0$ quando $t \to 0$, dizemos que o grupo é uniformemente contínuo.

Sejam E um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $A : D(A) \subset E \to E$ um operador linear (em geral, ilimitado). Semigrupos de operadores lineares, estão geralmente, associados à problemas de valor inicial da forma

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Ax, \ t > 0, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{2.1}$$

o semigrupo $\{S(t);\ t \geqslant 0\}$ é o operador solução associado a (2.1); isto é, para cada $x_0 \in E, S(t)x_0$ é a solução de (2.1).

O teorema a seguir garante que todo semigrupo fortemente contínuo possui uma limitação exponencial.

Teorema 2.1. *Seja E um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$. Seja $\{S(t);\ t \geqslant 0\}$ um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados. Então, existem $M \geqslant 1$ e $\beta \in \mathbb{R}$ tais que*

$$\forall t \geqslant 0, \quad \|S(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leqslant Me^{\beta t}.$$

Para cada $\ell > 0$ podemos escolher $\beta \geqslant \frac{1}{\ell}\log\|S(\ell)\|_{\mathcal{L}(E)}$ e escolher M.

Demonstração. Afirmamos que $\sup\limits_{t\in[0,\eta]}\|S(t)\|_{\mathcal{L}(E)} < \infty$ para algum $\eta > 0$. Se tal η não existisse, existiria uma sequência $t_n \to 0^+$ tal que $\|S(t_n)\|_{\mathcal{L}(E)} \to \infty$. Desde que $\{S(t_n)x\}$ é limitada para cada $x \in E$, segue do Princípio da Limitação Uniforme[1] que $\{\|S(t_n)\|_{\mathcal{L}(E)}\}$ é limitada. O que leva a uma contradição e garante a existência de η. Daí e da propriedade de semigrupo, é fácil ver que para cada $\ell > 0$ podemos escolher $\sup\limits_{t\in[0,\ell]}\|S(t)\|_{\mathcal{L}(E)} < \infty$.
Escolha $\ell > 0$, tal que $M_0 = \sup\{\|S(t)\|_{\mathcal{L}(E)}; 0 \leqslant t \leqslant \ell\} < \infty$ e seja $\beta \geqslant \frac{1}{\ell}\log\|S(\ell)\|_{\mathcal{L}(E)}$; isto é, $\|S(\ell)\|_{\mathcal{L}(E)} \leqslant e^{\beta\ell}$. Então, para $0 \leqslant t \leqslant \ell$ e $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \|S(n\ell + t)\|_{\mathcal{L}(E)} &= \|S(n\ell)S(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \\ &= \|S(\ell)^n S(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \\ &\leqslant \|S(\ell)^n\|_{\mathcal{L}(E)}\|S(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \\ &\leqslant M_0 e^{\beta n\ell} \end{aligned}$$

e consequentemente

$$\|S(n\ell + t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leqslant M_0 e^{\beta n\ell} e^{\beta t} = M_0 e^{\beta(n\ell + t)}$$

e o resultado segue. □

[1] Ver apêndice

Definição 2.3. Seja E um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$. Seja $\{S(t);\ t \geqslant 0\}$ um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados. Dizemos que $\{S(t);\ t \geqslant 0\}$ é um *semigrupo de contrações* se

$$\forall\ t \geqslant 0, \quad \|S(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leqslant 1.$$

Definição 2.4. Seja E um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$. Seja $\{S(t);\ t \geqslant 0\}$ um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados. Dizemos que $\{S(t);\ t \geqslant 0\}$ é um semigrupo com *decaimento exponencial* se existem $M \geqslant 1$ e $\beta > 0$ tais que

$$\forall\ t \geqslant 0,\ \|S(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leqslant Me^{-\beta t}.$$

Definição 2.5. Seja E um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$. Seja $\{S(t);\ t \geqslant 0\}$ um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados. Dizemos que $\{S(t);\ t \geqslant 0\}$ é um *semigrupo quase contrativo* se existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\forall\ t \geqslant 0,\ \|S(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leqslant e^{\beta t}.$$

2.2 Geradores infinitesimais de semigrupos de operadores lineares limitados

Dado um semigrupo de operadores lineares limitados qualquer, podemos associá-lo a uma equação diferencial através da definição a seguir.

Definição 2.6. Seja E um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$ e seja $\{S(t);\ t \geqslant 0\} \subset \mathcal{L}(E)$ um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares. O operador $A : D(A) \subset E \to E$ definido por

$$D(A) = \left\{ x \in E\ ;\lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} \text{ existe } \right\}$$

e

$$Ax = \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)x - x}{t}, \quad \text{para todo } x \in D(A),$$

é chamado gerador infinitesimal do semigrupo $\{S(t)\ ;\ t \geqslant 0\}$.

Seja E um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$. Seja $\{S(t);\ t \geqslant 0\}$ um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares com gerador infinitesimal A. Frequentemente, iremos denotar

$$\forall t \geqslant 0, \ S(t) = e^{At}.$$

É importante ressaltar que a relação entre semigrupos de operadores lineares e seus geradores infinitesimais é biunívoca, de modo que, dado um semigrupo de operadores lineares limitados $S(t)$, existe um único operador A tal que A é gerador infinitesimal de $S(t)$. Reciprocamente, se A é gerador de um semigrupo de operadores lineares, este semigrupo é único.

Lema 2.2. Seja E um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$. Seja $\{S(t);\ t \geqslant 0\}$ um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares com gerador infinitesimal A. Seja $\lambda \in \mathbb{K}$. Então

$$\forall t \geqslant 0, \ S_\lambda(t) = e^{-\lambda t} S(t),$$

define um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares (o semigrupo redimensionado), com gerador infinitesimal dado por $-(\lambda I - A)$.

Demonstração. Seja $\lambda \in \mathbb{K}$. Observe que, $S_\lambda(0) = e^{-\lambda 0} S(0) = I$. Agora, para cada $s,\ t \geqslant 0$, temos

$$S_\lambda(t+s) = e^{-\lambda(t+s)} S(t+s) = e^{-\lambda t} e^{-\lambda s} S(t) S(s) = e^{-\lambda t} S(t) e^{-\lambda s} S(s) = S_\lambda(t) S_\lambda(s).$$

Para cada $x \in E$ temos

$$\|S_\lambda(t)x - x\| = \|e^{-\lambda t} S(t)x - x\| \overset{t \to 0^+}{\to} 0.$$

E está provado o resultado. □

Teorema 2.3. *Seja E um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$. Se existe um operador linear limitado $A: \ E \to E$ tal que $S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n = e^{tA}$ para todo $t \geqslant 0$, então o semigrupo $\{S(t);\ t \geqslant 0\}$ é uniformemente contínuo. Além disso, A é o gerador infinitesimal do semigrupo $\{S(t);\ t \geqslant 0\}$ com $\|e^{tA}\|_{\mathcal{L}(E)} \leqslant e^{t\|A\|}$ para todo $t \geqslant 0$.*

Demonstração. Seja $A \in \mathcal{L}(E)$. A soma parcial da série

$$\forall x \in E, n \in \mathbb{N}, \ S_n x = \sum_{j=0}^{n} \frac{t^j}{j!} A^j x$$

satisfazendo

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|S_n x\| = \Big\| \sum_{j=0}^{n} \frac{t^j}{j!} A^j x \Big\| \leqslant \sum_{j=0}^{n} \frac{t^j}{j!} \|A^j x\| \leqslant \sum_{j=0}^{n} \frac{t^j}{j!} \|A\|^j \|x\|,$$

onde

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} \|A\|^j = e^{t\|A\|_{\mathcal{L}(E)}}$$

e para cada $x \in E$ a série $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} A^j x$ converge.
Além disso,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|S_n\|_{\mathcal{L}(E)} \leqslant \sum_{j=0}^{n} \frac{t^j}{j!} \|A\|^j,$$

e isto implica que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n$ converge e este limite será denotado por e^{tA} com

$$\forall t \geqslant 0, \quad \|e^{tA}\|_{\mathcal{L}(E)} \leqslant e^{t\|A\|_{\mathcal{L}(E)}}.$$

Além disso, note que para todo $t_1, t_2 \in [0, \infty)$ vale que

$$\begin{aligned} S(t_1)S(t_2) &= \Big[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At_1)^n}{n!} \Big] \Big[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At_2)^n}{n!} \Big] \\ &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{A^{m+n} t_1^n t_2^m}{m! n!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m,n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, m+n=k} \frac{A^k t_1^n t_2^m}{m! n!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \Big[\sum_{n=0} \frac{k!}{n!(k-n)!} t_1^n t_2^{k-n} \Big] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} (t_1 + t_2)^k \\ &= S(t_1 + t_2). \end{aligned}$$

Isto mostra que $\{S(t) : t \geqslant 0\}$ é um semigrupo. Também, observe que para todo

$t \in [0, \infty)$ vale que

$$
\begin{aligned}
\|S(t) - S(0)\|_{\mathcal{L}(E)} &= \Big\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!} \Big\|_{\mathcal{L}(E)} \\
&\leqslant t\|A\|_{\mathcal{L}(E)} \Big\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(At)^{n-1}}{n!} \Big\|_{\mathcal{L}(E)} \\
&= t\|A\|_{\mathcal{L}(E)} \Big\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^n}{(n+1)!} \Big\|_{\mathcal{L}(E)} \\
&\leqslant t\|A\|_{\mathcal{L}(E)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|At\|^n_{\mathcal{L}(E)}}{(n+1)!} \\
&\leqslant t\|A\|_{\mathcal{L}(E)} e^{t\|A\|_{\mathcal{L}(E)}}.
\end{aligned}
$$

Isto prova que $\{S(t);\ t \geqslant 0\}$ é uniformemente contínuo. Note que para todo $t \in (0, \infty)$ temos que

$$
\begin{aligned}
\Big\| \frac{S(t) - S(0)}{t} - A \Big\|_{\mathcal{L}(E)} &= \Big\| \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!} - A \Big\|_{\mathcal{L}(E)} \\
&= \Big\| A \Big[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(At)^{(n-1)}}{n!} \Big] - A \Big\|_{\mathcal{L}(E)} \\
&= \Big\| A \Big[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^n}{(n+1)!} \Big] - A \Big\|_{\mathcal{L}(E)} \\
&= \Big\| A \Big[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(At)^n}{(n+1)!} \Big] \Big\|_{\mathcal{L}(E)} \\
&= t \Big\| A^2 \Big[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(At)^{(n-1)}}{(n+1)!} \Big] \Big\|_{\mathcal{L}(E)} \\
&= t \Big\| A^2 \Big[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(At)^n}{(n+2)!} \Big] \Big\|_{\mathcal{L}(E)}.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\Big\| \frac{S(t) - S(0)}{t} - A \Big\|_{\mathcal{L}(E)} \leqslant t\|A^2\|_{\mathcal{L}(E)} e^{t\|A\|_{\mathcal{L}(E)}},
$$

para todo $t \geqslant 0$. Assim, A é gerador infinitesimal do semigrupo de operadores limitados $\{S(t);\ t \geqslant 0\}$. □

Teorema 2.4. *Sejam E um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $\{S(t);\ t \geqslant 0\}$ um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados.*

(i) Para cada $x \in E$, a função $[0, \infty) \ni\ t \mapsto S(t)x \in E$ é uma aplicação contínua;

(ii) Para cada $x \in E$, a função $[0, \infty) \ni\ t \mapsto \|S(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \in \mathbb{R}^+$ é semicontínua inferiormente e portanto mensurável;

(iii) Se A é gerador infinitesimal de $\{S(t);\ t \geqslant 0\}$, então A é fechado e densamente

definido. Para cada $x \in D(A)$, $S(t)x \in D(A)$ para todo $t \geqslant 0$, e a função $[0,\infty) \ni t \mapsto S(t)x \in E$ é continuamente diferenciável e

$$\forall\ t > 0,\ \frac{d}{dt}S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax.$$

Demonstração. (i) Para cada $t > 0$ e $x \in E$. Seja $0 < h < t$ e note que

$$\|S(t+h)x - S(t)x\| = \|(S(h) - I)S(t)x\| \to 0,\ \text{quando } h \to 0^+,$$

e

$$\begin{aligned}\|S(t)x - S(t-h)x\| &\leqslant \|S(t-h)\|_{\mathcal{L}(E)}\|S(h)x - x\| \\ &\leqslant Me^{\beta(t-h)}\|S(h)x - x\| \to 0, \text{quando} h \to 0^+.\end{aligned}$$

(ii) Recordemos que toda função semicontínua inferiormente é mensurável, desse modo, basta mostrarmos a primeira afirmação. Para isso, vamos mostrar que

$$\{t \geqslant 0; \|S(t)\|_{\mathcal{L}(E)} > b\}$$

é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$ para cada b. Note que $\|S(t_0)\|_{\mathcal{L}(E)} > b$ implica que existe $x \in E$ com $\|x\| = 1$ tal que $\|S(t_0)x\| > b$ e segue da parte (i) que $\|S(t)x\| > b$ para t na vizinhança de t_0, logo $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(E)} > b$ para todo t na vizinhança de t_0 e o resultado segue.

(iii) Dado $x \in E$ defina $x_\epsilon = \frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon S(t)xdt$ para cada $\epsilon > 0$. Então $x_\epsilon \to x$ quando $\epsilon \to 0^+$, pois

$$\|x_\epsilon - x\| = \left\|\frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon S(t)xdt - x\right\| = \left\|\frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon (S(t)x - S(0)x)dt\right\|$$

e

$$\|x_\epsilon - x\| \leqslant \frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon \|S(t)x - S(0)x\|dt.$$

Assim, desde que $S(\cdot)x$ é contínua, segue que para cada $r > 0$ existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\|S(t)x - S(0)x\| < r \quad \text{se} \quad |t| < \epsilon.$$

Portanto, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, temos

$$\|x_\epsilon - x\| \leqslant \frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon \|S(t)x - S(0)x\|dt \leqslant \frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon rdt = r,$$

Agora, note que para $0 < h < \epsilon$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h}(S(h)x_\epsilon - x_\epsilon) &= \frac{1}{\epsilon h}\Big(\int_0^\epsilon S(t+h)xdt - \int_0^\epsilon S(t)xdt\Big)\\
&= \frac{1}{\epsilon h}\Big(\int_h^{\epsilon+h} S(s)xds - \int_0^\epsilon S(t)xdt\Big)\\
&= \frac{1}{\epsilon h}\Big(\int_\epsilon^{\epsilon+h} S(t)xdt - \int_0^h S(t)xdt\Big)\\
&\to \frac{1}{\epsilon}(S(\epsilon)x - x),
\end{aligned}$$

quando $h \to 0^+$. Logo $x_\epsilon \in D(A)$ e $D(A)$ é denso em E. Será uma consequência imediata de (ii) e do próximo teorema que A é fechado.
Além disso, temos que se $x \in D(A)$

$$\forall t \geqslant 0, \quad \frac{d^+}{dt}S(t)x = \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}(S(t+h)x - S(t)x) = S(t)Ax.$$

Consequentemente $S(t)x \in D(A)$ e $AS(t)x = S(t)Ax$ para todo $t \geqslant 0$. Isto implica que a função $[0,\infty) \ni t \mapsto \dfrac{d^+}{dt}S(t)x \in X$ é contínua e do Lema A.11 segue o resultado. □

Teorema 2.5. *Sejam E um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $\{S(t);\ t \geqslant 0\}$ um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados.*

(i) $\cap_{m=1}^\infty D(A^m)$ *é um subespaço denso de E, onde*

$$D(A^m) = \{u \in D(A^{m-1});\ A^{m-1}u \in D(A)\}.$$

(ii) Seja β da dominação exponencial do semigrupo. Se $\lambda \in \mathbb{C}$ é tal que $Re\ \lambda > \beta$, então $\lambda \in \rho(A)$ de A e

$$(\lambda I - A)^{-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)dt.$$

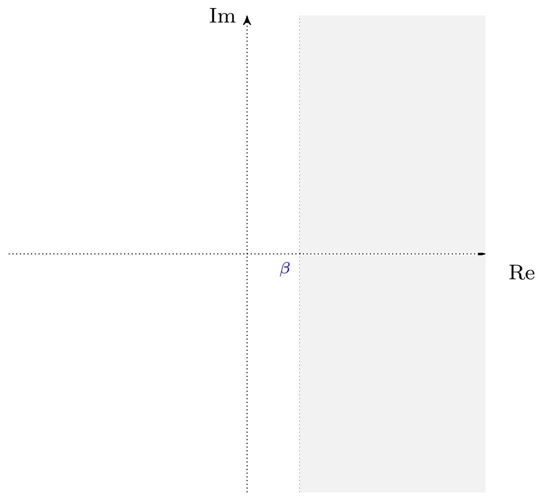

Figura 2.1: $\{\lambda \in \mathbb{C}; Re\lambda > \beta\} \subset \rho(A)$.

Demonstração. (i) Seja $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ uma função com suporte $\operatorname{supp}(\phi) = \overline{\{t \in \mathbb{R}; \phi(t) \neq 0\}}$ compacto em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, por exemplo, $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|^2-1}}, & |x| < 1; \\ 0, & |x| \geqslant 1. \end{cases}$$

Note que ϕ é uma função infinitamente diferenciável de suporte compacto contendo $[-1,1]$.

Seja $x \in E$ e $y = \int_0^\infty \phi(t)S(t)xdt$. É fácil ver que, para $0 < h < \inf\{t > 0; \phi(t) \neq 0\}$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}(S(h)y - y) &= \frac{1}{h}\Big(\int_0^\infty \phi(t)S(t+h)xdt - \int_0^\infty \phi(t)S(t)xdt\Big) \\ &= \frac{1}{h}\int_h^\infty (\phi(t-h) - \phi(t))S(t)xdt \\ &\to -\int_0^\infty \phi'(t)S(t)xdt, \end{aligned}$$

quando $h \to 0^+$, consequentemente $y \in D(A)$ e $Ay = -\int_0^\infty \phi'(t)S(t)xdt$. Como $-\phi'$ satisfaz as mesmas condições de regularidade de ϕ, podemos proceder e calcular A^2y da mesma maneira.

Em geral, para todo inteiro $m \geqslant 1$ e $y \in \cap_{m=1}^\infty D(A^m)$ e

$$A^m y = (-1)^m \int_0^\infty \phi^{(m)}(t)S(t)xdt.$$

Para mostrar que tal conjunto é um subconjunto denso de E, escolha ϕ como acima, satisfazendo adicionalmente que $\int_0^\infty \phi(t)dt = 1$. Se

$$y_n = \int_0^\infty n\phi(nt)S(t)xdt = \int_0^\infty \phi(s)S\left(\frac{s}{n}\right)xds,$$

para todo inteiro $n \geqslant 1$, temos $y_n \in \cap_{m=1}^\infty D(A^m)$ and $y_n \to x$.
(ii) Defina $R(\lambda; A) : E \to E$ por

$$R(\lambda; A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)dt$$

e note que $\|R(\lambda; A)\|_{\mathcal{L}(E)} \leqslant \frac{M}{\text{Re}\lambda - \beta}$ se $\text{Re}\lambda > \beta$, pois temos para $x \in E$ que

$$\begin{aligned}
\|R(\lambda; A)x\| &= \left\|\int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)xdt\right\| \\
&\leqslant \int_0^\infty |e^{-\lambda t}|\|S(t)x\|dt \\
&\leqslant M\|x\| \int_0^\infty e^{(\beta - Re\lambda)t}dt \\
&= \frac{M}{Re\lambda - \beta}\|x\|.
\end{aligned}$$

Recordando que $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leqslant Me^{\beta t}$.
Seja $x \in E$ e $h > 0$, temos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h}(S(h)R(\lambda; A)x - R(\lambda; A)x) \\
&= R(\lambda; A)\frac{1}{h}(S(h)x - x) \\
&= \frac{1}{h}\Big(\int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t+h)xdt - \int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)xdt\Big) \\
&= \frac{1}{h}\Big(\int_h^\infty e^{-\lambda t + \lambda h}S(t)xdt - \int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)xdt\Big) \\
&= \frac{1}{h}\Big(-\int_0^h e^{-\lambda(h-t)}S(t)xdt + \int_0^\infty (e^{\lambda h} - 1)e^{-\lambda t}S(t)xdt\Big) \\
&= \frac{1}{h}\Big(-e^{-\lambda h}\int_0^h e^{\lambda t}S(t)xdt + \int_0^\infty (e^{\lambda h} - 1)e^{-\lambda t}S(t)xdt\Big) \\
&\to -x + R(\lambda; A)x
\end{aligned}$$

quando $h \to 0^+$. Logo, $R(\lambda; A)x \in D(A)$ e $AR(\lambda; A)x = -x + R(\lambda; A)x$. Portanto, $(\lambda I - A)R(\lambda; A)x = x$, e $\lambda I - A$ é sobrejetiva. Também, se $x \in D(A)$, então desde que $AR(\lambda; A)x = R(\lambda; A)Ax$ e pela identidade acima vemos que $(\lambda I - A)R(\lambda; A)x = x = R(\lambda; A)(\lambda I - A)x$, $x \in D(A)$ e $\lambda I - A$ é também sobrejetivo. Com isto, concluímos que $\lambda I - A$ é uma bijeção de $D(A)$ em E com inverso $R(\lambda; A)$ e a prova está completa. □

Teorema 2.6. *Seja E um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$. Sejam $\{S(t);\ t \geqslant 0\}$*

e $\{T(t);\ t \geqslant 0\}$ *semigrupos fortemente contínuos de operadores lineares limitados com geradores infinitesimais* A *e* B*, respectivamente. Se* $A = B$*, então* $S(t) = T(t)$ *para todo* $t \geqslant 0$.

Demonstração. Seja $x \in D(A) = D(B)$. É fácil ver que a função

$$[s, \infty) \ni s \mapsto S(t-s)T(s)$$

é diferenciável e que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds} S(t-s)T(s)x &= -AS(t-s)T(s)x + S(t-s)BT(s)x \\
&= -AS(t-s)T(s)x + S(t-s)AT(s) \\
&= -AS(t-s)T(s)x + AS(t-s)T(s) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Logo, a função $[s, \infty) \ni s \mapsto S(t-s)T(s)$ é constante. E assim, coincide nos valores $s = 0$ e $s = t$, isto é, $S(t)x = T(t)x$, para todo $x \in D(A)$. Como $\overline{D(A)} = E$ e $T(t), S(t)$ são operadores limitados, segue que $T(t)x = S(t)x$ para todo $x \in E$. □

Seja E um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$, seja $\{S(t);\ t \geqslant 0\} \subset \mathcal{L}(E)$ um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados e seja $A : D(A) \subset E \to E$ o gerador infinitesimal do semigrupo. Para cada $x_0 \in D(A)$, a função

$$[0, \infty) \ni t \mapsto x(t) = S(t)x_0 \in E$$

é continuamente diferenciável e,

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Ax, \ t > 0, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{2.2}$$

No caso em que $x_0 \in E$ mas, $x_0 \notin D(A)$, ainda entendemos $x(\cdot)$ como solução de (2.2).

Definição 2.7. Uma função $x(\cdot) \in C([0, \infty); E) \cap C^1((0, \infty); E)$ é chamada solução forte de (2.2) se $x(t) \in D(A)$ para todo $t > 0$ e vale (2.2).

Definição 2.8. Uma função $x(\cdot) \in C([0, \infty); E)$ é chamada solução fraca de (2.2) se $x(0) = x_0$ e para cada $x^* \in D(A^*)$ $[0, \infty), \ni t \mapsto x(t) = \langle x(t), A^* x^* \rangle \in \mathbb{K}$ é uma função diferenciável e,

$$\frac{d}{dt}\langle x(t), x^*\rangle = \langle x(t), A^*x^*\rangle,$$

para todo $t \geqslant 0$.

Teorema 2.7. *Seja E um espaço de Banach reflexivo sobre um corpo $\mathbb{K}$ e seja $A : D(A) \subset E \to E$ um operador linear que é gerador de um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados $\{S(t); t \geqslant 0\}$. Se definirmos $\{S^*(t); t \geqslant 0\}$ onde $S^*(t) = S(t)^*$ em $\mathcal{L}(E^*)$ então $\{S^*(t); t \geqslant 0\}$ é um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados em $\mathcal{L}(E)$ cujo gerador infinitesimal é A^*.*

Demonstração. Desde que E é um espaço de Banach reflexivo e A é fechado e densamente definido, então A^* é fechado e densamente definido. Além disso, se $\lambda \in \rho(A)$, então $\overline{\lambda} \in \rho(A^*)$ e $(\lambda I - A^{-1})^* = (\overline{\lambda} I - A^*)^{-1}$.
Desde que A é gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo, existem $\beta \in \mathbb{R}$ e $M \geqslant 1$ tais que $(\beta, \infty) \subset \rho(A)$ e

$$\|(\lambda I - A)^{-n}\|_{\mathcal{L}(E)} \leqslant \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}$$

para todo $\lambda > \beta$ e $n \in \mathbb{N}$. Portanto, $(\beta, \infty) \subset \rho(A^*)$ e

$$\|(\lambda I - A^*)^{-n}\|_{\mathcal{L}(E^*)} = \|(\lambda I - A)^{-n}\|_{\mathcal{L}(E)} \leqslant \frac{M}{(\lambda - \omega)^n},$$

para todo $\lambda > \beta$ e $n \in \mathbb{N}$. Portanto, A^* é gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo $\{S^*(t) : t \geqslant 0\}$. E, para cada $x^* \in X^*$ temos

$$S^*(t)x^* = \lim_{\lambda\to\infty} e^{A_\lambda^* t}x^* = \lim_{\lambda\to\infty} (e^{A_\lambda t})^* x^* = S(t)^* x^*.$$

□

2.3 Geração de semigrupos de operadores lineares limitados

Diante do que foi visto, surge então a seguinte questão: Quais as condições ou características necessárias e suficientes para que operadores lineares sejam geradores infinitesimais de semigrupos fortemente contínuos?
Já vimos que geradores são necessariamente operadores fechados, densamente definidos e que têm seu espectro contido em algum lado adequado do semiplano complexo.

Contudo, essas condições não são suficientes. Desse modo, apresentamos a seguir, importantes resultados que caracterizam geradores infinitesimais.

2.3.1 O Teorema de Hille-Yosida

Em 1948, Einar Carl Hille e Kôsaku Yosida caracterizaram, independentemente, certas classes de problemas de valor inicial bem postos em espaços de Banach.

Teorema 2.8 (Teorema de Hille-Yosida caso contrativo)**.** *Sejam E um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $A : D(A) \subset E \to E$ um operador linear. Então, as seguintes afirmações são equivalentes.*

(i) A é gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados $\{S(t);\ t \geqslant 0\} \subset \mathcal{L}(E)$ tal que

$$\forall\ t \geqslant 0,\ \ \|S(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leqslant e^{\beta t};$$

(ii) A e fechado e densamente definido tal que $(\beta, \infty) \subset \rho(A)$ e

$$\forall\ \lambda > \beta, \|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} \leqslant \frac{1}{\lambda - \beta}.$$

Demonstração. Observe que (i) implica (ii). De fato, seja $x \in E$ e $\lambda > \beta$, do Teorema 2.5 temos

$$\begin{aligned}\|(\lambda I - A)^{-1} x\| &\leqslant \int_0^\infty e^{-\lambda t}\|S(t)x\| dt \\ &\leqslant \|x\| \int_0^\infty e^{(\beta-\lambda)t} dt \\ &\leqslant \frac{1}{\lambda - \beta}\|x\|.\end{aligned}$$

Agora, vamos mostrar que (ii) implica (i). Inicialmente, iremos considerar $\beta = 0$. Seja $\lambda > 0$ então

$$\|\lambda(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} \leqslant 1.$$

Como

$$\lambda(\lambda I - A)^{-1} = I + A(\lambda I - A)^{-1},$$

temos que $x \in D(A)$ implica

$$\|\lambda(\lambda I - A)^{-1} x - x\| = \|(\lambda I - A)^{-1} A x\| \leqslant \frac{1}{\lambda}\|Ax\| \to 0$$

quando $\lambda \to \infty$. Como A é densamente definido, então

$$\forall x \in E, \quad \lambda(\lambda I - A)^{-1}x \to x,$$

quando $\lambda \to \infty$.
Agora, para cada $\lambda > 0$, defina

$$A_\lambda = \lambda A(\lambda I - A)^{-1}.$$

Então,
$$\lambda A(\lambda I - A)^{-1} = \lambda^2(\lambda I - A)^{-1} - \lambda I \in \mathcal{L}(E).$$

e
$$\|A_\lambda\|_{\mathcal{L}(E)} = \lambda\|A(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} \leqslant 2\lambda,$$

e se $x \in D(A)$, $A_\lambda x \to Ax$ quando $\lambda \to \infty$. É importante saber que A_λ é chamada *aproximação de Yosida de A*.
Como
$$A_\lambda = \lambda^2(\lambda I - A)^{-1} - \lambda I,$$

temos
$$e^{tA_\lambda} = e^{-\lambda t}e^{t\lambda^2(\lambda I - A)^{-1}}$$

e
$$\|e^{tA_\lambda}\|_{\mathcal{L}(E)} \leqslant e^{-\lambda t}e^{t\lambda^2\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)}} \leqslant 1,$$

e para todo $\lambda, \mu > 0$ (e $t > 0$) desde que $A_\lambda A_\mu = A_\mu A_\lambda$, para cada $x \in D(A)$

$$\begin{aligned}\|(e^{tA_\lambda} - e^{tA_\mu})x\| &= \Big\| \int_0^1 \frac{d}{ds}(e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}x)ds\Big\| \\ &\leqslant t\int_0^1 \Big\|e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}(A_\lambda x - A_\mu x)\Big\|ds \\ &\leqslant t\|A_\lambda x - A_\mu x\|.\end{aligned}$$

Portanto, para cada $x \in D(A)$,

$$S(t)x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}x$$

existe e é uniforme para $0 \leqslant t \leqslant t_0$, para todo $t_0 > 0$. Portanto, $[0,\infty) \ni t \mapsto S(t)x \in E$ é contínua, $\lim_{t\to 0^+}\|S(t)x - x\| = 0$ e $\|S(t)x\| \leqslant \|x\|$. Logo, pelo fato de que A é densamente definido, podemos definir de modo único $S(t) \in \mathcal{L}(E)$ para todo $t \geqslant 0$.
Se $x \in E$, dado $\epsilon > 0$ existe $x_1 \in D(A)$ e $\delta > 0$ tal que $\|x_1 - x\| < \dfrac{\epsilon}{3}$ e $\|S(t)x_1 - x_1\| < \dfrac{\epsilon}{3}$,

$t \in [0,\delta]$. Portanto, para cada $t \in [0,\delta]$,

$$\|S(t)x - x\| \leqslant \|S(t)(x - x_1)\| + \|S(t)x_1 - x_1\| + \|x_1 - x\| < \epsilon.$$

Isto implica que $\lim_{t\to 0^+} \|S(t)x - x\| = 0$ para todo $x \in E$.
Se $x \in D(A^2)$ então $\lim\limits_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}x = S(t)x$ e $\lim\limits_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}Ax = S(t)Ax$. De fato, desde que A é fechado, obtemos $S(t)x \in D(A)$ e $AS(t)x = S(t)Ax$. Consequentemente $S(t)x \in D(A)$ para todo $t \geqslant 0$ e $x \in D(A)$. Daí, temos $S(s)(S(t)x) = S(t+s)x$ para todo $x \in D(A)$ e $t, s \geqslant 0$. Além disso, como $\overline{D(A)} = E$, temos $S(t)(S(s)x) = S(t+s)x$ para todo $x \in E$ e $t, s \geqslant 0$.
Logo, $\{S(t) : t \geqslant 0\}$ é um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados. Finalmente, iremos mostrar que A é gerador infinitesimal.
Agora, considere $B : D(B) \subset E \to E$ como sendo o gerador infinitesimal do semigrupo $\{S(t) : t \geqslant 0\}$. Em vista disso, vamos provar que $D(A) \subset D(B)$ e $B\big|_{D(A)} = A$, depois provaremos que $D(A) = D(B)$.
Seja $x \in D(A^2)$ então

$$S(t)x - x = \lim_{\lambda\to\infty} (e^{tA_\lambda}x - x) = \lim_{\lambda\to\infty} \int_0^t e^{sA_\lambda} A_\lambda x ds = \int_0^t S(s)Axds.$$

Seja $x \in D(A)$, tome $D(A) \ni y_n \to Ax$ e $x_n = (I - A)^{-1}(x - y_n)$. Temos que $D(A^2) \ni x_n \to x \in D(A)$ e $Ax_n \to Ax$. É fácil ver que a expressão acima se estende para todo $x \in D(A)$.
Agora, $\frac{1}{t}(S(t)x - x) = \frac{1}{t}\int_0^t S(s)Axds \to Ax$ quando $t \to 0^+$ para cada $x \in D(A)$. Logo, $x \in D(B)$. Mas, $1 \in \rho(A)$ e, como B é gerador de um semigrupo fortemente contínuo de contrações, $1 \in \rho(B)$. Consequentemente,

$$E = (I - A)D(A) = (I - B)D(A)$$

e $(I - B)D(A) = E = (I - B)D(B)$, $D(A) = R((I - B)^{-1}) = D(B)$. Segue que $A = B$ e a prova do fato (ii) implica (i) está completa para $\beta = 0$.
Finalmente, note que $e^{-\beta t}S(t) = S_1(t)$ é um semigrupo com $\|S_1(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leqslant 1$ e $A - \beta I$ é o gerador infinitesimal de $S_1(\cdot)$ e a prova de que o fato (ii) implica (i) está completa. $\square$

Lema 2.9. Sejam E um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $A : D(A) \subset E \to E$ um operador linear. Assuma que $(0,\infty) \subset \rho(A)$ e

$$\forall\ \lambda > 0,\ n \in \mathbb{N},\ \|\lambda I - A)^{-n}\| \leqslant \frac{M}{\lambda^n}.$$

Então, existe uma norma $|\cdot|$ em E satisfazendo $\|x\| \leqslant |x| \leqslant M\|x\|$ para todo $x \in E$ e

$$\forall \lambda > 0,\ x \in E,\ |(\lambda I - A)^{-1}| \leqslant \frac{1}{\lambda}.$$

Demonstração. Se $0 < \lambda < \mu$ ($\frac{|\mu-\lambda|}{\mu} < 1$), então a série

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\mu-\lambda)^k(\mu I - A)^{-k-1} = (\mu I - A)^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}(\mu-\lambda)^k(\mu I - A)^{-k}$$

é convergente, pois

$$\|(\mu-\lambda)^k(\mu I - A)^{-k}\|_{\mathcal{L}(E)} \leqslant M\frac{|\mu-\lambda|^k}{\mu^k}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}(\lambda I - A)^{-1} &= (\lambda I - \mu I + (\mu I - A))^{-1}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(\mu-\lambda)^k(\mu I - A)^{-k-1}.\end{aligned}$$

Logo, desde que esta é uma série de potências

$$\begin{aligned}\frac{1}{p!}\Big(\frac{d}{d\lambda}\Big)^p(\lambda I - A)^{-1} &= (-1)^p(\lambda I - A)^{-p-1}\\ &= \sum_{k=p}^{\infty}(-1)^k\frac{k!(\mu-\lambda)^{k-p}}{p!(k-p)!}(\mu I - A)^{-k-1}.\end{aligned}$$

Temos

$$(\lambda I - A)^{-p-1} = \sum_{k=p}^{\infty}\binom{k}{p}(\mu-\lambda)^{k-p}(\mu I - A)^{-k-1} \tag{2.3}$$

e

$$\begin{aligned}&\|\lambda^{p+1}(\lambda I - A)^{-p-1}x\|\\ &\leqslant \sum_{k=p}^{\infty}\binom{k}{p}\Big(\frac{\mu-\lambda}{\mu}\Big)^{k-p}\Big(\frac{\lambda}{\mu}\Big)^{p+1}\|\mu^{k+1}(\mu I - A)^{-k-1}x\|\end{aligned}.$$

Se $\|x\|_\mu = \sup\limits_{n\geqslant 0}\|\mu^n(\mu I - A)^{-n}x\|$ para $\mu > 0$, é fácil ver que $\|x\| \leqslant \|x\|_\mu \leqslant M\|x\|$. Usando (2.3) com $A = 0$, temos

$$\|\lambda^{p+1}(\lambda I - A)^{-p-1}\| \leqslant \sum_{k=p}^{\infty}\binom{k}{p}\Big(\frac{\mu-\lambda}{\mu}\Big)^{k-p}\Big(\frac{\lambda}{\mu}\Big)^{p+1}\|x\|_\mu = \|x\|_\mu$$

para $0 < \lambda < \mu$, e consequentemente $\|x\|_\lambda \leqslant \|x\|_\mu$ para $0 < \lambda \leqslant \mu$. Desde que $\lambda \mapsto \|x\|_\lambda$ é não decrescente e limitada superiormente, defina

$$|x| = \lim_{\lambda\to\infty} \|x\|_\lambda = \sup_{\lambda>0} \|x\|_\lambda.$$

É claro que $|\cdot|$ é uma norma em E.

Portanto, $\|x\| \leqslant |x| \leqslant M\|x\|$ e, para $0 < \lambda < \mu$,

$$\begin{aligned}\|\mu^p(\mu I - A)^{-p}\lambda(\lambda I - A)^{-1}x\| &= \|\lambda(\lambda I - A)^{-1}\mu^p(\mu I - A)^{-p}x\|_{E_0}\\ &\leqslant \|\mu^p(\mu I - A)^{-p}x\|_\lambda\\ &\leqslant \|\mu^p(\mu I - A)^{-p}x\|_\mu\\ &\leqslant \|x\|_\mu\\ &\leqslant |x|,\end{aligned}$$

implica que $\|\lambda(\lambda I - A)^{-1}x\|_\mu \leqslant |x|$. Daí, segue imediatamente que $|\lambda(\lambda I - A)^{-1}x| \leqslant |x|$ e o resultado está provado. □

Teorema 2.10 (Forma Geral do Teorema de Hille-Yosida)**.** *Sejam E um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$ e$A : D(A) \subset E \to E$ um operador linear. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) A é gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados $\{S(t);\ t \geqslant 0\} \subset \mathcal{L}(E)$ tal que

$$\forall\ t \geqslant 0,\ \ \|S(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leqslant Me^{\beta t};$$

(ii) A e fechado e densamente definido tal que $(\beta, \infty) \subset \rho(A)$ e

$$\forall\ \lambda > \beta, \|(\lambda I - A)^{-n}\| \leqslant \frac{M}{(\lambda - \beta)^{-n}}.$$

Demonstração. Considerando $e^{-\beta t}S(t)$ e $A - \beta I$ podemos assumir sem perda de generalidade que $\beta = 0$. Se (i) vale, do Teorema 2.5, temos que cada $\lambda > 0$ pertence ao conjunto resolvente de A, e

$$(\lambda I - A)^{-1}x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)xdt$$

e

$$(\lambda I - A)^{-p-1}x = \frac{1}{p!}\int_0^\infty e^{-\lambda t}t^pS(t)xdt.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\forall p \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \ \|(\lambda I - A)^{-p-1}x\| &\leqslant \frac{1}{p!}\int_0^\infty e^{-\lambda t}t^p \|S(t)x\|dt \\
&\leqslant \frac{M}{p!}\|x\| \int_0^\infty e^{-\lambda t}t^p dt \\
&= \lambda^{-p-1}M\|x\|.
\end{aligned}$$

Agora, assuma que (ii) é válida (com $\beta = 0$). Em vista do Lema 2.9, podemos escolher uma norma equivalente $|\cdot|$ em E, tal que $\|x\| \leqslant |x| \leqslant M\|x\|$ e $|(\lambda I - A)^{-1}x| \leqslant \frac{1}{\lambda}|x|$ para $\lambda > 0$. Segue do Teorema de Hille-Yosida (caso contrativo), que A gera um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados $\{S(t);\ t \geqslant 0\}$ com $|S(t)x| \leqslant |x|$. Daí, segue que

$$\|S(t)x\| \leqslant |S(t)x| \leqslant |x| \leqslant M\|x\|.$$

□

2.3.2 Operadores dissipativos e o Teorema de Lumer-Phillips

Definição 2.9. Seja E um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$. A aplicação dual $J : E \to 2^{E^*}$ é uma aplicação definida por

$$J(x) = \{x^* \in E^*; \mathrm{Re}\langle x, x^*\rangle = \|x\|^2, \|x^*\| = \|x\|\}.$$

Observe que, pelo Teorema de Hanh-Banach, $J(x) \neq \varnothing$ para cada $x \in E$. É uma consequência direta da definição que se X^* é uniformemente convexo, então $J(x)$ é um conjunto unitário para cada $x \in X$.

Definição 2.10. Sejam E um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $A : D(A) \subset E \to E$ um operador linear. O operador A é *dissipativo* (ou *monótono*) se, para cada $x \in D(A)$ existe $x^* \in J(x)$ tal que $\mathrm{Re}\langle Ax, x^*\rangle \leqslant 0$.

Definição 2.11. Sejam E um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $A : D(A) \subset E \to E$ um operador linear. O operador A é *acretivo* se $-A$ é dissipativo.

Lema 2.11. Seja E um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$. O operador linear $A : D(A) \subset E \to E$ é dissipativo se, e somente se,

$$\|(\lambda I - A)x\| \geqslant \lambda\|x\|,$$

para todo $x \in D(A)$ e $\lambda > 0$.

Demonstração. Assuma que A é dissipativo. Para $\lambda > 0$ e $x \in D(A)$, se $x^* \in J(x)$ é tal que $Re\langle Ax, x^*\rangle \leqslant 0$, então

$$\mathrm{Re}\langle \lambda x - Ax, x^*\rangle = \mathrm{Re}\langle \lambda x, x^*\rangle - \mathrm{Re}\langle Ax, x^*\rangle = \lambda\|x\|^2 - \mathrm{Re}\langle Ax, x^*\rangle \geqslant \lambda\|x\|^2.$$

Assim,

$$\lambda\|x\| \leqslant \mathrm{Re}\langle \lambda x - Ax, x^*\rangle \leqslant |\langle(\lambda - A)x, x^*\rangle| \leqslant |(\lambda - A)x|\|x\|,$$

isto é,

$$|(\lambda - A)x| \geqslant \lambda\|x\|.$$

Reciprocamente, assuma que para todo $x \in D(A)$ e $\lambda > 0$ temos $|(\lambda I - A)x\| \geqslant \lambda\|x\|$. Se $x_\lambda^* \in J(\lambda x - Ax)$ e $y_\lambda^* = x_\lambda^*/\|x_\lambda^*\|$ temos que

$$\lambda\|x\| \leqslant \|(\lambda I - A)x\| = \langle \lambda x - Ax, y_\lambda^*\rangle = \lambda\mathrm{Re}\langle x, y_\lambda^*\rangle - \mathrm{Re}\langle Ax, y_\lambda^*\rangle$$

e então

$$\lambda\|x\| \leqslant \lambda\|x\|\|y_\lambda^*\| - \mathrm{Re}\langle Ax, y_\lambda^*\rangle = \lambda\|x\| - \mathrm{Re}\langle Ax, y_\lambda^*\rangle. \tag{2.4}$$

Como a bola unitária em E^* é compacta na topologia fraca *, existe $y^* \in E^*$, $\|y^*\| \leqslant 1$, e uma sequência $\lambda_n \to \infty$ tal que $y_{\lambda_n}^* \to y^*$ no sentido fraco *. De (2.4) segue que $\mathrm{Re}\langle Ax, y^*\rangle \leqslant 0$ e $\mathrm{Re}\langle x, y^*\rangle \geqslant \|x\|$ (dividindo por λ_n e fazendo $n \to \infty$). Mas, $\mathrm{Re}\langle x, y_\lambda^*\rangle \leqslant |\langle x, y_\lambda^*\rangle| \leqslant \|x\|$, portanto $\mathrm{Re}\langle x, y^*\rangle = \|x\|$. Tomando $x^* = \|x\|y^*$ temos que $x^* \in J(x)$ e $\mathrm{Re}\langle Ax, x^*\rangle \leqslant 0$. Logo, para todo $x \in D(A)$ existe $x^* \in J(x)$ tal que $\mathrm{Re}\langle Ax, x^*\rangle \leqslant 0$ e A é dissipativo. □

Teorema 2.12 (Teorema de Lumer-Phillips)**.** *Sejam E um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $A : D(A) \subset E \to E$ um operador linear densamente definido. Então*

(i) Se A é gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de contrações em $\mathcal{L}(E)$, então A é dissipativo.

(ii) Se A é dissipativo e para algum $\lambda_0 > 0$ tem-se $R(\lambda_0 I - A) = E$, então A é gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de contrações em $\mathcal{L}(E)$.

Demonstração. (i) Se A é gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de contrações $\{S(t); t \geqslant 0\}$ em $\mathcal{L}(E)$, então pelo Teorema de Hille-Yosida

$R(\lambda I - A) = E$ para todo $\lambda > 0$, e para cada $x \in E$, $x^* \in J(x)$, $t > 0$,

$$|\langle S(t)x, x^*\rangle| \leqslant \|x^*\|\|S(t)x\| \leqslant \|x\|^2.$$

Portanto,

$$\mathrm{Re}\Big\langle \frac{S(t)x - x}{t}, x^*\Big\rangle = \frac{1}{t}\{\mathrm{Re}\langle S(t)x, x^*\rangle - \|x\|^2\} \leqslant 0.$$

Mostrando que, se $x \in D(A)$ e $x^* \in J(x)$, então $\mathrm{Re}\langle Ax, x^*\rangle \leqslant 0$.

(ii) Para $\lambda > 0$ e $x \in D(A)$, segue do 2.11 que

$$\|(\lambda I - A)x\| \geqslant \lambda\|x\|.$$

Agora $R(\lambda_0 I - A) = E$, $\|(\lambda_0 I - A)x\| \geqslant \lambda_0\|x\|$ for $x \in D(A)$, então λ_0 está no conjunto resolvente de A e A é fechado. Seja $\mathcal{O} = \{\lambda \in \rho(A) \cap \mathbb{R}; \lambda > 0\}$. Desde que $\rho(A)$ é aberto, segue que $\mathcal{O}$ é um subconjunto aberto de $(0,\infty)$. Vamos provar que $\mathcal{O}$ é também fechado em $(0,\infty)$ para concluir que $\mathcal{O} = (0,\infty)$. Suponha que $\{\lambda_n\}_n \subset \mathcal{O}$, $\lambda_n \to \lambda > 0$, se n é suficientemente grande, temos $|\lambda_n - \lambda| \leqslant \frac{1}{4}$. Logo, para n adequadamente grande, $\|(\lambda_n - \lambda)(\lambda_n I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} \leqslant \frac{|\lambda_n - \lambda|}{\lambda_n} \leqslant \frac{1}{4\lambda_n}$.
Isto mostra que

$$I - (\lambda_n - \lambda)(\lambda_n I - A)^{-1}$$

é um isomorfismo de E. Então

$$\lambda I - A = [I - (\lambda_n - \lambda)(\lambda_n I - A)^{-1}](\lambda_n I - A) \tag{2.5}$$

leva $D(A)$ em E e $\lambda \in \rho(A)$. Observe que todas as hipóteses do Teorema de Hille-Yosida são satisfeitas, e a prova de (ii) está completa. □

Corolário 2.13. Sejam E um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $A : D(A) \subset E \to E$ um operador linear. Assuma que A é fechado e densamente definido. Se A e A^* são dissipativos, então A gera um semigrupo fortemente contínuo de contrações em $\mathcal{L}(E)$.

Demonstração. Do Teorema de Lumer-Phillips é suficiente provar que $R(I - A) = E$. Desde que A é dissipativo e fechado $R(I - A)$ é um subespaço fechado de E. Se $R(I - A) \neq E$, existe $x^* \in X^*$, $x^* \neq 0$ tal que $\langle x - Ax, x^*\rangle = 0$ para todo $x \in D(A)$. Isto implica que $\langle x, x^*\rangle = \langle Ax, x^*\rangle = \langle x, A^*x^*\rangle$ para todo $x \in D(A)$, e então $x^* \in D(A^*)$ com $A^*x^* = x^*$; isto é, $x^* - A^*x^* = 0$. Desde que A^* é também dissipativo, segue do Lema 2.11 que $x^* = 0$, contradizendo nossa escolha de x^*. □

Definição 2.12. Sejam E um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$ e $A : D(A) \subset E \to E$ um operador linear. A imagem numérica de A é o conjunto

$$W(A) = \{\langle Ax, x^*\rangle; x^* \in E^*, x \in D(A), \|x^*\| = \|x\| = 1, \langle x, x^*\rangle = 1\}.$$

Segue da definição que, se E^* é uniformemente convexo, para cada $x \in E$ existe um único $x^* \in E^*$ tal que $\|x^*\| = 1 = \langle x, x^*\rangle$. Se E é um espaço de Hilbert

$$W(A) = \{\langle Ax, x\rangle; x \in D(A), \|x\| = 1\}.$$

Teorema 2.14. *Seja E um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$. Seja $A : D(A) \subset E \to E$ um operador linear, fechado e densamente definido. Seja $W(A)$ a imagem numérica de A e Σ um subconjunto aberto e conexo de $\mathbb{C}\backslash W(A)$. Se $\lambda \notin \overline{W(A)}$, então $\lambda I - A$ é injetivo, tem imagem fechada e satisfaz*

$$\|(\lambda I - A)x\| \geqslant d(\lambda, W(A))\|x\|. \tag{2.6}$$

Além disso, se $\rho(A) \cap \Sigma \neq \varnothing$, então $\rho(A) \supset \Sigma$ e

$$\forall \lambda \in \Sigma, \quad \|(\lambda I - A)^{-1}x\| \leqslant \frac{1}{d(\lambda, W(A))}, \tag{2.7}$$

onde $d(\lambda, W(A))$ é a distância de λ à $W(A)$.

Demonstração. Seja $\lambda \notin \overline{W(A)}$. Se $x^* \in E^*, x \in D(A), \|x^*\| = \|x\| = 1e\langle x, x^*\rangle = 1$, então

$$0 < d(\lambda, W(A)) \leqslant |\lambda - \langle Ax, x^*\rangle| = |\langle \lambda Ix - Ax, x^*\rangle| \leqslant \|\lambda x - Ax\|$$

e

$$\forall x \in D(A), \quad d(\lambda, W(A))\|x\| \leqslant \|\lambda Ix - Ax\|$$

portanto $\lambda I - A$ é injetivo (observe que se $x \neq 0$ então $(\lambda I - A)x \neq 0$ pois $0 < d(\lambda, W(A))\|x\| \leqslant \|(\lambda I - A)x\|$), tem imagem fechada e satisfaz (2.6). Além disso, se $\lambda \in \rho(A)$ então (2.6) implica (2.7).
Resta mostrar que se Σ intersecta $\rho(A)$, então Σ está contido em $\rho(A)$. Para isto, iremos considerar o conjunto não vazio $\rho(A) \cap \Sigma$. É claro que $\rho(A) \cap \Sigma$ é aberto em Σ. Vamos mostrar que $\rho(A) \cap \Sigma$ é também fechado em Σ. De fato, se $\lambda_n \in \rho(A) \cap \Sigma$ e $\lambda_n \to \lambda \in \Sigma$, temos que, para n suficiente grande, $|\lambda_n - \lambda| < \varepsilon_n = d(\lambda_n, W(A))$. De (2.7) segue para n suficientemente grande, $|\lambda_n - \lambda|\|(\lambda_n - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} < 1$ e

$$\lambda I - A = [I - (\lambda_n - \lambda)(\lambda_n I - A)^{-1}](\lambda_n I - A)$$

implica que $\lambda \in \rho(A)$ e consequentemente $\rho(A) \cap \Sigma$ é fechado em Σ. Segue que $\rho(A) \cap \Sigma = \Sigma$; isto é, $\rho(A) \supset \Sigma$ e a prova está completa. □

Teorema 2.15. *Seja H um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{C}$. Seja $A : D(A) \subset H \to H$ um operador linear auto-adjunto. Assuma que A é limitado por cima; isto é, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $\langle Au, u \rangle \leqslant a\langle u, u \rangle$. Então, $\mathbb{C}\backslash(-\infty, a] \subset \rho(A)$ e existe uma constante $M \geqslant 1$ dependendo apenas de $0 < \phi < \pi$ tal que*

$$\forall \lambda \in \Sigma_a, \quad \|(\lambda I - A)^{-1}x\| \leqslant \frac{M}{|\lambda - a|}, \tag{2.8}$$

onde $\Sigma_a = \{\lambda \in \mathbb{C}; |arg(\lambda - a)| \leqslant \phi\}$. Segue que A é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares $\{T(t); t \geqslant 0\}$ em $\mathcal{L}(H)$ satisfazendo

$$\forall t \geqslant 0, \quad \|T(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leqslant e^{at}.$$

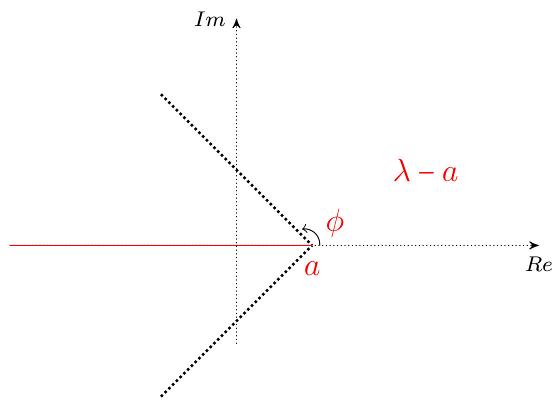

Figura 2.2: Setor complexo $\Sigma_a = \{\lambda \in \mathbb{C}; \arg(\lambda - a) \leqslant \phi\}$.

Demonstração. De fato, A é fechado e densamente definido. Seja $W(A)$ a imagem numérica de A, note que

$$W(A) = \{\langle Ax, x\rangle; x \in D(A), \|x\| = 1\} \subset (-\infty, a],$$

e isto implica que

$$\mathbb{C}\backslash(-\infty, a] \subset \mathbb{C}\backslash W(A).$$

Desde que $A - aI = A^* - aI$ é um operador dissipativo, pelo Corolário 2.13 $A - aI$ gera um semigrupo fortemente contínuo de contrações em $\mathcal{L}(H)$. Daí, segue que $\rho(A - aI) \supset (0, \infty)$. Do Teorema 2.14, temos que $\mathbb{C}\backslash(-\infty, a] \subset \rho(A)$ e que

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}\backslash(-\infty, a], \quad \|(\lambda I - A)^{-1}x\| \leqslant \frac{1}{d(\lambda, W(A))} \leqslant \frac{1}{d(\lambda, (-\infty, a])}.$$

Além disso

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}\backslash(-\infty, a], \qquad \frac{1}{d(\lambda, (-\infty, a])} \leqslant \frac{1}{\operatorname{sen}(\phi)} \frac{1}{|\lambda - a|}.$$

□

Notação 2.1. Sejam E um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $A : D(A) \subset E \to E$ o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares $\{S(t);\ t \geqslant 0\} \subset \mathcal{L}(E)$, então iremos usar a seguinte notação

$$S(t) = e^{tA}$$

para todo $t \geqslant 0$.
Para motivar o estudo dos próximos teoremas, recordemos alguns resultados já conhecidos para o caso em que estamos lidando com números.
Para cada $a \in \mathbb{R}$ e $t \geqslant 0$ temos

$$e^{at} = \lim_{h \to 0^+} e^{tf(h)},$$

onde

$$\lim_{h \to 0^+} f(h) = a.$$

Para cada $a \in \mathbb{R}$ e $t \geqslant 0$ temos,

$$e^{at} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{at}{n}\right)^n = \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{at}{n}\right)^{-n}$$

e para cada $t > 0$ temos

$$e^{at} = \lim_{n \to \infty} \left[\frac{n}{t}\left(\frac{n}{t} - a\right)^{-1}\right]^n.$$

Teorema 2.16 (Primeiro limite fundamental)**.** *Sejam E um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $A : D(A) \subset E \to E$ um operador linear. Se A é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares $\{S(t);\ t \geqslant 0\}$ em $\mathcal{L}(E)$, então*

$$S(t)x = \lim_{h \to 0^+} e^{tA(h)x},$$

onde $A(h) = \dfrac{1}{h}(S(h) - I)$ para todo $h > 0$, e este limite é uniforme em t em todo o *intervalo de* $[0,\infty)$.

Demonstração. Seja $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leqslant Me^{\beta t}$ com $\beta \geqslant 0$. Note que, para $h > 0$ temos $A(h) \in \mathcal{L}(E)$, $A(h)$ e $S(t)$, e $e^{tA(h)}$ e $S(t)$ comutam. Portanto,

$$\|e^{tA(h)}\| \leqslant e^{-\frac{t}{h}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t}{h}\right)^k \frac{\|S(hk)\|_{\mathcal{L}(E)}}{k!} \leqslant Me^{\frac{t}{h}(e^{\beta h}-1)}.$$

Assim, para $0 < h \leqslant 1$, temos

$$\|S(hk)\|_{\mathcal{L}(E)} \leqslant Me^{t\beta e^{\beta}}.$$

Logo, para $x \in D(A)$, a aplicação $s \mapsto e^{(t-s)A(h)}S(s)x$ é diferenciável em s e

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\Big(e^{(t-s)A(h)}S(s)x\Big) &= -A(h)e^{(t-s)A(h)}S(s)x + e^{(t-s)A(h)}AS(s)x \\ &= e^{(t-s)A(h)}(A(h)S(s)x - AS(s)x). \end{aligned}$$

Consequentemente, para $0 < h \leqslant 1$ e $x \in D(A)$ temos

$$\begin{aligned} &\Big\|S(t)x - e^{tA(h)}x\Big\|_E = \Big\| \int_0^t \frac{d}{ds}\Big(e^{(t-s)A(h)}S(s)x\Big)ds\Big\|_E \\ &\leqslant \Big\| \int_0^t \|e^{(t-s)A(h)}\|_{\mathcal{L}(E)}\|S(s)\|_{\mathcal{L}(E)}\|A(h)S(s)x - AS(s)x\|_E ds \\ &\leqslant tM^2e^{t\beta(e^{\beta}+1)}\|A(h)S(s)x - AS(s)x\|_E. \end{aligned}$$

Tomando o limite quando $h \to 0^+$, obtemos o limite para $x \in D(A)$. Desde que $\|e^{tA(h)}\|_{\mathcal{L}(E)}$ e $\|S(s)\|_{\mathcal{L}(E)}$ são uniformemente limitados no intervalo limitado, e desde que $D(A)$ é denso em E, obtemos o limite para todo $x \in E$. □

Teorema 2.17 (Segundo limite fundamental)**.** *Sejam E um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $A : D(A) \subset E \to E$. Se A é gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares $\{S(t);\ t \geqslant 0\}$ em $\mathcal{L}(E)$, então*

$$S(t)x = \lim_{n\to\infty}\left(I - \frac{t}{n}A\right)^{-n} x = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{t}\left(\frac{n}{t}I - A\right)^{-1}\right]^n x$$

para todo $x \in E$, e este limite é uniforme em t em todo intervalo limitado de $[0,\infty)$.

Demonstração. Para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, $0 < s < t$, $S_n(t) = \Big(I - \dfrac{t}{n}A\Big)^{-n}$ e $x \in D(A)$ temos

$$\frac{d}{ds}S(s)x = AS(s)x = S(s)Ax,$$

e para $x \in D(A^2)$ temos

$$S(t)Ax - Ax = \int_0^t S(s)A^2 x ds$$

e

$$S_n(t-s) = \Big(I - \frac{t-s}{n}A\Big)^{-n}.$$

Portanto, para $x \in D(A^2)$ temos

$$\begin{aligned} & S(t)x - S_n(t)x \\ & = \int_0^t S_n(t-s)S(s)\Big(I - \Big(I - \frac{t-s}{n}A\Big)^{-1}\Big)Axds \\ & = -\int_0^t S_n(t-s)S(s)\Big(\frac{n}{t-s} - A\Big)^{-1} A^2 xds. \end{aligned}$$

Note que, dado $T > 0$, temos

$$\sup_{t\in[0,T]} \|S(t)\|_{\mathcal{L}(E)} < \infty \quad \text{e} \quad \sup_{t\in[0,T]} \|S_n(t)\|_{\mathcal{L}(E)} < \infty.$$

Desde que $\lambda(\lambda I - A)^{-1}x = (I - \lambda^{-1}A)^{-1}x \to x$ quando $\lambda \to \infty$, para cada $x \in E$, e o teorema da convergência dominada de Lebesgue, segue que

$$\int_0^t \Big\|S_n(t-s)S(s)\Big(\frac{n}{t-s} - A\Big)^{-1} A^2 x\Big\| ds \to 0,$$

quando $n \to \infty$. A prova está completa observando o fato de que $D(A^2)$ é um subespaço denso de E. □

Recordemos que se A é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados $\{S(t);\ T \geqslant 0\}$ em $\mathcal{L}(E)$, então para $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que Reλ é suficientemente grande, temos

$$(\lambda I - A)^{-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)dt.$$

Teorema 2.18. *Sejam E um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $A : D(A) \subset E \to E$ um operador linear densamente definido. Se A é gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados $\{S(t);\ t \geqslant 0\}$ em $\mathcal{L}(E)$ com $\|S(t)\| \leqslant Me^{\beta t}$. Assuma que $\gamma > max\{0, \beta\}$. Para todo $x \in D(A^2)$ e $t > 0$,*

$$S(t)x = \lim_{N\to\infty} \int_{\gamma - iN}^{\gamma + iN} e^{\lambda t}(\lambda I - A)^{-1} x d\lambda,$$

onde a integral é calculada ao longo do segmento de extremidades $\gamma - iN$ e $\gamma + iN$. Este *limite é uniforme para t em subconjuntos compactos de $[0,\infty)$.*

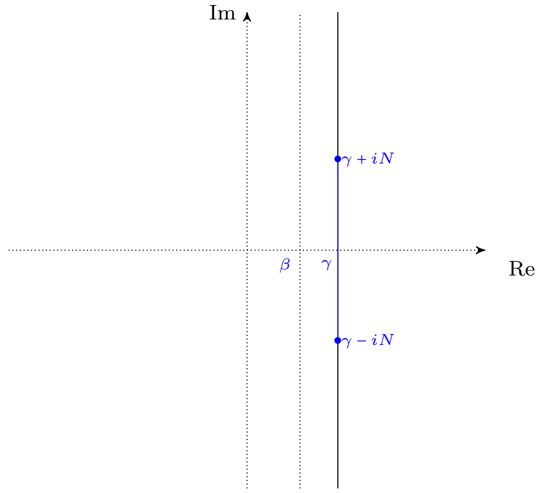

Figura 2.3: $\{\lambda \in \mathbb{C}; Re\lambda > \beta\} \subset \rho(A)$ e $\gamma > \max\{0,\beta\}$.

Demonstração. Ver Capítulo 3 de [5], Seção 3.9. □

Teorema 2.19 (Carvalho, Cholewa e Dlotko, 2001)**.** *Assuma que $-A$ e $-B$ sejam geradores infinitesimais de semigrupos fortemente contínuos de operadores lineares limitados, A e B comutam, $A+B$ é fechado e densamente definido com domínio $D(A)\cap D(B)$, e $\lambda \in (-(A+B))$ para algum $\lambda > 0$. Então, $-(A+B)$ gera um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados que satisfaz*

$$e^{-(A+B)t} = e^{-At}e^{-Bt}.$$

Demonstração. Inicialmente, vamos considerar, por conveniência, uma norma equivalente no espaço de Banach de modo que $-A$ seja gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de contrações. Considere $-A_\lambda = -\lambda A(\lambda I + A)^{-1}$ e $-B_\lambda = -\lambda B(\lambda I + B)^{-1}$. Então $\|e^{-A_\lambda t}\| \leqslant 1$ para todo $\lambda > 0$. Além disso, desde que

$$e^{-A_\lambda t}x \to e^{-At}x \text{ e } e^{-B_\lambda s}x \to e^{-Bs}x$$

quando $\lambda \to \infty$, temos para todo $x \in E$ e $s,t \geqslant 0$ que

$$\lim_{\lambda\to\infty} e^{-A_\lambda t - B_\lambda s}x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{-A_\lambda t}e^{-B_\lambda s}x = e^{-At}e^{-Bs}.$$

Desde que consideramos no início uma norma equivalente à original, temos que os limites acima ainda são verdadeiros para esta norma. Analogamente, temos

$$\lim_{\lambda\to\infty} e^{-B_\lambda s - A_\lambda t}x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{-B_\lambda s}e^{-A_\lambda t}x = e^{-Bs}e^{-At}.$$

Logo, concluímos que $e^{-At}e^{-Bs} = e^{-Bs}e^{-At}$. Agora, vamos mostrar que $\{T(t);\ t \geqslant 0\}$, com $T(t) = e^{-At}e^{-Bt}$, é um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados, cujo gerador é o operador $-(A+B)$.
Note que para $t = 0$ temos

$$T(0)x = e^{-A0}e^{-B0}x = x,$$

isto é, $T(0) = I$. Para $t, s \geqslant 0$ temos

$$T(t+s) = e^{-A(t+s)}e^{-B(t+s)} = e^{-At}e^{-As}e^{-Bt}e^{-Bs},$$

e então

$$T(t+s) = e^{-At}e^{-Bt}e^{-As}e^{-Bs} = T(t)T(s).$$

Além disso, é claro que quando $t \to 0^+$ temos $e^{-At}e^{-Bt}x \to x$ e assim, vemos que

$$\|T(t)x - x\| \to 0,$$

quando $t \to 0^+$. Portanto, concluímos o que queríamos. Resta mostrar que $-(A+B)$ é o gerador infinitesimal de $\{T(t);\ t \geqslant 0\}$. Montemos o nosso problema então. Seja $x \in D(A) \cap D(B) = D(A+B)$, então

$$\begin{aligned}
T(t)x - x &= \lim_{\lambda\to\infty} (e^{-tA_\lambda}e^{-tB_\lambda}x - x) \\
&= \lim_{\lambda\to\infty} (e^{-tA_\lambda}e^{-tB_\lambda}x - e^{-tB_\lambda}x + e^{-tB_\lambda}x - x) \\
&= \lim_{\lambda\to\infty} \int_0^t e^{-sA_\lambda}e^{-tB_\lambda}(-A_\lambda x)ds + \int_0^t e^{-sB_\lambda}(-B_\lambda x)ds \\
&= \int_0^t e^{-sA}e^{-tB}(-Ax)ds + \int_0^t e^{-sB}(-Bx)ds.
\end{aligned}$$

Daí, temos

$$\frac{1}{t}\left(T(t)x - x\right) = \frac{1}{t}\left(\int_0^t e^{-sA}e^{-tB}(-Ax)ds + \int_0^t e^{-sB}(-Bx)ds\right).$$

Agora, note que a segunda integral converge para $-Bx$ quando $t \to 0^+$. Enquanto na primeira, temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{t}\int_0^t e^{-sA}e^{-tB}(-Ax)ds &= e^{-tB}\frac{1}{t}\int_0^t e^{-sA}(-Ax)ds\\ &= e^{-tB}\left(\frac{1}{t}\int_0^t e^{-sA}(-Ax)ds + Ax\right) - e^{tB}Ax.\end{aligned}$$

Veja que a segunda parcela da soma acima converge para $-Ax$ que é o que queremos, enquanto que a primeira converge 0 quando $t \to 0^+$, pois o semigrupo é fortemente contínuo. Assim,

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}\left(T(t)x - x\right) = -(A+B)x,$$

para $x \in D(A+B) = D(A)\cap D(B)$, isto é, se $-C$ é o gerador infinitesimal do semigrupo $\{T(t);\ t \geqslant 0\}$, temos $D(A+B) \subset D(C)$. Desse modo, o gerador infinitesimal $-C$ deve ser uma extensão do operador $-(A+B)$.
Seja $\lambda \in \rho(A+B)$ tal que $\lambda \in \rho(C)$, então

$$(\lambda I + C)D(C) = E = (\lambda I + (A+B))D(A+B).$$

Assim, concluímos que $A+B = C$ e finalizamos a demonstração. □

É possível também obter resultados desse tipo para grupos, isto é, resultados que garantem quando um operador é gerador de um grupo. É o que trataremos na seção a seguir.

2.4 Geração de grupos de operadores lineares limitados

Além de semigrupos de operadores lineares, algumas equações nos fornecem grupos de operadores lineares, os quais já definimos anteriormente. Um exemplo simples, que veremos mais à frente, é quando A e $-A$ são geradores infinitesimais de semigrupos fortemente contínuos. Nesta seção, vamos estudar mais profundamente este conceito, e encontrar condições para que um operador linear não necessariamente limitado $A : D(A) \subset E \to E$ gere um grupo de operadores lineares.

Teorema 2.20. *Seja E um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$. Seja $\{S(t);\ t \geqslant 0\}$ um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados. Se existe $t_0 > 0$ tal que $S(t_0)$ é invertível, então $S(\cdot)$ pode ser estendido para um grupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados.*

Demonstração. Tome $M \geqslant 1$ e $\beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$\forall t \geqslant 0, \quad \|S(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leqslant Me^{\beta t}.$$

Seja $c = \|S(t_0)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)}$ e seja $0 \leqslant t \leqslant t_0$

$$S(t_0) = S(t_0 - t)S(t) = S(t)S(t_0 - t)$$

e

$$I = S(t_0)^{-1}S(t_0 - t)S(t) = S(t)S(t_0 - t)S(t_0)^{-1},$$

então $S(t)$ tem inverso $S(t_0)^{-1}S(t_0-t)$ com norma menor do que ou igual a $M_1cMe^{|\beta|t_0}$. Além disso, seja $t = nt_0+\tau$ para algum $n \in \mathbb{N}$ e $\tau \in [0, t_0)$. Neste caso, $S(t) = S(\tau)S(t_0)^n$ tem inverso $S(t_0)^{-n}S(\tau)^{-1}$.

Consequentemente, $S(t)$ é invertível para todo $t \geqslant 0$ e definimos $S(t) = S(-t)^{-1}$ para $t < 0$. Esta definição fornece um grupo desde que $t, s \geqslant 0$, podemos calcular:

$$\begin{aligned} S(-t)S(-s) &= S(t)^{-1}S(s)^{-1} \\ &= (S(s)S(t))^{-1} \\ &= S(s+t)^{-1} \\ &= S(-s-t), \end{aligned}$$

e para $t \geqslant s$

$$\begin{aligned} S(-t)S(s) &= (S(s)S(t-s))^{-1}S(s) \\ &= S(t-s)^{-1}S(s)^{-1}S(s) \\ &= S(t-s)^{-1} \\ &= S(s-t). \end{aligned}$$

Para $s \geqslant t$

$$S(-t)S(s) = S(t)^{-1}S(t)S(s-t) = S(s-t),$$

e similarmente para $S(s)S(-t)$. Seja $t \in [0, t_0]$ e $x \in E$. Então

$$\|S(-t)x - x\| = \|S(-t)(x - S(t)x)\| \leqslant M_1\|x - S(t)x\| \to 0,$$

quando $t \to 0^+$. Logo $\{S(t) : t \in \mathbb{R}\}$ é um grupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados. □

Teorema 2.21. *Seja E um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$. Seja $\{S(t);\ t \in \mathbb{R}\}$*

um grupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados. Então, para cada $t \in \mathbb{R}$ *temos* $0 \in \rho(S(t))$ *e* $S(-t) = S(t)^{-1}$.

Demonstração. Observe que para todo $t \in \mathbb{R}$ temos $S(t) \in \mathcal{L}(E)$ e

$$S(t)S(-t) = I = S(-t)S(t),$$

isto é, faz sentido considerarmos $S(t)^{-1}$ e é tal que $S(t)^{-1} = S(-t)$. Por conseguinte, concluímos que $0 \in \rho(S(t))$. □

Lema 2.22. Sejam E um espaço de Banach sobre o corpo $\mathbb{K}$ e $A : D(A) \subset E \to E$ um operador linear. Então A é gerador infinitesimal de um grupo fortemente contínuo se, e somente se, A e $-A$ são geradores infinitesimais de semigrupos fortemente contínuos.

Demonstração. Seja A o gerador infinitesimal do grupo fortemente contínuo $\{S(t); t \in \mathbb{R}\}$, então $\{S(t); t \geqslant 0\}$ e $\{S_-(t) = S(-t); t \geqslant 0\}$ são semigrupos fortemente contínuos. O operador A é gerador de $\{S(t); t \geqslant 0\}$.
De fato, seja A_+ o gerador infinitesimal de $\{S(t); t \geqslant 0\}$. Se $x \in D(A)$, então existe

$$Ax = \lim_{h \to 0} \frac{S(h)x - x}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{S(h)x - x}{h},$$

logo $x \in D(A_+)$ e

$$A_+x = \lim_{h \to 0^+} \frac{S(h)x - x}{h} = Ax.$$

Agora, se $x \in D(A_+)$ então $A_+x = \lim_{h \to 0^+} \frac{S(h)x - x}{h}$. Além disso,

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{S(-h)x - x}{-h} = \lim_{h \to 0^+} S(-h)\frac{S(h)x - x}{h} = A_+x.$$

Desse modo

$$\lim_{h \to 0} \frac{S(h)x - x}{h} = A_+x.$$

Portanto, $x \in D(A)$ e $Ax = A_+x$. Donde concluímos que $A = A_+$.

De forma análoga, vamos mostrar que $-A$ é gerador infinitesimal de $\{S_-(t); t \geqslant 0\}$. Seja A_- o gerador infinitesimal de $\{S_-(t); t \geqslant 0\}$ e tome $x \in D(A_-)$, então existe

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{S_-(t)x - x}{t} = A_-x.$$

Além disso, veja que

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{S_-(-t)x - x}{-t} = \lim_{t \to 0^+} \frac{S(-(-t))x - x}{-t} = \lim_{t \to 0^+} \frac{S(t)x - x}{-t} = \lim_{t \to 0^+} S(t)\frac{S(-t)x - x}{t} = A_-x$$

isto é,

$$\lim_{t \to 0} \frac{S_-(t)x - x}{t} = A_- x$$

e portanto $x \in D(-A)$.
Agora, se $x \in D(-A)$, temos

$$-Ax = -\lim_{t \to 0} \frac{S(t)x - x}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{S(t)x - x}{-t} = A_- x,$$

o que implica que $x \in D(A_-)$, e portanto, concluímos que $-A = A_-$.
Reciprocamente, sejam A e $-A$ os geradores infinitesimais dos semigrupos fortemente contínuos $\{S(t); t \geqslant 0\}$ e $\{S_-(t); t \geqslant 0\}$, respectivamente. Desde que, para cada $t \geqslant 0$ temos

$$S(t)x = \lim_{\lambda \to \infty} e^{A_\lambda t} x$$

e

$$S_-(t)x = \lim_{\lambda \to \infty} e^{(-A_\lambda)t} x.$$

Concluímos que $S(t)$ e $S_-(t)$ comutam e se definirmos $T(t) = S(t)S_-(t)$ então $\{T(t); t \geqslant 0\}$ é um semigrupo.
Vamos agora mostrar que $\{T(t); t \geqslant 0\}$ é um semigrupo fortemente contínuo. Com efeito, seja $x \in E$ então

$$\begin{aligned} \|T(t)x - x\| &\leqslant \|S(t)S_-(t)x - S(t)x\| + \|S(t)x - x\| \\ &\leqslant \|S(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \|S_-(t)x - x\| + \|S(t)x - x\| \\ &\leqslant M e^{\beta t} \|S_-(t)x - x\| + \|S(t)x - x\| \to 0, \end{aligned}$$

quando $t \to 0^+$. $T(t) = I$ para todo $t \geqslant 0$. Seja $x \in D(A) = D(-A)$, então

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0^+} \frac{T(h)x - x}{h} &= \lim_{h \to 0^+} S(h) \frac{S_-(h)x - x}{h} + \lim_{h \to 0^+} \frac{S(h)x - x}{h} \\ &= -Ax + Ax = 0. \end{aligned}$$

Isto implica que se B é o gerador infinitesimal de $\{T(t); t \geqslant 0\}$, então $D(A) \subset D(B)$ e $Bx = 0$ para todo $x \in D(A)$. Como $D(A)$ é denso em E, $D(A)$ é denso em $D(B)$ e desde que B é fechado, segue que $D(B) = E$ e $Bx = 0$ para todo $x \in E$. Portanto $T(t) = I$ para todo $t \geqslant 0$ e $S_-(t) = S(t)^{-1}$ para todo $t \geqslant 0$. Isto nos permite definir $S(-t) = S_-(t)$ para todo $t > 0$.
Agora, vamos mostrar que $\{S(t); t \in \mathbb{R}\}$ é um grupo fortemente contínuo.

Note que $S(0) = I$. Agora, temos para todo $t, s \in \mathbb{R}$

$$S(t+s) = S(t)S(s);$$

se $t, s < 0$ então

$$S(t+s) = S_-(-t-s) = S_-(-t)S_-(-s) = S(t)S(s);$$

se $t > 0$, $s < 0$ e $t+s > 0$ então

$$S(t+s) = S(t+s)S_-(-t)S_-(-s) = S(t)S_-(-s) = S(t)S(s);$$

se $t > 0$, $s < 0$ e $t+s < 0$ então

$$\begin{aligned} S(t+s) &= S_-(-t-s) \\ &= S(t)S_-(-t)S_-(-t-s) \\ &= S(t)S_-(-s) \\ &= S(t)S(s). \end{aligned}$$

Além disso,

$$\lim_{t\to 0^+} \|S(t)x - x\| = 0$$

e

$$\lim_{t\nearrow 0} \|S(t)x - x\| = \lim_{-t\to 0^+} \|S_-(-t)x - x\| = 0.$$

Finalmente, vamos mostrar que A é gerador infinitesimal de $\{S(t); t \in \mathbb{R}\}$. Com efeito, seja Λ o gerador infinitesimal de $\{S(t); t \in \mathbb{R}\}$, vamos mostrar que $\Lambda = A$. Seja $x \in D(\Lambda)$ então

$$\Lambda x = \lim_{t\to 0} \frac{S(t)x - x}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} = Ax$$

o que implica que $x \in D(A)$. Agora, seja $x \in D(A)$, então existe $\lim_{t\to 0^+} \dfrac{S(t)x - x}{t}$ e além disso, note que

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{S(-t)x - x}{-t} = \lim_{t\to 0^+} S(-t)\frac{S(t)x - x}{-t} = Ax.$$

Logo, $Ax = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{S(t)x - x}{t} = \Lambda x$. Donde concluímos que $x \in D(\Lambda)$ e que $\Lambda = A$. □

O Teorema de Stone

Definição 2.13. Sejam H um espaço de Hilbert sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $A : D(A) \subset H \to H$ um operador linear. Dizemos que A é unitário se $A^* = A^{-1}$.

Lema 2.23. Sejam H um espaço de Hilbert sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $A : D(A) \subset H \to H$ um operador linear unitário. Então, A é uma isometria.

Demonstração. Basta observar que, para $x \in D(A)$ tem-se

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax\rangle = \langle x, A^*(Ax)\rangle = \langle x, A^{-1}(Ax)\rangle = \langle x, x\rangle = \|x\|^2.$$

□

Teorema 2.24 (Teorema de Stone)**.** *Sejam H um espaço de Hilbert sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $A : D(A) \subset H \to H$ um operador linear. O operador A é um gerador infinitesimal de um grupo fortemente contínuo de operadores unitários se, e somente se, iA é auto-adjunto; isto é, A é tal que $A^* = -A$.*

Demonstração. Seja A o gerador infinitesimal de um grupo fortemente contínuo de operadores unitários $\{S(t); t \in \mathbb{R}\}$. Então A é gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo $\{S(t); t \geqslant 0\}$ e $-A$ é gerador infinitesimal de um semigruppo fortemente contínuo $\{S_-(t); t \geqslant 0\}$. Sabemos que A^* é gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo $\{S(t)^*; t \geqslant 0\}$. Portanto,

$$S(t)^* = S(t)^{-1} = S(-t) = S_-(t)$$

e

$$\frac{1}{h}(S(t)^*x - x) = \frac{1}{h}(S_-(t)x - x),$$

que implica que $D(A^*) = D(A)$ e $A^*x = -Ax$ para $x \in D(A)$. Portanto, $A^* = -A$. Reciprocamente, assuma que $A^* = -A$. Da existência de A^* segue que $D(A)$ é denso em E. Para cada $x \in D(A)$, temos

$$\langle Ax, x\rangle = \langle x, A^*x\rangle = -\langle x, Ax\rangle = -\overline{\langle Ax, x\rangle},$$

logo, $\mathrm{Re}\langle Ax, x\rangle = 0$. Portanto, A e $-A = A^*$ são dissipativos, e assim, A e $-A$ são geradores infinitesimais de semigrupos fortemente contínuos de contrações, e portanto, A é gerador infinitesimal de um grupo fortemente contínuo de contrações $\{S(t); t \in \mathbb{R}\}$. Além disso, vamos mostrar que $S(t)$ é unitário para todo $t \in \mathbb{R}$. Se $\{S^*(t); t \in \mathbb{R}\}$ é o semigrupo com gerador infinitesimal $A^* = -A$, então $S(t)^* = S^*(t) = S(-t) = S(t)^{-1}$. □

Capítulo 3

Operadores setoriais e semigrupos analíticos

Neste capítulo, introduziremos o conceito de operadores setoriais no sentido de Henry [16], em espaços de Banach, exibiremos alguns resultados importantes relacionados à teoria, e apresentaremos uma importante classe dos semigrupos fortemente contínuos: a classe dos semigrupos analíticos. Além disso, veremos que será possível caracterizar geradores infinitesimais de semigrupos analíticos, isto é, exibiremos um resultado que estabelece condições para que um operador linear seja gerador de um semigrupo analítico. Veremos que isto ocorrerá quando $-A$ for um operador setorial. Este mesmo resultado estabelece ainda, uma fórmula para os operadores do semigrupo. É importante salientar que, não temos nenhuma pretenção com a originalidade dos argumentos aqui apresentados nas demonstrações dos resutados, e seguiremos de perto as referências [5], [12], [13], [14], [15], e [16]. No entanto, o conteúdo das observações, as soluções dos exercícios propostos nas referências supra citadas e as figuras aqui apresentadas são de autoria da própria autora.

3.1 Operadores setoriais

Nesta seção, apresentaremos o conceito de operadores setoriais. Além disso, exibiremos alguns resultados importantes relacionados a teoria. Será importante o estudo dessa classe de operadores para fazermos menção, na próxima seção, à relação entre operadores setoriais e semigrupos analíticos. Veremos que estes operadores são muito importantes na teoria de semigrupos.

Definição 3.1 (Operador setorial no sentido de Henry)**.** Sejam E um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $A : D(A) \subset E \to E$ um operador linear, fechado e densamente definido. Dizemos que A é um *operador setorial* se existem $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$, $M \geqslant 1$, e $a \in \mathbb{R}$

tais que o setor

$$\Sigma_{\mathrm{a},\phi} = \{\lambda \in \mathbb{C}; \phi \leqslant |\arg(\lambda - a)| \leqslant \pi,\ \ \lambda \neq a\}$$

está contido no conjunto resolvente de A, e vale

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leqslant \frac{M}{|\lambda - a|},$$

para todo $\lambda \in \Sigma_{a,\phi}$.

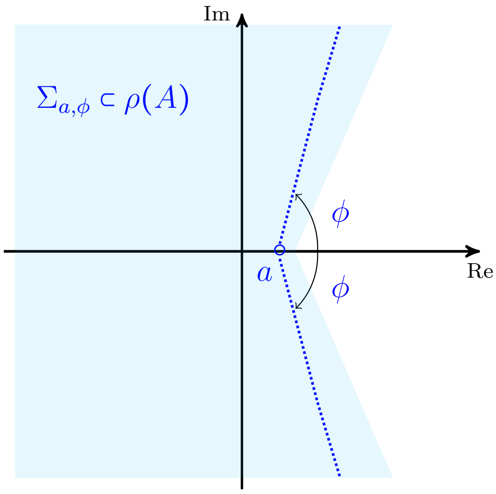

Figura 3.1: Setor complexo $\Sigma_{a,\phi} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \phi \leqslant |\arg(\lambda - a)| \leqslant \pi,\ \ \lambda \neq a\}$.

Observação 3.1. O leitor pode encontrar diferentes definições para operadores setoriais nas diversas literaturas, no entanto, a que vamos utilizar neste trabalho será a definição dada por [16], como já mencionamos acima. Mas o leitor que estiver interessado em conhecer as diversas definições, irá notar que algumas delas são equivalentes a que vamos tratar aqui.

Observação 3.2. Seja E um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$ e seja $A : D(A) \subset E \to E$ um operador linear setorial, como na Definição 3.1. Por conveniência, para facilitar a notação e menção à setorialidade do operador, diremos que A é setorial do tipo (a, ϕ, M), onde a, ϕ e M são os mesmos da definição mencionada.

Teorema 3.1. *Seja E um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$ e seja $A : D(A) \subset E \to E$ um operador linear fechado e densamente definido. Escolha $\omega \in \mathbb{R}$ arbitrário. Então A é setorial se, e somente se, $A_\omega := A + \omega I$ é setorial. Além disso, temos também*

$$Re\sigma(A_\omega) \geqslant a + \omega,$$

onde a é o vértice do setor da definição de setorialidade de A.

Demonstração. Suponha que A é setorial do tipo (a, ϕ, M). Pelo Teorema 1.2 do Capítulo 1, temos que A_ω é fechado, e é densamente definido com domínio $D(A)$.

Afirmação 3.1. O setor

$$\Sigma_{+\omega,\phi} = \{\lambda' \in \mathbb{C}; \phi \leqslant |arg(\lambda' - (a + \omega))| \leqslant \pi \ , \lambda' \neq a + \omega\}$$

está contido no resolvente de A_ω. De fato, seja $\lambda' \in \Sigma_{+\omega,\phi}$, então

$$\phi \leqslant |arg(\lambda' - (a + \omega))| \leqslant \pi$$

e podemos reescrever estas desigualdades como $\phi \leqslant |arg((\lambda'\omega) - a)| \leqslant \pi$. Desde que A é setorial do tipo (a, ϕ, M), segue que $\lambda' - \omega \in \Sigma_{a,\phi} \subset \rho(A)$. Assim, existe $\lambda \in \rho(A)$, tal que $\lambda = \lambda' - \omega$.
Note que

$$\lambda I - A = \lambda' I - \omega I - A = \lambda' I - (A + \omega I) = \lambda' I - A_\omega.$$

Daí, concluímos que $\lambda' I - A_\omega$ é invertível, portanto, $\lambda' \in \rho(A_\omega)$ e $\Sigma_{a+\omega,\phi} \subset \rho(A_\omega)$.
Além disso, temos

$$\|(\lambda' I - A_\omega)^{-1}\| = \|(\lambda' - \omega)I - A)^{-1}\| \leqslant \frac{M}{|(\lambda' - \omega) - a|} = \frac{M}{|\lambda' - (a + \omega)|}.$$

Donde concluímos que A_ω é setorial do tipo $(a + \omega, \phi, M)$. □

Teorema 3.2. *Seja E um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$ e seja $A : D(A) \subset E \to E$ um operador setorial. Então*

$$Re\sigma(A) \geqslant a.$$

Demonstração. Segue do Teorema 3.1 com $\omega = 0$. □

Teorema 3.3. *Sejam E um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$ e $A : D(A) \subset E \to E$ um operador linear, fechado e densamente definido. Considere os operadores $A_\omega = A + \omega I$ para $\omega \in \mathbb{R}$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) Para algum $\omega \in \mathbb{R}$, A_ω é setorial.

(b) Para todo $\omega \in \mathbb{R}$, A_ω é setorial.

(c) Existem $M \geqslant 1,\ a, \omega \in \mathbb{R}$ tais que

$$\{\lambda \in \mathbb{C};\ Re\lambda < a\} \subset \rho(A_\omega)$$

e

$$\|\lambda(\lambda I - A_\omega)^{-1}\| \leqslant M,$$

para $\lambda \in \mathbb{C}$ com $Re\lambda < a$.

Além disso, se (c) é satisfeita, então A_ω é um operador setorial do tipo $(a, \arctan(4M), N)$ para algum $N > M$.

Demonstração. Vamos começar mostrando que (a) implica (b). Suponha que para algum $\omega_0 \in \mathbb{R}$, A_{ω_0} é setorial. Então, $A_{\omega_0} + bI = A + \omega_0 I + bI = A + (\omega_0 + b)I$ é setorial pela proposição anterior. Logo, $A + \omega I$ é setorial para todo $\omega \in \mathbb{R}$. A prova de que (b) implica (a) é óbvia. Vamos mostrar que (a) implica (c). Assuma que A_{ω_0} é um operador setorial do tipo (b, ϕ, M). Defina $\omega = \omega_0 - b$ e $a < 0$. Então,

$$A_\omega = A_{\omega_0 - b} = A + (\omega_0 - b)I = A_{\omega_0} - bI$$

é um operador setorial do tipo $(0, \phi, M)$. Desse modo, temos $\Sigma_{0,\phi} \subset \rho(A_\omega)$ e $\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leqslant \dfrac{M}{|\lambda|}$, isto é, $\|\lambda(\lambda I - A)^{-1}\| \leqslant M$ para cada $\lambda \in \Sigma_{0,\phi}$. Em particular, veja que $\{\lambda \in \mathbb{C};\ \text{Re}\lambda < a\} \subset \Sigma_{0,\phi} \subset \rho(A_\omega)$. Por fim, vamos mostrar que (c) implica (a). Com efeito, temos que A_ω com domínio $D(A)$ é fechado e densamente definido. Seja $M \geqslant 1$ e $a \in \mathbb{R}$ tal que $\{\lambda \in \mathbb{C};\ \text{Re}\lambda < a\} \subset \rho(A_\omega)$ e $\|\lambda(\lambda I - A)^{-1}\| \leqslant M$ para $\lambda \in \mathbb{C}$ com $\text{Re}\lambda < a$.
Defina

$$\Sigma_{a,\arctan(4M)} = \{\lambda \in \mathbb{C};\ \arctan(4M) \leqslant |arg(\lambda - a)| \leqslant \pi,\ \lambda \neq a\}$$

e

$$\Sigma^{<} = \Sigma_{a,\arctan(4M)} \setminus \{\lambda \in \mathbb{C}; \text{Re}\lambda < a\}.$$

Confira a figura abaixo, para um melhor entendimento do setor $\Sigma^{<}$.

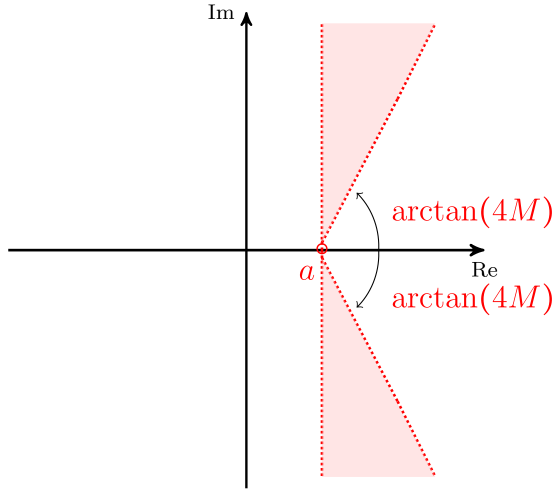

Figura 3.2: Setor complexo $\Sigma^{<}$.

Afirmação 3.2. $\Sigma^{<} \subset \rho(A_\omega)$. De fato, seja $\lambda \in \Sigma^{<}$, então note que $\arctan(4M) \leqslant |arg(\lambda - a)| \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.
Se $|arg(\lambda - a)| \neq \dfrac{\pi}{2}$, então podemos afirmar que

$$0 < 4M \leqslant |\tan(arg(\lambda - a))|,$$

mas

$$|\tan(arg(\lambda - a))| = \left|\frac{\mathrm{Im}(\lambda - a)}{\mathrm{Re}(\lambda - a)}\right| = \frac{|\mathrm{Im}(\lambda)|}{|\mathrm{Re}(\lambda - a)|}.$$

Daí, temos

$$|\mathrm{Re}\ (\lambda - a)| = \frac{|\mathrm{Im}\ (\lambda)|}{|\tan(arg(\lambda - a))|} \leqslant \frac{|\mathrm{Im}\ (\lambda)|}{4M}. \tag{3.1}$$

Por outro lado, se $|arg(\lambda - a)| = \dfrac{\pi}{2}$, então Re $\lambda = a$, e portanto, $|\mathrm{Re}\ (\lambda - a)| = 0$, e a desigualdade em (3.1) continua sendo verdadeira.
Fixe $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon < \dfrac{Im(\lambda)}{4M}$ e considere $\lambda_0 = a - \epsilon + iIm(\lambda)$. Note que $\lambda_0 \in \rho(A_\omega)$, pois

$$\mathrm{Re}\lambda_0 = \mathrm{Re}(a - \epsilon + i\mathrm{Im}(\lambda)) = a - \epsilon < a,$$

(Lembre que $\{\lambda \in \mathbb{C};\ Re\lambda < a\} \subset \rho(A_\omega)$). Além disso, temos $|\mathrm{Im}(\lambda)| = |\mathrm{Im}(\lambda_0)| \leqslant |\lambda_0|$ e

$\mathrm{Im}(\lambda) \neq 0$ (pois $\lambda \in S^{<}$ e $\lambda \neq a$) e $\|(\lambda_0 I - A_\omega)^{-1}\| \leqslant \dfrac{M}{|\lambda_0|} \leqslant \dfrac{M}{|Im(\lambda)|}$ e assim, temos

$$\frac{|\mathrm{Im}(\lambda)|}{M} \leqslant \frac{1}{\|(\lambda_0 I - A_\omega)^{-1}\|}.$$

Da desigualdade obtida acima, temos

$$B\left(\lambda_0, \frac{|\mathrm{Im}(\lambda)|}{M}\right) \subseteq B\left(\lambda_0, \frac{1}{\|(\lambda_0 I - A_\omega)^{-1}\|}\right) \subset \rho(A_\omega),$$

pois $\lambda_0 \in \rho(A_\omega)$ e $\rho(A_\omega)$ é um subconjunto aberto. Assim, temos

$$\begin{aligned} |\lambda - \lambda_0| &= |\lambda - a + \epsilon - i\mathrm{Im}(\lambda)| \\ &= |\mathrm{Re}(\lambda - a) + \epsilon| \\ &\leqslant |\mathrm{Re}(\lambda - a)| + \epsilon \\ &< \frac{|\mathrm{Im}(\lambda)|}{4M} + \frac{|\mathrm{Im}(\lambda)|}{4M}, \end{aligned}$$

isto é,

$$|\lambda - \lambda_0| < \frac{|\mathrm{Im}(\lambda)|}{2M}$$

e logo, $|\lambda - \lambda_0| < \dfrac{|\mathrm{Im}(\lambda)|}{M}$. O que nos diz que $\lambda \in \rho(A_\omega)$ e assim $\Sigma^{<} \subset \rho(A_\omega)$. Portanto,

$$\Sigma_{a,\arctan(4M)} \subset \rho(A_\omega).$$

Para $\lambda \in \Sigma^{<}$, temos

$$|\lambda - a|^2 = (\mathrm{Re}(\lambda - a))^2 + (\mathrm{Im}(\lambda - a))^2 \leqslant \frac{(\mathrm{Im}(\lambda))^2}{(4M)^2} + (\mathrm{Im}(\lambda))^2 = (\mathrm{Im}(\lambda))^2\left(\frac{1}{(4M)^2} + 1\right). \tag{3.2}$$

Note que $|\lambda - \lambda_0|\|(\lambda I - A)^{-1}\| < \dfrac{|\mathrm{Im}(\lambda)|}{2M}\dfrac{M}{|\mathrm{Im}(\lambda)|} = \dfrac{1}{2} < 1$, logo pelo Teorema 1.10 do Capítulo 1, temos

$$(\lambda I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n (\lambda I - A)^{-n-1}.$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\|(\lambda I - A)^{-1}\| &\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda - \lambda_0|^n \|(\lambda I - A)^{-1}\|^{n+1} \\
&\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda - \lambda_0|^n \left(\frac{M}{|Im(\lambda)|}\right)^{n+1} \\
&= \frac{M}{|\mathrm{Im}(\lambda)|} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|\lambda - \lambda_0| M}{|\mathrm{Im}(\lambda)|}\right)^n \\
&\leqslant \frac{M}{|\mathrm{Im}(\lambda)|} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \\
&= \frac{2M}{|\mathrm{Im}(\lambda)|}.
\end{aligned}
$$

De (3.2), temos

$$
|\lambda - a| \leqslant |\mathrm{Im}(\lambda)| \sqrt{1 + \frac{1}{(4M)^2}} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{|\mathrm{Im}(\lambda)|} \leqslant \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{(4M)^2}}}{|\lambda - a|}.
$$

Assim,

$$
\|(\lambda I - A)^{-1}\| < \frac{2M}{|\mathrm{Im}(\lambda)|} \leqslant \frac{2M\sqrt{1 + \frac{1}{(4M)^2}}}{|\lambda - a|} = \frac{L}{|\lambda - a|},
$$

onde $L = 2M\sqrt{1 + \frac{1}{(4M)^2}} > 0$. Portanto,

$$
\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leqslant \frac{L}{|\lambda - a|}, \tag{3.3}
$$

para $\lambda \in \Sigma^{<}$.

Agora, vamos olhar para um estimativa similar em $\Pi_a = \{\lambda \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}\lambda < a\}$. Para isto, vamos considerar 2 casos:

Caso 1. $a > 0$. Fixe $0 < r < a$ e note que para $\lambda \in \Pi_a \cap \overline{B(0;r)}$, temos

$$
|\lambda - a| \|(\lambda I - A_\omega)^{-1}\| \leqslant |\lambda| \|(\lambda I - A_\omega)^{-1}\| + a\|(\lambda I - A_\omega)^{-1}\|.
$$

Lembre que no início observamos que $\{\lambda \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}\lambda < a\} \subset \Sigma_{0,\phi}$ e por sua vez, tem-se $\|\lambda(\lambda I - A_\omega)^{-1}\| \leqslant M$ para todo $\lambda \in \Sigma_{0,\phi}$. Assim,

$$
|\lambda - a| \|(\lambda I - A_\omega)^{-1}\| \leqslant M + a\|(\lambda I - A_\omega)^{-1}\| \leqslant M_1. \tag{3.4}
$$

Note que o conjunto $\Pi_a \cap \overline{B(0;r)}$ é compacto. De fato, seja $x_n \in \Pi_a \cap \overline{B(0;r)}$ uma sequência nao nula, então para todo $n \in \mathbb{N}$ temos $\mathrm{Re}x_n \leqslant r$. E assim, a sequência $\mathrm{Re}x_n$ possui uma subsequência convergente, uma vez que é limitada, e além disso, tal subsequência é subsequência da própria sequência x_n, o que nos diz que toda subsequência em $\Pi_a \cap \overline{B(0;r)}$ possui subsequência convergente. Observe que se a sequência $\mathrm{Re}x_n$ for nula, os mesmos argumentos são válidos.
Desde que $\|(\lambda I - A_\omega)^{-1}\|$ é a composição de funções contínuas, segue que $a\|(\lambda I - A_\omega)^{-1}\|$ é limitada em $\Pi_a \cap \overline{B(0;r)}$ e portanto, justifica-se a limitação em (3.4), logo

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leqslant \frac{M_1}{|\lambda - a|},$$

para todo $\lambda \in \Pi_a \cap \overline{B(0;r)}$.
Para $\lambda \in \Pi_a \setminus \overline{B(0;r)}$, temos $|\lambda| > r$ e

$$\begin{aligned}|\lambda - a|\|(\lambda I - A_\omega)^{-1}\| &\leqslant |\lambda|\|(\lambda I - A_\omega)^{-1}\| + a\|(\lambda I - A_\omega)^{-1}\| \\ &\leqslant M + a\frac{M}{|\lambda|} \\ &< M + a\frac{M}{r} = M_2,\end{aligned}$$

o que nos dá $\|(\lambda I - A_\omega)^{-1}\| \leqslant \dfrac{M_2}{|\lambda - a|}$, para todo $\lambda \in \Pi_a \setminus \overline{B(0;r)}$.
Defina $M_3 = max\{M_1, M_2\} > M$, e temos $\|(\lambda I - A_\omega)^{-1}\| \leqslant \dfrac{M_3}{|\lambda - a|}$ para $\lambda \in \mathbb{C}$ com $\mathrm{Re}\lambda < a$.
Caso 2. $a \leqslant 0$. Observe que para $\lambda \in \Pi_a$ temos

$$\begin{aligned}|\lambda - a| &= \sqrt{(\lambda - a)^2} \\ &= \sqrt{(\mathrm{Re}(\lambda))^2 + (\mathrm{Im}(\lambda))^2 - 2a\mathrm{Re}\lambda + a^2} \\ &\leqslant \sqrt{(\mathrm{Re}(\lambda))^2 + (\mathrm{Im}(\lambda))^2 + a^2} \\ &\leqslant |\lambda|.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|(\lambda I - A_\omega)^{-1}\| \leqslant \frac{M}{|\lambda|} \leqslant \frac{M}{|\lambda - a|}$$

para $\lambda \in \Pi_a$.
Juntando os dois casos, e a limitação em (3.3), concluímos que A_ω é setorial do tipo $(a, \arctan(4M), N)$ para $N > M$. □

Observação 3.3. Note que $\arctan(4M) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ pois $4M > 0$ e a tangente é positiva apenas nos arcos compreendidos entre $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ e $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, os quais são simétricos.

Lema 3.4. Seja E um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$ e seja $A : D(A) \subset E \to E$ um operador linear limitado, então A é setorial.

Demonstração. Pelo Lema 1.8 do capítulo 1, temos $\{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| > \|A\|\} \subset \rho(A)$. Em particular, temos que

$$\{\lambda \in \mathbb{C}; \text{Re } \lambda < -2\|A\|\} \subset \rho(A).$$

De fato, note que para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ temos $|\lambda| \geqslant -\text{Re } \lambda$ e $2\|A\| > \|A\|$. Logo

$$|\lambda| \geqslant -\text{Re } \lambda > 2\|A\| > \|A\|.$$

Assim,

$$\{\lambda \in \mathbb{C};\ \text{Re } \lambda < -2\|A\|\} \subset \rho(A).$$

Desde que $|\lambda| > 2\|A\|$, temos $\lambda \neq -2\|A\|$ e podemos tomar $a = -2\|A\|$, e escolher $\theta = \frac{\pi}{4}$. Logo, o setor complexo

$$\Sigma_{a,\theta} = \{\lambda \in \mathbb{C};\ \frac{\pi}{4} \leqslant |arg(\lambda - a)| \leqslant \pi \quad \text{e } \lambda \neq a\}$$

está contido no resolvente de A e além disso, temos $\frac{\|A\|}{|\lambda|} < \frac{1}{2}$. Logo

$$(\lambda I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}} \Longrightarrow \lambda(\lambda I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^n} \Longrightarrow \|\lambda(\lambda I - A)^{-1}\| = \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^n} \right\|.$$

Daí, temos

$$\begin{aligned} \|\lambda(\lambda I - A)^{-1}\| &\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\|A\|}{|\lambda|} \right)^n \\ &< \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\ &= 2. \end{aligned}$$

Desse modo, temos

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| < \frac{2}{|\lambda|}.$$

Para concluir a demonstração, vamos invocar o Teorema 3.3 e observar que o caso acima satisfaz a condição (c), logo A é setorial. $\square$

Lema 3.5. Seja H um espaço de Hilbert sobre um corpo $\mathbb{K}$ e seja $A : D(A) \subset H \to H$ um operador linear densamente definido, e autoadjunto. Se A é limitado inferiormente, isto é, se existe $c > 0$ tal que $\langle Ax, x\rangle \geqslant c\langle x, x\rangle$ para todo $x \in D(A)$, então A é setorial.

Demonstração. Por hipótese, A é autoadjunto, logo $A^* = A$ e como $\overline{D(A)} = H$, segue que A^* é fechado e obviamente A também é. Além disso, pelo Teorema 1.25 do Capítulo 1, temos $\sigma(A) \subset [m, \infty)$ e em particular, o setor $\Sigma_{m,\frac{\pi}{4}} \subset \rho(A)$. Note que, dados $x, y \in D(A)$, temos

$$\langle (A - mI)x, y\rangle = \langle Ax, y\rangle - \langle mx, y\rangle = \langle x, Ay\rangle - \langle x, my\rangle = \langle x, (A - m)y\rangle$$

e

$$\langle (A - mI)x, x\rangle = \langle Ax, x\rangle - m\langle x, x\rangle \geqslant m\|x\|^2 - m\|x\|^2 = 0.$$

Seja $\lambda \in \Sigma_{m,\frac{\pi}{4}}$ fixado, defina $\lambda_1 = \lambda - m$, e assim temos dois casos a serem considerados

• Re $\lambda_1 < 0$, e daí, temos

$$\begin{aligned}
\|(\lambda I - A)x\|^2 &= \|(\lambda_1 + m - A)x\|^2 \\
&= \|(\lambda_1 I - (A - mI)x\|^2 \\
&= |\lambda_1|^2|x\|^2 - 2Re\lambda_1\langle (A - mI)x, x\rangle + \|(A - mI)x\|^2 \geqslant |\lambda_1|^2\|x\|^2.
\end{aligned}$$

• Re$\lambda_1 \leqslant |Im\lambda_1|$. Neste caso, para $x \in D(A)$, temos

$$\begin{aligned}
\|(\lambda I - A)x\|^2 &= \|\lambda_1 I - (A - mI)x\|^2 \\
&= |Im\lambda_1|^2\|x\|^2 + \|(Re\lambda_1 - (A - mI))x\|^2 \geqslant |Im\lambda_1|^2\|x\|^2 \geqslant \frac{|\lambda_1|^2}{2}\|x\|^2
\end{aligned}$$

uma vez que

$$\begin{aligned}
&\langle iIm\lambda_1 x, (Re\lambda_1 I - (A - mI)x\rangle + \langle (Re\lambda_1 I - (A - mI))x, iIm\lambda_1 x\rangle \\
&= iIm\lambda_1 re\lambda_1\|x\|^2 - iIm\lambda_1\langle (A - mI)x, x\rangle - iIm\lambda_1 Re\lambda_1\|x\|^2 + iIm\lambda_1\langle (A - mI)x, x\rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Combinando os resultados acima, obtemos, para qualquer $\lambda \in \Sigma_{m,\frac{\pi}{4}}$ e qualquer $x \in D(A)$

$$\|(\lambda I - A)x\| \geqslant \frac{|\lambda - m|}{\sqrt{2}}\|x\|.$$

Donde segue que, se $\lambda \in \Sigma_{m,\frac{\pi}{4}}$ e $y \in H$, então $x = (\lambda I - A)y \in D(A)$ e

$$\|(\lambda I - A)y\| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{|\lambda - m|}\|y\|,$$

para todo $\lambda \in \Sigma_{m,\frac{\pi}{4}}$. E assim, concluímos que A é setorial. □

Lema 3.6. Sejam X e Y espaços de Banach e $A : D(A) \subset X \to X$ e $B : D(B) \subset Y \to Y$ operadores setoriais em X e Y, respectivamente. Então, é setorial em $X \times Y$ o operador

$$A \times B : D(A) \times D(B) \to X \times Y$$

definido por $(A \times B)(x, y) = (Ax, By)$ para todo $(x, y) \in D(A) \times D(B)$.

Demonstração. Desde que A e B são fechados e densamente definidos, é fácil ver que $A \times B$ é fechado e densamente definido. Desde que A e B são setoriais, existem constantes $a, b \in \mathbb{R}$, $M_1, M_2 \geqslant 1$, ângulos $\phi_1, \phi_2 \in (0, \frac{\pi}{2})$ tais que $\Sigma_{a,\phi_1} \subset \rho(A)$ e $\Sigma_{b,\phi_2} \subset \rho(B)$, e valem as desigualdades

$$\|(\lambda_1 I - A)^{-1}\| \frac{M_1}{|\lambda_1 - a|}$$

e

$$\|(\lambda_2 I - B)^{-1}\| \frac{M_2}{|\lambda_2 - b|}$$

para $\lambda_1 \in \Sigma_{a,\phi_1}$ e $\lambda_2 \in \Sigma_{b,\phi_2}$, respectivamente. Note que $\rho(A \times B) = \rho(A) \cap \rho(B)$. De fato, seja $\lambda \rho(A \times B)$, então existe o operador $(\lambda I - (A \times B))^{-1}$ e temos

$$(\lambda I - (A \times B))^{-1} = (\lambda I - A, \lambda I - B)^{-1} = ((\lambda I - A)^{-1}, (\lambda I - B)^{-1}).$$

Daí, temos que $\overline{R(\lambda I - A)} = X$ e $\overline{R(\lambda I - B)} = Y$, do contrário não teríamos

$$\overline{R(\lambda I - (A \times B))} = X \times Y.$$

E a limitação dos operadores $(\lambda I - A)^{-1}, (\lambda I - B)^{-1}$ segue da limitação do operador $(\lambda I - (A \times B))^{-1}$. Graças a essa informação, basta escolhermos $c = \min\{a, b\}$ e $\phi =$

$\max\{\phi_1, \phi_2\}$, e assim temos

$$\Sigma_{c,\phi} \subset \rho(A \times B).$$

Se $M = \max\{M_1, M_2\}$, então

$$\begin{aligned} \|(\lambda I - (A \times B))^{-1}\| &= \|(\lambda I - A, \lambda I - B)^{-1}\| \\ &= \max\{\|(\lambda I - A)^{-1}\|, \|(\lambda I - B)^{-1}\|\} \\ &\leqslant \frac{M}{|\lambda - c|}, \end{aligned}$$

para todo $\lambda \in \Sigma_{c,\phi}$. E assim, segue que $A \times B$ é setorial. □

3.2 Semigrupos analíticos

Até agora, temos classificado semigrupos apenas como sendo fortemente contínuos ou como uniformemente contínuos, sendo este último um caso menos interessante. A questão é que, existem outras classes de semigrupos que possuem também propriedades de continuidade, ou regularidade, interessantes. Abaixo, apresentamos uma importante classe destes.

Definição 3.2. Se $\Sigma^\circ_{0,\theta}$ denota o interior de $\Sigma_{0,\theta}$, diremos que $\{T(t);\ t \in \Sigma^\circ_{0,\theta} \cup \{0\}\}$ é um *semigrupo analítico* se

(a) $T(0) = I$;

(b) $T(t+s) = T(t)T(s)$ para todo $t, s \in \Sigma_{0,\theta} \cup \{0\}$;

(c) $\lim\limits_{t\to 0} T(t)x = x$

(d) $\Sigma^\circ_{0,\theta} \ni t \mapsto T(t) \in \mathcal{L}(E)$ é analítica.

Observe que t se aproxima de 0 por pontos de $\Sigma^\circ_{0,\theta}$.

Observe que o semigrupo analítico não precisa ser definido em algum semiplano complexo, é suficiente estender analiticamente o semigrupo a um setor complexo, como vimos na definição. O teorema a seguir nos oferece uma importante caracterização dos geradores infinitesimais de semigrupos analíticos.

Teorema 3.7. *Seja E um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$. Suponha que o operador linear $A:\ D(A) : E \to E$ é densamente definido e que $-A$ seja setorial. Então, valem as seguintes afirmações:*

(*i*) *A gera um semigrupo fortemente contínuo* $\{T(t);\ t \geqslant 0\} \subset \mathcal{L}(E)$ *com*

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_a} e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1} d\lambda \quad t > 0 \tag{3.5}$$

onde Γ_a *é a fronteira de* $\Sigma_{a,\phi}\backslash\{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda - a| \leqslant r\}, r$ *pequeno, orientada no sentido da parte imaginária crescente.*

(*ii*) $t \mapsto T(t)$ *se estende a uma função analítica de* $\{t \in \mathbb{C};\ |arg(t)| < \phi - \frac{\pi}{2}\}$ *em* $\mathcal{L}(E)$.

(*iii*) *Para algum* $K > 0$

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leqslant Ke^{at}\ , \qquad \|AT(t)\| \leqslant Kt^{-1}e^{at} \quad \forall\ t > 0.$$

(*iv*)

$$\frac{d}{dt}T(t) = AT(t)$$

é um operador limitado para qualquer $t > 0$ *e a aplicação* $(0, \infty) \ni t \mapsto T(t) \in \mathcal{L}(E)$ *é contínua.*

Demonstração. Vamos começar definindo para $t > 0$:

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_a} e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1} d\lambda.$$

Será interessante definirmos $T(t)$ para $t = 0$, sendo assim, para $t = 0$ defina $T(t) = I$, onde I denota o operador identidade de E.
Considere a mudança de variáveis $\lambda = \mu + a$ em (3.5), daí temos $d\lambda = d\mu$. Além disso, veja que estamos fazendo a seguinte translação na curva Γ_a:

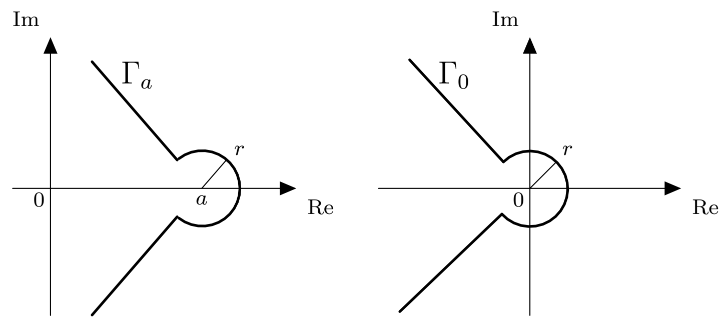

Figura 3.3: Mudança de variáveis: $\lambda = \mu + a$.

Assim, temos

$$
\begin{aligned}
T(t) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} e^{(\mu+a)t}(\mu + a - A)^{-1}d\mu \\
&= \frac{e^{at}}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} e^{\mu t}(\mu - (A-a))^{-1}d\mu \\
\Longrightarrow \quad e^{-at}T(t) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} e^{\mu t}(\mu - (A-a))^{-1}d\mu.
\end{aligned}
$$

Além disso, temos que $-A$ é setorial se, e somente se $-A+a$ é setorial, assim obtemos a seguinte limitação:

$$
\|(\mu - (A-a))^{-1}\| = \|(\lambda - A)^{-1}\| \leqslant \frac{M}{|\lambda - a|} = \frac{M}{|\mu + a - a|} = \frac{M}{|\mu|}.
$$

Logo, $\|(\mu - (A-a))^{-1}\| \leqslant \dfrac{M}{|\mu|}$ para todo $\mu \in \Sigma_{0,\phi} \subset \rho(A-a)$.
Feito isso, podemos considerar, sem perda de generalidade, $a = 0$, ou seja,

$$
T(t) = \int_{\Gamma_0} e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1}d\lambda.
$$

Por conveniência, vamos começar mostrando (iii).
Considere $\mu = \lambda t$, então

$$
T(t) = \int_{\Gamma_0} e^{\mu}\left(\frac{\mu}{t} - A\right)^{-1}\frac{d\mu}{t}.
$$

Desde que o integrando é analítico, a integral não depende da escolha do caminhos, mas apenas dos pontos extremos. Daí,

$$
\begin{aligned}
\|T(t)\| &= \left\| \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} e^{\mu}\left(\frac{\mu}{t} - A\right)^{-1}\frac{d\mu}{t}\right\| \\
&\leqslant \frac{1}{|2\pi i|}\int_{\Gamma_0}\left\| e^{\mu}\left(\frac{\mu}{t} - A\right)^{-1}\frac{d\mu}{t}\right\| \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_0}|e^{\mu}|\left\|\left(\frac{\mu}{t} - A\right)^{-1}\right\|\frac{|d\mu|}{t} \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_0}|e^{\mu}|\frac{M}{\frac{|\mu|}{t}}\frac{|d\mu|}{t} \\
&= \frac{M}{2\pi}\int_{\Gamma_0}\frac{|e^{\mu}|}{|\mu|}|d\mu| \\
&\leqslant \frac{M}{2\pi}\int_{\Gamma_0}\frac{e^{Re\mu}}{|\mu|}|d\mu|
\end{aligned}
$$

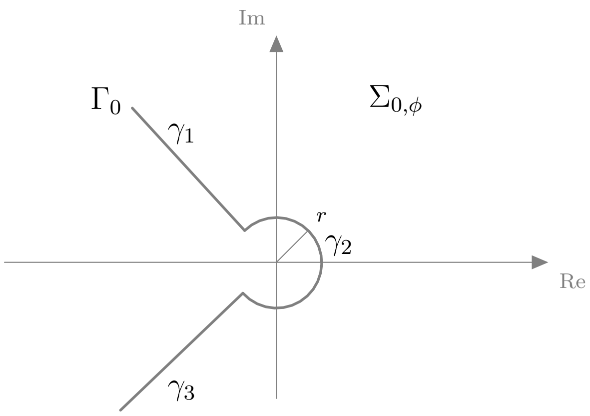

Figura 3.4: Curvas $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.

É interessante para que esta integral seja finita, então para estimar o valor desta integral, dividiremos o contorno de integração nas curvas $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ como na figura acima, sendo

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \{\lambda \in \mathbb{C};\ |arg(\lambda)| = \psi\}, \\ \gamma_2 &= \{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| = r \text{ e } |arg(\lambda)| \leqslant \psi\}, \\ \gamma_3 &= \{\lambda \in \mathbb{C};\ |arg(\lambda)| = -\psi\}. \end{aligned}$$

Desse modo, temos

$$\frac{M}{2\pi} = \int_{\Gamma_0} \frac{e^{Re\mu}}{|\mu|}|d\mu| = \frac{M}{2\pi} = \int_{\gamma_1} \frac{e^{Re\mu}}{|\mu|}|d\mu| + \frac{M}{2\pi} = \int_{\gamma_2} \frac{e^{Re\mu}}{|\mu|}|d\mu| + \frac{M}{2\pi} = \int_{\gamma_3} \frac{e^{Re\mu}}{|\mu|}|d\mu|.$$

Afirmação 3.3. Para cada $i \in \{1,2,3\}$ a integral $\frac{M}{2\pi}\int_{\gamma_i} \frac{e^{Re\mu}}{|\mu|}|d\mu|$ é finita.
De fato, comecemos verificando os casos em que $i \in \{1,3\}$.
Considere $\mu \in \gamma_1$. Temos que $\mu = x + iy$ com $arg(\mu) = \psi$ e

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\phi) \\ y = \rho\,\text{sen}(\phi). \end{cases}$$

Se chamarmos $\varphi(\rho) = \rho cos(\phi)$ e $\upsilon(\rho) = \rho\,\text{sen}(\phi)$ temos $\varphi'(\rho) = cos(\phi)$ e $\upsilon(\rho) = \text{sen}(\phi)$. Lembrando que

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt \quad ,$$

onde $z(t) = u(t) + iv(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$. Defina $f(\mu) = \dfrac{e^{Re\mu}}{|\mu|}$, e então

$$\frac{M}{2\pi}\int_{\gamma_1}\frac{e^{Re\mu}}{|\mu|}|d\mu| = \frac{M}{2\pi}\int_{r}^{\infty}\frac{e^{\rho cos(\psi)}}{\rho}d\rho \ < \infty$$

a conclusão acima segue da fórmula integral de Cauchy.
De forma análoga, obtemos

$$\frac{M}{2\pi}\int_{\gamma_3}\frac{e^{Re\mu}}{|\mu|}|d\mu| = \frac{M}{2\pi}\int_{-\infty}^{-r}\frac{e^{\alpha cos(\psi)}}{\alpha}d\alpha \ < \infty.$$

Agora, para $i = 2$, vamos considerar $\mu \in \gamma_2$ com $\mu = x + iy$ de modo que

$$\begin{cases} x = r\cos(\beta) \\ y = r\,\mathrm{sen}(\beta) \end{cases}$$

e assim, $d\mu = (-r\,\mathrm{sen}(\beta) + rcos(\beta))d\beta$. Logo,

$$\frac{M}{2\pi}\int_{-r}^{r}e^{rcos(\beta)}r\frac{d\beta}{r} = \frac{M}{2\pi}\int_{-r}^{r}e^{rcos(\beta)}d\beta < \infty.$$

Portanto, concluímos que $\frac{M}{2\pi}\int_{\Gamma_0}\frac{e^{Re\mu}}{|\mu|}|d\mu| = K < \infty$. Como estamos considerando $a = 0$ temos

$$\|T(t)\| \leqslant \frac{M}{2\pi}\int_{\Gamma_0}\frac{e^{Re\mu}}{|\mu|}|d\mu| = Ke^{at},$$

para algum $K > 0$ e para todo $t \in (0, \infty)$.
Agora, verifiquemos $\|AT(t)\|$.
Recordemos que estamos supondo A fechado (pois $-A$ é fechado) e portanto limitado. Desde que $T(t)$ é definido por uma integral, que por sua vez pode ser vista como limite de somas de Riemann, temos que para todo $t > 0$ e $x \in D(A)$

$$AT(t)x = T(t)Ax. \tag{3.6}$$

Assim

$$
\begin{aligned}
AT(t) &= A\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1}d\lambda\right)\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} e^{\lambda t}A(\lambda - A)^{-1}d\lambda\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} e^{\lambda t}(\lambda - \lambda + A)(\lambda - A)^{-1}d\lambda\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} e^{\lambda t}[\lambda(\lambda - A)^{-1} - I]d\lambda\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} e^{\lambda t}\lambda(\lambda - A)^{-1}d\lambda - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} e^{\lambda t}d\lambda,
\end{aligned}
$$

note que a segunda integral é zero e a primeira é limitada. Com efeito, considere $\mu = \lambda t$, então

$$
\begin{aligned}
t\left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} e^{\mu}\frac{\mu}{t}\left(\frac{\mu}{t} - A\right)^{-1}\frac{d\mu}{t}\right\| &\leqslant \frac{t}{2\pi}\int_{\Gamma_0}\left\|e^{\mu}\frac{\mu}{t}\left(\frac{\mu}{t} - A\right)^{-1}\frac{d\mu}{t}\right\|\\
&\leqslant \frac{t}{2\pi}\int_{\Gamma_0}|e^{\mu}|\frac{|\mu|}{t}\frac{M}{\frac{|\mu|}{t}}\frac{|d\mu|}{t}\\
&= \frac{M}{2\pi}\int_{\Gamma_0}|e^{\mu}||d\mu| = Ke^{at} < \infty.
\end{aligned}
$$

Daí, temos

$$t\|AT(t)\| \leqslant Ke^{at}$$

e portanto,

$$\|AT(t)\| \leqslant t^{-1}Ke^{at}.$$

Agora, note que

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}T(t) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0}\lambda e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1}d\lambda\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} e^{\lambda t}\lambda(\lambda - A)^{-1}d\lambda\\
&= AT(t),
\end{aligned}
$$

pois a integral converge uniformemente e o integrando é analítico. Desse modo, concluímos que $\frac{d}{dt}T(t)$ é limitado para todo $t > 0$, ou seja, concluímos (iv).
Vamos agora mostrar (i).

Afirmação 3.4. $\{T(t);\ t \geqslant 0\}$ é um semigrupo fortemente contínuo.
Com efeito, recordemos que por definição, $T(0) = I$. Observe que a aplicação definida

por $s \mapsto T(t-s)T(s)x$ para $0 \leqslant s \leqslant t$ é tal que

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}(T(t-s)T(s)x) &= \frac{d}{ds}T(t-s)(-1)T(s)x + T(t-s)\frac{d}{ds}T(s)x \\ &= -AT(t-s)T(s)x + T(t-s)AT(s)x \\ &\overset{(3.6)}{=} -T(t-s)AT(s)x + T(t-s)AT(s)x \\ &= 0.\end{aligned}$$

Além disso, esta aplicação é contínua para $0 \leqslant s \leqslant t$, logo é constante. Desse modo, temos

$$T(t-s)T(s) = T(t)$$

e assim, vemos que $\{T(t);\ t \geqslant 0\}$ é um semigrupo. Agora, para $x \in D(A)$ e $t > 0$ temos

$$\begin{aligned}T(t)x &= \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\Gamma_0} e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1}d\lambda\right)x \\ &= \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\Gamma_0} e^{\lambda t}(I - \lambda^{-1}A + \lambda^{-1}A)(\lambda - A)^{-1}d\lambda\right)x \\ &= \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\Gamma_0} e^{\lambda t}(\lambda^{-1}(\lambda - A) + \lambda^{-1}A)(\lambda - A)^{-1}d\lambda\right)x \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} e^{\lambda t}[\lambda^{-1} + \lambda^{-1}A(\lambda - A)^{-1}]xd\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda}xd\lambda + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} e^{\lambda t}\lambda^{-1}A(\lambda - A)^{-1}xd\lambda \\ &= x + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} e^{\lambda t}\lambda^{-1}A(\lambda - A)^{-1}xd\lambda\end{aligned}$$

logo,

$$T(t)x - x = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} e^{\lambda t}\lambda^{-1}A(\lambda - A)^{-1}xd\lambda.$$

Logo, considerando $\mu = \lambda t$, temos

$$\begin{aligned}\|T(t)x - x\| &= \left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} e^{\mu}\frac{t}{\mu}A\left(\frac{\mu}{t} - A\right)^{-1}x\frac{d\mu}{t}\right\| \\ &\leqslant \frac{t}{2\pi}\int_{\Gamma_0} |e^{\mu}\mu^{-1}|\left\|\left(\frac{\mu}{t} - A\right)^{-1}\right\|\|Ax\|\frac{|d\mu|}{t} \\ &\leqslant \frac{t}{2\pi}\int_{\Gamma_0} |e^{\mu}|\frac{M}{\frac{|\mu|}{t}}\|Ax\|\frac{|d\mu|}{t} \\ &= \frac{tM\|Ax\|}{2\pi}\int_{\Gamma_0} |e^{\mu}|\frac{|d\mu|}{|\mu|^2}\end{aligned}$$

e quando $t \to 0^+$ temos $\|T(t)x - x\| \to 0$ pois o primeiro termo do produto vai a zero e o segundo é limitado. Portanto, concluímos que $\{T(t);\ t \geqslant 0\}$ é um semigrupo fortemente contínuo.

Finalmente, vamos mostrar que A é, de fato, o gerador infinitesimal do semigrupo $\{T(t);\ t \geqslant 0\} \subset \mathcal{L}(E)$.

Note que

$$\int_0^t T(s)Axds = \int_0^t AT(s)xds = \int_0^t \frac{d}{ds}T(s)xds.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo temos

$$\int_0^t T(s)Axds = T(t)x - x \quad x \in D(A),\ t > 0.$$

Então,

$$\frac{T(t)x - x}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t T(s)Axds \to Ax$$

quando $t \to 0^+$.

Para concluir a prova, considere B um gerador infinitesimal de $\{T(t);\ t \geqslant 0\}$, então pelo Teorema de Hille-Yosida, $1 \in \rho(B)$, e pelo que já vimos $1 \in \rho(A)$, desse modo

$$E = (I - A)D(A) = (I - B)D(A),$$

mas

$$(I - B)D(A) = E = (I - B)D(B),$$

logo

$$D(A) = R((I - B)^{-1}) = D(B)$$

e portanto $A = B$, isto é, A é gerador infinitesimal de $\{T(t); t \geqslant 0\}$.

Por fim, vamos mostrar que a aplicação $t \to T(t)$ se estende a uma função analítica no setor $\{t \in \mathbb{C}\ ;\ |arg(t)| < \phi - \frac{\pi}{2}\}$.

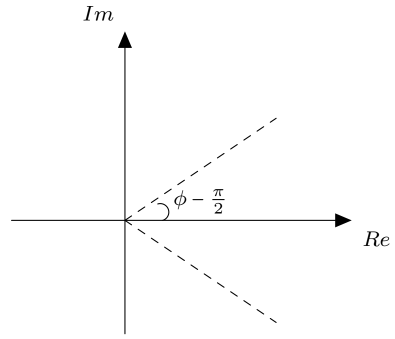

Figura 3.5: Setor complexo $\Sigma_{\phi-\frac{\pi}{2}}$.

Para $t \in \Sigma_{\phi-\frac{\pi}{2}} \setminus \{0\}$, considere

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1} d\lambda.$$

Desde que o integrando é uma função contínua e analítica em $t \in \mathbb{C}$, a integral

$$T_n(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{0,n}} e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1} d\lambda,$$

onde $\Gamma_{0,n} = \Gamma_0 \cap \{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| \leqslant n, n \in \mathbb{N}\}$, está bem definida e determina uma função analítica complexa T_n com valores em $\mathcal{L}(E)$. Vamos mostrar que esta integral existe e converge quase uniformemente em $\Sigma_{\phi-\frac{\pi}{2}} \setminus \{0\}$. Para isso, vamos provar que para todo compacto $K \subset \Sigma_{\phi-\frac{\pi}{2}} \setminus \{0\}$ e para todo $\epsilon > 0$, existe $n > m \geqslant n_0$ tal que

$$\|T_n(t) - T_m(t)\| < \epsilon, \quad \forall\ t \in K.$$

Fixe arbitrariamente um conjunto compacto $K \subset \Sigma_{\phi-\frac{\pi}{2}} \setminus \{0\}$. Então, existe d_1 e ϕ' tais que $\forall\ t \in K$ tem-se $0 < d_1 \leqslant |t|$ e $-\phi + \frac{\pi}{2} < -\phi' \leqslant arg(t) \leqslant \phi' < \phi - \frac{\pi}{2}$. Logo, para todo $t \in K$, temos

$$\frac{-3\pi}{2} < -2\phi + \frac{\pi}{2} < -\phi - \phi' \leqslant -\phi + arg(t) \leqslant -\phi + \phi' < -\frac{\pi}{2}. \tag{3.7}$$

Além disso, fixe $\epsilon > 0$ e seja $n_0 \in \mathbb{N}$ satisfazendo

$$0 < -\frac{M}{\pi n_0 \xi_1 d_1} e^{n_0 \xi_1 d_1} < \epsilon, \tag{3.8}$$

onde $\xi_1 = \cos(\phi) < 0$.

Note que, para todo $n \in \mathbb{N}$ podemos dividir o contorno $\Gamma_{0,n}$ nas curvas:

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{n,1} &= \{\rho e^{i\phi};\ n \geqslant \rho \geqslant r\}\\
\Gamma_{n,2} &= \{n e^{i\theta};\ -\phi \leqslant \theta \leqslant \phi\}\\
\Gamma_{n,3} &= \{-\rho e^{-i\phi};\ -n \leqslant -\rho \leqslant -r\}\\
\Gamma_{n,4} &= \{r e^{i\theta};\ -\phi \leqslant \theta \leqslant \phi\},
\end{aligned}
$$

e, $\Gamma_{0,m}$ nas curvas:

$$
\begin{aligned}
\gamma_1 &= \{\rho e^{i\phi};\ m \geqslant \rho \geqslant r\}\\
\gamma_2 &= \{m e^{i\theta};\ -\phi \leqslant \theta \leqslant \phi\}\\
\gamma_3 &= \{-\rho e^{-i\phi};\ -m \leqslant -\rho \leqslant -r\}\\
\gamma_4 &= \{r e^{i\theta};\ -\phi \leqslant \theta \leqslant \phi\}.
\end{aligned}
$$

Seja $\lambda \in \Gamma_{n,1}$, então

$$\lambda = x + iy$$

com $arg(\lambda) = \phi$ e temos $x = \rho cos\phi$ e $y = \rho\,\mathrm{sen}(\phi)$. Assim,

$$\lambda = \rho cos\phi + i\rho\,\mathrm{sen}(\phi) = \rho e^{i\phi} \quad \text{e} \quad d\lambda = e^{i\theta} d\theta.$$

Prosseguindo de modo análogo, obtemos a igualdade

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{0,n}} e^{\lambda t}(\lambda I - A)^{-1} d\lambda - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{0,m}} e^{\lambda t}(\lambda I - A)^{-1} d\lambda\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_r^n e^{\rho t e^{i\phi}}(\rho e^{i\phi} I - A)^{-1} e^{i\phi} d\rho\\
&+ \frac{1}{2\pi i}\int_{-\phi}^{\phi} e^{n t e^{i\theta}}(n e^{i\theta} - A)^{-1} n(-\mathrm{sen}(\theta) + i\cos(\theta)) d\theta\\
&+ \frac{1}{2\pi i}\int_{-n}^{-r} e^{-\rho t e^{-i\phi}}(-\rho e^{-i\phi} - A)^{-1}(-e^{-i\phi}) d\rho\\
&+ \frac{1}{2\pi i}\int_{-\phi}^{\phi} e^{r t e^{i\phi}}(r e^{i\phi} - A)^{-1}(e^{i\phi}) dr\\
&- \frac{1}{2\pi i}\int_r^m e^{\rho t e^{i\phi}}(\rho e^{i\phi} - A)^{-1} e^{i\phi} d\rho\\
&- \frac{1}{2\pi i}\int_{-\phi}^{\phi} e^{m t e^{i\theta}}(m e^{i\theta} - A)^{-1} m(-\mathrm{sen}(\theta) + i\cos(\theta)) d\theta\\
&- \frac{1}{2\pi i}\int_{-m}^{-r} e^{-\rho t e^{-i\phi}}(-\rho e^{-i\phi} - A)^{-1}(-e^{-i\phi}) d\rho\\
&- \frac{1}{2\pi i}\int_{-\phi}^{\phi} e^{r t e^{i\theta}}(r e^{i\theta} - A)^{-1}(e^{i\theta}) dr.
\end{aligned}
$$

Daí,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{0,n}} e^{\lambda t}(\lambda I - A)^{-1}d\lambda - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{0,m}} e^{\lambda t}(\lambda I - A)^{-1}d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_m^n e^{\rho t e^{i\phi}}(\rho e^{i\phi}I - A)^{-1}e^{i\phi}d\rho \\
&+ \frac{1}{2\pi i}\int_{-\phi}^{\phi} e^{nte^{i\theta}}(ne^{i\theta} - A)^{-1}n(-\operatorname{sen}(\theta) + i\cos(\theta))d\theta \\
&+ \frac{1}{2\pi i}\int_{-n}^{-m} e^{-\rho t e^{-i\phi}}(-\rho e^{i\phi}I - A)^{-1}(-e^{-i\phi})d\rho \\
&- \int_{-\phi}^{\phi} e^{mte^{i\theta}}(me^{i\theta} - A)^{-1}m(-\operatorname{sen}(\theta) + i\cos(\theta))d\theta.
\end{aligned}
$$

E assim

$$
\begin{aligned}
T_n(t) - T_m(t) &= \frac{1}{2\pi i}\int_m^n e^{\rho t e^{i\phi}}(\rho e^{i\phi}I - A)^{-1}e^{i\phi}d\rho \\
&+ \frac{1}{2\pi i}\int_{-n}^{n} e^{nte^{i\theta}}(ne^{i\theta} - A)^{-1}n(-\operatorname{sen}(\theta) + i\cos(\theta))d\theta \\
&+ \frac{1}{2\pi i}\int_{-n}^{-m} e^{-\rho t e^{-i\phi}}(-\rho e^{i\phi}I - A)^{-1}(-e^{-i\phi})d\rho \\
&- \int_{-m}^{m} e^{mte^{i\theta}}(me^{i\theta} - A)^{-1}m(-\operatorname{sen}(\theta) + i\cos(\theta))d\theta.
\end{aligned}
$$

Visto isso, obtemos para $n > m \geqslant \rho \geqslant n_0$ e $t \in K$:

$$
\begin{aligned}
&\|T_n(t) - T_m(t)\| \\
&\leqslant \left\| \frac{1}{2\pi i}\int_m^n e^{\rho t e^{i\phi}}(\rho e^{i\phi} - A)^{-1}e^{i\phi}d\rho + \frac{1}{2\pi i}\int_{-n}^{-m} e^{-\rho t e^{-i\phi}}(-\rho e^{-i\phi} - A)^{-1}(-e^{-i\phi})d\rho \right\| \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_m^n |e^{\rho t e^{i\phi}}|\|(\rho e^{i\phi} - A)^{-1}\||e^{i\phi}|d\rho + \frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{-m} |e^{-\rho t e^{-i\phi}}|\|(-\rho e^{-i\phi} - A)^{-1}\||-e^{-i\phi}|d\rho \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_m^n |e^{\rho t e^{i\phi}}|\frac{M}{|\rho e^{i\phi}|}|e^{i\phi}|d\rho + \int_{-n}^{-m} |e^{-\rho t e^{-i\phi}}|\frac{M}{|-\rho e^{-i\phi}|}|-e^{i\phi}|d\rho \\
&= \frac{M}{2\pi}\int_m^n \frac{|e^{\rho t e^{i\phi}}|}{|\rho|}d\rho + \frac{M}{2\pi}\int_{-n}^{-m} \frac{|e^{-\rho t e^{-i\phi}}|}{|-\rho|}d\rho \\
&\leqslant \frac{M}{2\pi}\int_m^n \frac{e^{Re(\rho t)\cos(\phi)}}{|\rho|}d\rho + \frac{M}{2\pi}\int_{-n}^{-m} \frac{e^{Re(-\rho t)\cos(-\phi)}}{|-\rho|}d\rho.
\end{aligned}
$$

Daí, temos:

$$
\begin{aligned}
\|T_n(t) - T_m(t)\| &\leqslant \frac{M}{2\pi}\int_m^n \frac{e^{\rho|t|\cos(\phi)}}{\rho}d\rho + \frac{M}{2\pi}\int_m^n \frac{e^{\rho|t|\cos(\phi)}}{\rho}d\rho \\
&= \frac{M}{\pi}\int_m^n \frac{e^{\rho|t|\cos(\phi)}}{\rho}d\rho \\
&\leqslant \frac{M}{\pi n_0}\int_m^n e^{\rho d_1\cos(\phi)}d\rho \\
&= \frac{M}{\pi n_0 \xi_1 d_1}(e^{nd_1\xi_1} - e^{md_1\xi_1}) \\
&< -\frac{M}{\pi n_0 \xi_1 d_1}e^{n_0 d_1 \xi_1} \\
&< \epsilon.
\end{aligned}
$$

Segue que os elementos da sequência $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ são funções analíticas e a sequência converge quase uniformemente em $\Sigma_{\phi-\frac{\pi}{2}} \setminus \{0\}$. Portanto, a função $t \mapsto T(t)$ é analítica em $\Sigma_{\phi-\frac{\pi}{2}} \setminus \{0\}$. □

Vale salientar que a recíproca do teorema acima é verdadeira, isto é, se $-A$ é gerador infinitesimal de um semigrupo analítico de operadores lineares limitados, então A é setorial, como mostra o teorema abaixo.

Teorema 3.8. *Sejam E um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $A : D(A) \subset E \to E$ um operador linear tal que $-A$ gera um semigrupo analítico, então A é setorial. Além disso, se A gera um semigrupo $\{T(t);\ t \geqslant 0\}$ que é analítico em $\Sigma_{0,\phi} = \{\lambda \in \mathbb{C};\ |arg(\lambda)| < \phi\}$ com $0 < \phi \leqslant \frac{\pi}{2}$ e para algum $C \geqslant 1$, $a \in \mathbb{R}$, a estimativa*

$$\|T(\lambda)\| \leqslant Ce^{-aRe\lambda}$$

vale, para $\lambda \in \Sigma_{0,\phi}$. Então, para todo $0 < \epsilon < \phi$, o operador $-A$ é setorial do tipo $(a, \frac{\pi}{2} - \phi + \epsilon, M_\epsilon)$ com algum $M_\epsilon \geqslant 1$.

Demonstração. Suponha que A gera um semigrupo analítico $\{T(t);\ t \geqslant 0\}$ em $\Sigma_{0,\phi}$ e assuma que para algum $C \geqslant 1$ e $a \in \mathbb{R}$, temos

$$\|T(\lambda)\| \leqslant Ce^{-a\mathrm{Re}\lambda}, \quad \lambda \in \Sigma_{0,\phi}.$$

Defina

$$A_1 = aI + A.$$

Afirmação 3.5. A_1 é gerador infinitesimal de um semigrupo analítico, à saber

$\{S_1(t) = e^{at}T(t);\ t \geqslant 0\}$ em $\Sigma_{0,\phi}$. De fato, já sabemos que A_1 gera um C_0-semigrupo, à saber, $\{S_1(t) = e^{at}T(t);\ t \geqslant 0\}$. Além disso, note que a aplicação

$$\{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda \in \Sigma_{0,\phi}\} \ni \lambda \mapsto T(\lambda) \in \mathcal{L}(E)$$

é analítica.
Observe que

$$\text{para } \lambda \in \Sigma_{0,\phi}, \quad \|S_1(\lambda)\| = \|e^{at}T(\lambda)\| = e^{a\mathrm{Re}\lambda}\|T(\lambda)\| \leqslant C.$$

Fixe $|\theta| < \phi$ e defina $S(t) = S_1(e^{i\theta}t)$, $t \geqslant 0$. Então, $\{S(t);\ t \geqslant 0\}$ é um C_0-semigrupo uniformemente limitado, pela observação feita acima.

Afirmação 3.6. $e^{i\theta}A_1$ é o gerador infinitesimal de $\{S(t);\ t \geqslant 0\}$. Com efeito, seja B o gerador infinitesimal de $\{S(t);\ t \geqslant 0\}$. Fixe $x \in D(B)$ e defina $f(\lambda) = S_1(\lambda)x$, $\lambda \in \Sigma_{0,\phi}$. Para $s > 0$, temos

$$\begin{aligned} S(s)Bx &= \lim_{t\to 0^+} S(s)\frac{S(t)x - x}{t} \\ &= \lim_{t\to 0^+} \frac{S_1(e^{i\theta}s)S_1(e^{i\theta}t)x - S_1(e^{i\theta}s)x}{t} \\ &= \lim_{t\to 0^+} \frac{S_1(e^{i\theta}s + e^{i\theta}t)x - S_1(e^{i\theta}s)x}{t} \\ &= \lim_{t\to 0^+} \frac{f(e^{i\theta}s + e^{i\theta}t) - f(e^{i\theta}s)}{t} \\ &= e^{i\theta}f'(e^{i\theta}s). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} S(s)Bx &= \lim_{t\to 0^+} \frac{f(e^{i\theta}s + t) - f(e^{i\theta}s)}{t} \\ &= e^{i\theta}\lim_{t\to 0^+} \frac{S_1(e^{i\theta}s)S_1(t)x - S_1(e^{i\theta}s)x}{t} \\ &= e^{i\theta}\lim_{t\to 0^+} \frac{S_1(t)S(s)x - S(s)x}{t}. \end{aligned}$$

Com isso, vemos que $S(s)x \in D(A_1)$ e $S(s)Bx = e^{i\theta}A_1S(s)x$, $s > 0$. Pelo Teorema de Hille-Yosida, temos que A_1 é fechado, e

$$S(s)x \to x, \quad A_1S(s)x \to e^{-i\theta}Bx, \text{ quando } t \to 0^+,$$

daí, temos $x \in D(A_1)$ e $A_1 x = e^{-i\theta} Bx$. Portanto, $D(B) \subset D(A_1)$ e

$$Bx = e^{i\theta} A_1 x.$$

Para a inclusão contrária, tome $x \in D(A_1)$ e defina $g(\lambda) = S_1(\lambda)x$, com $\lambda \in \Sigma_{0,\phi}$. Para $s > 0$, temos

$$\begin{aligned} S(s)A_1 x &= \lim_{t\to 0^+} S(s)\frac{S_1(t)x - x}{t} \\ &= \lim_{t\to 0^+} \frac{g(t + e^{i\theta}s)}{t} \\ &= g'(e^{i\theta}s) \\ &= e^{-i\theta} \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)S(s)x - S(s)x}{t}. \end{aligned}$$

Logo, $S(s)x \in D(B)$ e $BS(s)x = e^{i\theta} S(s)A_1 x,\ s > 0$. Desde que B é fechado e

$$S(s)x \to x, \qquad BS(s)x \to e^{i\theta} A_1 x, \quad \text{quando } t \to 0^+,$$

temos que $x \in D(B)$ e $Bx = e^{i\theta} A_1 x$. Portanto, $D(A_1) \subset D(B)$ e

$$Bx = e^{i\theta} A_1 x$$

para $x \in D(A_1)$. Combinando estes últimos resultados, concluímos que $D(A_1) = D(B)$ e $B = e^{i\theta} A_1$.

Desde que $\{S(t);\ t \geqslant 0\}$ é um C_0-semigrupo uniformemente limitado por $C \geqslant 1$, pelo Teorema de Hille-Yosida, temos $\{\lambda \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}\lambda > 0\} \subset \rho(B)$ e

$$\|(\lambda I - B)^{-1}\| \leqslant \frac{C}{\lambda} \quad \text{para } \lambda \in \mathbb{C} \text{ com } \mathrm{Re}\lambda > 0.$$

Observe que

$$\lambda I - A_1 = \lambda I - e^{-i\theta} B = e^{-i\theta}(\lambda e^{i\theta} - B).$$

Daí, $\lambda \in \rho(A_1)$ se, e somente se, $\lambda e^{i\theta} \in \rho(B)$ e $(\lambda I - A_1)^{-1} = e^{i\theta}(\lambda e^{i\theta} - B)^{-1}$.

Para todo $|\theta| < \phi$, tome $\{\lambda \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(\lambda e^{i\theta}) > 0\} \subset \rho(A_1)$ e

$$\|(\lambda I - A_1)^{-1}\| \leqslant \frac{C}{\mathrm{Re}(\lambda e^{i\theta})}, \tag{3.9}$$

para $\lambda \in \mathbb{C}$ com $\mathrm{Re}(\lambda e^{i\theta}) > 0$. Daí, vemos que

$$\{\lambda \in \mathbb{C};\ |arg\lambda| < \frac{\pi}{2} + \phi,\ \lambda \neq 0\} \subset \rho(A_1).$$

Fixe $0 < \epsilon < \phi$ e considere $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|arg\lambda| \leqslant \frac{\pi}{2} + \phi - \epsilon$ e $\lambda \neq 0$.
Se $0 \leqslant arg\lambda \leqslant \frac{\pi}{2} = \phi - \epsilon$, então substituímos $\theta = \frac{\epsilon}{2} - \phi$ em (3.9) e obtemos

$$\|(\lambda I - A_1)^{-1}\| \leqslant \frac{C}{\mathrm{Re}(\lambda e^{i\theta})} = \frac{C}{\mathrm{Re}(\lambda e^{i\theta})} = \frac{C}{|\lambda| \cos(arg\lambda + \theta)} \leqslant \frac{C}{|\lambda| \operatorname{sen}\left(\frac{\epsilon}{2}\right)}. \tag{3.10}$$

Observe que

$$\begin{aligned}
&\cos(arg\lambda + \theta)\\
&= \cos(arg\lambda)\cos\left(\frac{\epsilon}{2} - \phi\right) - \operatorname{sen}(arg\lambda)\operatorname{sen}\left(\frac{\epsilon}{2} - \phi\right)\\
&= \cos(arg\lambda)[\cos\left(\frac{\epsilon}{2}\right)\cos(\phi) + \operatorname{sen}\left(\frac{\epsilon}{2}\right)\operatorname{sen}(\phi)] -\\
&- \operatorname{sen}(arg\lambda)\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\epsilon}{2}\right)\cos(\phi) - \operatorname{sen}(\phi)\cos\left(\frac{\epsilon}{2}\right)\right]\\
&= \operatorname{sen}\left(\frac{\epsilon}{2}\right)[\cos(arg\lambda)\operatorname{sen}(\phi) - \operatorname{sen}(arg\lambda)\cos(\phi)] +\\
&+ \cos\left(\frac{\epsilon}{2}\right)[\cos(arg\lambda)\cos(\phi) + \operatorname{sen}(arg\lambda)\operatorname{sen}(\phi)].
\end{aligned}$$

Pelas determinações de ϵ, ϕ e $arg\lambda$, e fazendo uma análise das parcelas da soma acima, obtemos que

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\frac{\epsilon}{2} &\leqslant \operatorname{sen}\frac{\epsilon}{2}[\cos(arg\lambda)\operatorname{sen}(\phi) - \operatorname{sen}(arg\lambda)\cos(\phi)]\\
&\leqslant \operatorname{sen}\frac{\epsilon}{2}[\cos(arg\lambda)\operatorname{sen}(\phi) - \operatorname{sen}(arg\lambda)\cos(\phi)] +\\
&+ \cos\left(\frac{\epsilon}{2}\right)[\cos(arg\lambda)\cos(\phi) + \operatorname{sen}(arg\lambda)\operatorname{sen}(\phi)].
\end{aligned}$$

Analogamente, se $-\frac{\pi}{2} - \phi + \epsilon \leqslant arg\lambda < 0$, então, substituímos $\theta = \phi - \frac{\epsilon}{2}$ e também conseguimos (3.10). Com isso, concluímos que para todo $0 < \epsilon < \phi$

$$\Sigma_{0,\frac{\pi}{2}-\phi+\epsilon} = \{\lambda \in \mathbb{C};\ \frac{\pi}{2} - \phi + \epsilon \leqslant |arg\lambda| \leqslant \pi,\ \lambda \neq 0\} \subset \rho(-A_1)$$

e para $\lambda \in \Sigma_{0,\frac{\pi}{2}-\phi+\epsilon}$,

$$\|(\lambda I + A_1)^{-1}\| \leqslant \frac{C}{|\lambda| \operatorname{sen}\left(\frac{\epsilon}{2}\right)}.$$

Portanto, o operador $-A_1$ é setorial do tipo $(0, \frac{\pi}{2} - \phi + \epsilon, M_\epsilon)$, onde $M_\epsilon = C(\text{sen}\left(\frac{\epsilon}{2}\right)^{-1} \geqslant 1$. Pelo Teorema 3.3, segue que $-A$ é setorial do tipo $(a, \frac{\pi}{2} - \phi + \epsilon, M_\epsilon)$. □

Exemplo 3.1. Seja E um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$ e seja $A : D(A) \subset E \to E$ um operador linear. Defina em $Y = E \times E$ o operador $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A & A \\ 0 & A \end{bmatrix} : D(\mathcal{A}) \subset Y \to Y$, onde $D(\mathcal{A}) = D(A) \times D(A)$. Então, são equivalentes as seguintes afirmações:

(i) A é gerador infinitesimal de um semigrupo analítico em E.

(ii) $\mathcal{A}$ é gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo em Y.

(iii) $-\mathcal{A}$ é gerador infinitesimal de um semigrupo analítico em Y.

Observe que (i) implica (ii). De fato, seja $\{T(t); t \geqslant 0\}$ o semigrupo analítico gerado por A. Afirmamos que $\{\mathcal{T}(t); t \geqslant 0\}$ onde

$$\mathcal{T}(t) = \begin{bmatrix} T(t) & tAT(t) \\ 0 & T(t) \end{bmatrix}$$

é um semigrupo fortemente contínuo com gerador infinitesimal $\mathcal{A}$.
Note que

$$\mathcal{T}(0) = \begin{bmatrix} T(0) & 0AT(0) \\ 0T(0) & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = [I].$$

Sejam $t, s \geqslant 0$, então

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(t) &= \begin{bmatrix} T(t+s) & (t+s)AT(t+s) \\ 0 & T(t+s) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} T(t)T(s) & tAT(t)T(s) \\ 0 & T(t)T(s) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} T(t) & tAT(t) \\ 0 & T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) & sAT(s) \\ 0 & T(s) \end{bmatrix} \\ &= \mathcal{T}(t)\mathcal{T}(s). \end{aligned}$$

Por fim, veja que

$$\|\mathcal{T}(t)x - x\| = \left\| \begin{bmatrix} T(t)x & tAT(t)x \\ 0 & T(t)x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} T(t)x - x & tAT(t)x \\ 0 & T(t)x - x \end{bmatrix} \right\|$$

calculando o limite de cada termo quando $t \to 0^+$ obtemos que $\|\mathcal{T}(t)x - x\| \to 0$. Agora, seja $\mathcal{B}$ o gerador infinitesimal de $\{\mathcal{T}(t); t \geqslant 0\}$, então existe o limite e vale a igualdade

$$\mathcal{B}x = \lim_{t\to 0^+} \frac{\mathcal{T}(t)x - x}{t}$$

mas

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0^+}\left(\begin{bmatrix} \dfrac{T(t)x - x}{t} & AT(t)x \\ 0 & \dfrac{T(t)x - x}{t} \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} \lim_{t\to 0^+} \dfrac{T(t)x - x}{t} & \lim_{t\to 0^+} AT(t)x \\ 0 & \lim_{t\to 0^+} \dfrac{T(t)x - x}{t} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} Ax & Ax \\ 0 & A \end{bmatrix} \\
&= \mathcal{A}x.
\end{aligned}$$

Pelas igualdades acima, temos $x \in D(\mathcal{B})$ se, e somente se $x \in D(\mathcal{A})$ e $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.
Agora, vamos mostrar que (ii) implica (iii).
Note que, desde que $\mathcal{A}$ é gerador de um semigurpo fortemente contínuo, temos que $\mathcal{A}$ é fechado e densamente definido e existem $M \geqslant 1$ e $\beta > 0$ da dominação do semigrupo, tais que $\|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| \leqslant \dfrac{M}{|\lambda - \beta|}$ para todo $\lambda \in \{\lambda \in \mathbb{C}; Re\lambda > \beta\}$. Logo, pelo Teorema 3.3 concluímos que $\mathcal{A}$ é setorial e portanto, é gerador infinitesimal de um semigrupo analítico. É claro que se (iii) é válida, conseguimos facilmente concluir, graças ao Teorema 3.3, que A é gerador infinitesimal de um semigrupo analítico.

Proposição 3.9. Seja E um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$ e seja $A : D(A) \subset E \to E$ um operador linear que é gerador infinitesimal de um semigrupo analítico em Σ_θ onde $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$. Se, além disso temos que $-A$ é gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo, então A é um operador limitado.

Demonstração. Considere $\{e^{tA};\ t \geqslant 0\}$ o semigrupo analítico gerado por A. Então, para cada $t \geqslant 0$ o operador Ae^{tA} é limitado pelo item (c) do Teorema 3.7. Desde que $-A$ gera um semigrupo fortemente contínuo, são limitados os operadores e^{-tA} para todo $t \geqslant 0$. Por outro lado, temos

$$A = (Ae^{tA})(e^{-tA}).$$

E desde que a composição de operadores lineares limitados é um operador limitado, segue o resultado. □

Corolário 3.10. Seja E um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$ e seja

$A : D(A) \subset E \to E$ um operador linear setorial tal que $-A$ também é setorial, então A é limitado.

Demonstração. Pelo Teorema 3.7 segue que A e $-A$ geram semigrupos analíticos, que em particular são semigrupos fortemente contínuos. Logo, basta utilizarmos a Proposição 3.9 para concluir o resultado. □

Corolário 3.11. Seja E um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$ e seja $A : D(A) \subset E \to E$ o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico num setor Σ_θ, para algum $\theta > 0$. Então, o problema de Cauchy

$$u'(t) = Au(t) \quad (-\infty < t \leqslant 0),\ u(0) = f \tag{3.11}$$

está bem posto se, e somente se A é limitado.

Demonstração. Note que segue da Proposição 3.9. □

Observe que a equação

$$u''(t) = Au(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad u(0) = f_1, \quad u'(0) = f_2, \tag{3.12}$$

onde A é um operador linear fechado e ilimitado em X é formalmente equivalente à

$$U'(t) = MU(t), \quad t \in \mathbb{R},\ U(0) = F, \tag{3.13}$$

onde $U(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{bmatrix}$, $M = \begin{bmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{bmatrix}$, $F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$.
Suponha por um momento que $A = G^2 + H$, onde G gera um grupo em $\mathcal{L}(E)$ e H é um operador fechado com $D(G) \subset D(H)$.Denotemos $Y = W \times E$ e $W = D(G)$ um espaço de Banach munido com a norma do gráfico. Trabalharemos no espaço $W \times E$ ao invés de $E \times E$. Com isto em mente, suponha que existe um operador G em E tal que G é fechado, densamente definido e $D(G^2) = D(A)$. Note que se A gera um semigrupo, tal G existe necessariamente. De fato, podemos tomar $G = (A - kI)^{\frac{1}{2}}$, onde k é escolhido de modo que $(A - kI)$ gera um semigrupo unifortemente limitado em $\mathcal{L}(E)$. Defina $V = D(A)$ e $W = D(G)$. Então, resolver (3.12) em E com $f_1 \in V$ e $f_2 \in W$ é equivalente a resolver (3.13) em $Y = W \times E$ com $F \in V \times W$. A norma em Y será denotada por $|\cdot|$, por exemplo, pode ser tomada como sendo:

$$\left| \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \right| = \|Gf_1\| + \|f_1\| + \|f_2\|.$$

Para mais detalhes, ver [15]. Com isso, enunciamos o seguinte teorema:

Teorema 3.12. *Suponha que (3.13) (ou equivalentemente (3.14)) é bem posta, no sentido de que M com domínio $D(M) = V \times W$ é o gerador infinitesimal de um grupo em $\mathcal{L}(Y)$. Então, (3.11) é bem posto no sentido de que A é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico em um setor $\Sigma_{\frac{\pi}{2}}$.*

Demonstração. Ver [15]. □

O seguinte resultado é uma consequência imediata do Corolário 3.11 e do Teorema 3.12.

Corolário 3.13. Se o problema de Cauchy

$$u''(t) = Au(t), \quad (-\infty < t < \infty), \; u(0) = f, \; u'(0) = g \tag{3.14}$$

está bem posto, então o problema de Cauchy (3.11) está bem posto se, e somente se, A é limitado.

O próximo resultado garante que se A é gerador infinitesimal de um semigrupo analítico do lado direito do plano complexo, então $-A^2$ também é. Segue daí e do Teorema 3.12 que $(-1)^n A^{2n}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico no lado direito do plano complexo se (3.14) está bem posto.

Proposição 3.14. Sejam E um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $A : D(A) \subset E \to E$ o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico em Σ_θ, onde $\theta > \dfrac{\pi}{4}$. Então $-A^2$ é gerador infinitesimal de um semigrupo analítico em $\Sigma_{2\theta-\frac{\pi}{2}}$.

Demonstração. Fixe $\epsilon > 0$ arbitrariamente. Desde que A gera semigrupo analítico, existem constantes C_ϵ, M_ϵ, tais que

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leqslant \frac{M_\epsilon}{|\lambda|}$$

para $|\lambda| \geqslant C_\epsilon$, e $\lambda \in \Sigma_{\theta-\epsilon+\frac{\pi}{2}}$. Para $\lambda \notin (-\infty, 0]$, seja $\mu = \sqrt{\lambda}$ com $\mathrm{Re}\lambda > 0$. Então,

$$\begin{aligned}
\|(\lambda I - A)^{-1}\| &= \|[(-i\mu - A)(i\mu - A)]^{-1}\| \\
&= \|(i\mu - A)^{-1}(-i\mu - A)^{-1}\| \\
&= \|(i\mu - A)^{-1}\| \|(-i\mu - A)^{-1}\|,
\end{aligned}$$

logo,

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leqslant \frac{M_\epsilon^2}{|\lambda|^2} \leqslant \frac{M_\epsilon^2}{|\lambda|},$$

onde $\pm i\mu \in \Sigma_{\theta-\epsilon+\frac{\pi}{2}}$ e $|\mu| \geqslant C_\epsilon$, isto é, $\lambda \in \Sigma_{2\theta-2\epsilon}$ e $|\lambda| \geqslant C_\epsilon^2$. Logo, pelo Teorema 3.3, $-A^2$ é gerador de um semigrupo analítico em $\Sigma_{2\theta-\frac{\pi}{2}}$. $\square$

Capítulo 4

Potências fracionárias de operadores lineares

Neste capítulo, vamos inicialmente estudar e apresentar a construção das potências fracionárias de operadores lineares definidos num espaço de Hilbert, que têm resolvente compacto, espectro não vazio, e que é autoadjunto, satisfazendo uma desigualdade do tipo

$$\langle Au, u \rangle \geqslant \delta \|u\|^2,$$

para algum $\delta > 0$, onde $A : D(A) \subset H \to H$ é um operador linear, e H denota um espaço de Hilbert. Depois, veremos a definição e as principais propriedades das potências fracionárias de operadores lineares do tipo positivo. As principais referências que utilizamos neste capítulo foram [1], [5], [9], [16], e [23].

4.1 Potências fracionárias

Nesta seção, estudaremos as potências fracionárias de um operador linear A, definido em $D(A) \subset H$, sendo H um espaço de Hilbert.
Seja H um espaço de Hilbert sobre um corpo $\mathbb{K}$, e seja $A : D(A) \subset H \to H$ um operador linear. Assuma que A tem resolvente compacto, $\sigma(A) \neq \varnothing$ e que é autoadjunto com

$$\langle Au, u \rangle \geqslant \delta \|u\|^2, \tag{4.1}$$

para algum $\delta > 0$. Neste caso, pelo Teorema 1.13 temos

$$\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\},$$

onde cada λ_j é autovalor de A com multiplicidade finita m_j. Além disso,

$$\lambda_j \|u_j\|^2 = \langle Au_j \; u_j \rangle \geqslant \delta \|u_j\|^2,$$

isto é, $\lambda_j \geqslant \delta$, e podemos assumir sem perda de generalidade que $\lambda_{j+1} > \lambda_j$ para todo $j = 1, 2, \ldots$.

Se M_j é o autoespaço associado a λ_j, então $\dim M_j = m_j$, H pode ser decomposto como soma direta $H = \oplus_{j=1}^{\infty} M_j$ e $M_j \perp M_i$ se $j \neq i$. Se P_j é a projeção ortogonal sobre M_j, isto é, $P_j u = \sum_{i=1}^{m_j} \dfrac{\langle u, e_j^i \rangle}{\|e_j^i\|} e_j^i$, então $AP_j = \lambda_j P_j$ e

$$Au = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j P_j u,$$

para todo $u \in D(A)$.

Teorema 4.1. *Sejam H um espaço de Hilbert sobre o corpo $\mathbb{K}$ e $A : D(A) \subset H \to H$ um operador linear. Assuma que A tem resolvente compacto, $\sigma(A) \neq \varnothing$ é autoadjunto e satisfaz a desigualdade (4.1). Para $m \in \mathbb{N}$, temos $A^m : D(A^m) \subset H \to H$ por*

$$D(A^m) = \left\{ u \in H; \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{2m} \|P_j u\|^2 < \infty \right\}$$

e

$$A^m u = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^m P_j u,$$

para todo $u \in D(A^m)$.

Demonstração. Seja

$$\mathcal{M}_m = \left\{ u \in H; \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{2m} \|P_j u\|^2 < \infty \right\}.$$

Tome $u \in D(A^m)$ $(m \geqslant 2)$, então $u \in D(A)$, $Au \in D(A)$, ..., $A^{m-1}u \in D(A)$, $A^m u \in H$. Desde $\{\frac{1}{\|e_j\|^2} e_j\}$ é uma base ortonormal de H

$$A^m u = \sum_{j=1}^{\infty} P_j A^m u = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{m_j} \frac{(A^m u, e_j^i)}{\|e_j^i\|^2} e_j^i = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{m_j} \frac{(u, A^m e_j^i)}{\|e_j^i\|^2} e_j^i,$$

isto é,

$$A^m u = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^m \sum_{i=1}^{m_j} \frac{(u, e_j^i)}{\|e_j^i\|^2} e_j^i = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^m P_j u.$$

Consequentemente,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{2m} \|P_j u\|^2 < \infty,$$

isto é, $u \in \mathcal{M}_m$. Logo, $D(A^m) \subset \mathcal{M}_m$. Agora, iremos mostrar $\mathcal{M}_m \subset D(A^m)$. Assuma que $\mathcal{M}_m \subset D(A^m)$ para algum $m \geqslant 1$. Seja $u \in H$ tal que $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{2m+2} \|P_j u\|^2 < \infty$, temos

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{2m} \|P_j u\|^2 \leqslant C \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{2m+2} \|P_j u\|^2,$$

pois existe um número finito de λ_j com $0 < \lambda_j < 1$.
Desde que $u \in D(A^m)$, obtemos

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{m+1} P_j u = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j P_j \lambda_j^m u = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j P_j A^m u,$$

e a série $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{m+1} P_j u$ é convergente, e isto implica que $A^m u \in D(A)$; isto é, $u \in D(A^{m+1})$. Portanto, $\mathcal{M}_{m+1} \subset D(A^{m+1})$. $\square$

Definição 4.1. Sejam H um espaço de Hilbert separável sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $A : D(A) \subset H \to H$ um operador linear. Assuma que A tem resolvente compacto, $\sigma(A) \neq \varnothing$, é autoadjunto e que satisfaz a desigualdade (4.1). Definimos $A^0 : D(A^0) \subset H \to H$ por

$$D(A^0) = H$$

e

$$A^0 = I.$$

Definição 4.2. Sejam H um espaço de Hilbert separável sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $A : D(A) \subset H \to H$ um operador linear. Assuma que A tem resolvente compacto, $\sigma(A) \neq \varnothing$, é autoadjunto e que satisfaz a desigualdade (4.1). Para $\alpha \in \mathbb{R}$ definimos $A^\alpha : D(A^\alpha) \subset H \to H$ por

$$D(A^\alpha) = \left\{ u \in H; \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{2\alpha} \|P_j u\|^2 \infty \right\}$$

e

$$A^\alpha u = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{\alpha} P_j u,$$

para todo $u \in D(A^\alpha)$.

Teorema 4.2. *Sejam $\alpha > 0$ e $H^\alpha = D(A^\alpha)$ o espaço equipado com o produto interno $\langle u, v\rangle_{H^\alpha} = \langle A^\alpha u, A^\alpha v\rangle$ cuja norma correspondente é*

$$\|u\|_\alpha = \|A^\alpha u\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{2\alpha} \|P_j u\|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Então, $H^\alpha = D(A^\alpha)$ é um espaço de Hilbert.

Teorema 4.3. *Seja H um espaço de Hilbert separável sobre um corpo $\mathbb{K}$, e seja $A : D(A) \subset H \to H$ um operador linear. Assuma que A tem resolvente compacto, $\sigma(A) \neq \varnothing$, é autoadjunto e que satisfaz a desigualdade (4.1). Então*

(i) Se $\alpha > \beta > 0$ então $H^\alpha \subset H^\beta$;

(ii) Se $\alpha > \beta > 0$ então a identidade de H^α em H^β é contínua;

(iii) Se $1 \geqslant \alpha > \beta > 0$ então H^α é denso em H^β.

Demonstração. Seja $u \in H^\alpha$. Existe um número finito de $\lambda_j \leqslant 1$, e isto implica que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{2\beta} \|P_j u\|^2 \leqslant C \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{2\alpha} \|P_j u\|^2,$$

para $C > 0$. Logo,

$$\|u\|_{H^\beta} \leqslant \sqrt{C} \|u\|_{H^\alpha},$$

para todo $u \in H^\alpha$.
Agora, vamos mostrar que $\{e_j\}$ é completa em H^α para todo $\alpha \in [0,1]$ pois, isto implica que $D(A)$ é denso em H^α para todo $\alpha \in [0,1]$. Seja $u \in H^\alpha$ para $\alpha \in [0,1]$ tais que

$$(u, e_j)_{H^\alpha} = 0,$$

para todo $j \in \mathbb{N}$.

Então, para todo $j \in \mathbb{N}$

$$0 = (A^\alpha u, A^\alpha e_j) = \lambda_j^\alpha (A^\alpha u, e_j) = \lambda_j^{2\alpha} (u, e_j)$$

que implica que $u = 0$, desde que $\lambda_j > 0$. □

Teorema 4.4. *Sejam H um espaço de Hilbert separável sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $A : D(A) \subset H \to H$ um operador linear. Assuma que A tem resolvente compacto, $\sigma(A) \neq \varnothing$, é autoadjunto e que satisfaz a desigualdade (4.1). O operador A^α é autoadjunto.*

Demonstração. Inicialmente, note que $D(A^\alpha)$ é um subespaço denso de H, pelo Teorema 4.3 e porque combinações lineares de e_j^i's pertencem a $D(A^\alpha)$. Além disso, é fácil ver que A^α é linear. Sejam $u, v \in D(A^\alpha)$

$$(A^\alpha u, v) = \Big(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^\alpha P_j u, v\Big) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^\alpha (P_j u, v) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^\alpha \sum_{i=1}^{m_j} \frac{(u, e_j^i)}{\|e_j^i\|^2}(e_j^i, v),$$

isto é,

$$(A^\alpha u, v) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^\alpha \sum_{i=1}^{m_j} \frac{(e_j^i, v)}{\|e_j^i\|^2}(u, e_j^i) = (u, A^\alpha v).$$

e A^α é simétrico, pois $A^\alpha \subset (A^\alpha)^*$. Agora, vamos mostrar que $\mathcal{M} = D((A^\alpha)^*) \subset D(A^\alpha)$.
Seja $v \in \mathcal{M}$ e $(A^\alpha)^* v = v^*$, então

$$(A^\alpha u, v) = (u, v^*),$$

para todo $u \in D(A^\alpha)$; isto é,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^\alpha (P_j u, v) = \sum_{j=1}^{\infty} (P_j u, v^*),$$

para todo $u \in D(A^\alpha)$.
Se $u = e_k^i$, então

$$\lambda_k^\alpha (P_k e_k^i, v) = (P_k e_k^i, v^*)$$

e portanto,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{2\alpha} \|P_k v\|^2 < \infty,$$

pois $v^* \in H$. Assim, $v \in D(A^\alpha)$ e A^α é autoadjunto, como queríamos mostrar. □

Teorema 4.5. *Sejam H um espaço de Hilbert separável sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $A : D(A) \subset H \to H$ um operador linear. Assuma que A tem resolvente compacto, $\sigma(A) \neq \varnothing$, é autoadjunto e que satisfaz a desigualdade (4.1). Então, A^α satisfaz (4.1) com*

$$\sigma(A^\alpha) = \{\lambda_1^\alpha, \lambda_2^\alpha, \ldots\}.$$

Teorema 4.6 (Desigualdade clássica de Poincaré)**.** *Suponha que $1 \leqslant p < \infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ é um domínio limitado. Então existe uma constante $C > 0$ (dependendo de Ω e p) tal* *que para toda função u do espaço de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$ temos*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C\|\nabla u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}.$$

Demonstração. Ver [4], Capítulo 9, Corolário 9.19.

Exemplo 4.1. Considere um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ de fronteira suave (de regularidade pelo menos $C^{2,\alpha}$). Iremos denotar por Δ o operador Laplaciano com condições homogêneas de Dirichlet de fronteira. Suas autofunções $L^2(\Omega)$-normalizadas serão denotadas por w_j, e seus autovalores contados com suas multiplicidades serão denotados por λ_j:

$$-\Delta w_j = \lambda_j w_j.$$

Sabemos que $0 < \lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_j \to \infty$, quando $j \to \infty$, e que $-\Delta$ é um operador positivo autoadjunto em $H = L^2(\Omega)$, com domínio $D(-\Delta) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. O estado estacionário w_1 é positivo, e

$$c_0 d(x) \leqslant w_1(x) \leqslant C_0 d(x)$$

vale para todo $x \in \Omega$, onde

$$d(x) = \mathrm{dist}(x, \partial\Omega)$$

e c_0, C_0 são constantes positivas dependendo de Ω. O cálculo funcional pode ser definido usando expansão por autofunções. Em particular,

$$(-\Delta)^\alpha f = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^\alpha f_j w_j$$

com

$$f_j = \int_\Omega f(y) w_j(y) dy,$$

para $f \in D((-\Delta)^\alpha) = \left\{u \in L^2(\Omega); \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{2\alpha} f_j^2 < \infty\right\}$, iremos denotar por

$$A^\alpha = (-\Delta)^\alpha$$

as potências fracionárias do Laplaciano negativo de Dirichlet, com $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ e com $\|f\|_{E^\alpha}$ a norma de $D(A^\alpha)$

$$\|f\|_{H^\alpha}^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{2\alpha} f_j^2.$$

Vamos mostrar que

$$D(A^{\frac{1}{2}}) = H_0^1(\Omega).$$

De fato, para $f \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ temos

$$\|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_\Omega f(-\Delta) f dx = \int_\Omega |(-\Delta)^{\frac{1}{2}} f|^2 dx = \|A^{\frac{1}{2}} f\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|f\|_{H^{\frac{1}{2}}}^2.$$

Recordemos que a desigualdade de Poincaré implica que a integral de Dirichlet no lado esquerdo da equação acima é equivalente a norma em $H_0^1(\Omega)$ e portanto, a aplicação identidade do subconjunto denso $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ de $H_0^1(\Omega)$ para $D(A^{\frac{1}{2}})$ é uma isometria, e portanto, $H_0^1(\Omega) \subset D(A^{\frac{1}{2}})$. Mas, $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ é denso em $D(A^{\frac{1}{2}})$, pois combinações lineares finitas de autofunções são densas em $D(A^{\frac{1}{2}})$. De maneira análoga, utilizando o argumento de isometria, provamos que a inclusão contrária também é verdadeira.

Teorema 4.7 (Desigualdade de interpolação). *Sejam H um espaço de Hilbert separável sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $A : D(A) \subset H \to H$ um operador linear. Assuma que A tem resolvente compacto, $\sigma(A) \neq \emptyset$, é autoadjunto e que satisfaz a desigualdade (4.1). Então, para cada $u \in D(A^\alpha)$ temos*

$$\|A^\alpha u\| \leqslant \|Au\|^\alpha \|u\|^{1-\alpha},$$

para todo $\alpha \in [0,1]$.

Demonstração. É suficiente usar a desigualdade de Hölder com expoentes $\frac{1}{\alpha}$ e $\frac{1}{1-\alpha}$. Seja $x \in D(A^\alpha)$, então

$$\begin{aligned}
\|A^\alpha u\| &= \left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{2\alpha} \|P_j u\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{2\alpha} \|P_j u\|^{2\alpha} \|P_j u\|^{2(1-\alpha)} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{2\alpha} \|P_j u\|^2 \right)^{\frac{\alpha}{2}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|P_j u\|^2 \right)^{\frac{1-\alpha}{2}} \\
&= \|Au\|^\alpha \|u\|^{1-\alpha}.
\end{aligned}$$

□

Teorema 4.8 (Desigualdade de interpolação). *Sejam H um espaço de Hilbert separável sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $A : D(A) \subset H \to H$ um operador linear. Assuma que A tem resolvente compacto, $\sigma(A) \neq \emptyset$, é autoadjunto e que satisfaz a desigualdade (4.1). Então, para cada $u \in D(A^\beta)$ temos*

$$\|A^\alpha u\| \leqslant \|A^\beta u\|^{\frac{\alpha}{\beta}} \|u\|^{\frac{\beta-\alpha}{\beta}},$$

para todo $\alpha \in [0, \beta]$ *e* $\beta > 0$.

Demonstração. Com efeito, basta chamar $T = A^\beta$ e $\theta = \frac{\alpha}{\beta}$, e aplicar o Lema 4.7, assim temos

$$\|T^\theta u\| \leqslant \|Tu\|^\theta \|u\|^{1-\theta},$$

como queríamos. □

Teorema 4.9 (Desigualdade de interpolação). *Sejam* H *um espaço de Hilbert separável sobre um corpo* $\mathbb{K}$ *e*$A : D(A) \subset H \to H$ *um operador linear. Assuma que* A *tem resolvente compacto,* $\sigma(A) \neq \varnothing$*, é autoadjunto e que satisfaz a desigualdade (4.1). Então, para cada* $u \in D(A^\beta)$ *temos*

$$\|A^\alpha u\| \leqslant \|A^\beta u\|^\theta \|A^\gamma u\|^{1-\theta},$$

para $\alpha = \beta\theta + (1-\theta)\gamma$, $\theta \in [0,1]$, $\gamma \in [0, \beta]$ *e* $\beta > 0$.

Demonstração. Seja $\theta \in [0,1]$, pelo Teorema 4.8 temos,

$$\|A^{(\beta-\gamma)\theta} u\| \leqslant \|A^{(\beta-\gamma)} u\|^\theta \|u\|^{1-\theta}$$

para todo $u \in D(A^{(\beta-\gamma)})$. Trocando $u \in D(A^\beta)$ por $A^\gamma u$ temos

$$\|A^{(\beta-\gamma)\theta} A^\gamma u\| \leqslant \|A^{(\beta-\gamma)} A^\gamma u\|^\theta \|A^\gamma u\|^{(1-\theta)},$$

isto é,

$$\|A^\alpha u\| \leqslant \|A^\beta u\|^\theta \|A^\gamma u\|^{1-\theta}.$$

□

Teorema 4.10. *Sejam* H *um espaço de Hilbert separável sobre um corpo* $\mathbb{K}$ *e* $A : D(A) \subset H \to H$ *um operador linear. Assuma que* A *tem resolvente compacto,* $\sigma(A) \neq \varnothing$*, é autoadjunto e que satisfaz a desigualdade (4.1). Então* $\rho(A)$ *contém* $(-\infty, \delta)$ *e*

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{\delta - \lambda}, \ \lambda < \delta.$$

Demonstração. Seja $\lambda \in \rho(A)$, então

$$\begin{aligned}\|(\lambda I - A)u\|^2 &= \|(\lambda - \delta)u + (\delta I - A)u\|^2 \\ &= (\lambda - \delta)^2 \|u\|^2 + 2(\lambda - \delta)(u, \delta u - Au) + \|(\delta I - A)u\|^2,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\|(\lambda I - A)u\|^2 \geqslant (\lambda - \delta)^2\|u\|^2 \geqslant \operatorname{dist}(\lambda, \sigma(A))\|u\|^2.$$

□

Sejam H um espaço de Hilbert separável sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $A : D(A) \subset H \to H$ um operador linear. Graças ao Teorema de Lumer-Phillips $-A$ é gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo que será denotado por $\{e^{-At}; t \geqslant 0\}$. Diante disso, apresentamos o seguinte teorema:

Teorema 4.11. *Sejam H um espaço de Hilbert separável sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $A : D(A) \subset H \to H$ um operador linear. Temos*

$$e^{-At}u = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j t} P_j u,$$

para todo $t \geqslant 0$ e $u \in H$.

Demonstração. Note que $\{\sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j t} P_j u; t \geqslant 0\}$ é um semigrupo fortemente contínuo. De fato, observe que

$$e^{A0}u = Iu,$$

onde I denota o operador identidade de H. E sejam $t, s \geqslant 0$, então

$$e^{-A(t+s)} = e^{-At}e^{-As}.$$

Além disso, veja que para todo $u \in H$ temos

$$\|e^{-At}u - u\| \to 0$$

quando $t \to 0^+$. Se B denota o gerador infinitesimal de $\sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j (\cdot)} P_j u$, então, para cada $u \in D(B)$, $t > 0$ e $v(t) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j t} P_j u$, temos

$$\frac{1}{t}(v(t) - v(0)) = (\sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j t} P_j u - \sum_{j=1}^{\infty} P_j u) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_j t} - 1}{t} P_j u.$$

Observe que $\lim_{t \to 0^+} \dfrac{e^{\lambda_j t} - 1}{t} = f'(0)$, onde $f(t) = e^{\lambda_j t}$. Desse modo, temos

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t}(v(t) - v(0)) = -\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j P_j u = -Au.$$

isto é, $u \in D(A)$ e $D(B) = D(A)$.

Por outro lado, seja $u \in D(A)$ então

$$-Au = -\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j P_j u = \sum_{j=1}^{\infty} \lim_{t \to 0^+} \frac{e^{-\lambda_j t} - 1}{t} P_j u = \lim_{t \to 0^+} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_j t} - 1}{t} P_j u$$

isto é, $u \in D(B)$ e $-Au = Bu$. □

Teorema 4.12. *Sejam H um espaço de Hilbert separável sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $A : D(A) \subset H \to H$ um operador linear. Temos*

$$\|e^{-At}\| \leqslant e^{-\delta t}.$$

Demonstração. Seja $u \in H$ então

$$\begin{aligned}
\|e^{-At}u\| &= \|\sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j t} P_j u\| \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j t} \|P_j u\| \\
&\leqslant e^{-\delta t} \sum_{j=1}^{\infty} \|P_j u\| \\
&= e^{-\delta} u,
\end{aligned}$$

para todo $t \geqslant 0$. □

Teorema 4.13. *Sejam H um espaço de Hilbert separável sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $A : D(A) \subset H \to H$ um operador linear. Então*

$$\sigma(e^{-At}) = \{e^{-\lambda_j t};\ j \in \mathbb{N}\},$$

para todo $t \geqslant 0$.

Demonstração. Seja $\beta \in \mathbb{C}$ tal que $\beta \neq e^{-\lambda_j t}$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Então o conjunto

$$\left\{ \frac{1}{\beta - e^{-\lambda_j t}}; j \in \mathbb{N} \right\}$$

é limitado, pois $e^{-\lambda_j t} \to 0$ quando $j \to \infty$. Logo, o operador $R(\beta; e^{-At})$ definido por

$$R(\beta; e^{-At})u = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\beta - e^{-\lambda_j t}} P_j u$$

é limitado e linear. Além disso,

$$R(\beta; e^{-At})(\beta I - e^{-At}) = (\beta I - e^{-At}) R(\beta; e^{-At}) = I.$$

Portanto, $\beta \in \rho(e^{-At})$. Assim

$$\sigma(e^{-At}) = \{e^{-\lambda_j t}; j \in \mathbb{N}\}.$$

para todo $t \geqslant 0$. □

Lema 4.14. Para cada $s \geqslant 0$ e $\alpha > 0$, temos

$$s^\alpha e^{-s} \leqslant \alpha^\alpha e^{-\alpha}.$$

Demonstração. Sejam $\alpha > 0$ e $f_\alpha : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(s) = s^\alpha e^{-s}$. Note que

$$\forall 0 \leqslant s < \alpha, \quad f'_\alpha(s) = \alpha s^{\alpha-1} e^{-s} - s^\alpha e^{-s} = \Big(\frac{\alpha}{s} - 1\Big) s^\alpha e^{-s} > 0$$

e

$$s^\alpha e^{-s} = f_\alpha(s) < f_\alpha(\alpha) = \alpha^\alpha e^{-\alpha}.$$

Note que

$$\forall \alpha < s, \quad f'_\alpha(s) = \Big(\frac{\alpha}{s} - 1\Big) s^\alpha e^{-s} < 0$$

e

$$s^\alpha e^{-s} = f_\alpha(s) < f_\alpha(\alpha) = \alpha^\alpha e^{-\alpha}.$$

□

Teorema 4.15. *Sejam H um espaço de Hilbert separável sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $A : D(A) \subset H \to H$ um operador linear. Para cada $t > 0$, $\alpha > 0$ e $u \in H$ temos $e^{-At}u \in H^\alpha$ e*

$$A^\alpha e^{-At} u = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^\alpha e^{-\lambda_j t} P_j u$$

e

$$\|e^{-At}\|_{\mathcal{L}(E, E^\alpha)} \leqslant c_\alpha t^{-\alpha},$$

onde $c_\alpha = e^{-\alpha(1-\log\alpha)}$.

Demonstração. Com efeito, para cada $t > 0$, $\alpha > 0$ e $u \in H$. Note que para cada $j \in \mathbb{N}$

$$\|\lambda_j^\alpha e^{-\lambda_j t} P_j u\| = t^{-\alpha} (\lambda_j t)^\alpha e^{-\lambda_j t} \|P_j u\| \leqslant \alpha^\alpha e^{-\alpha} t^{-\alpha} \|P_j u\|$$

e

$$\Big\| \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^\alpha e^{-\lambda_j t} P_j u \Big\| \leqslant c_\alpha t^{-\alpha} \sum_{j=1}^{\infty} \|P_j u\| < \infty,$$

onde

$$c_\alpha = \alpha^\alpha e^{-\alpha} = e^{-\alpha(1-\log\alpha)}.$$

Em outras palavras, para $t > 0$, $\alpha > 0$ e $u \in H$ temos $e^{-At}u \in H^\alpha$ e

$$A^\alpha e^{-At}u = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^\alpha e^{-\lambda_j t} P_j u$$

e

$$\|e^{-At}\|_{\mathcal{L}(H,H^\alpha)} \leqslant c_\alpha t^{-\alpha}.$$

□

Teorema 4.16. *Sejam H um espaço de Hilbert separável sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $A : D(A) \subset H \to H$ um operador linear. Para cada $t > 0$, $\alpha \geqslant \beta$ e $u \in H^\beta$ temos $e^{-At}u \in H^\alpha$ e*

$$\|e^{-At}\|_{\mathcal{L}(H^\beta,H^\alpha)} \leqslant c_{\alpha,\beta} t^{\beta-\alpha},$$

onde $c_{\alpha,\beta} > 0$.

Demonstração. Para cada $t > 0$, $\alpha \geqslant \beta$ e $u \in H^\beta = D(A^\beta)$. Note que, para cada $j \in \mathbb{N}$

$$\|\lambda_j^\alpha e^{-\lambda_j t} P_j u\| = t^{-\alpha}(\lambda_j t)^\alpha e^{-\lambda_j t}\|P_j u\| \leqslant \alpha^\alpha e^{-\alpha} t^{-\alpha}\|P_j u\|$$

e

$$\|\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^\alpha e^{-\lambda_j t} P_j u\| \leqslant c_\alpha t^{-\alpha} \sum_{j=1}^{\infty} \|P_j u\| < \infty,$$

onde

$$c_\alpha = \alpha^\alpha e^{-\alpha} = e^{-\alpha(1-\log\alpha)}.$$

Em outras palavras, para $t > 0$, $\alpha > 0$ e $u \in H^\beta$ temos $e^{-At}u \in E^\alpha$,

$$A^\alpha e^{-At}u = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^\alpha e^{-\lambda_j t} P_j u$$

e

$$\|e^{-At}\|_{\mathcal{L}(E,E^\alpha)} \leqslant c_\alpha t^{-\alpha}.$$

□

Teorema 4.17. *Sejam H um espaço de Hilbert separável sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $A : D(A) \subset H \to H$ um operador linear. Para cada $\lambda \in \rho(A)$, temos*

$$(\lambda I - A)^{-1} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda - \lambda_j} P_j.$$

Logo para $\lambda \in \rho(A)$,

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{dist(\lambda, \sigma(A))}.$$

Demonstração. Seja $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\lambda \neq \lambda_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Então, o conjunto

$$\left\{\frac{1}{\lambda - \lambda_j}; j \in \mathbb{N}\right\}$$

é limitado, pois $\lambda_j \to \infty$ quando $j \to \infty$. Logo, o operador $R(\lambda; A)$ definido por

$$R(\lambda; A)u = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda - \lambda_j} P_j u$$

é limitado e linear. Além disso,

$$R(\lambda; A)(\lambda I - A) = (\lambda I - A)R(\lambda; A) = I.$$

Logo, $\lambda \in \rho(A)$. Portanto,

$$R(\lambda; A) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda - \lambda_j} P_j.$$

□

Teorema 4.18. *Sejam* H *um espaço de Hilbert separável sobre um corpo* $\mathbb{K}$ *e* $A : D(A) \subset H \to H$ *um operador linear. Tome* $\phi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, *seja* $\Sigma_\phi = \{\lambda \in \mathbb{C}; |arg(\lambda)| \leqslant \phi\}$ *e* Γ *a fronteira de* $-\Sigma_\phi \cup B_r(0)$ *orientada de modo que a parte imaginária seja decrescente. Para* $\alpha > 0$, *temos a identidade*

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \lambda^{-\alpha} (\lambda I - A)^{-1} d\lambda.$$

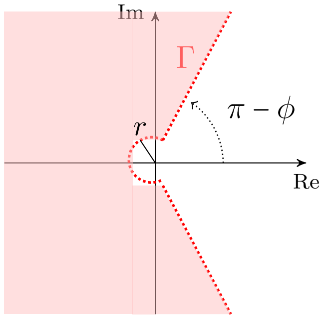

Figura 4.1: $-\Sigma_\phi \cup B_r(0)$.

Demonstração. É fácil ver que a integral do lado direito é um operador linear limitado, e de fato temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \lambda^{-\alpha}(\lambda I - A)^{-1}d\lambda &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\int_\Gamma \frac{\lambda^{-\alpha}}{\lambda-\lambda_j}d\lambda\right)P_j\\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^{-\alpha}P_j\\ &= A^{-\alpha}.\end{aligned}$$

□

Vimos na Definição 4.2 como está definido A^α, contudo, existe outro modo de representar A^α, o qual nos permite estender a noção de potências fracionárias para uma classe maior de operadores. É o que apresentaremos a seguir.

4.2 Operadores do tipo positivo

Definição 4.3. Sejam H um espaço de Hilbert separável sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $A : D(A) \subset H \to H$ um operador linear fechado e densamente definido. Dizemos que A é do *tipo K positivo*, $K \geqslant 1$, se $\mathbb{R}^+ \subset \rho(A)$ e

$$\|(\lambda I + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leqslant \frac{K}{1+\lambda},$$

para todo $\lambda \geqslant 0$. Denotamos por

$$\mathcal{P}_K := \mathcal{P}_K(H)$$

o conjunto de todos os operadores do tipo K positivo, e A é do *tipo positivo* se

$$A \in \mathcal{P} := \mathcal{P}(H) := \bigcup_{K\geqslant 1}\mathcal{P}_K(H).$$

Teorema 4.19. *Sejam H um espaço de Hilbert sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $A : D(A) \subset H \to H$ um operador do tipo $K \geqslant 1$ positivo. Se $\theta_K = \operatorname{arcsen}(\frac{1}{2K})$ e*

$$S_K = \{z \in \mathbb{C}; |arg(z)| \leqslant \theta_K\} \cup \{z \in \mathbb{C}; |z| \leqslant \frac{1}{2K}\},$$

então $S_K \subset \rho(-A)$ e

$$\|(\lambda I + A)^{-1}\| \leqslant \frac{2K+1}{1+|\lambda|},$$

para todo $\lambda \in S_K$.

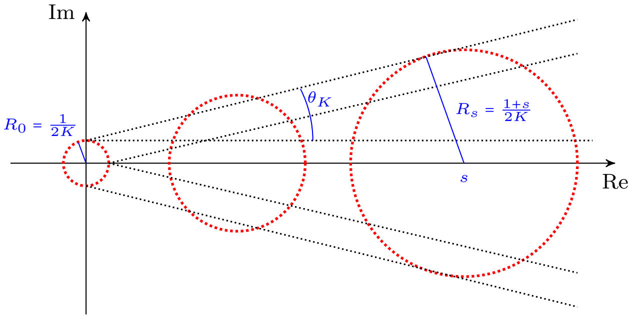

Figura 4.2: S_K.

Demonstração. Seja $s \geqslant 0$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ com

$$|\lambda - s| \leqslant \frac{1+s}{2K} = R_s.$$

Desde que para cada $s \geqslant 0$

$$\lambda I + A = (sI + A)[I + (\lambda - s)(sI + A)^{-1}],$$

$$\|(sI + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leqslant \frac{K}{1+s}$$

$$\|(\lambda - s)(sI + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leqslant \frac{1}{2}$$

e

$$[I + (\lambda - s)(sI + A)^{-1}]^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leqslant \|\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - s)^n (sI + A)^{-n}\|_{\mathcal{L}(H)} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

Logo, para $\lambda \in \rho(-A)$ temos

$$\begin{aligned}
\|(\lambda I + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} &\leqslant \|[I + (\lambda - s)(sI + A)^{-1}]^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \|(sI + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \\
&\leqslant \frac{2K}{1+s} \\
&\leqslant \frac{2K}{1+|\lambda|} \frac{1 + s + |\lambda - s|}{1+s} \\
&\leqslant \frac{2K}{1+|\lambda|}\left(1 + \frac{1}{2K}\right) \\
&= \frac{2K+1}{1+|\lambda|}.
\end{aligned}$$

Consequentemente $\lambda \in \rho(A)$ desde que $|\lambda - s| < R_s$ com $R_s = \frac{1+s}{2K}$. Portanto, $S_K \subset \rho(A)$. □

Definição 4.4. Seja $A \in \mathcal{P}(H)$ e $\alpha \in \mathbb{C}$ com Re$\alpha < 0$, definimos

$$A^{\alpha} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(-\lambda)^{\alpha}(\lambda I + A)^{-1}d\lambda = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{\Gamma}}\lambda^{\alpha}(\lambda I - A)^{-1}d\lambda,$$

onde Γ é uma curva simples em $S_K \backslash [0,\infty)$ suave por partes, de $\infty e^{-i\theta}$ a $\infty e^{i\theta}$, $\theta \in (0, \text{arcsen}(\frac{1}{2K})]$. Evidentemente $\tilde{\Gamma} = \{\lambda \in \mathbb{C}; -\lambda \in \Gamma\}$. Segue do Teorema de Cauchy que A^{α} está bem definido em $\mathcal{L}(H)$ independente de Γ.

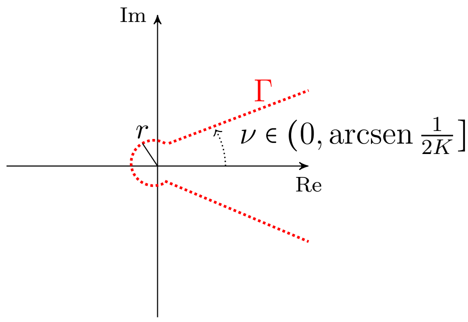

Figura 4.3: Curva Γ.

De fato, para $r < \frac{1}{2K}$ e $\nu \in (0, \text{arcsen}(\frac{1}{2K})]$, temos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(-\lambda)^{\alpha}(\lambda I + A)^{-1}d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{r}^{\infty}(-se^{i\nu})^{\alpha}(se^{i\nu}I + A)^{-1}e^{i\nu}ds \\
&+ \frac{1}{2\pi i}\int_{\infty}^{r}(-se^{-i\nu})^{\alpha}(se^{-i\nu}I + A)^{-1}e^{-i\nu}ds \\
&+ \frac{1}{2\pi i}\int_{2\pi-\nu}^{\nu}(-re^{-i\varphi})^{\alpha}(re^{-i\varphi}I + A)^{-1}rie^{-i\varphi}d\varphi
\end{aligned}$$

e, observamos que se $\alpha \in \mathbb{C}$, então

$$|\lambda^{\alpha}| = |e^{\ln \lambda^{\alpha}}| = |e^{\alpha \ln \lambda}| = |e^{(Re\alpha + iIm\alpha)(\ln|\lambda| + iarg\lambda)}| = e^{Re\alpha \ln|\lambda|}e^{-Im\alpha arg\lambda}$$

e

$$|\lambda^{\alpha}| \leqslant c|\lambda|^{Re\alpha}$$

porque $arg\lambda \in (0, \text{arcsen}(\frac{1}{2K})]$.

Portanto,

$$\begin{aligned}
&\left\|\int_r^\infty (-se^{i\nu})^\alpha (se^{i\nu}I + A)^{-1} e^{i\nu} ds\right\|_{\mathcal{L}(H)} \\
&\leqslant \int_r^\infty c|-se^{i\nu}|^{Re\alpha} \|(se^{i\nu}I + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} ds \\
&\leqslant c(2K+1)\int_r^\infty s^{Re\alpha}\frac{1}{1+s} ds \\
&\leqslant c(2K+1)\int_r^\infty s^{Re\alpha - 1} ds < \infty.
\end{aligned}$$

Além disso, temos

$$\begin{aligned}
&\left\|\int_\infty^r (-se^{-i\nu})^\alpha (se^{-i\nu}I + A)^{-1} e^{-i\nu} ds\right\|_{\mathcal{L}(H)} \\
&\leqslant \int_r^\infty c|-se^{-i\nu}|^{Re\alpha} \|(se^{-i\nu}I + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} ds \\
&\leqslant c(2K+1)\int_r^\infty s^{Re\alpha}\frac{1}{1+s} ds \\
&\leqslant c(2K+1)\int_r^\infty s^{Re\alpha - 1} ds < \infty
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
&\| \int_{2\pi-\nu}^\nu (-re^{-i\varphi})^\alpha (re^{i\varphi}I + A)^{-1} rie^{i\varphi} d\varphi\|_{\mathcal{L}(H)} \\
&\leqslant \int_{2\pi-\nu}^\nu cr^{Re\alpha} \|(re^{i\varphi}I + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} r d\varphi \\
&\leqslant c(2K+1)\int_{2\pi-\nu}^\nu r^{Re\alpha+1}\frac{1}{1+r} d\varphi \\
&\leqslant 2c(2K+1)(\pi-\nu) r^{Re\alpha+1} < \infty.
\end{aligned}$$

Portanto, A^α está bem definido em $\mathcal{L}(H)$ independente de Γ.

Teorema 4.20 (Fórmula integral de Balakrishnan)**.** *Seja $\alpha \in \mathbb{C}$ com $0 < Re\alpha < 1$, então*

$$A^{-\alpha} = \frac{\operatorname{sen}(\pi\alpha)}{\pi}\int_0^\infty \lambda^{-\alpha}(\lambda I + A)^{-1} d\lambda.$$

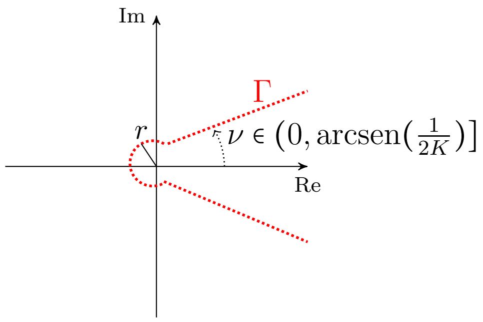

Figura 4.4: Curva Γ.

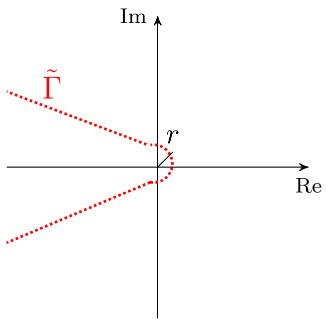

Figura 4.5: Curva $\tilde{\Gamma}$.

Demonstração. Desde que

$$A^{-\alpha} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{\Gamma}} \lambda^{\alpha}(\lambda I + A)^{-1} d\lambda,$$

onde $\tilde{\Gamma}$ é alguma curva simples em $S_K \backslash (-\infty, 0]$ suave por partes de $\infty e^{-i\theta}$ até $\infty e^{i\theta}$, $\theta \in (\pi, \pi - \operatorname{arcsen}(\frac{1}{2K})]$. À saber, $\tilde{\Gamma}$ é tal que

$$\{-se^{-i(\pi-\epsilon)}; s \in (-\infty, -r]\} \cup \{re^{i\varphi}; |\varphi| \leqslant \pi - \epsilon\} \cup \{se^{i(\pi-\epsilon)}; s \in [r, \infty)\},$$

com $\epsilon > 0$ e $r > 0$ suficientemente pequeno.

$$\begin{aligned} A^{-\alpha} = &-\frac{1}{2\pi i}\int_r^{\infty} (se^{i(\pi-\epsilon)})^{-\alpha}(se^{i(\pi-\epsilon)} I - A)^{-1} e^{i(\pi-\epsilon)} ds \\ &- \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{-r} (-se^{-i(\pi-\epsilon)})^{-\alpha}(-se^{-i(\pi-\epsilon)} I - A)^{-1}(-e^{-i(\pi-\epsilon)}) ds \\ &- \frac{1}{2\pi i}\int_{-(\pi-\epsilon)}^{\pi-\epsilon} (re^{i\varphi})^{\alpha}(re^{i\varphi} I - A)^{-1} rie^{i\varphi} d\varphi. \end{aligned}$$

Seja $r > 0$

$$\begin{aligned}
&e^{-\alpha(\ln s + i(\pi-\epsilon))}(se^{i(\pi-\epsilon)}I - A)^{-1}(e^{i(\pi-\epsilon)}) \\
&\to -s^{-\alpha}e^{-i\pi\alpha}(-sI - A)^{-1},
\end{aligned}$$

quando $\epsilon \to 0^+$, e

$$\begin{aligned}
&\|e^{-\alpha(\ln s + i(\pi-\epsilon))}(se^{i(\pi-\epsilon)}I - A)^{-1}(e^{i(\pi-\epsilon)})\|_{\mathcal{L}(H)} \\
&\leqslant e^{-Re\alpha \ln s + Im\alpha(\pi-\epsilon)}\frac{2K+1}{1+s} \\
&\leqslant (2K+1)e^{|Im\alpha|\pi}s^{-Re\alpha-1},
\end{aligned}$$

onde a função $s \mapsto (2K+1)e^{|Im\alpha|\pi}s^{-Re\alpha-1}$ é integrável em (r,∞) porque $0 < Re\alpha < 1$.

Graças ao teorema da convergência dominada de Lebesgue, temos

$$\begin{aligned}
&\int_r^\infty e^{-\alpha(\ln s + i(\pi-\epsilon))}(se^{i(\pi-\epsilon)}I - A)^{-1}e^{i(\pi-\epsilon)}ds \\
&\to \int_r^\infty -s^{-\alpha}e^{-i\pi\alpha}(-sI - A)^{-1}ds,
\end{aligned}$$

quando $\epsilon \to 0$.

Novamente, seja $r > 0$

$$e^{-\alpha(\ln|s| - i(\pi-\epsilon))}(-se^{-i(\pi-\epsilon)}I - A)^{-1}(-e^{-i(\pi-\epsilon)}) \to (-s)^{-\alpha}e^{i\pi\alpha}(sI - A)^{-1}$$

quando $\epsilon \to 0^+$, e

$$\begin{aligned}
&\|e^{-\alpha(\ln|s| - i(\pi-\epsilon))}(-se^{-i(\pi-\epsilon)}I - A)^{-1}(-e^{-i(\pi-\epsilon)})\|_{\mathcal{L}(H)} \\
&\leqslant e^{-Re\alpha \ln(-s) + Im\alpha(\pi-\epsilon)}\frac{2K+1}{1+s} \\
&\leqslant (2K+1)e^{|Im\alpha|\pi}s^{-Re\alpha-1},
\end{aligned}$$

onde a função $s \mapsto (2K+1)e^{|Im\alpha|\pi}s^{-Re\alpha-1}$ é integrável em $(-\infty,-r)$ porque $0 < \mathrm{Re}\alpha < 1$.

Graças ao teorema da convergência de Lebesgue, temos

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{-r} e^{-\alpha(\ln|s| - i(\pi-\epsilon))}(-se^{-i(\pi-\epsilon)}I - A)^{-1}(-e^{-i(\pi-\epsilon)})ds \\
&\to \int_{-\infty}^{-r} (-s)^{-\alpha}e^{i\pi\alpha}(sI - A)^{-1}ds
\end{aligned}$$

quando $\epsilon \to 0$.

Desde que

$$\begin{aligned}&\int_{-\pi}^{\pi}\|(rie^{-\alpha(\ln r+i\varphi)}(re^{i\varphi}I-A)^{-1}e^{i\varphi}\|d\varphi\\ &\leqslant\frac{2K+1}{1+r}r^{1-Re\alpha}\int_{-\pi}^{\pi}e^{\varphi Im\alpha}d\varphi<\infty.\end{aligned}$$

Temos

$$\begin{aligned}&\int_{-\pi}^{\pi}\|rie^{-\alpha(\ln r+i\varphi)}(re^{i\varphi}I-A)^{-1}e^{i\varphi}\|d\varphi\\ &\to rie^{-\alpha(\ln r+i\varphi)}(re^{i\varphi}I-A)^{-1}e^{i\varphi}d\varphi.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}A^{-\alpha}=&-\frac{1}{2\pi i}\int_{r}^{\infty}s^{-\alpha}e^{i\pi\alpha}(sI-A)^{-1}ds\\ &-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{-r}(-s)^{-\alpha}e^{-i\pi\alpha}(sI-A)^{-1}ds\\ &-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-\alpha(\ln r+i\varphi)}(re^{i\varphi}I-A)^{-1}rie^{i\varphi}d\varphi.\end{aligned}$$

Novamente,

$$\|e^{-\alpha(\ln r+i\varphi)}(re^{i\varphi}I-A)^{-1}rie^{i\varphi}\|_{\mathcal{L}(H)}\leqslant\frac{2K+1}{1+s}r^{1-Re\alpha}e^{Im\varphi}\to 0,$$

quando $r\to 0^{+}$, porque $0<\mathrm{Re}\alpha<1$.

Graças ao teorema da convergência dominada de Lebesgue, temos

$$\begin{aligned}A^{-\alpha}=&-\frac{1}{2\pi i}\int_{0}^{\infty}s^{-\alpha}e^{i\pi\alpha}(sI+A)^{-1}ds\\ &-\frac{1}{2\pi i}\int_{0}^{\infty}s^{-\alpha}e^{-i\pi\alpha}(sI+A)^{-1}ds\\ &=\frac{1}{2\pi i}(e^{i\pi\alpha}-e^{-i\pi\alpha})\int_{0}^{\infty}s^{-\alpha}(sI+A)^{-1}ds\\ &=\frac{\mathrm{sen}(\pi\alpha)}{\pi}\int_{0}^{\infty}s^{-\alpha}(sI+A)^{-1}ds.\end{aligned}$$

Note que, dado $\lambda\in\mathbb{C}$ com $0<\mathrm{Re}\alpha<1$, e seja $A\in\mathcal{P}(H)$, então

$$\begin{aligned}\|A^{-\alpha}\|_{\mathcal{L}(H)}&\leqslant K\frac{|\mathrm{sen}(\pi\alpha)|}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{s^{-Re\alpha}}{1+s}ds\\ &\leqslant K\frac{|\mathrm{sen}(\pi\alpha)|}{\mathrm{sen}(\pi Re\alpha)}.\end{aligned}$$

$\square$

Teorema 4.21. *Sejam $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ com Re α, Re $\beta<0$, então $A^{\alpha}A^{\beta}=A^{\alpha+\beta}$.*

Demonstração. Ver página 70 de [23]. □

Observação 4.1. Seja $\lambda \in \mathbb{C}$ com $0 <$Re$\alpha < 1$, então

$$\frac{\text{sen}(\pi Re\alpha)}{\pi} \int_0^\infty \frac{s^{-Re\alpha}}{1+s} ds = 1 \quad \left(\int_0^\infty \frac{s^{-Re\alpha}}{1+s} ds = \frac{\pi}{\text{sen}(\pi Re\alpha)} \right)$$

e seja $A \in \mathcal{P}(H)$, então

$$\begin{aligned} \|A^{-\alpha}\|_{\mathcal{L}(H)} &\leqslant K \frac{|\text{sen}(\pi\alpha)|}{\pi} \int_0^\infty \frac{s^{-Re\alpha}}{1+s} ds \\ &\leqslant K \frac{|\text{sen}(\pi\alpha)|}{\text{sen}(\pi Re\alpha)}. \end{aligned}$$

Lema 4.22. Existe uma constante C tal que para $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$,

$$\|A^{-\alpha}\| \leqslant C.$$

Demonstração. Para $\alpha = 0$ temos $A^{-\alpha} = I$ e logo, a afirmação é verdadeira. Para $\alpha = 1$ temos $A^{-\alpha} = A^{-1}$, que é limitado pois $0 \in \rho(A)$, já que A é do tipo K positivo. Agora, vejamos para $0 < \alpha < 1$. Neste caso, usamos a fórmula de Balakrishnan e temos

$$\begin{aligned} \|A^{-\alpha}\| &= \left\| \frac{\text{sen}(\alpha\pi)}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{-\alpha}(\lambda I + A)^{-1} d\lambda \right\| \\ &\leqslant \left\| \frac{\text{sen}(\alpha\pi)}{\pi} \int_0^1 \lambda^{-\alpha}(\lambda I + A)^{-1} d\lambda \right\| + \left\| \frac{\text{sen}(\alpha\pi)}{\pi} \int_1^\infty \lambda^{-1-\alpha}\lambda(\lambda I + A)^{-1} d\lambda \right\|. \end{aligned}$$

Para $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, seja $\|(\lambda I + A)^{-1}\| \leqslant C_0$. Além disso, para $\lambda \geqslant 1$ temos $\dfrac{C_1}{1+|\lambda|} \leqslant \dfrac{C_1}{|\lambda|}$ e assim, $\|(\lambda I + A)^{-1}\| \leqslant \dfrac{C_1}{|\lambda|}$. Logo, $\|\lambda(\lambda I + A)^{-1}\| \leqslant C_1$. Desse modo, temos

$$\begin{aligned} \|A^{-\alpha}\| &\leqslant \left\| \frac{\text{sen}(\alpha\pi)}{\pi} C_0 \int_0^1 \lambda^{-\alpha} d\lambda \right\| + \left\| \frac{\text{sen}(\alpha\pi)}{\pi} C_1 \int_1^\infty \lambda^{-1-\alpha} d\lambda \right\| \\ &= \left| \frac{\text{sen}(\pi(1-\alpha))}{\pi(1-\alpha)} \right| C_0 + \left| \frac{\text{sen}(\pi\alpha)}{\pi\alpha} \right| C_1 \\ &\leqslant C. \end{aligned}$$

□

Teorema 4.23. *Seja $A \in \mathcal{P}$, então a família $\{A^\alpha; Rea < 0\} \cup \{A^0 = I\}$ é um semigrupo fortemente contínuo em H.*

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned}(sI+A)^{-1}-(s+1)^{-1}I &= (sI+A)^{-1}[I-(1+s)^{-1}(sI+A)]\\ &= (1+s)^{-1}(sI+A)^{-1}(I-A),\end{aligned}$$

para $s>0$. Desse modo, seja $x \in D(A)$ e $\alpha \in \mathbb{C}$ com $0 < Re\alpha < 1$

$$\begin{aligned}&A^{-\alpha}x - x\\ &= \frac{\operatorname{sen}(\pi\alpha)}{\pi}\int_0^\infty s^{-\alpha}(sI+A)^{-1}xds - \frac{\operatorname{sen}(\pi\alpha)}{\pi}\int_0^\infty s^{-\alpha}(1+s)^{-1}xds\\ &= \frac{\operatorname{sen}(\pi\alpha)}{\pi}\int_0^\infty \frac{s^{-\alpha}}{1+s}(sI+A)^{-1}(I-A)xds.\end{aligned}$$

Consequentemente, para $0 < Re\alpha < 1$

$$\|A^{-\alpha}x - x\| \leqslant K\frac{|\operatorname{sen}(\pi\alpha)|}{\pi}\|(I-A)x\|\int_0^\infty \frac{s^{-Re\alpha}}{(1+s)^2}ds.$$

Desde que $\int_0^\infty \frac{s^{-Re\alpha}}{(1+s)^2}ds \to 1$ quando Re$\alpha \to 0$, temos $A^{-\alpha}x \to x$ quando $\alpha \to 0$ em $\{\alpha \in \mathbb{C}; |arg\alpha| \leqslant \phi\}$, para cada $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$. Além disso, desde que $A^{-\alpha}$ é uniformemente limitado $\alpha \in \{\alpha \in \mathbb{C}; |arg\alpha| \leqslant \phi\} \cap \{\alpha \in \mathbb{C}; 0 < Re\alpha < 1\}$ para cada $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$, pois

$$\|A^{-\alpha}\|_{\mathcal{L}(H)} \leqslant K\frac{|\operatorname{sen}(\pi\alpha)|}{\operatorname{sen}(\pi Re\alpha)}.$$

Logo, $A^{-\alpha}$ converge para I na topologia uniforme de operadores, quando $\alpha \to 0$ em $\{\alpha \in \mathbb{C}; |arg\alpha| \geqslant \frac{\pi}{2} + \epsilon\}$ para cada $\epsilon \in (0, \frac{\pi}{2})$. □

Teorema 4.24. *Seja $A \in \mathcal{P}$, então a família $\{A^\alpha;\ Rea < 0\} \cup \{A^0 = I\}$ é um semigrupo analítico em H.*

Demonstração. Graças ao teorema anterior, já sabemos que $\{A^\alpha;\ \text{Re}a < 0\} \cup \{A^0 = I\}$ é um semigrupo fortemente contínuo. Além disso, note que a aplicação $\{\alpha \in \mathbb{C};\text{Re}\alpha < 0\} \ni \alpha \mapsto A^\alpha \in \mathcal{L}(E)$ é analítica. □

Teorema 4.25. *Sejam $A \in \mathcal{P}$ e $\alpha \in \mathbb{C}$ com $Re\alpha < 0$, então A^α é um operador injetivo.*

Demonstração. Note que se Re$\alpha > 0$ e $x \in \ker(A^{-\alpha})$, escolhemos $n \in \mathbb{N}$ de modo que $n \leqslant \text{Re}\alpha < n+1$ então obtemos $A^{-\alpha-(n+1-\alpha)}x = A^{-n-1}x = 0$. De fato, veja que

$$A^{-\alpha-(n+1-\alpha)}x = A^{-(n+1-\alpha)-\alpha}x = A^{-(n+1-\alpha)}A^{-\alpha}x = A^{-(n+1-\alpha)}0 = 0.$$

Note que, o passo dado na segunda igualdade é possível graças ao Teorema 4.21. Por outro lado, temos $0 \in \rho(A)$ (pelo Teorema 4.19), logo o operador A^{n-1} é injetor e concluímos que $x = 0$. Assim, $\ker(A^{-z}) = \{0\}$ e portanto, A^{-z} é injetivo. $\square$

Em virtude deste teorema, podemos apresentar a seguinte definição:

Definição 4.5. Seja $\alpha \in \mathbb{C}$ com $\mathrm{Re}\alpha > 0$. Defina $A^{\alpha} : D(A^{\alpha}) \subset H \to H$ por $D(A^{\alpha}) = R(A^{-\alpha})$ e

$$A^{\alpha} = (A^{-\alpha})^{-1}, \quad Re\alpha > 0.$$

É claro que, o operador A^{α} é fechado e seu domínio $D(A^{\alpha})$ munido com a norma do gráfico, isto é, $D(A^{\alpha}) \ni x \mapsto \|A^{\alpha}x\| + \|x\|$ é um espaço de Banach. De fato, seja $u_n \in D(A^{\alpha})$ uma sequência de Cauchy, então dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\text{para } n, m \geqslant n_0, \quad \|u_n - u_m\|_{D(A^{\alpha})} < \epsilon,$$

assim, temos

$$\text{para } n, m \geqslant n_0, \quad \|A^{\alpha}u_n - A^{\alpha}u_m\| < \epsilon,$$

pois A^{α} é fechado. Logo, $A^{\alpha}u_n$ é também uma sequência de Cauchy em E. Sendo E um espaço de Banach, existem $u, v \in E$ tais que

$$u_n \to u \ \text{ em } E \quad \text{e} \quad A^{\alpha}u_n \to v \ \text{ em } E.$$

Desde que A^{α} é fechado, concluímos que $u \in D(A^{\alpha})$ e $A^{\alpha}u = v$. Assim, $u_n \to u$ em $D(A^{\alpha})$, pois

$$\|u_n - u\|_{D(A^{\alpha})} = \|u_n - u\| + \|A^{\alpha}u_n - A^{\alpha}u\|.$$

Graças a limitação de $A^{-\alpha}$, é fácil ver que $D(A^{\alpha}) \ni x \mapsto \|A^{\alpha}x\|$ é equivalente a norma $D(A^{\alpha}) \ni x \mapsto \|A^{\alpha}\| + \|x\|$. De fato, seja $x_n \in D(A\alpha) = R(A^{\alpha})$ com $x_n \to x$ e $A^{\alpha}y_n \to x$. Assim, existe $y_n \in R(A^{\alpha}) = D(A^{-\alpha})$ tal que $y_n = A^{\alpha}x_n \to y$, isto é, $A^{-\alpha}y_n = x_n \to x$, assim temos $y_n \to y$ e $A^{-\alpha}y_n \to x$, isto implica que $y \in D(A^{\alpha})$ e $A^{-\alpha}y = x$, desse modo, concluímos que $x \in R(A^{-\alpha}) = D(A^{\alpha})$ e $A^{\alpha}x = y$. A prova de que $D(A^{\alpha})$ munido da norma definida acima é espaço de Banach segue do Teorema 1.14. Para verificar que as normas são equivalentes, note que $\|A^{\alpha} \cdot \| \leqslant \|A^{\alpha} \cdot \| + \| \cdot \|$ em $D(A^{\alpha})$. Por outro lado, graças a limitação de $A^{-\alpha}$ temos

$$\|A^{\alpha}\cdot\| + \|\cdot\| = \|A^{\alpha}\cdot\| + \|A^{-\alpha}A^{\alpha}\cdot\| \leqslant \|A^{\alpha}\cdot\| \max\{1, \|A^{-\alpha}\cdot\|\}.$$

Definição 4.6. Sejam $A \in \mathcal{P}$ e $\alpha \in \mathbb{C}$ com $\mathrm{Re}\alpha \geqslant 0$. O espaço de Banach $X^{\alpha} = (D(A^{\alpha}), \|A^{\alpha}\|_H)$ é chamado espaço das potências fracionárias associado ao operador A.

Lema 4.26. Sejam $A \in \mathcal{P}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ com $0 < \mathrm{Re}\alpha < \mathrm{Re}\beta$, então $D(A^{\beta}) \subset D(A^{\alpha})$, e a aplicação identidade $i : X^{\beta} \to X^{\alpha}$ é contínua, isto é,

$$X^{\beta} \hookrightarrow X^{\alpha} \hookrightarrow X$$

sempre que $0 < \mathrm{Re}\alpha < \mathrm{Re}\beta$.

Demonstração. Seja $x \in D(A^{\beta})$, temos que

$$x = A^{-\beta}A^{\beta}x = A^{-\alpha-(\beta-\alpha)}A^{\beta}x = A^{-\alpha}A^{-(\beta-\alpha)}A^{\beta}$$

e então obtemos $x \in D(A^{\alpha})$, isto é, $D(A^{\beta}) \subset D(A^{\alpha})$.
Além disso,

$$\forall\ x \in D(A^{\beta}),\ \|A^{\alpha}x\| = \|A^{\alpha-\beta}A^{\beta}x\| \leqslant \|A^{\alpha-\beta}\|_{\mathcal{L}(H)}\|A^{\beta}x\|.$$

Portanto, a aplicação identidade $i : X^{\beta} \to X^{\beta}$ é contínua. □

Lema 4.27. Sejam $A \in \mathcal{P}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ com $0 < \mathrm{Re}\alpha < \mathrm{Re}\beta$, então $D(A^{\beta})$ é denso em $D(A^{\alpha})$, isto é,

$$X^{\beta} \hookrightarrow_d X^{\alpha} \hookrightarrow_d X$$

sempre que $0 < \mathrm{Re}\alpha < \mathrm{Re}\beta$.

Demonstração. Tome $x \in D(A)$ e $\epsilon > 0$, e defina $f = Ax \in H$. Desde que $D(A)$ é denso em H, existe $u \in D(A)$ tal que

$$\|u - f\| < \frac{\epsilon}{\|A^{-1}\|}.$$

Agora, defina $v = Au$, daí

$$\|A^{-2}v - x\| = \|A^{-1}u - A^{-1}f\| = \|A^{-1}(u - f)\| \leqslant \|A^{-1}\|\|u - f\| < \epsilon.$$

Daí, temos $D(A) \subset \overline{D(A^2)}$, e assim $H = \overline{D(A)} \subset \overline{D(A^2)}$. Logo, $D(A^2)$ é denso em H. Por indução, concluímos que $D(A^k)$ é denso em H para $k = 1, 2, 3, \cdots$. Logo, $D(A^\alpha)$ é denso em H para $\mathrm{Re}\alpha > 0$.
Para concluir a prova, tome $x \in D(A^\alpha)$ e $\epsilon > 0$, e defina $f = A^\alpha x \in H$. Desde que $D(A^{\beta-\alpha})$ é denso em H, existe $u \in D(A^{\beta-\alpha})$ tal que $\|u - f\| < \epsilon$. Desse modo, defina $v = A^{-\alpha}u$, então

$$v = A^{-\beta}A^{-(\alpha-\beta)}u \in D(A^\beta)$$

e logo,

$$\|v - x\|_{H^\alpha} = \|A^\alpha(v - x)\| = \|u - f\| < \epsilon.$$

□

4.3 Potências imaginárias limitadas

Esta seção será dedicada aos operadores com potências imaginárias limitadas. Nela, traremos uma coletânea de resultados a respeito do assunto, mas com nenhuma pretensão de apresentar demonstrações. Recomendamos para o leitor interessado em conhecer as demonstrações, a nossa referência principal para esta seção [1].

Sejam E um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $A : D(A) \subset E \to E$ um operador linear. Dizemos que A é potência imaginária limitada se $A \in \mathcal{P}(E)$ e se existem $\epsilon > 0$ e $M \geqslant 1$ tais que

$$A^{it} \in \mathcal{L}(E) \text{ e } \|A^{it}\| \leqslant M, \quad -\epsilon \leqslant t \leqslant \epsilon.$$

Denotamos a classe desses operadores por $BIP := BIP(E)$.
O teorema abaixo mostra que tal propriedade carrega consigo uma consequência de grande relevância.

Teorema 4.28. *Sejam E um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $A : D(A) \subset E \to E$ um operador linear tal que $A \in BIP$. Então, $\{A^z; Re\ z \leqslant 0\}$ é um semigrupo fortemente contínuo em $\mathcal{L}(E)$, isto é, a aplicação*

$$[Re\ z \leqslant 0] \to \mathcal{L}(E)$$
$$z \mapsto A^z$$

é uma aplicação contínua do semigrupo aditivo $[Rez \leqslant 0]$. Além disso, $\{A^{it}; t \in \mathbb{R}\}$ é *um grupo fortemente contínuo em E, cujo gerador infinitesimal é $i\log A$.*

Corolário 4.29. Sejam E um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $A : D(A) \subset E \to E$ um operador linear tal que $A \in BIP$. Então, existem constantes $M \geqslant 1$ e $\theta \geqslant 0$ tais que

$$\|A^{it}\| \leqslant Me^{\theta|t|}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Sejam E um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $A : D(A) \subset E \to E$ um operador linear. Suponha que vale a estimativa do Corolário 4.29 para A e para constantes $M \geqslant 1$ e $\theta \geqslant 0$, então usamos a notação

$$A \in BIP(M,\theta) := BIP(E;M,\theta).$$

Além disso,

$$BIP(\theta) := BIP(E;\theta) := \cup_{M\geqslant 1} BIP(M,\theta)$$

para $\theta \geqslant 0$, tal que $BIP = \cup_{\theta\geqslant 0} BIP(\theta)$.
Em geral, $BIP \subsetneq \mathcal{P}(E)$, isto é, existem operadores do tipo positivo que não têm potência imaginária limitada. Existem alguns exemplos que garantem a veracidade dessa afirmação, no entanto, como o foco desta seção não é este, recomendamos ao leitor interessado no assunto, ver ([20] Seção 14) e ([2] Exemplo A).
Apesar de não apresentarmos uma caracterização geral da classe de BIP, é conhecido que certas famílias de operadores pertencem ao conjunto BIP. Abaixo, apresentamos alguns destes casos.

Proposição 4.30. Seja H um espaço de Hilbert e suponha que $A = A^* \geqslant \alpha > 0$. Então, $A \in BIP(1,0)$.

Proposição 4.31. Sejam H um espaço de Hilbert e A um operador maximal acretivo com $0 \in \rho(A)$. Então $A \in BIP(1, \frac{\pi}{2})$.

Demonstração. A deonstração deste fato encontra-se em [18]. □

Lema 4.32. Sejam E um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $A : D(A) \subset E \to E$ um operador linear tal que $A \in \mathcal{P}(E)$. Suponha que $K, M \geqslant 1$ e $\theta \geqslant 0$,
(i) Se existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\|A^z\| \leqslant Me^{\theta|Imz|}, \; -\epsilon < \text{Re } z < 0,$$

então $A \in BIP(M, \theta)$.
(ii) Se $A \in BIP(M, \theta) \cap \mathcal{P}_K$, então

$$\|A^z\| \leqslant KMe^{\theta|Imz|}, \ -1 < \text{Re } z < 0.$$

Capítulo 5

Aplicações

Neste capítulo, apresentamos algumas aplicações da teoria apresentada neste trabalho, a partir do estudo dos artigos [8] e [11]. É importante salientar que, não temos nenhuma pretenção com a originalidade dos argumentos aqui apresentados nas demonstrações dos resutados. No entanto, o conteúdo das observações, e as soluções dos exercícios propostos nas referências supra citadas são de autoria da própria autora. Ressaltamos que manteremos a notação $\| \cdot \|$ omitindo o espaço em que a norma está definida, quando estivermos fazendo menção, especificamente, à norma $\| \cdot \|_{\mathcal{L}(E)}$ neste espaço.

5.1 Damping estrutural para sistemas elásticos

Vamos considerar ao longo desta seção dois operadores lineares A e B satisfazendo algumas condições, onde uma delas é B ser comparável com A. O significado disso ficará claro mais tarde. Consideraremos o operador

$$\Lambda_B = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A & -B \end{bmatrix}$$

que apresentará características interessantes ao estudo, o qual veremos que, uma vez fechado, é gerador de um semigrupo fortemente contínuo de contrações em $E^{\frac{1}{2}} \times E$. Mais que isso, veremos que tal semigrupo é analítico se escolhermos bem o domínio.

Apresentaremos aqui a prova de duas conjecturas, as quais foram propostas por G. Chen e D. L. Russel em um de seus trabalhos, e provadas por S. Chen e R. Triggiani, as quais estão relacionadas à taxas de amortecimento para sistemas elásticos. A grosso modo, estas conjecturas garantem que a propriedade de analiticidade procurada é válida no caso onde o operador B é comparável com $A^{\frac{1}{2}}$.

Vamos então estabelecer o ambiente em que iremos estudar e quais hipóteses iremos assumir sobre os operadores acima mencionados.
Seja E um espaço de Hilbert sobre um corpo $\mathbb{K}$. E sejam $A : D(A) \subset E \to E$ e $B : D(B) \subset E \to E$ operadores lineares. Vamos assumir que

(H1) A é um operador autoadjunto, estritamente positivo, densamente definido e com resolvente compacto.

(H2) B é, por enquanto, um operador positivo, autoadjunto, e densamente definido.

Para generalizar o modelo proposto por G. Chen e D.L. Russel, vamos considerar a equação diferencial

$$\frac{d^2}{dt^2}x + B\frac{d}{dt}x + Ax = 0 \quad \text{em } E$$

ou equivalentemente,

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix} = \Lambda_B \begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix} \quad \text{em } E^{\frac{1}{2}} \times E = X,$$

onde $D(A) \times D(B) \subset D(\Lambda_B)$ e o produto interno em X é dado por

$$\left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \right\rangle = \langle A^{\frac{1}{2}}x_1, A^{\frac{1}{2}}y_1 \rangle + \langle x_2, y_2 \rangle.$$

Além das condições (H1) e (H2) mencionadas anteriormente, assumiremos também que

(H3) Existem constantes $0 < \alpha \leqslant 1$ e $0 < \rho_1 < \rho_2 < \infty$, tais que

$$\rho_1 A^\alpha \leqslant B \leqslant \rho_2 A^\alpha,$$

que representa o que queremos dizer com B ser **comparável** com A^α.
Vamos escolher $B = 2\rho A^\alpha$, onde $0 < \rho < \infty$, $0 < \alpha \leqslant 1$, assim consideraremos agora a equação diferencial

$$\frac{d^2}{dt^2}x + 2\rho A^\alpha \frac{d}{dt}x + Ax = 0 \quad \text{em } E$$

ou equivalentemente,

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix} = \Lambda_{\rho\alpha} \begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix} \quad \text{em } E^{\frac{1}{2}} \times E^1.$$

Assim,

$$\Lambda_{\rho\alpha} = \Lambda_{B=2\rho A^{\alpha}} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A & -2\rho A^{\alpha} \end{bmatrix}$$

com

$$\begin{aligned} D(\Lambda_{\rho\alpha}) &= D(A) \times [D(A^{\frac{1}{2}}) \cap D(A^{\alpha})] \\ &= \begin{cases} D(A) \times D(A^{\frac{1}{2}}) & \text{se } 0 < \alpha < \frac{1}{2} \\ D(A) \times D(A^{\alpha}) & \text{se } \frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Antes dos resultados principais, apresentaremos alguns resultados preliminares que serão utilizados posteriormente.

5.1.1 Preliminares

(i) No caso em que $B = 0$, o operador $\Lambda_0 = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A & 0 \end{bmatrix}$ com $D(\Lambda_0) = E^1 \times E^{\frac{1}{2}}$ é tal que $\Lambda_0^* = -\Lambda_0$ em X.
De fato, note que

$$\Lambda_0^* = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ A & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & I \\ -A & 0 \end{bmatrix} = -\Lambda_0.$$

Logo, pelo Teorema de Stone, concluímos que Λ_0 é gerador infinitesimal de um grupo fortemente contínuo de operadores unitários.
(ii) No caso em que (H3) é válida, temos que Λ_B é densamente definido e é um operador dissipativo em X.
De fato, desde que $E^1 \overset{d}{\hookrightarrow} E^{\frac{1}{2}}$ e $E^{\alpha} \overset{d}{\hookrightarrow} E$ para todo $0 < \alpha \leqslant 1$, segue a densidade de $D(\Lambda_B)$. Para mostrar que Λ_B é dissipativo, utilizaremos a caracterização de operadores dissipativos dada no Lema 2.11, apresentado no Capítulo 2. Com efeito, considere $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in D(\Lambda_B)$, então temos

$$(\lambda I - \Lambda_B)x = \begin{bmatrix} \lambda I & -I \\ A & \lambda I + B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 - x_2 \\ A x_1 + (\lambda I + B) x_2 \end{bmatrix}.$$

Assim, (lembrando da definição do produto interno em X)

$$
\begin{aligned}
&\|(\lambda I - \Lambda_B)x\|^2 \\
&= \left\langle \begin{bmatrix} \lambda x_1 - x_2 \\ Ax_1 + (\lambda I + B)x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda x_1 - x_2 \\ Ax_1 + (\lambda I + B)x_2 \end{bmatrix} \right\rangle \\
&= \langle A^{\frac{1}{2}}(\lambda x_1 - x_2), A^{\frac{1}{2}}(\lambda x_1 - x_2)\rangle + \langle Ax_1 + (\lambda I + B)x_2, Ax_1 + (\lambda I + B)x_2\rangle \\
&= \lambda^2 \langle A^{\frac{1}{2}}x_1, A^{\frac{1}{2}}x_1\rangle - \lambda\langle A^{\frac{1}{2}}x_1, A^{\frac{1}{2}}x_2\rangle - \langle A^{\frac{1}{2}}x_2, A^{\frac{1}{2}}x_1\rangle + \langle A^{\frac{1}{2}}x_2, A^{\frac{1}{2}}x_2\rangle + \|Ax_1 + (\lambda I + B)x_2\| \\
&= \lambda^2\|x_1\|^2_{E^{\frac{1}{2}}} + \lambda^2\|x_2\|^2_{E^{\frac{1}{2}}} + \|Ax_1 + Bx_2\|^2 + \|x_2\|^2_{E^{\frac{1}{2}}} + 2\lambda\langle x, Bx\rangle.
\end{aligned}
$$

Note que a soma acima é positiva, pois $\lambda > 0$ e B é um operador positivo por hipótese. Assim, temos

$$
\begin{aligned}
\|(\lambda I - \Lambda_B)x\|^2 &\geqslant \lambda^2\|x_1\|^2_{X^{\frac{1}{2}}} + \lambda^2\|x_2\|^2_{X^{\frac{1}{2}}} \\
&= \lambda^2\|x\|^2_E.
\end{aligned}
$$

Donde concluímos o resultado. □

Traremos agora um resultado que deveria estar no Capítulo 2, mas como iremos utilizá-lo fortemente na demonstração dos próximos resultados, faz sentido situá-lo aqui.

Teorema 5.1. *Sejam H um espaço de Hilbert sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $A : D(A) \subset H \to H$ um operador linear densamente definido e dissipativo, então A é fechável.*

Demonstração. Considere $x_n \in D(A)$, com $x_n \to 0$ e $Ax_n \to y$. Vamos mostrar que $y = 0$. Tome $z \in D(A)$ e vamos aplicar a desigualdade que caracteriza operadores dissipativos com $\lambda = 1$,

$$\|(I - A)(t^{-1}x_n + z)\| \geqslant \|t^{-1}x_n + z\|.$$

Daí

$$\|(t^{-1}x_n + z) - tA(t^{-1}x_n + z)\| \geqslant \|t^{-1}x_n + z\|,$$

logo

$$\|(t^{-1}x_n + z) - Ax_n + tAz\| \geqslant \|(t^{-1}x_n + z)\|.$$

Fazendo $n \to \infty$ temos

$$\|z - y + tAz\| \geqslant \|z\|.$$

Agora, fazendo $t \to 0$, obtemos $\|z - y\| \geqslant \|z\|$ para todo $z \in D(A)$. O que é um absurdo, pois $\overline{D(A)} = H$. Donde concluímos que A é fechável. $\square$

Desde que Λ_B é densamente definido e dissipativo em X, graças ao teorema acima, temos que Λ_B é fechável em X, e denotaremos o seu fecho por Λ_B.

Observação 5.1. O operador $\lambda I - \Lambda_B$ é sobrejetivo, para algum $\lambda > 0$. Com efeito, vamos mostrar que o operador $I - \Lambda_B$ é invertível. Note que para que isto aconteça, precisamos que exista o operador $(I + B + A)^{-1}$.
Veja que $I + B + A$ é autoadjunto e vale que

$$\langle (I + B + A)x, x\rangle = \langle x, x\rangle + \langle Bx, x\rangle + \langle Ax, x\rangle \geqslant \langle x, x\rangle.$$

Assim, $\sigma(I + B + A) \subset [1, M]$, para $M > 1$. Logo $0 \in \rho(I + B + A)$ e assim, existe $(0 - (I + B + A))^{-1}$, isto é, $(I + B + A)$ é invertível. Desse modo, poderemos concluir então que $I - \Lambda$ é invertível, ou seja, para $\lambda = 1$, $\lambda I - \Lambda_B$ é sobrejetor.
(iii) Desde que B é um operador positivo em E, e pela observação acima, a afirmação em (ii) implica que Λ_B é dissipativo em E e o Teorema de Lumer-Phillips garante que Λ_B é gerador de um semigrupo fortemente contínuo de contrações em X.
Temos que

$$(\lambda I - \Lambda_{\rho\alpha})^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{I - V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda)A}{\lambda} & V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda) \\ -AV_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda) & \lambda V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda), \end{bmatrix}$$

onde $V_{\rho\alpha}(\lambda) = \lambda^2 I + \lambda 2\rho A^{\alpha} + A$ para $\mathrm{Re}\lambda > 0$.
Além disso, note que

$$AV_{\rho\alpha} = V_{\rho\alpha}A.$$

De fato, seja $x \in D(A)$, então

$$\begin{aligned} (V_{\rho\alpha}A)x &= (V_{\rho\alpha})Ax \\ &= (\lambda^2 I + \lambda 2\rho A^{\alpha} + A)(Ax) \\ &= \lambda^2(Ax) + \lambda 2\rho A^{\alpha}(Ax) + A(Ax) \\ &= A\lambda^2 x + 2\rho A^{\alpha+1}x + A(Ax). \end{aligned}$$

Daí, temos

$$
\begin{aligned}
A\lambda^2 x + 2\rho A^{\alpha+1}x + A(Ax) &= A\lambda^2 x + 2\rho A^{1+\alpha}x + A(Ax)\\
&= A(\lambda^2 + 2\rho A^{\alpha} + A)x\\
&= (AV_{\rho\alpha})x.
\end{aligned}
$$

Do mesmo modo, temos

$$
(\lambda I - \Lambda_B)^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{I - V_B^{-1}(\lambda)A}{\lambda} & V_B^{-1}(\lambda) \\ -AV_B^{-1}(\lambda) & \lambda V_B^{-1}(\lambda) \end{bmatrix}.
$$

Teorema 5.2. $[V_B^{-1}(\lambda)]^* = V_B^{-1}(\overline{\lambda})$.

Demonstração. É fácil ver que a igualdade é válida, desde que A e B são ambos auto-adjuntos. □

Seja $\alpha \geqslant 0$. O espaço $D(A^{\alpha})$ e seu dual $D(A^{\alpha})^*$ com respeito a topologia de E, será sempre considerado como sendo munido das normas:

$$
\|x\|_{D(A^{\alpha})} = \|A^{\alpha}x\|_E, \ x \in D(A^{\alpha}) \tag{5.1}
$$

$$
\|x\|_{D(A^{\alpha})^*} = \|A^{-\alpha}x\|_E, \ x \in D(A^{\alpha})^*. \tag{5.2}
$$

Teorema 5.3. *Para $0 < \rho < \infty$, $0 < \alpha \leqslant 1$ e A como em (H1), temos para todo $x \in X$ e todo λ com $Re\lambda > 0$:*

$$
Re\ \langle \lambda A^{\alpha} V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda)x, x\rangle_X \geqslant 0.
$$

Demonstração. De fato, faça $\xi(\lambda) = V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda)x$ então

$$
\langle \lambda A^{\alpha} V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda)x, x\rangle = \langle \lambda A^{\alpha}\xi(\lambda), (\lambda^2 I + 2\lambda\rho A^{\alpha} + A)\xi(\lambda)\rangle.
$$

Logo,

$$
Re\langle \lambda A^{\alpha} V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda)x, x\rangle = Re\langle \lambda A^{\alpha}\xi(\lambda), (\lambda^2 I + 2\lambda\rho A^{\alpha} + A)\xi(\lambda)\rangle \geqslant 0.
$$

□

A afirmação

$$
\rho_1\langle A^{\alpha}x, x\rangle \leqslant \langle Bx, x\rangle \leqslant \rho_2 A^{\alpha}x, x\rangle, \quad x \in D(B^{\frac{1}{2}}) = D(A^{\frac{\alpha}{2}})
$$

é equivalente a

$$0 < \rho_1\langle y, y\rangle \leqslant \langle A^{-\frac{\alpha}{2}}BA^{-\frac{\alpha}{2}}y, y\rangle \leqslant \rho_2\langle y, y\rangle \quad y \in E,$$

que sugere a introdução do operador $S_\alpha = A^{-\frac{\alpha}{2}}BA^{-\frac{\alpha}{2}}$ que é autoadjunto, limitado e possui inverso limitado em E. É na forma S_α que (H3) será usada mais adiante.
Em um de seus trabalhos, G. Chen e D.L. Russel formularam as seguintes conjecturas que se referem ao caso $\alpha = \dfrac{1}{2}$. Antes de enunciá-las, é importante salientar que vamos assumir que A e B satisfazem as condições (H1) e (H2). Então, o semigrupo fortemente contínuo gerado por Λ_B em (iii), é também analítico em E, desde que, além disso

Conjectura 5.1. $\rho_1^2 A \leqslant B^2 \leqslant \rho_2^2 A, \quad 0 < \rho_1 < \rho_2 < \infty.$
Ou, então, desde que,

Conjectura 5.2. $\rho_1 A^{\frac{1}{2}} \leqslant B \leqslant \rho_2 A^{\frac{1}{2}}, \quad 0 < \rho_1 < \rho_2 < \infty.$

Note que as conjecturas não são equivalentes, pois A e B não comutam necessariamente. Mas, temos a seguinte implicação

$$\text{Conjectura 5.1} \Longrightarrow \text{Conjectura 5.2},$$

então basta estudarmos o caso mais geral, que é dado por 5.2.

Em vista disso, apresentamos os seguintes teoremas:

Teorema 5.4. *Assuma (H1), (H2) e (H3) com* $\dfrac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1$. *Então:*

(a) O semigrupo fortemente contínuo de contrações gerado por Λ_B em (iii) é também analítico em X.

(b) Como um resultado do item (a), temos que existe uma constante $\delta = -\sup Re\sigma(\Lambda_B) > 0$, onde $\sigma(\Lambda_B)$ é o espectro de Λ_B, tal que

$$\|e^{\Lambda_B t}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant e^{-\delta t}, \ t \geqslant 0.$$

Observação 5.2. Mais adiante, apresentaremos uma prova de que o semigrupo $\{e^{\Lambda_B t};\, t \geqslant 0\}$ não é analítico quando $0 \leqslant \alpha < \dfrac{1}{2}$.

Teorema 5.5. *Para* $\alpha = \dfrac{1}{2}$ *temos um resultado mais forte.*
Assuma (H1), (H2) e (H3) com $\alpha = \dfrac{1}{2}$. *Então*

(a) *O operador Λ_B é gerador infinitesimal de um semigrupo analítico de contrações em cada espaço*

$$X_\theta = D(A^{\frac{3}{4}-\frac{\theta}{2}}) \times D(A^{\frac{1}{4}-\frac{\theta}{2}}),\ 0 \leqslant \theta < 1$$

com a topologia mencionada anteriormente, este reduz-se ao espaço X quando $\theta = \dfrac{1}{2}$.

(b) *Além disso, para δ como no Teorema 5.4, temos*

$$\|e^{\Lambda_B t}\|_{\mathcal{L}(X_\theta)} \leqslant e^{-\delta t},\ t \geqslant 0.$$

O objetivo é provar que se o operador linear B é positivo, autoadjunto, tal que vale uma das conjecturas, então Λ_B é gerador infinitesimal de um semigrupo analítico. Está provado, em [7], que se para cada $\rho > 0$ existe $\epsilon(\rho)$ tal que se B é positivo, autoadjunto, satisfazendo

$$\rho_1\langle A^{\frac{1}{2}}x, x\rangle \leqslant \langle Bx, x\rangle \leqslant \rho_2\langle A^{\frac{1}{2}}x, x\rangle,$$

para $x \in D(B^{\frac{1}{2}}) = D(A^{\frac{1}{4}})$, onde $\rho_1 = 2\rho - \epsilon(\rho)$ e $\rho_2 = 2\rho + \epsilon(\rho)$. Então, Λ_B é gerador infinitesimal de um semigrupo analítico em $E \times E$.

5.1.2 O caso $k_1 A^{2\alpha} \leqslant B^2 \leqslant k_2 A^{2\alpha}$, $0 < k_1 < k_2$, com $\alpha < \frac{1}{2}$.

Neste caso, o semigrupo gerado por Λ_B não é analítico. Nesta seção veremos que a escolha da potência $A^{\frac{1}{2}}$ como um termo de comparação para B não é acidental, no sentido de que se B satisfaz

$$k_1\|A^\alpha x\| \leqslant \|Bx\| \leqslant k_2\|A^\alpha x\|\ ,\ 0 < k_1 < k_2,$$

com $x \in D(A^\alpha) = D(B)$, então o operador Λ_B, fechado como em (ii), é gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo em E, que contudo, não é analítico em geral. Apresentaremos alguns resultados nesse sentido, a seguir.

Proposição 5.6. Seja A um operador como em (H1), denote por $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\mu_n > 0$, os autovalores de A e por $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ os seus correspondentes autovetores. Defina o operador $B : D(B) \subset E \to E$ por

$$Be_n = b_n e_n, \quad b_n > 0,$$

tal que B é positivo, autoadjunto e comuta com A. Se

$$\frac{\mu_n}{{b_n}^2} \to \infty, \text{ quando } n \to \infty \tag{5.3}$$

então o operador Λ_B gera um semigrupo fortemente contínuo em X, que contudo, não é analítico aqui.

Demonstração. Já sabemos, graças a (iii), que Λ_B é gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo em X. Vamos então mostrar que este não é analítico. Comecemos verificando os autovalores de Λ_B. Com efeito, temos que se $\lambda \in \sigma_p(\Lambda_B)$ então

$$\Lambda_B\left(\begin{bmatrix}\phi\\ \psi\end{bmatrix}\right) = \lambda\begin{bmatrix}\phi\\ \psi\end{bmatrix},$$

para algum $\begin{bmatrix}\phi\\ \psi\end{bmatrix} \in D(\Lambda_B)$, o que implica em

$$\begin{cases}\psi = \lambda\phi\\ -A\phi - B\psi = \lambda\psi.\end{cases}$$

Assim, $-A\phi = \lambda B\phi + \lambda^2\phi$. Note que o problema tem solução dada pelos autovetores $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ de A, isto é,

$$-\mu_n e_n = -Ae_n = \lambda Be_n + \lambda^2 e_n = \lambda b_n e_n + \lambda^2 e_n = (\lambda b_n + \lambda^2)e_n$$

assim, $(\lambda^2 + \lambda b_n + \mu_n)e_n = 0$. E logo, os autovalores $\lambda_n^{+,-}$ de Λ_B são as soluções de

$$\lambda^2 + \lambda b_n + \mu_n = 0,$$

que são dadas por:

$$\lambda_n^+ = -\frac{b_n}{2} + \frac{i\sqrt{4\mu_n - b_n^2}}{2}$$
$$\lambda_n^- = -\frac{b_n}{2} - \frac{i\sqrt{4\mu_n - b_n^2}}{2}.$$

Logo, se (5.3) é válida, então $4\mu_n > b_n^2$, isto é, $4\mu_n - b_n^2 > 0$, para todo n suficientemente grande e

$$\left|\frac{Im\lambda_n^{+,-}}{Re\lambda_n^{+,-}}\right| = \sqrt{\frac{4\mu_n}{b_n^2} - 1} \to \infty.$$

O que nos diz que os autovalores $\{\lambda_n^{+,-}\}$ de Λ_B não estão contidos em um setor do tipo

$$\{\lambda \in \mathbb{C};\ |arg(\lambda - a)| \geqslant \frac{\pi}{2} + \theta\},$$

para algum $a \in \mathbb{R}$ e algum $\frac{\pi}{2} > \theta > 0$. Portanto, o resultado está provado. □

O caso de interesse é recuperado como corolário:

Corolário 5.7. Seja A um operador linear como em (H1) e seja B definido como na proposição anterior, onde agora

$$b_n \sim \mu_n^\alpha \ , \quad \alpha < \frac{1}{2}, \text{ quando } n \to \infty$$

($b_n \sim \mu_n^\alpha$ significa dizer que $c\mu_n^\alpha \leqslant b_n \leqslant C\mu_n^\alpha$, $0 < c < C$). Então para $\alpha < \frac{1}{2}$, e $x \in D(A^\alpha) = D(B)$, B satisfaz

$$c^2\|A^\alpha x\|^2 \leqslant \|Bx\|^2 \leqslant C^2\|A^\alpha x\|^2,$$

e Λ_B gera um semigrupo fortemente contínuo em X, que contudo, não é analítico aqui.

Caso $\alpha \geqslant \frac{1}{2}$.

Neste caso, o operador $\Lambda_{\rho\alpha}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo que é analítico em X.

Proposição 5.8. Sejam $\rho > 0$ e $\alpha \geqslant \frac{1}{2}$.

(i) O semigrupo fortemente contínuo de contrações gerado por $\Lambda_{\rho\alpha}$ em X é analítico aqui.

(ii) Para o operador $V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda)$ as seguintes limitações uniformes são dadas para todo λ com $\mathrm{Re}\lambda > 0$.

(a) $\|\lambda^2 V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda)\| \leqslant C_{\rho\alpha\mu_1} = \begin{cases} 1, & \text{se } 2\rho^2\mu_1^{2\alpha-1} \geqslant 1 \\ [4\rho^2\mu_1^{2\alpha-1}(1-\rho^2\mu_1^{2\alpha-1})]^{-\frac{1}{2}}, & \text{se } 2\rho^2\mu_1^{2\alpha-1} < 1. \end{cases}$

(b) $\|\lambda A^\alpha V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda)\| \leqslant \frac{1}{2\rho}$.

(c) $\|AV_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda)\| \leqslant C_{\rho\alpha\mu_1}$, onde $\langle Ax, x\rangle \leqslant \mu_1\langle x, x\rangle$, sendo $\mu_1 > 0$ o menor autovalor de A.

(iii) Por interpolação entre (b) e (c), e entre (a) e (b), respectivamente, obtemos para algum $0 < \theta < 1$ e para todo λ com $\mathrm{Re}\lambda > 0$, as seguintes limitações uniformes:

(d) $\|\lambda^{1-\theta}A^{(1-\alpha)\theta}A^{\alpha}V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda)\| \leqslant C_{\rho\alpha\theta}$.

(e) $\|\lambda^{2-\theta}A^{\alpha\theta}V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda)\| \leqslant C_{\rho\alpha\theta}$.

Demonstração. Vamos começar provando (b). Note que

$$\lambda A^{\alpha}V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda) = \left(\frac{A^{-\alpha}V_{\rho\alpha}(\lambda)}{\lambda}\right)^{-1}.$$

Lembremos que $V_{\rho\alpha}(\lambda) = \lambda^2 I + 2\rho\lambda A^{\alpha} + A$, assim, temos para $x \in D(A^{1-\alpha})$

$$\frac{A^{-\alpha}V_{\rho\alpha}(\lambda)}{\lambda}x = \lambda A^{-\alpha}x + 2\rho x + \frac{A^{1-\alpha}x}{\lambda}.$$

Daí

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{A^{-\alpha}V_{\rho\alpha}(\lambda)x}{\lambda}\right\|^2\\
&= \|2\rho x + \lambda A^{-\alpha}x + \frac{A^{1-\alpha}x}{\lambda}\|^2\\
&= \|2\rho x\|^2 + 4\rho Re\left\langle x, \lambda A^{-\alpha}x + \frac{A^{1-\alpha}x}{\lambda}\right\rangle + \left\|\lambda A^{-\alpha}x + \frac{A^{1-\alpha}x}{\lambda}\right\|^2\\
&= 4\rho^2\|x\|^2 + 4\rho Re\langle x, \lambda A^{-\alpha}x\rangle + 4\rho Re\left\langle x, \frac{A^{1-\alpha}x}{\lambda}\right\rangle + \left\|\lambda A^{-\alpha}x + \frac{A^{1-\alpha}x}{\lambda}\right\|^2\\
&= 4\rho^2\|x\|^2 + 4\rho Re\lambda\|A^{-\frac{\alpha}{2}}x\| + 4\rho\frac{Re\lambda}{|\lambda|^2}\langle x, A^{1-\alpha}x\rangle + \left\|\lambda A^{-\alpha}x + \frac{A^{1-\alpha}x}{\lambda}\right\|^2.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\left\|\frac{A^{-\alpha}V_{\rho\alpha}(\lambda)x}{\lambda}\right\|^2 \geqslant 4\rho^2\|x\|^2,$$

para todo λ com $\mathrm{Re}\lambda > 0$. Assim,

$$\left\|\frac{A^{-\alpha}V_{\rho\alpha}(\lambda)x}{\lambda}\right\| \geqslant 2\rho\|x\|.$$

Além disso, $R\left(\frac{A^{-\alpha}V_{\rho\alpha}(\lambda)}{\lambda}\right) = E$ para λ com $\mathrm{Re}\lambda > 0$. De fato, vamos mostrar que

$\ker\left(\left(\dfrac{V_{\rho\alpha}(\lambda)A^{-\alpha}}{\lambda}\right)^*\right) = \{0\}$ para λ com $\mathrm{Re}\lambda > 0$. Com efeito, seja $x \in \ker\left(\left(\dfrac{V_{\rho\alpha}(\lambda)A^{-\alpha}}{\lambda}\right)^*\right)$, então

$$\frac{V_{\rho\alpha}(\overline{\lambda})A^{-\alpha}x}{\overline{\lambda}} = 0 \implies \overline{\lambda}A^{-\alpha}x + 2\rho x + A^{1-\alpha}x = 0$$

e isto implica $x = 0$, do contrário, chegaríamos à uma contradição desde que o operador $(\lambda I - \Lambda_{\rho\alpha})^{-1}$ existe. Logo,

$$R\left(\frac{V_{\rho\alpha}(\lambda)A^{-\alpha}}{\lambda}\right)^{\perp} = \ker\left(\left(\frac{V_{\rho\alpha}(\lambda)A^{-\alpha}}{\lambda}\right)^*\right) = \{0\}$$

e portanto, temos $\overline{R\left(\dfrac{V_{\rho\alpha}(\lambda)A^{-\alpha}}{\lambda}\right)} = E$. Além disso, $\dfrac{V_{\rho\alpha}(\lambda)A^{-\alpha}}{\lambda}$ é fechado, graças ao modo em que foi definido.
Logo, para todo $y \in E$ existe $x \in D(A^{1-\alpha})$ tal que $y = \dfrac{V_{\rho\alpha}(\lambda)A^{-\alpha}x}{\lambda}$. Desse modo, temos

$$\|\lambda V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda)A^{\alpha}\| \leqslant \frac{1}{2\rho}.$$

Observação. Note que não fizemos uso de $\alpha \geqslant \dfrac{1}{2}$.
Vamos agora provar (a). Podemos ver que

$$\lambda^2 V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda) = \left(\frac{V_{\rho\alpha}(\lambda)}{\lambda^2}\right)^{-1}.$$

Note que

$$\begin{aligned}\frac{V_{\rho\alpha}(\lambda)}{\lambda^2} &= I + \frac{2\rho A^{\alpha}}{\lambda} + \frac{A}{\lambda^2}\\ &= I + 2\rho A^{\alpha-\frac{1}{2}}\left(\frac{A^{\frac{1}{2}}}{\lambda}\right) + \left(\frac{A^{\frac{1}{2}}}{\lambda}\right)^2.\end{aligned}$$

Agora, recordemos que $D(A) \subset D(A^{\alpha-\frac{1}{2}}) \subset D(A^{\frac{1}{2}})$. Para $x \in D(A)$,

$$\left\|\frac{V_{\rho\alpha}(\lambda)x}{\lambda^2}\right\| = \left\|x + 2\rho A^{\alpha-\frac{1}{2}}\frac{A^{\frac{1}{2}}x}{\lambda} + \left(\frac{A^{\frac{1}{2}}}{\lambda}\right)^2 x\right\|^2.$$

Distribuindo o quadrado, temos

$$
\begin{aligned}
&\left\|\frac{V_{\rho\alpha}(\lambda)x}{\lambda^2}\right\| \\
&= \|x\|^2 + 2Re\left\langle x, 2\rho A^{\alpha-\frac{1}{2}}\frac{A^{\frac{1}{2}}x}{\lambda} + \left(\frac{A^{\frac{1}{2}}}{\lambda}\right)^2 x\right\rangle + \\
&+ \left\|2\rho A^{\alpha-\frac{1}{2}}\frac{A^{\frac{1}{2}}x}{\lambda} + \left(\frac{A^{\frac{1}{2}}}{\lambda}\right)^2 x\right\|.
\end{aligned}
$$

Daí,

$$
\begin{aligned}
&\left\|\frac{V_{\rho\alpha}(\lambda)x}{\lambda^2}\right\| \\
&= \|x\|^2 + 4\rho\left\langle x, \frac{A^{\alpha}}{\lambda}x\right\rangle + \left\|2\rho A^{\alpha-\frac{1}{2}}\frac{A^{\frac{1}{2}}x}{\lambda}\right\|^2 + \\
&+ 2Re\left\langle 2\rho A^{\alpha-\frac{1}{2}}\frac{A^{\frac{1}{2}}x}{\lambda}, \left(\frac{A^{\frac{1}{2}}}{\lambda}\right)^2 x\right\rangle + \left\|\left(\frac{A^{\frac{1}{2}}}{\lambda}\right)^2 x\right\|^2 + 2Re\langle x, Ax\rangle \\
&= \|x\|^2 + 4\rho^2\left\|A^{\alpha-\frac{1}{2}}\frac{A^{\frac{1}{2}}}{\lambda}x\right\|^2 + \left\|\left(\frac{A^{\frac{1}{2}}}{\lambda}\right)^2 x\right\|^2 + 4\rho Re\frac{1}{\lambda}\|A^{\frac{\alpha}{2}}x\|^2 + \\
&+ 4\rho Re\frac{1}{\lambda^3}\|A^{\frac{\alpha+1}{2}}x\|^2 + 2Re\left\langle x, \left(\frac{A^{\frac{1}{2}}}{\lambda}\right)^2 x\right\rangle,
\end{aligned}
$$

para Re$\lambda > 0$.

Faremos uma análise em dois casos.

1º caso. Suponha $2\rho^2\mu_1^{2\alpha-1} \geqslant 1$, então

$$
\begin{aligned}
\left\|\frac{V_{\rho\alpha}(\lambda)}{\lambda^2}x\right\| &\geqslant 2Re\left\langle x, \left(\frac{A^{\frac{1}{2}}}{\lambda}\right)^2 x\right\rangle + 4\rho^2\left\|A^{\alpha-\frac{1}{2}}\frac{A^{\frac{1}{2}}}{\lambda}x\right\|^2 \\
&= 2Re\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\|A^{\frac{1}{2}}x\|^2 + \frac{4\rho^2}{|\lambda|^2}\|A^{\frac{2\alpha-1}{2}}\|^2\|A^{\frac{1}{2}}x\|^2 \\
&\geqslant 2Re\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\|A^{\frac{1}{2}}x\|^2 + \frac{4\rho^2\mu_1^{2\alpha-1}}{|\lambda|^2}\|A^{\frac{1}{2}}x\|^2 \\
&= 2\left(\frac{(Re\lambda)^2 - (Im\lambda)^2}{|\lambda|^4} + \frac{2\rho^2\mu_1^{2\alpha-1}}{|\lambda|^2}\right)\|A^{\frac{1}{2}}x\|^2 \\
&= \frac{\|A^{\frac{1}{2}}x\|^2}{|\lambda|^4}[(2+4\rho^2\mu_1^{2\alpha-1})(Re\lambda)^2 + 2(2\rho^2\mu_1^{2\alpha-1}-1)(Im\lambda)^2] \\
&> 0,
\end{aligned}
$$

para λ com $\mathrm{Re}\lambda > 0$ e desde que $2\rho^2\mu_1^{2\alpha-1} \geqslant 1$. Daí temos

$$\left\|\frac{V_{\rho\alpha}(\lambda)x}{\lambda^2}\right\|^2 \geqslant \|x\|^2.$$

Como no caso anterior, podemos concluir que $R\left(\dfrac{V_{\rho\alpha}(\lambda)}{\lambda^2}\right) = E$ para λ com $\mathrm{Re}\lambda > 0$. E está provado o primeiro caso.

2º caso. Suponha $2\rho^2\mu_1^{2\alpha-1} < 1$, então

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{V_{\rho\alpha}(\lambda)}{\lambda^2}\right\|^2\\
&\geqslant \|x\|^2 + 4\rho^2\left\|A^{\alpha-\frac{1}{2}}\frac{A^{\frac{1}{2}}}{\lambda}x\right\|^2 + \left\|\left(\frac{A^{\frac{1}{2}}}{\lambda}\right)^2 x\right\|^2 - 2\left\langle\left(\frac{A^{\frac{1}{2}}}{\lambda}\right)^2 x, x\right\rangle\\
&\geqslant \langle x, x\rangle + 4\rho^2\mu_1^{2\alpha-1}\left\langle\left(\frac{A^{\frac{1}{2}}}{|\lambda|}\right)^2 x, x\right\rangle + \left\langle\left(\frac{A^{\frac{1}{2}}}{|\lambda|}\right)^4 x, x\right\rangle - 2\left\langle\left(\frac{A^{\frac{1}{2}}}{\lambda}\right)^2 x, x\right\rangle.
\end{aligned}$$

Daí

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{V_{\rho\alpha}(\lambda)}{\lambda^2}\right\|^2\\
&= \left\langle\left[\left(\frac{A^{\frac{1}{2}}}{|\lambda|}\right)^2 - I\right]^2 x, x\right\rangle + 4\rho^2\mu_1^{2\alpha-1}\left\langle\left(\frac{A^{\frac{1}{2}}}{|\lambda|}\right)^2 x, x\right\rangle -\\
&- 4\rho^2\mu_1^{2\alpha-1}\|x\|^2 + 4\rho^2\mu_1^{2\alpha-1}\|x\|^2\\
&= \left\langle\left[\left(\frac{A^{\frac{1}{2}}}{|\lambda|}\right)^2 - I\right]^2 x, x\right\rangle + 4\rho^2\mu_1^{2\alpha-1}\left\langle\left[\left(\frac{A^{\frac{1}{2}}}{|\lambda|}\right)^2 - I\right] x, x\right\rangle + 4\rho^2\mu_1^{2\alpha-1}\|x\|^2\\
&= \left\langle\left\{\left[\left(\frac{A^{\frac{1}{2}}}{|\lambda|}\right)^2 - I\right]^2 + 2\rho^2\mu_1^{2\alpha-1}\right\}^2 x, x\right\rangle + 4\rho^2\mu_1^{2\alpha-1}\|x\|^2 - (2\rho^2\mu_1^{2\alpha-1})^2\|x\|^2,
\end{aligned}$$

e portanto,

$$\left\|\frac{V_{\rho\alpha}(\lambda)}{\lambda^2}\right\|^2 \geqslant 4\rho^2\mu_1^{2\alpha-1}(1 - \rho^2\mu_1^{2\alpha-1})\|x\|^2,$$

para λ com $\mathrm{Re}\lambda > 0$. Portanto, provamos a desigualdade em (a).
Vamos agora provar (c).

Note que

$$AV_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda) = V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda)A = (V_{\rho\alpha}(\lambda)A^{-1})^{-1},$$

e veja também que

$$V_{\rho\alpha}(\lambda)A^{-1} = (\lambda A^{-\frac{1}{2}})^2 + 2\rho A^{\alpha-\frac{1}{2}}(\lambda A^{-\frac{1}{2}}) + I.$$

A prova deste fato seguirá os mesmo passos das provas das desigualdades anteriores. Tome $x \in D(A^{-1}) = E$, então

$$\begin{aligned}
&\|V_{\rho\alpha}(\lambda)A^{-1}x\|^2\\
&= \|(\lambda A^{-\frac{1}{2}})^2 x + 2\rho A^{\alpha-\frac{1}{2}}(\lambda A^{-\frac{1}{2}})x + x\|^2\\
&= \|(\lambda A^{-\frac{1}{2}})^2 x\|^2 + 2\langle(\lambda A^{-\frac{1}{2}})^2 x, 2\rho A^{\alpha-\frac{1}{2}}(\lambda A^{-\frac{1}{2}})x + x\rangle +\\
&+ \|2\rho A^{\alpha-\frac{1}{2}}(\lambda A^{-\frac{1}{2}})x + x\|^2\\
&= \|(\lambda A^{-\frac{1}{2}})^2 x\|^2 + 2\langle(\lambda A^{-\frac{1}{2}})^2 x, 2\rho A^{\alpha-\frac{1}{2}}(\lambda A^{-\frac{1}{2}})x\rangle + 2\langle(\lambda A^{-\frac{1}{2}})^2 x, x\rangle +\\
&+ \|2\rho A^{\alpha-\frac{1}{2}}(\lambda A^{-\frac{1}{2}})x\|^2 + 2\langle 2\rho A^{\alpha-\frac{1}{2}}(\lambda A^{-\frac{1}{2}})x, x\rangle + \|x\|^2\\
&= \|(\lambda A^{-\frac{1}{2}})^2 x\|^2 + 2\langle(\lambda A^{-\frac{1}{2}})^2 x, x\rangle + 4\rho^2\|A^{\alpha-\frac{1}{2}}(\lambda A^{-\frac{1}{2}})x\|^2 + \|x\|^2 +\\
&+ 4\rho\langle\lambda^2 A^{\alpha-2}x, x\rangle + 4\rho\langle\lambda A^{\alpha-1}x, x\rangle\\
&= \|(\lambda A^{-\frac{1}{2}})^2 x\|^2 + 2\langle(\lambda A^{-\frac{1}{2}})^2 x, x\rangle + 4\rho^2\|A^{\alpha-\frac{1}{2}}(\lambda A^{-\frac{1}{2}})x\|^2 + \|x\|^2 +\\
&+ 4\rho\|\lambda A^{\frac{\alpha-2}{2}}x\|^2 + 4\rho\mathrm{Re}\lambda\|A^{\frac{\alpha-1}{2}}x\|^2.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\|V_{\rho\alpha}(\lambda)A^{-1}x\|^2 \geqslant 2\langle(\lambda A^{-\frac{1}{2}})^2 x, x\rangle + 4\rho^2\|A^{\alpha-\frac{1}{2}}(\lambda A^{-\frac{1}{2}})x\|^2.$$

Como em (a) faremos uma análise em dois casos:

1º caso. $2\rho^2\mu_1^{2\alpha-1} \geqslant 1$.

Temos que

$$\begin{aligned}
\|V_{\rho\alpha}(\lambda)A^{-1}x\|^2 &\geqslant 2Re\lambda^2\|A^{-\frac{1}{2}}x\|^2 + 4\rho^2\mu_1^{2\alpha-1}|\lambda|^2\|A^{-\frac{1}{2}}x\|^2 - 2(Im\lambda)^2\|A^{-\frac{1}{2}}x\|^2\\
&= \|A^{-\frac{1}{2}}x\|^2[(2 + 4\rho^2\mu_1^{2\alpha-1})(Re\lambda)^2 + 2(2\rho^2\mu_1^{2\alpha-1} - 1)(Im\lambda)^2]\\
&> 0.
\end{aligned}$$

Logo, $\|V_{\rho\alpha}(\lambda)A^{-1}x\|^2 \geqslant \|x\|^2$. E usamos o mesmo argumento dos itens anteriores, para concluir o resultado.

2º caso. Considere $2\rho^2\mu_1^{2\alpha-1} < 1$.
Temos que

$$\begin{aligned}
&\|V_{\rho\alpha}(\lambda)A^{-1}x\|^2\\
&\geqslant \|(\lambda A^{-\frac{1}{2}})^2x\|^2 + 4\rho^2\|A^{\alpha-\frac{1}{2}}(\lambda A^{-\frac{1}{2}})x\|^2 + \|x\|^2 - 2\langle(\lambda A^{-\frac{1}{2}}x, x\rangle\\
&= \langle(|\lambda|A^{-\frac{1}{2}})^4x, x\rangle + 4\rho^2\mu_1^{2\alpha-1}\langle(|\lambda|A^{-\frac{1}{2}}x, x\rangle + \langle x, x\rangle - 2\langle(|\lambda A^{-\frac{1}{2}})^2x, x\rangle\\
&= \langle[(|\lambda|A^{-\frac{1}{2}})^2 - I]^2x, x\rangle + 4\rho^2\mu_1^{2\alpha-1}\langle[(|\lambda|A^{-\frac{1}{2}})^2 - I]x, x\rangle + 4\rho^2\mu_1^{2\alpha-1}\|x\|^2\\
&= \langle\{[(|\lambda|A^{-\frac{1}{2}})^2 - I]^2 - 2\rho^2\mu_1^{2\alpha-1}\}^2x, x\rangle + 4\rho^2\mu_1^{2\alpha-1}\|x\|^2 - (2\rho^2\mu_1^{2\alpha-1})^2\|x\|^2\\
&\geqslant 4\rho^2\mu_1^{2\alpha-1}(1 - \rho^2\mu_1^{2\alpha-1})\|x\|^2 > 0,
\end{aligned}$$

para λ com $\mathrm{Re}\lambda > 0$. E está provado o resultado.

Provaremos agora o item (iii). Começando por (d).
Observe que para $x \in E$, temos

$$\|\lambda^{1-\theta}A^{(1-\alpha)\theta}A^{\alpha}V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda)x\| = |\lambda^{1-\theta}|\|A^{\theta+(1-\theta)\alpha}V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda)x\|.$$

Escreva $V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda)x = u$ e perceba que $u \in D(A)$. Logo,

$$\|\lambda^{1-\theta}A^{(1-\alpha)\theta}A^{\alpha}V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda)x\| = |\lambda^{1-\theta}|\|A^{\theta+(1-\theta)\alpha}u\|.$$

Note que $\theta \in (0,1) \subset [0,1]$ e $\alpha \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right] \subset [0,1]$, logo, aplicando a desigualdade de interpolação, obtemos

$$\begin{aligned}
\|\lambda^{1-\theta}A^{(1-\alpha)\theta}A^{\alpha}V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda)x\| &\leqslant |\lambda^{1-\theta}|\|Au\|^{\theta}\|A^{\alpha}u\|^{1-\theta}\\
&= \|AV_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda)x\|^{\theta}\|\lambda A^{\alpha}V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda)x\|^{1-\theta}\\
&\leqslant \frac{C_{\rho\alpha\mu_1}^{\theta}}{(2\rho)^{1-\theta}},
\end{aligned}$$

para λ com $\mathrm{Re}\lambda > 0$.
Para provar (e) vamos usar a desigualdade de interpolação com $\gamma = 0$ e $\beta = \alpha$, e assim

temos

$$\begin{aligned}
\|\lambda^{2-\theta}A^{\alpha\theta}V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda)x\| &\leqslant |\lambda^{2-\theta}|\|A^{\alpha}u\|^{\theta}\|u\|^{1-\theta}\\
&= |\lambda^{2-2\theta+\theta}|\|A^{\alpha}u\|^{\theta}\|u\|^{1-\theta}\\
&= \|\lambda A^{\alpha}u\|^{\theta}\|\lambda^2 u\|^{1-\theta}\\
&= \|\lambda A^{\alpha}V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda)x\|^{\theta}\|\lambda^2 V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda)x\|^{1-\theta}\\
&\leqslant \frac{C_{\rho\alpha\mu_1}^{1-\theta}}{(2\rho)^{\theta}}.
\end{aligned}$$

Retornemos agora para a expressão de $(\lambda I - \Lambda_{\rho\alpha})^{-1}$.
Vimos que

$$(\lambda I - \Lambda_{\rho\alpha})^{-1} = \begin{bmatrix} V_{\rho\alpha}(\lambda)(\lambda I + 2\rho A^{\alpha}) & V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda) \\ -AV_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda) & \lambda V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Note que, graças ao item (ii) obtemos constantes $C_{\rho\alpha\mu_1}$ e M tais que

$$\begin{aligned}
\|V_{\rho\alpha}(\lambda)(\lambda I + 2\rho A^{\alpha})\| &\leqslant \frac{C_{\rho\alpha\mu_1}}{|\lambda|} + \frac{M}{|\lambda|}\\
\|V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda)\| &\leqslant \frac{C_{\rho\alpha\mu_1}}{|\lambda|^2} \leqslant \frac{C_{\rho\alpha\mu_1}}{|\lambda|}\\
\|-AV_{\rho\alpha}^{-1}\| &\leqslant C_{\rho\alpha\mu_1},\\
\|\lambda V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda)\| &\leqslant \frac{C_{\rho\alpha\mu_1}}{|\lambda|}
\end{aligned}$$

onde $M = \dfrac{1}{4\rho^2}$. Consideremos a norma

$$\begin{aligned}
\|(\lambda I - \Lambda_{\rho\alpha})^{-1}\| = \max\{&\|V_{\rho\alpha}(\lambda)(\lambda I + 2\rho A^{\alpha})\|, \|V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda)\|,\\
&\|-AV_{\rho\alpha}^{-1}\|, \|\lambda V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda)\|\}.
\end{aligned}$$

Para concluir, invocamos o Teorema 3.3 do Capítulo 3. □

5.1.3 O caso $\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1$

1ª prova do Teorema 5.4.

Apresentaremos agora uma primeira prova do Teorema 5.4. Nosso objetivo aqui é mostrar que existe uma constante K tal que vale a seguinte limitação uniforme para todo λ com Re$\lambda > 0$:

$$\|\lambda(\lambda I - \Lambda_B)^{-1}x\| \leqslant K. \tag{5.4}$$

Note que, se $x = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in X$, então

$$\begin{aligned}
&\|\lambda(\lambda I - \Lambda_B)^{-1}x\|_X \\
&= \max\{\|u - V_B^{-1}(\lambda)Au + \lambda V_B^{-1}(\lambda)v\|_{E^{\frac{1}{2}}}, \| - \lambda V_B^{-1}(\lambda)Au + \lambda^2 V_B^{-1}(\lambda)v\|_E\} \\
&= \max\{\|[I - V_B^{-1}(\lambda)A]A^{\frac{1}{2}}u + \lambda A^{\frac{1}{2}}V_B^{-1}(\lambda)v\|_E, \| - \lambda A^{\frac{1}{2}}V_B^{-1}(\lambda)A^{\frac{1}{2}}u + \lambda^2 V_B^{-1}(\lambda)v\|_E\},
\end{aligned}$$

e assim

$$\|\lambda(\lambda I - \Lambda_B)^{-1}x\|_X = \left\|\begin{bmatrix} A^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I - V_B^{-1}(\lambda)A & \lambda V_B^{-1}(\lambda) \\ -\lambda V_B^{-1}(\lambda)A & \lambda^2 V_B^{-1}(\lambda) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -A^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}\right\|_{E\times E}.$$

Provada a desigualdade em (5.4), invocaremos o Teorema 3.3 do Capítulo 3, e obteremos o resultado desejado, ou seja, que o semigrupo fortemente contínuo de contrações gerado por Λ_B é analítico. Para isso, utilizaremos uma ideia similiar a da proposição anterior, notando que a desigualdade em (5.4) é equivalente ao seguinte conjunto de desigualdades: existe uma constante M tal que as limitações:

$$\text{(a) } \|A^{\frac{1}{2}}V_B^{-1}(\lambda)A^{\frac{1}{2}}\|_{\mathcal{L}(E)} \leqslant M \tag{5.5}$$

$$\text{(b) } \|\lambda A^{\frac{1}{2}}V_B^{-1}(\lambda)\|_{\mathcal{L}(E)} \leqslant M \tag{5.6}$$

$$\text{(c) } \|\lambda^2 V_B^{-1}(\lambda)\|_{\mathcal{L}(E)} \leqslant M \tag{5.7}$$

são válidas para todo λ com Re$\lambda > 0$. Restando apenas provar a limitação do termo $-\lambda V_B^{-1}(\lambda)A^{\frac{1}{2}}$. No entanto, note que a norma de $\lambda V_B^{-1}(\lambda)A^{\frac{1}{2}}$ é equivalente a norma do operador autoadjunto $(\lambda V_B^{-1}(\lambda)A^{\frac{1}{2}})^*$, isto é, $\|(\lambda V_B^{-1}(\lambda)A^{\frac{1}{2}})^*\|_E = \|\overline{\lambda}V_B^{-1}(\overline{\lambda})A^{\frac{1}{2}}\|_E$, para Re$\overline{\lambda}$ = Re$\lambda > 0$, o que é equivalente à desigualdade em (b).
Provemos as desigualdades (a), (b) e (c).
Prova de (a).
Desde que os operadores A, A^α e B são fechados, temos

$$V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda) - V_B^{-1}(\lambda) = V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda)(V_B(\lambda) - V_{\rho\alpha}(\lambda))V_B^{-1}(\lambda). \tag{5.8}$$

Assim,

$$\begin{aligned}A^{\frac{1}{2}}V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda)A^{\frac{1}{2}} - A^{\frac{1}{2}}V_B^{-1}(\lambda)A^{\frac{1}{2}} &= A^{\frac{1}{2}}V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda)(B-2\rho A^{\alpha})\lambda V_B^{-1}(\lambda)A^{\frac{1}{2}}\\ &= A^{\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}}V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda)(A^{-\frac{\alpha}{2}}BA^{-\frac{\alpha}{2}}-2\rho I)\lambda A^{\frac{\alpha}{2}}V_B^{-1}(\lambda)A^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Lembre que já definimos $S_\alpha = A^{-\frac{\alpha}{2}}BA^{-\frac{\alpha}{2}}$, e vimos que este é autoadjunto, limitado e existe S_α^{-1} limitado, pois estamos assumindo que (H3) é válida. Desse modo, vamos ter

$$A^{\frac{1}{2}}V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda)A^{\frac{1}{2}} - A^{\frac{1}{2}}V_B^{-1}(\lambda)A^{\frac{1}{2}} = \lambda^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}}V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda)(S_\alpha-2\rho I)\lambda^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}V_B^{-1}A^{\frac{1}{2}}.$$

Note que os operadores $A^{\frac{1}{2}}V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda)A^{\frac{1}{2}}$ e $\lambda^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}}$ são limitados, graças aos itens (c) e (d) da Proposição 5.8. Logo, para mostrar que $A^{\frac{1}{2}}V_B^{-1}A^{\frac{1}{2}}$ é limitado, basta mostrarmos que $\lambda^{\frac{1}{2}}A^{\frac{\alpha}{2}}V_B^{-1}(\lambda)A^{\frac{1}{2}}$ é limitado em $\mathcal{L}(E)$ para todo λ com $\mathrm{Re}\lambda > 0$. É o que garante a proposição abaixo, para o caso em que $\beta = 1$.

Proposição 5.9. Dado $\dfrac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1$, seja $\alpha \leqslant \beta \leqslant 1$. Então existe uma constante positiva $k_{\alpha,\beta}$ tal que a seguinte limitação uniforme é válida para λ com $\mathrm{Re}\lambda > 0$

$$\|\lambda^{1+\frac{\alpha-\beta}{2(1-\alpha)}}A^{\frac{\alpha}{2}}V_B^{-1}(\lambda)A^{\frac{\beta}{2}}\| \leqslant k_{\alpha,\beta}.$$

Demonstração. A partir da igualdade em (5.8), temos

$$\begin{aligned}&\lambda^{1+\frac{\alpha-\beta}{2(1-\alpha)}}A^{\frac{\alpha}{2}}V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda)A^{\frac{\beta}{2}} - \lambda^{1+\frac{\alpha-\beta}{2(1-\alpha}}A^{\frac{\alpha}{2}}V_B^{-1}(\lambda)A^{\frac{\beta}{2}}\\ &= \lambda^{1+\frac{\alpha-\beta}{2(1-\alpha)}}A^{\frac{\alpha}{2}}V_{\rho\alpha}(B-2\rho A^{\alpha})\lambda V_B^{-1}(\lambda)A^{\frac{\beta}{2}}\\ &= \lambda A^{\alpha}V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda)(A^{-\frac{\alpha}{\beta}}BA^{-\frac{\alpha}{\beta}}-2\rho I)\lambda^{1+\frac{\alpha-\beta}{2(1-\alpha)}}A^{\frac{\alpha}{2}}V_B^{-1}(\lambda)A^{\frac{\beta}{2}}.\end{aligned}$$

Assim,

$$\lambda^{1+\frac{\alpha-\beta}{2(1-\alpha)}}A^{\frac{\alpha}{2}}V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda)A^{\frac{\beta}{2}} = (I+\lambda A^{\alpha}V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda)(S_\alpha-2\rho I))\lambda^{1+\frac{\alpha-\beta}{2(1-\alpha)}}A^{\frac{\alpha}{2}}V_B^{-1}(\lambda)A^{\frac{\beta}{2}}.$$

Para prosseguir com a prova, faz-se necessária a apresentação do lema a seguir.

Lema 5.10. Seja $0 < 2\rho < \rho_1$, então o operador

$$\zeta_{\rho\alpha}(\lambda) = (I+\lambda A^{\alpha}V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda))(S_\alpha - 2\rho I)$$

é limitado, invertível, com inverso uniformemente limitado em $\mathcal{L}(E)$ para λ com $\mathrm{Re}\lambda > 0$. Em particular, existe uma constante $c_{\rho\alpha}$ tal que para todo λ com $\mathrm{Re}\lambda > 0$, temos

$$\|\zeta_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda)\| = \|[I + \lambda A^{\alpha} V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda)(S_{\alpha} - 2\rho I)]^{-1}\| \leqslant c_{\rho\alpha}. \tag{5.9}$$

Demonstração. Seja $0 < 2\rho < \rho_1$. Lembre que, desde que estamos assumindo (H3), existem $0 < \rho_1 < \rho_2$ e $0 < \alpha \leqslant 1$ tais que para $x \in D(B^{\frac{1}{2}}) = D(A^{\frac{\alpha}{2}})$ temos explicitamente

$$\rho_1 \langle A^{\alpha} x, x\rangle \leqslant \langle Bx, x\rangle \leqslant \rho_2 \langle A^{\alpha} x, x\rangle,$$

daí, temos

$$\rho_1 \langle Ix, x\rangle \leqslant \langle A^{-\frac{\alpha}{2}} B A^{-\frac{\alpha}{2}} x, x\rangle \leqslant \rho_2 \langle Ix, x\rangle,$$

e

$$\rho_1 \langle Ix, x\rangle \leqslant \langle S_{\alpha} x, x\rangle \leqslant \rho_2 \langle Ix, x\rangle.$$

Assim,

$$(\rho_1 - 2\rho)\langle Ix, x\rangle \leqslant \langle (S_{\alpha} - 2\rho I)x, x\rangle \leqslant (\rho_2 - 2\rho)\langle Ix, x\rangle, \tag{5.10}$$

logo

$$\frac{1}{(\rho_2 - 2\rho)I}\langle x, x\rangle \leqslant \langle (S_{\alpha} - 2\rho I)^{-1} x, x\rangle \leqslant \frac{1}{(\rho_1 - 2\rho)I}\langle x, x\rangle \tag{5.11}$$

desde que $S_{\alpha} - 2\rho I \in \mathcal{L}(E)$ é autoadjunto e de (5.10), faz sentido falarmos de $(S_{\alpha} - 2\rho I)^{-1}$. Sendo assim, se reescrevermos a expressão de $\zeta_{\rho\alpha}$ como

$$\zeta_{\rho\alpha}(\lambda) = ((S_{\alpha} - 2\rho I)^{-1} + \lambda A^{\alpha} V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda))(S_{\alpha} - 2\rho I)$$

podemos ver por (5.11) que se mostrarmos

$$\|(S_{\alpha} - 2\rho I)^{-1} + \lambda A^{\alpha} V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda))\| \leqslant \rho_2 - 2\rho$$

para todo λ com $\mathrm{Re}\lambda > 0$, então o resultado está provado.

Note que, para $x \in E$, temos

$$
\begin{aligned}
&\|(S_\alpha - 2\rho I)^{-1} + \lambda A^\alpha V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda))x\| \|x\| \\
&\geqslant |\langle (S_\alpha - 2\rho I)^{-1}x, x\rangle + \langle \lambda A^\alpha V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda)x, x\rangle| \\
&= ([\langle (S_\alpha - 2\rho I)^{-1}x, x\rangle + \mathrm{Re}\langle \lambda A^\alpha V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda)x, x\rangle]^2 + [\mathrm{Im}\langle \lambda A^\alpha V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda)x, x\rangle]^2)^{\frac{1}{2}} \\
&\geqslant \langle (S_\alpha - 2\rho I)^{-1}x, x\rangle,
\end{aligned}
$$

pois as parcelas da soma são todas positivas (recordemos do Teorema 5.15). Desse modo, temos

$$
\|((S_\alpha - 2\rho I)^{-1} + \lambda A^\alpha V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda))x\| \|x\| \geqslant \langle (S_\alpha - 2\rho I)^{-1}x, x\rangle \geqslant \frac{1}{(\rho_2 - 2\rho)I}\langle x, x\rangle.
$$

Logo,

$$
\|((S_\alpha - 2\rho I)^{-1} + \lambda A^\alpha V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda))x\| \geqslant \frac{1}{(\rho_2 - 2\rho)I}\|x\|,
$$

e portanto,

$$
\|((S_\alpha - 2\rho I)^{-1} + \lambda A^\alpha V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda))^{-1}x\| \leqslant \rho_2 - 2\rho.
$$

Por outro lado, veja que temos

$$
|\langle [(S_\alpha - 2\rho I)^{-1} + \lambda A^\alpha V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda)]x, x\rangle| \geqslant \frac{1}{\rho_2 - 2\rho}\|x\|^2,
$$

assim, $\sigma((S_\alpha - 2\rho I)^{-1} + \lambda A^\alpha V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda)) \subset [(\rho_2 - 2\rho)^{-1}, M]$, e portanto 0 pertence ao resolvente deste operador, logo $(S_\alpha - 2\rho I)^{-1} + \lambda A^\alpha V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda)$ é bijetor, em particular, sua imagem é todo o E, e desde que

$$
\ker([(S_\alpha - 2\rho I)^{-1} + \lambda A^\alpha V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda)]^*) = \{0\},
$$

temos então, retomando a expressão de $\zeta_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda)$

$$
\begin{aligned}
\|\zeta_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda)\| &= \|((S_\alpha - 2\rho I)^{-1} + \lambda A^\alpha V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda))^{-1}(S_\alpha - 2\rho I)^{-1}\| \\
&= \|(S_\alpha - 2\rho I)^{-1} + \lambda A^\alpha V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda)\| \|(S_\alpha - 2\rho I)^{-1}\| \\
&\leqslant (\rho_2 - 2\rho)\frac{1}{\rho_2 - 2\rho} = 1.
\end{aligned}
$$

Por fim, note que

$$\begin{aligned}\|\zeta_{\rho\alpha}(\lambda)\| &= \|I + \lambda A^{\alpha} V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda)(S_{\alpha} - 2\rho I)\| \\ &\leqslant \|I\| + \|\lambda A^{\alpha} V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda)(S_{\alpha} - 2\rho I)\| \\ &\leqslant 1 + \frac{1}{2\rho} + \rho_2 - 2\rho \\ &= k_{\rho\rho_2}.\end{aligned}$$

E finalizamos a demonstração do lema. □

Retomando à demonstração da proposição, tendo conhecimento do lema acima, temos

$$\lambda^{1+\frac{(\alpha+\beta)}{2(1-\alpha)}} A^{\frac{\alpha}{2}} V_B^{-1}(\lambda) A^{\frac{\beta}{2}} = \zeta_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda)\lambda^{1+\frac{(\alpha+\beta)}{2(1-\alpha)}} A^{\frac{\alpha}{2}} V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda) A^{\frac{\beta}{2}}$$

e precisamos mostrar que o lado esquerdo da igualdade acima é uniformemente limitado em $\mathcal{L}(E)$. Para isto, desde que $0 \leqslant \alpha < \beta$, temos $\dfrac{\alpha+\beta}{2} > \alpha$, invocaremos a desigualdade em (d) da Proposição 5.8 com

$$\theta = \frac{\beta-\alpha}{2(1-\alpha)} \quad \text{e} \quad 1-\theta = 1 + \frac{\alpha-\beta}{2(1-\alpha)},$$

daí, temos

$$\|\lambda^{1+\frac{(\alpha-\beta)}{2(1-\alpha)}} A^{\frac{\beta-\alpha}{2}} A^{\alpha} V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda)\| = \|\lambda^{1+\frac{(\alpha-\beta)}{2(1-\alpha)}} A^{\frac{\alpha}{2}} V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda) A^{\frac{\beta}{2}}\| \leqslant C_{\rho\theta} \tag{5.12}$$

e nossa afirmação está provada.
Desse modo, juntando (5.9) do lema acima e (5.12), obtemos o resultado da proposição.
Retornamos agora para a demonstração do item (a). Note que a desigualdade provada na proposição é exatamente a que queríamos, no caso em que $\beta = 1$. Portanto,

$$\begin{aligned}\|A^{\frac{1}{2}} V_B^{-1}(\lambda) A^{\frac{1}{2}}\| &= \|A^{\frac{1}{2}} V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda) A^{\frac{1}{2}} - \lambda^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}} V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda)(S_{\alpha} - 2\rho I)\lambda^{\frac{1}{2}} A^{\frac{\alpha}{2}} V_B^{-1}(\lambda) A^{\frac{1}{2}}\| \\ &\leqslant \|A^{\frac{1}{2}} V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda) A^{\frac{1}{2}}\| + \|\lambda^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}} V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda)(S_{\alpha} - 2\rho I)\lambda^{\frac{1}{2}} A^{\frac{\alpha}{2}} V_B^{-1}(\lambda) A^{\frac{1}{2}}\| \\ &= \|A^{\frac{1}{2}} V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda) A^{\frac{1}{2}}\| \|\lambda^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1-\alpha}{2}} V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda)\| \|S_{\alpha} - 2\rho I\| \|\lambda^{\frac{1}{2}} A^{\frac{\alpha}{2}} V_B^{-1}(\lambda) A^{\frac{1}{2}}\| \\ &\leqslant C_{\rho\alpha\mu_1} C_{\rho\theta}(\rho - 2\rho) k_{\alpha,\beta} \\ &= M_{\rho\alpha\beta}.\end{aligned}$$

E assim, concluímos a prova do item (a).

Prova de (b). Utilizando (5.8) novamente, temos

$$\begin{aligned}\lambda A^{\frac{1}{2}} V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda) - \lambda A^{\frac{1}{2}} V_B^{-1}(\lambda) &= \lambda A^{\frac{1}{2}} V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda)(B - 2\rho A^{\alpha})\lambda V_B^{-1}(\lambda)\\ &= \lambda^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}} V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda)(A^{-\frac{\alpha}{2}} B A^{-\frac{\alpha}{2}} - 2\rho I)\lambda^{\frac{3}{2}} A^{\frac{\alpha}{2}} V_B^{-1}(\lambda).\end{aligned}$$

Note que, para λ com $\mathrm{Re}\lambda > 0$, são uniformemente limitados os operadores $\lambda A^{\frac{1}{2}} V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda)$ e $\lambda^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}} V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda)$, graças aos itens (b) e (d) da Proposição 5.8. Logo, pela desigualdade acima, veremos que o resultado que queremos estará provado se mostrarmos que o operador $\lambda^{\frac{3}{2}} A^{\frac{\alpha}{2}} V_B^{-1}(\lambda)$ é uniformemente limitado em $\mathcal{L}(E)$ para todo λ com $\mathrm{Re}\lambda > 0$. Observe que isto é um caso particular (caso $\beta = 0$) do resultado mais geral, apresentado a seguir.

Proposição 5.11. Dado $\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1$, seja $-\alpha \leqslant \beta \leqslant \alpha$. Então, existe uma constante positiva $k_{\alpha,\beta}$ tal que para todo λ com $\mathrm{Re}\lambda > 0$ vale a seguinte limitação uniforme

$$\|\lambda^{\frac{3}{2}-\frac{\beta}{2\alpha}} A^{\frac{\alpha}{2}} V_B^{-1}(\lambda) A^{\frac{\beta}{2}}\| \leqslant k_{\alpha,\beta}.$$

Demonstração. Por (5.8), temos

$$\begin{aligned}\lambda^{\frac{3}{2}-\frac{\beta}{2\alpha}} A^{\frac{\alpha}{2}} V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda) A^{\frac{\beta}{2}} - \lambda^{\frac{3}{2}-\frac{\beta}{2\alpha}} A^{\frac{\alpha}{2}} V_B^{-1}(\lambda) A^{\frac{\beta}{2}} &= \lambda^{\frac{3}{2}-\frac{\beta}{2\alpha}} A^{\frac{\alpha}{2}} V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda)(B - 2\rho A^{\alpha})\lambda V_B^{-1}(\lambda) A^{\frac{\beta}{2}}\\ &= \lambda^{\frac{3}{2}-\frac{\beta}{2\alpha}} A^{\frac{\alpha}{2}} V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda)(S_\alpha - 2\rho I)\lambda A^{\frac{\alpha}{2}} V_B^{-1}(\lambda) A^{\frac{\beta}{2}}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\lambda^{\frac{3}{2}-\frac{\beta}{2\alpha}} A^{\frac{\alpha}{2}} V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda) A^{\frac{\beta}{2}} = \lambda^{\frac{3}{2}-\frac{\beta}{2\alpha}} A^{\frac{\alpha}{2}} V_B^{-1}(\lambda) A^{\frac{\beta}{2}}(I + \lambda A^{\alpha} V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda)(S_\alpha - 2\rho I)). \tag{5.13}$$

Pelo Lema 5.10, a limitação uniforme que queremos é obtida se, e somente se, o lado esquerdo de (5.13) é uniformemente limitado em $\mathcal{L}(E)$ para λ com $\mathrm{Re}\lambda > 0$. Para isto, considere a desigualdade (e) da Proposição 5.8 com θ identificado por $\alpha\theta = \frac{\alpha+\beta}{2}$, (Note que temos $\frac{\alpha+\beta}{2} \leqslant \alpha$ pela definição de α, β) tal que $\theta = \frac{1}{2} + \frac{\beta}{2\alpha}$, $2 - \theta = \frac{3}{2} - \frac{\beta}{2\alpha}$, daí, temos

$$\|\lambda^{\frac{3}{2}-\frac{\beta}{2\alpha}} A^{\frac{\alpha+\beta}{2}} V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda)\| \leqslant C_{\rho\alpha\beta}.$$

Assim, retomando (5.13), temos

$$\lambda^{\frac{3}{2}-\frac{\beta}{2\alpha}} A^{\frac{\alpha}{2}} V_B^{-1}(\lambda) A^{\frac{\beta}{2}} = \zeta_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda)\lambda^{\frac{3}{2}-\frac{\beta}{2\alpha}} A^{\frac{\alpha+\beta}{2}} V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda).$$

Daí,

$$
\begin{aligned}
\|\lambda^{\frac{3}{2}-\frac{\beta}{2\alpha}}A^{\frac{\alpha}{2}}V_B^{-1}(\lambda)A^{\beta}2\| &= \|\zeta_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda)\|\|\lambda^{\frac{3}{2}-\frac{\beta}{2\alpha}}A^{\frac{\alpha+\beta}{2}}V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda) \\
&\leqslant c_{\rho\alpha}C_{\rho\alpha\beta} \\
&\leqslant k_{\alpha,\beta}.
\end{aligned}
$$

E assim, concluímos a demonstração da proposição. □

Com isso, também concluímos a prova do item (b), usando a proposição com $\beta = 0$.
Prova do item (c).
Note que

$$
\begin{aligned}
\lambda^2V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda) - \lambda^2V_B^{-1}(\lambda) &= \lambda^2A^{\frac{\alpha}{2}}V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda)(S_\alpha - 2\rho I)\lambda A^{\frac{\alpha}{2}}V_B^{-1}(\lambda) \\
&= \lambda^{\frac{3}{2}}A^{\frac{\alpha}{2}}V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda)(S_\alpha - 2\rho I)\lambda^{\frac{3}{2}}A^{\frac{\alpha}{2}}V_B^{-1}(\lambda).
\end{aligned}
$$

Recordemos que o item (a) da Proposição 5.8 garante que $\lambda^2V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda)$ é limitado uniformemente em λ com $\mathrm{Re}\lambda > 0$. Também é limitado o operador $\lambda^{\frac{3}{2}}A^{\frac{\alpha}{2}}V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda)$ pelo item (e) da mesma proposição. Por fim, pela Proposição 5.11, temos para $\beta = 0$ que $\lambda^{\frac{3}{2}}A^{\frac{\alpha}{2}}V_B^{-1}(\lambda)$ é uniformemente limitado para todo λ com $\mathrm{Re}\lambda > 0$. Portanto, está provado o item (c). Com isso, concluímos a prova do Teorema 5.4. □

2º prova do Teorema 5.4

Esta prova será baseada na fatoração da função $V_{\rho\alpha}(\lambda)$. Aqui, consideraremos somente o caso $\alpha = \dfrac{1}{2}$.
Seja $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ fixo e escolha ρ como sendo $\rho = \cos(\theta)$, tal que $0 < \rho < 1$. Para $\alpha = \dfrac{1}{2}$ decompomos $V_{\rho\alpha}(\lambda)$ em dois fatores que comutam entre si:

$$
\lambda^2 I + 2\lambda\rho A^{\frac{1}{2}} + A = (\lambda e^{-i\theta} + A^{\frac{1}{2}})(\lambda e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}}).
$$

Em virtude da igualdade acima, e de

$$
\begin{aligned}
&(\lambda^2 I + 2\lambda\rho A^{\frac{1}{2}} + A) + \lambda(B - 2\rho A^{\frac{1}{2}}) \\
&= (\lambda e^{-i\theta} + A^{\frac{1}{2}})(\lambda e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}})\lambda(B - 2\rho A^{\frac{1}{2}}) \\
&= (\lambda e^{-i\theta} + A^{\frac{1}{2}})[I + \lambda(\lambda e^{-i\theta} + A^{\frac{1}{2}})^{-1}(B - 2\rho A^{\frac{1}{2}})(\lambda e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}})^{-1}](\lambda e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}}),
\end{aligned}
$$

reescrevemos a expressão da função $V_B(\lambda)$ como

$$\lambda^2 I + \lambda B + A = (\lambda e^{-i\theta} + A^{\frac{1}{2}})[I + \lambda(\lambda e^{-i\theta} + A^{\frac{1}{2}})^{-1}(B - 2\rho A^{\frac{1}{2}})(\lambda e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}})^{-1}](\lambda e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}}). \tag{5.14}$$

Por conveniência, escreveremos

$$U(\lambda,\theta) = (\lambda e^{-i\theta} + A^{\frac{1}{2}})^{-1}(B - 2\rho A^{\frac{1}{2}})(\lambda e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}})^{-1},$$

daí e de (5.14) obtemos

$$V_B^{-1}(\lambda) = (\lambda e^{-i\theta} + A^{\frac{1}{2}})^{-1}(I + U(\lambda,\theta)(\lambda e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}})^{-1}.$$

Defina $T(\lambda,\theta) = A^{\frac{1}{2}}(\lambda e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}})^{-1}$, então $U(\lambda,\theta)$ pode ser visto como uma extensão do operador

$$(\lambda e^{-i\theta} + A^{\frac{1}{2}})^{-1}(\overline{\lambda} e^{-i\theta} + A^{\frac{1}{2}})T^*(\lambda,\theta)(A^{\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}} - 2\rho A^{\frac{1}{2}})T(\lambda,\theta)$$

que está bem definido como um operador limitado em E.
Podemos então reescrever as expressões dadas em (a), (b) e (c) (explicitadas na 1ª prova do Teorema 5.4) como sendo

$$\begin{aligned}
&A^{\frac{1}{2}}V_B^{-1}(\lambda)A^{\frac{1}{2}} = A^{\frac{1}{2}}(\lambda e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}}(I + U(\lambda,\theta))^{-1}A^{\frac{1}{2}}(\lambda e^{-i\theta} + A^{\frac{1}{2}})^{-1}\\
&\lambda A^{\frac{1}{2}}V_B^{-1}(\lambda) = A^{\frac{1}{2}}(\lambda e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}}(I + U(\lambda,\theta))^{-1}\lambda(\lambda e^{-i\theta} + A^{\frac{1}{2}})^{-1}\\
&\lambda^2 V_B^{-1}(\lambda) = \lambda(\lambda e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}}(I + U(\lambda,\theta))^{-1}\lambda(\lambda e^{-i\theta} + A^{\frac{1}{2}})^{-1}.
\end{aligned}$$

Em vista das igualdades acima, para provar o teorema, tendo em mente as desigualdades explicitadas na primeira prova, é suficiente provar a seguinte proposição:

Proposição 5.12. Sejam $\dfrac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1$ e $\rho_1 > 0$, como em (H3), e escolha $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ tal que $\rho = \cos(\theta)$, então

$$2\rho\|A^{-(\alpha-\frac{1}{2})}\| < \rho_1.$$

Então, para todo λ com $\mathrm{Re}\lambda > 0$, valem as limitações uniformes:

(*i*) $\|\lambda(\lambda e^{\pm i\theta} + A^{\frac{1}{2}})^{-1}\| \leqslant c_{1\theta}$;

(*ii*) $\|A^{\frac{1}{2}}(\lambda e^{\pm i\theta} + A^{\frac{1}{2}})^{-1}\| \leqslant c_{2\theta}$;

(*iii*) $\|(I + U(\lambda,\theta))^{-1}\| \leqslant c_{3\theta}$;

onde as constantes $c_{1\theta}, c_{2\theta}$ e $c_{3\theta}$ dependem somente de θ.

Demonstração. Vamos começar provando (i) e (ii).

Afirmação 5.1. $-A^{\frac{1}{2}}$ é gerador infinitesimal de um semigrupo analítico. De fato, recordemos que por hipótese, A é um operador autoadjunto positivo, logo $A^{\frac{1}{2}}$ também é, e portanto, concluímos que $A^{\frac{1}{2}}$ é setorial.
Desse modo, temos

$$\|(\mu I + A^{\frac{1}{2}})^{-1}\| \leqslant \frac{M}{|\mu|},$$

para todo $\mu \in \Sigma_\phi \subset \rho(-A^{\frac{1}{2}})$, e,

$$\|A^{\frac{1}{2}}(\mu I + A^{\frac{1}{2}})^{-1}\| \leqslant M,$$

para todo $\mu \in \Sigma_\phi$, pois $A^{\frac{1}{2}}(\mu I + A^{\frac{1}{2}})^{-1} = I - \mu(\mu I + A^{\frac{1}{2}})^{-1} \leqslant 1 - |\mu|\frac{M}{|\mu|} = 1 - M$, onde ϕ é um ângulo fixo, porém arbitrário $\frac{\pi}{2} < \phi < \pi$, e

$$\Sigma_\phi = \{\lambda \in \mathbb{C}; |arg\lambda| < \phi\}.$$

Então, como λ percorre todo o lado direito do plano complexo (Re $\lambda > 0$), vemos que $\mu = \lambda e^{\pm i\theta} \in \Sigma_\phi$, com $\phi = \frac{\pi}{2} + \theta + \epsilon < \pi$, para $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.
Por fim, apresentaremos a prova do item (iii). A prova deste, no entanto, será um pouco mais extensa que a dos outros itens, sendo assim, a dividiremos em etapas. Antes, note que desde que A e B são autoadjuntos, temos que $(U(\lambda,\theta))^* = U(\overline{\lambda},\theta)$ e assim,

$$\|(I + \overline{\lambda}U(\overline{\lambda},\theta))^{-1}\| = \|[(I + \lambda U(\lambda,\theta))^{-1}]^*\| = \|(I + \lambda U(\lambda,\theta))^{-1}\|,$$

vemos daí que é suficiente provar (iii) para Re$\lambda > 0$ e Im$\lambda \geqslant 0$.
Etapa 1 Note que para todo λ com Re$\lambda > 0$, vale

$$0 < c_\theta \leqslant \|(\overline{\lambda}e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}})(\lambda e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}})^{-1}\| \leqslant C_\theta, \tag{5.15}$$

para uma constante positiva $C_\theta < \infty$, dependendo somente de θ. De fato, pela identidade do resolvente, temos

$$(\lambda e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}})^{-1} - (\overline{\lambda}e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}})^{-1} = e^{i\theta}(\lambda - \overline{\lambda})(\overline{\lambda}e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}})^{-1}(\lambda e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}})^{-1}.$$

Assim, temos

$$(\overline{\lambda}e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}})(\lambda e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}})^{-1} - I = e^{i\theta}(\overline{\lambda} - \lambda)(\lambda e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}})^{-1}$$
$$- 2ie^{i\theta}Im(\lambda)(\lambda e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}})^{-1}.$$

Desse modo,

$$\begin{aligned} \|(\overline{\lambda}e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}})(\lambda e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}})^{-1}\| &= \|I - Im(\lambda)2ie^{i\theta}(\lambda e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}})^{-1}\| \\ &\leqslant \|I\| + \| - 2ie^{i\theta}Im(\lambda)(\lambda e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}})^{-1}\| \\ &= 1 + 2|e^{i\theta}|\|Im(\lambda)\|(\lambda e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}})^{-1}\| \\ &\leqslant 1 + 2|Im(\lambda)|\frac{M}{|\lambda|} \\ &\leqslant 1 + 2M \leqslant k_\theta. \end{aligned}$$

Para a desigualdade inferior, faremos os cálculos utilizando o inverso

$$[(\overline{\lambda}e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}})^{-1})(\lambda e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}})^{-1}]^{-1} = (\lambda e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}})(\overline{\lambda}e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}})^{-1}.$$

Logo, pela análise anterior temos o resultado.
Etapa 2. Defina

$$\begin{aligned} \langle Q_{\rho\alpha}x, x\rangle &= \langle (S_\alpha - 2\rho A)^{-(\alpha-\frac{1}{2})}x, x\rangle \\ &\geqslant \rho_1 - 2\rho\langle A^{-(\alpha-\frac{1}{2})}x, x\rangle \\ &\geqslant \rho_1 - 2\rho \sup|\langle A^{-(\alpha-\frac{1}{2})}x, x\rangle| \\ &= \rho_1 - 2\rho\|A^{-(\alpha-\frac{1}{2})}x, x\| \geqslant c > 0, \end{aligned}$$

pois $2\rho\|A^{-(\alpha-\frac{1}{2})}\| < \rho_1$, logo $Q_{\rho\alpha}$ é positivo.
Etapa 3. Usando a desigualdade (5.15) e a definição de $U(\lambda, \theta)$ temos para $x \in E$

$$\begin{aligned} & C_\theta\|(I + U(\lambda,\theta))x\|\|x\| \\ &\geqslant \|(I + U(\lambda,\theta))x\|\|(\overline{\lambda}e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}})(\lambda e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}})^{-1}x\| \\ &\geqslant |\langle (I + U(\lambda,\theta))x, (\overline{\lambda}e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}})(\lambda e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}})^{-1}x\rangle| \\ &= |\langle (I + (\lambda e^{-i\theta} + A^{\frac{1}{2}})^{-1}(B - 2\rho A^{\frac{1}{2}})(\lambda e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}})^{-1})x, (\overline{\lambda}e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}})(\lambda e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}})^{-1}x\rangle| \\ &= |\langle x, (\overline{\lambda}e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}})(\lambda e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}})^{-1}x\rangle + \\ & \langle (\lambda e^{-i\theta} + A^{\frac{1}{2}})^{-1}(B - 2\rho A^{\frac{1}{2}})(\lambda e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}})^{-1})x, (\overline{\lambda}e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}})(\lambda e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}})^{-1}x\rangle|. \end{aligned}$$

Para simplificar a notação, denotaremos

$$J_1(\lambda,\theta,x) = \langle x, (\overline{\lambda}e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}})(\lambda e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}})^{-1}x\rangle$$

e

$$J_2(\lambda,\theta,x) = \langle(\lambda e^{-i\theta} + A^{\frac{1}{2}})^{-1}\lambda(B - 2\rho A^{\frac{1}{2}})(\lambda e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}})^{-1}x, (\overline{\lambda}e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}})(\lambda e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}})^{-1}x\rangle,$$

que está bem definido em E como segue abaixo. Desse modo, pelas desigualdades acima vistas, temos

$$C_\theta\|(I + U(\lambda,\theta))x\|\|x\| \geqslant |J_1(\lambda,\theta,x) + J_2(\lambda,\theta,x)|. \tag{5.16}$$

Para facilitar a notação mencionaremos apenas J_1 e J_2 omitindo (λ,θ,x).
Etapa 4. As seguintes propriedades de J_1 serão essenciais

$$\text{Re}J_1 \geqslant 0 \text{ para Re } \lambda \geqslant |\text{Im}\lambda|$$

$$\text{e (Im } \lambda)(\text{Im}J_1) \geqslant 0 \text{ para Re}\lambda > 0.$$

De fato, defina $\xi(\lambda) = (\lambda e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}})^{-1}x$ e logo $x = (\lambda e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}})\xi(\lambda)$. Feito isso e movendo $(\overline{\lambda}e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}})$ para a esquerda, temos

$$\begin{aligned} J_1(\lambda,\theta,x) &= \langle(\lambda e^{-i\theta} + A^{\frac{1}{2}})(\lambda e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}})\xi(\lambda), \xi(\lambda)\rangle \\ &= \langle(\lambda^2 I + 2\rho\lambda A^{\frac{1}{2}} + A)\xi(\lambda), \xi(\lambda)\rangle \\ &= \lambda^2\langle\xi(\lambda),\xi(\lambda)\rangle + 2\rho\lambda\langle A^{\frac{1}{2}}\xi(\lambda),\xi(\lambda)\rangle + \langle A^{\frac{1}{2}}\xi(\lambda), A^{\frac{1}{2}}\xi(\lambda)\rangle. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Assim,

$$\begin{aligned} &J_1(\lambda,\theta,x) \\ &= [(\text{Re}\lambda)^2 - (\text{Im}\lambda)^2]\|\xi(\lambda)\|^2 + 2\rho\text{Re}\lambda\|A^{\frac{1}{4}}\xi(\lambda)\|^2 + \|A^{\frac{1}{2}}\xi(\lambda)\|^2 + 2i(\text{Im}\lambda)\rho\|A^{\frac{1}{4}}\xi(\lambda)\|^2. \end{aligned}$$

Como $\text{Re}\lambda \geqslant |\text{Im}\lambda|$, temos $(\text{Re }\lambda)^2 \geqslant (\text{Im}\lambda)^2$ e $\text{Re}\lambda > 0$, logo, $\text{Re}J_1 \geqslant 0$.
Etapa 5.Usando a definiçao de $Q_{\rho\alpha}$ dada na Etapa 2, reescrevemos J_2 como sendo

$$J_2(\lambda,\theta,x) = \lambda\langle Q_{\rho\alpha}y, y\rangle = (Re\lambda)\langle Q_{\rho\alpha}y, y\rangle + i(Im\lambda)\langle Q_{\rho\alpha}y, y\rangle,$$

onde definimos para $x \in E$

$$y = A^{\frac{\alpha}{2}}(\lambda e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}})^{-1}x.$$

De fato, veja que

$$\begin{aligned}
\lambda\langle Q_{\rho\alpha}y, y\rangle &= \lambda\langle A^{-\frac{\alpha}{2}}BA^{-\frac{\alpha}{2}} - 2\rho A^{-(\alpha-\frac{1}{2})})A^{\frac{\alpha}{2}}(\lambda e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}})^{-1}x, A^{\frac{\alpha}{2}}(\lambda e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}})^{-1}x\rangle \\
&= \lambda\langle (A^{-\frac{\alpha}{2}}B - 2\rho A^{-\frac{\alpha}{2}}A^{\frac{1}{2}})(\lambda e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}})^{-1}x, A^{\frac{\alpha}{2}}(\lambda e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}})^{-1}x\rangle \\
&= \lambda\langle (B - 2\rho A^{\frac{1}{2}})(\lambda e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}})^{-1}x, (\lambda e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}})^{-1}\rangle \\
&= \lambda\langle (\lambda e^{-i\theta} + A^{\frac{1}{2}})(\lambda e^{-i\theta} + A^{\frac{1}{2}})^{-1}(B - 2\rho A^{\frac{1}{2}})(\lambda e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}})^{-1}x, (\lambda e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}})^{-1}\rangle \\
&= \lambda\langle (\lambda e^{-i\theta} + A^{\frac{1}{2}})^{-1}(B - 2\rho A^{\frac{1}{2}})(\lambda e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}})^{-1}x, (\overline{\lambda} e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}})(\lambda e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}})^{-1}\rangle.
\end{aligned}$$

Note que na última igualdade temos exatamente a expressão de J_2.
Juntando a Etapa 5, o cálculo para J_1 feito na Etapa 4, a desigualdade obtida para $\langle Q_{\rho\alpha}x, x\rangle$ e $(\mathrm{Im}\lambda)(\mathrm{Im}J_1(\lambda, \theta, x)) \geqslant 0$ para $\mathrm{Re}\lambda > 0$, obtemos

$$(\mathrm{Im}J_1)(\mathrm{Im}J_2) \geqslant 0. \tag{5.18}$$

Etapa 6.

$$\begin{aligned}
|J_1 + J_2|^2 &= (\mathrm{Re}(J_1 + J_2))^2 + (\mathrm{Im}(J_1 + J_2))^2 \\
&= (\mathrm{Re}J_1)^2 + (\mathrm{Re}J_2)^2 + 2(\mathrm{Re}J_1)(\mathrm{Re}J_2) + (\mathrm{Im}J_1)^2 + (\mathrm{Im}J_2)^2 + 2(\mathrm{Im}J_1)(\mathrm{Im}J_2) \\
&= |J_1|^2 + |J_2|^2 + 2(\mathrm{Re}J_1)(\mathrm{Re}J_2) + 2(\mathrm{Im}J_1)(\mathrm{Im}J_2) \\
&\geqslant |J_1|^2 + |J_2|^2 + 2(\mathrm{Re}J_1)(\mathrm{Re}J_2).
\end{aligned}$$

Daí, temos dois casos a considerar:
- Para $\mathrm{Re}\lambda \geqslant |\mathrm{Im}\lambda|$, temos

$$\begin{aligned}
|J_1 + J_2|^2 &\geqslant |J_1|^2 + |J_2|^2 + 2(\mathrm{Re}J_1)(\mathrm{Re}J_2) \\
&\geqslant |J_1|^2 + |\lambda|(\langle Q_{\rho\alpha}y, y\rangle)^2 + 2(\mathrm{Re}J_1)(\mathrm{Re}\lambda)\langle Q_{\rho\alpha}y, y\rangle \\
&= (\mathrm{Re}J_1)^2 + (\mathrm{Im}J_1)^2 + |\lambda|(\langle Q_{\rho\alpha}y, y\rangle)^2 + 2(\mathrm{Re}J_1)(\mathrm{Re}\lambda)\langle Q_{\rho\alpha}y, y\rangle.
\end{aligned}$$

- Para $0 < \mathrm{Re}\lambda \leqslant |\mathrm{Im}\lambda|$ e para $\dfrac{1}{2} < \epsilon < 1$ note que

$$\begin{aligned}
2(\mathrm{Re}J_1)(\mathrm{Re}J_2) &= 2(\mathrm{Re}J_1)(\mathrm{Re}\lambda)\langle Q_{\rho\alpha}y, y\rangle \\
&\geqslant -\epsilon(\mathrm{Re}J_1)^2 - \frac{1}{\epsilon}(\mathrm{Re}\lambda)^2(\langle Q_{\rho\alpha}y, y\rangle)^2
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}|\lambda|^2 - \frac{1}{\epsilon}(\mathrm{Re}\lambda)^2 &= \left(1 - \frac{1}{\epsilon}\right)(\mathrm{Re}\lambda)^2 + (\mathrm{Im}\lambda)^2 \\ &\geqslant \left(1 - \frac{1}{\epsilon}\right)(\mathrm{Im}\lambda)^2 + (\mathrm{Im}\lambda)^2 \\ &= (\mathrm{Im}\lambda)^2\left(1 - \frac{1}{\epsilon} + 1\right) \\ &= (\mathrm{Im}\lambda)^2\left(2 - \frac{1}{\epsilon}\right),\end{aligned}$$

pois $\mathrm{Re}\lambda \leqslant |\mathrm{Im}\lambda|$ e $1 - \dfrac{1}{\epsilon} < 0$. Além disso, veja que $0 < 2 - \dfrac{1}{\epsilon} < 1$ e retomando a expressão de $|J_1 + J_2|^2$ temos

$$\begin{aligned}|J_1 + J_2|^2 &\geqslant (\mathrm{Re}J_1)^2 + (\mathrm{Im}J_1)^2 + |\lambda|^2(\langle Q_{\rho\alpha}y, y\rangle)^2 - \epsilon(\mathrm{Re}J_1)^2 - \frac{1}{\epsilon}(\mathrm{Re}\lambda)^2(\langle Q_{\rho\alpha}y, y\rangle)^2 \\ &= (1-\epsilon)(\mathrm{Re}J_1)^2 + (\mathrm{Im}\lambda)^2 + (\langle Q_{\rho\alpha}y, y\rangle)^2(|\lambda|^2 - \frac{1}{\epsilon}(\mathrm{Re}\lambda)^2) \\ &\geqslant (1-\epsilon)|J_1|^2 + (\langle Q_{\rho\alpha}y, y\rangle)^2(\mathrm{Im}\lambda)^2\left(2 - \frac{1}{\epsilon}\right),\end{aligned}$$

para $\dfrac{1}{2} < \epsilon < 1$.

Etapa 7. Para continuarmos com a demonstração, precisamos antes apresentar um lema que será crucial no desenvolvimento desta.

Lema 5.13. Existe uma constante adequada $\dfrac{1}{2} < \epsilon_1 < 1$ tal que para todo $x \in E$ e para todo $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ tem-se

$$\begin{aligned}|J_1(\lambda,\theta,x) + J_2(\lambda,\theta,x)|^2 &\geqslant (1-\epsilon)|J_1|^2 + \left(2 - \frac{1}{\epsilon_1}\right)(\mathrm{Im}\lambda)^2(\langle Q_{\rho\alpha}y, y\rangle)^2 \\ &\geqslant (1-\epsilon_1)\|x\|^4,\end{aligned}$$

para $\mathrm{Re}\lambda > 0$ e $\mathrm{Im}\lambda \geqslant 0$.

Demonstração. Vamos dividir a prova em 3 etapas.

(i) Comecemos recordando de

$$J_1(\lambda,\theta,x) = \langle x, (\overline{\lambda}e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}})^{-1}x\rangle$$

e de

$$(\overline{\lambda}e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}})(\lambda e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}})^{-1} = I - 2ie^{i\theta}(Im\lambda)(\lambda e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}})^{-1}$$

assim,

$$
\begin{aligned}
&J_1(\lambda,\theta,x)\\
&=\langle x,(I-2ie^{i\theta}(\mathrm{Im}\lambda)(\lambda e^{i\theta}+A^{\frac{1}{2}})^{-1})x\rangle\\
&=\langle x,x\rangle-\langle x,2ie^{i\theta}(\mathrm{Im}\lambda)(\lambda e^{i\theta}+A^{\frac{1}{2}})^{-1}x\rangle\\
&=\|x\|^2-2ie^{i\theta}(\mathrm{Im}\lambda)\langle x,(\lambda e^{i\theta}+A^{\frac{1}{2}})^{-1}x\rangle\\
&=\|x\|^2-2i(\mathrm{Im}\lambda)\mathrm{Re}(e^{i\theta}\langle x,\lambda e^{i\theta}+A^{\frac{1}{2}})^{-1}x\rangle)+2(\mathrm{Im}\lambda)(\mathrm{Im}(e^{i\theta}\langle x,(\lambda e^{i\theta}+A^{\frac{1}{2}})^{-1}x\rangle\\
&=\|x\|^2-2(\mathrm{Im}\lambda)\mathrm{Im}[e^{-i\theta}\langle x,(\lambda e^{i\theta}+A^{\frac{1}{2}})^{-1}x\rangle]+i2(\mathrm{Im}\lambda)\mathrm{Re}[e^{-i\theta}\langle x,(\lambda e^{i\theta}+A^{\frac{1}{2}})^{-1}x\rangle].
\end{aligned}
$$

Isto implica que

$$
\begin{aligned}
&|J_1(\lambda,\theta,x)|^2\\
&=\|x\|^4+4(\mathrm{Im}\lambda)^2|e^{-i\theta}\langle x,(\lambda e^{i\theta}+A^{\frac{1}{2}})^{-1}x\rangle|^2-4\|x\|^2(\mathrm{Im}\lambda)\mathrm{Im}(e^{-i\theta}\langle x,(\lambda e^{i\theta}+A^{\frac{1}{2}})^{-1}x\rangle)
\end{aligned}
\tag{5.19}
$$

onde usando a base ortonormal $\{e_n\}$ de autovetores de A com autovalores $\{\mu_n\}$, $0<\mu_1\leqslant\mu_2\leqslant\cdots$, temos

$$
\begin{aligned}
e^{-i\theta}\langle x,(\lambda e^{i\theta}+A^{\frac{1}{2}})^{-1}x\rangle&=e^{-i\theta}\left\langle x,\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda e^{i\theta}+\mu_n^{\frac{1}{2}}}\langle x,e_n\rangle e_n\right\rangle\\
&=e^{-i\theta}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\langle x,e_n\rangle|^2}{\lambda e^{i\theta}+\mu_n^{\frac{1}{2}}}\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\langle x,e_n\rangle|^2}{\overline{\lambda}+\mu_n^{\frac{1}{2}}e^{i\theta}}\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda+\mu_n^{\frac{1}{2}}e^{-i\theta}}{|\lambda+\mu_n^{\frac{1}{2}}e^{-i\theta}|^2}|\langle x,e_n\rangle|^2.
\end{aligned}
$$

Tomando a parte imaginária da igualdade acima e inserindo em (5.19), temos

$$
\begin{aligned}
|J_1(\lambda,\theta,x)|^2&=\|x\|^4+4(\mathrm{Im}\lambda)^2|e^{-i\theta}\langle x,(\lambda e^{i\theta}+A^{\frac{1}{2}})^{-1}x\rangle|^2-\\
&\quad-4\|x\|^2(\mathrm{Im}\lambda)^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\langle x,e_n\rangle|^2}{|\lambda+\mu_n^{\frac{1}{2}}e^{-i\theta}|^2}+4\|x\|^2(\mathrm{Im}\lambda)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n^{\frac{1}{2}}+\mathrm{sen}(\theta)}{|\lambda+\mu_n^{\frac{1}{2}}e^{-i\theta}|^2}.
\end{aligned}
$$

Notamos que $(\mathrm{Im}\lambda)\,\mathrm{sen}(\theta)\geqslant 0$ sob nossas presentes afirmações.

(ii) Recordemos que

$$\langle Q_{\rho\alpha}y,y\rangle\geqslant 0$$

e

$$y = A^{\frac{\alpha}{2}}(\lambda e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}})^{-1}x.$$

Obtemos, com $\rho_0 > 0$, que

$$\begin{aligned}
\langle Q_{\rho\alpha} y, y\rangle &\geqslant \rho_0\|y\|^2 \\
&= \rho_0\|A^{\frac{\alpha}{2}}(\lambda e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}})^{-1}x\|^2 \\
&= \rho_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n^{\alpha}}{|\lambda e^{i\theta} + \mu_n^{\frac{1}{2}}|^2} |\langle x, e_n\rangle|^2 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n^{\alpha}}{|\lambda + \mu_n^{\frac{1}{2}} e^{-i\theta}|^2} |\langle x, e_n\rangle|^2.
\end{aligned}$$

(iii) É suficiente provar a desigualdade do lema para $x \in E$ com $\|x\| = 1$. Portanto, juntando o que fizemos nas etapas (i) e (ii), tomando $\dfrac{1}{2} < \epsilon < 1$ e $x \in E$ com $\|x\| = 1$, obtemos:

$$\begin{aligned}
&(1-\epsilon)|J_1|^2 + \left(2 - \frac{1}{\epsilon}\right)(Im\lambda)^2\langle Q_{\rho\alpha} y, y\rangle \\
&\geqslant (1-\epsilon)\Bigg[\|x\|^4 + 4(Im\lambda)^2|e^{-i\theta}\langle x, (\lambda e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}})x\rangle|^2 \\
&+4\|x\|^2(Im\lambda)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n^{\frac{1}{2}}\operatorname{sen}(\theta)}{|\lambda + \mu_n^{\frac{1}{2}} e^{-i\theta}|^2}|\langle x, e_n\rangle|^2 - 4\|x\|^2(Im\lambda)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\langle x, e_n\rangle|^2}{|\lambda + \mu_n^{\frac{1}{2}} e^{-i\theta}|^2}\Bigg] \\
&+ \left(2 - \frac{1}{\epsilon}\right)(Im\lambda)^2\rho_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n}{|\lambda + \mu_n^{\frac{1}{2}} e^{-i\theta}|^2}|\langle x, e_n\rangle|^2.
\end{aligned}$$

Distribuindo,

$$\begin{aligned}
&(1-\epsilon)|J_1|^2 + \left(2 - \frac{1}{\epsilon}\right)(Im\lambda)^2\langle Q_{\rho\alpha} y, y\rangle \\
&= (1-\epsilon)\|x\|^4 + 4(1-\epsilon)(Im\lambda)^2|e^{-i\theta}\langle x, (\lambda e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}})^{-1}x\rangle|^2 \\
&+ 4(1-\epsilon)\|x\|^4(Im\lambda)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n^{\frac{1}{2}}\operatorname{sen}(\theta)}{|\lambda + \mu_n^{\frac{1}{2}} e^{-i\theta}|} - 4(1-\epsilon)(\mathrm{Im}\lambda)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\langle x, e_n\rangle|^2}{|\lambda + \mu_n^{\frac{1}{2}} e^{-i\theta}|^2} \\
&+ \left(2 - \frac{1}{\epsilon}\right)(\mathrm{Im}\lambda)^2\rho_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n^{\alpha}}{|\lambda + \mu_n^{\frac{1}{2}} e^{-i\theta}|^2}|\langle x, e_n\rangle|^2 \\
&= (1-\epsilon) + 4(1-\epsilon)(Im\lambda)^2|e^{-i\theta}\langle x, (\lambda e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}})^{-1}x\rangle|^2 \\
&+ 4(1-\epsilon)\operatorname{sen}(\theta)(\mathrm{Im}\ \lambda)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n^{\frac{1}{2}}}{|\lambda + \mu_n^{\frac{1}{2}} e^{-i\theta}|}|\langle x, e_n\rangle|^2 + (Im\lambda)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(2 - \frac{1}{\epsilon}\right)\rho_0\mu_n^{\alpha} - 4(1-\epsilon)}{|\lambda + \mu_n^{\frac{1}{2}} e^{-i\theta}|^2}|\langle x, e_n\rangle|^2.
\end{aligned}$$

Denotemos $f_{n\alpha}(\epsilon) = \left(2 - \dfrac{1}{\epsilon}\right)\rho_0\mu_n^\alpha - 4(1-\epsilon)$ para $\dfrac{1}{2} < \epsilon < 1$. Nosso objetivo agora é mostrar que são não negativos os termos do lado direito da última igualdade acima. Para isso, basta mostrarmos que existe $\dfrac{1}{2} < \epsilon_1 < 1$ tal que $f_{n\alpha}(\epsilon_1) \geqslant 0$ para todo n. Com efeito, recordemos que a sequência $\{\mu_n\}$ é tal que $0 < \mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \cdots$, então temos

$$f_{n\alpha}(\epsilon) \geqslant f_{1\alpha}(\epsilon) = -4(1-\epsilon) + \left(2 - \frac{1}{\epsilon}\right)\rho_0\mu_1^\alpha.$$

Agora, queremos determinar ϵ_1 de modo que $f_{1\alpha} \geqslant 0$. Note que

$$\begin{aligned}\left(2 - \frac{1}{\epsilon}\right)\rho_0\mu_1^\alpha - 4(1-\epsilon) \geqslant 0 &\Leftrightarrow 2\rho_0\mu_1^\alpha - \frac{1}{\epsilon}\rho_0\mu_1^\alpha - 4 + 4\epsilon \geqslant 0\\ &\Leftrightarrow 2\rho_0\mu_1^\alpha\epsilon - \rho_0\mu_1^\alpha - 4\epsilon + 4\epsilon^2 \geqslant 0.\end{aligned}$$

Desde que $f_{1\alpha}(\epsilon)$ é estritamente crescente e $f_{1\alpha}(1) = \mu_1^\alpha\rho_0 > 0$ e dos cálculos feitos acima, vemos que para obter o que queremos basta escolhermos ϵ_1 tal que

$$1 > \epsilon_1 > -\frac{(\rho_0\mu_1^\alpha - 2) + \sqrt{(\rho_0\mu_1^\alpha)^2 + 4}}{4} > \frac{1}{2}.$$

Logo, para este ϵ_1, temos $f_{n\alpha}(\epsilon_1) > 0$ e portanto, obtemos $|J_1 + J_2|^2 \geqslant (1-\epsilon)$. E concluímos a prova do lema. □

Etapa 8. Agora, tendo conhecimento do lema apresentado na Etapa 7, e da desigualdade (5.16), temos para todo $x \in E$ e todo λ com $\mathrm{Re}\lambda > 0$ e $\mathrm{Im}\lambda \geqslant 0$ a seguinte limitação uniforme

$$\|(I + \lambda U(\lambda,\theta))x\|\|x\| \geqslant \frac{(1-\epsilon_1)^{\frac{1}{2}}}{C_\theta}\|x\|^2. \tag{5.20}$$

Logo, de (5.20) a fim de concluir o item (p), resta verificar que $R(I + \lambda U(\lambda,\theta)) = E$. Isso é facilmente checado, de (5.20) e por verificar que (relembrando a definição de $U(\lambda,\theta)$) o núcleo do operador adjunto

$$(I + \lambda U(\lambda,\theta))^* = I + \overline{\lambda}(\overline{\lambda}e^{-i\theta} + A^{\frac{1}{2}})^{-1}(B - 2\rho A^{\frac{1}{2}})(\overline{\lambda}e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}})^{-1}$$

é o subespaço trivial. De fato, note que se $x \in \ker((I + \lambda U(\lambda,\theta))^*)$, então

$$(I + \lambda U(\lambda,\theta))^* x = 0 \implies \overline{\lambda}(\overline{\lambda}e^{-i\theta} + A^{\frac{1}{2}})^{-1}(B - 2\rho A^{\frac{1}{2}})(\overline{\lambda}e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}})^{-1}x = -x, \tag{5.21}$$

para λ fixo com $\mathrm{Re}\lambda > 0$. Precisamos mostrar que $x = 0$. Vamos começar multiplicando a igualdade em (5.21) pelo operador limitado $(\lambda e^{-i\theta} + A^{\frac{1}{2}})^{-1}(\overline{\lambda}e^{-i\theta} + A^{\frac{1}{2}})$, temos

$$(\lambda e^{-i\theta} + A^{\frac{1}{2}})^{-1}\overline{\lambda}(B - 2\rho A^{\frac{1}{2}})(\overline{\lambda}e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}})^{-1}x = -(\lambda e^{-i\theta} + A^{\frac{1}{2}})^{-1}(\overline{\lambda}e^{-i\theta} + A^{\frac{1}{2}})x.$$

Agora, tomando o produto interno por x

$$\begin{aligned} \overline{\lambda}\langle(B - 2\rho A^{\frac{1}{2}})(\overline{\lambda}e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}})^{-1}x, (\overline{\lambda}e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}})^{-1}x\rangle &= -\langle x, (\lambda e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}})^{-1}(\overline{\lambda}e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}})x\rangle \\ &= -J_1(\lambda, \theta, x). \end{aligned} \tag{5.22}$$

Tomando a parte imaginária da igualdade acima e multiplicando por $(\mathrm{Im}\overline{\lambda})$ temos (observando que o produto interno do lado esquerdo é real)

$$(\mathrm{Im}\overline{\lambda})^2\langle(B - 2\rho A^{\frac{1}{2}})(\overline{\lambda}e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}})^{-1}x, (\overline{\lambda}e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}})^{-1}x\rangle = \mathrm{Im}\overline{\lambda}(\mathrm{Im}J_1).$$

Como já vimos, $\mathrm{Im}\overline{\lambda}(\mathrm{Im}J_1) \geqslant 0$, logo $-\mathrm{Im}\overline{\lambda}(\mathrm{Im}J_1) \leqslant 0$ para λ com $\mathrm{Re}\lambda > 0$. Desse modo, concluímos que ambos os lados da igualdade são iguais a zero. Daí, temos

- Se $\mathrm{Im}\overline{\lambda} \neq 0$, temos $(\overline{\lambda}e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}})^{-1}x = 0$ e logo $x = 0$.
- Se $\mathrm{Im}\overline{\lambda} = 0$, usando a parte real de (5.22), obtemos

$$\mathrm{Re}\lambda\langle(B - 2\rho A^{\frac{1}{2}})(\overline{\lambda}e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}})^{-1}x, (\overline{\lambda}e^{i\theta} + A^{\frac{1}{2}})^{-1}x\rangle = -\mathrm{Re}J_1$$

e assim, concluímos novamente que ambos os lados da igualdade são iguais a zero, e portanto concluímos que $x = 0$, como no caso anterior. Desse modo, obtemos

$$\|[I + \lambda U(\lambda, \theta)]^{-1}\| \leqslant \frac{(1 - \epsilon_1)^{\frac{1}{2}}}{C_\theta}\|x\|,$$

para λ com $\mathrm{Re}\lambda > 0$ e $\mathrm{Im}\lambda \geqslant 0$. Mas, pelas observações feitas no início da demonstração deste item, segue o resultado para todo λ com $\mathrm{Re}\lambda > 0$. □

5.1.4 O caso $\alpha = \dfrac{1}{2}$.

Prova do A.8.

Façamos algumas apresentações preliminares.
Seja $\{\mathcal{E}, \mathcal{F}\}$ um par de espaços de Hilbert possuindo propriedades análogas ao par $\{E, F\}$. Seja A um operador linear contínuo de F em $\mathcal{F}$ e de E em $\mathcal{E}$, isto é, $A \in \mathcal{L}(E; \mathcal{E}) \cap \mathcal{L}(F; \mathcal{F})$. Dito isso, apresentamos o seguinte teorema:

Teorema 5.14. *Seja A um operador linear como definido acima, então*

$$A \in \mathcal{L}([E,F]_\theta;[\mathcal{E},\mathcal{F}]_\theta) \tag{5.23}$$

para todo θ com $0<\theta<1$.

Demonstração. Ver [22]. □

Vamos começar mostrando que o operador Λ_B gera um semigrupo analítico de contrações em $Z = D(A^{\frac{1}{4}}) \times [D(A^{\frac{1}{4}})]'$ com as normas definidas em (5.1), depois em $F = D(A^{\frac{3}{4}}) \times D(A^{\frac{1}{4}})$ com a norma definida na primeira linha de (5.1). E daí, usamos interpolação. Mais precisamente, aplicamos o Teorema 5.23, para a caracterização de Hille-Yosida em Z e F de $(\lambda I - \Lambda_B)^{-1}$. Portanto, obtemos que para todo λ no complementar Σ_c de um setor triangular adequado

$$\Sigma = \{\lambda \in \mathbb{C};\ |arg\lambda| > \theta_0,\ \frac{\pi}{2} < \theta_0 < 2\pi\}$$

o operador $(\lambda I - \Lambda_B)^{-1}$ é contínuo do espaço de interpolação

$$\begin{aligned}[F,Z]_\theta &= [D(A^{\frac{3}{4}}) \times D(A^{\frac{1}{4}}), D(A^{\frac{1}{4}}) \times D(A^{\frac{1}{4}})']_\theta \\ &= D(A^{\frac{3}{4}-\frac{\theta}{2}}) \times D(A^{\frac{1}{4}-\frac{\theta}{2}})\end{aligned}$$

nele mesmo e satisfaz aqui a caracterização de Hille-Yosida, isto é,

$$\|(\lambda I - \Lambda_B)^{-1}\|_{\mathcal{L}([F,Z]_\theta)} \leqslant \frac{C}{|\lambda|}.$$

É claro que o semigrupo fortemente contínuo de contrações gerado por Λ_B em X, se estende, a Z e se restringe a F. Trataremos agora da analiticidade do semigrupo.

Λ_B gera um semigrupo analítico em Z.

Devemos provar que existe uma constante positiva C tal que para λ com $\mathrm{Re}\lambda > 0$, vale a seguinte limitação uniforme

$$\|(\lambda I - \Lambda_B)^{-1}\|_{\mathcal{L}(Z)} = \left\| \begin{bmatrix} A^{\frac{1}{4}} & 0 \\ 0 & A^{\frac{1}{4}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I - V_B^{-1}(\lambda)A & \lambda V_B^{-1}(\lambda) \\ -\lambda V_B^{-1}(\lambda)A & \lambda^2 V_B^{-1}(\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{-\frac{1}{4}} & 0 \\ 0 & A^{\frac{1}{4}} \end{bmatrix} \right\|_{\mathcal{L}(W)} \leqslant C,$$

onde $W = E \times E$; ou equivalentemente, que existe $M \geqslant 1$ tal que para todo λ com

Re$\lambda > 0$ temos:

$$\|A^{\frac{1}{4}}V_B^{-1}(\lambda)A^{\frac{3}{4}}\| \leqslant M \tag{5.24}$$

$$\|\lambda A^{\frac{1}{4}}V_B^{-1}(\lambda)A^{\frac{1}{4}}\| \leqslant M \tag{5.25}$$

$$\|\lambda^2 A^{-\frac{1}{4}}V_B^{-1}A^{\frac{1}{4}}\| \leqslant M. \tag{5.26}$$

Durante esta seção, por conveniência, iremos considerar $\alpha = \dfrac{1}{2}$ e escrever $V_\rho^{-1}(\lambda)$, S, etc., ao invés de $V_{\rho\alpha}^{-1}(\lambda)$, S_α, etc. Além disso, reduziremos o trabalho invocando o Lema 5.10.
Para provar as desigualdades (5.24-5.26), estabeleceremos respectivamente, as seguintes identidades

$$\begin{aligned}
A^{\frac{1}{4}}V_B^{-1}(\lambda)A^{\frac{3}{4}} &= [I + \lambda A^{\frac{1}{2}}V_\rho^{-1}(\lambda)(S - 2\rho I)]A^{\frac{1}{4}}V_B^{-1}(\lambda)A^{\frac{3}{4}}\\
\lambda A^{\frac{1}{4}}V_\rho^{-1}(\lambda)A^{\frac{1}{4}} &= [I + \lambda A^{\frac{1}{2}}V_\rho^{-1}(\lambda)(S - 2\rho I)]\lambda A^{\frac{1}{4}}V_B^{-1}(\lambda)A^{\frac{1}{4}}\\
\lambda^2 A^{-\frac{1}{4}}V_\rho^{-1}(\lambda)A^{\frac{1}{4}} &= \lambda^2 A^{-\frac{1}{4}}V_B^{-1}(\lambda)A^{\frac{1}{4}}[I + (S - 2\rho I)\lambda A^{\frac{1}{2}}V_\rho^{-1}(\lambda)].
\end{aligned}$$

Com isso, aplicamos o Lema 5.10 com $\alpha = \dfrac{1}{2}$, nas identidades acima, e resta mostrar que os operadores $A^{\frac{1}{4}}V_B^{-1}(\lambda)A^{\frac{3}{4}}$, $\lambda A^{\frac{1}{4}}V_B^{-1}(\lambda)A^{\frac{1}{4}}$ e $\lambda^2 A^{-\frac{1}{4}}V_B^{-1}(\lambda)A^{\frac{1}{4}}$. Mas, isto já está feito na primeira prova do Teorema 5.4, com algumas alterações simples. E assim, concluímos o resultado.

Λ_B gera um semigrupo analítico em F.

Aqui, devemos provar que existe uma constante positiva C tal que para todo λ com Re$\lambda > 0$ a seguinte limitação uniforme vale

$$\|(\lambda I - \Lambda_B)^{-1}\|_{\mathcal{L}(F)} = \left\| \begin{bmatrix} A^{\frac{3}{4}} & 0 \\ 0 & A^{\frac{3}{4}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I - V_B^{-1}(\lambda)A & \lambda V_B^{-1}(\lambda) \\ -\lambda V_B^{-1}(\lambda)A & \lambda^2 V_B^{-1}(\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{-\frac{3}{4}} & 0 \\ 0 & A^{\frac{3}{4}} \end{bmatrix} \right\|_{\mathcal{L}(W)} \leqslant C.$$

Ou equivalentemente, que existe $M \geqslant 1$, tal que para todo λ com Re$\lambda > 0$, temos

$$\begin{aligned}
&\|A^{\frac{3}{4}}V_B^{-1}(\lambda)A^{\frac{1}{4}}\| \leqslant M\\
&\|\lambda A^{\frac{3}{4}}V_B^{-1}(\lambda)A^{-\frac{1}{4}}\| \leqslant M\\
&\|\lambda A^{\frac{1}{4}}V_B^{-1}(\lambda)A^{\frac{1}{4}}\| \leqslant M\\
&\|\lambda^2 A^{\frac{1}{4}}V_B^{-1}(\lambda)A^{-\frac{1}{4}}\| \leqslant M.
\end{aligned}$$

Note que para provar as desigualdades acima, começamos observando que (i), (ii) e

(iv) são equivalentes as da primeira seção, simplesmente tomando o adjunto destes operadores e usando o fato que $[V_B^{-1}(\lambda)]^* = V_B^{-1}(\overline{\lambda})$, e Re$\lambda$ =Re$(\overline{\lambda})$.
Para a desigualdade (iii), lembramos que

$$V_\rho^{-1}(\lambda) - V_B^{-1} = V_\rho^{-1}(\lambda)(V_B(\lambda) - V_\rho(\lambda))V_B^{-1}(\lambda)$$

e assim, temos

$$\begin{aligned}
&\lambda A^{\frac{3}{4}} V_\rho^{-1}(\lambda) A^{-\frac{1}{4}} - \lambda A^{\frac{3}{4}} V_B^{-1} A^{-\frac{1}{4}} \\
&= \lambda A^{\frac{3}{4}} V_\rho^{-1}(\lambda)(B - 2\rho A^{\frac{1}{2}})\lambda V_B^{-1}(\lambda) A^{-\frac{1}{4}} \\
&= A V_\rho^{-1}(\lambda)(S - 2\rho I)\lambda^2 A^{\frac{1}{4}} V_B^{-1}(\lambda) A^{-\frac{1}{4}}.
\end{aligned}$$

Agora, aplicamos o item (c) da Proposição 5.8, e a desigualdade dada na Proposição 5.11 com $\alpha = \dfrac{1}{2} = -\beta$, e assim, concluímos o resultado, pois $(S - 2\rho I) \in \mathcal{L}(E)$ como já vimos anteriormente.

5.2 Operador de ondas fortemente amortecidas

Nesta seção, apresentaremos um exemplo de operador matricial que é setorial em um produto cartesiano de espaços de potências fracionárias.
Antes do resultado principal, faremos algumas considerações iniciais.
Recordemos que, dado um número complexo $\lambda \neq 0$, o número $arg(\lambda)$ é o único número real $\gamma \in (-\pi, \pi)$ tal que

$$\lambda = |\lambda| e^{i\gamma}.$$

É claro que $arg(\rho\lambda) = arg(\lambda)$, para todo $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $\rho \in (0, \infty)$. Além disso, a função

$$\begin{aligned}
|arg| : \mathbb{C} \setminus \{0\} &\to \mathbb{R} \\
\lambda &\mapsto |arg(\lambda)|
\end{aligned}$$

é contínua. Dado $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$ e $a \in \mathbb{R}$, seja $\Sigma_{a,\varphi} = \{\lambda \in \mathbb{C};\ |arg(\lambda - a)| > \varphi \text{ e } \lambda \neq a\}$. Se $a' < a$, então vemos facilmente que $\Sigma_{a',\varphi} \subset \Sigma_{a,\varphi}$. Além disso, dado $C > 0$ existe um $a_0' < a$ tal que $|\lambda - a| > C$ para todo $a' \leqslant a_0'$ e $\lambda \in \Sigma_{a',\varphi}$.

Lema 5.15. Seja $\alpha > 0$. Para todo $\varphi' \in (\varphi, \pi)$ existe um $C > 0$ tal que para todo

$\lambda \in \Sigma_{a,\varphi'}$ com $|\lambda - a| \geqslant C$,

$$\left|arg\left(\frac{\lambda^2}{\lambda - \alpha} - a\right)\right| > \varphi.$$

Demonstração. Suponha por contradição que existe uma sequência $\lambda_k \in \Sigma_{a,\varphi'}$ com $|\lambda_k - a| \to \infty$, quando $k \to \infty$, tal que

$$\text{para } k \in \mathbb{N}, \quad \left|arg\left(\frac{{\lambda_k}^2}{\lambda_k - \alpha} - a\right)\right| \leqslant \varphi$$

podemos assumir que $\dfrac{\lambda_k - a}{|\lambda_k - a|} \to \mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Pela continuidade de $|arg|$, e pelas considerações feitas no início dessa seção, temos

$$|arg(\lambda_k - a)| = \left|arg\left(\frac{\lambda_k - a}{|\lambda_k - a|}\right)\right| \to |arg(\mu)|, \text{quando} k \to \infty.$$

Mas, $|arg(\lambda_k - a)| \geqslant \varphi'$, logo $|arg(\mu)| \geqslant \varphi'$.
Por outro lado, note que

$$\frac{{\lambda_k}^2}{\lambda_k - \alpha} - a = (\lambda_k - a)\frac{1}{1 - \frac{\alpha}{\lambda_k}} + \frac{a\alpha}{\lambda_k - \alpha}$$

e $\frac{1}{1-\frac{\alpha}{\lambda_k}} \to 1$ e $\frac{a\alpha}{\lambda_k - \alpha} \to 0$, quando $k \to \infty$. Daí, segue que

$$\frac{\lambda_k^2}{(\lambda_k - \alpha)|\lambda_k - a|} - \frac{a}{|\lambda_k - a|} \to \mu,$$

então, fazendo $a \to 0^+$ e usando novamente a continuidade de $|arg|$, temos

$$\varphi \geqslant \left|arg\left(\frac{\lambda_k^2}{\lambda_k - \alpha} - a\right)\right| = \left|arg\left(\frac{\lambda_k^2}{(\lambda_k - \alpha)|\lambda_k - \alpha|} - \frac{a}{|\lambda_k - a|}\right)\right| \to |arg(\mu)| \geqslant \varphi',$$

o que é uma contradição pela determinação de φ'. ☐

Lema 5.16. (i) Existem constantes $C > 0$ e $d > 0$ tais que para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ com $|\lambda - a| > C$, e $\alpha > 0$

$$\left|\frac{\lambda^2}{\lambda - \alpha} - a\right| \geqslant d.$$

(ii) Se $S \subset \mathbb{C}$ e $f : S \to \mathbb{C}$ é tal que $d := \inf_{\lambda \in S} |f(\lambda) - z_0| > 0$ para algum $z_0 \in \mathbb{C}$, então existe um $M > 0$ tal que

$$\forall\ \lambda \in S, \quad \left|\frac{f(\lambda)}{f(\lambda) - z_0}\right| \leqslant M.$$

Demonstração. (i) Note que

$$\left|\frac{\lambda^2}{\lambda - \alpha} - a\right| = \left|(\lambda - a)\frac{1}{1 - \frac{\alpha}{\lambda}} + \frac{a\alpha}{\lambda - \alpha}\right| \to +\infty$$

quando $|\lambda - a| \to +\infty$, e assim concluímos o resultado.
(ii) Desde que

$$\frac{z}{z - z_0} \to 1,$$

quando $|z| \to +\infty$, existe um $M_0 > 0$ com a propriedade de que $\frac{z}{z-z_0} < 2$ sempre que $|z| > M_0$. Logo, para todo $\lambda \in S$, se $|f(\lambda)| > M_0$, então $\left|\frac{f(\lambda)}{(f(\lambda)-z_0)}\right| < 2$, e se $|f(\lambda)| \leqslant M_0$, então

$$\frac{|f(\lambda)|}{|f(\lambda) - z_0|} \leqslant \frac{M_0}{|f(\lambda) - z_0|} \leqslant \frac{M_0}{d}.$$

□

Por fim, vamos considerar E um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$ e um operador linear $A : D(A) \subset E \to E$ estritamente positivo, autoadjunto, com resolvente compacto, e setorial do tipo (a, φ, M). Dito isso, podemos então enunciar o seguinte teorema.

Teorema 5.17. *Sejam $\alpha > 0$ e $B : D(B) \subset E \times E \to E^\beta \times E^\sigma$, onde $0 \leqslant \sigma \leqslant \beta \leqslant 1$, definido por*

$$D(B) = \left\{\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in E^\beta \times E^\sigma;\ \alpha u + v \in E^{1+\sigma}\right\}$$

e

$$B\left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}\right) := \begin{bmatrix} -v \\ A(\alpha u + v) \end{bmatrix}.$$

Então, B é setorial do tipo (b, φ', M') para algum $b \in \mathbb{R}$, $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$ e $M' > 0$.

Demonstração. Desde que A é setorial do tipo (a, φ, M), temos $\mathrm{Re}\sigma(A) \geqslant a > 0$. Nosso objetivo é mostrar que existem um setor $\Sigma_{b,\varphi'} \subset \rho(B)$ para algum $b \in \mathbb{R}$, $\varphi' \in (0, \frac{\pi}{2})$ e

$M' \in (0, \infty)$ tal que para todo $\lambda \in \Sigma_{b,\varphi'}$, temos

$$\|(\lambda I - B)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E^\beta \times E^\sigma, E^\beta \times E^\sigma)} \leqslant \frac{M'}{|\lambda - b|}.$$

Vamos começar invocando o Lema 5.15 para um $\varphi' \in (\varphi, \frac{\pi}{2})$ fixado, e assim existe $C > 0$ tal que

$$\frac{\lambda^2}{\lambda - \alpha} \in \Sigma_{a,\varphi},$$

para todo $\lambda \in \Sigma_C = \Sigma_{a,\varphi'} \cap \{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda - a| > C\}$. Tome $\lambda \in \Sigma_C$.

Afirmação 5.2. $\lambda \in \rho(B)$.

De fato, seja $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in D(B)$ com $(\lambda I - B)\left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}\right) = 0$. Vamos mostrar que $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Note que, desde que $(\lambda I - B)\left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}\right) = 0$, temos

$$\begin{bmatrix} \lambda u + v \\ -\alpha A u + (\lambda I - A)v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Daí, obtemos $\lambda u = -v$ e através de cálculos simples, vemos que $\left(\frac{\lambda^2}{\lambda - \alpha} I - A\right) u = 0$, disso e da escolha de λ segue que $u = 0$. Portanto $v = 0$.

Usando novamente o fato de que $\left(\frac{\lambda^2}{\lambda - \alpha}\right) \in \rho(A)$, graças à escolha de λ, podemos facilmente verificar que $(\lambda I - B)$ é sobrejetivo, e portanto, como B é fechado, concluímos que $\lambda \in \rho(B)$. Daí, vemos que é possível falar de $(\lambda I - B)^{-1}$ e além disso, temos

$$(\lambda I - B)^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{\lambda I - A}{\lambda^2 I - \lambda A + \alpha A} & -\dfrac{I}{\lambda^2 I - \lambda A + \alpha A} \\ \dfrac{\alpha A}{\lambda^2 I - \lambda A + \alpha A} & \dfrac{\lambda}{\lambda^2 I - \lambda A + \alpha A} \end{bmatrix}.$$

Logo, para $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in E^\beta \times E^\sigma$, temos

$$(\lambda I - B)^{-1}\left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \dfrac{\lambda I - A}{\lambda^2 I - \lambda A + \alpha A} u - \dfrac{I}{\lambda^2 I - \lambda A + \alpha A} v \\ \dfrac{\alpha A}{\lambda^2 I - \lambda A + \alpha A} u + \dfrac{\lambda}{\lambda^2 I - \lambda A + \alpha A} v \end{bmatrix}.$$

Por conveniência, escreveremos

$$(\lambda I - B)^{-1}\left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\lambda-\alpha}\left(u - \dfrac{\alpha\lambda}{\lambda-\alpha}p - q\right) \\ -\dfrac{\alpha}{\lambda-\alpha}u + \dfrac{\lambda}{\lambda-\alpha}\left(\dfrac{\alpha\lambda}{\lambda-\alpha}p + q\right), \end{bmatrix}$$

onde $p = \left(\dfrac{\lambda^2}{\lambda-\alpha}I - A\right)^{-1} u$ e $q = \left(\dfrac{\lambda^2}{\lambda-\alpha}I - A\right)^{-1} v$. Assim, calculando as normas das entradas de $(\lambda I - B)^{-1}$ em seus devidos espaços, temos

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{1}{\lambda-\alpha}\left(u - \frac{\alpha\lambda}{\lambda-\alpha}p - q\right)\right\|_{E^\beta} \\
&\leqslant \frac{\|u\|_{E^\beta}}{|\lambda-\alpha|} + \frac{\alpha|\lambda|}{|\lambda-\alpha|^2}\|p\|_{E^\beta} + \frac{\|q\|_{E^\beta}}{|\lambda-\alpha|} \\
&\leqslant \left(\frac{1}{|\lambda-\alpha|} + \frac{\alpha|\lambda|M}{|\lambda-\alpha|^2|\mu-a|}\right)\|u\|_{E^\beta} + \frac{M_1}{|\lambda-\alpha|}\|\mu q - v\|_{E^\sigma} \\
&\leqslant \left(\frac{1}{|\lambda-\alpha|} + \frac{\alpha|\lambda|M}{|\lambda-\alpha|^2|\mu-a|}\right)\|u\|_{E^\beta} + \frac{M_1}{|\lambda-\alpha|}\left(|\mu|\frac{M}{|\mu-a|} + 1\right)\|v\|_{E^\sigma} \\
&= \frac{1}{|\lambda-\alpha|}\left(1 + \frac{\alpha M}{|\lambda|}\frac{|\mu|}{|\mu-a|}\right)\|u\|_{E^\beta} + \frac{M_1}{|\lambda-\alpha|}\left(1 + M\frac{|\mu|}{|\mu-a|}\right)\|v\|_{E^\sigma},
\end{aligned}$$

onde $M_1 = \|A^{\beta-1-\sigma}\|$ e $\mu = \dfrac{\lambda^2}{\lambda-\alpha}$. Além disso, recordemos que $A(\mu I - A)^{-1} = \mu(\mu I - A)^{-1} - I$. Agora, calculemos a norma da outra entrada

$$\begin{aligned}
&\left\|-\frac{\alpha}{\lambda-\alpha}u + \frac{\lambda}{\lambda-\alpha}\left(\frac{\alpha\lambda}{\lambda-\alpha}p + q\right)\right\|_{E^\sigma} \\
&\leqslant \frac{\alpha}{|\lambda-\alpha|}\|u\|_{E^\sigma} + \frac{|\lambda|}{|\lambda-\alpha|}\frac{\alpha|\lambda|}{|\lambda-\alpha|}\|p\|_{E^\sigma} + \frac{|\lambda|}{|\lambda-\alpha|}\|q\|_{E^\sigma} \\
&= \frac{\alpha M_2}{|\lambda-\alpha|}\|u\|_{E^\beta} + \frac{|\mu|\alpha}{|\lambda-\alpha|}\|p\|_{E^\sigma} + \frac{|\lambda|}{|\lambda-\alpha|}\|q\|_{E^\sigma} \\
&\leqslant \frac{\alpha M_2}{|\lambda-\alpha|}\|u\|_{E^\beta} + \frac{\alpha}{|\lambda-\alpha|}\frac{M|\mu|}{|\mu-a|}M_2\|u\|_{E^\beta} + \frac{|\lambda|}{|\lambda-\alpha|}\frac{M}{|\mu-a|}\|v\|_{E^\sigma} \\
&= \frac{\alpha M_2}{|\lambda-\alpha|}\left(1 + \frac{M|\mu|}{|\mu-a|}\right)\|u\|_{E^\beta} + \frac{M}{|\lambda|}\frac{|\mu|}{|\mu-a|}\|v\|_{E^\sigma},
\end{aligned}$$

onde $M_2 = \|A^{\sigma-\beta}\|$.

Agora, usando a parte (i) do Lema 5.16 e fazendo C suficientemente grande, invocamos a parte (ii) deste mesmo lema, para obter $M_3 > 0$ tal que, $\dfrac{|\mu|}{|\mu-a|} \leqslant M_3$ para $\lambda \in \Sigma_C$, onde μ é como definido acima.

Pelas observações feitas no início da seção, temos que existe $b < 0$ com $b < a$ tal que

$\Sigma_{b,\varphi'} \subset \Sigma_C$. Agora, seja $M_4 > 0$, tal que para cada $\lambda \in \Sigma_{b,\varphi'}$, temos

$$\max\left(\frac{|\lambda - b|}{|\lambda|}, \frac{|\lambda - b|}{|\lambda - \alpha|}, \frac{1}{|\lambda|}\right) \leqslant M_4.$$

Logo, pelos cálculos e considerações feitos acima, temos para todo $\lambda \in \Sigma_{b,\varphi'}$ e $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in E^\beta \times E^\sigma$:

$$\begin{aligned}
&\left\| (\lambda I - B)^{-1} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\|_{E^\beta \times E^\sigma} \\
&\leqslant \frac{M_4(1 + \alpha M M_4 M_3)}{|\lambda - b|} \|u\|_{E^\beta} + \frac{M_1 M_4(1 + M M_3)}{|\lambda - b|} \|v\|_{E^\sigma} \\
&+ \frac{\alpha M_2 M_4 (1 + M M_3)}{|\lambda - b|} \|u\|_{E^\beta} + \frac{M M_4 M_3}{||\lambda - b|} \|v\|_{E^\sigma} \\
&\leqslant \frac{M'}{|\lambda - b|} \left\| \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\|_{E^\beta \times E^\sigma},
\end{aligned}$$

para uma constante $M' > 0$. □

Apêndice A

Resultados básicos

Teorema A.1 (do gráfico fechado). *Sejam E e F espaços de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$. Seja A um operador linear de E em F. Assuma que A é fechado, então A é limitado.*

Demonstração. Ver [4].

Teorema A.2. *Seja f_n uma sequência de funções contínuas em um domínio D. Suponha que f_n converge uniformemente em D para uma função f. Então f é contínua em D.*

Demonstração. Ver [21].

Teorema A.3 (Teorema da convergência dominada de Lebesgue). *Seja (X, Σ, μ) um espaço mensurável. Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções mensuráveis assumindo valores complexos. Suponha que $\{f_n\}$ converge pontualmente para uma função f, e é dominada por uma função integrável g no seguinte sentido:*

$$|f_n(x)| \leqslant g(x)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x \in X$. Então, f é integrável (no sentido de Lebesgue) e

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

Demonstração. Ver [3].

Teorema A.4 (Teorema dos resíduos). *Se f é uma função analítica numa região G, exceto nas singularidades isoladas $a_1, a_2, ..., a_n$. Se γ é uma curva fechada retificável em G que não passa por nenhum dos pontos a_k e se $\gamma \approx 0$ em G então*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f = \sum_{k=1}^{n} n(\gamma; a_k) Res(f; a_k).$$

Demonstração. Ver de [10].

Lema A.5. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \pi$.

Demonstração. Ver [10].

Lema A.6 (Lema de Riemann-Lebesgue)**.** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ uma função integrável, então

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(Nx)dx = \lim_{N\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(Nx)dx = 0$$

ou equivalentemente

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iNx}dx = 0.$$

Demonstração. Ver [17].

Lema A.7. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tal que $\mathbb{R} \ni t \mapsto \frac{f(t)}{1+|t|} \in \mathbb{C}$ é integrável e

$$\int_{-1}^{1} \left| \frac{f(t) - f(0)}{t} \right| dt < \infty,$$

então

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{\sin(Nt)}{\pi t}dt \to f(0)$$

quando $N \to +\infty$.

Demonstração. Ver [5].

Teorema A.8. *Seja f_n uma sequência de funções diferenciáveis em um intervalo I. Assuma que*

(i) $f_n(x) \to f(x)$ $\forall$ $x \in I$*;*

(ii) f_n' *converge uniformemente para uma função g em I.*

Então f é diferenciável em I e $f' = g$ em I.

Demonstração. Ver [21].

Teorema A.9 (Teorema da aproximação de Weierstrass)**.** *Seja $E = C([0,1])$ munido da norma do supremo e seja $P = P([0,1])$ o espaço dos polinômios em $[0,1]$. Então P é um subespaço denso de E.*

Teorema A.10 (Princípio da Limitação Uniforme). *Sejam E e F espaços de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$ e seja $\{T_i\}_{i\in L}$ uma família (não necessariamente enumerável) de operadores lineares limitados de E em F. Assuma que*

$$\forall\ x\ \in E,\ \sup_{i\in L}\|T_i x\| < \infty.$$

Então,

$$\sup_{i\in L}\|T_i\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \infty$$

Demonstração. Ver [4].

Lema A.11. Seja φ uma função contínua que é diferenciável a direita em $[a,b)$. Se a derivada a direita de φ é contínua a direita em $[a,b)$, então φ é continuamente diferenciável em $[a,b)$.

Demonstração. Ver [21].

Teorema A.12. *Seja $f : A \times [\alpha,\beta] \to X$, onde $A \subset \mathbb{C}$ é um aberto conexo e f é contínua. Se para todo $t \in [\alpha,\beta]$ a função $f(\cdot,t)$ é analítica em A, então*

$$T(z) = \int_\alpha^\beta f(z,t)dt,\ \ z \in A$$

é também analítica em A.

Demonstração. Ver apêndice de [12].

Teorema A.13. *Assuma que $f_n : A \to X$, $n \in \mathbb{N}$, são funções analíticas, onde $A \subset \mathbb{C}$ é um aberto conexo. Se a sequência f_n converge quase uniformemente em A para uma função $f : A \to X$, então f é uma função analítica em A.*

Demonstração. Ver apêndice de [12].

Teorema A.14. *Seja $f_n : A \to X$ uma sequência de Cauchy quase uniformemente. Então existe uma função $f : A \to X$ tal que f_n converge quase uniformemente e quase sempre para f.*

Demonstração. Ver apêndice de [12].

Teorema A.15 (Lema de Riesz). *Sejam Y e Z subespaços de um espaço normado X. Suponha que Y é fechado e é um subconjunto próprio de Z. Então, para todo número real θ no instervalo $(0,1)$ existe $z \in Z$, tal que*

$$\|z\| = 1, \quad e\ \forall y \in Y,\ \|z - y\| \geqslant \theta.$$

Demonstração. Ver [4].

Referências Bibliográficas

[1] H. Amann, *Linear and quasilinear parabolic problems.* Vol. I: Abstract Linear Theory, Birkhäuser Verlag, Basel, 1995.

[2] J. B. Baillon, P. Clement, *Examples of unbounded imaginary powers of operators.* Journal of Functional Analysis, vol. 100, n. 2, 1991, p. 419-434, 1991.

[3] R. G. Bartle, *The elements of integration and Lebesgue measure.* John Wiley e Sons, 2014.

[4] H. Brezis, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations.* Springer-Verlag, New York, 2010.

[5] A. N. Carvalho, *Análise Funcional II.* São Carlos, 2017.

[6] A. N. Carvalho, J. A Langa e J. C. Robinson, *Semigroups and evolution processes under pertubations.* Notas de Aula.

[7] G. Chen, D. L. Russell, *A mathematical model for linear elastic systems with structural damping.* Quarterly of Applied Mathematics, vol. 39, n. 4, p. 433-454, 1982.

[8] S. Chen, R. Triggiani, *Proof of extensions of two conjectures on structural damping for elastic systems: The case* $\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1$. Pacific J. Math. 136 (1989), 15-55.

[9] P. Constantin, M. Ignatova, *Remarks on the fractional Laplacian with Dirichlet boundary conditions and applications.* International Mathematics Research Notices, vol. 2017, n. 6, p. 1653-1673, 2017.

[10] J. Conway, *Functions of one complex variable.* Graduate Texts in Mathematics 11, Springer-Verlag, New York, 1973.

[11] A. Cwiszewski, K. P. Rybakowski, *dynamics of strongly damped beam equation.* Journal of Differential Equations, vol. 247, n. 12, p. 3202-3233, 2009.

[12] R. Czaja, *Differential Equations with Sectorial Operator.* Wydawnictwo Uniwersytetu Slaskiego. Katowice, 2002.

[13] K. Engel, R. Nagel, *One-parameter semigroups for linear evolutions equations.* Springer-Verlag, Berlim, 1999.

[14] J. A. Goldstein, *Some remarks on infinitesimal generators of analytic semigroups.* Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 22, n. 1, p. 91-93, 1969.

[15] J. A. Goldstein, *On a connection between first and second order differential equations in Banach spaces.* Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 30, n. 2, p. 246-251, 1970.

[16] D. Henry, *Geometric theory of semilinear parabolic equations.* Lecture Notes in Mathematics 840, Springer-Verlag, New York, 1981.

[17] V. M. Iório, *EDP: um curso de graduação.* 4. ed. Rio de Janeiro: IMPA, vol. 1, 2010.

[18] T. Kato, *Fractional powers of dissipative operators, II.* Journal of the Mathematical Society of Japan, vol. 14, n. 2, p. 242-248, 1962.

[19] E. Kreyszig, *Introductory functional analysis with applications.* (Vol. 1), New York: Wiley, 1978.

[20] H. Komatsu, *Fractional powers of operators.* Pacific Journal of Mathematics, vol. 19, n. 2, p. 285-346, 1966.

[21] E. L. Lima, *Curso de análise.* vol. 1, Projeto Euclides. Rio de Janeiro, 1999.

[22] J. L. Lions, E. Magenes, *Nonhomogeneous Boundary Value Problems and Applications.* Vol. I, Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[23] A. Pazy, *Semigroup of linear operators and applications to partial differential equations.* Springer-Verlag. New York, 1983.

[24] R. Schnaubelt, *Lecture Notes Spectral Theory.* Karlsruhe, 2020.

[25] A. E. Taylor, D. C. Lay, *Introduction to Functional Analysis.* Second Edition. John Wiley and Sons Inc., New York, 1958.