Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Método Conforme Aplicado ao Problema de Bernstein Estável e Problemas de Pinching

Henrique Bezerra Alcântara

João Pessoa – PB
Fevereiro de 2025

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Método Conforme Aplicado ao Problema de Bernstein Estável e Problemas de Pinching

por

Henrique Bezerra Alcântara

sob a orientação do

Prof. Dr. Allan George de Carvalho Freitas

João Pessoa – PB
Fevereiro de 2025

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

A347m Alcantara, Henrique Bezerra.
Método Conforme aplicado ao Problema de Bernstein estável e problemas de Pinching / Henrique Bezerra Alcantara. - João Pessoa, 2025.
125 f. : il.

Orientação: Allan George de Carvalho Freitas.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Matemática. 2. Método Conforme. 3. Problema de Bernstein. 4. Pinching - Problemas matemáticos. I. Freitas, Allan George de Carvalho. II. Título.

UFPB/BC CDU 51(043)

Elaborado por RUSTON SAMMEVILLE ALEXANDRE MARQUES DA SILVA - CRB-15/0386

Método Conforme Aplicado ao Problema de Bernstein Estável e Problemas de Pinching

por

Henrique Bezerra Alcântara [1]

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós–Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Geometria/Topologia.

Aprovada em 24 de fevereiro de 2025.

Banca Examinadora:

Allan George de C. Freitas

Prof. Dr. Allan George de Carvalho Freitas – UFPB

(Orientador)

Fernanda Roing

Prof. Dr. Fernanda Roing – UNITO, Itália

(Examinador Externo)

Manassés Xavier de Souza

Prof. Dr. Manassés Xavier de Souza – UFPB

(Examinador Interno)

Márcio Silva Santos

Prof. Dr. Márcio Silva Santos – UFPB

(Examinador Interno)

[1] O autor foi bolsista da CAPES durante a elaboração desta dissertação.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me dado força, coragem, saúde e sabedoria diante de muitas dificuldades enfrentadas ao longo da minha vida acadêmica. Aos meus pais e todos os familiares, amigos e colegas que estiveram comigo durante essa caminhada.

A todos os professores do Programa de Pós-Graduação em Matemática de Universidade Federal da Paraíba (UFPB), em especial, ao professor Allan George de Carvalho Freitas, pela sua orientação, confiança, dedicação, competência e por ter aceitado me orientar. Não poderia deixar de agredecer ao professor Jocel Faustino Norberto de Oliveira, que me orientou durante toda a graduação, no Programa de Iniciação Científica da Universidade Regional do Cariri (URCA).

Agradeço, a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), por te me apoiado financeiramente durante todo o mestrado, e aos professores que aceitaram participar da banca.

Resumo

O objetivo deste trabalho é estudar aplicações do método conforme ao problema de Bernstein estável e problemas de Pinching para imersões na esfera. Num primeiro plano, abordaremos os resultados de Catino, Mastrolia & Roncoroni [4] que, através de uma apropriada mudança conforme, demonstram uma solução para o problema de Bernstein estável em dimensão $n = 3$: as hipersuperfícies mínimas, completas, imersas, orientáveis e estáveis em $\mathbb{R}^4$ são hiperplanos. Além disso, utilizando as ideias do mesmo trabalho, veremos que não existem hipersuperfícies mínimas estáveis imersas em variedades Riemannianas completas de dimensão $n \leq 6$ com curvatura seccional não negativa e curvatura de Ricci uniformemente positiva. Em seguida, trataremos dos resultados de Magliaro, Mari, Roing & Savas-Halilaj [26] que, também se valendo de uma apropriada mudança conforme, demonstram alguns resultados de pinching para subvariedades completas e imersas na esfera. Em particular, tal técnica generaliza clássicos resultados de pinching que são verificados em subvariedades compactas, tais quais [7], [1] e [30].

Palavras-chave: Método Conforme; Problema de Bernstein; Pinching.

Abstract

The goal of this work is to study applications of the conformal method to the stable Bernstein problem and pinching problems for immersions in the sphere. First, we address the results of Catino, Mastrolia & Roncoroni [4], who, through an appropriate conformal change, prove u solution for the stable Bernstein problem in dimension $n = 3$: the complete, orientable, stable, minimal hypersurfaces immersed in $\mathbb{R}^4$ are hyperplanes. Furthermore, using the ideas from the same work, we will show that there are no stable minimal hypersurfaces immersed in complete Riemannian manifolds of dimension $n \leq 6$ with non-negative sectional curvature and uniformly positive Ricci curvature. Next, we discuss the results of Magliaro, Mari, Roing & Savas-Halilaj [26], who, also relying on an appropriate conformal change, prove some pinching results for complete submanifolds immersed in the sphere. In particular, this technique generalizes classical pinching results that are verified for compact submanifolds, such as those in [7], [1], and [30].

Keywords: Conformal Method; Berstein Problem; Pinching.

Conteúdo

Introdução **2**

1 Preliminares **7**

1.1 Variedades Diferenciáveis 7

1.1.1 Orientação, Aplicações Suaves 8

1.1.2 Espaço Tangente, Diferencial de uma Aplicação 8

1.1.3 Campos de Vetores, Colchetes de Lie 9

1.2 Variedades Riemannianas 11

1.2.1 Métricas Riemannianas 11

1.2.2 Conexões Riemannianas 13

1.2.3 Gradiente, Hessiano e Laplaciano 16

1.3 Tensores 17

1.3.1 Curvaturas 18

1.4 Geodésicas, Variedades Completas 20

1.4.1 Variações do Comprimento, Aplicação Exponencial 21

1.4.2 Variedades Completas 23

1.5 Imersões Isométricas 26

1.5.1 Hipersuperfícies 31

1.5.2 Estabilidade, Índice Finito 32

1.6 Teorema da Divergência 34

2 Geometria Conforme **37**

2.1 Fórmulas de Geometria Conforme 37

3 Resultados de Rigidez para Hipersuperfícies Mínimas Estáveis **46**

3.1 Hipersuperfícies mínimas, completas, orientáveis, isometricamente imersas e estáveis 46

3.1.1 Tensor 2-Bakry-Emery-Ricci 47

3.1.2 Completude da Métrica 50

3.1.3 Estimativas de volume 57

3.2 O Teorema de Bernstein Estável para $n = 3$ 69
3.3 Tensor de Curvatura Bi-Ricci 71
3.3.1 Resultado de Rigidez para Hipersuperfícies Mínimas com Índice Finito 72

4 Teoremas de Pinching para Subvariedades Completas na Esfera 80
4.1 Hipersuperfícies Completas com Curvatura Média Constante em Esferas 82
4.2 Subvariedades Mínimas Completas de uma Esfera com Segunda Forma Fundamental de Comprimento Constante 99
4.3 Subvariedades Completas com Vetor de Curvatura Média Paralelo em Esferas 105

A Resultados Básicos 114
A.1 Desigualdade de Cauchy-Schwarz 114
A.2 Desigualdade de Young 115

Referências Bibliográficas 117

Introdução

É bem conhecido da literatura que uma superfície mínima $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ pode ser expressa, localmente, como o gráfico $\Gamma(u)$ de uma solução $u : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ da equação

$$(1 + u_x^2)u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_y^2)u_{xx} = 0, \tag{1}$$

onde (1) é chamada a equação das superfícies mínimas. Em 1914, S. Bernstein mostrou que um gráfico mínimo completo (isto é, definido em todo o $U = \mathbb{R}^2$) em $\mathbb{R}^3$ é necessariamente um plano. Para generalizar este fato em dimensões superiores, surgiu o chamado *Problema de Bernstein*, enunciado da seguinte forma:

Se o gráfico $\Gamma(u)$ da função $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma hipersuperfície mínima completa em $\mathbb{R}^{n+1}$, $\Gamma(u)$ tem que ser necessariamente um hiperplano?

Muitos matemáticos famosos trabalharam neste problema nos anos sessenta, e a resposta do mesmo é sim para $n \leq 7$. Em particular, Fleming [19] deu uma nova demonstração para o caso $n = 2$ em 1962, de Giorgi [14] provou para $n = 3$ em 1965, Almegren [2] para $n = 4$ em 1966 e Simons resolveu os três casos restantes, isto é, para, $5 \leq n \leq 7$, em 1968. Entretanto, em 1969 Bombieri, de Giorgi & Giusti [3], mostraram que, para $n \geq 8$, existem gráficos mínimos completos em $\mathbb{R}^{n+1}$ que não são hiperplanos.

Uma vez que gráficos mínimos são estáveis (este conceito será definido posteriormente), uma generalização natural do problema clássico de Bernstein, é o *Problema de Bernstein Estável*, formulado da seguinte maneira:

*Se $M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ é uma hipersuperfície mínima **estável**, completa, orientável, isometricamente imersa, M^n tem que ser necessariamente um hiperplano?*

No caso $n = 2$ a resposta positiva foi dada em três artigos diferentes, publicados por volta do mesmo período de tempo entre 1979 e 1981, por do Carmo & Peng [16] em 1979, Fischer-Colbrie & Schoen [21] em 1980 e Pogorelov [28] em 1981. Entretanto, os resultados de Bombieri, de Giorgi & Giusti [3], juntamente com o resultado de Hardt & Simons [22], mostram que a resposta à generalização é não, se $n \geq 7$. Até recentemente, sem hipóteses adicionais, os casos restantes, $3 \leq n \leq 6$, ainda estavam em aberto. Em 2021 Chodosh & Li [10] (ver também [9]) provaram que:

Teorema 0.1. *Uma hipersuperfície mínima estável $M^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^4$ completa, orientável, isometricamente imersa é um hiperplano.*

Nesta dissertação, fornecemos uma prova completamente diferente de Chodosh & Li, com base no artigo *Two rigidity results for stable minimal hypersurfaces* [4], de Giovanni Catino, Paolo Mastrolia & Alberto Roncoroni. A ideia é fazer uma deformação conforme na métrica de (M, g), da seguinte forma

$$\tilde{g} = u^{2k} g,$$

para $k > 0$ e $u \in C^\infty(M)$ uma função positiva que é solução de

$$-\Delta_g u = |A|_g^2 u,$$

onde A é a segunda forma fundamental de M. A estabilidade de M garante a existência de tal função u pela Proposição 1.30. Por meio de fórmulas conhecidas na literatura sobre métricas conformes, uma estimativa de volume e estimativas integrais, concluí-se que $|A| \equiv 0$ em M, ou seja, M é totalmente geodésica. Com isso e, com as hipóteses feitas sobre M chega-se que M deve ser um hiperplano em $\mathbb{R}^4$. Os casos $n = 4, 5$ do problema foram provados recentemente em 2024, respectivamente por Chodosh, Li, Paul Minter & Douglas Stryker em [12] e por Laurente Mazet em [25]. O caso em que $n = 6$ ainda está em aberto.

O segundo resultado ainda com base em [4], diz respeito a hipersuperfícies mínimas com índice finito. Lembramos que uma imersão mínima $M^n \hookrightarrow (\overline{M}^{n+1}, h)$ tem índice finito se o número de autovalores negativos (contados com multiplicidade) do operador de Jacobi (ou operador de estabilidade),

$$L_M \;:=\; \Delta + |A|^2 + Ric_h(N, N)$$

for finito, em particular, a estabilidade implica em índice finito (igual a zero), acima Ric_h é o tensor de Ricci de $(\overline{M}, h)$. Antes de apresentar o próximo resultado, precisamos introduzir a noção do tensor de curvatura bi-Ricci definida em [34]: dados dois vetores tangentes ortonormais u, v definimos

$$BRic_h(u, v) = Ric_h(u, u) + Ric_h(v, v) - K_h(u, v),$$

onde $K_h(u,v)$ denota a curvatura seccional do plano gerado por u e v. O segundo resultado é o seguinte:

Teorema 0.2. *Se $(\overline{M}^{n+1}, h)$ é uma variedade completa de dimensão $n+1$, $n \leq 5$, com curvatura seccional não negativa e curvatura bi-Ricci uniformemente positiva ou curvatura de Ricci uniformemente positiva. Então toda hipersuperfície mínima, completa, orientável, imersa $M^n \hookrightarrow (\overline{M}^{n+1}, h)$ com índice finito deve ser compacta.*

A demonstração é feita por contradição, supondo que M^n é não compacta. Como consequência ainda é obtido o seguinte resultado.

Corolário 0.3. Se $(\overline{M}^{n+1}, h)$ é uma variedade completa de dimensão $n+1$, $n \leq 5$, com curvatura seccional não negativa e curvatura de Ricci uniformemente positiva, então não existe hipersuperfície mínima estável, completa, orientável, imersa $M^n \hookrightarrow (\overline{M}^{n+1}, h)$.

Inspirado na técnica utilizada na demonstração do Teorema 0.2, Marco Magliaro, Luciano Mari, Fernanda Roing & Andreas Savas-Halilaj em [26] deram extensões de resultados clássicos da literatura sob a hipótese de compacidade, para uma condição mais fraca, a de completude. Mais precisamente, consideremos, $f : M^n \to \mathbb{S}^{n+p}$, $n \geq 2$, uma subvariedade imersa sem fronteira, onde $\mathbb{S}^{n+p}$ denota a esfera unitária de dimensão $n+p$. De acordo com um resultado seminal devido a Simons [31], se M^n é compacta, mínima e sua segunda forma fundamental A satisfaz

$$|A|^2 \leq \frac{np}{2p-1}, \tag{2}$$

então $|A| \equiv 0$ ou $|A|^2 \equiv \frac{np}{2p-1}$. Se $|A| \equiv 0$, então M^n é uma grande esfera, e se $|A|^2 \equiv \frac{np}{2p-1}$, uma caracterização foi dada por Lawson [23] (em codimensão $p=1$) e por Chern, do Carmo & Kobayashi [7]: M^n é um toro de Clifford dado por

$$T^{k,n} = \mathbb{S}^k(\sqrt{k/n}) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{(n-k)/n}) \hookrightarrow \mathbb{S}^{n+1}, \quad k \in \{1, \ldots, n-1\},$$

ou M^n é uma superfície de Veronese em $\mathbb{S}^4$.

Para estender tais resultados, para subvariedades compactas com curvatura média paralela e diferente de zero, um problema análogo foi abordado por Santos [30] tomando $p \geq 2$. Em codimensão $p=1$, considera-se o tensor de umbilicidade $\Phi : T_qM \times T_qM \to \mathbb{R}$ definido por $\Phi = A - Hg$, onde g é a métrica Riemanniana de M^n e $H \geq 0$ a curvatura média. Supondo que $|\Phi|^2 \leq b^2(n,H)$, onde $b(n,H)$ é a raiz positiva do polinômio

$$P_{(n,H)}(x) = x^2 + \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} Hx - n(H^2+1). \tag{3}$$

Alencar & do Carmo [1] provaram que $|\Phi| \equiv 0$ e M^n é uma esfera ou $|\Phi| \equiv b(n, H)$ e M^n é um toro de Clifford mínimo ou um toro da forma

$$\mathbb{S}^{n-1}(r) \times \mathbb{S}^1(\sqrt{1-r^2}) \hookrightarrow \mathbb{S}^{n+1},$$

de raio apropriado $r \in (0, 1)$. Este exemplo em particular é chamado $H(r) - torus$.

Nessa direção, nosso objetivo é abordar os resultados mencionados acima para subvariedades completas, possivelmente não compactas, com base no artigo [26]. O mesmo é inspirado nos trabalhos de Fischer-Colbrie [20] e Catino, Mastrolia & Roncoroni [4], tendo como idéia geral uma mudança conforme da métrica de M^n por uma potência de função adequada para mostrar que M^n é compacta e em seguida dar a sua caracterização pelos resultados anteriores. Primeiro vamos abordar o caso de hipersuperfícies.

Teorema 0.4. *Seja $f : M^n \to \mathbb{S}^{n+1}$ uma hipersuperfície completa imersa com curvatura média constante $H \geq 0$. Suponha que a norma ao quadrado $|\Phi|^2$ da parte sem traço da segunda forma fundamental de M^n satisfaça $|\Phi|^2 \leq b^2(n, H)$, onde $b(n, H)$ é a raiz positiva do polinômio (3). Então*

1. *$|\Phi| \equiv 0$ e M^n é uma esfera totalmente umbílica;*
   ou

2. *$|\Phi| \equiv b(n, H)$ que ocorre se e somente se*

   (a) $H = 0$ e M^n cobre um toro de Clifford $T^{n,k}$ para algum $k \in \{1, \ldots, n-1\}$;

   (b) $H > 0$, $n \geq 3$ e M^n cobre um $H(r) - torus$ com $r^2 < \frac{(n-1)}{n}$;

   (c) $H > 0$, $n = 2$ e M^n cobre um $H(r) - torus$ com $r^2 \neq \frac{(n-1)}{n}$.

Para subvariedades de codimensão superior $f : M^n \to \mathbb{S}^{n+p}$, no caso mínimo, a extensão dos resultados em [31, 23, 7] para M^n completa, é vista pelo seguinte resultado:

Teorema 0.5. *Seja $p \geq 1$ e $f : M^n \to \mathbb{S}^{n+p}$ uma imersão mínima completa. Se a norma da segunda forma fundamental A de M^n satisfaz (2), então $|A| \equiv 0$ e M^n é uma esfera totalmente geodésica, ou $|A|^2 \equiv \frac{np}{2p-1}$. Neste último caso, ocorre uma das seguintes situações:*

(i) $p = 1$ e M^n cobre um toro de Clifford mínimo $T^{n,K}$ para algum $k \in \{1, \ldots, n-1\}$;

(ii) $n = p = 2$ e M^2 cobre uma superfície de Veronese em $\mathbb{S}^4$.

Consideramos também subvariedades com codimensão $p \geq 2$ e curvatura média paralela não nula. Entretanto, a extensão do Teorema de Santos [30] para M^n completa, revela-se ser particularmente sutil. Neste caso, os autores conseguiram chegar às conclusões desejadas, apenas nas dimensões $2 \leq n \leq 6$.

Este trabalho, está dividido em 4 capítulos:

No *Capítulo* 1, introduzimos definições e resultados em geometria Riemanniana, que serão necessários ao longo de todo o trabalho, onde provaremos apenas alguns destes resultados preliminares e referenciamos os demais.

O *Capítulo* 2 é dedicado aos resultados sobre métricas conformes. Mostraremos fórmulas para alguns entes clássicos, tais como a conexão, o Hessiano de uma função, o Laplaciano e algumas curvaturas ao modificarmos conformemente a métrica. Isto é importante pois os príncipais resultados deste trabalho são obtidos deformando conformemente a métrica.

No *Capítulo* 3, apresentamos as provas dos Teoremas 0.1 e 0.2, que são os dois primeiros resultados principais desta dissertação.

No *Capítulo* 4, expomos a demonstração dos Teoremas 0.4 e 0.5, e a extensão do teorema de Santos [30].

Finalmente, o *Apêndice* A é dedicado a resultados básicos que foram utilizados ao longo da dissertação.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, apresentamos notações, definições e resultados em geometria Riemanniana que serão necessários ao longo deste trabalho, onde provaremos apenas alguns destes resultados. Para algumas demonstrações, consulte [17] e [24].

1.1 Variedades Diferenciáveis

Definição 1.1. Um espaço topológico M^n é dito ser uma variedade diferenciável de dimensão n se

1. M é um espaço de Hausdorff;

2. M é second-countable;

3. M admite uma estrutura diferenciável, isto é, existe uma família de cartas $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ tal que
$$M = \bigcup_\alpha U_\alpha$$
e dadas duas cartas quaisquer nesta família, (U, ϕ) e (V, φ), com $U \cap V \neq \emptyset$, a aplicação
$$\varphi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \to \varphi(U \cap V)$$
é um difeomorfismo.

As aplicações $(U, \phi) := (U, x_1, \ldots, x_n)$ são chamadas de cartas coordenadas ou apenas cartas, $U \subset M$ é dito uma vizinhança coordenada onde $\phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ e o difeomorfismo $\varphi \circ \phi^{-1}$ é denominado aplicação mudança de coordenadas.

1.1.1 Orientação, Aplicações Suaves

Definição 1.2. Seja M uma variedade diferenciável. Diz-se que M é orientável se M admite uma estrutura diferenciável $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ tal que:

(i) Para todo par α, β, com $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, a diferencial da mudança de coordenadas $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ tem determinante positivo.

Se M é orientável, a escolha de uma estrutura diferenciável satisfazendo (i) é chamada uma orientação de M e M é, então, orientada.

Definição 1.3. Sejam M^m e N^n variedades diferenciáveis. Uma aplicação $F : M \to N$ é suave (ou diferenciável) em $p \in M$ se existem cartas (U, ϕ) com $p \in U$ e (V, ψ) com $F(p) \in V$ tais que $F(U) \subseteq V$ e a aplicação

$$\psi \circ F \circ \phi^{-1} : \phi(U) \subset \mathbb{R}^m \to \psi(V) \subset \mathbb{R}^n$$

é suave em $\phi(p)$. Tal F é suave se é suave para cada $p \in M$.

Em particular, o caso em que f e uma função real na variedade diferenciável M, isto é, $f : M \to \mathbb{R}$, diremos que f é suave em $p \in M$ se existe uma carta coordenada (U, ϕ) com $p \in U$ tal que

$$f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \mathbb{R}$$

é suave em $\phi(p)$, da mesma forma f é suave se é suave para todo $p \in M$. Tais definições independem da escolha da carta coordenada.

Denotaremos por $C^\infty(M)$ o conjunto das funções reais suaves em M.

Definição 1.4. Um difeomorfismo entre variedades diferenciáveis M e N é uma aplicação bijetiva, suave $F : M \to N$ que possui inversa suave. Quando existe uma tal F, dizemos que M e N são difeomorfas. $F : M \to N$ é chamada um difeomorfismo local se todo ponto $p \in M$ possui uma vizinhança U tal que $F(U)$ é um aberto em N e $F|_U : U \to F(U)$ é um difeomorfismo.

1.1.2 Espaço Tangente, Diferencial de uma Aplicação

Definição 1.5. Seja M uma variedade diferenciável e considere $p \in M$. Uma derivação em p é uma aplicação linear $D : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ que satisfaz a regra de Leibiniz, isto é

$$D(fg)(p) = g(p)D(f) + f(p)D(g)$$

para todas $f, g \in C^\infty(M)$. Nesse contexto, um vetor tangente a M em p é uma derivação em p. O conjunto de todos os vetores tangentes em p é chamado espaço tangente a M em p, denotado por

$$T_pM = \{D : C^\infty(M) \to \mathbb{R};\ D \text{ é derivação em } p\}$$

isto é, um elemento $v \in T_pM$ é chamado um vetor tangente a M em p.

Seja $(U, \phi) := (U, x_1, \ldots, x_n)$ uma carta coordenada em torno do ponto p na variedade diferenciável M. Os vetores coordenados $\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p$ associados a carta ϕ formam uma base

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_p \right\}$$

de T_pM, assim dado qualquer $v \in T_pM$, podemos escrever

$$v = \sum_{i=1}^{n} v^i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p.$$

Definição 1.6. Sejam M e N variedades diferenciáveis, $F : M \to N$ uma aplicação diferenciável e $p \in M$. Definimos a diferencial de F em p, $dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ da seguinte forma: dado $v \in T_pM$,

$$dF_p(v)(f) := v(f \circ F),$$

para toda $f \in C^\infty(N)$. dF_p é uma derivação em $F(p)$ e é linear. Em particular, dada $f \in C^\infty(M)$, $df_p : T_pM \to \mathbb{R}$ é definida por

$$df_p(v) = v(f).$$

Definição 1.7. Sejam M e N variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável $i : M \to N$ é uma imersão se $di_p : T_pM \to T_{i(p)}N$ é injetiva para todo $p \in M$.

1.1.3 Campos de Vetores, Colchetes de Lie

Definição 1.8. Dada uma variedade diferenciável M, definimos o fibrado tangente de M , denotado por TM, como sendo a união disjunta dos espaços tangentes em todos os pontos de M, isto é

$$TM = \bigsqcup_{p \in M} T_pM$$

onde $\bigsqcup$ denota a união disjunta. Note que podemos ver o fibrado tangente como sendo

$$TM = \{(p, v);\ p \in M,\ v \in T_pM\}.$$

Definição 1.9. Um campo de vetores X em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que a cada ponto $p \in M$ associa um vetor $X(p) \in T_pM$. Em termos de aplicações, X é uma aplicação de M no fibrado tangente TM. Considerando uma carta coordenada (U, ϕ) em torno de $p \in M$ é possível escrever

$$X(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p ,$$

onde cada $a_i : U \to \mathbb{R}$ é uma função em $U \subset M$, chamadas funções componentes de X e $\left.\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\right\}\right|_{i=1,\ldots,n}$ é a base associada a ϕ.

O campo X é diferenciável se é diferenciável como aplicação, isto é, se a aplicação $X : M \to TM$ é diferenciável, ou ainda, o campo X é diferenciável se e só se as funções a_i são diferenciáveis. Denotaremos por $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores diferencíaveis em M.

Definição 1.10. Dada uma variedade diferencíavel M, sejam $X \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in C^\infty(M)$ e (U, ϕ) uma carta coordenada em torno do ponto $p \in M$. Definimos

$$Xf(p) := X(f)(p) = \sum_i a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p),$$

onde f indica, por um abuso de notação, a expressão de f na carta ϕ.

Pela definição acima, podemos ver um campo de vetores, agora sob o olhar de derivação: Um campo de vetores $X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ é um operador linear que é uma derivação, isto é,

1. Para todos $a, b \in \mathbb{R}$ e $f, g \in C^\infty(M)$,

$$X(af + bg) = aX(f) + bX(g);$$

2. Para todas $f, g \in C^\infty(M)$,

$$X(fg) = gX(f) + fX(g).$$

E pela definição de diferencial

$$df_p(X(p)) = X(p)(f) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p),$$

segue que

$$X(f) = df(X).$$

A interpretação de X como um operador em $C^\infty(M)$ permite-nos considerar os iterados de X. Por exemplo, se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $f \in C^\infty(M)$, podemos considerar as funções $X(Yf)$ e $Y(Xf)$. Em geral, tais operações não conduzem a campos vetorias, por envolverem derivadas de ordem superior à primeira. Entretando, temos a seguinte definição.

Definição 1.11. Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Existe um único campo vetorial $[X, Y]$ tal que, para toda $f \in C^\infty(M)$,

$$[X, Y]f = (XY - YX)f.$$

O campo vetorial $[X, Y] = XY - YX$ é chamado o colchete de Lie de X e Y.

O colchete de Lie é evidentemente diferenciável e possui as seguintes propriedades: Dados $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, $f, g \in C^\infty(M)$ e $a, b \in \mathbb{R}$,

1. $[X, Y] = -[Y, X]$ (anticomutatividade),
2. $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ (linearidade),
3. $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ (identidade de Jacobi),
4. $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$.

Temos também que, dada uma carta coordenada (U, ϕ) em torno do ponto $p \in M$, se escrevemos

$$X = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad Y = \sum_j b_j \frac{\partial}{\partial x_j},$$

a expressão do colchete de Lie em coordenadas é dada por

$$[X, Y] = \sum_{i,j} \left(a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

1.2 Variedades Riemannianas

1.2.1 Métricas Riemannianas

Definição 1.12. Seja M uma variedade diferenciável. Uma métrica Riemanniana em M é uma correspondência que associa a cada ponto p de M uma forma bilinear, simétrica e positiva definida

$$g : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$$

no espaço tangente T_pM, que varia suavemente no seguinte sentido: se (U, ϕ) é uma carta coordenada de M em torno de p, as funções $g_{ij} : \phi(U) \to \mathbb{R}$ definidas por

$$g_{ij}(q) = g\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_q, \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_q \right), i, j = 1, \ldots, n,$$

variam suavemente em U.

Uma variedade diferenciável com uma dada métrica Riemanniana chama-se uma variedade Riemanniana. Em alguns momentos usaremos a notação (M, g), para indicar a variedade Riemanniana M com a sua respectiva métrica g. Em seguida vamos definir uma noção de equivalência para esta estrutura.

Definição 1.13. Sejam (M, g) e (N, h) variedades Riemannianas. Um difeomorfismo $i : M \to N$ é chamado uma isometria se:

$$g(u, v)_p = h(di_p(u), di_p(v))_{i(p)}, \text{ para todo } p \in M, \text{ e } u, v \in T_pM.$$

O resultado a seguir garante a existência de métricas em variedades.

Proposição 1.1. Toda variedade diferenciável M possui uma métrica Riemanniana.

Vamos mostrar agora como uma métrica Riemanniana pode ser usada para calcular comprimentos de curvas.

Definição 1.14. Uma aplicação diferenciável $c : I \to M$ de um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ em uma variedade diferenciável M chama-se uma curva (parametrizada).

Definição 1.15. Seja M uma variedade diferenciável e $c : I \to M$ uma curva em M tal que $c(t_0) = p \in M$. O vetor tangente à curva c em p é o funcional linear $c'(t_0) : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ definido por

$$c'(t_0)(f) := \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} (f \circ c), \ f \in C^\infty(M).$$

Um vetor tangente à M em p é qualquer vetor tangente à curva diferenciável passando por p.

Definição 1.16. Um campo vetorial V ao longo de uma curva $c : I \to M$ é uma aplicação que a cada $t \in I$ associa um vetor tangente $V(t) \in T_{c(t)}M$. O campo vetorial $c'(t)$, indicado por $\frac{dc}{dt}$, é chamado campo velocidade (ou tangente) de c.

A restrição de uma curva c a um intervalo fechado $[a,b] \subset I$ chama-se um segmento. Se (M,g) é Riemanniana, definimos o comprimento de um segmento por

$$l_a^b(c) = \int_a^b g\left(\frac{dc}{dt},\frac{dc}{dt}\right)^{1/2} dt = \int_a^b \sqrt{g(c'(t),c'(t))}dt.$$

A métrica Riemanniana também permite definir uma noção de volume em uma variedade Riemanniana orientada M^n.

Definição 1.17. Seja $R \subset M$ uma região cujo o fecho é compacto. Suporemos que R está contida em uma vizinhança coordenada U de uma carta (U,ϕ), e que a fronteira de $\phi(R) \subset \phi(U)$ tem medida nula em $\mathbb{R}^n$. Definiremos o volume $vol(R)$ em R pela integral em $\mathbb{R}^n$

$$vol(R) := \int_{\phi(R)} \sqrt{det(g_{ij})}dx_1 \dots dx_n = \int_{\phi(R)} \sqrt{\det(g_{ij})}dV_g.$$

1.2.2 Conexões Riemannianas

Definição 1.18. Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M),$$

que se indica por $(X,Y) \to \nabla_X Y$ e que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z,$
2. $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z,$
3. $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y,$

onde $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $f,g \in C^\infty(M)$.

Considere (U,ϕ) uma carta coordenada em torno de $p \in M$. Dados $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$ temos as representações

$$X = \sum_i x_i\partial_i \text{ e } Y = \sum_j y_j\partial_j,$$

onde $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, e temos a expressão local:

$$\nabla_X Y = \sum_i x_i \nabla_{\partial_i}\left(\sum_j y_j\partial_j\right) = \sum_{ij} x_i y_j \nabla_{\partial_i}\partial_j + \sum_{ij} x_i\partial_i(y_j)\partial_j.$$

Fazendo $\nabla_{\partial_i}\partial_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k$, concluimos que a representação da conexão em coordenadas é dada por

$$\nabla_X Y = \sum_k \left(\sum_{ij} x_i y_j \Gamma_{ij}^k + X(y_k) \right) \partial_k, \ (i, j, k = 1, \ldots, n).$$

Os coeficientes Γ_{ij}^k são denominados símbolos de Christoffel.

Proposição 1.2. Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇. Então existe uma única correspondência que associa a um campo vetorial V ao longo da curva diferenciável $c : I \to M$ um outro campo vetorial $\frac{DV}{dt}$ ao longo de c, denominado derivada covariante de V ao longo de c, tal que:

1. $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$.

2. $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$, onde W é um campo de vetores ao longo de c e f é uma função diferenciável em I.

3. Se V é induzido por um campo de vetores $Y \in \mathfrak{X}(M)$, isto é, $V(t) = Y(c(t))$, então
$$\frac{DV}{dt} = \nabla_{dc/dt} Y.$$

Definição 1.19. Seja M uma variedade Riemanniana. Uma conexão ∇ em M é dita compatível com a métrica quando

$$X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z),$$

para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Definição 1.20. Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é dita simétrica quando
$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y],$$
para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Podemos agora enunciar o teorema fundamental da geometria Riemanniana.

Teorema 1.3 (Levi-Civita.). *Dada uma variedade Riemanniana M, existe uma única conexão afim ∇ em M satisfazendo as condições:*

1. ∇ é simétrica.

2. ∇ é compatível com a métrica Riemanniana.

Demonstração. Suponhamos inicialmente a existência de uma tal ∇. Então

$$
\begin{aligned}
X(g(Y,Z)) &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z), &(1.1)\\
Y(g(Z,X)) &= g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X), &(1.2)\\
Z(g(X,Y)) &= g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y). &(1.3)
\end{aligned}
$$

Somando (1.1) e (1.2) e subtraindo (1.3), teremos, usando a simétria de ∇, que

$$X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y))$$

$$= g([X,Z],Y) + g([Y,Z],X) + g([X,Y],Z) + 2g(Z, \nabla_Y X).$$

Portanto

$$
\begin{aligned}
2g(Z,\nabla_Y X) &= X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)) &(1.4)\\
&\quad -g([X,Z],Y) - g([Y,Z],X) - g([X,Y],Z).
\end{aligned}
$$

A expressão (1.4) mostra que ∇ está univocamente determinada pela métrica g. Portanto, caso exista, ela será única. Para mostrar a existência, defina ∇ por (1.4). É fácil verificar que ∇ está bem definida e que satisfaz às propriedades desejadas.

□

A conexão dada pelo teorema acima é denominada conexão Riemanniana ou conexão de Levi-Civita de M. Onde usarmos uma conexão será esta conexão, associada à respectiva métrica na variedade. A equação (1.4) é denominada fórmula de Koszul.

As funções Γ_{ij}^k definidas anteriormente por

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k,$$

são os coeficientes da conexão ∇ ou os símbolos de Christoffel da conexão. De (1.4) segue-se que

$$\sum_l \Gamma_{ij}^l g_{lk} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij}\right\}$$

onde $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j)$. Como a matriz (g_{km}) admite uma inversa (g^{km}), teremos que

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2}\sum_k \left\{\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij}\right\} g^{km}. \tag{1.5}$$

A equação (1.5) é a expressão clássica dos símbolos de Christoffel da conexão Riemanniana em termos dos g_{ij}(dados pela métrica).

1.2.3 Gradiente, Hessiano e Laplaciano

Nesta seção definiremos alguns operádores.

Definição 1.21. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana. Dada $f \in C^\infty(M)$ existe um único campo de vetores suave ∇f, chamado gradiente de f, definido sobre M por

$$X(f) = df(X) = g(\nabla f, X).$$

Se (U, ϕ) é uma carta coordenada em M, podemos escrever

$$X = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \text{ e } \nabla f = \sum_j b_j \frac{\partial}{\partial x_j},$$

note que, dada $f \in C^\infty(M)$ temos que

$$X(f) = \sum_i a_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = g\left(\sum_j b_j \frac{\partial}{\partial x_j}, \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \sum_{ij} a_i b_j g_{ij},$$

com isso

$$b_j = \sum_{ij} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

portanto o gradiente em coordenadas é dado por

$$\nabla f = \sum_{ij} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}. \tag{1.6}$$

Proposição 1.4. Seja M^n uma variedade Riemanniana conexa e $f : M^n \to \mathbb{R}$ uma função suave. Se $\nabla f = 0$ em M, então f é constante em M.

Definição 1.22. Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana e $f \in C^\infty(M)$. O Hessiano de f é o operador linear $(\nabla^2 f)_p : T_pM \to T_pM$, definido para $v \in T_pM$ por

$$(\nabla^2 f)_p(v) = \nabla_v \nabla f.$$

Segue das propriedades da conexão Riemanniana que se X é qualquer extensão de v a uma vizinhança de p em M, então

$$(\nabla^2 f)_p(v) = (\nabla_X \nabla f)(p).$$

Seja $f \in C^\infty(M)$, a forma bilinear simétrica dada por

$$
\begin{aligned}
(X,Y) \mapsto \nabla^2 f(X,Y) := g(\nabla^2 f(X), Y) &= g(\nabla_X \nabla f, Y) \\
&= X(Y(f)) - (\nabla_X Y) f \qquad (1.7) \\
&= X(\nabla f(Y)) - \nabla f(\nabla_X Y),
\end{aligned}
$$

é denominada a forma Hessiana de f, para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Definição 1.23. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana. Dado um campo $X \in \mathfrak{X}(M)$, o divergente de X é a função suave $divX : M \to \mathbb{R}$, definido para $p \in M$ por

$$(divX)(p) = tr\{Y \mapsto (\nabla_Y X)(p)\},$$

onde $Y \in \mathfrak{X}(M)$ e tr denota o traço do operador linear entre chaves.

Definição 1.24. Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana e $f \in C^\infty(M)$. O Laplaciano de f é definido como

$$\Delta f = div(\nabla f) = tr(\nabla^2 f). \qquad (1.8)$$

A proposição seguinte apresenta duas propriedades importantes do Laplaciano.

Proposição 1.5. Sejam $f, h : M^n \to \mathbb{R}$ e $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções suaves, então

$$
\begin{aligned}
\Delta(\phi \circ f) &= (\phi'' \circ f)|\nabla f|^2 + (\phi' \circ f)\Delta f, \\
\Delta(fh) &= h\Delta f + f\Delta h + 2g(\nabla f, \nabla h).
\end{aligned}
$$

1.3 Tensores

Apresentaremos aqui uma rápida introdução ao estudo de tensores.

Definição 1.25. Seja V um espaço vetorial e considere V^* seu dual. Dados k, l números inteiros não-negativos, um tensor do tipo (k, l) em V é uma aplicação multilinear em V e V^* de k elementos de V e l elementos de V^*:

$$T : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{k \text{ cópias}} \times \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{l \text{ cópias}} \to \mathbb{R}.$$

O conjunto de todos os tensores do tipo (k, l) em V, denotado por $T^{(k,l)}(V)$, é um espaço vetorial, quando munido das operações usuais.

Definição 1.26 (Produto Tensorial)**.** Seja V um espaço vetorial e considere V^* seu dual. Dados k, l, p, q inteiros não-negativos, considere $T \in T^{(k,l)}(V)$ e $S \in T^{(p,q)}(V)$. Define-se o produto tensorial de T por S como sendo a aplicação

$$T \otimes S : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{k+p \text{ cópias}} \times \underbrace{V^* \times \ldots \times V^*}_{l+q \text{ cópias}} \to \mathbb{R}$$

por

$$T \otimes S(X_1, ..., X_{k+p}, \omega_1, ..., \omega_{l+q}) := T(X_1, ..., X_k, ..., \omega_1, ..., \omega_l) S(X_{k+1}, ..., X_{k+p}, \omega_{l+1}, ..., \omega_{l+q}),$$

em que $X_j \in V$, $\omega_i \in V^*$, $j = 1, \ldots, k+p$, $i = 1, \ldots, l+q$, e o produto no lado direito é simplesmente a multiplicação de números reais. Logo

$$\otimes : T^{(k,l)}(V) \times T^{(p,q)}(V) \to T^{(k+p,l+q)}(V).$$

Para variedades Riemannianas, temos a seguinte definição.

Definição 1.27. Um tensor T de ordem r em uma variedade Riemanniana é uma aplicação multilinear

$$T : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \ldots \times \mathfrak{X}(M)}_{r \text{ fatores}} \to C^\infty(M).$$

Isto quer dizer que, dados $Y_1, \ldots, Y_r \in \mathfrak{X}(M)$, $T(Y_1, \ldots, Y_r)$, é uma função diferenciável em M, e que T é linear em cada argumento, isto é,

$$T(Y_1, \ldots, fX + gY, \ldots, Y_r) = fT(Y_1, \ldots, X, \ldots, Y_r) + gT(Y_1, \ldots, Y, \ldots, Y_r),$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $f, g \in C^\infty(M)$.

Exemplo 1.1. A métrica Riemanniana é um tensor do tipo $(2, 0)$ (ou um tensor de ordem 2).

1.3.1 Curvaturas

Definição 1.28. A curvatura R de uma variedade Riemanniana M é um tensor

$$R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

definido por

$$R(X, Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z, \; X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M),$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana de M.

Observe que se $M = \mathbb{R}^n$, então $R = 0$. Observamos também que é frequente encontrar na literatura uma definição de curvatura que difere da Definição 1.28 por um sinal. Por conveniência, escreveremos

$$R(X, Y, Z, W) := g(R(X, Y)Z, W).$$

Proposição 1.6. A curvatura R de uma variedade Riemanniana goza das seguintes propriedades:

1. $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$;
2. $R(fX + gY, Z) = fR(X, Z) + gR(Y, Z)$;
3. $R(X, fY + gZ) = fR(X, Y) + gR(X, Z)$;
4. $R(X, Y)(fZ + gW) = fR(X, Y)Z + gR(X, Y)W$;
5. $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$, (Primeira Identidade de Bianchi);
6. $R(X, Y, Z, W) = -R(Y, X, Z, W)$ e $R(X, Y, Z, W) = -R(X, Y, W, Z)$;
7. $R(X, Y, Z, W) = R(Z, W, X, Y)$.

Para todos $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$, $f, g \in C^\infty(M)$.

Agora considere (U, ϕ) uma carta coordenada em M, indicaremos $\frac{\partial}{\partial x_i} = \partial_i$. Pondo por definição

$$R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = \sum_l R_{ijk}^l \partial_l.$$

Assim R_{ijk}^l são as componentes da curvatura R em (U, ϕ). Se

$$X = \sum_i a_i \partial_i, \qquad Y = \sum_j b_j \partial_j, \qquad Z = \sum_k c_k \partial_k,$$

obtemos, pela linearidade R,

$$R(X, Y)Z = \sum_{i,j,k,l} R_{ijk}^l a_i b_j c_k \partial_l.$$

Para exprimir R_{ijk}^l em termos dos coeficientes Γ_{ij}^k da conexão Riemanniana, escrevemos,

$$\begin{aligned} R(\partial_i, \partial_j)\partial_k &= \nabla_{\partial_j}\nabla_{\partial_i}\partial_k - \nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_j}\partial_k + \nabla_{[\partial_i, \partial_j]}\partial_k \\ &= \nabla_{\partial_j}\left(\sum_l \Gamma_{ik}^l \partial_l\right) - \nabla_{\partial_i}\left(\sum_l \Gamma_{jk}^l \partial_l\right), \end{aligned}$$

o que, por um cálculo direto, fornece

$$R^s_{ijk} = \sum_l \Gamma^l_{ik}\Gamma^s_{jl} - \sum_l \Gamma^l_{jk}\Gamma^s_{il} + \frac{\partial}{\partial x_j}\Gamma^s_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma^s_{jk}. \tag{1.9}$$

Definição 1.29. Sejam M uma variedade Riemanniana, $p \in M$ e $\sigma \subset T_pM$ um plano de T_pM. Se $\{x, y\}$ geram σ, define-se a curvatura seccional de M em σ (ou de σ em p) como sendo

$$K(\sigma) = K(x, y) := \frac{R(x, y, x, y)}{|x|^2|y|^2 - g(x, y)^2}.$$

Tal não depende da escolha da base de σ.

Seja $x = z_n$ um vetor unitário em T_pM, tomemos uma base ortonormal $\{z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\}$ do hiperplano de T_pM ortogonal a x e consideremos as seguintes médias:

$$\begin{aligned} Ric_p(x) &= \sum_i g(R(x, z_i)x, z_i),\ i = 1, 2, ..., n-1, \\ S(p) &= \sum_j Ric_p(z_j) = \sum_{ij} g(R(z_i, z_j)z_i, z_j),\ j = 1, ..., n. \end{aligned}$$

As expressões acima não dependem da escolha das correspondentes bases ortonormais, elas são chamadas curvatura de Ricci na direção x e curvatura escalar em p, respectivamente.

Definição 1.30. Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, o tensor de Ricci é o tensor de tipo $(2, 0)$ definido por

$$Ric(X, Y) := \sum_i R(X, e_i, Y, e_i),$$

fazendo o traço na expressão acima, obtemos a curvatura escalar, isto é

$$S := \sum_{ij} R(e_j, e_i, e_j, e_i).$$

1.4 Geodésicas, Variedades Completas

No que se segue, (M, g) será uma variedade Riemanniana munida de sua conexão Riemanniana ∇.

Definição 1.31. Uma curva parametrizada $\gamma : I \to M$ é uma geodésica em $t_0 \in I$ se

$$\frac{D}{dt}\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)(t_0) = 0.$$

Se γ é geodésica em t, para todo $t \in I$, dizemos que γ é uma geodésica. Se $[a, b] \subset I$ e

$\gamma : I \to M$ é uma geodésica, a restrição de γ a $[a, b]$ é chamada (segmento de) geodésica ligando $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$.

Vale notar que as geodésicas tem o comprimento do vetor tangente (velocidade) $\frac{d\gamma}{dt}$ constante, digamos que $|\frac{d\gamma}{dt}| = C \neq 0$. O comprimento de arco s de γ, a partir de uma origem fixa, por exemplo $t = t_0$, é então dado por

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \left| \frac{d\gamma}{dt} \right| dt = C(t - t_0).$$

O parâmetro de uma geodésica é proporcional ao comprimento de arco, se $C = 1$, diremos que a geodésica γ está normalizada.

Definição 1.32. Um segmento de geodésica $\gamma : [a, b] \to M$ é chamado minimizante se $l(\gamma) \leq l(c)$ onde c é qualquer curva diferenciável ligando $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$.

1.4.1 Variações do Comprimento, Aplicação Exponencial

Definição 1.33. Sejam (M^n, g) uma variedade Riemanniana e $c : [a, b] \to M$ uma curva diferenciável, onde o parâmetro $s \in [a, b]$ é o comprimento de arco. Uma variação de c é uma aplicação diferenciável $h : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \to M$ tal que

$$h(0, s) = c(s) \qquad \forall\, s \in [a, b].$$

Para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, a curva $h_t : [a, b] \to M$, dada por $h_t(s) := h(t, s)$, é chamada uma curva da variação h. Uma variação é chamada própria se

$$h(t, a) = c(a), \qquad h(t, b) = c(b), \qquad t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Uma variação h de c determina um campo diferenciável $V(s)$ ao longo de c por

$$V(s) = \frac{\partial h}{\partial t}(s, 0), \qquad s \in [a, b],$$

V é chamado de campo variacional de h. Observamos que se h é própria, então $V(a) = V(b) = 0$.

O comprimento de arco de h_t é a função $L : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ definida por

$$L(t) = \int_a^b \left| \frac{\partial h}{\partial s}(t, s) \right| dt, \qquad t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Teorema 1.7 (Primeira Variação do Comprimento de Arco). *Seja $h : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \to M$ uma variação própria da curva $c : [a, b] \to M$ e seja $V(s) = \frac{\partial h}{\partial t}(s, 0)$, $s \in [a, b]$, o* *campo variacional de h. Então*

$$L'(0) = -\int_a^b g(\nabla_{c'(s)}c'(s), V(s))ds. \tag{1.10}$$

Observamos que, c é um segmento de geodésica se e somente se, $L'(0) = 0$, isto é, geodésicas são pontos críticos do funcional comprimento de arco. A partir de agora vamos considerar apenas variações próprias de geodésicas $\gamma : [a, b] \to M$, parametrizadas pelo comprimento de arco.

Teorema 1.8 (Segunda Variação do Comprimento de Arco)**.** *Sejam $\gamma : [a, b] \to M$ uma geodésica normalizada, $h : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \to M$ uma variação própria de γ e V um campo variacional. Então*

$$L''(0) = \int_a^b \left(\left| \frac{D}{\partial s} V^{\perp}(s) \right|^2 - R(V^{\perp}, \gamma', \gamma', V^{\perp}) \right) ds, \tag{1.11}$$

onde $V^{\perp}$ é a componente normal de V e R é o tensor curvatura de M.

Demonstração. Veja [24]. $\square$

Corolário 1.9. Sejam $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma geodésica normalizada, h uma variação própria de γ e V um campo variacional. Se γ é minimizante, então $L''(0) \geq 0$.

A partir de resultados de equações diferenciais, podemos obter a seguinte proposição.

Proposição 1.10. Dado $p \in M$, existem uma vizinhança U de p em M, um número $\varepsilon > 0$ e uma aplicação suave, $\gamma : (-2, 2) \times \mathcal{U} \to M$, $\mathcal{U} = \{(p, v) \in TM; p \in U, v \in T_pM, |v| < \varepsilon\}$ tal que $t \to \gamma(t, p, v)$, $t \in (-2, 2)$, é a única geodésica de M que no instante $t = 0$ passa por p com velocidade v, para cada $p \in U$ e cada $v \in T_pM$, com $|v| < \varepsilon$.

A proposição anterior nos permite introduzir o conceito de aplicação exponencial da maneira seguinte.

Definição 1.34. Seja $p \in M$ e $\mathcal{U} \subset TM$ um aberto do fibrado tangente dado pela proposição 1.10. A aplicação diferenciável $\exp : \mathcal{U} \to M$ dada por

$$\exp(p, v) := \exp_p(v) = \gamma(1, p, v), \qquad (p, v) \in \mathcal{U},$$

é chamada a aplicação exponencial em $\mathcal{U}$.

Na maior parte das aplicações é utilizado a restrição de exp a um aberto do espaço tangente T_pM, isto é,

$$\exp_p : B_\varepsilon(0) \subset T_pM \to M.$$

Denotaremos por $B_\varepsilon(0)$ uma bola aberta de centro na origem 0 de T_pM e de raio ε.

Proposição 1.11. Dado $p \in M$, existe um $\varepsilon > 0$ tal que $\exp_p : B_\varepsilon(0) \subset T_pM \to M$ é um difeomorfismo de $B_\varepsilon(0)$ sobre um aberto de M.

É conveniente usar a seguinte terminologia. Se $\exp_p$ é um difeomorfismo em uma vizinhança V da origem em T_pM, $\exp_p V = U$ é chamada uma vizinhança normal de p. Se $B_\varepsilon(0)$ é tal que $\overline{B_\varepsilon(0)} \subset V$, chamamos $\exp_p B_\varepsilon(0) = B_\varepsilon(p)$ a bola normal ou geodésica de centro p e raio ε. As geodésicas em $B_\varepsilon(p)$ que partem de p são chamadas geodésicas radiais.

As geodésicas minimizam localmente o comprimento de arco. Mais precisamente, temos o seguinte resultado.

Proposição 1.12. Sejam $p \in M$, U uma vizinhança normal de p, e $B \subset U$ uma bola normal de centro p. Seja $\gamma : [0,1] \to B$ um segmento de geodésica com $\gamma(0) = p$. Se $c : [0,1] \to M$ é qualquer curva diferenciável ligando $\gamma(0)$ a $\gamma(1)$ então $l(\gamma) \leq l(c)$ e se a igualdade vale então $\gamma([0,1]) = c([0,1])$.

1.4.2 Variedades Completas

Definição 1.35. Uma variedade Riemanniana M é geodesicamente completa se para todo $p \in M$, a aplicação exponencial, $\exp_p$, está definida para todo $v \in T_pM$, ou seja, as geodésicas $\gamma(t)$ que partem de p estão definidas para todos os valores do parâmetro $t \in \mathbb{R}$.

É conveniente introduzir uma distância numa variedade Riemanniana M como se segue.

Definição 1.36. A distância $d(p,q)$ entre dois pontos $p, q \in M$, é definida por,

$$d(p,q) := \inf_{c \in \Omega_{p,q}} \int_a^b |c'(t)|dt \quad \forall t \in [a,b],$$

onde $\Omega_{p,q} := \{c : [a,b] \to M;\ c(a) = p,\ c(b) = q\}$ e c é uma curva diferenciável por partes.

Proposição 1.13. Com a distância d, M é um espaço métrico, isto é, para todos $p, q, r \in M$:

1. $d(p,r) \leq d(p,q) + d(q,r)$,
2. $d(p,q) = d(q,p)$,
3. $d(p,q) \geq 0$, e $d(p,q) = 0 \Leftrightarrow p = q$.

Proposição 1.14. A topologia induzida por d em M coincide com a topologia inicial de M.

O fato que torna relevante o conceito de completeza é o seguinte teorema.

Teorema 1.15 (Hopf-Rinow)**.** *Seja M uma variedade Riemanniana e seja $p \in M$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $\exp_p$ *está definida em todo o* T_pM.
2. *Os limitados e fechados de M são compactos.*
3. *M é completa como espaço métrico.*
4. *M é geodesicamente completa.*
5. *Existe uma sucessão de compactos $K_n \subset M$, $K_n \subset int(K_{n+1})$ e $\bigcup_n K_n = M$, tais que se $q_n \notin K_n$ então $d(p, q_n) \to \infty$.*

   Além disso, cada uma das afirmações acima implica que

6. *Para todo $q \in M$ existe uma geodésica γ ligando p a q com $l(\gamma) = d(p,q)$.*

Corolário 1.16. Se M é compacta então M é completa.

Definição 1.37. Uma curva divergente em uma variedade Riemanniana M é uma aplicação diferenciável $\alpha : [0,\infty) \to M$ tal que para todo compacto $K \subset M$ existe um $t_0 \in (0,\infty)$ com $\alpha(t) \notin K$ para $t > t_0$. Ou seja, α sai de qualquer compacto de M.

O comprimento de uma curva divergente é definido por

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t |\alpha'(t)| dt.$$

O seguinte resultado será importante para mais uma equivalência para completude.

Proposição 1.17. Uma variedade Riemanniana (M, g) é completa se, e somente se, o comprimento de qualquer curva divergente em M é ilimitado.

Demonstração. Suponha que (M, g) é uma variedade Riemanniana completa e considere $\alpha : [0, \infty) \to M$ uma curva divergente. Pelo Teorema de Hopf e Rinow, existe (K_n) sequência de compactos tais que $K_n \subset int(K_{n+1})$ e dados $p \in M$ e (q_n) sequência com $q_n \notin K_n$ para todo n, tem-se

$$d(p, q_n) \longrightarrow \infty.$$

Como α é uma curva divergente, temos que existe $t_0^1 \in (0, \infty)$ tal que $\alpha(t) \notin K_1$ para todo $t > t_0^1$. Defina $t_1 = t_0^1 + 1$. Como α é uma curva divergente, temos que existe $t_0^2 \in (t_1, \infty)$ tal que $\alpha(t) \notin K_2$ para todo $t > t_0^2$. Defina $t_2 = t_0^2 + 1$. Proseguindo indutivamente, existe (t_n) sequência estritamente crescente em $(0, \infty)$ tal que $\alpha(t) \notin K_n$ para todo $t \geq t_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $(\alpha(t_n))$ é uma sequência com $\alpha(t_n) \notin K_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$d(\alpha(0), \alpha(t_n)) \longrightarrow \infty.$$

Agora, vamos mostrar que

$$\lim_{t \to \infty} \int_0^t |\alpha'(s)| ds = \infty.$$

Dado $A > 0$ tome $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(\alpha(0), \alpha(t_{n_0})) \geq A.$$

Assim, para todo $t \geq t_{n_0}$,

$$\int_0^t |\alpha'(s)| ds \geq \int_0^{t_{n_0}} |\alpha'(s)| ds \geq d(\alpha(0), \alpha(t_{n_0})) \geq A.$$

Portanto,

$$\lim_{t \to \infty} \int_0^t |\alpha'(s)| ds = \infty.$$

Reciprocamente, suponhamos por contradição que (M, g) não é completa. Então existe uma geodésica $\gamma : [0, a) \to M$, tal que $|\gamma'| = 1$ e γ não pode ser estendida para a.

Afirmação: Para todo $K \subset M$ compacto existe $t_0 \in [0, a)$ tal que $\gamma(t) \notin K$ para todo $t \in (t_0, a)$.

Suponhamos que a afirmação seja falsa. Então existem $K \subset M$ compacto e (t_n) sequência crescente em $[0, a)$ tais que $t_n \to a$ e $\gamma(t_n) \in K$. A menos de subsequência, existe $b \in K$ tal que $\gamma(t_n) \to b$, vejamos que

$$\lim_{t \to a} \gamma(t) = b. \tag{1.12}$$

Dado $\varepsilon > 0$ tome $\tilde{\varepsilon} \in (0, \varepsilon)$ tal que $B_{\tilde{\varepsilon}}(b)$ é bola convexa. Como $\gamma(t_n) \to b$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ com $\gamma(t_n) \in B_{\tilde{\varepsilon}}(b)$ para todo $n \geq n_0$. Fixamos $m > n \geq n_0$, temos que a geodésica que liga $\gamma(t_n)$ a $\gamma(t_m)$ está dentro de $B_{\tilde{\varepsilon}}(b)$, pois $B_{\tilde{\varepsilon}}(b)$ é bola convexa. Assim, como $\gamma/_{[t_n, t_m]}$ liga esses pontos, $\gamma(t) \in B_{\tilde{\varepsilon}}(b)$ para todo $t \in (t_n, t_m)$. Tomando $n = n_0$ e fazendo $m \to a$, temos que $\gamma(t) \in B_{\tilde{\varepsilon}}(b) \subset B_{\varepsilon}(b)$ para todo $t \in (t_{n_0}, a)$. Logo (1.12) vale.

Por (1.12) podemos estender γ para a definindo $\gamma(a) = b$. Fixando $B_r(\gamma(a))$ bola normal vemos que γ é uma geodésica radial, então pode ser estendida para uma $\overline{\gamma} : [0, a + r) \to M$, que é uma contradição. Isto conclui a afirmação.
Reparametrizando γ para $\alpha : [0, \infty) \to M$ dada por

$$\alpha(t) = \gamma(a - ae^{-t}),$$

temos pela afirmação que α é divergente. Porém

$$l(\alpha) = l(\gamma) = a < \infty.$$

Isto contradiz nossa hipótese que toda curva divergente tem comprimento ilimitado. Portanto (M, g) é completa.

$\square$

Para terminarmos essa seção enunciaremos o seguinte resultado:

Teorema 1.18 (Ambrose)**.** *Sejam M e N variedades Riemannianas e $f : M \to N$ uma isometria local. Se M é completa, então f é um recobrimento Riemanniano e é sobrejetiva.*

Demonstração. Consulte [6]. $\square$

1.5 Imersões Isométricas

Seja $i : M \to \overline{M}$ uma imersão de uma variedade diferenciável M de dimensão n em uma variedade Riemanniana $(\overline{M}, h)$ de dimensão $k = n + m$. A métrica Riemanniana h de $\overline{M}$ induz de maneira natural uma métrica Riemanniana g em M: se $v, w \in T_pM$, define-se

$$g(v, w)_p := h(di_p(v), di_p(w))_{i(p)}.$$

Nesta situação, i passa a ser uma imersão isométrica de M em $\overline{M}$, nesta seção estudaremos algumas das relações entre as geometrias de M e de $\overline{M}$.

Inicialmente notamos que, para cada $p \in M$, existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $i(U) \subset \overline{M}$ é uma subvariedade de $\overline{M}$. Isto quer dizer que existem uma vizinhança $\overline{U} \subset \overline{M}$ de $i(p)$ e um difeomorfismo $\psi : \overline{U} \to V \subset \mathbb{R}^k$ em um aberto V de $\mathbb{R}^k$, tais que ψ aplica difeomorficamente $i(U) \cap \overline{U}$ em um aberto do subespaço $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^k$. Para simplificar a notação, identificaremos U com $i(U)$ e cada vetor $v \in T_qM, q \in U$, com $di_q(v) \in T_{i(q)}\overline{M}$.

Para cada $p \in M$, o produto interno em $T_p\overline{M}$ decompõe $T_p\overline{M}$ na soma direta

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^{\perp},$$

onde $(T_pM)^{\perp}$ é o complemento ortogonal de T_pM em $T_p\overline{M}$. Assim, dado $v \in T_p\overline{M}$, $p \in M$, podemos escrever

$$v = v^T + v^N, \;\; v^T \in T_pM, \;\; v^N \in (T_pM)^{\perp}.$$

Denominamos v^T a componente tangencial de v e v^N a componente normal de v.

A conexão Riemanniana de $\overline{M}$ será indicada por $\overline{\nabla}$. Se X e Y são campos locais de vetores em M, e $\overline{X}$, $\overline{Y}$ são extensões locais a $\overline{M}$, definimos a conexão Riemanniana relativa à métrica induzida de M por

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^T.$$

Queremos definir a segunda forma fundamental da imersão $i : M \to \overline{M}$. Para isto convém introduzir previamente a seguinte definição. Se X, Y são campos locais em M,

$$B(X,Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y := (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^N$$

é um campo local em $\overline{M}$ normal a M. $B(X,Y)$ não depende das extensões $\overline{X}$, $\overline{Y}$.

No que se segue, indicaremos por $\mathfrak{X}(U)^{\perp}$ os campos diferenciáveis em U de vetores normais a $i(U) \approx U$.

Proposição 1.19. Se $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$, a aplicação $B : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \to \mathfrak{X}(U)^{\perp}$ dada por

$$B(X,Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y$$

é bilinear e simétrica.

Como B é bilinear, concluimos, exprimindo B em um sistema de coordenadas, que o valor de $B(X,Y)(p)$ depende apenas de $X(p)$ e $Y(p)$.

Agora podemos definir a segunda forma fundamental. Seja $p \in M$ e $\eta \in (T_pM)^{\perp}$.

A aplicação $H_\eta : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ dada por

$$H_\eta(x, y) = g(B(x, y), \eta), \;\; x, y \in T_pM,$$

é, pela proposição anterior, uma forma bilinear simétrica.

Definição 1.38. A forma quadrática II_η definida em T_pM por

$$II_\eta(x) = H_\eta(x, x)$$

é chamada a segunda forma fundamental de i em p segundo o vetor normal η.

Às vezes se utiliza também a expressão segunda forma fundamental para designar a aplicação B. Observe que à aplicação bilinear H_η fica associada a uma aplicação linear, simétrica e auto-adjunta $A : T_pM \to T_pM$ dada por

$$g(A(x), y) = H_\eta(x, y) = g(B(x, y), \eta).$$

A proposição seguinte fornece uma expressão da aplicação linear associada à segunda forma fundamental em termos da derivada covariante.

Proposição 1.20 (Fórmula de Weingarten)**.** Seja $p \in M$, $x \in T_pM$ e $\eta \in (T_pM)^\perp$. Seja N uma extensão local de η normal a M. Então

$$A(x) = -(\overline{\nabla}_x N)^T.$$

Relacionaremos agora a curvatura de M com a curvatura de $\overline{M}$ e as segundas formas fundamentais. Se $x, y \in T_pM \subset T_p\overline{M}$, são linearmente independentes, indicaremos por $K(x, y)$ e $\overline{K}(x, y)$ as curvaturas seccionais de M e $\overline{M}$, respectivamente, no plano gerado por x e y.

Teorema 1.21 (Gauss)**.** *Sejam $p \in M$ e x, y vetores ortonormais de T_pM. Então*

$$K(x, y) - \overline{K}(x, y) = g(B(x, x), B(y, y)) - |B(x, y)|^2. \tag{1.13}$$

Definição 1.39. Uma subvariedade Riemanniana é totalmente umbílica quando a sua segunda forma fundamental é proporcional à métrica.

Definição 1.40. Uma imersão $i : M \to \overline{M}$ é geodésica em $p \in M$ se para todo $\eta \in (T_pM)^\perp$ a segunda forma fundamental II_η é identicamente nula em p. A imersão i é totalmente geodésica se ela é geodésica para todo $p \in M$.

A razão desta terminologia é dada pela seguinte proposição.

Proposição 1.22. Uma imersão $i : M \to \overline{M}$ é geodésica em $p \in M$ se e só se toda geodésica γ de M partindo de p é geodésica de $\overline{M}$ em p.

No caso em que $\overline{M} = \mathbb{R}^n$, os subespaços lineares são evidentemente subvariedades totalmente geodésicas. Uma condição mais fraca do que a de totalmente geodésica é a condição de mínima.

Definição 1.41. Uma imersão $i : M \to \overline{M}$ é mínima se para todo $p \in M$ e todo $\eta \in (T_pM)^\perp$ tem-se que o traço de A é igual à zero ($trA = 0$).

Definição 1.42. O vetor curvatura média da imersão $i : M \to \overline{M}$ é definido por

$$H := \frac{1}{n}(trA)\eta.$$

É claro que i é mínima se e só se $H(p) = 0$, para todo $p \in M$.

Definição 1.43. Dizemos que uma imersão isométrica $i : M \to \overline{M}$ tem vetor curvatura média paralelo quando

$$\nabla^\perp_X H = 0, \qquad \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

Proposição 1.23. Se M é conexa e a imersão isométrica $i : M \to \overline{M}$ tem vetor curvatura média paralelo, então $|H|$ é constante ao longo de M.

Demonstração. De fato, para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$,

$$X(|H|^2) = X(g(H, H)) = 2g(\nabla^\perp_X H, H) = 0.$$

$\square$

Provaremos em seguida uma desigualdade, que será utilizada na demonstração da maior parte dos resultados deste trabalho.

Proposição 1.24 (Kato refinada)**.** Se $trA \equiv 0$, então a norma

$$|A|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}^2,$$

satisfaz a seguinte desigualdade

$$|A|^2 \geq \frac{n}{n-1}A_{11}^2 + 2\sum_{j=2}^{n} A_{1j}^2 \geq \frac{n}{n-1}\sum_{j=1}^{n} A_{1j}^2 \geq \frac{n}{n-1}A_{11}^2.$$

Demonstração. Como $trA \equiv 0$, temos que

$$-A_{11} = \sum_{i=2}^{n} A_{ii}.$$

Note que, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\left(\sum_{i=2}^{n} A_{ii}\right)^2 \leq \sum_{i=2}^{n} 1^2 \sum_{i=2}^{n} A_{ii}^2 = (n-1)\sum_{i=2}^{n} A_{ii}^2,$$

Como

$$\begin{aligned}
|A|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}^2 &= \sum_{i=1}^{n} A_{ii}^2 + \sum_{i\neq j=1}^{n} A_{ij}^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} A_{ii}^2 + \sum_{j=2}^{n} A_{1j}^2 + \sum_{j=2}^{n} A_{j1}^2 + \sum_{i\neq j=2}^{n} A_{ij}^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} A_{ii}^2 + 2\sum_{j=2}^{n} A_{1j}^2 + \sum_{i\neq j=2}^{n} A_{ij}^2 \\
&\geq \sum_{i=1}^{n} A_{ii}^2 + 2\sum_{j=2}^{n} A_{1j}^2.
\end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$\begin{aligned}
|A|^2 &\geq A_{11}^2 + A_{22}^2 + ... + A_{nn}^2 + 2\sum_{j=2}^{n} A_{1j}^2 \\
&= A_{11}^2 + \sum_{i=2}^{n} A_{ii}^2 + 2\sum_{j=2}^{n} A_{1j}^2 \\
&\geq A_{11}^2 + \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=2}^{n} A_{ii}\right)^2 + 2\sum_{j=2}^{n} A_{1j}^2 \\
&= A_{11}^2 + \frac{1}{n-1}(-A_{11})^2 + 2\sum_{j=2}^{n} A_{1j}^2 \\
&= \frac{n}{n-1}A_{11}^2 + 2\sum_{j=2}^{n} A_{1j}^2 \\
&\geq \frac{n}{n-1}\sum_{j=1}^{n} A_{1j}^2 \\
&\geq \frac{n}{n-1}A_{11}^2.
\end{aligned}$$

$\square$

A seguir apresentaremos uma equação importante na teoria das imersões isométricas.

Proposição 1.25. A seguinte equação se verifica:

$$\overline{R}(X,Y,Z,W) = R(X,Y,Z,W) - g(B(Y,W),B(X,Z)) + g(B(X,W),B(Y,Z)). \quad (1.14)$$

Para todos $X,Y,Z,W \in \mathfrak{X}(M)$, onde $\overline{R}$ é a curvatura de $\overline{M}$.

A equação (1.14) é denominada a Equação de Gauss.

1.5.1 Hipersuperfícies

Consideremos o caso particular em que a codimensão da imersão é 1, isto é, $i : M^n \to \overline{M}^{n+1}$. Neste caso $i(M) \subset \overline{M}$ é então denominada uma hipersuperfície. Às vezes se utiliza também a expressão hipersuperfície para designar a imersão isométrica i.

Sejam $p \in M$ e $\eta \in (T_P M)^{\perp}$, $|\eta| = 1$. Como $A : TpM \to T_pM$ é simétrica, existe uma base ortonormal de autovetores $\{e_1, ..., e_n\}$ de T_pM com autovalores reais $\lambda_1, ..., \lambda_n$, isto é,

$$A(e_i) = \lambda_i e_i, \; 1 \leq i \leq n.$$

Se M e $\overline{M}$ são ambas orientáveis e estão orientadas então o vetor η fica univocamente determinado se exigirmos que sendo $\{e_1, ..., e_n\}$ uma base na orientação de M, $\{e_1, ..., e_n, \eta\}$ seja uma base na orientação de $\overline{M}$. Neste caso, denominamos os e_i de direções principais e os $\lambda_i = k_i$ curvaturas principais de i. Com isso, podemos definir, por exemplo: $\det(A) = \lambda_1 ... \lambda_n$ é denominada a curvatura de Gauss-Kronecker de i e $\frac{1}{n}(\lambda_1 + ... + \lambda_n)$ é denominada a curvatura média de i. Observe também, que a fórmula (1.13) admite uma expressão mais simples, dada por

$$K(e_i, e_j) - \overline{K}(e_i, e_j) = \lambda_i \lambda_j. \quad (1.15)$$

Um caso importante ocorre quando $\overline{M} = \mathbb{R}^{n+1}$. Por exemplo, no caso em que $M^2 \subset \overline{M} = \mathbb{R}^3$, o produto $\lambda_1 \lambda_2$ das curvaturas principais é conhecido como a curvatura Gaussiana da superfície. Neste caso, (1.15) mostra que a curvatura Gaussiana coincide com a curvatura seccional em uma superfície (pois $\overline{K} = 0$), e implica o famoso Teorema Egregium de Gauss. Podemos ver também que, a equação de Gauss (1.14) admite uma expressão mais simples, de fato, para todos $X,Y,Z,W \in \mathfrak{X}(M)$

$$\begin{aligned} 0 = \overline{R}(X,Y,Z,W) &= R(X,Y,Z,W) - g(B(Y,W),B(X,Z)) + g(B(X,W),B(Y,Z)) \\ &= R(X,Y,Z,W) - g(AY,W)g(AX,Z) + g(AX,W)g(AY,Z), \end{aligned}$$

isto é,

$$R(X,Y,Z,W) = g(AY,W)g(AX,Z) - g(AX,W)g(AY,Z). \tag{1.16}$$

Enunciaremos em seguida a desigualdade de Simons, tal resultado é relevante para demonstrar resultados importantes nesta dissertação.

Proposição 1.26 (Desigualdade de Simons)**.** Seja $i : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície mínima. Então

$$|A|\Delta|A| + |A|^4 \geq \frac{2}{n}|\nabla|A||^2. \tag{1.17}$$

Demonstração. Veja [13], Lemma 2.1.

□

1.5.2 Estabilidade, Índice Finito

Iniciaremos apresentando a definição de variação de uma hipersuperfície imersa em uma variedade Riemanniana.

Definição 1.44. Seja $i : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma hipersuperfície. Uma variação de i é uma aplicação diferenciável

$$\Phi : M \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \overline{M}$$

satisfazendo as seguintes condições:

1. Para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\Phi_t : M \to \overline{M}$ definida por $\Phi_t(p) := \Phi(p,t)$ é uma imersão isométrica, com $\Phi_0 = i$. Denote $M_t = \Phi_t(M)$;

2. $\Phi_t(p) = p$, se $p \in M - K$, onde K é compacto.

O campo $\Psi(p) := \frac{\partial \Phi}{\partial t}(p, 0)$ é chamado campo variacional.

O funcional área $\mathcal{A} : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ associado à variação Φ é dado por

$$\mathcal{A}(t) = \int_M dV_g,$$

onde dV_g denota o elemento de volume da métrica induzida em M por Φ_t.

Teorema 1.27 (Primeira Variação da Área)**.** *Seja $i : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma hipersuperfície. Se $\Phi : M \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \overline{M}^{n+1}$ é uma variação de i, então*

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathcal{A}(M_t) = -\int_M HfdV_g, \tag{1.18}$$

em que $f = g(N, \Psi) \in C^\infty(M)$, H é a curvatura média de M e N é um vetor normal unitário a M em $\overline{M}$.

Note que, se $i : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ é uma hipersuperfície mínima, então M é um ponto crítico para o funcional área.

Teorema 1.28 (Segunda Variação da Área)**.** *Seja $i : M^n \to (\overline{M}^{n+1}, h)$ uma imersão mínima e Φ uma variação de i, então*

$$\left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} \mathcal{A}(M_t) = -\int_M f(\Delta_g f + |A|_g^2 f + Ric_h(N,N)f)dV_g, \ \forall f \in C^\infty(M), \tag{1.19}$$

onde g é a métrica induzida em M e N é um vetor normal unitário a M em $\overline{M}$.

O operador

$$L_M := \Delta_g + |A|_g^2 + Ric_h(N,N)$$

é chamado operador de estabilidade (ou operador de Jacobi) de M.

Definição 1.45. Diz-se que uma imersão isométrica mínima $i : M^n \to \overline{M}^{n+1}$, com M orientável, é estável quando a segunda variação da área é não-negativa, isto é,

$$-\int_M f L_M f dV_g \geq 0, \ \forall f \in C^\infty(M).$$

Mostraremos, agora, uma desigualdade que será de fundamental importância em argumentos vindouros.

Proposição 1.29 (Desigualdade de Estabilidade)**.** Seja $i : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma hipersuperfície mínima estável. Então para qualquer função Lipschitz φ com suporte compacto

$$\int_M (|A|_g^2 + Ric_h(N,N))\varphi^2 dV_g \leq \int_M |\nabla_g \varphi|_g^2 dV_g. \tag{1.20}$$

Demonstração. Como M é estável então

$$0 \leq -\int_M \varphi L_M \varphi dV_g = -\int_M (\varphi \Delta_g \varphi + (|A|_g^2 + Ric_h(N,N))\varphi^2)dV_g,$$

assim, vendo que

$$\int_M \varphi \Delta_g \varphi dV_g = -\int_M |\nabla_g \varphi|_g^2 dV_g,$$

temos, portanto

$$\int_M (|A|_g^2 + Ric_h(N,N))\varphi^2 dV_g \leq \int_M |\nabla_g \varphi|_g^2 dV_g.$$

□

Observe que, sendo M uma hipersuperfície mínima e $D \subset M$ um domínio limitado de M, se M é estável, isto é, $\left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} \mathcal{A}(M_t) \geq 0$, para toda variação de M que fixa o bordo ∂D de D. Isto significa que D é um ponto (crítico da área) de mínimo relativo para toda variação de M.

O operador L_M induz de maneira natural a forma quadrática $Q : C^{\infty}(M) \to \mathbb{R}$ definida por

$$Q(f) = -\int_M f L_M f,$$

que atua no espaço das funções suaves em M.

Definição 1.46. O índice da hipersuperfície M, é definido como sendo a dimensão do maior subespaço V de $C^{\infty}(M)$ no qual Q é negativa definida. Equivalentemente, é o número de autovalores negativos do operador L_M contados com multiplicidade.

Tal índice denotado por $Ind(M)$, é chamado índice de Morse da hipersuperfície M. Observe que, o índice $Ind(M)$ nos fornece uma medida de não estabilidade de M, isto é, estabilidade implica em índice finito igual a zero.

Em seguida enunciaremos uma proposição, que será de grande importância na demonstração de alguns resultados deste trabalho.

Proposição 1.30 (Fischer-Colbrie, 1985)**.** Se M é uma hipersuperfície mínima completa com índice finito então existe um conjunto compacto K em M tal que $M - K$ é estável e existe uma função suave positiva u em M tal que $L_M u = 0$ em $M - K$.

Demonstração. Veja [20], Proposição 1. □

1.6 Teorema da Divergência

Nesta seção, apresentaremos o Teorema da Divergência e algumas das suas consequências.

Teorema 1.31 (Teorema da Divergência)**.** *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana compacta orientada e $X \in \mathfrak{X}(M)$. Se o bordo de M é munido com a orientação e a métrica induzidas pela inclusão $j : \partial M \to M$ e ν denota a normal unitária exterior a M ao longo de ∂M, então*

$$\int_M (divX) dM = \int_{\partial M} g(X, \nu) d(\partial M).$$

Colecionamos a seguir algumas consequências úteis do teorema da divergência.

Proposição 1.32. Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana compacta e orientada, com bordo ∂M munido com a orientação e a métrica induzidas pela inclusão $j : \partial M \to$

M (possivelmente $\partial M = \emptyset$). Se $f : M \to \mathbb{R}$ é uma função suave e ν denota a normal unitária exterior a M ao longo de ∂M, então

$$\int_M \Delta f dM = \int_{\partial M} \frac{\partial f}{\partial \nu} d(\partial M),$$

onde $\frac{\partial f}{\partial v} = g(\nabla f, v)$ é a derivada normal de f ao longo de ∂M.

Demonstração. Aplicar o Teorema da divergência ao campo $X = \nabla f$. □

Definição 1.47. Se M^n é uma variedade Riemanniana, uma função suave $f : M \to \mathbb{R}$ é harmônica (respectivamente subharmônica, superharmônica) se $\Delta f = 0$ (respectivamente $\Delta f \geq 0$, $\Delta f \leq 0$) em M^n.

Teorema 1.33 (Hopf)**.** *Se M^n é uma variedade Riemanniana orientada, conexa e fechada ($\partial M = \emptyset$), então toda função subharmônica (resp. superharmônica, harmônica) $f : M \to \mathbb{R}$ é constante.*

Demonstração. Façamos a prova no caso em que f é subharmônica, sendo os demais casos análogos. Pela Proposição 1.32, temos que

$$\int_M \Delta f dM = 0.$$

Como $\Delta f \geq 0$ sobre M, concluímos que $\Delta f = 0$ sobre M. Agora, novamente pela Proposição 1.32, temos que

$$0 = \int_M \Delta(f^2) dM = \int_M (2f\Delta f + 2|\nabla f|^2) dM = 2\int_M |\nabla f|^2 dM,$$

donde segue que $\nabla f = 0$ sobre M. A conexidade de M garante, via Proposição 1.4, que f é constante. □

As fórmulas da proposição a seguir são coletivamente conhecidas como as identidades de Green.

Proposição 1.34. Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana compacta orientada, com bordo ∂M munido com a orientação e a métrica induzidas pela inclusão $j : M \to \partial M$ (possivelmente $\partial M = \emptyset$). Se $f, h : M \to \mathbb{R}$ são funções suaves e ν denota a normal unitária exterior a M ao longo de ∂M, então:

1. (Primeira Identidade de Green)

$$\int_M (g(\nabla f, \nabla h) + f\Delta h) dM = \int_{\partial M} f \frac{\partial h}{\partial \nu} d(\partial M).$$

2. (Segunda Identidade de Green)

$$\int_M (f\Delta h - h\Delta f)dM = \int_{\partial M} \left(f\frac{\partial h}{\partial \nu} - h\frac{\partial f}{\partial \nu} \right) d(\partial M).$$

Capítulo 2

Geometria Conforme

Os principais resultados deste trabalho são superados com base em uma deformação conforme da métrica. Por esta razão neste capítulo, apresentaremos alguns resultados e computações sobre métricas conformes.

2.1 Fórmulas de Geometria Conforme

Definição 2.1. Duas métricas g e $\tilde{g}$ em uma variedade diferenciável M são ditas conformes se existe uma função suave positiva f tal que $\tilde{g} = fg$.

Para fixar e auxiliar nos cálculos usaremos, as seguintes notações: Seja (M, g) uma variedade Riemanniana e $\varphi : M \to \mathbb{R}$ uma função suave, com isso, defina uma nova métrica

$$\tilde{g} = e^{2\varphi} g.$$

Sejam ∇ e $\tilde{\nabla}$ as conexões de Levi-Civita de (M, g) e $(M, \tilde{g})$, respectivamente. A seguinte proposição exibe uma fórmula para a conexão $\tilde{\nabla}$.

Proposição 2.1. Para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, temos a relação

$$\tilde{\nabla}_Y X = \nabla_Y X + X(\varphi)Y + Y(\varphi)X - g(X, Y)\nabla_g \varphi,$$

ou equivalentemente,

$$\tilde{\nabla}_Y X = \nabla_Y X + g(\nabla_g \varphi, X)Y + g(\nabla_g \varphi, Y)X - g(X, Y)\nabla_g \varphi.$$

Demonstração. Pela Fórmula de Koszul (1.4), temos que

$$\begin{aligned} 2\tilde{g}(Z, \tilde{\nabla}_Y X) &= X(\tilde{g}(Y, Z)) + Y(\tilde{g}(Z, X)) - Z(\tilde{g}(X, Y)) \\ &\quad -\tilde{g}([X, Z], Y) - \tilde{g}([Y, Z], X) - \tilde{g}([X, Y], Z), \end{aligned}$$

como $\tilde{g} = e^{2\varphi}g$, obtemos

$$\begin{aligned}
2e^{2\varphi}g(Z, \tilde{\nabla}_Y X) &= X(e^{2\varphi}g(Y,Z)) + Y(e^{2\varphi}g(Z,X)) - Z(e^{2\varphi}g(X,Y)) \\
&\quad - e^{2\varphi}g([X,Z],Y) - e^{2\varphi}g([Y,Z],X) - e^{2\varphi}g([X,Y],Z) \\
&= 2e^{2\varphi}X(\varphi)g(Y,Z) + e^{2\varphi}(g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)) \\
&\quad +2e^{2\varphi}Y(\varphi)g(Z,X) + e^{2\varphi}(g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X)) \\
&\quad -2e^{2\varphi}Z(\varphi)g(X,Y) - e^{2\varphi}(g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)) \\
&\quad - e^{2\varphi}g(\nabla_X Z - \nabla_Z X, Y) - e^{2\varphi}g(\nabla_Y Z - \nabla_Z Y, X) \\
&\quad - e^{2\varphi}g(\nabla_X Y - \nabla_Y X, Z) \\
&= 2e^{2\varphi}X(\varphi)g(Y,Z) + 2e^{2\varphi}Y(\varphi)g(Z,X) \\
&\quad -2e^{2\varphi}Z(\varphi)g(X,Y) + 2e^{2\varphi}g(\nabla_Y X, Z) \\
&= 2e^{2\varphi}g(X(\varphi)Y + Y(\varphi)X - \nabla_g\varphi g(X,Y) + \nabla_Y X, Z).
\end{aligned}$$

Cancelando $2e^{2\varphi}$ em ambos os lados da igualdade, e como Z é arbitrário, temos, portanto

$$\tilde{\nabla}_Y X = \nabla_Y X + X(\varphi)Y + Y(\varphi)X - g(X,Y)\nabla_g\varphi,$$

ou equivalentemente,

$$\tilde{\nabla}_Y X = \nabla_Y X + g(\nabla_g\varphi, X)Y + g(\nabla_g\varphi, Y)X - g(X,Y)\nabla_g\varphi.$$

□

Agora vamos obter uma expressão para a curvatura na métrica conforme $\tilde{g}$, que denotaremos por $\tilde{R}$, para isso, precisamos de alguns cálculos:

Por simplicidade, denotamos

$$\nabla_g\varphi = \mu, \quad |\nabla_g\varphi|_g^2 = g(\mu,\mu) \quad \text{e} \quad \nabla_g^2\varphi(X,Y) = g(\nabla_X\mu, Y).$$

Para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, pela Proposição 2.1, temos que

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_X\tilde{\nabla}_Y Z &= \nabla_X\tilde{\nabla}_Y Z + g(\tilde{\nabla}_Y Z,\mu)X + g(X,\mu)\tilde{\nabla}_Y Z - g(X,\tilde{\nabla}_Y Z)\mu \\
&= \nabla_X\nabla_Y Z + g(\nabla_X Z,\mu)Y + g(Z,\nabla_X\mu)Y + g(Z,\mu)\nabla_X Y \\
&\quad +g(\nabla_X Y,\mu)Z + g(Y,\nabla_X\mu)Z + g(Y,\mu)\nabla_X Z \\
&\quad -g(\nabla_X Y,Z)\mu - g(Y,\nabla_X Z)\mu - g(Y,Z)\nabla_X\mu \\
&\quad +g(\nabla_Y Z,\mu)X + g(Z,\mu)g(Y,\mu)X + g(Y,\mu)g(Z,\mu)X - |\nabla_g\varphi|_g^2 g(Y,Z)X \\
&\quad +g(X,\mu)\nabla_Y Z + g(X,\mu)g(Z,\mu)Y + g(X,\mu)g(Y,\mu)Z - g(X,\mu)g(Y,Z)\mu \\
&\quad -g(X,\nabla_Y Z)\mu - g(Z,\mu)g(X,Y)\mu - g(Y,\mu)g(X,Z)\mu + g(Y,Z)g(X,\mu)\mu \\
&= \nabla_X\nabla_Y Z + g(\nabla_X Z,\mu)Y + \nabla_g^2\varphi(X,Z)Y + g(Z,\mu)\nabla_X Y \\
&\quad +g(\nabla_X Y,\mu)Z + \nabla_g^2\varphi(X,Y)Z + g(Y,\mu)\nabla_X Z \\
&\quad -g(\nabla_X Y,Z)\mu - g(Y,\nabla_X Z)\mu - g(Y,Z)\nabla_X\mu \\
&\quad +g(\nabla_Y Z,\mu)X + g(Z,\mu)g(Y,\mu)X + g(Y,\mu)g(Z,\mu)X - |\nabla_g\varphi|_g^2 g(Y,Z)X \\
&\quad +g(X,\mu)\nabla_Y Z + g(X,\mu)g(Z,\mu)Y + g(X,\mu)g(Y,\mu)Z \\
&\quad -g(X,\nabla_Y Z)\mu - g(Z,\mu)g(X,Y)\mu - g(Y,\mu)g(X,Z)\mu.
\end{aligned}$$

E também que

$$\tilde{\nabla}_{[X,Y]}Z = \nabla_{[X,Y]}Z + g(Z,\mu)[X,Y] + g([X,Y],\mu)Z - g([X,Y],Z)\mu.$$

Com isso instalado podemos calcular o tensor curvatura $\tilde{R}$.

Proposição 2.2. Para todos $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$, temos que

$$\begin{aligned}
\tilde{R}(X,Y)Z &= R(X,Y)Z + \nabla_g^2\varphi(X,Z)Y - g(Y,Z)\nabla_X\nabla_g\varphi + Y(\varphi)Z(\varphi)X \\
&\quad -|\nabla_g\varphi|_g^2 g(Y,Z)X - Y(\varphi)g(X,Z)\nabla_g\varphi - \nabla_g^2\varphi(Y,Z)X + g(X,Z)\nabla_Y\nabla_g\varphi \\
&\quad -X(\varphi)Z(\varphi)Y + |\nabla_g\varphi|_g^2 g(X,Z)Y + X(\varphi)g(Y,Z)\nabla_g\varphi.
\end{aligned}$$

Demonstração. Pela definição de curvatura e os cálculos já feitos acima, temos que

$$
\begin{aligned}
\tilde{R}(X,Y)Z &= \tilde{\nabla}_X\tilde{\nabla}_Y Z - \tilde{\nabla}_Y\tilde{\nabla}_X Z - \tilde{\nabla}_{[X,Y]}Z \\
&= \nabla_X\nabla_Y Z + g(\nabla_X Z,\mu)Y + \nabla_g^2\varphi(X,Z)Y + g(Z,\mu)\nabla_X Y \\
&\quad + g(\nabla_X Y,\mu)Z + \nabla_g^2\varphi(X,Y)Z + g(Y,\mu)\nabla_X Z \\
&\quad - g(\nabla_X Y,Z)\mu - g(Y,\nabla_X Z)\mu - g(Y,Z)\nabla_X\mu \\
&\quad + g(\nabla_Y Z,\mu)X + g(Z,\mu)g(Y,\mu)X + g(Y,\mu)g(Z,\mu)X - |\nabla_g\varphi|_g^2 g(Y,Z)X \\
&\quad + g(X,\mu)\nabla_Y Z + g(X,\mu)g(Z,\mu)Y + g(X,\mu)g(Y,\mu)Z \\
&\quad - g(X,\nabla_Y Z)\mu - g(Z,\mu)g(X,Y)\mu - g(Y,\mu)g(X,Z)\mu \\
&\quad - \nabla_Y\nabla_X Z - g(\nabla_Y Z,\mu)X - \nabla_g^2\varphi(Y,Z)X - g(Z,\mu)\nabla_Y X \\
&\quad - g(\nabla_Y X,\mu)Z - \nabla_g^2\varphi(Y,X)Z - g(X,\mu)\nabla_Y Z \\
&\quad + g(\nabla_Y X,Z)\mu + g(X,\nabla_Y Z)\mu + g(X,Z)\nabla_Y\mu \\
&\quad - g(\nabla_X Z,\mu)Y - g(Z,\mu)g(X,\mu)Y - g(X,\mu)g(Z,\mu)Y + |\nabla_g\varphi|_g^2 g(X,Z)Y \\
&\quad - g(Y,\mu)\nabla_X Z - g(Y,\mu)g(Z,\mu)X - g(Y,\mu)g(X,\mu)Z \\
&\quad + g(Y,\nabla_X Z)\mu + g(Z,\mu)g(Y,X)\mu + g(X,\mu)g(Y,Z)\mu \\
&\quad - \nabla_{[X,Y]}Z - g(Z,\mu)[X,Y] - g([X,Y],\mu)Z + g([X,Y],Z)\mu.
\end{aligned}
$$

Portanto, fazendo os cancelamentos, obtemos

$$
\begin{aligned}
\tilde{R}(X,Y)Z &= R(X,Y)Z + \nabla_g^2\varphi(X,Z)Y - g(Y,Z)\nabla_X\nabla_g\varphi + Y(\varphi)Z(\varphi)X \\
&\quad - |\nabla_g\varphi|_g^2 g(Y,Z)X - Y(\varphi)g(X,Z)\nabla_g\varphi - \nabla_g^2\varphi(Y,Z)X + g(X,Z)\nabla_Y\nabla_g\varphi \\
&\quad - X(\varphi)Z(\varphi)Y + |\nabla_g\varphi|_g^2 g(X,Z)Y + X(\varphi)g(Y,Z)\nabla_g\varphi.
\end{aligned}
$$

□

Pelo o que já foi feito até agora estamos em condições de mostrar uma expressão para o Ricci na métrica $\tilde{g}$, em alguns cálculos na demonstração da proposição seguinte usaremos as notações:

$$(d\varphi)^{\otimes 2}(X,W) = d\varphi \otimes d\varphi(X,W) = g(X,\mu)g(\mu,W) \quad \text{e} \quad tr_g(d\varphi)^{\otimes 2} = |\nabla_g\varphi|_g^2,$$

para todos $X, W \in \mathfrak{X}(M)$, onde $\mu = \nabla_g\varphi$.

Proposição 2.3. O tensor de Ricci na métrica conforme $\tilde{g} = e^{2\varphi}g$ é dado por

$$\tilde{Ric} := Ric_{\tilde{g}} = Ric_g - (n-2)(\nabla_g^2\varphi - d\varphi\otimes d\varphi) - (\Delta_g\varphi + (n-2)|\nabla_g\varphi|_g^2)g.$$

Demonstração. Tomando o produto interno na expressão da curvatura $\tilde{R}(X,Y)Z$ por um quarto campo $W \in \mathfrak{X}(M)$ com respeito a métrica g, obtemos

$$\begin{aligned}
g(\tilde{R}(X,Y)Z,W) &= R(X,Y,Z,W) + \nabla_g^2\varphi(X,Z)g(Y,W) - g(Y,Z)\nabla_g^2\varphi(X,W) \\
&\quad + g(Y,\mu)g(Z,\mu)g(X,W) - |\nabla_g\varphi|_g^2 g(Y,Z)g(X,W) \\
&\quad - g(Y,\mu)g(X,Z)g(\mu,W) - \nabla_g^2\varphi(Y,Z)g(X,W) \\
&\quad + g(X,Z)\nabla_g^2\varphi(Y,W) - g(X,\mu)g(Z,\mu)g(Y,W) \\
&\quad + |\nabla_g\varphi|_g^2 g(X,Z)g(Y,W) + g(X,\mu)g(Y,Z)g(\mu,W).
\end{aligned}$$

Fazendo $Y = e_i = Z$ e somando em i $(i = 1, 2, ..., n)$, obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_i g(\tilde{R}(X,e_i)e_i,W) &= \sum_i R(X,e_i,e_i,W) + \sum_i \nabla_g^2\varphi(X,e_i)g(e_i,W) \\
&\quad - \sum_i g(e_i,e_i)\nabla_g^2\varphi(X,W) + \sum_i g(e_i,\mu)g(e_i,\mu)g(X,W) \\
&\quad - |\nabla_g\varphi|_g^2 \sum_i g(e_i,e_i)g(X,W) - \sum_i g(e_i,\mu)g(X,e_i)g(\mu,W) \\
&\quad - \sum_i \nabla_g^2\varphi(e_i,e_i)g(X,W) + \sum_i g(X,e_i)\nabla_g^2\varphi(e_i,W) \\
&\quad - \sum_i g(X,\mu)g(e_i,\mu)g(e_i,W) + |\nabla_g\varphi|_g^2 \sum_i g(X,e_i)g(e_i,W) \\
&\quad + \sum_i g(X,\mu)g(e_i,e_i)g(\mu,W).
\end{aligned}$$

Com isso,

$$\begin{aligned}
\tilde{Ric}(X,W) &= Ric(X,W) + \nabla_g^2\varphi(X,W) - n\nabla_g^2\varphi(X,W) + tr_g(d\varphi)^{\otimes 2}g(X,W) \\
&\quad - n|\nabla_g\varphi|_g^2 g(X,W) - (d\varphi)^{\otimes 2}(X,W) - tr_g(\nabla_g^2\varphi)g(X,W) \\
&\quad + \nabla_g^2\varphi(X,W) - (d\varphi)^{\otimes 2}(X,W) + |\nabla_g\varphi|_g^2 g(X,W) + n(d\varphi)^{\otimes 2}(X,W).
\end{aligned}$$

Como X e Y são arbitrários, temos que

$$\tilde{Ric} = Ric - (n-2)\nabla_g^2\varphi + (n-2)(d\varphi)^{\otimes 2} - \Delta_g\varphi g + 2|\nabla_g\varphi|_g^2 g - n|\nabla_g\varphi|_g^2 g,$$

reorganizando,

$$\tilde{Ric} = Ric - (n-2)(\nabla_g^2\varphi - d\varphi \otimes d\varphi) - (\Delta_g\varphi + (n-2)|\nabla_g\varphi|_g^2)g.$$

□

A seguinte proposição fornece uma relação para traços de tensores por métricas conformes.

Proposição 2.4. Seja T um campo $(0,2)$-tensorial em M. Então

$$tr_{\tilde{g}}T = e^{-2\varphi}tr_g T.$$

Demonstração. Em coordenadas, temos que $tr_g T = g^{ij}T_{ij}$, $tr_{\tilde{g}}T = \tilde{g}^{ij}T_{ij}$ e

$$\tilde{g}_{ij} = e^{2\varphi}g_{ij} \Rightarrow \tilde{g}^{ij} = e^{-2\varphi}g^{ij},$$

com isso

$$tr_{\tilde{g}}T = \tilde{g}^{ij}T_{ij} = e^{-2\varphi}g^{ij}T_{ij} = e^{-2\varphi}tr_g T,$$

portanto,

$$tr_{\tilde{g}}T = e^{-2\varphi}tr_g T.$$

□

Proposição 2.5. A curvatura escalar na métrica conforme $\tilde{g}$ é

$$\tilde{S} = e^{-2\varphi}(S - (2n-2)\Delta_g\varphi - (n-1)(n-2)|\nabla_g\varphi|_g^2).$$

Demonstração. Fazendo o $tr_{\tilde{g}}$ na expressão do $\tilde{Ric}$ e usando a proposição anterior, obtemos

$$\begin{aligned}
\tilde{S} &= e^{-2\varphi}S - (n-2)e^{-2\varphi}(\Delta_g\varphi - |\nabla_g\varphi|_g^2) - ne^{-2\varphi}(\Delta_g\varphi + (n-2)|\nabla_g\varphi|_g^2) \\
&= e^{-2\varphi}(S - (2n-2)\Delta_g\varphi - (n-1)(n-2)|\nabla_g\varphi|_g^2).
\end{aligned}$$

□

Na proposição seguinte, obtemos expressões para o gradiente, hessiano e o laplaciano na métrica $\tilde{g}$ para uma função $f \in C^\infty(M)$, que se relacionam com os mesmos entes referentes à métrica g e à função φ, expoente da métrica conforme $\tilde{g} = e^{2\varphi}g$.

Proposição 2.6. Seja $\tilde{g} = e^{2\varphi}g$. Para qualquer função $f : M \to \mathbb{R}$ suave, temos que

$$\nabla_{\tilde{g}}f = e^{-2\varphi}\nabla_g f, \tag{2.1}$$

$$\nabla_{\tilde{g}}^2 f = \nabla_g^2 f - (d\varphi \otimes df + df \otimes d\varphi) + g(\nabla_g\varphi, \nabla_g f)g, \tag{2.2}$$

$$\Delta_{\tilde{g}}f = e^{-2\varphi}(\Delta_g f + (n-2)g(\nabla_g\varphi, \nabla_g f)). \tag{2.3}$$

Demonstração. Primeiramente, para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ pela definição de gradiente, temos que

$$g(\nabla_g f, X) = X(f) = \tilde{g}(\nabla_{\tilde{g}}f, X) = e^{2\varphi}g(\nabla_{\tilde{g}}f, X),$$

implicando que

$$g(e^{-2\varphi}\nabla_g f, X) = g(\nabla_{\tilde{g}} f, X),$$

logo,

$$\nabla_{\tilde{g}} f = e^{-2\varphi}\nabla_g f.$$

Agora, para o hessiano, dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, temos que

$$\begin{aligned}
\nabla^2_{\tilde{g}} f(X,Y) &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X \nabla_{\tilde{g}} f, Y) = e^{2\varphi} g(\tilde{\nabla}_X (e^{-2\varphi}\nabla_g f, Y)) \\
&= e^{2\varphi} g(-2e^{-2\varphi} X(\varphi)\nabla_g f + e^{-2\varphi}\nabla_X \nabla_g f, Y) \\
&= -2X(\varphi)Y(f) + g(\tilde{\nabla}_X \nabla_g f, Y).
\end{aligned}$$

Pela Proposição 2.1, temos que

$$\begin{aligned}
g(\tilde{\nabla}_X \nabla_g f, Y) &= g(\nabla_X \nabla_g f + X(\varphi)\nabla_g f + \nabla_g f(\varphi) X - g(X, \nabla_g f)\nabla_g \varphi, Y) \\
&= \nabla^2_g f(X,Y) + X(\varphi)Y(f) - X(f)Y(\varphi) + g(\nabla_g f, \nabla_g \varphi) g(X,Y).
\end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\nabla^2_{\tilde{g}} f(X,Y) = \nabla^2_g f(X,Y) - (X(\varphi)Y(f) + X(f)Y(\varphi)) + g(\nabla_g f, \nabla_g \varphi) g(X,Y),$$

portanto,

$$\nabla^2_{\tilde{g}} f = \nabla^2_g f - (d\varphi \otimes df + df \otimes d\varphi) + g(\nabla_g f, \nabla_g \varphi) g.$$

Fazendo o traço ($tr_{\tilde{g}}$) na expressão acima, obtemos o laplaciano na métrica $\tilde{g}$:

$$\begin{aligned}
\Delta_{\tilde{g}} f &= e^{-2\varphi} tr_g(\nabla^2_g f - (d\varphi \otimes df + df \otimes d\varphi) + g(\nabla_g f, \nabla_g \varphi) g) \\
&= e^{-2\varphi}(\Delta_g f - g(\nabla_g \varphi, \nabla_g f) - g(\nabla_g f, \nabla_g \varphi) + n g(\nabla_g f, \nabla_g \varphi)) \\
&= e^{-2\varphi}(\Delta_g f + (n-2) g(\nabla_g \varphi, \nabla_g f)).
\end{aligned}$$

□

Pela Proposição 1.30, para M, uma hipersuperfície mínima completa com índice finito, existe uma função positiva $u \in C^\infty(M)$ e um conjunto compacto K em M tal que $L_M u = 0$ em $M - K$. Sendo g a métrica original em M, consideremos a mudança conforme $\tilde{g} = u^{2k} g$ onde k é uma constante positiva. Seguindo a mesma construção da demonstração do Teorema 1 em [20], podemos provar o seguinte:

Proposição 2.7. Fixando um ponto $p \in M$, existe uma geodésica minimizante $\gamma : [0, \infty) \to M - K$ partindo de p, na métrica conforme $\tilde{g}$, que é parametrizada pelo comprimento de arco na métrica original g.

Demonstração. Fixe um ponto p em M e para qualquer $R > 0$, vamos considerar a bola geodésica $B_R(p)$ centrada em p e raio R na métrica completa g de M. Escolhamos uma exaustão de $M = \bigcup_i B_{R_i}(p)$ $(R_i \to \infty, i \to \infty)$. Então, para cada i existe um segmento de geodésica $\gamma_i(s)$ que realiza a distância de p á fronteira $\partial B_{R_i}(p)$ na métrica $\tilde{g}$, tal que s é o comprimento de arco de γ_i na métrica g. Para ver isto, defina $u_{R_i} = u + \eta$ onde η é uma função suave, tal que $\eta \equiv 0$ em $B_{R_i}(p)$ e $\eta \equiv 1$ em $M^n - B_{R_i+1}(p)$. Como u_{R_i} é limitado inferiormente, a métrica

$$\tilde{g}_{R_i} = u_{R_i}^{2k} g$$

é completa, assim que essas geodésicas existem. Como B_{R_i} é compacto, podemos ligar p a qualquer ponto do bordo de $B_{R_i}(p)$ com a menor geodésica na métrica $\tilde{g}_{R_i}$. seja $\rho_i \in \partial B_{R_i}$ tal que, ρ_i está mais próximo de p e seja γ_i a menor distância de p até ρ_i. Note que γ_i deve ficar inteiramente dentro de $B_{R_i}(p)$ ou outro ponto estaria mais próximo de p. Como $u_{R_i} = u$ em $B_{R_i}(p)$, então γ_i é uma geodésica na métrica $\tilde{g}$.

Vamos supor que γ_i está parametrizada pelo comprimeto de arco na métrica g. Agora, vamos tomar uma subsequência de $R_i \to \infty$ tal que o vetor tangente convirja para um limite v. isto é, $\gamma'_{R_i} \to v$ assim, pela dependência de soluções em relação aos parâmetros (teoria de EDO), estas geodésicas convergem em um conjunto compacto de $[0, \infty)$ para uma geodésica limitada γ que minimiza a distância entre quaisquer dois pontos na métrica conforme $\tilde{g}$ e é parametrizada pelo comprimento de arco na métrica g. Como γ é semi-geodésica, segue-se que $\gamma \cap K$ está contido em $\gamma([0, l])$ para algum $l > 0$. Portanto, podemos substituir γ por $\gamma/_{[0,\infty)}$ e assumir que $\gamma \subset M - K$.

□

Seja γ uma geodésica parametrizada pelo comprimento de arco s na métrica g, escolhamos uma base ortonormal $\{e_1 = \frac{\partial \gamma}{\partial s}, e_2, ..., e_n\}$ em g, tal que $e_2, ..., e_n$ sejam paralelos ao longo de γ. Denote por Ric_{11} e $\tilde{Ric}_{11}$ as curvaturas de Ricci na direção de e_1 para as métricas g e $\tilde{g} = u^{2k} g$, respectivamente. Com isso, temos o seguinte resultado:

Proposição 2.8. O tensor de Ricci na direção do vetor $e_1 = \frac{\partial \gamma}{\partial s}$, com respeito a métrica conforme $\tilde{g} = u^{2k} g$, é dado por

$$\tilde{Ric}_{11} = Ric_{11} - k(n-2)(\ln u)_{ss} - k\frac{\Delta_g u}{u} + k\frac{|\nabla_g u|_g^2}{u^2}.$$

Demonstração. Pela Proposição 2.3, a Lei de Transformação da curvatura de Ricci sob a mudança conforme da métrica $\tilde{g} = u^{2k} g$ é a seguinte,

$$\begin{aligned}\tilde{Ric}_{11} &= Ric(\gamma', \gamma') - (n-2)\nabla_g^2 \varphi(\gamma', \gamma') + (n-2) d\varphi \otimes d\varphi(\gamma', \gamma') \\ &\quad -(\Delta_g \varphi + (n-2)|\nabla_g \varphi|_g^2) g(\gamma', \gamma').\end{aligned}$$

Observe que, neste caso $\varphi = k \ln u$, e denotemos $\frac{\partial \gamma}{\partial s} = \gamma'$. A partir da expresão dada acima para o $\tilde{Ric}_{11}$, temos que

$$\begin{aligned}\tilde{Ric}_{11} &= Ric_{11} - (n-2)(\gamma'(\gamma'(k \ln u)) - (\nabla_{\gamma'}\gamma') k \ln u) \\ &\quad +(n-2) g(e_1, \nabla_g (k \ln u)) g(\nabla_g (k \ln u), e_1) \\ &\quad -\Delta_g (k \ln u) - (n-2)|\nabla_g (k \ln u)|_g^2 \\ &= Ric_{11} - k(n-2)(\ln u)_{ss} + k^2 (n-2)|\nabla_g (\ln u)|^2 \\ &\quad -k\Delta_g (\ln u) - k^2 (n-2)|\nabla_g (\ln u)|^2 \\ &= Ric_{11} - k(n-2)(\ln u)_{ss} - k\Delta_g (\ln u) \\ &= Ric_{11} - k(n-2)(\ln u)_{ss} - k\left(-\frac{1}{u^2}|\nabla_g u|^2 + \frac{1}{u}\Delta_g u\right) \\ &= Ric_{11} - k(n-2)(\ln u)_{ss} - k\frac{\Delta_g u}{u} + k\frac{|\nabla_g u|_g^2}{u^2}.\end{aligned}$$

$\square$

Capítulo 3

Resultados de Rigidez para Hipersuperfícies Mínimas Estáveis

Neste capítulo, provamos dois resultados de rigidez para hipersuperfícies mínimas estáveis. O primeiro resultado é um caso particular do problema de Bernstein estável, em que a dimensão da hipersuperfície é igual 3, o segundo é um resultado de compacidade, para hipersuperfícies mínimas com índice finito, imersas em uma variedade Riemanniana completa de dimensão $n + 1$, $n \leq 5$. Para fazer isso, inicialmente precisamos de alguns lemas.

3.1 Hipersuperfícies mínimas, completas, orientáveis, isometricamente imersas e estáveis

Nesta seção provaremos alguns lemas, que serão utilizados na demonstração do Teorema 3.5. Ao longo da seção vamos considerar $M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície mínima, completa, orientável, isométricamente imersa e estável. Sendo $M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ estável pela Proposição 1.30, existe uma função $0 < u \in C^\infty(M)$ que satisfaz

$$-\Delta_g u = |A|_g^2 u \text{ em } M. \tag{3.1}$$

Seja $k > 0$ e considere a métrica conforme

$$\tilde{g} = u^{2k} g$$

onde g é a métrica induzida em M.

3.1.1 Tensor 2-Bakry-Emery-Ricci

Para que se possa fazer uma estimativa integral de volume, primeiramente temos que impor uma condição sobre o Ricci. O primeiro dos lemas, prova uma cota inferior para o tensor de curvatura k-Bakry-Emery-Ricci modificado por $\tilde{g}$. Em particular, este resultado implica a não negatividade do tensor de curvatura 2-Bakry-Emery-Ricci de $\tilde{g}$ para um k adequado.

Lema 3.1. Seja $f := k(n-2)\ln(u)$. Então o tensor de Ricci da métrica $\tilde{g} = u^{2k}g$ satisfaz

$$Ric_{\tilde{g}} + \nabla^2_{\tilde{g}} f - \frac{1-k(n-2)}{k(n-2)^2} df \otimes df \geq \left(k - \frac{n-1}{n}\right) |A|^2_g g, \tag{3.2}$$

no sentido de formas quadráticas. Em particular, se $n = 3$ e $k = \frac{2}{3}$, então o tensor 2-Bakry-Emery-Ricci

$$Ric^{2,f}_{\tilde{g}} := Ric_{\tilde{g}} + \nabla^2_{\tilde{g}} f - \frac{1}{2} df \otimes df,$$

satisfaz

$$Ric^{2,f}_{\tilde{g}} \geq 0.$$

Demonstração. Inicialmente, veja que a função $\varphi \in C^\infty(M)$ da mudança conforme é dada por $\varphi = k\ln(u)$, pois

$$\tilde{g} = e^{2\varphi} g = u^{2k} g \Rightarrow \varphi = k\ln(u).$$

Assim,

$$d\varphi := \nabla_g \varphi = \frac{k}{u}\nabla_g u; \quad \nabla^2_g \varphi = \frac{k}{u}\nabla^2_g u - \frac{k}{u^2} du \otimes du; \quad \Delta_g \varphi = \frac{k}{u}\Delta_g u - \frac{k}{u^2}|\nabla_g u|^2.$$

Substituindo as informações acima na fórmula do Ricci conforme (Proposição 2.3), obtemos

$$\begin{aligned} Ric_{\tilde{g}} &= Ric_g - (n-2)\left[\left(\frac{k}{u}\nabla^2_g u - \frac{k}{u^2} du \otimes du\right) - \frac{k^2}{u^2} du \otimes du\right] \\ &\quad - \left[\left(\frac{k}{u}\Delta_g u - \frac{k}{u^2}|\nabla_g u|^2\right) + (n-2)\frac{k^2}{u^2}|\nabla_g u|^2\right] g. \end{aligned}$$

Agora para a função $f = k(n-2)\ln(u)$, temos que

$$\begin{aligned} df &:= \nabla_g f = \frac{k(n-2)}{u}\nabla_g u; \qquad \nabla^2_g f = k(n-2)\left(\frac{\nabla^2_g u}{u} - \frac{du \otimes du}{u^2}\right); \\ \Delta_g f &= k(n-2)\left(\frac{\Delta u}{u} - \frac{|\nabla_g u|^2}{u^2}\right). \end{aligned}$$

Substituindo tais informações na fórmula do Hessiano conforme (2.2), obtemos

$$\nabla^2_{\tilde{g}} f = k(n-2)\left(\frac{\nabla^2_g u}{u} - \frac{du \otimes du}{u^2}\right) - 2\frac{k^2(n-2)}{u^2} du \otimes du + \frac{k^2(n-2)}{u^2}|\nabla_g u|^2 g.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
Ric_{\tilde{g}} + \nabla^2_{\tilde{g}} f &= Ric_g - (n-2)\left[\left(\frac{k}{u}\nabla^2_g u - \frac{k}{u^2} du \otimes du\right) - \frac{k^2}{u^2} du \otimes du\right] \\
&\quad - \left[\left(\frac{k}{u}\Delta_g u - \frac{k}{u^2}|\nabla_g u|^2\right) + (n-2)\frac{k^2}{u^2}|\nabla_g u|^2\right] g \\
&\quad + k(n-2)\left(\frac{\nabla^2_g u}{u} - \frac{du \otimes du}{u^2}\right) - 2\frac{k^2(n-2)}{u^2} du \otimes du + \frac{k^2(n-2)}{u^2}|\nabla_g u|^2 g \\
&= Ric_g - \frac{k^2(n-2)}{u^2} du \otimes du - \frac{k}{u}(\Delta_g u) g + \frac{k}{u^2}|\nabla_g u|^2 g \\
&= Ric_g - \frac{\left[\frac{k(n-2)}{u} du\right] \otimes \left[\frac{k(n-2)}{u} du\right]}{n-2} - \frac{k}{u}(\Delta_g u) g + \left|\frac{k(n-2)}{u}\nabla_g u\right|^2 \frac{1}{k(n-2)^2} g.
\end{aligned}$$

Usando o fato de que $-\Delta_g u = |A|^2_g u$ e a expressão obtida acima para $df := \nabla_g f$, temos que

$$Ric_{\tilde{g}} + \nabla^2_{\tilde{g}} f = Ric_g - \frac{df \otimes df}{n-2} + k|A|^2_g g + \frac{1}{k(n-2)^2}|\nabla_g f|^2 g. \tag{3.3}$$

Note que, dado $X \in \mathfrak{X}(M)$ e utilizando a desigualdade de Cauchy-Schawrz, tem-se

$$df \otimes df(X, X) = g(\nabla_g f, X) g(\nabla_g f, X) \leq |\nabla_g f|^2 |X|^2 = |\nabla_g f|^2 g(X, X),$$

ou seja

$$|\nabla_g f|^2 g \geq df \otimes df.$$

Daí,

$$Ric_{\tilde{g}} + \nabla^2_{\tilde{g}} f \geq Ric_g + \frac{1 - k(n-2)}{k(n-2)^2} df \otimes df + k|A|^2_g g \tag{3.4}$$

Agora, considere $\{e_1, ..., e_n\}$ autovetores de A associados aos autovalores $k_1, ..., k_n$, respectivamente, isto é, $Ae_j = k_j e_j,\ j = 1, 2, ..., n$. Sendo A auto-adjunta, note que

$$|A|^2_g = tr(A^2) = \sum_j g(A^2 e_j, e_j) = \sum_j g(Ae_j, Ae_j) = \sum_j k_j^2 = \sum_{j \neq i} k_j^2 + k_i^2.$$

Como $M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ é uma hipersuperfície mínima,

$$tr(A) = \sum_j g(Ae_j, e_j) = \sum_j k_j = \sum_{j \neq i} k_j + k_i = 0,$$

e usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos que

$$k_i^2 = \left(\sum_{j\neq i} k_j\right)^2 \leq \sum_{j\neq i} 1^2 \sum_{j\neq i} k_j^2 = (n-1)(|A|_g^2 - k_i^2),$$

com isso,

$$k_i^2 \leq \frac{n-1}{n}|A|_g^2.$$

Agora veja que, dado qualquer $X \in \mathfrak{X}(M)$, podemos escrever $X = \sum_i x_i e_i$, temos

$$\begin{aligned}
|AX|_g^2 &= g(AX, AX) = g\left(A\sum_i x_i e_i, A\sum_j x_j e_j\right) = \sum_{i,j} x_i x_j g(Ae_i, Ae_j)\\
&= \sum_{i,j} x_i x_j k_i k_j \delta_{i,j}\\
&= \sum_i x_i^2 k_i^2\\
&\leq \sum_i x_i^2 \frac{n-1}{n}|A|_g^2\\
&= \frac{n-1}{n}|A|_g^2 |X|^2.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$A^2 \leq \frac{n-1}{n}|A|_g^2 g \Rightarrow -\frac{n-1}{n}|A|_g^2 g \leq -A^2. \tag{3.5}$$

Como em nosso caso $M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, a equação de Gauss é dada por

$$R(X, Y, Z, W) = g(AX, Z)g(AY, W) - g(AX, W)g(AY, Z),$$

para todos $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ onde R é o tensor curvatura de M. Tomando $X = e_i = W$, temos

$$R(e_i, Y, Z, e_i) = g(Ae_i, Z)g(AY, e_i) - g(Ae_i, e_i)g(AY, Z),$$

somando em i,

$$\sum_i R(e_i, Y, Z, e_i) = \sum_i g(Ae_i, Z)g(AY, e_i) - \sum_i g(Ae_i, e_i)g(AY, Z).$$

equivalentemente,

$$-\sum_i R(Y, e_i, Z, e_i) = g(AY, AZ) - tr(A)g(AY, Z),$$

ou seja,

$$-Ric_g(Y, Z) = g(A^2Y, Z) - Hg(AY, Z),$$

como M é mínima ($H = 0$), obtemos

$$-Ric_g(Y, Z) = g(A^2 Y, Z),$$

e, portanto,

$$Ric_g = -A^2. \tag{3.6}$$

Substituindo (3.5) e (3.6) em (3.4), resulta em

$$\begin{aligned} Ric_{\tilde{g}} + \nabla^2_{\tilde{g}} f &\geq -A^2 + \frac{1 - k(n-2)}{k(n-2)^2} df \otimes df + k|A|^2_g g \\ &\geq -\frac{(n-1)}{n}|A|^2_g g + \frac{1 - k(n-2)}{k(n-2)^2} df \otimes df + k|A|^2_g g \\ &= \frac{1 - k(n-2)}{k(n-2)^2} df \otimes df + \left(k - \frac{(n-1)}{n}\right)|A|^2_g g. \end{aligned}$$

Portanto,

$$Ric_{\tilde{g}} + \nabla^2_{\tilde{g}} f - \frac{1 - k(n-2)}{k(n-2)^2} df \otimes df \geq \left(k - \frac{n-1}{n}\right)|A|^2_g g.$$

□

3.1.2 Completude da Métrica

O próximo passo para a demonstração do Teorema 3.5 é ver que $\tilde{g}$ é completa. Nesta subseção vamos provar que á métrica conforme $\tilde{g} = u^{2k} g$ é completa, desde que $n = 3$ e $k = \frac{2}{3}$.

Lema 3.2. A métrica $\tilde{g} = u^{\frac{4}{3}} g$ é completa.

Demonstração. Inicialmente fazemos parte dos cálculos para quaisquer n e k. Pela Proposição 2.7, dado um ponto fixo em M^n, existe uma geodésica minimizante $\gamma : [0, \infty) \to M^n$ (curva divergente) na métrica conforme $\tilde{g} = u^{2k} g$, que é parametrizada pelo comprimento de arco em relação a métrica g.

Sejam s e $\tilde{s}$ os comprimentos de arco de γ em relação as métricas g e $\tilde{g}$, respectivamente. Com base na Proposição 1.17, para provar a completude de $\tilde{g}$ é equivalente a prova que γ tem comprimento $l_{\tilde{g}}(\gamma)$ infinito, isto é,

$$\int_0^\infty u^k(\gamma(s)) ds = \infty. \tag{3.7}$$

De fato,

$$\begin{aligned} l_{\tilde{g}}(\gamma) &= \lim_{t\to\infty}\int_0^t \sqrt{\tilde{g}(\gamma'(s),\gamma'(s))}ds = \lim_{t\to\infty}\int_0^t \sqrt{u^{2k}(\gamma(s))g(\gamma'(s),\gamma'(s))}ds \\ &= \int_0^\infty u^k(\gamma(s))ds. \end{aligned}$$

Escolha $\{e_1 = \frac{\partial\gamma}{\partial s}, e_2, \ldots, e_n\}$ um referencial ortonormal ao longo de γ para a métrica g. Denote por Ric_{11} e $\tilde{Ric}_{11}$ as curvaturas de Ricci na direção de e_1 para as métricas g e $\tilde{g}$, respectivamente. Seja φe_i uma variação normal de γ, onde φ tem suporte compacto em $(0,\infty)$. Como γ é uma geodésica minimizante na métrica conforme $\tilde{g}$, sua segunda variação do comprimento de arco é não negativa, isto é,

$$\int_0^\infty \left(\left(\frac{d\varphi}{d\tilde{s}}\right)^2 - \varphi^2\tilde{R}(e_i,\gamma',\gamma',e_i)\right)d\tilde{s} \geq 0, \qquad \text{(ver equação (1.11))}$$

fazendo o traço na expressão acima, obtemos

$$\int_0^\infty \left((n-1)\left(\frac{d\varphi}{d\tilde{s}}\right)^2 - \tilde{Ric}_{11}\varphi^2\right)d\tilde{s} \geq 0,$$

ou, equivalentemente,

$$\int_0^\infty \{(n-1)(\varphi_s)^2 - \varphi^2\tilde{Ric}_{11}\}u^{-k}ds \geq 0, \tag{3.8}$$

para toda função suave φ com suporte compacto em $(0,+\infty)$. Como é provado na Proposição 2.8,

$$\tilde{Ric}_{11} = Ric_{11} - k(n-2)(\ln u)_{ss} - k\frac{\Delta_g u}{u} + k\frac{|\nabla_g u|_g^2}{u^2}.$$

Agora usando o fato de que $-\Delta_g u = |A|_g^2 u$ obtemos,

$$\tilde{Ric}_{11} = Ric_{11} - k(n-2)(\ln u)_{ss} + k|A|_g^2 + k\frac{|\nabla_g u|_g^2}{u^2}. \tag{3.9}$$

Da equação de Gauss tem-se

$$R_{ijij} = A_{ii}A_{jj} - A_{ij}^2.$$

Tomando $i = 1$ e somando em $j = 2, ..., n$ obtemos

$$Ric_{11} = \sum_{j=2}^{n} A_{11}A_{jj} - \sum_{j=2}^{n} A_{1j}^2.$$

Como M^n é mínima, temos que

$$Ric_{11} = -A_{11}^2 - \sum_{j=2}^{n} A_{1j}^2.$$

Substituindo a última relação na equação (3.9) resulta que

$$\tilde{Ric}_{11} = -A_{11}^2 - \sum_{j=2}^{n} A_{1j}^2 - k(n-2)(\ln u)_{ss} + k|A|_g^2 + k\frac{|\nabla_g u|_g^2}{u^2}.$$

Combinando a última equação com a desigualdade (3.8), obtemos

$$\begin{aligned}(n-1)\int_0^\infty (\varphi_s)^2 u^{-k} ds \ \geq \ & \int_0^\infty \varphi^2 u^{-k}\left(k|A|_g^2 - A_{11}^2 - \sum_{j=2}^{n} A_{1j}^2\right) ds \\ & + k\int_0^\infty \varphi^2 u^{-k}\frac{|\nabla_g u|_g^2}{u^2} ds - k(n-2)\int_0^\infty \varphi^2 u^{-k}(\ln u)_{ss} ds,\end{aligned} \tag{3.10}$$

para toda φ com suporte compacto em $(0, +\infty)$ e para todo $k > 0$. Como $trA \equiv 0$, pela Proposição 1.24, temos que

$$|A|_g^2 \geq \frac{n}{n-1}A_{11}^2 + 2\sum_{j=2}^{n} A_{1j}^2,$$

assim,

$$\begin{aligned}k|A|_g^2 - A_{11}^2 - \sum_{j=2}^{n} A_{1j}^2 \ & \geq \ \frac{kn}{n-1}A_{11}^2 + 2k\sum_{j=2}^{n} A_{1j}^2 - A_{11}^2 - \sum_{j=2}^{n} A_{1j}^2 \\ & = \ \left(\frac{kn}{n-1} - 1\right) A_{11}^2 + (2k-1)\sum_{j=2}^{n} A_{1j}^2.\end{aligned}$$

Em particular, se $k \geq (n-1)/n$, então

$$\frac{kn}{n-1} - 1 \geq 0 \quad \text{e} \quad 2k - 1 \geq \frac{2(n-1)}{n} - 1 = \frac{n-2}{n} \geq 0, \ \text{para } n \geq 2,$$

com isso,

$$k|A|_g^2 - A_{11}^2 - \sum_{j=2}^{n} A_{1j}^2 \geq 0 \Rightarrow \int_0^\infty \varphi^2 u^{-k} \left(k|A|_g^2 - A_{11}^2 - \sum_{j=2}^{n} A_{1j}^2 \right) ds \geq 0. \tag{3.11}$$

Substituindo (3.11) em (3.10), resulta

$$(n-1)\int_0^\infty (\varphi_s)^2 u^{-k} ds \geq k\int_0^\infty \varphi^2 u^{-k} \frac{|\nabla_g u|_g^2}{u^2} ds - k(n-2)\int_0^\infty \varphi^2 u^{-k} (\ln u)_{ss} ds, \tag{3.12}$$

para toda φ com suporte compacto em $(0, +\infty)$, para todo $n \geq 2$ e $k \geq (n-1)/n$. Note que

$$u_s = \frac{d}{ds} u(\gamma(s)) = g(\nabla_g u(\gamma(s)), \gamma'(s)) \leq |\nabla_g u(\gamma(s))|_g |\gamma'(s)|_g = |\nabla_g u(\gamma(s))|_g,$$

isto é,

$$|\nabla_g u|_g^2 \geq (u_s)^2. \tag{3.13}$$

Agora, integrando por partes a segunda integral do lado direito em (3.12), obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \varphi^2 u^{-k} (\ln u)_{ss} ds &= \lim_{t\to\infty} \left[\varphi^2 u^{-k} (\ln u)_s \Big|_0^t \right] - 2\int_0^\infty (\ln u)_s \varphi \varphi_s u^{-k} ds \\ &\quad + k\int_0^\infty (\ln u)_s \varphi^2 u^{-k-1} u_s ds \\ &= -2\int_0^\infty u_s \varphi \varphi_s u^{-k-1} ds + k\int_0^\infty \varphi^2 u^{-k-2} (u_s)^2 ds, \end{aligned}$$

onde $(\ln u)_s = u_s/u$ e φ tem suporte compacto em $(0, +\infty)$. Assim, usando o que foi feito acima e (3.13) em (3.12), temos que

$$\begin{aligned} (n-1)\int_0^\infty (\varphi_s)^2 u^{-k} ds &\geq k\int_0^\infty \varphi^2 u^{-k-2} (u_s)^2 ds \\ &\quad - k(n-2)\left[-2\int_0^\infty u_s \varphi \varphi_s u^{-k-1} ds + k\int_0^\infty \varphi^2 u^{-k-2} (u_s)^2 ds \right], \end{aligned}$$

com isso,

$$\begin{aligned} (n-1)\int_0^\infty (\varphi_s)^2 u^{-k} ds &\geq 2k(n-2)\int_0^\infty \varphi \varphi_s u^{-k-1} u_s ds \\ &\quad + k[1 - k(n-2)]\int_0^\infty \varphi^2 u^{-k-2} (u_s)^2 ds. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Escolha $\varphi = u^k\psi$, com ψ suave e com suporte compacto em $(0,+\infty)$. Temos

$$\begin{aligned}
\varphi^2 u^{-k} &= u^k\psi^2,\\
\varphi_s &= k\psi u^{k-1}u_s + u^k\psi_s,\\
(\varphi_s)^2 u^{-k} &= k^2\psi^2 u^{k-2}(u_s)^2 + u^k(\psi_s)^2 + 2k\psi\psi_s u^{k-1}u_s.
\end{aligned}$$

Substituindo em (3.14), resulta

$$\begin{aligned}
&(n-1)\int_0^\infty k^2\psi^2 u^{k-2}(u_s)^2 + u^k(\psi_s)^2 + 2k\psi\psi_s u^{k-1}u_s ds\\
\geq\ & 2k(n-2)\int_0^\infty u^k\psi(ku^{k-1}u_s\psi + u^k\psi_s)u^{-k-1}u_s ds + k[1-k(n-2)]\int_0^\infty u^{2k}\psi^2 u^{-k-2}(u_s)^2 ds\\
=\ & 2k(n-2)\int_0^\infty ku^{k-2}\psi^2(u_s)^2 + u^{k-1}\psi\psi_s u_s ds + k[1-k(n-2)]\int_0^\infty u^{k-2}\psi^2(u_s)^2 ds\\
=\ & 2k^2(n-2)\int_0^\infty u^{k-2}\psi^2(u_s)^2 ds + 2k(n-2)\int_0^\infty u^{k-1}\psi\psi_s u_s ds\\
& +k[1-k(n-2)]\int_0^\infty u^{k-2}\psi^2(u_s)^2 ds.
\end{aligned}$$

Isolando o termo $u^k\psi_s^2$ no lado esquerdo da desigualdade, obtemos

$$\begin{aligned}
(n-1)\int_0^\infty u^k(\psi_s)^2 ds &\geq 2k^2(n-2)\int_0^\infty u^{k-2}\psi^2(u_s)^2 ds + 2k(n-2)\int_0^\infty u^{k-1}\psi\psi_s u_s ds\\
&\quad +k[1-k(n-2)]\int_0^\infty u^{k-2}\psi^2(u_s)^2 ds\\
&\quad -k^2(n-1)\int_0^\infty \psi^2 u^{k-2}(u_s)^2 ds - 2k(n-1)\int_0^\infty \psi\psi_s u^{k-1}u_s ds\\
&= [2k^2(n-2) + k - k^2(n-2) - k^2(n-1)]\int_0^\infty \psi^2 u^{k-2}(u_s)^2 ds\\
&\quad +[2k(n-2) - 2k(n-1)]\int_0^\infty \psi\psi_s u^{k-1}u_s ds\\
&= (k-k^2)\int_0^\infty \psi^2 u^{k-2}(u_s)^2 ds - 2k\int_0^\infty \psi\psi_s u^{k-1}u_s ds,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$(n-1)\int_0^\infty u^k(\psi_s)^2 ds \geq k(1-k)\int_0^\infty \psi^2 u^{k-2}(u_s)^2 ds - 2k\int_0^\infty \psi\psi_s u^{k-1}u_s ds. \quad (3.15)$$

Seja

$$I := \int_0^\infty \psi\psi_s u^{k-1}u_s ds = \frac{1}{k}\int_0^\infty \psi\psi_s (u^k)_s ds.$$

Integrando por partes, temos

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{1}{k}\lim_{t\to\infty}\left[\psi\psi_s u^k\Big|_0^t\right] - \frac{1}{k}\int_0^\infty (\psi_s)^2u^k + \psi\psi_{ss}u^k ds \\
&= -\frac{1}{k}\int_0^\infty (\psi_s)^2u^k ds - \frac{1}{k}\int_0^\infty \psi\psi_{ss}u^k ds,
\end{aligned}
$$

o primeiro termo se anula pois ψ tem suporte compacto em $(0,+\infty)$. Para todo $\varepsilon > 0$, ao escolhermos $p = 2$,

$$a = \psi u_s u^{\frac{k-2}{2}} \quad \text{e} \quad b = \psi_s u^{\frac{k}{2}},$$

na desigualdade de Young (A.2), temos que

$$|ab| = |\psi\psi_s u^{k-1}u_s| \leq \frac{\psi^2(u_s)^2u^{k-2}\varepsilon}{2} + \frac{(\psi_s)^2u^k}{2\varepsilon}.$$

Veja que, para todo $t > 1$ e para todo $\varepsilon > 0$,

$$
\begin{aligned}
2kI &= 2ktI + 2k(1-t)I \\
&= -2t\int_0^\infty u^k(\psi_s)^2ds - 2t\int_0^\infty \psi\psi_{ss}u^k ds + 2k(1-t)\int_0^\infty \psi\psi_s u^{k-1}u_s ds \\
&\leq -2t\int_0^\infty u^k(\psi_s)^2ds - 2t\int_0^\infty \psi\psi_{ss}u^k ds \\
&\quad + k(t-1)\varepsilon\int_0^\infty \psi^2u^{k-2}(u_s)^2ds + \frac{k(t-1)}{\varepsilon}\int_0^\infty u^k(\psi_s)^2ds.
\end{aligned}
$$

Assuma que $k < 1$ e tome $\varepsilon := (1-k)/(t-1)$. Obtemos que

$$
\begin{aligned}
2kI &\leq -2t\int_0^\infty u^k(\psi_s)^2ds - 2t\int_0^\infty \psi\psi_{ss}u^k ds \\
&\quad + k(1-k)\int_0^\infty \psi^2u^{k-2}(u_s)^2ds + k\frac{(t-1)^2}{1-k}\int_0^\infty u^k(\psi_s)^2ds \\
&= -2t\int_0^\infty \psi\psi_{ss}u^k ds + k(1-k)\int_0^\infty \psi^2u^{k-2}(u_s)^2ds \\
&\quad + \left[\frac{k(t-1)^2}{1-k} - 2t\right]\int_0^\infty u^k(\psi_s)^2ds.
\end{aligned}
$$

Usando (3.15), temos que

$$
\begin{aligned}
2kI &\leq \left[\frac{k(t-1)^2}{1-k} - 2t\right]\int_0^\infty u^k(\psi_s)^2ds - 2t\int_0^\infty \psi\psi_{ss}u^k ds \\
&\quad + (n-1)\int_0^\infty u^k(\psi_s)^2ds + 2k\int_0^\infty \psi\psi_s u^{k-1}u_s ds \\
&= \left[\frac{k(t-1)^2}{1-k} - 2t + (n-1)\right]\int_0^\infty u^k(\psi_s)^2ds - 2t\int_0^\infty \psi\psi_{ss}u^k ds + 2kI,
\end{aligned}
$$

com isso, obtemos

$$\left[\frac{k(t-1)^2}{1-k} - 2t + (n-1)\right] \int_0^\infty u^k (\psi_s)^2 ds - 2t \int_0^\infty \psi\psi_{ss} u^k ds \geq 0, \tag{3.16}$$

para todo $t > 1$, $n \geq 2$, $(n-1)/n \leq k < 1$ e ψ com suporte compacto em $(0, +\infty)$. Seja

$$P(t) := \frac{k(t-1)^2}{1-k} - 2t + (n-1)$$

e escolha $k = (n-1)/n$, se $n = 3$ podemos ver que $P(t)$ é negativo para algum $t > 1$. De fato

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{\frac{(n-1)(t-1)^2}{n}}{1 - \frac{(n-1)}{n}} - 2t + (n-1) = (n-1)(t-1)^2 - 2t + (n-1) \\ &= (n-1)t^2 - 2nt + 2(n-1) \\ &= 2t^2 - 6t + 4 \\ &= -2(t-1)(2-t), \end{aligned}$$

note que, se $t = 3/2$,

$$P(3/2) = -2\left(\frac{3}{2} - 1\right)\left(2 - \frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Portanto, para $n = 3$, $k = (n-1)/n = 2/3$ e $t = 3/2$ em (3.16), temos que

$$-\int_0^\infty u^{\frac{2}{3}} (\psi_s)^2 ds - 6 \int_0^\infty u^{\frac{2}{3}} \psi\psi_{ss} ds \geq 0, \tag{3.17}$$

para toda ψ suave com suporte compacto em $(0, +\infty)$. Fazendo agora $\psi = s\eta$, η suave com suporte compacto em $(0, +\infty)$, temos

$$\begin{aligned} \psi_s &= \eta + s\eta_s \Rightarrow (\psi_s)^2 = \eta^2 + 2s\eta\eta_s + s^2(\eta_s)^2, \\ \psi_{ss} &= 2\eta_s + s\eta_{ss} \Rightarrow \psi\psi_{ss} = 2s\eta\eta_s + s^2\eta\eta_{ss}. \end{aligned}$$

Substituindo em (3.17), obtemos

$$-\int_0^\infty (\eta^2 + 2s\eta\eta_s + s^2(\eta_s)^2) u^{\frac{2}{3}} ds - 6 \int_0^\infty (2s\eta\eta_s + s^2\eta\eta_{ss}) u^{\frac{2}{3}} ds \geq 0,$$

isolando o termo $u^{\frac{2}{3}}\eta^2$, resulta

$$\int_0^\infty u^{\frac{2}{3}} \eta^2 ds \leq \int_0^\infty u^{\frac{2}{3}} (-14s\eta\eta_s - 6s^2\eta\eta_{ss} - s^2(\eta_s)^2) ds.$$

Escolha η tal que $\eta \equiv 1$ em $[0, R]$, $\eta \equiv 0$ em $[2R, +\infty)$ e com $|\eta_s| \leq C/R$, $|\eta_{ss}| \leq C/R^2$, para $R \leq s \leq 2R$ (C é uma constante positiva). Então

$$\begin{aligned}
\int_0^R u^{\frac{2}{3}} ds = \int_0^R u^{\frac{2}{3}} \eta^2 ds &\leq \int_0^\infty u^{\frac{2}{3}} \eta^2 ds \\
&\leq \int_0^\infty (-14s\eta\eta_s - 6s^2\eta\eta_{ss} - s^2(\eta_s)^2) u^{\frac{2}{3}} ds \\
&= \int_0^R (-14s\eta\eta_s - 6s^2\eta\eta_{ss} - s^2(\eta_s)^2) u^{\frac{2}{3}} ds \\
&\quad + \int_R^{2R} (-14s\eta\eta_s - 6s^2\eta\eta_{ss} - s^2(\eta_s)^2) u^{\frac{2}{3}} ds \\
&\quad + \int_{2R}^\infty (-14s\eta\eta_s - 6s^2\eta\eta_{ss} - s^2(\eta_s)^2) u^{\frac{2}{3}} ds \\
&\leq \left(28R\frac{C}{R} + 24R^2\frac{C}{R^2} + 4R^2\frac{C^2}{R^2} \right) \int_R^{2R} u^{\frac{2}{3}} ds \\
&= C_1 \int_R^{2R} u^{\frac{2}{3}} ds \\
&\leq C_1 \int_R^\infty u^{\frac{2}{3}} ds,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\int_0^R u^{\frac{2}{3}} ds \leq \int_0^\infty u^{\frac{2}{3}} \eta^2 ds \leq C_1 \int_R^\infty u^{\frac{2}{3}} ds, \tag{3.18}$$

para algum $C_1 > 0$ independente de R. Dessa forma, concluí-se que

$$\int_0^\infty u^{\frac{2}{3}} ds = \infty,$$

pois, caso contrário, se a integral convergisse, da última desigualdade em (3.18), teríamos

$$\int_0^\infty u^{\frac{2}{3}} ds = 0,$$

o que não pode acontecer, pois o integrando é positivo, portanto a integral diverge e, segue que $\tilde{g} = u^{\frac{4}{3}} g$ é completa.

□

3.1.3 Estimativas de volume

Nas subseções anteriores, foi provado que a métrica conforme $\tilde{g} = u^{\frac{4}{3}} g$ é completa e tem curvatura 2-Bakry-Emery-Ricci não-negativa, com isso, estamos em condições de fazer estimativas de volume. Nesta subseção apresentaremos duas desigualdades integrais, que serão o ponto fundamental da demonstração do Teorema 3.5.

Usando resultados de comparação bem conhecidos (ver [29]), obtemos imediatamente a seguinte estimativa de volume ponderada de Bishop-Gromov para uma bola geodésica $B_R^{\tilde{g}}(x_0)$ centrada em $x_0 \in M$, de raio R, em relação a métrica conforme $\tilde{g}$.

Corolário 3.3 (Qian [29])**.** Seja $x_0 \in M^3$ e $Ric_{\tilde{g}}^{2,f} \geq 0$. Então, para todo $R > 0$, existe $C > 0$ tal que o f-volume

$$Vol_f B_R^{\tilde{g}}(x_0) := \int_{B_R^{\tilde{g}}(x_0)} e^{-f} dV_{\tilde{g}} \leq CR^5,$$

em que $f = \frac{2}{3} \ln u$. Equivalentemente, em termos de u e da forma de volume de g,

$$\int_{B_R^{\tilde{g}}(x_0)} u^{\frac{4}{3}} dV_g \leq CR^5.$$

O último ingrediente que precisamos na prova do Teorema 3.5 é a seguinte desigualdade integral. Denotaremos por $C_0^\infty(M)$ o conjunto das funções suaves em M com suporte compacto e, em alguns momentos omitiremos a forma de volume dV_g nas integrais, por simplicidade de notação nos cálculos.

Lema 3.4. Para todo $0 < \delta < \frac{1}{100}$, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\int_M |A|^{5+\delta} u^{-2-\frac{2\delta}{3}} \psi^{5+\delta} dV_g \leq C \int_M u^{-2-\frac{2\delta}{3}} |\nabla \psi|^{5+\delta} dV_g \qquad \forall \psi \in C_0^\infty(M). \tag{3.19}$$

Demonstração. Novamente, fazemos parte dos cálculos para todo n, e quando for necessário, serão feitas as escolhas específicas. Inicialmente, temos que para todo $p \in [4, 4 + \sqrt{8/n}]$ e para alguma constante $C = C(n,p) > 0$, vale a desigualdade

$$\int_M |A|^p \varphi^2 \leq C \int_M |A|^{p-2} |\nabla \varphi|^2 \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(M). \tag{3.20}$$

De fato, pela desigualdade de estabilidade 1.20 tem-se que

$$\int_M (|A|^2 + Ric_h(N,N)) f^2 dV_g \leq \int_M |\nabla f|^2 dV_g \qquad \forall f \in C_0^\infty(M).$$

Observando que $Ric_h = 0$, uma vez que o ambiente é $\mathbb{R}^{n+1}$ e pondo $f = |A|^{1+q}\varphi$, $q \geq 0$

e com $\varphi \in C_0^\infty(M)$ na desigualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_M |A|^{4+2q}\varphi^2 &\leq \int_M |\nabla(|A|^{1+q}\varphi)|^2 \\
&= \int_M |(1+q)|A|^q\nabla|A|\varphi + |A|^{1+q}\nabla\varphi|^2 \\
&\leq \int_M [(1+q)|A|^q\varphi|\nabla|A|| + |A|^{1+q}|\nabla\varphi|]^2 \\
&= \int_M (1+q)^2|A|^{2q}\varphi^2|\nabla|A||^2 + |A|^{2+2q}|\nabla\varphi|^2 \\
&\quad + \int_M 2(1+q)|A|^q\varphi|\nabla|A|||A|^{1+q}|\nabla\varphi|.
\end{aligned}$$

Fazendo $a = |A|^q\varphi|\nabla|A||$, $b = (1+q)|A|^{1+q}|\nabla\varphi|$ na desigualdade de Young A.2, temos que, para todo $\varepsilon > 0$,

$$2(1+q)|A|^q\varphi|\nabla|A|||A|^{1+q}|\nabla\varphi| \leq |A|^{2q}\varphi^2|\nabla|A||^2\varepsilon + \frac{(1+q)^2}{\varepsilon}|A|^{2+2q}|\nabla\varphi|^2,$$

com isso, obtemos

$$\int_M |A|^{4+2q}\varphi^2 \leq [(1+q)^2+\varepsilon]\int_M |A|^{2q}|\nabla|A||^2\varphi^2 + \left[\frac{(1+q)^2}{\varepsilon}+1\right]\int_M |A|^{2+2q}|\nabla\varphi|^2. \tag{3.21}$$

Por outro lado, multiplicando a desigualdade de Simons (1.17)

$$|A|\Delta|A| + |A|^4 \geq \frac{2}{n}|\nabla|A||^2$$

por $|A|^{2q}\varphi^2$, temos

$$|A|^{2q+1}\varphi^2\Delta|A| + |A|^{4+2q}\varphi^2 \geq \frac{2}{n}|A|^{2q}\varphi^2|\nabla|A||^2,$$

integrando por partes,

$$\begin{aligned}
\int_M |A|^{2q+1}\varphi^2\Delta|A| &= -\int_M g(\nabla(|A|^{2q+1}\varphi^2), \nabla|A|) \\
&= -\int_M g((2q+1)|A|^{2q}\nabla|A|\varphi^2 + 2\varphi\nabla\varphi|A|^{2q+1}, \nabla|A|) \\
&= -\int_M (2q+1)|A|^{2q}\varphi^2|\nabla|A||^2 + 2|A|^{2q+1}\varphi g(\nabla\varphi, \nabla|A|),
\end{aligned}$$

obtemos

$$-\int_M (2q+1)|A|^{2q}\varphi^2|\nabla|A||^2 + 2|A|^{2q+1}\varphi g(\nabla\varphi,\nabla|A|) + \int_M |A|^{4+2q}\varphi^2 \geq \int_M \frac{2}{n}|A|^{2q}\varphi^2|\nabla|A||^2,$$

equivalentemente,

$$\begin{aligned}\int_M (2q+1)|A|^{2q}\varphi^2|\nabla|A||^2 &\leq \int_M 2|A|^{2q+1}\varphi(-g(\nabla\varphi, \nabla|A|)) \\ &+ \int_M |A|^{4+2q}\varphi^2 - \int_M \frac{2}{n}|A|^{2q}\varphi^2|\nabla|A||^2 \\ &\leq \int_M 2|A|^{2q+1}\varphi|\nabla\varphi||\nabla|A|| \\ &+ \int_M |A|^{4+2q}\varphi^2 - \int_M \frac{2}{n}|A|^{2q}\varphi^2|\nabla|A||^2.\end{aligned}$$

Utilizando novamente a desigualdade de Young A.2, temos que

$$\begin{aligned}2|A|^{2q+1}\varphi|\nabla\varphi||\nabla|A|| &= \sqrt{2}|A|^q\varphi|\nabla|A||\sqrt{2}|A|^{1+q}|\nabla\varphi| \\ &\leq |A|^{2q}\varphi^2|\nabla|A||^2\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}|A|^{2q+2}|\nabla\varphi|^2,\end{aligned}$$

com isso,

$$\begin{aligned}\int_M (2q+1)|A|^{2q}\varphi^2|\nabla|A||^2 &\leq \int_M |A|^{2q}\varphi^2|\nabla|A||^2\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\int_M |A|^{2q+2}|\nabla\varphi|^2 \\ &+ \int_M |A|^{4+2q}\varphi^2 - \int_M \frac{2}{n}|A|^{2q}\varphi^2|\nabla|A||^2,\end{aligned}$$

isto é,

$$\left(\frac{2}{n} + 2q + 1 - \varepsilon\right)\int_M |A|^{2q}|\nabla|A||^2\varphi^2 \leq \int_M |A|^{4+2q}\varphi^2 + \frac{1}{\varepsilon}\int_M |A|^{2+2q}|\nabla\varphi|^2. \tag{3.22}$$

Substituindo (3.22) em (3.21), resulta

$$\begin{aligned}\int_M |A|^{4+2q}\varphi^2 &\leq [(1+q)^2+\varepsilon]\left(\frac{2}{n} + 2q + 1 - \varepsilon\right)^{-1}\int_M |A|^{4+2q}\varphi^2 \\ &+\frac{1}{\varepsilon}[(1+q)^2+\varepsilon]\left(\frac{2}{n} + 2q + 1 - \varepsilon\right)^{-1}\int_M |A|^{2+2q}|\nabla\varphi|^2 \\ &+\left[\frac{(1+q)^2}{\varepsilon} + 1\right]\int_M |A|^{2+2q}|\nabla\varphi|^2.\end{aligned}$$

Sendo $q \geq 0$, para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, obtemos

$$\left\{1 - [(1+q)^2+\varepsilon]\left(\frac{2}{n} + 2q + 1 - \varepsilon\right)^{-1}\right\}\int_M |A|^{4+2q}\varphi^2 \leq C\int_M |A|^{2+2q}|\nabla\varphi|^2,$$

Seja $q := (p-4)/2$. Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, temos

$$1 - [(1+q)^2 + \varepsilon]\left(\frac{2}{n} + 2q + 1 - \varepsilon\right)^{-1} > 0,$$

se $p \in [4, 4+\sqrt{8/n}]$, e finalmente obtemos

$$\int_M |A|^p \varphi^2 \leq C \int_M |A|^{p-2} |\nabla \varphi|^2,$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty(M)$, onde $C = C(n,p) > 0$. Tomando $\varphi = u^\alpha \psi$, com ψ suave e com suporte compacto, u solução positiva de $-\Delta u = |A|_g^2 u$ e $\alpha < 0$. Por Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} |\nabla(u^\alpha \psi)|^2 &= |\psi \nabla u^\alpha + u^\alpha \nabla \psi|^2 \\ &= \psi^2 |\nabla u^\alpha|^2 + u^{2\alpha} |\nabla \psi|^2 + 2\psi u^\alpha g(\nabla \psi, \nabla u^\alpha) \\ &\leq \psi^2 |\nabla u^\alpha|^2 + u^{2\alpha} |\nabla \psi|^2 + 2\psi u^\alpha |\nabla \psi||\nabla u^\alpha|, \end{aligned}$$

fazendo $a = \sqrt{2}\psi |\nabla u^\alpha|$, $b = \sqrt{2} u^\alpha |\nabla \psi|$ e os conjugados iguais a 2, na desigualdade de Young A.2, obtemos

$$2\psi u^\alpha |\nabla \psi||\nabla u^\alpha| \leq \psi^2 |\nabla u^\alpha|^2 + u^{2\alpha} |\nabla \psi|^2,$$

e, portanto,

$$|\nabla(u^\alpha \psi)|^2 \leq 2\psi^2 |\nabla u^\alpha|^2 + 2u^{2\alpha} |\nabla \psi|^2.$$

Substituindo tais informações em (3.20), resulta

$$\int_M |A|^p u^{2\alpha} \psi^2 \leq 2C \left[\int_M |A|^{p-2} \psi^2 |\nabla u^\alpha|^2 + \int_M |A|^{p-2} u^{2\alpha} |\nabla \psi|^2\right], \tag{3.23}$$

para toda $\psi \in C_0^\infty(M)$. Agora, note que ao integrarmos por partes,

$$\begin{aligned} -\int_M |A|^{p-2} \psi^2 u^\alpha \Delta u^\alpha &= \int_M g(\nabla(|A|^{p-2} \psi^2 u^\alpha), \nabla u^\alpha) \\ &= \int_M g(\psi^2 u^\alpha \nabla |A|^{p-2} + 2|A|^{p-2} \psi u^\alpha \nabla \psi + |A|^{p-2} \psi^2 \nabla u^\alpha, \nabla u^\alpha) \\ &= \int_M u^\alpha \psi^2 g(\nabla |A|^{p-2}, \nabla u^\alpha) + 2\int_M |A|^{p-2} \psi u^\alpha g(\nabla \psi, \nabla u^\alpha) \\ &\quad + \int_M |A|^{p-2} \psi^2 |\nabla u^\alpha|^2, \end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned}\int_M |A|^{p-2}\psi^2|\nabla u^\alpha|^2 &= -\int_M |A|^{p-2}\psi^2 u^\alpha \Delta u^\alpha - \int_M u^\alpha\psi^2 g(\nabla|A|^{p-2}, \nabla u^\alpha)\\ &\quad -2\int_M |A|^{p-2}\psi u^\alpha g(\nabla\psi, \nabla u^\alpha).\end{aligned}$$

Usando o fato de que

$$|\nabla u^\alpha|^2 = |\alpha u^{\alpha-1}\nabla u|^2 = \alpha^2 u^{2\alpha-2}|\nabla u|^2$$

e

$$\begin{aligned}\Delta u^\alpha = div(\nabla u^\alpha) &= div(\alpha u^{\alpha-1}\nabla u)\\ &= g(\nabla(\alpha u^{\alpha-1}), \nabla u) + \alpha u^{\alpha-1} div(\nabla u)\\ &= g(\alpha(\alpha-1)u^{\alpha-2}\nabla u, \nabla u) + \alpha u^{\alpha-1}\Delta u\\ &= \alpha(\alpha-1)u^{\alpha-2}|\nabla u|^2 + \alpha u^{\alpha-1}\Delta u.\end{aligned}$$

Temos que

$$\begin{aligned}\int_M |A|^{p-2}\psi^2|\nabla u^\alpha|^2 &= -\int_M |A|^{p-2}\psi^2 u^\alpha[\alpha(\alpha-1)u^{\alpha-2}|\nabla u|^2 + \alpha u^{\alpha-1}\Delta u]\\ &\quad -\int_M u^\alpha\psi^2 g(\nabla|A|^{p-2}, \nabla u^\alpha) - 2\int_M |A|^{p-2}\psi u^\alpha g(\nabla\psi, \nabla u^\alpha)\\ &\leq -\frac{\alpha-1}{\alpha}\int_M |A|^{p-2}\psi^2|\nabla u^\alpha|^2 - \alpha\int_M |A|^{p-2}u^{2\alpha-1}\psi^2\Delta u\\ &\quad -\int_M u^\alpha\psi^2 g(\nabla|A|^{p-2}, \nabla u^\alpha) - 2\int_M |A|^{p-2}\psi u^\alpha|\nabla\psi||\nabla u^\alpha|,\end{aligned}$$

onde usamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz na última integral. Usando agora a desigualdade de Young na mesma integral para $a = \sqrt{2\varepsilon}\psi|\nabla u^\alpha|$, $b = \sqrt{2/\varepsilon}u^\alpha|\nabla\psi|$ e tomando os conjugados iguais a 2, para todo $\varepsilon > 0$, a desigualdade integral acima resulta em

$$\begin{aligned}\int_M |A|^{p-2}\psi^2|\nabla u^\alpha|^2 &\leq -\alpha\int_M |A|^{p-2}u^{2\alpha-1}\psi^2\Delta u - \frac{\alpha-1}{\alpha}\int_M |A|^{p-2}\psi^2|\nabla u^\alpha|^2\\ &\quad -\int_M u^\alpha\psi^2 g(\nabla|A|^{p-2}, \nabla u^\alpha)\\ &\quad +\int_M |A|^{p-2}\left(\varepsilon\psi^2|\nabla u^\alpha|^2 + \frac{1}{\varepsilon}u^{2\alpha}|\nabla\psi|^2\right).\end{aligned}$$

Usando o fato de que $-\Delta u = |A|^2 u$ em M, podemos reescrever

$$\begin{aligned}\int_M |A|^{p-2}\psi^2|\nabla u^\alpha|^2 \;\; &\leq \;\; \alpha\int_M |A|^p u^{2\alpha}\psi^2 - \frac{\alpha-1}{\alpha}\int_M |A|^{p-2}\psi^2|\nabla u^\alpha|^2 \\ &\quad -\int_M u^\alpha\psi^2 g(\nabla|A|^{p-2},\nabla u^\alpha) \\ &\quad +\varepsilon\int_M |A|^{p-2}\psi^2|\nabla u^\alpha|^2 + \frac{1}{\varepsilon}\int_M |A|^{p-2}u^{2\alpha}|\nabla\psi|^2,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\left(1-\varepsilon+\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)\int_M |A|^{p-2}\psi^2|\nabla u^\alpha|^2 \;\; &\leq \;\; \alpha\int_M |A|^p u^{2\alpha}\psi^2 - \int_M u^\alpha\psi^2 g(\nabla u^\alpha,\nabla|A|^{p-2}) \\ &\quad +\frac{1}{\varepsilon}\int_M |A|^{p-2}u^{2\alpha}|\nabla\psi|^2. \qquad (3.24)\end{aligned}$$

Por Cauchy-Schwarz,

$$-\int_M u^\alpha\psi^2 g(\nabla u^\alpha,\nabla|A|^{p-2}) \leq \int_M u^\alpha\psi^2|\nabla u^\alpha||\nabla|A|^{p-2}|,$$

e como

$$\nabla|A|^{p-2} = (p-2)|A|^{p-3}\nabla|A| = (p-2)|A|^{\frac{p-2}{2}}|A|^{\frac{p-4}{2}}\nabla|A|,$$

na desigualdade de Young, tome os conjugados iguais a 2 e

$$a = \sqrt{t_1(p-2)}u^\alpha\psi|A|^{\frac{p-4}{2}}|\nabla|A||, \qquad b = \sqrt{\frac{p-2}{t_1}}\psi|\nabla u^\alpha||A|^{\frac{p-2}{2}}$$

para todo $t_1 > 0$, temos que

$$\left|u^\alpha\psi^2|\nabla u^\alpha||\nabla|A|^{p-2}|\right| \leq \frac{(p-2)u^{2\alpha}\psi^2|A|^{p-4}|\nabla|A||^2 t_1}{2} + \frac{(p-2)\psi^2|\nabla u^\alpha|^2|A|^{p-2}}{2t_1},$$

com isso,

$$-\int_M u^\alpha\psi^2 g(\nabla u^\alpha,\nabla|A|^{p-2}) \leq \frac{(p-2)t_1}{2}\int_M u^{2\alpha}\psi^2|A|^{p-4}|\nabla|A||^2 + \frac{p-2}{2t_1}\int_M \psi^2|\nabla u^\alpha|^2|A|^{p-2}.$$

Substituindo em (3.24), resulta em

$$\begin{aligned}\left(1-\varepsilon+\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)\int_M |A|^{p-2}\psi^2|\nabla u^\alpha|^2 \;\; &\leq \;\; \alpha\int_M |A|^p u^{2\alpha}\psi^2 + \frac{(p-2)t_1}{2}\int_M u^{2\alpha}\psi^2|A|^{p-4}|\nabla|A||^2 \\ &\quad +\frac{p-2}{2t_1}\int_M \psi^2|\nabla u^\alpha|^2|A|^{p-2} + \frac{1}{\varepsilon}\int_M |A|^{p-2}u^{2\alpha}|\nabla\psi|^2,\end{aligned}$$

isto é,

$$\left(1-\varepsilon+\frac{\alpha-1}{\alpha}-\frac{p-2}{2t_1}\right)\int_M |A|^{p-2}\psi^2|\nabla u^\alpha|^2 \leq \alpha\int_M |A|^p u^{2\alpha}\psi^2 + \frac{1}{\varepsilon}\int_M |A|^{p-2}u^{2\alpha}|\nabla\psi|^2 + \frac{(p-2)t_1}{2}\int_M u^{2\alpha}\psi^2|A|^{p-4}|\nabla|A||^2, \tag{3.25}$$

para todos $t_1, \varepsilon > 0$ e $\psi \in C_0^\infty(M)$. Agora, multiplicando por $|A|^{p-4}f^2$ a desigualdade de Simons 1.17, onde $f \in C_0^\infty(M)$, temos que

$$|A|^{p-3}f^2\Delta|A| + |A|^p f^2 \geq \frac{2}{n}|\nabla|A||^2|A|^{p-4}f^2,$$

equivalentemente,

$$|A|^p f^2 \geq \frac{2}{n}|\nabla|A||^2|A|^{p-4}f^2 - |A|^{p-3}f^2\Delta|A|.$$

Integrando em ambos os lados da desigualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_M |A|^p f^2 &\geq \int_M \frac{2}{n}|\nabla|A||^2|A|^{p-4}f^2 - \int_M |A|^{p-3}f^2\Delta|A| \\
&= \int_M \frac{2}{n}|\nabla|A||^2|A|^{p-4}f^2 + \int_M g(\nabla(|A|^{p-3}f^2), \nabla|A|) \\
&= \int_M \frac{2}{n}|\nabla|A||^2|A|^{p-4}f^2 + \int_M g((p-3)|A|^{p-4}f^2\nabla|A| + 2|A|^{p-3}f\nabla f, \nabla|A|) \\
&= \int_M \frac{2}{n}|\nabla|A||^2|A|^{p-4}f^2 + (p-3)\int_M |A|^{p-4}f^2|\nabla|A||^2 + 2\int_M |A|^{p-3}fg(\nabla f, \nabla|A|) \\
&= \left(\frac{2}{n}+p-3\right)\int_M |\nabla|A||^2|A|^{p-4}f^2 + 2\int_M |A|^{p-3}fg(\nabla f, \nabla|A|).
\end{aligned}$$

Para a última integral, por Cauchy-Schwarz,

$$2\int_M |A|^{p-3}fg(\nabla f, \nabla|A|) \leq 2\int_M |A|^{p-3}f|\nabla f||\nabla|A||,$$

pela desigualdade de Young, temos, para todo $t_2 > 0$,

$$\begin{aligned}
\left|2|A|^{p-3}f|\nabla f||\nabla|A||\right| &= \left|\left(\sqrt{2t_2}f|A|^{\frac{p-4}{2}}|\nabla|A||\right)\left(\sqrt{\frac{2}{t_2}}|A|^{\frac{p-2}{2}}|\nabla f|\right)\right| \\
&\leq f^2|A|^{p-4}|\nabla|A||^2 t_2 + \frac{|A|^{p-2}|\nabla f|^2}{t_2},
\end{aligned}$$

consequentemente, podemos afirmar que

$$-2\int_M |A|^{p-3} f g(\nabla f, \nabla |A|) \leq \int_M f^2 |A|^{p-4} |\nabla |A||^2 t_2 + \int_M \frac{|A|^{p-2}|\nabla f|^2}{t_2},$$

ou seja,

$$2\int_M |A|^{p-3} f g(\nabla f, \nabla |A|) \geq -\int_M f^2 |A|^{p-4} |\nabla |A||^2 t_2 - \int_M \frac{|A|^{p-2}|\nabla f|^2}{t_2},$$

com isso, concluí-se que

$$\begin{aligned} \int_M |A|^p f^2 &\geq \left(\frac{2}{n} + p - 3\right) \int_M |\nabla |A||^2 |A|^{p-4} f^2 - \int_M f^2 |A|^{p-4} |\nabla |A||^2 t_2 - \int_M \frac{|A|^{p-2}|\nabla f|^2}{t_2} \\ &= \left(\frac{2}{n} + p - 3 - t_2\right) \int_M |A|^{p-4} |\nabla |A||^2 f^2 - \frac{1}{t_2}\int_M |A|^{p-2} |\nabla f|^2, \end{aligned}$$

para todo $t_2 > 0$. Escolhendo $f = u^\alpha \psi$ com $\psi \in C_0^\infty(M)$, temos que

$$\int_M |A|^p u^{2\alpha} \psi^2 \geq \left(\frac{2}{n} + p - 3 - t_2\right) \int_M |A|^{p-4} |\nabla |A||^2 u^{2\alpha} \psi^2 - \frac{1}{t_2}\int_M |A|^{p-2} |\nabla (u^\alpha \psi)|^2.$$

Note que pela desigualdade de Young, para todos $t_2, \varepsilon > 0$

$$2u^\alpha \psi |\nabla u^\alpha||\nabla \psi| = \sqrt{2t_2\varepsilon}\,\psi |\nabla u^\alpha| \sqrt{\frac{2}{t_2\varepsilon} u^\alpha |\nabla \psi|^2} \leq t_2 \varepsilon \psi^2 |\nabla u^\alpha|^2 + \frac{1}{t_2\varepsilon} u^{2\alpha} |\nabla \psi|^2,$$

donde

$$\begin{aligned} |\nabla (u^\alpha \psi)|^2 &\leq \psi^2 |\nabla u^\alpha|^2 + u^{2\alpha} |\nabla \psi|^2 + 2u^\alpha \psi |\nabla u^\alpha||\nabla \psi| \\ &\leq \psi^2 |\nabla u^\alpha|^2 + u^{2\alpha} |\nabla \psi|^2 + t_2\varepsilon \psi^2 |\nabla u^\alpha|^2 + \frac{1}{t_2\varepsilon} u^{2\alpha} |\nabla \psi|^2 \\ &= (1 + t_2\varepsilon)\psi^2 |\nabla u^\alpha|^2 + \left(1 + \frac{1}{t_2\varepsilon}\right) u^{2\alpha} |\nabla \psi|^2. \end{aligned}$$

Substituindo tais informações na última desigualdade integral, resulta

$$\begin{aligned} \int_M |A|^p u^{2\alpha} \psi^2 &\geq \left(\frac{2}{n} + p - 3 - t_2\right) \int_M |A|^{p-4} |\nabla |A||^2 u^{2\alpha} \psi^2 \\ &\quad - \frac{1}{t_2}\int_M |A|^{p-2} \left((1 + t_2\varepsilon)\psi^2 |\nabla u^\alpha|^2 + \left(1 + \frac{1}{t_2\varepsilon}\right) u^{2\alpha} |\nabla \psi|^2\right), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\int_M |A|^p u^{2\alpha}\psi^2 \quad &\geq \quad \left(\frac{2}{n}+p-3-t_2\right)\int_M |A|^{p-4}|\nabla|A||^2 u^{2\alpha}\psi^2 \\ &-\left(\frac{1}{t_2}+\varepsilon\right)\int_M |A|^{p-2}\psi^2|\nabla u^\alpha|^2 - \frac{1}{t_2}\left(1+\frac{1}{t_2\varepsilon}\right)\int_M |A|^{p-2}u^{2\alpha}|\nabla\psi|^2\end{aligned}$$

para todos $t_2>0$, $\varepsilon>0$ e $\psi\in C_0^\infty(M)$. Sendo $\alpha<0$, temos

$$\begin{aligned}\alpha\int_M |A|^p u^{2\alpha}\psi^2 \quad &\leq \quad \alpha\left(\frac{2}{n}+p-3-t_2\right)\int_M |A|^{p-4}|\nabla|A||^2 u^{2\alpha}\psi^2 \\ &-\alpha\left(\frac{1}{t_2}+\varepsilon\right)\int_M |A|^{p-2}\psi^2|\nabla u^\alpha|^2 - \frac{\alpha}{t_2}\left(1+\frac{1}{t_2\varepsilon}\right)\int_M |A|^{p-2}u^{2\alpha}|\nabla\psi|^2.\end{aligned} \tag{3.26}$$

Substituindo (3.26) em (3.25), resulta em

$$\begin{aligned}\left(1-\varepsilon+\frac{\alpha-1}{\alpha}-\frac{p-2}{2t_1}\right)\int_M |A|^{p-2}\psi^2|\nabla u^\alpha|^2 \quad &\leq \quad \alpha\left(\frac{2}{n}+p-3-t_2\right)\int_M |A|^{p-4}|\nabla|A||^2u^{2\alpha}\psi^2 \\ &-\alpha\left(\frac{1}{t_2}+\varepsilon\right)\int_M |A|^{p-2}\psi^2|\nabla u^\alpha|^2 \\ &-\frac{\alpha}{t_2}\left(1+\frac{1}{t_2\varepsilon}\right)\int_M |A|^{p-2}u^{2\alpha}|\nabla\psi|^2 \\ &+\frac{1}{\varepsilon}\int_M |A|^{p-2}u^{2\alpha}|\nabla\psi|^2 \\ &+\frac{(p-2)t_1}{2}\int_M u^{2\alpha}\psi^2|A|^{p-4}|\nabla|A||^2,\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}\left[1+(\alpha-1)\varepsilon+\frac{\alpha-1}{\alpha}-\frac{(p-2)}{2t_1}+\frac{\alpha}{t_2}\right]\int_M |A|^{p-2}\psi^2|\nabla u^\alpha|^2 \leq \\ \left[\frac{1}{\varepsilon}-\frac{\alpha}{t_2}\left(1+\frac{1}{t_2\varepsilon}\right)\right]\int_M |A|^{p-2}u^{2\alpha}|\nabla\psi|^2 \\ +\left[\frac{(p-2)}{2}t_1+\alpha\left(\frac{2}{n}+p-3-t_2\right)\right]\int_M |A|^{p-4}|\nabla|A||^2u^{2\alpha}\psi^2,\end{aligned}$$

para todos $\varepsilon, t_1, t_2>0$, $\alpha<0$ e $\psi\in C_0^\infty(M)$. Dado $\delta>0$, tomemos

$$\alpha=-1-\frac{\delta}{3}\leq -1$$

e ficamos com

$$\left[1-\left(2+\frac{\delta}{3}\right)\varepsilon+\frac{2+\frac{\delta}{3}}{1+\frac{\delta}{3}}-\frac{p-2}{2t_1}-\frac{1+\frac{\delta}{3}}{t_2}\right]\int_M |A|^{p-2}\psi^2|\nabla u^{-1-\frac{\delta}{3}}|^2 \leq$$

$$\left[\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1+\frac{\delta}{3}}{t_2}\left(1+\frac{1}{t_2\varepsilon}\right)\right]\int_M |A|^{p-2}u^{-2-\frac{2\delta}{3}}|\nabla\psi|^2$$

$$+\left[\frac{(p-2)t_1}{2}-\left(1+\frac{\delta}{3}\right)\left(\frac{2}{n}+p-3-t_2\right)\right]\int_M |A|^{p-4}|\nabla|A||^2u^{-2-\frac{2\delta}{3}}\psi^2,$$

reorganizando, obtemos

$$\left[1-\left(2+\frac{\delta}{3}\right)\varepsilon+\frac{2+\frac{\delta}{3}}{1+\frac{\delta}{3}}-\frac{p-2}{2t_1}-\frac{1+\frac{\delta}{3}}{t_2}\right]\int_M |A|^{p-2}\psi^2|\nabla u^{-1-\frac{\delta}{3}}|^2 \leq$$

$$\left[\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1+\frac{\delta}{3}}{t_2}\left(1+\frac{1}{t_2\varepsilon}\right)\right]\int_M |A|^{p-2}u^{-2-\frac{2\delta}{3}}|\nabla\psi|^2$$

$$+\left[\frac{(p-2)t_1}{2}-\frac{2+\frac{2\delta}{3}}{n}-\left(1+\frac{\delta}{3}\right)p+3+\delta+\left(1+\frac{\delta}{3}\right)t_2\right]\int_M |A|^{p-4}\psi^2u^{-2-\frac{-2\delta}{3}}|\nabla|A||^2,$$

para todos $\varepsilon, t_1, t_2 > 0$ e $\psi \in C_0^\infty(M)$. Tomando

$$n=3, \quad p=5+\delta, \quad t_1=\frac{2(5+3\delta)}{9}, \quad t_2=1,$$

temos

$$\begin{aligned}
1+\frac{2+\frac{\delta}{3}}{1+\frac{\delta}{3}}-\frac{p-2}{2t_1}-\frac{1+\frac{\delta}{3}}{t_2} &= 1+\frac{2+(\delta/3)}{1+(\delta/3)}-\frac{(3+\delta)}{\frac{4(5+3\delta)}{9}}-1-\frac{\delta}{3}\\
&= \frac{6+\delta}{3+\delta}-\frac{9(3+\delta)}{4(5+3\delta)}-\frac{\delta}{3}\\
&= \frac{12(5+3\delta)(6+\delta)-27(3+\delta)^2-4\delta(3+\delta)(5+3\delta)}{12(3+\delta)(5+3\delta)}\\
&= \frac{12(30+23\delta+3\delta^2)-27(9+6\delta+\delta^2)-4\delta(15+14\delta+3\delta^2)}{12(15+14\delta+3\delta^2)}\\
&= \frac{360+276\delta+36\delta^2-243-162\delta-27\delta^2-60\delta-56\delta^2-12\delta^3}{180+168\delta+36\delta^2}\\
&= \frac{117+54\delta-47\delta^2-12\delta^3}{180+168\delta+36\delta^2},
\end{aligned}$$

e, note que

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{(p-2)t_1}{2} - \frac{2+\frac{2\delta}{3}}{n} - \left(1+\frac{\delta}{3}\right)p + 3 + \delta + \left(1+\frac{\delta}{3}\right)t_2 \\
&= \frac{(3+\delta)(5+3\delta)}{9} - \frac{(2+(2\delta/3))}{3} - \left(1+\frac{\delta}{3}\right)(5+\delta) + 3 + \delta + 1 + \frac{\delta}{3} \\
&= \frac{15+14\delta+3\delta^2}{9} - \frac{(6+2\delta)}{9} - 5 - \delta - \frac{5\delta}{3} - \frac{\delta^2}{3} + 3 + \delta + 1 + \frac{\delta}{3} \\
&= \frac{9+12\delta+3\delta^2}{9} - 1 - \frac{4\delta}{3} - \frac{\delta^2}{3} \\
&= \frac{9+12\delta+3\delta^2}{9} - \frac{9+12\delta+3\delta^2}{9}.
\end{aligned}$$

Com isso,

$$\left[\frac{117+54\delta-47\delta^2-12\delta^3}{180+168\delta+36\delta^2} - \left(2+\frac{\delta}{3}\right)\varepsilon\right]\int_M |A|^{3+\delta}\psi^2|\nabla u^{-1-\frac{\delta}{3}}|^2 \leq$$

$$\left[\frac{1}{\varepsilon} + \left(1+\frac{\delta}{3}\right)\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]\int_M |A|^{3+\delta}u^{-2-\frac{2\delta}{3}}|\nabla\psi|^2,$$

para todo $\varepsilon > 0$. Escolhendo $0 < \delta < \frac{1}{100}$ e $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, obtemos

$$\int_M |A|^{3+\delta}\psi^2|\nabla u^{-1-\frac{\delta}{3}}|^2 \leq C_1\int_M |A|^{3+\delta}u^{-2-\frac{2\delta}{3}}|\nabla\psi|^2, \tag{3.27}$$

para algum $C_1 > 0$. Finalmente, substituindo (3.27) em (3.23), obtemos que

$$\begin{aligned}
\int_M |A|^{5+\delta}u^{-2-\frac{2\delta}{3}}\psi^2 &\leq 2C\left[\int_M |A|^{3+\delta}\psi^2|\nabla u^{-1-\frac{\delta}{3}}|^2 + \int_M |A|^{3+\delta}u^{-2-\frac{2\delta}{3}}|\nabla\psi|^2\right] \\
&\leq C_2\int_M |A|^{3+\delta}u^{-2-\frac{2\delta}{3}}|\nabla\psi|^2.
\end{aligned}$$

Para todo $\varepsilon > 0$, seja $\varepsilon' = \frac{3+\delta}{5+\delta}\varepsilon$. Na desigualdade de Young, tome os conjugados $p = \frac{5+\delta}{3+\delta}$, $q = \frac{5+\delta}{2}$ e

$$a = |A|^{3+\delta}\psi^{\frac{2(3+\delta)}{5+\delta}}\varepsilon^{\frac{3+\delta}{5+\delta}}, \qquad b = |\nabla\psi|^2\psi^{-\frac{2(3+\delta)}{5+\delta}}\varepsilon^{-\frac{(3+\delta)}{5+\delta}},$$

então

$$\begin{aligned}
|A|^{3+\delta}|\nabla\psi|^2 &\leq \frac{|A|^{5+\delta}\psi^2\varepsilon(3+\delta)}{5+\delta} + \frac{2|\nabla\psi|^{5+\delta}\psi^{-3-\delta}\varepsilon^{\frac{-3-\delta}{2}}}{5+\delta} \\
&\leq |A|^{5+\delta}\psi^2\varepsilon' + \frac{C_3}{\varepsilon'}|\nabla\psi|^{5+\delta}\psi^{-3-\delta},
\end{aligned}$$

para alguma constante $C_3 < 1$, pois

$$\frac{2\varepsilon^{\frac{-3-\delta}{2}}}{5+\delta} \leq \frac{C_3}{\varepsilon'} \Longleftrightarrow C_3 \leq \frac{1}{pq\varepsilon^{\frac{1+\delta}{2}}}.$$

Portanto, renomeando a constante, temos

$$\int_M |A|^{5+\delta} u^{-2-\frac{2\delta}{3}} \psi^2 \leq \varepsilon' \int_M |A|^{5+\delta} u^{-2-\frac{2\delta}{3}} \psi^2 + \frac{C'}{\varepsilon'} \int_M u^{-2-\frac{2\delta}{3}} |\nabla \psi|^{5+\delta} \psi^{-(3+\delta)}$$

para todo $\varepsilon' > 0$ e $\psi \in C_0^\infty(M)$. Tomando $\varepsilon' > 0$ adequado, obtemos

$$\int_M |A|^{5+\delta} u^{-2-\frac{2\delta}{3}} \psi^2 \leq C'' \int_M u^{-2-\frac{2\delta}{3}} |\nabla \psi|^{5+\delta} \psi^{-(3+\delta)}, \quad \forall \psi \in C_0^\infty(M).$$

Agora, note que

$$\left|\nabla \psi^{\frac{2}{5+\delta}}\right|^{5+\delta} = \left|\frac{2}{5+\delta} \psi^{\frac{2}{5+\delta}-1} \nabla \psi\right|^{5+\delta} = \left(\frac{2}{5+\delta}\right)^{5+\delta} \psi^{-(3+\delta)} |\nabla \psi|^{5+\delta},$$

daí, renomeando novamente a constante, temos

$$\int_M |A|^{5+\delta} u^{-2-\frac{2\delta}{3}} \psi^2 \leq C \int_M u^{-2-\frac{2\delta}{3}} |\nabla \psi^{\frac{2}{5+\delta}}|^{5+\delta}, \quad \forall \psi \in C_0^\infty(M),$$

substituindo ψ por $\psi^{\frac{2}{5+\delta}}$, concluimos que

$$\int_M |A|^{5+\delta} u^{-2-\frac{2\delta}{3}} \psi^{5+\delta} \leq C \int_M u^{-2-\frac{2\delta}{3}} |\nabla \psi|^{5+\delta}, \quad \forall \psi \in C_0^\infty(M).$$

□

3.2 O Teorema de Bernstein Estável para $n = 3$

Combinando o Lema 3.4 e o Corolário 3.3 podemos provar que a integral sobre M^3 de $|A|^{5+\delta} u^{-2-\frac{2\delta}{3}}$ é identicamente nula, mostrando que M^3 é totalmente geodésica ($|A| \equiv 0$ em M^3). Com isso e, com as hipóteses feitas sobre M^3, concluimos que M^3 é um hiperplano em $\mathbb{R}^4$.

Teorema 3.5. *Uma hipersuperfície mínima estável, completa, orientável e isométricamente imersa $M^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^4$ é um hiperplano.*

Demonstração. Seja $\psi \in C_0^\infty(M)$, por (2.1), temos que, a relação do gradiente na métrica g com a métrica conforme $\tilde{g} = u^{\frac{4}{3}} g$, é dada por

$$\nabla_{\tilde{g}} \psi = u^{-\frac{4}{3}} \nabla_g \psi,$$

com isso,

$$|\nabla_{\tilde{g}}\psi|^2_{\tilde{g}} = \tilde{g}(\nabla_{\tilde{g}}\psi, \nabla_{\tilde{g}}\psi) = u^{\frac{4}{3}}g(\nabla_{\tilde{g}}\psi, \nabla_{\tilde{g}}\psi) = u^{\frac{4}{3}}g(u^{-\frac{4}{3}}\nabla_g\psi, u^{-\frac{4}{3}}\nabla_g\psi) = u^{-\frac{4}{3}}|\nabla_g\psi|^2_g,$$

assim,

$$|\nabla_g\psi|^2_g = u^{\frac{4}{3}}|\nabla_{\tilde{g}}\psi|^2_{\tilde{g}} \Rightarrow |\nabla_g\psi|_g = u^{\frac{2}{3}}|\nabla_{\tilde{g}}\psi|_{\tilde{g}} \Rightarrow |\nabla_g\psi|^{5+\delta}_g = u^{\frac{2(5+\delta)}{3}}|\nabla_{\tilde{g}}\psi|^{5+\delta}_{\tilde{g}}.$$

Do Lema 3.4, para algum $0 < \delta < \frac{1}{100}$, existe uma constante $C > 0$, tal que

$$\begin{aligned}
\int_M |A|^{5+\delta}u^{-2-\frac{2\delta}{3}}\psi^{5+\delta}dV_g &\leq C\int_M u^{-2-\frac{2\delta}{3}}|\nabla_g\psi|^{5+\delta}dV_g \\
&= C\int_M u^{-2-\frac{2\delta}{3}+\frac{2(5+\delta)}{3}}|\nabla_{\tilde{g}}\psi|^{5+\delta}_{\tilde{g}}dV_g \\
&= C\int_M u^{\frac{4}{3}}|\nabla_{\tilde{g}}\psi|^{5+\delta}_{\tilde{g}}dV_g,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\int_M |A|^{5+\delta}u^{-2-\frac{2\delta}{3}}\psi^{5+\delta}dV_g \leq C\int_M u^{\frac{4}{3}}|\nabla_{\tilde{g}}\psi|^{5+\delta}_{\tilde{g}}dV_g, \ \forall\psi \in C^\infty_0(M). \tag{3.28}$$

Seja $x_0 \in M$ e considere $\tilde{r}$ a função distância á partir de x_0 com relação á respectiva métrica $\tilde{g} = u^{\frac{4}{3}}g$. Escolhemos $\psi := \eta(\tilde{r})$ com $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta \equiv 1$ em $[0, R]$, $\eta \equiv 0$ em $[2R, \infty)$ e $|\eta'| \leq C/R$ em $[R, 2R]$, para alguma constante $C > 0$ e algum $R > 0$. Em (3.28), temos que

$$\begin{aligned}
\int_{B^{\tilde{g}}_R(x_0)} |A|^{5+\delta}u^{-2-\frac{2\delta}{3}}dV_g &= \int_{B^{\tilde{g}}_R(x_0)} |A|^{5+\delta}u^{-2-\frac{2\delta}{3}}\eta(\tilde{r})^{5+\delta}dV_g \\
&\leq \int_M |A|^{5+\delta}u^{-2-\frac{2\delta}{3}}\eta(\tilde{r})^{5+\delta}dV_g \\
&\leq C\int_M u^{\frac{4}{3}}|\nabla_{\tilde{g}}\eta(\tilde{r})|^{5+\delta}_{\tilde{g}}dV_g.
\end{aligned}$$

Agora, note que

$$|\nabla_{\tilde{g}}\psi|_{\tilde{g}} = |\nabla_{\tilde{g}}\eta(\tilde{r})|_{\tilde{g}} = |\eta'(\tilde{r})\nabla_{\tilde{g}}\tilde{r}|_{\tilde{g}} = |\eta'(\tilde{r})| \leq \frac{C}{R} \text{ em } [R, 2R],$$

pois $|\nabla_{\tilde{g}}\tilde{r}|_{\tilde{g}} \equiv 1$. Considerando $B^{\tilde{g}}_{2R}(x_0)$ na desigualdade integral acima, temos que

$$\begin{aligned}
\int_{B^{\tilde{g}}_R(x_0)} |A|^{5+\delta} u^{-2-\frac{2\delta}{3}} dV_g &\leq C\int_M u^{\frac{4}{3}} |\nabla_{\tilde{g}}\eta(\tilde{r})|^{5+\delta}_{\tilde{g}} dV_g \\
&\leq C\frac{C^{5+\delta}}{R^{5+\delta}} \int_{B^{\tilde{g}}_{2R}(x_0)} u^{\frac{4}{3}} dV_g \\
&= \frac{C_1}{R^{5+\delta}} \int_{B^{\tilde{g}}_{2R}(x_0)} u^{\frac{4}{3}} dV_g,
\end{aligned}$$

onde $C_1 = CC^{5+\delta}$. Pelo Corolário 3.3, obtemos

$$\int_{B^{\tilde{g}}_R(x_0)} |A|^{5+\delta} u^{-2-\frac{2\delta}{3}} dV_g \leq \frac{C_1 C(2R)^5}{R^{5+\delta}} = \frac{C_2}{R^\delta}.$$

Como $|A| \geq 0$ e $u^{-2-\frac{2\delta}{3}} > 0$, segue que

$$\int_M |A|^{5+\delta} u^{-2-\frac{2\delta}{3}} dV_g \geq 0,$$

Por outro lado, como estamos considerando a bola com respeito á métrica $\tilde{g}$ e a mesma é completa, podemos fazer R crescer tanto quanto quisermos, tomando $R \to \infty$, obtemos

$$\int_M |A|^{5+\delta} u^{-2-\frac{2\delta}{3}} dV_g = \lim_{R\to\infty} \int_{B^{\tilde{g}}_R(x_0)} |A|^{5+\delta} u^{-2-\frac{2\delta}{3}} dV_g \leq \lim_{R\to\infty} \frac{C_2}{R^\delta} = 0,$$

logo,

$$\int_M |A|^{5+\delta} u^{-2-\frac{2\delta}{3}} dV_g = 0 \Rightarrow |A| \equiv 0 \text{ em } M^3.$$

Dessa forma M^3 é totalmente geodésica, com isso e com as condições impostas sobre M^3, conclui-se, portanto, que M^3 é um hiperplano em $\mathbb{R}^4$.

□

3.3 Tensor de Curvatura Bi-Ricci

Nesta seção, consideremos hipersuperfícies mínimas com índice finito, completas, orientáveis e isométricamente imersas

$$M^n \hookrightarrow (\overline{M}^{n+1}, h), \; n \geq 2$$

onde $(\overline{M}^{n+1}, h)$ é uma variedade Riemanniana completa de dimensão $n+1$ dotada da métrica h. Definiremos em seguida a noção do tensor de curvatura bi-Ricci introduzida em [34]:

Definição 3.1. Sejam $(\overline{M}, h)$ uma variedade Riemanniana e u, v dois vetores tangentes ortonormais. O tensor de curvatura bi-Ricci na direção de u, v é definido por

$$BRic_h(u, v) = Ric_h(u, u) + Ric_h(v, v) - K_h(u, v), \tag{3.29}$$

onde $K_h(u, v)$ denota a curvatura seccional do plano gerado por u e v.

3.3.1 Resultado de Rigidez para Hipersuperfícies Mínimas com Índice Finito

Nesta subseção, provaremos que não existem hipersuperfícies mínimas estaveis, imersas em variedades Riemannianas completas de dimensão $n+1$, $n \leq 5$, com curvatura seccional não-negativa e curvatura de Ricci uniformemente positiva.

O próximo resultado, o principal dessa seção, nos fornece uma maneira de provar compacidade e também será útil no próximo capítulo.

Teorema 3.6. *Se $(\overline{M}^{n+1}, h)$ é uma variedade completa de dimensão $n+1$, $n \leq 5$, com curvatura seccional não negativa e curvatura bi-Ricci uniformemente positiva ou curvatura de Ricci uniformemente positiva, então toda hipersuperfície mínima, completa, orientável, imersa $M^n \hookrightarrow (\overline{M}^{n+1}, h)$ com índice finito deve ser compacta.*

Demonstração. Seja $(\overline{M}^{n+1}, h)$ uma variedade completa de dimensão $n+1$, $n \leq 5$, com curvatura seccional não-negativa e curvatura bi-Ricci uniformemente positiva ou curvatura de Ricci uniformemente positiva e considere a hipersuperfície mínima, completa, orientável, imersa $M^n \hookrightarrow (\overline{M}^{n+1}, h)$ com índice finito. Suponha, por contradição, que M é não compacta.

Como M tem índice finito pela Proposição 1.30, existe um conjunto compacto K em M tal que $M - K$ é estável e existe uma função $0 < u \in C^\infty(M)$ tal que $L_M u = 0$ em $M - K$, isto é

$$-\Delta u = [|A|^2 + Ric_h(N, N)]u \quad \text{em } M - K, \tag{3.30}$$

onde N é um vetor normal unitário a M em $\overline{M}$ e Ric_h é o tensor de Ricci da variedade ambiente $\overline{M}$. Seja $k > 0$ e considere a métrica conforme

$$\tilde{g} = u^{2k} g,$$

onde g é a métrica induzida em M. Seguindo a Proposição 2.7 e o Lema 3.2, partindo de uma origem fixa podemos construir uma geodésica minimizante $\tilde{\gamma} : [0, \infty) \to M - K$ (curva divergente) na métrica conforme $\tilde{g}$ que tem comprimento infinito na métrica g.

Seja s o comprimento de arco em relação a métrica g, escolha uma curva divergente menor $\gamma : [0,a] \subset [0,\infty) \to M - K$ em $(M,\tilde{g})$ partindo da mesma origem fixa. Como (M,g) é completa, reparametrizando γ pelo comprimento de arco s na métrica g, verifica-se que γ é definida para $s \in [0,\infty)$.

Escolha um referencial ortonormal $\left\{e_1 = \frac{\partial\gamma}{\partial s}, e_2, \ldots, e_n\right\}$ ao longo de γ para a métrica g, e seja $e_{n+1} = N$. Denote por Ric_{11} e $\tilde{Ric}_{11}$ as curvaturas de Ricci na direção de e_1 para as métricas g e $\tilde{g}$, respectivamente. Seja $\tilde{s}$ o comprimento de arco de γ em relação à métrica $\tilde{g}$ e φe_i uma variação normal de γ, onde $\varphi \in C^\infty(M)$ com $\varphi(0) = \varphi(a) = 0$.

Agora, seguimos alguns cálculos de forma análoga à [18], usando $H \equiv 0$. Fazendo o traço na segunda variação do comprimento de arco ao longo de γ e usando o fato de que γ é minimizante na métrica $\tilde{g}$, tem-se

$$\int_0^{\tilde{s}(a)} \left[(n-1)\left(\frac{d\varphi}{d\tilde{s}}\right)^2 - \tilde{Ric}_{11}\varphi^2\right] d\tilde{s} \geq 0,$$

ou, equivalentemente,

$$\int_0^a \{(n-1)(\varphi_s)^2 - \varphi^2\tilde{Ric}_{11}\}u^{-k}ds \geq 0, \quad \text{(ver equação (3.8))}, \tag{3.31}$$

para toda função suave φ tal que $\varphi(0) = \varphi(a) = 0$. Pela Proposição 2.8, temos que

$$\tilde{Ric}_{11} = Ric_{11} - k(n-2)(\ln u)_{ss} - k\frac{\Delta u}{u} + k\frac{|\nabla u|^2}{u^2}.$$

Usando (3.30), obtemos

$$\tilde{Ric}_{11} = Ric_{11} - k(n-2)(\ln u)_{ss} + k(|A|^2 + Ric_h(N,N)) + k\frac{|\nabla u|^2}{u^2}. \tag{3.32}$$

Da equação de Gauss, tem-se que

$$R_{ijij} = R^h_{ijij} + A_{ii}A_{jj} - A^2_{ij},$$

onde R^h é o tensor de curvatura da variedade ambiente $\overline{M}$. Tomando $i = 1$ e somando em $j = 2, ..., n$, obtemos

$$Ric_{11} = \sum_{j=2}^n R^h_{1j1j} + \sum_{j=2}^n A_{11}A_{jj} - \sum_{j=2}^n A^2_{1j},$$

como $\sum_{j=1}^{n} A_{jj} = 0$, temos que

$$Ric_{11} = \sum_{j=2}^{n} R^h_{1j1j} - A^2_{11} - \sum_{j=2}^{n} A^2_{1j}.$$

Substituindo a relação acima na equação (3.32), resulta

$$\tilde{Ric}_{11} = \sum_{j=2}^{n} R^h_{1j1j} + kRic_h(N,N) + k|A|^2 - A^2_{11} - \sum_{j=2}^{n} A^2_{1j} - k(n-2)(\ln u)_{ss} + k\frac{|\nabla u|^2}{u^2}.$$

Combinando a última equação com a desigualdade (3.31), obtemos

$$\begin{aligned}(n-1)\int_0^a (\varphi_s)^2 u^{-k} ds \;\geq\; & \int_0^a \varphi^2 u^{-k}\left(kRic_h(N,N) + \sum_{j=2}^{n} R^h_{1j1j}\right) ds \\ & + \int_0^a \varphi^2 u^{-k}\left(k|A|^2 - A^2_{11} - \sum_{j=2}^{n} A^2_{1j}\right) ds \\ & - \int_0^a \varphi^2 u^{-k}\left(k(n-2)(\ln u)_{ss} - k\frac{|\nabla u|^2}{u^2}\right) ds. \quad (3.33)\end{aligned}$$

Substituindo φ por $\varphi u^{k/2}$, vemos que

$$\begin{aligned}(\varphi u^{k/2})^2 = \varphi^2 u^k \quad \text{e} \quad [(\varphi u^{k/2})_s]^2 &= [\varphi_s u^{k/2} + \frac{k}{2}\varphi u_s u^{k/2} u^{-1}]^2 \\ &= u^k\left((\varphi_s)^2 + k\varphi\varphi_s u_s u^{-1} + \frac{k^2}{4}\varphi^2 u_s^2 u^{-2}\right).\end{aligned}$$

Com isso, a relação (3.33) se torna

$$\begin{aligned}(n-1)\int_0^a (\varphi_s)^2 ds \;\geq\; & -k(n-1)\int_0^a \varphi\varphi_s u_s u^{-1} ds - \frac{k^2(n-1)}{4}\int_0^a \varphi^2 u_s^2 u^{-2} ds \\ & + \int_0^a \varphi^2\left(kRic_h(N,N) + \sum_{j=2}^{n} R^h_{1j1j}\right) ds \\ & + \int_0^a \varphi^2\left(k|A|^2 - A^2_{11} - \sum_{j=2}^{n} A^2_{1j}\right) ds \\ & - \int_0^a \varphi^2\left(k(n-2)(\ln u)_{ss} - k\frac{|\nabla u|^2}{u^2}\right) ds.\end{aligned}$$

Integrando por partes

$$\int_0^a \varphi^2 (\ln u)_{ss} ds = -2\int_0^a \varphi\varphi_s \frac{u_s}{u} ds.$$

Então, substituindo na desigualdade acima, obtemos que

$$\begin{aligned}(n-1)\int_0^a(\varphi_s)^2ds &\geq k(n-3)\int_0^a\varphi\varphi_s\frac{u_s}{u}ds-\frac{k^2(n-1)}{4}\int_0^a\varphi^2\left(\frac{u_s}{u}\right)^2ds\\ &+k\int_0^a\varphi^2\frac{|\nabla u|^2}{u^2}ds+\int_0^a\varphi^2\left(kRic_h(N,N)+\sum_{j=2}^nR^h_{1j1j}\right)ds\\ &+\int_0^a\varphi^2\left(k|A|^2-A_{11}^2-\sum_{j=2}^nA_{1j}^2\right)ds,\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}(n-1)\int_0^a(\varphi_s)^2ds &\geq k(n-3)\int_0^a\varphi\varphi_s\frac{u_s}{u}ds+\frac{k[4-k(n-1)]}{4}\int_0^a\varphi^2\left(\frac{u_s}{u}\right)^2ds\\ &+\int_0^a\varphi^2\left(kRic_h(N,N)+\sum_{j=2}^nR^h_{1j1j}\right)ds \qquad (3.34)\\ &+\int_0^a\varphi^2\left(k|A|^2-A_{11}^2-\sum_{j=2}^nA_{1j}^2\right)ds,\end{aligned}$$

para cada função suave φ tal que $\varphi(0)=\varphi(a)=0$ e para cada $k>0$. O tensor de curvatura bi-Ricci na direção dos vetores e_1, N é dado por

$$BRic_h(e_1,N)=Ric_h(e_1,e_1)+Ric_h(N,N)-K_h(e_1,N),$$

como,

$$K_h(e_1,N)=\frac{R^h(e_1,N,e_1,N)}{|e_1|^2|N|^2-g(e_1,N)^2}=R^h(e_1,N,e_1,N):=R^h_{1N1N},$$

temos que,

$$Ric_h(N,N)=BRic_h(e_1,N)-Ric_h(e_1,e_1)+R^h_{1N1N}.$$

Multiplicando por $k>0$ e em seguida somando $\sum_{j=2}^n R^h_{1j1j}$ em ambos os lados da igualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned}kRic_h(N,N)+\sum_{j=2}^nR^h_{1j1j} &= kBRic_h(e_1,N)-kRic_h(e_1,e_1)+kR^h_{1N1N}+\sum_{j=2}^nR^h_{1j1j}\\ &= kBRic_h(e_1,N)-k\left(\sum_{j=1}^nR^h_{1j1j}-R^h_{1N1N}\right)+\sum_{j=2}^nR^h_{1j1j}\\ &= kBRic_h(e_1,N)+(1-k)\sum_{j=2}^nR^h_{1j1j}.\end{aligned}$$

Como $(\overline{M}^{n+1},h)$ tem curvatura seccional não-negativa e curvatura bi-Ricci uniformemente positiva ou curvatura de Ricci uniformemente positiva, temos que $R^h_{1j1j} \geq 0$ para cada $j = 2, ..., n$ e

$$BRic_h(e_1, N) \geq R_0 \quad \text{ou} \quad Ric_h(N, N) \geq R_0$$

para algum $R_0 > 0$. Portanto, se $k \leq 1$, temos que

$$kRic_h(N, N) + \sum_{j=2}^{n} R^h_{1j1j} \geq kR_0.$$

Substituindo tal informação em (3.34), obtemos

$$\begin{aligned}(n-1)\int_0^a (\varphi_s)^2 ds \;\; &\geq \;\; k(n-3)\int_0^a \varphi\varphi_s \frac{u_s}{u} ds + \frac{k[4-k(n-1)]}{4}\int_0^a \varphi^2 \left(\frac{u_s}{u}\right)^2 ds \\ &+ \int_0^a \varphi^2 \left(kR_0 + k|A|^2 - A_{11}^2 - \sum_{j=2}^{n} A_{1j}^2\right) ds, \end{aligned} \tag{3.35}$$

para cada função suave φ com $\varphi(0) = \varphi(a) = 0$ e para cada $0 < k \leq 1$. Como $trA \equiv 0$, pela Proposição 1.24, temos que

$$|A|^2 \geq \frac{n}{n-1} A_{11}^2 + 2\sum_{j=2}^{n} A_{1j}^2,$$

daí,

$$\begin{aligned} k|A|^2 - A_{11}^2 - \sum_{j=2}^{n} A_{1j}^2 \;\; &\geq \;\; \frac{kn}{n-1} A_{11}^2 + 2k\sum_{j=2}^{n} A_{1j}^2 - A_{11}^2 - \sum_{j=2}^{n} A_{1j}^2 \\ &= \left(\frac{kn}{n-1} - 1\right) A_{11}^2 + (2k-1)\sum_{j=2}^{n} A_{1j}^2. \end{aligned}$$

Tomando

$$k = \frac{n-1}{n} \leq 1,$$

Temos que

$$k|A|^2 - A_{11}^2 - \sum_{j=2}^{n} A_{1j}^2 \geq \frac{n-2}{n} \sum_{j=2}^{n} A_{1j}^2 \geq 0,$$

para $n \geq 2$. Substituindo tais informações em (3.35), resulta em

$$\begin{aligned}(n-1)\int_0^a (\varphi_s)^2 ds \;\; &\geq \;\; \frac{(n-1)(n-3)}{n}\int_0^a \varphi\varphi_s \frac{u_s}{u} ds + \frac{(n-1)R_0}{n}\int_0^a \varphi^2 ds \\ &+ \frac{(n-1)}{4n}\left[4 - \frac{(n-1)^2}{n}\right]\int_0^a \varphi^2 \left(\frac{u_s}{u}\right)^2 ds, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_0^a (\varphi_s)^2 ds \geq \frac{(n-3)}{n}\int_0^a \varphi\varphi_s \frac{u_s}{u} ds + \frac{6n-n^2-1}{4n^2}\int_0^a \varphi^2\left(\frac{u_s}{u}\right)^2 ds + \frac{R_0}{n}\int_0^a \varphi^2 ds. \tag{3.36}$$

Veja que, se $n \leq 5$, tem-se que

$$\frac{6n-n^2-1}{4n^2} \geq \delta_0 > 0.$$

Além disso, fazendo

$$a = \varphi\frac{u_s}{u} \quad \text{e} \quad b = \frac{n-3}{n}\varphi_s,$$

e tomando os conjugados $p, q = 2$ na desigualdade de Young A.2, temos

$$|ab| = \left|\frac{n-3}{n}\varphi\varphi_s\frac{u_s}{u}\right| \leq \delta_0\varphi^2\left(\frac{u_s}{u}\right)^2 + C(\delta_0)\left(\frac{n-3}{n}\right)^2(\varphi_s)^2 = \delta_0\varphi^2\left(\frac{u_s}{u}\right)^2 + C_1(\varphi_s)^2,$$

ou seja, existe uma constante $C_1 > 0$, tal que

$$\frac{n-3}{n}\varphi\varphi_s\frac{u_s}{u} \geq -\delta_0\varphi^2\left(\frac{u_s}{u}\right)^2 - C_1(\varphi_s)^2.$$

Substituindo as informações acima em (3.36), obtemos

$$\int_0^a (\varphi_s)^2 ds \geq -\delta_0\int_0^a \varphi^2\left(\frac{u_s}{u}\right)^2 ds - C_1\int_0^a (\varphi_s)^2 ds + \delta_0\int_0^a \varphi^2\left(\frac{u_s}{u}\right)^2 ds + \frac{R_0}{n}\int_0^a \varphi^2 ds,$$

isto é,

$$(1+C_1)\int_0^a (\varphi_s)^2 ds \geq \frac{R_0}{n}\int_0^a \varphi^2 ds.$$

Portanto, existe uma constante $C_2 > 0$, tal que, para todo $2 \leq n \leq 5$,

$$C_2\int_0^a (\varphi_s)^2 ds \geq \frac{R_0}{n}\int_0^a \varphi^2 ds, \tag{3.37}$$

para toda função suave φ tal que $\varphi(0) = \varphi(a) = 0$. Integrando por partes,

$$\int_0^a (\varphi_s)^2 ds = -\int_0^a \varphi\varphi_{ss} ds,$$

e em (3.37), temos

$$-C_2\int_0^a \varphi\varphi_{ss} ds \geq \frac{R_0}{n}\int_0^a \varphi^2 ds \Rightarrow \int_0^a \varphi\varphi_{ss} ds + \frac{R_0}{C_2 n}\int_0^a \varphi^2 ds \leq 0,$$

renomeando a constante novamente, resulta que

$$\int_0^a \left(\varphi\varphi_{ss} + C'R_0\varphi^2\right) ds \leq 0, \tag{3.38}$$

para toda função suave φ tal que $\varphi(0) = \varphi(a) = 0$ e $C' > 0$. Tomando $\varphi(s) = \sin(\pi s a^{-1})$, $s \in [0, a]$, note que

$$\varphi_s = \frac{\pi}{a}\cos(\pi s a^{-1}) \Rightarrow \varphi_{ss} = -\frac{\pi^2}{a^2}\sin(\pi s a^{-1}),$$

em (3.38), temos

$$\int_0^a \left(-\frac{\pi^2}{a^2}\sin^2(\pi s a^{-1}) + C'R_0\sin^2(\pi s a^{-1})\right) ds = \left(C'R_0 - \frac{\pi^2}{a^2}\right)\int_0^a \sin^2(\pi s a^{-1}) ds \leq 0,$$

com isso,

$$a^2 \leq \frac{\pi^2}{C'R_0}.$$

Concluimos que o comprimento (na métrica g) da geodésica γ é finito e isso dá uma contradição. Portanto (M^n, g) deve ser compacto e isto conclui a demonstração.

□

Como consequência temos o seguinte corolário:

Corolário 3.7. Se $(\overline{M}^{n+1}, h)$ é uma variedade completa de dimensão $n+1$, $n \leq 5$, com curvatura seccional não negativa e curvatura de Ricci uniformemente positiva, então não existe hipersuperfície mínima estável, completa, orientável, imersa $M^n \hookrightarrow (\overline{M}^{n+1}, h)$.

Demonstração. Suponha que M é estável, se tomarmos $f \equiv 1$, na desigualdade de estabilidade (1.20),

$$\int_M [|A|^2 + Ric_h(N,N)]f^2 dV_g \leq \int_M |\nabla f|^2 dV_g \quad \forall f \in C_0^\infty(M),$$

temos que,

$$\int_M Ric_h(N,N) dV_g \leq 0.$$

Contradição, pois $Ric_h > 0$.

□

Em particular, não existe uma hipersuperfície mínima estável, completa, orientável imersa nas esferas redondas $M^n \hookrightarrow (\mathbb{S}^{n+1}, g_{std})$, se $n \leq 5$. Na dimensão $n = 2$ isto decorre de um resultado mais geral provado em [32], enquanto na dimensão $n = 3$, foi recentemente provado em [11]. Mencionamos que o Teorema 3.6 também é válido para hipersuperfícies mínimas estaveis, completas, orientaveis, imersas no cilindro $M^n \hookrightarrow (\mathbb{R} \times \mathbb{S}^n, g_{std})$ (observe que neste caso $K \geq 0$ e $BRic \geq 1$) desde que $n \leq 5$. Salientamos que o Corolário 3.7 é novo nos casos $n = 4, 5$ (ver [8] onde a mesma técnica é usada). Além disso, é um problema em aberto se o Teorema 3.6 e o Corolário 3.7 também são válidos em dimensões maiores que cinco. Notamos que, no mesmo espirito em [34] os autores obtiveram um resultado de compacidade para hipersuperfícies mínimas estáveis de dimensão $n \leq 4$ imersas no espaço com curvatura bi- Ricci uniformemente positiva.

Capítulo 4

Teoremas de Pinching para Subvariedades Completas na Esfera

Ao longo deste capítulo, abordando o trabalho [26], caracterizaremos subvariedades completas na esfera com curvatura média constante.

Inicialmente precisamos estabelecer algumas notações. $\mathbb{S}^{n+p}$ denotará a esfera unitária de dimensão $n+p$, $\mathbb{S}^{n+p}(r)$ a esfera de raio r e $\mathbb{S}_c^{n+p}$ a esfera de curvatura seccional c. Um $H(r) - torus$ em $\mathbb{S}^{n+1}$ é obtido considerando as imersões padrão $\mathbb{S}^{n-1}(r) \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^1(\sqrt{1-r^2}) \subset \mathbb{R}^2$, $0 < r < 1$ e tomando a imersão do produto

$$\mathbb{S}^{n-1}(r) \times \mathbb{S}^1(\sqrt{1-r^2}) \hookrightarrow \mathbb{S}^{n+1} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2.$$

Pelas escolhas feitas, o $H(r) - torus$ acaba por estar contido em $\mathbb{S}^{n+1}$ e as curvaturas principais são dadas, em alguma orientação, por

$$k_1 = \cdots = k_{n-1} = \frac{\sqrt{1-r^2}}{r}, \qquad k_n = -\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}, \tag{4.1}$$

ou o simétrico desses valores para a orientação oposta. O *toro de Clifford* é dado pelo mergulho natural

$$T^{n,k} = \mathbb{S}^k(\sqrt{k/n}) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{(n-k)/n}) \hookrightarrow \mathbb{S}^{n+1}, \quad k \in \{1, \ldots, n-1\}.$$

Vamos agora definir a *Superfície de Veronese*. Seja (x, y, z) o sistema de coordenadas natural de $\mathbb{R}^3$ e consideremos a aplicação $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ definida por

$$F(x, y, z) = \left(\frac{yz}{\sqrt{3}}, \frac{zx}{\sqrt{3}}, \frac{xy}{\sqrt{3}}, \frac{x^2 - y^2}{2\sqrt{3}}, \frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{6} \right).$$

Tomando a restrição a $\mathbb{S}^2(\sqrt{3}) \subset \mathbb{R}^3$, temos uma imersão isométrica de $\mathbb{S}^2(\sqrt{3})$ em $\mathbb{S}^4$.

Dois pontos (x, y, z) e $(-x, -y, -z)$ de $\mathbb{S}^2(\sqrt{3})$ são mapeados no mesmo ponto de $\mathbb{S}^4$, e esse mapeamento define um mergulho do plano projetivo em $\mathbb{S}^4$,

$$\mathbb{S}^2(\sqrt{3})/_{\mathbb{Z}_2} \to \mathbb{S}^4.$$

Este plano projetivo mergulhado em $\mathbb{S}^4$ é chamado de superfície de Veronese.

Seja $f : M^n \to \mathbb{S}^{n+p}$, $n \geq 2$, uma subvariedade imersa sem fronteira. Se M^n é compacta, mínima e sua segunda forma fundamental A satisfaz

$$|A|^2 \leq \frac{np}{2p-1}, \tag{4.2}$$

(em particular, $|A|^2 \leq n$, se $p = 1$), podemos caracterizar M^n de acordo com um resultado seminal devido a Simons [31].

Teorema 4.1 (Simons, 1968)**.** *Seja $f : M^n \to \mathbb{S}^{n+P}$ uma subvariedade mínima compacta, assuma que A satisfaz (4.2). Então $|A| \equiv 0$ e M^n é uma grande esfera ou $|A|^2 = \frac{np}{2p-1}$.*

No caso em que $|A|^2 = \frac{np}{2p-1}$, uma caracterização foi dada por Lawson [23] em codimensão $p = 1$,

Teorema 4.2 (Lawson, 1969)**.** *Seja $f : M^n \to \mathbb{S}^{n+1}$ uma hipersuperfície mínima compacta. Então, $|A|^2 = n$ se e somente se M^n é um toro de Clifford $T^{n,k}$ em $\mathbb{S}^{n+1}$.*

Para $p = 2$ e $n = 2$, a classificação de M^n foi dada por Chern, do Carmo & Kobayashi [7]:

Teorema 4.3 (Chern, do Carmo & Kobayashi, 1970)**.** *Seja $p = n = 2$ e $f : M^n \to \mathbb{S}^{n+p}$ uma subvariedade mínima compacta, tal que $|A|^2 = \frac{np}{2p-1}$. Então M^2 é uma superfície de Veronese em $\mathbb{S}^4$.*

Para estender tais resultados, para subvariedades compactas com curvatura média paralela e diferentede de zero, um problema análogo foi abordado por Santos [30] no caso $p \geq 2$. Em codimensão $p = 1$, consideremos o tensor de umbilicidade $\Phi : T_qM \times T_qM \to \mathbb{R}$ definido por $\Phi = A - Hg$, onde g é a métrica Riemanniana de M^n, e suponha que $|\Phi|^2 \leq b^2(n, H)$, onde $b(n, H)$ é a raiz positiva do polinômio

$$P_{(n,H)}(x) = x^2 + \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} Hx - n(H^2 + 1). \tag{4.3}$$

Então, Alencar & do Carmo [1], provaram que

Teorema 4.4 (Alencar & do Carmo, 1994)**.** *Seja $f : M^n \to \mathbb{S}^{n+1}$ uma hipersuperfície compacta com curvatura média constante $H \geq 0$, tal que $|\Phi|^2 \leq b^2(n,H)$. Então*

1. *$|\Phi|^2 \equiv 0$ e M^n é uma esfera totalmente umbílica ou $|\Phi|^2 \equiv b^2(n,H)$.*

2. *$|\phi|^2 \equiv b^2(n,H)$ se e somente se:*

   (a) $H = 0$ e M^n é um toro de Clifford em $\mathbb{S}^{n+1}$.

   (b) $H \neq 0$, $n \geq 3$, e M^n é um $H(r) - torus$ com $r^2 < \frac{n-1}{n}$.

   (c) $H \neq 0$, $n = 2$, e M^n é um $H(r) - torus$ com $r^2 \neq \frac{n-1}{n}$.

Todas as provas dos teoremas acima mencionados baseiam-se no princípio do máximo forte aplicado a $|\Phi|^2$, que na codimensão 1 satisfaz a desigualdade

$$\Delta|\Phi|^2 \geq -2|\Phi|^2 P_{(n,H)}(|\Phi|) + 2|\nabla\Phi|^2, \tag{4.4}$$

onde $P_{(n,H)}$ é o polinômio dado em (4.3), veja ([1], Pag. 1226). Na verdade, a suposição $|\Phi| \leq b(n,H)$ implica que $P_{(n,H)}(|\Phi|) \leq 0$, e portanto $\Delta|\Phi|^2 \geq 0$. Como M^n é compacta, $|\Phi|^2$ deve ser constante, e assim $\nabla\Phi \equiv 0$. A conclusão decorre de uma análise cuidadosa de hipersuperfícies com $\nabla\Phi \equiv 0$.

O objetivo deste capítulo é abordar extensões dos resultados mencionados acima para subvariedades completas, possivelmente não compactas, com base no artigo de Marco Magliaro, Luciano Mari, Fernanda Roing & Andreas Savas-Halilaj [26]. O mesmo é inspirado nos trabalhos de Fischer-Colbrie [20] e Catino, Mastrolia & Roncoroni [4]. A idéia central é mudar conformememte a métrica de M^n por uma potência de função adequada

$$u = b^2(n,H) - |\Phi|^2 > 0, \tag{4.5}$$

para mostrar que M^n é compacto e em seguida dar a sua caracterização.

4.1 Hipersuperfícies Completas com Curvatura Média Constante em Esferas

Nesta seção caracterizaremos hipersuperfícies completas com curvatura média constante em esferas, por meio do seguinte resultado.

Teorema 4.5. *Seja $f : M^n \to \mathbb{S}^{n+1}$ uma hipersuperfície completa e imersa com curvatura média constante $H \geq 0$. Suponha que a norma ao quadrado $|\Phi|^2$ da parte sem traço da segunda forma fundamental de M^n satisfaça $|\Phi|^2 \leq b^2(n,H)$, onde $b(n,H)$ é a raiz positiva do polinômio (4.3). Então*

1. $|\Phi| \equiv 0$ *e* M^n *é uma esfera totalmente umbílica;*
   ou

2. $|\Phi| \equiv b(n, H)$ *o que ocorre se, e somente se,*

   (a) $H = 0$ *e* M^n *cobre um toro de Clifford* $T^{n,k}$ *para algum* $k \in \{1, \ldots, n-1\}$*;*

   (b) $H > 0$*,* $n \geq 3$ *e* M^n *cobre um* $H(r)$*-torus com* $r^2 < \frac{n-1}{n}$*;*

   (c) $H > 0$*,* $n = 2$ *e* M^n *cobre um* $H(r)$*-torus com* $r^2 \neq \frac{(n-1)}{n}$*.*

Demonstração. Seja $f : M^n \to \mathbb{S}^{n+1}$ uma hipersuperfície completamente imersa com $|\Phi| \leq b(n, H)$. Denotemos por $b_- < 0 < b_+ = b(n, H)$ as duas raizes do polinômio $P_{(n,H)}$ dadas em (4.3), a saber

$$\begin{aligned} b_\pm &= \frac{1}{2}\left(-\frac{n(n-2)H}{\sqrt{n(n-1)}} \pm \sqrt{\frac{n^2(n-2)^2H^2}{n(n-1)} + 4n(H^2+1)}\right) \\ &= \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{n^2(n-2)^2H^2}{n(n-1)} + 4n(H^2+1)} - \frac{1}{2}\frac{n(n-2)H}{\sqrt{n(n-1)}} \\ &= \pm\sqrt{\frac{n^2(n-2)^2H^2}{4n(n-1)} + n(H^2+1)} - \frac{n(n-2)H}{2\sqrt{n(n-1)}}, \end{aligned}$$

em particular, $b(n, 0) = \sqrt{n}$. Observe que,

$$\begin{aligned} |b_-| &= \sqrt{\frac{n^2(n-2)^2H^2}{4n(n-1)} + n(H^2+1)} + \frac{n(n-2)H}{2\sqrt{n(n-1)}} \\ &\geq \sqrt{\frac{n^2(n-2)^2H^2}{4n(n-1)} + n(H^2+1)} - \frac{n(n-2)H}{2\sqrt{n(n-1)}} = b_+. \end{aligned}$$

Isto implica que, $b_- \leq -b_+$, daí, deduzimos que, para $x \in [0, b_+]$,

$$P_{(n,H)}(x) = (x - b_+)(x - b_-) \leq (x - b_+)(x + b_+) = x^2 - b_+^2. \tag{4.6}$$

Com isso e usando o fato de que $|\Phi|^2 \leq b^2$, pela desigualdade (4.4), obtemos que

$$\Delta|\Phi|^2 \geq -2|\Phi|^2(|\Phi|^2 - b^2) + 2|\nabla\Phi|^2 = 2(b^2 - |\Phi|^2)|\Phi|^2 + 2|\nabla\Phi|^2 \geq 0,$$

onde, daqui em diante, $b = b_+ = b(n, H)$. Como consequência a função $u = b^2 - |\Phi|^2 \geq 0$ e satisfaz

$$\Delta u = -\Delta|\Phi|^2 \leq -2(b^2 - |\Phi|^2)|\Phi|^2 - 2|\nabla\Phi|^2 \leq -2(b^2 - |\Phi|^2)|\Phi|^2,$$

ou seja,

$$u \geq 0 \quad \text{e} \quad \Delta u \leq -2|\Phi|^2 u \ \text{ em } \ M^n. \tag{4.7}$$

Distinguimos dois casos.

Caso 1. Se $u(x_0) = 0$ para algum $x_0 \in M^n$, pelo princípio do máximo forte, $u \equiv 0$, de onde

$$|\Phi|^2 \equiv b^2 \quad \text{e} \quad |\nabla\Phi| \equiv 0.$$

A conclusão é um argumento local que independe da compacidade, como feito em [1]. Mais precisamente, seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ um referencial ortonormal que diagonaliza Φ em cada ponto de M, isto é,

$$\Phi e_i = \mu_i e_i = k_i e_i - H, \quad i \in \{1, \dots, n\},$$

e, isto implica que, $k_i = \mu_i + H$. Para fazer tal argumento, precisamos do seguinte lema.

Lema 4.6. Sejam μ_i, $i = 1, \dots, n$, números reais tal que $\sum_i \mu_i = 0$ e $\sum_i \mu_i^2 = C^2$, onde $C = const \geq 0$. Então

$$-\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}C^3 \leq \sum_i \mu_i^3 \leq \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}C^3,$$

e a igualdade se mantém no lado direito (lado esquerdo) se e somente se $(n-1)$ dos $\mu_i's$ são não positivos e iguais ($(n-1)$ dos $\mu_i's$ são não negativos e iguais).

Demonstração. Veja [1]. □

Suponha que a igualdade seja válida no lado esquerdo do Lema 4.6, com isso, segue-se que $k_i = const$ e $(n-1)$ dos $k_i's$ são iguais. Após uma reenumeração, se necessário, podemos assumir que

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_{n-1}, \qquad k_1 \neq k_n, \quad k_i = const.$$

Nesta situação, se $n \geq 3$, um resultado de do Carmo e Dajczer ([15], pag. 701) implica que M^n está contida em uma hipersuperfície de rotação de $\mathbb{S}^{n+1}$ obtida pela rotação de uma curva de curvatura constante. Portanto, todo $x \in M^n$ tem uma vizinhaça U para a qual $f(U)$ é um pedaço de um toro de Clifford $T^{n,k}$ (se $H = 0$) ou de um $H(r) - torus$ (se $H > 0$), de acordo com o valor de H.

Se $n = 2$, observamos que $M^2 \subset \mathbb{S}^3$ é uma superfície isoparamétrica (superfície que possui curvaturas principais constantes) em $\mathbb{S}^3$, que é conhecida por ser uma esfera totalmente umbílica ou um $H(r)-torus$. Como $|\Phi|^2 \neq 0$, segue-se que, M^2 é localmente um $H(r) - torus$, isto é, todo $x \in M^2$ tem uma vizinhaça U para a qual $f(U)$ é um pedaço de um $H(r) - torus$ em $\mathbb{S}^3$.

Mostramos que $f(M^n)$ é um toro. De fato, qualquer toro de Clifford ou $H(r)-torus$ é o conjunto zero de uma função analítica real apropriada em $\mathbb{S}^{n+1}$; veja por exemplo ([27], Example 3, Pag. 194). Fixe $x \in M^n$ e U como acima e seja $\psi : \mathbb{S}^{n+1} \to \mathbb{R}$ uma função analítica real que se anula no toro que contém $f(U)$. Como M^n e f também são analíticos reais, então $\psi \circ f$ também é analítico real e se anula em U, assim, se anula em todo o M^n. Isso mostra que $f(M^n)$ está contido em um toro $\sum^n$. Como $f : M^n \to \sum^n$ é uma isometria local e M^n é completa, o Teorema de Ambrose 1.18 garante que f é um recobrimento Riemanniano e é sobrejetiva, o que prova nossa afirmação.

Mostraremos, agora que, o raio r do $H(r) - torus$ está na faixa indicada pelo Teorema. Primeiro para $n \geq 3$, observamos que, considerando a igualdade no Lema 4.6 (no lado esquerdo), temos que

$$\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_{n-1} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}}|\Phi|, \quad \text{e} \quad \mu_n = -\sqrt{\frac{n-1}{n}}|\Phi|,$$

pois

$$\begin{aligned}
\sum_i \mu_i^3 &= (n-1)\left(\frac{1}{n(n-1)}\right)^{3/2}|\Phi|^3 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^{3/2}|\Phi|^3 \\
&= \left(\frac{1}{n\sqrt{n(n-1)}} - \frac{(n-1)\sqrt{n-1}}{n\sqrt{n}}\right)|\Phi|^3 \\
&= \left(\frac{1-(n-1)^2}{n\sqrt{n(n-1)}}\right)|\Phi|^3 \\
&= -\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}|\Phi|^3,
\end{aligned}$$

como $|\Phi| \geq 0$ é constante, podemos tomar $C = |\Phi|$. Daí, temos que

$$k_1 = H + \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}}|\Phi| \quad \text{e} \quad k_n = H - \sqrt{\frac{n-1}{n}}|\Phi|,$$

com isso,

$$
\begin{aligned}
k_n k_1 &= \left(H - \sqrt{\frac{n-1}{n}}|\Phi|\right)\left(H + \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}}|\Phi|\right)\\
&= H^2 + \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}}H|\Phi| - \sqrt{\frac{n-1}{n}}H|\Phi| - \frac{1}{n}|\Phi|\\
&= H^2 - \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}H|\Phi| - \frac{1}{n}|\Phi|^2,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
nk_n k_1 &= -\left(|\Phi|^2 + \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H|\Phi| - nH^2 + n - n\right)\\
&= -\left(|\Phi|^2 + \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H|\Phi| - n(H^2+1)\right) - n\\
&= -P_{(n,H)}(|\Phi|) - n.
\end{aligned}
$$

Como $b^2 = |\Phi|^2$, segue que $P_{(n,H)}(|\Phi|) = P_{(n,H)}(b) = 0$, logo

$$k_n k_1 = -1.$$

Por outro lado, de

$$k_n = H + \mu_n = \frac{k_n + (n-1)k_1}{n} + \mu_n,$$

temos que

$$(n-1)k_n - (n-1)k_1 = n\mu_n.$$

Como $\mu_n < 0$, obtemos que $k_n < k_1$, pois $k_n k_1 = -1$, isto implica que $k_n < 0$. Portanto, segue-se que o $H(r) - torus$ selecionado é dado por (4.1). Sendo sua curvatura média

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{(n-1)\sqrt{1-r^2}}{nr} - \frac{r}{n\sqrt{1-r^2}}\\
&= \frac{(n-1)(1-r^2) - r^2}{nr\sqrt{1-r^2}}\\
&= \frac{(n-1) - nr^2}{nr\sqrt{1-r^2}}.
\end{aligned}
$$

Como $H > 0$, devemos ter

$$\frac{(n-1) - nr^2}{nr\sqrt{1-r^2}} > 0,$$

ou seja,

$$r^2 < \frac{(n-1)}{n}.$$

Observamos que, se por outro lado, a orientação fosse a oposta de (4.1) teríamos

$$H = \frac{nr^2 - (n-1)}{nr\sqrt{1-r^2}},$$

o que implicaria em $r^2 > \frac{(n-1)}{n}$, mais para $n \geq 3$, um cálculo dá $|\Phi| > b(n, H)$, isto é, um toro com tal r não satisfaz as suposições do teorema.

Para $n = 2$, pelo argumento acima, vemos que $k_2 k_1 = -1$, porém a igualdade do Lema 4.6 não nos fornece nenhuma informação adicional, podemos ter ambos os casos:

$$k_2 > 0, k_1 < 0 \qquad \text{ou} \qquad k_2 < 0, k_1 > 0.$$

Assim, a curvatura média positiva pode ser

$$H = \frac{(n-1) - nr^2}{nr\sqrt{1-r^2}} \qquad \text{ou} \qquad H = \frac{nr^2 - (n-1)}{nr\sqrt{1-r^2}},$$

portanto

$$r^2 \neq \frac{(n-1)}{n}.$$

Caso 2. Agora, suponha que $u > 0$ sobre M^n. Nosso objetivo é provar que M^n deve ser uma esfera totalmente umbílica. Para atingir o objetivo, inspirados por [4, 20], dotamos M^n da métrica $\tilde{g} = u^{2\beta} g$, onde

$$\beta = \begin{cases} \text{um número em } (0,1) & \text{se } n = 2, 3, \\ \frac{1}{n-2} & \text{se } n \geq 4. \end{cases} \tag{4.8}$$

Considere uma curva $\gamma : [0, a] \to M^n$ parametrizada pelo comprimento de arco s na métrica g, e denote por $\tilde{s}$ o comprimento de arco de γ na métrica $\tilde{g}$. Então, o comprimento de γ na métrica $\tilde{g}$ é dado por

$$l_{\tilde{g}}(\gamma) = \int_0^a \sqrt{\tilde{g}(\gamma'(s), \gamma'(s))}ds = \int_0^a \sqrt{u^{2\beta}(\gamma(s))g(\gamma'(s), \gamma'(s))}ds = \int_0^a u^\beta(\gamma(s))ds.$$

Dividimos a prova em três afirmações.

Afirmação 1. *Suponha que γ seja uma geodésica com segunda variação do comprimento de arco não negativa na métrica $\tilde{g}$. Então existem constantes $t_0 > 1$, $c_0 > 0$ dependendo de n, β tal que*

$$c_0 \int_0^a u^\beta \psi^2 ds \leq -2t_0 \int_0^a u^\beta \psi \psi_{ss} ds \quad \text{para toda } \psi \in C_0^2([0, a]), \tag{4.9}$$

onde $C_0^2([0,a])$ *é o conjunto de funções* $\psi \in C^2([0,a])$ *tal que* $\psi(0) = \psi(a) = 0$.

Prova da afirmação 1. Seja $\{e_1 = \gamma_s, e_2, \ldots, e_n\}$ um referencial ortonormal ao longo de γ para a métrica g. Dada $\varphi \in C_0^2([0,a])$, escolhamos $e_i\varphi$ uma variação normal de γ. Fazendo o traço na fórmula da segunda variação do comprimento de arco, ao longo de γ, temos que

$$\int_0^{\tilde{s}(a)} \{(n-1)(\varphi_{\tilde{s}})^2 - \varphi^2 \tilde{Ric}(\gamma_{\tilde{s}}, \gamma_{\tilde{s}})\} d\tilde{s} \geq 0, \quad \forall \varphi \in C_0^2([0,a]),$$

ou, equivalentemente, (veja equação (3.8)),

$$\int_0^a \{(n-1)(\varphi_s)^2 - \varphi^2 \tilde{Ric}(\gamma_s, \gamma_s)\} u^{-\beta} ds \geq 0, \quad \forall \varphi \in C_0^2([0,a]). \tag{4.10}$$

Como mostra a Proposição 2.8, ao longo de γ, a seguinte identidade é válida:

$$\begin{aligned} \tilde{Ric}(\gamma_s, \gamma_s) &= Ric(\gamma_s, \gamma_s) - \beta(n-2)(\ln u)_{ss} - \beta\frac{\Delta u}{u} + \beta\frac{|\nabla u|^2}{u^2} \\ &= Ric(\gamma_s, \gamma_s) - \beta(n-2)(\ln u)_{ss} - \beta\Delta \ln u. \end{aligned}$$

Por (4.7), temos que

$$\Delta \ln u = \frac{\Delta u}{u} + \frac{|\nabla u|^2}{u^2} \leq -2|\Phi|^2 - \{(\ln u)_s\}^2,$$

com isso,

$$\tilde{Ric}(\gamma_s, \gamma_s) \geq Ric(\gamma_s, \gamma_s) - \beta(n-2)(\ln u)_{ss} + 2\beta|\Phi|^2 + \beta\{(\ln u)_s\}^2. \tag{4.11}$$

Pela equação de Gauss, temos que os componentes do tensor de curvatura de Riemann de M^n são dados por

$$R_{ijij} = \overline{R}_{ijij} + A_{ii}A_{jj} - A_{ij}^2, \quad i,j \in \{1,\ldots,n\},$$

onde $\overline{R}$ é o tensor de curvatura de $\mathbb{S}^{n+1}$. Como $\Phi = A - Hg$ e $\overline{R}_{ijij} = 1 - \delta_{ij}$, a identidade pode ser escrita equivalentemente na forma

$$R_{ijij} = 1 - \delta_{ij} + (\Phi_{ii} + H)(\Phi_{jj} + H) - (\Phi_{ij} + H\delta_{ij})^2, \quad i,j \in \{1,\ldots,n\}.$$

Tomando $i = 1$, temos

$$R_{1j1j} = 1 - \delta_{1j} + \Phi_{11}\Phi_{jj} + \Phi_{11}H + \Phi_{jj}H + H^2 - \Phi_{1j}^2 - 2\Phi_{1j}H\delta_{1j} - H^2\delta_{1j},$$

e, somando em $j=2,\dots,n$, segue que

$$Ric_{11} = (n-1) + \sum_{j=2}^{n} \Phi_{11}\Phi_{jj} + (n-1)H\Phi_{11} + \sum_{j=2}^{n} \Phi_{jj}H + (n-1)H^2 - \sum_{j=2}^{n} \Phi_{1j}^2.$$

Usando o fato de que

$$\sum_{j=1}^{n} \Phi_{jj} = 0 \Rightarrow \Phi_{11} + \sum_{j=2}^{n} \Phi_{jj} = 0,$$

obtemos

$$\begin{aligned} Ric(\gamma_s,\gamma_s) &= (n-1) - \Phi_{11}^2 + (n-1)H\Phi_{11} - H\Phi_{11} + (n-1)H^2 - \sum_{j=2}^{n} \Phi_{1j}^2 \\ &= (n-1) - \Phi_{11}^2 + (n-2)H\Phi_{11} + (n-1)H^2 - \sum_{j=2}^{n} \Phi_{1j}^2. \end{aligned}$$

De forma totalmente análoga a Proposição 1.24, pode-se mostrar que

$$|\Phi|^2 \geq \frac{n}{n-1}\Phi_{11}^2 + 2\sum_{j=2}^{n} \Phi_{1j}^2 \geq \frac{n}{n-1}\sum_{j=1}^{n} \Phi_{1j}^2 \geq \frac{n}{n-1}\Phi_{11}^2. \tag{4.12}$$

Isto implica que,

$$\Phi_{11} \geq -\sqrt{\frac{n-1}{n}}|\phi|.$$

Por outro lado, observe que, para $\tau \in (0,1]$ fixo, temos a identidade

$$\begin{aligned} H\Phi_{11} &= H(1-\tau)\Phi_{11} + \tau H\Phi_{11} \\ &\geq -H(1-\tau)|\Phi|\sqrt{\frac{n-1}{n}} + \tau H\Phi_{11}. \end{aligned}$$

Para $\varepsilon > 0$ utilizamos a desigualdade de Young (A.2), para ver que

$$|\Phi_{11}H| \leq \frac{\varepsilon\Phi_{11}^2}{2} + \frac{H^2}{2\varepsilon} \Rightarrow H\Phi_{11} \geq -\frac{H^2}{2\varepsilon} - \frac{\varepsilon\Phi_{11}^2}{2},$$

com isso,

$$H\Phi_{11} \geq -H(1-\tau)|\Phi|\sqrt{\frac{n-1}{n}} - \frac{\tau H^2}{2\varepsilon} - \frac{\tau\varepsilon\Phi_{11}^2}{2}.$$

Pela estimativa obtida acima para o termo $H\Phi_{11}$, segue-se que

$$\begin{aligned}
Ric(\gamma_s,\gamma_s) &\geq (n-1)-\Phi_{11}^2-(n-2)\left(H(1-\tau)|\Phi|\sqrt{\frac{n-1}{n}}+\frac{\tau H^2}{2\varepsilon}+\frac{\tau\varepsilon\Phi_{11}^2}{2}\right)\\
&\quad +(n-1)H^2-\sum_{j=2}^{n}\Phi_{1j}^2\\
&= (n-1)-(n-2)\sqrt{\frac{n-1}{n}}(1-\tau)|\Phi|H+\left(n-1-\frac{(n-2)\tau}{2\varepsilon}\right)H^2\\
&\quad -\left(1+\frac{(n-2)\tau\varepsilon}{2}\right)\Phi_{11}^2-\sum_{j=2}^{n}\Phi_{1j}^2.
\end{aligned}$$

Como $P_{(n,H)}(b)=0$ e $|\Phi|\leq b$, temos que

$$P_{(n,H)}(|\Phi|)\leq P_{(n,H)}(b)=0,$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
P_{(n,H)}(|\Phi|) &= |\Phi|^2+\frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H|\Phi|-n(H^2+1)\\
&= |\Phi|^2+\frac{n(n-2)}{n-1}\sqrt{\frac{n-1}{n}}H|\Phi|-n(H^2+1)\leq 0,
\end{aligned}$$

isto é,

$$(n-2)\sqrt{\frac{n-1}{n}}H|\Phi|\leq (n-1)(H^2+1)-\frac{n-1}{n}|\Phi|^2.$$

Com isso,

$$\begin{aligned}
Ric(\gamma_s,\gamma_s) &\geq (n-1)-(1-\tau)(n-1)(H^2+1)+(1-\tau)\frac{n-1}{n}|\Phi|^2\\
&\quad +\left(n-1-\frac{(n-2)\tau}{2\varepsilon}\right)H^2-\left(1+\frac{(n-2)\tau\varepsilon}{2}\right)\Phi_{11}^2-\sum_{j=2}^{n}\Phi_{1j}^2\\
&= (n-1)-[(n-1)-\tau(n-1)](H^2+1)+\left(n-1-\frac{(n-2)\tau}{2\varepsilon}\right)H^2\\
&\quad +(1-\tau)\frac{n-1}{n}|\Phi|^2-\left(1+\frac{(n-2)\tau\varepsilon}{2}\right)\Phi_{11}^2-\sum_{j=2}^{n}\Phi_{1j}^2\\
&= \tau(n-1)+H^2\tau(n-1)-H^2(n-1)+\left(n-1-\frac{(n-2)\tau}{2\varepsilon}\right)H^2\\
&\quad +(1-\tau)\frac{n-1}{n}|\Phi|^2-\left(1+\frac{(n-2)\tau\varepsilon}{2}\right)\Phi_{11}^2-\sum_{j=2}^{n}\Phi_{1j}^2,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} Ric(\gamma_s,\gamma_s) &\geq \tau(n-1)+\tau\left(n-1-\frac{n-2}{2\varepsilon}\right)H^2+(1-\tau)\frac{n-1}{n}|\Phi|^2 \\ &\quad -\left(1+\frac{(n-2)\tau\varepsilon}{2}\right)\Phi_{11}^2-\sum_{j=2}^{n}\Phi_{1j}^2. \end{aligned}$$

Substituindo em (4.11), obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{Ric}(\gamma_s,\gamma_s) &\geq \tau(n-1)+\tau\left(n-1-\frac{n-2}{2\varepsilon}\right)H^2+\left(2\beta+(1-\tau)\frac{n-1}{n}\right)|\Phi|^2 \\ &\quad -\left(1+\frac{(n-2)\tau\varepsilon}{2}\right)\Phi_{11}^2-\sum_{j=2}^{n}\Phi_{1j}^2 \\ &\quad -\beta(n-2)(\ln u)_{ss}+\beta\{(\ln u)_s\}^2, \end{aligned}$$

e, por (4.12), temos

$$\begin{aligned} \tilde{Ric}(\gamma_s,\gamma_s) &\geq \tau(n-1)+\tau\left(n-1-\frac{n-2}{2\varepsilon}\right)H^2 \\ &\quad +\left(2\beta+(1-\tau)\frac{n-1}{n}\right)|\Phi|^2-\left(1+\frac{(n-2)\tau\varepsilon}{2}\right)\sum_{j=1}^{n}\Phi_{1j}^2 \\ &\quad -\beta(n-2)(\ln u)_{ss}+\beta\{(\ln u)_s\}^2. \end{aligned}$$

Denotando

$$I=\left(2\beta+(1-\tau)\frac{n-1}{n}\right)|\Phi|^2-\left(1+\frac{(n-2)\tau\varepsilon}{2}\right)\sum_{j=1}^{n}\Phi_{1j}^2,$$

temos novamente por (4.12) que

$$\begin{aligned} I &\geq \frac{2n\beta}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\Phi_{1j}^2+(1-\tau)\sum_{j=1}^{n}\Phi_{1j}^2-\sum_{j=1}^{n}\Phi_{1j}^2-\frac{(n-2)\tau\varepsilon}{2}\sum_{j=1}^{n}\Phi_{1j}^2 \\ &= \left(\frac{2n\beta}{n-1}-\tau-\frac{(n-2)\tau\varepsilon}{2}\right)\sum_{j=1}^{n}\Phi_{1j}^2. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \tilde{Ric}(\gamma_s,\gamma_s) &\geq \tau(n-1)+\tau\left(n-1-\frac{n-2}{2\varepsilon}\right)H^2 \\ &\quad +\left(\frac{2n\beta}{n-1}-\tau-\frac{(n-2)\tau\varepsilon}{2}\right)\sum_{j=1}^{n}\Phi_{1j}^2 \qquad (4.13) \\ &\quad -\beta(n-2)(\ln u)_{ss}+\beta\{(\ln u)_s\}^2, \end{aligned}$$

para $\tau \in (0,1]$ e $\varepsilon > 0$. Escolhemos τ e ε de forma que

$$\begin{cases} n-1-\frac{n-2}{2\varepsilon} \geq 0, \\ \frac{2n\beta}{n-1} - \tau - \frac{(n-2)\tau\varepsilon}{2} \geq 0. \end{cases}$$

Neste sentido, podemos considerar

$$\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 2, \\ \frac{n-2}{2(n-1)} & \text{se } n \geq 3, \end{cases} \quad \text{e } \tau \text{ suficientemente pequeno.}$$

Para tal escolha, definindo $c_0 = \tau(n-1) > 0$, a desigualdade (4.13) se torna

$$\tilde{Ric}(\gamma_s, \gamma_s) \geq c_0 - \beta(n-2)(\ln u)_{ss} + \beta\{(\ln u)_s\}^2. \tag{4.14}$$

Substituindo (4.14) em (4.10), obtemos

$$\begin{aligned} (n-1)\int_0^a (\varphi_s)^2 u^{-\beta} ds &\geq \int_0^a \varphi^2 u^{-\beta} \tilde{Ric}(\gamma_s, \gamma_s) ds \\ &\geq \int_0^a \varphi^2 u^{-\beta}(c_0 - \beta(n-2)(\ln u)_{ss} + \beta\{(\ln u)_s\}^2) ds. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Note que

$$-\beta\int_0^a \varphi^2 (\ln u)_{ss} u^{-\beta} ds = -\int_0^a \varphi^2 (\ln u^\beta)_{ss} u^{-\beta} ds,$$

integrando por partes,

$$\begin{aligned} -\int_0^a \varphi^2 (\ln u^\beta)_{ss} u^{-\beta} ds &= -\varphi^2 u^{-\beta}(\ln u^\beta)_s \,|_0^a + \int_0^a (\ln u^\beta)_s (2\varphi\varphi_s u^{-\beta} - \beta\varphi^2 u^{-\beta-1} u_s) ds \\ &= 2\beta\int_0^a \varphi\varphi_s (\ln u)_s u^{-\beta} ds - \beta^2 \int_0^a \varphi^2 u^{-\beta}\frac{u_s}{u}(\ln u)_s ds \\ &= 2\beta\int_0^a \varphi\varphi_s (\ln u)_s u^{-\beta} ds - \beta^2 \int_0^a \varphi^2 \{(\ln u)_s\}^2 u^{-\beta} ds, \end{aligned}$$

Substituindo tais informações em (4.15), resulta que

$$\begin{aligned}(n-1)\int_0^a(\varphi_s)^2u^{-\beta}ds &\geq c_0\int_0^a\varphi^2u^{-\beta}ds+2\beta(n-2)\int_0^a\varphi\varphi_s(\ln u)_su^{-\beta}ds\\&\quad-\beta^2(n-2)\int_0^a\varphi^2\{(\ln u)_s\}^2u^{-\beta}ds\\&\quad+\beta\int_0^a\varphi^2u^{-\beta}\{(\ln u)_s\}^2ds\\&\geq c_0\int_0^a\varphi^2u^{-\beta}ds+2\beta(n-2)\int_0^a\varphi\varphi_s\frac{u_s}{u}u^{-\beta}ds\\&\quad+\beta(1-\beta(n-2))\int_0^a\varphi^2\frac{(u_s)^2}{u^2}u^{-\beta}ds,\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}(n-1)\int_0^a(\varphi_s)^2u^{-\beta}ds &\geq c_0\int_0^a\varphi^2u^{-\beta}ds+2\beta(n-2)\int_0^a\varphi\varphi_su^{-\beta-1}u_sds\\&\quad+\beta(1-\beta(n-2))\int_0^a\varphi^2u^{-\beta-2}(u_s)^2ds.\end{aligned}\tag{4.16}$$

Seguimos as ideias do Lema 3.2 para tratar a integral (4.16). Defina

$$\varphi=u^\beta\psi,\quad \text{com}\quad \psi\in C_0^2([0,a]).\tag{4.17}$$

Observamos que,

$$\begin{aligned}\varphi^2u^{-\beta}&=u^\beta\psi^2,\\\varphi_s&=\beta\psi u^{\beta-1}u_s+u^\beta\psi_s,\\(\varphi_s)^2u^{-\beta}&=\beta^2\psi^2u^{\beta-2}(u_s)^2+u^\beta(\psi_s)^2+2\beta\psi\psi_su^{\beta-1}u_s,\\\varphi\varphi_s&=\beta\psi^2u^{2\beta-1}u_s+\psi\psi_su^{2\beta}.\end{aligned}$$

Então (4.16), torna-se (isolando o termo $(\psi_s)^2u^\beta$ no lado esquerdo da desigualdade),

$$\begin{aligned}
(n-1)\int_0^a(\psi_s)^2u^\beta ds \ &\geq \ -\beta^2(n-1)\int_0^a\psi^2u^{\beta-2}(u_s)^2ds-2\beta(n-1)\int_0^a\psi\psi_su^{\beta-1}u_sds\\
&\quad +c_0\int_0^a\psi^2u^\beta ds+2\beta^2(n-2)\int_0^a\psi^2u^{\beta-2}(u_s)^2ds\\
&\quad +2\beta(n-2)\int_0^a\psi\psi_su^{\beta-1}u_sds\\
&\quad +\beta(1-\beta(n-2))\int_0^a\psi^2u^{\beta-2}(u_s)^2ds\\
&= \ c_0\int_0^a\psi^2u^\beta ds+(2\beta(n-2)-2\beta(n-1))\int_0^a\psi\psi_su^{\beta-1}u_sds\\
&\quad +(2\beta^2(n-2)+\beta(1-\beta(n-2))-\beta^2(n-1))\int_0^a\psi^2u^{\beta-2}(u_s)^2ds.
\end{aligned}$$

Observando que

$$\begin{aligned}
2\beta^2(n-2)+\beta(1-\beta(n-2))-\beta^2(n-1) &= \beta^2(n-2)+\beta-n\beta^2+\beta^2\\
&= \beta-\beta^2\\
&= \beta(1-\beta),
\end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned}
(n-1)\int_0^a(\psi_s)^2u^\beta ds \ &\geq \ c_0\int_0^a\psi^2u^\beta ds+\beta(1-\beta)\int_0^a\psi^2u^{\beta-2}(u_s)^2ds \qquad (4.18)\\
&\quad -2\beta\int_0^a\psi\psi_su^{\beta-1}u_sds.
\end{aligned}$$

Definindo

$$J=\beta\int_0^a u^{\beta-1}u_s\psi\psi_sds,$$

e desde que

$$(\psi^2)_s=2\psi\psi_s \quad \text{e} \quad (u^\beta)_s=\beta u^{\beta-1}u_s,$$

tem-se,

$$J=\frac{1}{2}\int_0^a(u^\beta)_s(\psi^2)_sds.$$

Integrando por partes, vemos que

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2}(\psi^2)_s u^\beta|_0^a - \frac{1}{2}\int_0^a u^\beta(\psi^2)_{ss}ds \\ &\quad -\frac{1}{2}\int_0^a u^\beta(2\psi\psi_s)_s ds \\ &= -\int_0^a u^\beta(\psi_s)^2 ds - \int_0^a u^\beta \psi\psi_{ss} ds. \end{aligned}$$

Note que, para todo $t > 1$,

$$\begin{aligned} 2J &= 2tJ + 2(1-t)J \\ &= -2t\int_0^a u^\beta(\psi_s)^2 ds - 2t\int_0^a u^\beta\psi\psi_{ss}ds + 2\beta(1-t)\int_0^a u^{\beta-1}u_s\psi\psi_s ds. \end{aligned}$$

Fazendo

$$a = \psi u_s u^{\frac{\beta-2}{2}} \quad \text{e} \quad b = \psi_s u^{\frac{\beta}{2}}$$

e usando a desigualdade de Young (A.2), temos que, para todo $\varepsilon > 0$,

$$\psi u_s u^{\frac{\beta-2}{2}}\psi_s u^{\frac{\beta}{2}} = u^{\beta-1}u_s\psi\psi_s \le \frac{\psi^2(u_s)^2u^{\beta-2}\varepsilon}{2} + \frac{(\psi_s)^2u^\beta}{2\varepsilon},$$

o que implica

$$\begin{aligned} 2J &\le -2t\int_0^a u^\beta(\psi_s)^2 ds - 2t\int_0^a \psi\psi_{ss}u^\beta ds \\ &\quad +\beta(t-1)\varepsilon\int_0^a u^{\beta-2}(u_s)^2\psi^2 ds + \frac{\beta(t-1)}{\varepsilon}\int_0^a u^\beta(\psi_s)^2 ds. \end{aligned}$$

Tomando

$$\varepsilon = \frac{1-\beta}{t-1} > 0,$$

obtemos que

$$\begin{aligned} 2J &\le -2t\int_0^a u^\beta(\psi_s)^2 ds - 2t\int_0^a \psi\psi_{ss}u^\beta ds \\ &\quad +\beta(1-\beta)\int_0^a u^{\beta-2}(u_s)^2\psi^2 ds + \frac{\beta(t-1)^2}{1-\beta}\int_0^a u^\beta(\psi_s)^2 ds \\ &= -2t\int_0^a \psi\psi_{ss}u^\beta ds + \beta(1-\beta)\int_0^a u^{\beta-2}(u_s)^2\psi^2 ds \\ &\quad + \left(\frac{\beta(t-1)^2}{1-\beta} - 2t\right)\int_0^a u^\beta(\psi_s)^2 ds, \end{aligned}$$

isto é

$$\begin{aligned} 2J \ \leq \ & -2t\int_0^a u^\beta \psi\psi_{ss}ds + \beta(1-\beta)\int_0^a \psi^2 u^{\beta-2}(u_s)^2 ds \\ & + \frac{\beta(t-1)^2 - 2t(1-\beta)}{1-\beta}\int_0^a u^\beta(\psi_s)^2 ds. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Inserindo (4.19) em (4.18), chegamos a

$$\begin{aligned} (n-1)\int_0^a (\psi_s)^2 u^\beta ds \ \geq \ & c_0\int_0^a \psi^2 u^\beta ds + \beta(1-\beta)\int_0^a u^{\beta-2}(u_s)^2\psi^2 ds \\ & +2t\int_0^a u^\beta\psi\psi_{ss}ds - \beta(1-\beta)\int_0^a \psi^2 u^{\beta-2}(u_s)^2 ds \\ & -\left(\frac{\beta(t-1)^2 - 2t(1-\beta)}{1-\beta}\right)\int_0^a u^\beta(\psi_s)^2 ds \\ = \ & c_0\int_0^a \psi^2 u^\beta ds + 2t\int_0^a u^\beta\psi\psi_{ss}ds \\ & -\left(\frac{\beta(t-1)^2}{1-\beta} - 2t\right)\int_0^a u^\beta(\psi_s)^2 ds, \end{aligned}$$

ou seja

$$c_0\int_0^a \psi^2 u^\beta ds - \left(\frac{\beta(t-1)^2}{1-\beta} - 2t + (n-1)\right)\int_0^a (\psi_s)^2 u^\beta ds + 2t\int_0^a u^\beta\psi\psi_{ss}ds \leq 0.$$

Pondo

$$P(n,t,\beta) = \frac{\beta(t-1)^2}{1-\beta} - 2t + (n-1) = \frac{\beta(t-1)^2}{1-\beta} - 2(t-1) + (n-3),$$

obtemos que

$$\int_0^a u^\beta\{c_0\psi^2 - P(n,t,\beta)(\psi_s)^2 + 2t\psi\psi_{ss}\}ds \leq 0, \tag{4.20}$$

onde $c_0 = \tau(n-1) > 0$ com $\tau \in (0,1]$, $t > 1$ e $\psi \in C_0^2([0,a])$. Com a nossa escolha de β, obtemos

$$P(n,t_0,\beta) \leq 0, \quad \text{onde } t_0 = \begin{cases} 1 + 2\frac{1-\beta}{\beta} & \text{se } n \in \{2,3\}, \\ n-2 & \text{se } n \geq 4. \end{cases}$$

De fato, se $n \in \{2,3\}$,

$$P(n,t_0,\beta) = 4(1-\beta)^2 - \frac{4(1-\beta)}{\beta} + (n-3) \leq 0, \ \text{ pois } \beta \in (0,1),$$

se $n \geq 4$ então $\beta = \frac{1}{n-2}$, e segue que

$$P(n, t_0, \beta) = \frac{\beta(n-3)^2}{1-\beta} - (n-3) = \frac{(n-3)^2}{n-3} - (n-3) = 0,$$

observe que $t_0 > 1$. Então (4.20) se torna

$$\int_0^a u^\beta \{c_0\psi^2 + 2t_0\psi\psi_{ss}\}ds \leq 0.$$

Portanto,

$$c_0 \int_0^a u^\beta \psi^2 ds \leq -2t_0 \int_0^a u^\beta \psi\psi_{ss} ds,$$

para $t_0 > 1$, $c_0 > 0$ e $\psi \in C_0^2([0, a])$. Isto prova a afirmação 1.

Para provar a afirmação 2, seguimos a mesma ideia do Teorema 3.6.

Afirmação 2. A variedade M^n é compacta.

Prova da afirmação 2. Suponha por contradição que M^n não é compacta. Seguindo o Lema 2.2 de [26], partindo de uma origem fixa podemos construir uma geodésica minimizante $\tilde{\gamma} : [0, \infty) \to M^n$ (curva divergente) na métrica conforme $\tilde{g} = u^{2\beta} g$ que tem comprimento infinito na métrica g.

Escolha a menor curva divergente $\gamma : [0, a] \subset [0, \infty) \to M^n$ em $(M^n, \tilde{g})$ partindo da mesma origem fixa. Como (M, g) é completa e a curva é divergente, reparametrizando γ pelo comprimento de arco s na métrica g, verifica-se que γ é definida para $s \in [0, \infty)$. Sendo γ uma geodésica minimizante na métrica conforme $\tilde{g}$, sua segunda variação do comprimento de arco é não negativa em $\tilde{g}$. Portanto, pela afirmação 1, existem constantes $t_0 > 1$, $c_0 > 0$ dependendo de n, β tal que

$$c_0 \int_0^a u^\beta \psi^2 ds \leq -2t_0 \int_0^a u^\beta \psi\psi_{ss} ds, \tag{4.21}$$

para todo $a > 0$ e $\psi \in C_0^2([0, a])$. Escolhendo como função de teste

$$\psi(s) = \sin\left(\frac{\pi s}{a}\right),$$

note que $\psi(0) = \psi(a) = 0$, isto é, $\psi \in C_0^2([0, a])$ e

$$\psi_s = \frac{\pi}{a}\cos\left(\frac{\pi s}{a}\right) \quad \text{e} \quad \psi_{ss} = -\frac{\pi^2}{a^2}\sin\left(\frac{\pi s}{a}\right).$$

Em (4.21), temos

$$c_0 \int_0^a u^\beta \sin^2\left(\frac{\pi s}{a}\right) ds - \frac{2t_0\pi^2}{a^2} \int_0^a u^\beta \sin^2\left(\frac{\pi s}{a}\right) ds \leq 0,$$

ou seja,

$$\left(c_0 - \frac{2t_0\pi^2}{a^2}\right) \int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi s}{a}\right) u^\beta(\gamma(s)) ds \leq 0,$$

isto implica que,

$$c_0 - \frac{2t_0\pi^2}{a^2} \leq 0 \Rightarrow a \leq \pi\sqrt{\frac{2t_0}{c_0}}.$$

Concluimos que o comprimento da geodésica γ é finito na métrica g, e isso dá uma contradição. Portanto M^n deve ser compacta e isto completa a prova da afirmação 2.

Afirmação 3. A variedade Riemanniana (M^n, g) é uma esfera totalmente umbílica.

Prova da afirmação 3. Como estamos considerando M^n uma hipersuperfície imersa sem fronteira, sendo M^n compacta, pela Proposição 1.32, temos

$$\int_M \Delta|\Phi|^2 dM = 0.$$

Como $\Delta|\Phi|^2 \geq 0$ sobre M^n, concluímos então que $\Delta|\Phi|^2 \equiv 0$ sobre M^n. Agora, novamente pela Proposição 1.32, temos que

$$0 = \int_M \Delta|\Phi|^4 dM = \int_M (2|\Phi|^2\Delta|\Phi|^2 + 2|\nabla|\Phi|^2|^2) dM = \int_M |\nabla|\Phi|^2|^2 dM,$$

donde segue que $\nabla|\Phi|^2 \equiv 0$ sobre M^n. A conexidade de M^n garante que $|\Phi|^2$ é constante. Por (4.4)

$$\Delta|\Phi|^2 \geq -2|\Phi|^2 P_{(n,H)}(|\Phi|) + 2|\nabla\Phi|^2,$$

obtemos que

$$(b^2 - |\Phi|^2)|\Phi|^2 \leq 0.$$

A desigualdade $u = b^2 - |\Phi|^2 > 0$ em M^n implica que $|\Phi|^2 < b^2$. Portanto $|\Phi|^2 \equiv 0$ e M^n é uma esfera totalmente umbílica.

Isto completa a prova do teorema.

□

O caso 2 do Teorema anterior, onde a partir de uma mudança conforme se prova à compacidade, tem um interesse particular para nosso trabalho. Neste sentido,

Observação 4.1. salientamos que a Afirmação 1 que ao fim leva ao resultado final, pode ser dividida nas duas etapas seguintes.

(i) A estimativa algébrica

$$Ric + 2\beta|\Phi|^2 g \geq c_0 g \qquad \text{para algum } c_0 \in \mathbb{R}^+,$$

que em nosso cenário vale para cada escolha de $\beta > 0$, que permite deduzir a desigualdade (4.14) de (4.11).

(ii) A desigualdade

$$c_0 \int_0^a u^\beta \psi^2 ds \leq -2t_0 \int_0^a u^\beta \psi \psi_{ss} ds \quad \text{para toda } \psi \in C_0^2([0,a]), \tag{4.22}$$

ao longo de uma geodésica minimizante na métrica $\tilde{g}$. Isso foi provado quando β é definido como em (4.8).

4.2 Subvariedades Mínimas Completas de uma Esfera com Segunda Forma Fundamental de Comprimento Constante

A seguir, abordamos mais um resultado de pinching, mais agora para subvariedades de codimensão alta $f : M^n \to \mathbb{S}^{n+p}$. No caso mínimo, podemos obter uma extensão dos Teoremas 4.1, 4.2 e 4.3 onde é M^n completa. Para fazer tal extensão, inicialmente precisamos de algumas definições preliminares.

Seja $f : M^n \to \mathbb{S}^{n+p}$ uma subvariedade completa. Considere um referencial ortonormal local $\{e_1, \ldots, e_{n+p}\}$, com $\{e_1, \ldots, e_n\}$ tangente a M^n, e co-referencial dual $\{\theta^1, \ldots, \theta^{n+p}\}$. Usando a convenção de índice

$$i, j, \ldots \in \{1, \ldots, n\}, \qquad \alpha, \beta, \ldots \in \{n+1, \ldots, n+p\},$$

A se escreve em componentes como $A = h^\alpha_{ij} \theta^i \otimes \theta^j \otimes e_\alpha$. O vetor de curvatura média é assim definido

$$\mathbf{H} = \frac{1}{n} h^\alpha_{kk} e_\alpha,$$

e a segunda forma fundamental sem traços como

$$\Phi = A - \mathbf{H}g = \left(h_{ij}^{\alpha} - \frac{1}{n} h_{kk}^{\alpha} \delta_{ij} \right) \theta^i \otimes \theta^j \otimes e_{\alpha} = \Phi_{ij}^{\alpha} \theta^i \otimes \theta^j \otimes e_{\alpha}.$$

Denote por H a norma de $\mathbf{H}$. Observe que, sob a suposição de que M^n tem curvatura média paralela, ou seja, $\nabla^{\perp}\mathbf{H} = 0$, H acaba sendo constante. Se η for um campo vetorial normal, denotamos por Φ_{η} a forma bilinear

$$\Phi_{\eta} = g(\Phi, \eta) = \Phi_{ij}^{\alpha} \eta^{\alpha} \theta^i \otimes \theta^j,$$

onde g é a métrica induzida em M^n. Uma subvariedade M^n será chamada pseudo-umbilical se $\mathbf{H} \neq 0$ e $\Phi_{\mathbf{H}} = 0$, isto é, se o vetor de curvatura média estiver em uma direção umbilical. Apresentaremos o seguinte lema algébrico bem conhecido. Incluímos uma prova para fins de completude.

Lema 4.7. Seja $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ uma forma bilinear simétrica com valor vetorial e componentes Φ_{ij}^{α}, $1 \leq i, j \leq n$, $1 \leq \alpha \leq p$. Assuma que $\sum_{\alpha} \sum_{ii} \Phi_{ii}^{\alpha} = 0$ para cada α. Então a norma

$$|\Phi|^2 = \sum_{\alpha} \sum_{i,j=1}^{n} (\Phi_{ij}^{\alpha})^2$$

satisfaz

$$|\Phi|^2 \geq \frac{n}{n-1} \sum_{\alpha} \sum_{j=1}^{n} (\Phi_{1j}^{\alpha})^2 \geq \frac{n}{n-1} \sum_{\alpha} (\Phi_{11}^{\alpha})^2.$$

Demonstração. Como $\sum_{\alpha} \sum_{i=1}^{n} \Phi_{ii}^{\alpha} = 0$, temos que

$$-\sum_{\alpha} \Phi_{11}^{\alpha} = \sum_{\alpha} \sum_{i=2}^{n} \Phi_{ii}^{\alpha}.$$

Note que, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\left(\sum_{\alpha} \sum_{i=2}^{n} \Phi_{ii}^{\alpha} \right)^2 \leq \left(\sum_{\alpha} \sum_{i=2}^{n} 1^2 \right) \left(\sum_{\alpha} \sum_{i=2}^{n} (\Phi_{ii}^{\alpha})^2 \right) \leq (n-1) \sum_{\alpha} \sum_{i=2}^{n} (\Phi_{ii}^{\alpha})^2.$$

Como

$$\begin{aligned}
|\Phi|^2 = \sum_\alpha \sum_{i,j=1}^n (\Phi_{ij}^\alpha)^2 &= \sum_\alpha \sum_{i=1}^n (\Phi_{ii}^\alpha)^2 + \sum_\alpha \sum_{i\neq j=1}^n (\Phi_{ij}^\alpha)^2 \\
&= \sum_\alpha \sum_{i=1}^n (\Phi_{ii}^\alpha)^2 + \sum_\alpha \sum_{j=2}^n (\Phi_{1j}^\alpha)^2 + \sum_\alpha \sum_{j=2}^n (\Phi_{j1}^\alpha)^2 + \sum_\alpha \sum_{i\neq j=2}^n (\Phi_{ij}^\alpha)^2 \\
&= \sum_\alpha \sum_{i=1}^n (\Phi_{ii}^\alpha)^2 + 2\sum_\alpha \sum_{j=2}^n (\Phi_{1j}^\alpha)^2 + \sum_\alpha \sum_{i\neq j=2}^n (\Phi_{ij}^\alpha)^2 \\
&\geq \sum_\alpha \sum_{i=1}^n (\Phi_{ii}^\alpha)^2 + 2\sum_\alpha \sum_{j=2}^n (\Phi_{1j}^\alpha)^2.
\end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$\begin{aligned}
|\Phi|^2 &\geq \sum_\alpha (\Phi_{11}^\alpha)^2 + \sum_\alpha \sum_{i=2}^n (\Phi_{ii}^\alpha)^2 + 2\sum_\alpha \sum_{j=2}^n (\Phi_{1j}^\alpha)^2 \\
&\geq \sum_\alpha (\Phi_{11}^\alpha)^2 + \frac{1}{n-1}\left(\sum_\alpha \sum_{i=2}^n \Phi_{ii}^\alpha\right)^2 + 2\sum_\alpha \sum_{j=2}^n (\Phi_{1j}^\alpha)^2 \\
&= \sum_\alpha (\Phi_{11}^\alpha)^2 + \frac{1}{n-1}\left(-\sum_\alpha \Phi_{11}^\alpha\right)^2 + 2\sum_\alpha \sum_{j=2}^n (\Phi_{1j}^\alpha)^2 \\
&= \frac{n}{n-1}\sum_\alpha (\Phi_{11}^\alpha)^2 + 2\sum_\alpha \sum_{j=2}^n (\Phi_{1j}^\alpha)^2 \\
&\geq \frac{n}{n-1}\sum_\alpha \sum_{j=1}^n (\Phi_{1j}^\alpha)^2 \\
&\geq \frac{n}{n-1}\sum_\alpha (\Phi_{11}^\alpha)^2.
\end{aligned}$$

□

Estamos prontos para provar a extensão dos resultados de Simons, Lawson e Chern, do Carmo & Kobayashi.

Teorema 4.8. *Seja $p \geq 1$ e seja $f : M^n \to \mathbb{S}^{n+p}$ uma imersão mínima completa. Se a norma da segunda forma fundamental A de M^n satisfaz*

$$|A|^2 \leq \frac{np}{2p-1}, \tag{4.23}$$

então $|A| \equiv 0$ e M^n é uma esfera totalmente geodésica, ou

$$|A|^2 \equiv \frac{np}{2p-1}.$$

Neste último caso, ocorre uma das seguintes situações:

(i) $p = 1$ *e* M^n *cobre um toro de Clifford mínimo* $T^{n,k}$ *para algum* $k \in \{1, \ldots, n-1\}$*;*

(ii) Se $n = p = 2$ *então* M^2 *cobre uma superfície de Veronese em* $\mathbb{S}^4$*.*

Demonstração. Como em [7], podemos estimar

$$\frac{1}{2}\Delta|A|^2 \geq \sum_{\alpha} |\nabla A_{e_\alpha}|^2 - |A|^2 \left\{ \left(2 - \frac{1}{p}\right) |A|^2 - n \right\}.$$

Assim, a função não negativa

$$u = \frac{np}{2p-1} - |A|^2 \quad \text{satisfaz} \quad \Delta u \leq -2\frac{2p-1}{p}|A|^2 u \leq -2|A|^2 u \quad \text{em } M^n.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\Delta u = \Delta\left(\frac{np}{2p-1} - |A|^2\right) &= -\Delta|A|^2 \\
&\leq 2|A|^2 \left\{ \left(2 - \frac{1}{p}\right) |A|^2 - n \right\} - 2\sum_{\alpha} |\nabla A_{e_\alpha}|^2 \\
&\leq 2|A|^2 \left\{ \left(\frac{2p-1}{p}\right) |A|^2 - n \right\} \\
&= -2|A|^2 \left\{ n - \left(\frac{2p-1}{p}\right) |A|^2 \right\} \\
&= -2|A|^2 \left(\frac{2p-1}{p}\right) \left\{ \frac{np}{2p-1} - |A|^2 \right\} \\
&= -2\frac{2p-1}{p}|A|^2 u,
\end{aligned}$$

como para $p \geq 1$, $\frac{2p-1}{p} \geq 1$, temos

$$\Delta u \leq -2\frac{2p-1}{p}|A|^2 u \leq -2|A|^2 u \quad \text{em } M^n.$$

Observe também que, pelo cálculo feito acima

$$\Delta|A|^2 \geq 2|A|^2 \left(\frac{2p-1}{p}\right) \left\{ \frac{np}{2p-1} - |A|^2 \right\} \geq 0.$$

Se $u(x_0) = 0$ para algum $x_0 \in M^n$, pelo princípio do máximo forte $u \equiv 0$, de onde

$$|A|^2 \equiv \frac{np}{2p-1},$$

e a afirmação decorre de [7]. Embora tal resultado seja local, os toros de Clifford e a superfície de Veronese são componentes conexas do conjunto zero de alguns polinômios restritos à esfera ambiente. Portanto, o resultado global decorre do mesmo argumento de analiticidade usado na seção anterior.

Se em vez disso $u > 0$ em M^n, então definimos $\tilde{g} = u^{2\beta} g$ para alguma constante β. Para mostrar que M^n é compacto, relembrando a Observação 4.1, é suficiente mostrar a seguinte afirmação.

Afirmação 4. Para cada $\beta > 0$, tem-se que

$$Ric + 2\beta |A|^2 g \geq c_0 g$$

para algum $c_0 = c_0(\beta, n, p) > 0$.

Prova da afirmação 4. Seja X um vetor unitário, e escolha um referencial de modo que $e_1 = X$. Sendo $\overline{R}$ o tensor de curvatura de $\mathbb{S}^{n+p}$, pela equação de Gauss, temos

$$R_{ik} = \overline{R}_{ik} + tr(A) h_{ik}^{\alpha} - h_{ij}^{\alpha} h_{jk}^{\alpha},$$

pela minimalidade e usando o fato de que $\overline{R}_{ik} = (n-1)\delta_{ik}$, segue que

$$R_{ik} = (n-1)\delta_{ik} - h_{ij}^{\alpha} h_{jk}^{\alpha}.$$

Tomando $i = k = 1$, obtemos

$$R_{11} = n - 1 - \sum_{\alpha} \sum_{j=1}^{n} h_{1j}^{\alpha} h_{j1}^{\alpha} = n - 1 - \sum_{\alpha} \sum_{j=1}^{n} (h_{1j}^{\alpha})^2.$$

O Lema 4.7, implica que

$$-\sum_{\alpha} \sum_{j=1}^{n} (h_{1j}^{\alpha})^2 \geq -\frac{n-1}{n} |A|^2,$$

com isso,

$$R_{11} \geq n - 1 - \frac{n-1}{n} |A|^2. \tag{4.24}$$

Por (4.23), temos que

$$|A|^2 \leq \frac{np}{2p-1} \Rightarrow \frac{2p-1}{np} |A|^2 \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{n} \left(2 - \frac{1}{p}\right) |A|^2 \leq 1,$$

sendo $n \geq 2$, segue que $n-1 \geq 1$, com isso

$$n - 1 \geq \frac{n-1}{n}\left(2 - \frac{1}{p}\right)|A|^2.$$

Agora, note que

$$n - 1 = \tau(n-1) + (1-\tau)(n-1).$$

Tomando $\tau \in (0,1]$ e substituindo tais informações em (4.24), obtemos

$$\begin{aligned} R_{11} &\geq \tau(n-1) + (1-\tau)(n-1) - \frac{n-1}{n}|A|^2 \\ &\geq \tau(n-1) + (1-\tau)\frac{n-1}{n}\left(2 - \frac{1}{p}\right)|A|^2 - \frac{n-1}{n}|A|^2, \end{aligned}$$

o que dá

$$\begin{aligned} R_{11} + 2\beta|A|^2 &\geq \tau(n-1) + (1-\tau)\frac{n-1}{n}\left(2 - \frac{1}{p}\right)|A|^2 - \frac{n-1}{n}|A|^2 + 2\beta|A|^2 \\ &= \tau(n-1) + 2\beta|A|^2 + \frac{n-1}{n}\left[(1-\tau)\left(2 - \frac{1}{p}\right)|A|^2 - |A|^2\right] \\ &= \tau(n-1) + \left\{2\beta + \frac{n-1}{n}\left[(1-\tau)\left(2 - \frac{1}{p}\right) - 1\right]\right\}|A|^2. \end{aligned}$$

Fazendo $\tau > 0$ pequeno o suficiente de forma que o termo entre chaves seja positivo, dependendo de β, n e p, temos

$$R_{11} + 2\beta|A|^2 \geq \tau(n-1),$$

ou seja,

$$Ric(X,X) + 2\beta|A|^2 g(X,X) \geq \tau(n-1)g(X,X), \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M), \text{ tal que } |X| = 1.$$

Portanto,

$$Ric + 2\beta|A|^2 g \geq c_0 g$$

para algum $c_0 = c_0(\beta, n, p) > 0$. Isto prova a Afirmação 4. e, portanto, a compacidade de M.

Como estamos considerando M^n uma subvariedade imersa sem fronteira, sendo M^n compacta, temos que

$$\int_M \Delta|A|^2 dM = 0$$

Sendo $\Delta|A|^2 \geq 0$ sobre M^n, concluímos que $\Delta|A|^2 \equiv 0$ sobre M^n. Por

$$-\Delta|A|^2 = \Delta u \leq -2|A|^2 u,$$

obtemos que

$$|A|^2 u \leq 0.$$

Como $u > 0$, temos portanto, $|A| \equiv 0$ e M^n é uma esfera totalmente geodésica.

Isto completa a prova do teorema. □

4.3 Subvariedades Completas com Vetor de Curvatura Média Paralelo em Esferas

Em seguida, consideramos subvariedades com codimensão $p \geq 2$ e curvatura média paralela não nula. Em [30], Santos tratou o problema para subvariedades compactas, obtendo um teorema de pinching sob a condição de que o tensor de umbilicidade satisfizesse

$$\left(2 - \frac{1}{p-1}\right)|\Phi|^2 + \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}|\Phi_{\mathbf{H}}| - n(1+H^2) \leq 0. \tag{4.25}$$

Aparentemente, esta não é uma condição do tipo $|\Phi|^2 \leq b^2$, então a construção de um fator conforme u, não é evidente. No próximo teorema, onde uma condição mais geral é colocada é possivel chegar às conclusões desejadas, apenas na dimensão $n \leq 6$.

Teorema 4.9. *Sejam $p \geq 2$ e $f : M^n \to \mathbb{S}^{n+p}$ uma subvariedade completa e imersa de dimensão $n \leq 6$ com curvatura média paralela e diferente de zero. Suponha que a norma do tensor de umbilicidade Φ de M^n satisfaz*

$$|\Phi_{\mathbf{H}}| \leq \theta H |\Phi| \tag{4.26}$$

para alguma constante $\theta \in [0,1]$, e

$$|\Phi|^2 \leq b^2, \tag{4.27}$$

onde $b = b(n,p,H,\theta)$ é a raiz positiva do polinômio

$$P_{n,p,H,\theta}(x) = \left(2 - \frac{1}{p-1}\right)x^2 + \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}\theta H x - n(1+H^2).$$

Então ou $|\Phi| \equiv 0$ e M^n é uma esfera totalmente umbílica, ou $|\Phi| \equiv b$. Neste último *caso, ocorre uma das seguintes situações:*

(i) $\theta \in (0,1)$, $p = 2$ *e* M^n *cobre um* $(\theta H) - $*torus*

$$\mathbb{S}^{n-1}(r_1) \times \mathbb{S}^1(r_2) \subset \mathbb{S}^{n+1}_{1+(1-\theta^2)H^2} \subset \mathbb{S}^{n+2}$$

com r_1, r_2 *determinado unicamente por*

$$\frac{(n-1)r_2^2 - r_1^2}{nr_1r_2}\sqrt{1+(1-\theta^2)H^2} = \theta H, \qquad r_1^2 + r_2^2 = (1+(1-\theta^2)H^2)^{-1};$$

(ii) $\theta = 0$, $p = 2$, M^n *é pseudo-umbilical e cobre um toro mínimo de Clifford em uma hiperesfera*

$$\mathbb{S}^k\left(\sqrt{\frac{k}{n(1+H^2)}}\right) \times \mathbb{S}^{n-k}\left(\sqrt{\frac{n-k}{n(1+H^2)}}\right) \subset \mathbb{S}^{n+1}_{1+H^2} \subset \mathbb{S}^{n+2}$$

para algum $k \in \{1, \ldots, n-1\}$*;*

(iii) $\theta = 0$, $n = 2$, $p = 3$, M^2 *é pseudo-umbilical e cobre uma superfície de Veronese em uma hiperesfera* $\mathbb{S}^4_{1+H^2} \subset \mathbb{S}^5$.

Demonstração. Podemos escolher um referencial ortonormal local de tal forma que $e_{n+1} = H^{-1}\mathbf{H}$. Seguindo os cálculos em [30] (Pag. 407- 411), temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta|\Phi|^2 \;\; \geq \;\; & \sum_{\alpha} |\nabla\Phi_{e_\alpha}|^2 - |\Phi|^2\left\{\left(2 - \frac{1}{p-1}\right)|\Phi|^2 + \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}|\Phi_{\mathbf{H}}| - n(1+H^2)\right\} \\ & + \left(1 - \frac{1}{p-1}\right)|\Phi_{e_{n+1}}|(2|\Phi|^2 - |\Phi_{e_{n+1}}|^2).\end{aligned}$$

Por (4.26), temos que

$$|\Phi_{e_{n=1}}| = |\Phi_{H^{-1}\mathbf{H}}| \leq \theta|\Phi|,$$

implicando que, $|\Phi_{e_{n+1}}|^2 \leq \theta^2|\Phi|^2 \leq 2|\Phi|^2$. Então para $p \geq 2$, nós temos

$$\left(1 - \frac{1}{p-1}\right)|\Phi_{e_{n+1}}|^2(2|\Phi|^2 - |\Phi_{e_{n+1}}|^2) \geq 0,$$

com isso,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta|\Phi|^2 &\geq \sum_{\alpha}|\nabla\Phi_{e_\alpha}|^2 - |\Phi|^2\left\{\left(2-\frac{1}{p-1}\right)|\Phi|^2 + \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}|\Phi_{\mathbf{H}}| - n(1+H^2)\right\} \\
&\geq -|\Phi|^2\left\{\left(2-\frac{1}{p-1}\right)|\Phi|^2 + \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}|\Phi_{\mathbf{H}}| - n(1+H^2)\right\} \\
&= -|\Phi|^2\left\{\left(2-\frac{1}{p-1}\right)|\Phi|^2 - n(1+H^2)\right\} - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}|\Phi|^2|\Phi_{\mathbf{H}}|,
\end{aligned}$$

novamente por (4.26), temos $-|\Phi_{\mathbf{H}}| \geq -\theta H|\Phi|$, então

$$\frac{1}{2}\Delta|\Phi|^2 \geq -|\Phi|^2\left\{\left(2-\frac{1}{p-1}\right)|\Phi|^2 - n(1+H^2)\right\} - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}|\Phi|^2\theta H|\Phi|,$$

isto é,

$$\Delta|\Phi|^2 \geq -2|\Phi|^2\left\{\left(2-\frac{1}{p-1}\right)|\Phi|^2 + \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}\theta H|\Phi| - n(1+H^2)\right\}. \tag{4.28}$$

As raizes do polinômio $P_{n,p,H,\theta}(x)$, são dadas por

$$\begin{aligned}
x &= \left(-\frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}\theta H \pm \sqrt{\frac{n^2(n-2)^2}{n(n-1)}\theta^2H^2 + 4n\left(2-\frac{1}{p-1}\right)(1+H^2)}\right)\frac{1}{2}\left(2-\frac{1}{p-1}\right)^{-1} \\
&= \left(\pm\sqrt{\frac{n(n-2)^2}{(n-1)}\theta^2H^2 + 4n\left(\frac{2p-3}{p-1}\right)(1+H^2)} - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}\theta H\right)\frac{1}{2}\left(\frac{2p-3}{p-1}\right)^{-1} \\
&= \frac{p-1}{2p-3}\left(\pm\sqrt{\frac{n(n-2)^2}{4(n-1)}\theta^2H^2 + \frac{(2p-3)n}{p-1}(1+H^2)} - \frac{n(n-2)}{2\sqrt{n(n-1)}}\theta H\right).
\end{aligned}$$

Seja b a raiz positiva de $P_{n,p,H,\theta}$, ou seja,

$$b = \frac{p-1}{2p-3}\left(\sqrt{\frac{n(n-2)^2}{4(n-1)}\theta^2H^2 + \frac{(2p-3)n}{p-1}(1+H^2)} - \frac{n(n-2)}{2\sqrt{n(n-1)}}\theta H\right).$$

Raciocinando como em (4.6), podemos deduzir que, para $x \in [0,b]$,

$$P_{n,p,H,\theta}(x) \leq x^2 - b^2,$$

de onde (4.28) pode ser escrita na forma

$$\Delta|\Phi|^2 \geq -2|\Phi|^2P_{n,p,H,\theta}(|\Phi|) \geq -2|\Phi|^2(|\Phi|^2 - b^2).$$

Como $|\Phi|^2 \leq b^2$, segue que $|\Phi|^2 - b^2 \leq 0$, então para $p \geq 2$, temos

$$(|\Phi|^2 - b^2)\left(2 - \frac{1}{p-1}\right) \leq |\Phi|^2 - b^2,$$

com isso,

$$\Delta|\Phi|^2 \geq -2|\Phi|^2(|\Phi|^2 - b^2) \geq -2|\Phi|^2\left(2 - \frac{1}{p-1}\right)(|\Phi|^2 - b^2),$$

isto é,

$$\Delta|\Phi|^2 \geq 2\left(2 - \frac{1}{p-1}\right)|\Phi|^2(b^2 - |\Phi|^2) \geq 0. \tag{4.29}$$

Como nas seções anteriores, vamos definir a função $u = b^2 - |\Phi|^2$ e observar que ela satisfaz

$$u \geq 0 \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned}\Delta u = -\Delta|\Phi|^2 \;&\leq\; -2\left(2 - \frac{1}{p-1}\right)|\Phi|^2(b^2 - |\Phi|^2)\\ &\leq\; -2|\Phi|^2(b^2 - |\Phi|^2),\end{aligned}$$

ou seja,

$$u \geq 0 \qquad \text{e} \qquad \Delta u \leq -2|\Phi|^2 u \quad \text{em } M^n.$$

Se $u(x_0) = 0$ para algum $x_0 \in M^n$, pelo princípio do máximo forte, $u \equiv 0$, de onde $|\Phi|^2 \equiv b^2$. Isso implica que todas as desigualdades envolvidas na obtenção de (4.29) são na verdade igualdades neste caso. Em particular,

$$|\Phi_{e_{n+1}}| = |\Phi_{H^{-1}\mathbf{H}}| = \theta|\Phi|.$$

Além disso, por (4.28) e (4.29), temos

$$\Delta|\Phi|^2 = -2|\Phi|^2\left\{\left(2 - \frac{1}{p-1}\right)|\Phi|^2 + \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}\theta H|\Phi| - n(1+H^2)\right\} = 0,$$

isto é,

$$\left(2 - \frac{1}{p-1}\right)|\Phi|^2 = n(1+H^2) - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H|\Phi_{e_{n+1}}|.$$

Temos também que,

$$\left(1 - \frac{1}{p-1}\right)|\Phi_{e_{n+1}}|^2(2|\Phi|^2 - |\Phi_{e_{n+1}}|^2) = 0,$$

o que implica em $|\Phi_{e_{n+1}}| \equiv 0$ (equivalentemente, $\theta = 0$) ou

$$1 - \frac{1}{p-1} = 0 \Rightarrow p = 2.$$

Primeiro vamos considerar o caso $|\Phi_{e_{n+1}}| \equiv 0$ ($\theta = 0$). Neste caso, M^n é pseudo-umbilical e (4.27) reduz-se a

$$|\Phi|^2 \equiv b^2 = \left(\frac{p-1}{2p-3}\right)^2 \frac{(2p-3)}{p-1} n(1+H^2) = \frac{p-1}{2p-3} n(1+H^2) = \frac{n(1+H^2)}{\frac{2p-3}{p-1}},$$

isto é,

$$|\Phi|^2 \equiv \frac{n(1+H^2)}{2 - \frac{1}{p-1}}.$$

A afirmação agora decorre neste caso de [30] (Proposition 3.1 (ii)), isto é, para $n = 2$, $p = 3$, M^2 é uma superfície de Veronese em uma hiperesfera $\mathbb{S}^4_{1+H^2} \subset \mathbb{S}^5$, caso $\theta = 0$, $p = 2$, M^n é um toro mínimo de Clifford em uma hiperesfera $\mathbb{S}^{n+1}_{1+H^2} \subset \mathbb{S}^{n+2}$.

Considere agora $p = 2$ e $\theta \in (0, 1)$. Neste caso, como e_{n+1} é paralelo, e_{n+2} também é, pois

$$0 = \nabla^\perp \mathbf{H} = \nabla^\perp(a_1 e_{n+1} + a_2 e_{n+2}) = a_1 \nabla^\perp e_{n+1} + a_2 \nabla^\perp e_{n+2} \Rightarrow \nabla^\perp e_{n+2} = 0,$$

portanto, o fibrado normal $TM^\perp$ tem curvatura zero. Como na prova de [30] (Proposition 3.3), podemos, portanto, encontrar campos vetoriais normais paralelos ξ_1 e ξ_2 tal que ξ_2 é uma direção umbilical, isto é, $\Phi_{\xi_2} = 0$.

Como temos uma direção umbilica paralela, a imersão f é uma composição da forma $f : g_1 \circ g_2$, onde $g_2 : M^n \to \mathbb{S}^{n+1}_c$ é uma imersão isométrica e $g_1 : \mathbb{S}^{n+1}_c \to \mathbb{S}^{n+2}$ é uma imersão totalmente umbilica. Temos então,

$$|\Phi|^2 = |\Phi_{\xi_1}|^2 + |\Phi_{\xi_2}|^2 = |\Phi_{\xi_1}|^2.$$

Além disso, definindo $H_i = g(\mathbf{H}, \xi_i)$, temos que

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathbf{H}} = g(\Phi, \mathbf{H}) &= g(\Phi, H_1\xi_1 + H_2\xi_2) \\ &= g(\Phi, H_1\xi_1) + H_2 g(\Phi, \xi_2) \\ &= g(\Phi, H_1\xi_1) + H_2 \Phi_{\xi_2} \\ &= g(\Phi, H_1\xi_1), \end{aligned}$$

com isso e por (4.26), obtemos

$$\theta H|\Phi| = |\Phi_{\mathbf{H}}| = |g(\Phi, H_1\xi_1)| = |\Phi||H_1\xi_1| = |H_1||\Phi| \Rightarrow |H_1| = \theta H.$$

Como H é a norma de $\mathbf{H}$, temos que

$$H^2 = |\mathbf{H}|^2 = |H_1\xi_1 + H_2\xi_2|^2 = H_1^2|\xi_1|^2 + H_2^2|\xi_2|^2 = H_1^2 + H_2^2.$$

Então

$$|H_1| = \theta H \qquad \text{e} \qquad H^2 = H_1^2 + H_2^2.$$

Note que,

$$\begin{aligned} |\Phi_{\xi_1}|^2 = \left(2 - \frac{1}{p-1}\right)|\Phi|^2 &= n(1+H^2) - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H|\Phi_{e_{n+1}}| \\ &= n(1+H^2) - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}\theta H|\Phi| \\ &= n(1+H^2) - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}\theta H|\Phi_{\xi_1}|. \end{aligned}$$

Sendo ξ_2 uma direção umbilica, pela equação de Gauss aplicada a imersão isométrica totalmente umbilica $g_1 : \mathbb{S}_c^{n+1} \to \mathbb{S}^{n+2}$, temos

$$c = 1 + H_2^2,$$

com isso

$$|\Phi_{\xi_1}|^2 = n(c - H_2^2 + H^2) - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}\theta H|\Phi_{\xi_1}|,$$

pois

$$H_2^2 = H^2 - H_1^2 = H^2 - \theta^2 H^2 = (1-\theta^2)H^2.$$

Então $|\Phi_{\xi_1}|$ satisfaz

$$|\Phi_{\xi_1}|^2 + \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}\theta H|\Phi_{\xi_1}| - n(c + \theta^2 H^2) = 0.$$

Item (ii) do Teorema 1.5 em [1] pode ser aplicado: M^n é, portanto, localmente um $(\theta H) - torus$ em $\mathbb{S}^{n+1}_{1+H_2^2}$, com $H_2^2 = (1-\theta^2)H^2$.

Novamente, ressaltamos que tais resultados de rigidez são baseados em [1, 7] e, portanto, são locais. No entanto, os Toros de Clifford, os H-torus e a Superfície de Veronese são componentes conexas do conjunto zero de alguns polinômios restritos à esfera, então o resultado global segue como nas seções anteriores.

Se em vez disso $u > 0$ em M^n, mostramos que $(M^n, \tilde{g})$ com $\tilde{g} = u^{2\beta} g$ é compacto para alguma constante β adequada. Provamos a seguinte afirmação.

Afirmação 5. Para cada $\beta \geq n/8$, temos que

$$Ric + 2\beta|\Phi|^2 g \geq (n-1)g. \tag{4.30}$$

Prova da afirmação 5. Tendo fixado um vetor unitário X, escolha um referencial de modo que $e_1 = X$. Sendo $\overline{R}$ o tensor de curvatura de $\mathbb{S}^{n+p}$, pela equação de Gauss, temos

$$R_{ij} = \overline{R}_{ij} + h^{\alpha}_{kk} h^{\alpha}_{ij} - h^{\alpha}_{ik} h^{\alpha}_{kj},$$

como $\overline{R}_{ij} = (n-1)\delta_{ij}$ e $h^{\alpha}_{ij} = \Phi^{\alpha}_{ij} + \frac{1}{n} h^{\alpha}_{ll}\delta_{ij}$, obtemos

$$\begin{aligned} R_{ij} &= (n-1)\delta_{ij} + h^{\alpha}_{kk}\left(\Phi^{\alpha}_{ij} + \frac{1}{n}h^{\alpha}_{ll}\delta_{ij}\right) - \left(\Phi^{\alpha}_{ik} + \frac{1}{n}h^{\alpha}_{ll}\delta_{ik}\right)\left(\Phi^{\alpha}_{kj} + \frac{1}{n}h^{\alpha}_{ll}\delta_{kj}\right) \\ &= (n-1)\delta_{ij} + h^{\alpha}_{kk}\Phi^{\alpha}_{ij} + \frac{1}{n}h^{\alpha}_{kk}h^{\alpha}_{ll}\delta_{ij} - \Phi^{\alpha}_{ik}\Phi^{\alpha}_{kj} - \frac{1}{n}\Phi^{\alpha}_{ik}h^{\alpha}_{ll}\delta_{kj} - \frac{1}{n}\Phi^{\alpha}_{kj}h^{\alpha}_{ll}\delta_{ik} - \frac{1}{n^2}(h^{\alpha}_{ll})^2\delta_{ik}\delta_{kj} \\ &= (n-1)\delta_{ij} + h^{\alpha}_{kk}\Phi^{\alpha}_{ij} + \frac{1}{n}(h^{\alpha}_{kk})^2\delta_{ij} - \Phi^{\alpha}_{ik}\Phi^{\alpha}_{kj} - \frac{1}{n}h^{\alpha}_{kk}\Phi^{\alpha}_{ij}\delta_{ij} - \frac{1}{n}h^{\alpha}_{kk}\Phi^{\alpha}_{ij}\delta_{ij} - \frac{1}{n^2}(h^{\alpha}_{kk})^2\delta_{ij}, \end{aligned}$$

tomando $i = j = 1$ e usando o fato de que $H = \frac{1}{n}h^{\alpha}_{kk}$, temos

$$R_{11} = n - 1 + h^{\alpha}_{kk}\Phi^{\alpha}_{11} + nH^2 - \sum_{\alpha}\sum_{k=1}^{n}(\Phi^{\alpha}_{1k})^2 - \frac{2}{n}h^{\alpha}_{kk}\Phi^{\alpha}_{11} - H^2,$$

ou seja,

$$R_{11} = n - 1 + (n-2)\frac{1}{n}h^{\alpha}_{kk}\Phi^{\alpha}_{11} + (n-1)H^2 - \sum_{\alpha}\sum_{k=1}^{n}(\Phi^{\alpha}_{1k})^2. \tag{4.31}$$

Fazendo $a = \Phi^{\alpha}_{11}$ e $b = H = \frac{1}{n}h^{\alpha}_{kk}$ na desigualdade de Young A.2, para $\varepsilon > 0$, temos que

$$\left|\frac{1}{n}h^{\alpha}_{kk}\Phi^{\alpha}_{11}\right| = |ab| \leq \frac{|a|^2\varepsilon}{2} + \frac{|b|^2}{2\varepsilon} = \frac{H^2}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2}\sum_{\alpha}(\Phi^{\alpha}_{11})^2,$$

ou seja,

$$\frac{1}{n}h^{\alpha}_{kk}\Phi^{\alpha}_{11} \geq -\frac{H^2}{2\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{2}\sum_{\alpha}(\Phi^{\alpha}_{11})^2. \tag{4.32}$$

Substituindo isso em (4.31), obtemos

$$
\begin{aligned}
R_{11} &\geq n-1-(n-2)\frac{H^2}{2\varepsilon}-(n-2)\frac{\varepsilon}{2}\sum_{\alpha}(\Phi_{11}^{\alpha})^2+(n-1)H^2-\sum_{\alpha}\sum_{k=1}^{n}(\Phi_{1k}^{\alpha})^2 \\
&= n-1+\left(n-1-\frac{n-2}{2\varepsilon}\right)H^2-\frac{(n-2)\varepsilon}{2}\sum_{\alpha}(\Phi_{11}^{\alpha})^2-\sum_{\alpha}\sum_{k=1}^{n}(\Phi_{1k}^{\alpha})^2.
\end{aligned}
$$

Pelo Lema 4.7, segue que

$$
\begin{aligned}
R_{11} &\geq n-1+\left(n-1-\frac{n-2}{2\varepsilon}\right)H^2-\frac{(n-2)\varepsilon}{2}\frac{(n-1)}{n}|\Phi|^2-\frac{n-1}{n}|\Phi|^2 \\
&= n-1+\left(n-1-\frac{n-2}{2\varepsilon}\right)H^2-\left(1+\frac{(n-2)\varepsilon}{2}\right)\frac{n-1}{n}|\Phi|^2.
\end{aligned}
$$

Somando $2\beta|\Phi|^2$ em ambos os lados da desigualdade, resulta em

$$
R_{11}+2\beta|\Phi|^2 \geq n-1+\left(n-1-\frac{n-2}{2\varepsilon}\right)H^2-\left(1+\frac{(n-2)\varepsilon}{2}\right)\frac{n-1}{n}|\Phi|^2+2\beta|\Phi|^2,
$$

isto é,

$$
R_{11}+2\beta|\Phi|^2 \geq n-1+\left(n-1-\frac{n-2}{2\varepsilon}\right)H^2+\left(\frac{2\beta n}{n-1}-1-\frac{(n-2)\varepsilon}{2}\right)\frac{n-1}{n}|\Phi|^2.
$$

Agora, note que, resolvendo

$$
\begin{cases}
n-1-\frac{n-2}{2\varepsilon} \geq 0, \\
\frac{2\beta n}{n-1}-1-\frac{(n-2)\varepsilon}{2} \geq 0,
\end{cases}
$$

ou seja,

$$
\begin{cases}
n-1 \geq \frac{n-2}{2\varepsilon}, \\
\frac{2\beta n}{n-1}-1 \geq \frac{(n-2)\varepsilon}{2},
\end{cases}
$$

o que equivale a

$$
\frac{n-2}{2(n-1)} \leq \varepsilon \leq \left(\frac{2\beta n}{n-1}-1\right)\frac{2}{n-2}.
$$

Estas condições são compatíveis se e somente se

$$
\frac{n-2}{2(n-1)} \leq \left(\frac{2\beta n}{n-1}-1\right)\frac{2}{n-2},
$$

equivalentemente,

$$
\frac{(n-2)^2}{4} \leq 2\beta n-(n-1) \Leftrightarrow (n-2)^2 \leq 8\beta n-4n+4 \Leftrightarrow n^2 \leq 8\beta n,
$$

o que é equivalente a impor $\beta \geq n/8$, como afirmado. Com isso,

$$R_{11} + 2\beta|\Phi|^2 \geq n - 1,$$

ou seja,

$$Ric(X, X) + 2\beta|\Phi|^2 g(X, X) \geq (n-1)g(X, X),$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$, tal que $|X| = 1$ e $\beta \geq n/8$. Portanto

$$Ric + 2\beta|\Phi|^2 g \geq (n-1)g,$$

para cada $\beta \geq n/8$. Isto prova a afirmação 5.

Seguindo a Observação 4.1, podemos acoplar (4.30) com a desigualdade (4.22), que vale para β satisfazendo (4.8), isto é

$$\beta = \begin{cases} \text{um número em } \ (0,1) & \text{se } n = 2, 3, \\ \frac{1}{n-2} & \text{se } n \geq 4. \end{cases}$$

Como, neste caso $\beta \geq n/8$, para inferir que M^n é compacta, devemos ter

$$\frac{n}{8} \leq \frac{1}{n-2} \quad (\text{com } < \text{ se } n = 3),$$

que implica $n \leq 4$. Para chegar a conclusão para cada $n \leq 6$, em vista da Afirmação 5, podemos aplicar o Corolário 1 de [35] para concluir que M^n é compacto desde que

$$\beta < \frac{4}{n-1} \quad \text{se } n \geq 4,$$

ou seja,

$$\frac{n}{8} < \frac{4}{n-1}.$$

A desigualdade acima é válida se e somente se $n \leq 6$, concluindo a prova do Teorema. $\square$

Apêndice A

Resultados Básicos

Neste apêndice apresentaremos resultados básicos que foram utilizados nesta dissertação.

A.1 Desigualdade de Cauchy-Schwarz

A versão geral da desigualdade de Cauchy-Schwarz é a seguinte.

Lema A.1. Para dois vetores u e v em um espaço vetorial $\mathbb{K}$ com produto interno, tem-se que

$$|\langle u, v\rangle| \leq |u||v|$$

onde $\langle ., .\rangle$ é o produto interno em $\mathbb{K}$. Além disso, a igualdade é válida se, e somente se, os vetores u e v são linearmente dependentes.

Demonstração. Dados $a, b \in \mathbb{R}$ e $u, v \in \mathbb{K}$, temos

$$\langle au - bv, au - bv\rangle = |a|^2|u|^2 - 2ab\langle u, v\rangle + |b|^2|v|^2.$$

Tomando $a = |v|^2$ e $b = \langle u, v\rangle$, obtemos

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle au - bv, au - bv\rangle &= |u|^2|v|^4 - 2|v|^2|\langle u, v\rangle|^2 + |\langle u, v\rangle|^2|v|^2 \\ &= |v|^2(|u|^2|v|^2 - |\langle u, v\rangle|^2), \end{aligned}$$

portanto,

$$|\langle u, v\rangle| \leq |u||v|.$$

Suponha agora que $|\langle u, v\rangle| = |u||v|$, pelo cálculo acima, teremos $\langle au - bv, au - bv\rangle = 0$ quando $a = |v|^2$ e $b = \langle u, v\rangle$. Se $v = 0$, claramente u e v são linearmente dependentes. Suponha então $v \neq 0$. Logo, $a \neq 0$ e daí $au = bv$, o que implica $u = \frac{b}{a}v$. Assim, u e

v são linearmente dependentes. Por outro lado, se u e v são linearmente dependentes, então existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $u = cv$, com isso

$$|\langle u, v\rangle| = |c|\langle v, v\rangle = |c||v|^2 = |u||v|.$$

$\square$

A.2 Desigualdade de Young

A seguinte desigualdade é utilizada diversas vezes durante o texto.

Lema A.2. Se p e q são números reais positivos tais que $1/p + 1/q = 1$ (referimos p e q como conjugados). Então para quaisquer $a, b \neq 0$, vale a desigualdade

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demonstração. A prova no caso $ab = 0$ é trivial, então consideramos $a, b > 0$. Caso tenhamos $a^p = b^q$, usando que $1/p + 1/q = 1$,

$$ab = a(b^q)^{1/q} = aa^{p/q} = a^{p/p}a^{p/q} = a^{p(1/p+1/q)} = a^p = a^p\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Agora, para o caso $a^p \neq b^q$, note que a função $f(x) = e^x$ é estritamente convexa, pois $f''(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Então para todo $t \in (0, 1)$ e todos os números reais x, y, com $x \neq y$,

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Apliquemos isso para $t = \frac{1}{p}$, $1 - t = \frac{1}{q}$, $x = \ln a^p$ e $y = \ln b^q$, teremos que

$$ab = e^{\ln(ab)} = e^{\left(\frac{\ln a^p}{p} + \frac{\ln b^q}{q}\right)} < \frac{e^{\ln a^p}}{p} + \frac{e^{\ln b^q}}{q} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

o que demonstra o resultado.

$\square$

A desigualdade de Young também pode tomar a seguinte forma:

$$ab \leq \varepsilon a^p + c(\varepsilon)b^q$$

para todo $\varepsilon > 0$. Que pode ser provado pelo seguinte:

$$ab \leq (\xi a)\left(\frac{b}{\xi}\right) \leq \frac{1}{p}(\xi a)^p + \frac{1}{q}\left(\frac{b}{\xi}\right)^q = \frac{\xi^p}{p}a^p + \frac{1}{q\xi^q}b^q,$$

escreva $\varepsilon = \xi^p/p$, ou seja $\xi = (\varepsilon p)^{1/p}$, e conclua que:

$$ab \leq \varepsilon a^p + \frac{1}{q(\varepsilon p)^{q/p}} b^q = \varepsilon a^p + c(\varepsilon) b^q.$$

Em particular, ao escolhermos $\sqrt{\varepsilon} a$, $\frac{b}{\sqrt{\varepsilon}}$ e $p = 2$ temos que

$$ab \leq \frac{a^2 \varepsilon}{2} + \frac{b^2}{2\varepsilon}.$$

Bibliografia

[1] H. Alencar, M. do Carmo, *Hypersurfaces with constant mean curvature in spheres*, Proc. Amer. Math. Soc. **120** (1994), no. 4, 1223-1229.

[2] F. J. Jr. Almgren, *Some interior regularity theorems for minimal surfaces and an extension of Bernstein's theorem*, Ann. Math. (2) **84**, 277-292 (1966).

[3] E. Bombieri, E. De Giorgi, E. Giusti, *Minimal cones and the Bernstein problem*, Invent. Math. **7**, 243-268 (1969).

[4] G. Catino, P. Mastrolia, A. Roncoroni, *Two rigidity results for stable minimal hypersurfaces*, Geom. Funct. Anal. **34** (2024), no. 1, 1-18.

[5] G. Catino, A. Roncoroni, *A closure result for globally hyperbolic spacetimes*, Proc. Amer. Math. Soc. (2024), DOI 10.1090/proc/16969.

[6] J. Cheeger, D. G. Ebin, *Comparison Theorems in Riemannian Geometry*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, (2000).

[7] S. S. Chern, M. do Carmo, S. Kobayashi, *Minimal submanifolds of a sphere with second fundamental form of constant length*, in: Functional analysis and related fields, Springer, New York (1970), 59-75.

[8] X. Cheng, *One end theorem and application to stable minimal hypersurfaces*, Arch. Math. **90**, 461-470 (2008).

[9] O. Chodosh, C. Li, *Stable anisotropic minimal hypersurfaces in* $\mathbb{R}^4$, Forum Math. Pi **11**, e3 (2023).

[10] O. Chodosh, C. Li, *Stable minimal hypersurfaces in* $\mathbb{R}^4$, Acta Math. (2024) To appear.

[11] O. Chodosh, C. Li, D. Stryker, *Complete stable minimal hypersurfaces in positively curved 4-manifolds*, (2022). https://arxiv.org/abs/2202.07708v1.

[12] O. Chodosh, C. Li, P. Minter, D. Stryker, *Stable minimal hypersurfaces in* $\mathbb{R}^5$, Math. DG. 3 Jan, 2024. arXiv:2024.01492v1.

[13] T. H. Colding, W. P. Minicozzi, *II, A course in minimal surfaces*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 121. Am. Math. Soc., Providence (2011).

[14] E. De Giorgi, *Una estensione del teorema di Bernstein* (Italian), Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci. (3) **19**, 79-85 (1965).

[15] M. do Carmo, M. Dajczer, *Rotation hypersurfaces in spaces of constant curvature*, Trans. Amer. Math. Soc. **277** (1983), 685-709.

[16] M. do Carmo, C. K. Peng, *Stable complete minimal surfaces in* $\mathbb{R}^3$ *are planes*, Bull. Am. Math. Soc. (N.S.) **1**(6), 903-906 (1979).

[17] M. P. do Carmo, *Geometria Riemanniana*, 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015. ISBN. 978-85-244-00036-0.

[18] M. F. Elbert, B. Nelli, H. Rosenberg, *Stable constant mean curvature hypersurfaces*, Proc. Am. Math. Soc. **135**(10), 3359-3366 (2007).

[19] W. H. Fleming, *On the oriented Plateau problem*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl. **11**, 69-90 (1962).

[20] D. Fischer-Colbrie, *On complete minimal surfaces with finite Morse index in three manifolds*, Invent. Math. **82** (1985), no. 1, 121-132.

[21] D. Fischer-Colbrie, R. Schoen, *The structure of complete stable minimal surfaces in 3-manifolds of nonnegative scalar curvature*, Commun. Pure Appl. Math. **33**(2), 199-211 (1980).

[22] R. Hardt, L. Simon, *Area minimizing hypersurfaces with isolated singularities*, J. Reine Angew. Math. **362**, 102-129 (1985).

[23] H. B. Lawson, Jr., *Local rigidity theorems for minimal hypersurfaces*, Ann. of Math. (2) **89** (1969), 187-197.

[24] J. M. Lee, *Introduction to Riemannian Manifolds*, 2. ed. University of Washington, 2010. ISBN. 978-3-319-91754-2.

[25] L. Mazet, *Stable minimal hypersurfaces in* $\mathbb{R}^6$, Math. DG, 23 May, 2024. arXiv:2405.14676v1.

[26] M. Magliaro, L. Mari, F. Roing, A. Savas-Halilaj, *Sharp pinching theorems for complete submanifolds in the sphere*, J. reine angew. Math., Ahead of Print, DOI 10.1515/crelle-2024-0042.

[27] K. Nomizu, *Élie Cartan's work on isoparametric families of hypersurfaces*, in: Differential geometry, Proc. Sympos. Pure Math. **27**, American Mathematical Society, Providence (1975), 191-200.

[28] A. V. Pogorelov, *On the stability of minimal surfaces*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **260**(2), 293-295 (1981). (Russian).

[29] Z. Qian, *Estimates for weighted volumes and applications*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **48** (190), 235-242 (1997).

[30] W. Santos, *Submanifolds with parallel mean curvature vector in spheres*, Tohoku Math. J. (2) **46** (1994), no. 3, 403-415.

[31] J. Simons, *Minimal varieties in Riemannian manifolds*, Ann. of Math. (2) **88** (1968), 62-105.

[32] R. Schoen, S. T. Yau, *Complete three-dimensional manifolds with positive Ricci curvature and scalar curvature*, In: Seminar on Differential Geometry. Ann. of Math. Stud., vol. 102, pp. 209-228. Princeton Univ. Press, Princeton (1982).

[33] R. P. Sperb, *Maximum Principles and Their Applications*, Mathematics in Science and Engineering, vol. 157, New York, Academic Press Inc, (1981).

[34] Y. Shen, R. Ye, *On stable minimal surfaces in manifolds of positive bi-Ricci curvatures*, Duke Math. J. **85**, 109-116 (1996).

[35] Y. Shen, R. Ye, *On the geometry and topology of manifolds of positive bi-Ricci curvature*, preprint 1997, https://arxiv.org/abs/dg-ga/9708014.