



UNIVERSIDADE FEDEREL DA PARAIBA

CENTRO DE TECNOLOGIA

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

CURSO DE ENGENHARIA CIVIL

MARCELO DE OLIVEIRA BELARMINO JUNIOR

**AVALIAÇÃO DA VARIAÇÃO DAS SOLICITAÇÕES NA ESTRUTURA DEVIDO A
MOVIMENTAÇÃO DOS APOIOS VIA ANÁLISE MATRICIAL DE ESTRUTURAS**

JOÃO PESSOA - PB

2023

MARCELO DE OLIVEIRA BELARMINO JUNIOR

**AVALIAÇÃO DA VARIAÇÃO DAS SOLICITAÇÕES NA ESTRUTURA DEVIDO A
MOVIMENTAÇÃO DOS APOIOS VIA ANÁLISE MATRICIAL DE ESTRUTURAS**

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao curso de graduação de engenharia civil da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para obtenção do grau de bacharel em engenharia civil.

Orientador: Prof. Dr. José Marcilio Filgueira Cruz.

JOÃO PESSOA – PB

2023

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

J95a Junior, Marcelo de Oliveira Belarmino.
Avaliação da variação das solicitações na estrutura devido a movimentação dos apoios via análise matricial / Marcelo de Oliveira Belarmino Junior. - João Pessoa, 2023.
65 f. : il.

Orientação: José Marcílio Filgueiras Cruz.
TCC (Graduação) - UFPB/CT.

1. Deslocamentos nos apoios. 2. Interação Solo-Estrutura (ISE). 3. Método Matricial dos Deslocamentos (MMD). I. Cruz, José Marcílio Filgueiras. II. Título.

UFPB/CT/BSCT

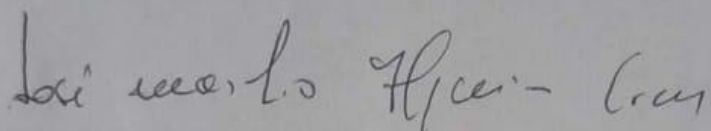
CDU 624(043.2)

FOLHA DE APROVAÇÃO

MARCELO DE OLIVEIRA BELARMINO JUNIOR

AVALIAÇÃO DA VARIAÇÃO DAS SOLICITAÇÕES NA ESTRUTURA DEVIDO A MOVIMENTAÇÃO DOS APOIOS VIA ANÁLISE MATRICIAL DE ESTRUTURAS

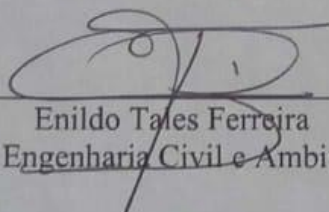
Trabalho de Conclusão de Curso em 01/11/2023 perante a seguinte Comissão Julgadora:



José Márcilio Filgueiras Cruz

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental do CT/UFPB

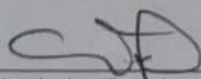
APROVADO



Enildo Tales Ferreira

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental do CT/UFPB

APROVADO



Carlos Anônio Taurino de Lucena

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental do CT/UFPB

APROVADO

À minha família, meus amigos e professores.

AGRADECIMENTOS

Quero agradecer a todos que foram fundamentais na minha jornada acadêmica.

Primeiro, minha família merece um agradecimento especial, pois sempre estiveram ao meu lado durante o curso de Engenharia Civil. Seu apoio constante foi um grande suporte nas dificuldades acadêmicas.

Meus amigos também têm um lugar especial. Sua amizade e encorajamento foram uma fonte inesgotável de motivação, tornando os desafios acadêmicos mais fáceis de enfrentar.

Não posso deixar de agradecer aos professores do curso de Engenharia Civil. Seu esforço em compartilhar conhecimento e paixão pela disciplina foram fundamentais para o meu crescimento acadêmico.

Por fim, gostaria de expressar minha profunda gratidão ao orientador deste trabalho, o professor Dr. José Marcílio. Sua orientação experiente, paciência e apoio foram cruciais para a conclusão deste trabalho.

Cada um de vocês desempenhou um papel vital nessa caminhada, e sou eternamente grato.

Muito obrigado!

RESUMO

Um dos problemas contemporâneos de grande relevância nas construções modernas, onde a estabilidade e segurança são essenciais, é a negligência dos deslocamentos nos apoios. O objetivo deste estudo é destacar os efeitos da deslocabilidade das fundações em análises de estruturas planas. Foram comparados os resultados de análises de pórticos simples sob diversas condições, incluindo apoios indeslocáveis, apoios em molas de Winkler, deslocamentos impostos e interação solo-estrutura. O trabalho é uma revisão de literatura com foco na aplicação do Método Matricial dos Deslocamentos (MMD) em estruturas lineares planas, considerando a interação solo-estrutura pelo Modelo de Winkler. A pesquisa restringe-se à linearidade física e geométrica, analisando deslocamentos e esforços nodais. Verificou-se que ao negligenciar os deslocamentos dos apoios, ocorrem erros de até 17,26% em reações e de até 91,12% para deslocamentos. O uso de apoios em molas e um processo iterativo reduz esses erros, situando-se entre os valores calculados com apoios indeslocáveis e os obtidos com molas. As solicitações nas extremidades das barras variaram cerca de 6,32% a 24,61% em comparação com os apoios indeslocáveis. Assim, a análise destaca a importância de considerar a movimentação dos apoios, especialmente em solos deformáveis, e demonstra a eficácia do processo iterativo na obtenção de resultados intermediários entre os cálculos com apoios indeslocáveis e aqueles com base elástica.

Palavras-chave: Deslocamentos nos apoios. Interação Solo-Estrutura (ISE). Método Matricial dos Deslocamentos (MMD).

ABSTRACT

One of the most important contemporary problems in modern construction, where stability and safety are essential, is the neglect of support displacements. The aim of this study is to highlight the effects of foundation displacement on the analysis of flat structures. The results of simple frame analyses under various conditions were compared, including indisplaceable supports, supports on Winkler springs, imposed displacements and soil-structure interaction. The study is a literature review focusing on the application of the Matrix Displacements Method (MDM) to planar linear structures, considering soil-structure interaction using the Winkler Model. The research is restricted to physical and geometric linearity, analyzing displacements and nodal forces. It was found that neglecting support displacements results in errors of up to 17.26% in reactions and up to 91.12% in displacements. The use of spring supports and an iterative process reduces these errors to between the values calculated with indisplaceable supports and those obtained with springs. The stresses at the ends of the bars varied by between 6.32% and 24.61% compared to the immovable supports. The analysis thus highlights the importance of considering the movement of the supports, especially in deformable soils, and demonstrates the effectiveness of the iterative process in obtaining intermediate results between calculations with indisplacement supports and those with an elastic base.

Keywords: Support displacements; Soil Structure Interaction (SSI); Matrix Displacements Method (MDM).

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - A Curva de Deformação da Base.	17
Figura 2 - Representação esquemática do modelo de Winkler.	17
Figura 3 - Coeficiente de mola (a) e Coeficiente de reação do solo (b).	18
Figura 4 - Camadas do maciço no modelo solo-estrutura.	23
Figura 5 - Viga sobre base elástica: molas de Winkler.	24
Figura 6 - Estrutura original.	28
Figura 7 - Molas para representar a deformabilidade do solo sob a fundação.	28
Figura 8 - Barras biarticuladas para representar as molas da Figura 7.	28
Figura 9 - Elemento de conexão horizontal no nó 4.	29
Figura 10 - Pórtico padrão, SCG, carregamento, definição das barras, dos nós e da incidência de cada uma delas.	34
Figura 11 - Pórtico padrão, com sua discretização.	34
Figura 12 - O pórtico da Figura 11 com três molas no nó 1 e no nó 4.	46

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Valores padronizados para o módulo de reação vertical.....	20
Tabela 2 - Valores de K_v (kN/m ³).....	20
Tabela 3 - Fator de influência I_p	21
Tabela 4a - As reações dos apoios (Apoios indeslocáveis X Apoios sobre molas - P1).	48
Tabela 4b - As reações dos apoios (Apoios indeslocáveis X Apoios sobre molas - P2).	49
Tabela 5a - Deslocamentos das coordenadas “livres” (Apoios indeslocáveis X Apoios sobre molas - P1).....	49
Tabela 5b - Deslocamentos das coordenadas “livres” (Apoios indeslocáveis X Apoios sobre molas - P2).....	49
Tabela 6 - Esforços nas extremidades das barras (Apoios indeslocáveis X Apoios deslocáveis - P1).....	50
Tabela 7 - Solicitações no solo e dimensões das sapatas.....	53
Tabela 8 - Coeficientes de mola vertical e de rotação.	54
Tabela 9 - Deslocamentos a serem impostos na iteração 1.....	54
Tabela 10 - Solicitações no solo e dimensões das sapatas.....	54
Tabela 11 - Deslocamentos a serem impostos aos apoios na iteração 2.	55
Tabela 12 - Solicitações no solo e dimensões das sapatas.....	55
Tabela 13 - Deslocamentos a serem impostos aos apoios na iteração 3.....	55
Tabela 14 - Solicitações no solo e dimensões das sapatas.....	55
Tabela 15 - Deslocamentos a serem impostos aos apoios na iteração 4.....	56
Tabela 16 - Solicitações no solo e dimensões das sapatas.....	56
Tabela 17 - Deslocamentos a serem impostos aos apoios na iteração 5.....	56
Tabela 18 - Solicitações no solo e dimensões das sapatas.....	57
Tabela 19 - Deslocamentos a serem impostos aos apoios na iteração 6.....	57
Tabela 20 - Evolução dos deslocamentos vertical e angular de cada sapata em cada iteração.....	57
Tabela 21 - Evolução das ações vertical e angular atuantes no solo em cada iteração.....	58
Tabela 22 - Esforços nas extremidades das barras (Ap. indesloc. X Ap. desloc.*).	58
Tabela 23 - Esforços nas extremidades das barras (Apoios indeslocáveis X Apoios deslocáveis*).	59

LISTA DE SIGLAS E ABREVIACÕES

AFS	A favor da segurança
AISE	Análise de Interação Solo-Estrutura
AME	Análise Matricial de Estruturas
CS	Contra a segurança
EEF	Elementos estruturais de fundação
ISE	Interação Solo-Estrutura
ITA	Instituto Tecnológico Aeronáutico
MEC	Método dos Elementos de Contorno
MEF	Método dos Elementos Finitos
MMD	Método Matricial dos Deslocamentos
SGR	Sistema Global de Referência
SLR	Sistema Local de Referência
TCC	Trabalho de Conclusão de Curso

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	13
1.1 SOBRE O ESTADO DA ARTE.....	14
1.1.1 O ESTADO DA ARTE RELATIVO À AISE.....	14
1.1.2 O ESTADO DA ARTE DA ANÁLISE MATRICIAL DE ESTRUTURAS.....	24
1.2 JUSTIFICATIVA	31
1.3 OBJETIVOS	32
1.3.1 GERAL.....	32
1.3.2 ESPECÍFICOS	32
1.3.3 O ESCOPO DO TCC	32
1.4 A ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	33
2. O PÓRTICO, A DESLOCABILIDADE DOS APOIOS E O CÁLCULO DAS GRANDEZAS DE INTERESSE	34
2.1 O PÓRTICO MODELO.....	34
2.2 O PÓRTICO E OS DESLOCAMENTOS NULOS NOS APOIOS.....	34
2.3 O PÓRTICO E OS DESLOCAMENTOS ELÁSTICOS NOS APOIOS.....	46
2.3.1 O MODELO DE WINKLER E A AME.....	46
2.4 OS RESULTADOS	48
3. ANÁLISE ITERATIVA COM A APLICAÇÃO DAS MOLAS DE WINKLER	51
3.1. O MÉTODO.....	51
3.2 APLICAÇÃO COM O PÓRTICO MODELO.....	51
4. ANÁLISE DOS RESULTADOS	60
5. CONCLUSÕES.....	61
REFERÊNCIAS	62
ANEXOS	64
ANEXO A – TENSÃO ADMISSÍVEL	64
ANEXO B – COEFICIENTE DE POISSON	65
ANEXO C – COEFICIENTES DE POISSON (UV)	66
ANEXO D – VALORES DO MÓDULO DE ELASTICIDADE PARA DIFERENTES TIPOS DE SOLO (URV).....	67

1. INTRODUÇÃO

Um dos grandes desafios atuais da engenharia de estruturas é a consideração dos efeitos da interação entre o maciço de solo e a fundação da estrutura. Quando submetido a solicitações externas, o maciço de solo sofre deformações que provocam a redistribuição de esforços nos elementos estruturais apoiados sobre ele. Este mecanismo normalmente não é considerado nos projetos estruturais, nos quais as fundações são geralmente admitidas como apoiadas sobre uma base rígida e indeslocável.

Em projetos estruturais, a modelagem com apoios indeslocáveis é essencial e muitas vezes se apresenta como a solução inicial do problema, sendo a escolha óbvia. No entanto, é importante reconhecer que as fundações estão sujeitas a deslocamentos e recalques significativos, e esses aspectos são cruciais para o estabelecimento das condições de segurança das estruturas. Enquanto o uso de apoios fixos pode parecer robusto, é imperativo considerar as mudanças naturais que ocorrem nas fundações ao longo do tempo, resultantes de variações no solo, alterações na geometria (deformações), influências climáticas e cargas aplicadas.

A revolução tecnológica desencadeou o surgimento de novas possibilidades na arquitetura e na construção civil. Impulsionado por softwares de cálculo modernos, esse avanço permitiu a construção de prédios de alturas impressionantes.

Em razão disso, tornou-se viável não apenas projetar edifícios mais altos e amplos, mas também garantir sua estabilidade e segurança diante de fatores como vento, variações de temperatura e deslocamentos nas fundações. Essa demanda por edifícios mais esbeltos e altos é uma resposta à necessidade urgente de acomodar uma população em constante crescimento, otimizando as áreas disponíveis e redesenhando o horizonte das cidades.

Assim, com a ousadia e competência dos arquitetos e, principalmente, dos engenheiros, sobretudo aqueles especializados em materiais e estruturas, as edificações estão se tornando cada vez mais esbeltas, o que as torna mais suscetíveis aos efeitos da movimentação dos apoios. Desse modo, o procedimento até recentemente satisfatoriamente utilizado para calcular os esforços nas fundações e, com base neles, projetar esses elementos estruturais de fundação (EEF), considerando todos os deslocamentos como nulos, já não é adequado para a análise da maioria das estruturas das edificações modernas.

Melhor identificação e quantificação dos efeitos devidos aos deslocamentos das fundações são possíveis com análises que levem em conta o comportamento do solo e da estrutura simultaneamente. Esse tipo de análise ficou conhecido na comunidade de engenheiros estruturais como Análise de Interação Solo-Estrutura, AISE.

É importante ressaltar que, ao considerar a Interação Solo-Estrutura (ISE), obtém-se análises estruturais mais realistas para a verificação dos estados limites, com uma melhor avaliação dos recalques diferenciais e absolutos das fundações. Isso resulta em uma avaliação mais precisa dos deslocamentos e da redistribuição dos esforços na estrutura.

Neste contexto, no presente trabalho, o autor procura apresentar um estudo comparativo dos efeitos dos deslocamentos dos apoios na estrutura por meio de quatro procedimentos de análise, a saber: (a) considerando os apoios como indeslocáveis, (b) considerando apoios sobre molas de Winkler, (c) considerando deslocamentos prescritos para os apoios e (d) o procedimento que leva em conta o comportamento do solo e da estrutura simultaneamente.

Com base neste estudo comparativo, pretende-se demonstrar a importância de abordar com cautela a problemática da ISE, especialmente ao analisar e projetar estruturas para edificações de alto índice de esbeltez, principalmente quando estas serão apoiadas em solos altamente deformáveis.

A ferramenta matemática utilizada para representar o comportamento da estrutura e do solo é a álgebra matricial, com a aplicação do Método Matricial dos Deslocamentos (MMD) em sua formulação linear. Por esta razão, optou-se por incluir neste Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) considerações sobre o estado da arte relacionadas à ISE e ao MMD. Além disso, considerou-se pertinente apresentar detalhadamente a formulação desse método matricial, a fim de possibilitar um melhor entendimento das análises desenvolvidas.

1.1 SOBRE O ESTADO DA ARTE

1.1.1 O ESTADO DA ARTE RELATIVO À AISE

O processo usual se resume a uma análise inicial dos esforços e deslocamentos da superestrutura, considerando seus apoios como indeslocáveis. Nessa etapa, o carregamento atuante é analisado pelo engenheiro de fundações, que geralmente calcula o recalque da estrutura considerando um ponto de referência em uma camada rígida e indeslocável. Se esses recalques estiverem dentro de valores aceitáveis, possibilita-se a elaboração do projeto.

A separação dos estudos estruturais e geotécnicos ocorre devido ao alto grau de complexidade envolvido na avaliação desses fenômenos. Geralmente, o projeto geotécnico não leva em conta as alterações das tensões geradas devido às deformações no solo, da mesma forma que o projeto da superestrutura não considera a redistribuição dos esforços gerados por esses deslocamentos.

O desenvolvimento de projetos estruturais sob a hipótese de deslocamentos nos apoios nulos e sapatas rígidas era aceitável até um passado recente, tendo em vista os recursos disponíveis pelo calculista para a análise estrutural de edificações considerando a deslocabilidade dos apoios e a flexibilidade das sapatas. Outro aspecto relevante que surge em defesa deste procedimento simplificado, por vezes perigoso, é o fato de que as estruturas eram concebidas com vigas de pequenos vãos (da ordem de 4 m) e um conjunto considerável de apoios (pilares), propiciando condições favoráveis para garantir esforços de pequena intensidade na base desses elementos estruturais verticais. Essas edificações, em geral, apresentavam alturas não muito elevadas, o que contribuía para a manutenção de esforços de pequena intensidade e reduzida susceptibilidade aos efeitos das deformações e deslocamentos dos elementos estruturais de fundação, EEF.

Entretanto, esse processo simplificado apresentava falhas consideráveis. Os esforços iniciais da estrutura sofrem modificações quando analisados considerando esses recalques, e os novos esforços resultantes, assim como os novos valores de recalque que surgiam, não eram levados em conta no dimensionamento da estrutura. Desse modo, a estrutura, quando em funcionamento, seria solicitada por esforços para os quais não estava preparada para resistir de forma adequada. Como consequência, problemas surgiram em algumas edificações que apresentavam índices de esbeltez diferenciados e/ou eram apoiadas em solos muito deformáveis.

Então, problemas como fissuras em vigas e pilares, perda de prumo, entre outros, que foram verificados nas estruturas desses edifícios, acenderam a luz de alerta para a engenharia estrutural em relação ao problema da AISE. Em razão desses acontecimentos, antigas hipóteses começaram a ser revistas, e o problema da interação solo-estrutura passou a ser visto sob uma nova perspectiva.

O caminho natural para uma melhor interpretação da AISE, com o objetivo de aproximar o modelo adotado da estrutura real, foi a consideração das molas de Winkler.

No entanto, embora a utilização do chamado modelo de Winkler represente um avanço teórico que contribui para a consideração de deslocamentos nas fundações das edificações, sua aplicação se dá sob a hipótese de que a resposta do solo às solicitações a ele transferidas através do EEF é elástica, linearmente elástica, o que não é verdade. Isso se deve ao fato de que, dessa forma, seria possível estabelecer algo semelhante à lei de Hooke para solicitação axial, com o estabelecimento de valores associados à grandeza correspondente ao módulo de deformação para o solo. Outro aspecto a ser considerado é que apenas as molas sobre a sapata seriam solicitadas.

É um fato inegável que, com a concorrência de diversos fatores favoráveis, como materiais mais resistentes, métodos construtivos com maior alcance e o uso de softwares avançados para projetos estruturais, entre outros, temos observado nas últimas décadas uma proliferação de edificações altas e esbeltas ao redor do mundo. Essa tendência, que parece estar aqui para ficar, apresenta muitos e sérios desafios para a engenharia em geral, e, em particular, para a engenharia civil de estruturas. Entre esses desafios, destacam-se a verificação da estabilidade global, a resistência aos efeitos dos ventos e a resposta à movimentação dos apoios.

No que diz respeito ao problema da movimentação dos apoios e à interação solo-estrutura, estão sendo desenvolvidas formulações para a análise estrutural que consideram a superestrutura, a mesoestrutura e o maciço de apoio como um único sistema. A implementação dessas formulações, seja através do Método dos Elementos Finitos ou do Método dos Elementos de Contorno, permitirá incorporar os efeitos dos deslocamentos das fundações na avaliação das solicitações às quais a estrutura estará sujeita.

Assim, existem diferentes procedimentos de análise estrutural, a saber: (a) procedimentos que consideram deslocamentos nulos nos apoios, como se a rigidez do maciço de apoio fosse infinitamente grande; (b) procedimentos que determinam deslocamentos nos apoios através das teorias da mecânica dos solos para impô-los à estrutura; (c) procedimentos iterativos que utilizam as molas de Winkler para estimar as alterações nos deslocamentos dos apoios e os efeitos resultantes na variação das reações de apoio, nos esforços nas extremidades das barras e nos deslocamentos nodais, entre outros.

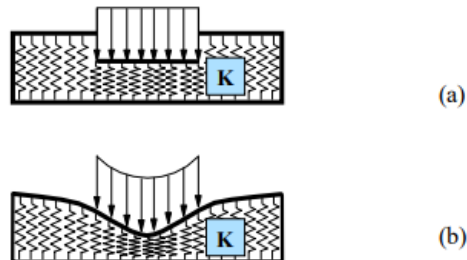
No que diz respeito às molas de Winkler, existem modelos matemáticos que consideram apenas um único parâmetro para definir as propriedades do material constituinte da fundação elástica. Nesse contexto, dois modelos podem ser citados: o proposto por Winkler e o sistema de molas discretas, dispostas ao longo da região de contato. Esses são modelos nos quais a interação entre as molas não é considerada, e não há respostas para solicitações de tração.

De acordo com Silva (2004, p. 38), estes métodos são considerados bastante simples quando comparados a outros métodos de modelagem que envolvem dois parâmetros na definição do comportamento da base elástica. Exemplos desses modelos incluem o modelo de Pasternak, o modelo de Filonenko-Borodich e o modelo de Vlasov, que de certa forma consideram as interações entre as molas.

Embora a aplicação desses métodos de um único parâmetro seja relativamente fácil de implementar, os resultados obtidos por meio de sua aplicação muitas vezes não correspondem à realidade física representada matematicamente por eles. A determinação da rigidez do solo é um parâmetro que requer atenção especial devido à grande variabilidade dos tipos e

características do solo. Por outro lado, o entendimento de que a fundação se deforma apenas na região em que o carregamento atua, conforme Hetenyi (1946) citado por Silva (2004, p. 8), é válido para muitos tipos de solos.

Figura 1 - A Curva de Deformação da Base.

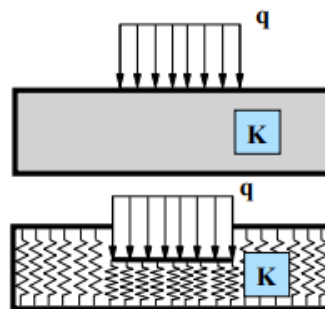


Fonte: Silva (1998).

O Modelo de Winkler

Prever o comportamento do solo é uma tarefa complexa devido à variabilidade das suas características, mas, apesar de o solo não possuir um comportamento estritamente elástico, as análises normalmente empregadas comparam as tensões aplicadas com as tensões admissíveis.

Figura 2 - Representação esquemática do modelo de Winkler.



Fonte: Silva (1998).

O modelo de Winkler admite que as deflexões na viga sejam diretamente proporcionais aos esforços normais, podendo ser interpretadas pela seguinte equação.

$$\sigma = k_v d_v \quad (1.1)$$

Em que:

- σ é a tensão de contato na base das fundações, em $[F / L^2]$;
- k_v é o modulo de reação vertical; parâmetro de rigidez elástica do solo, com $[F / L^3]$

- d_v é o deslocamento vertical, $[L]$

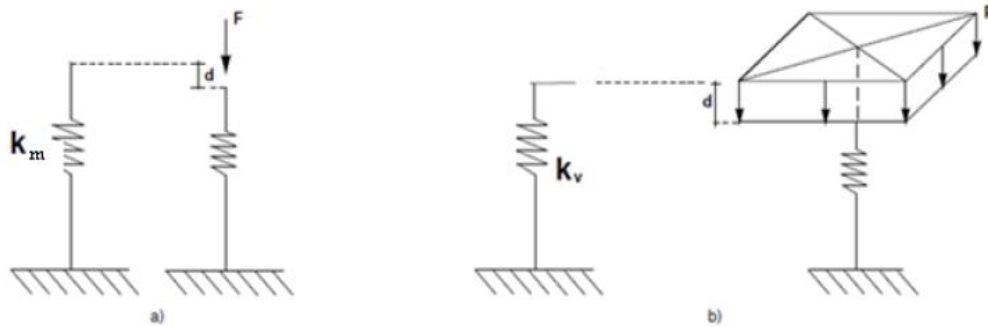
Para a determinação do coeficiente de mola, considera-se o módulo de reação vertical sobre a área de atuação da carga.

$$K_{mv} = k_v A_f \quad (1.2)$$

Em que:

- K_{mv} coeficiente de apoio elástico vertical ou Coeficiente de mola vertical com $[F / L]$;
- k_v é o modulo de reação vertical, com $[F / L^3]$;
- A_f é a área carregada, com $[L^2]$.

Figura 3 - Coeficiente de mola (a) e Coeficiente de reação do solo (b).



Fonte: Antoniazzi (2011).

O modulo de reação vertical k_v depende de diversos fatores tais como:

- Forma e dimensões da fundação
- Tipo de construção;
- Mudanças de carregamento.

Em geral o coeficiente e determinado de três maneiras:

- Ensaio de placa;
- Tabelas de valores típicos;
- Correlações com o módulo de elasticidade.

Ensaio de placa

O ensaio de placa é, segundo Décourt e Quaresma Filho (1996), a maneira mais adequada para obter as características carga-recalque das fundações, porém não possui utilização frequente devido a fatores como o alto custo e longo período de tempo para sua execução, o que acaba por limitar a quantidade de repetições a números estatisticamente não significativos. Além disso, limita-se também pela necessidade de extrapolação dos resultados e identificação do conceito de ruptura.

A prova de carga em placa trata-se de um ensaio de compressão realizado diretamente na superfície ou em determinada profundidade do terreno, por meio de uma placa metálica e rígida, com área não inferior a $0,5 \text{ m}^2$. São aplicadas cargas verticais no centro da placa, em estágios, medindo-se as deformações simultaneamente aos incrementos de carga. O ensaio procura reproduzir o comportamento da fundação sob a ação das solicitações provenientes da superestrutura, sendo a cota de realização do ensaio definida de acordo com as necessidades do projeto. Os resultados são apresentados em forma de gráficos de pressão versus recalque.

Cintra e Albiero (1998) salientam que as provas de carga servem para, além de estimar o recalque imediato de uma fundação, a determinação da taxa de trabalho do solo. Segundo Mello e Teixeira (1968), este ensaio é realizado em um modelo que procura reproduzir o comportamento de uma fundação em escala quase real, onde as deformações do solo subjacente à sapata podem se dar de duas formas: uma resulta da redução de volume por compressibilidade e a outra é uma deformação do tipo cisalhante, resultando em uma mudança de forma. A soma dessas deformações representa o recalque total sofrido.

O ensaio possui maior aplicabilidade em terrenos cuja deformabilidade é praticamente imediata à ação das cargas, logo, sendo primeiramente empregado em terrenos pedregulhosos, arenosos e silto-arenosos (em qualquer grau de saturação), e em segundo lugar, em terrenos argilosos e silto-argilosos (com baixo grau de saturação) (BARATA, 1984).

Tabelas de Valores Típicos

Estas tabelas são encontradas na bibliografia e podem ser utilizadas para a estimativa do coeficiente de mola da fundação na ausência de outras informações.

A Tabela 1 a seguir, apresenta valores padronizados para o módulo de reação vertical para diferentes características do solo. Esses valores foram obtidos a partir de ensaios com placas quadradas de lado $L = 30 \text{ cm}$.

Tabela 1 - Valores padronizados para o módulo de reação vertical.

Argilas	Rija	Muito Rija	Dura
<i>q_u (Mpa)</i>	<i>0,1 a 0,2</i>	<i>0,2 a 0,4</i>	<i>>0,4</i>
<i>Faixa de valores</i>	<i>16.000 a 32.000</i>	<i>32.000 a 64.000</i>	<i>>64.000</i>
<i>Valor proposto</i>	<i>24.000</i>	<i>48.000</i>	<i>96.000</i>

Areias	Fofas	Medianamente Compacta	Compacta
<i>Faixa de valores</i>	<i>6.000 a 19.000</i>	<i>19.000 a 96.000</i>	<i>96.000 a 320.000</i>
<i>Areia acima NA</i>	<i>13.000</i>	<i>42.000</i>	<i>160.000</i>
<i>Argila submersa</i>	<i>8.000</i>	<i>26.000</i>	<i>96.000</i>

q_u corresponde à resistência à compressão não-drenada. Os resultados foram determinados por meio de ensaios de placa; de tal modo que necessitam de correção em função da forma e dimensão da sapata.

Fonte: Terzaghi (1955).

Já Moraes (1976), por sua vez, propõe a Tabela 2 a seguir.

Tabela 2 - Valores de K_v (kN/m³).

Tipo de solo	k_v (KN.m⁻³)
<i>Turfa leve - solo pantanoso</i>	<i>5.000 a 10.000</i>
<i>Turfa pesada - solo pantanoso</i>	<i>10.000 a 15.000</i>
<i>Areia fina de praia</i>	<i>10.000 a 15.000</i>
<i>Aterro de silte, de areia e cascalho</i>	<i>10.000 a 20.000</i>
<i>Argila molhada</i>	<i>20.000 a 30.000</i>
<i>Argila úmida</i>	<i>40.000 a 50.000</i>
<i>Argila seca</i>	<i>60.000 a 80.000</i>
<i>Argila seca endurecida</i>	<i>100.000</i>
<i>Silte compactado com areia e pedra</i>	<i>80.000 a 100.000</i>
<i>Silte compactado com areia e pedra</i>	<i>100.000 a 120.000</i>
<i>Cascalho miúdo com areia fina</i>	<i>80.000 a 120.000</i>
<i>Cascalho médio com areia fina</i>	<i>100.000 a 120.000</i>
<i>Cascalho grosso com areia grossa</i>	<i>120.000 a 150.000</i>
<i>Cascalho grosso com pouca areia</i>	<i>150.000 a 200.000</i>
<i>Cascalho grosso com pouca areia compactada</i>	<i>200.000 a 250.000</i>

Fonte: Moraes (1976).

Além da forma analítica ou teórica para previsão de recalques imediatos de sapatas, também é possível o método experimental, por meio de provas de carga sobre a placa.

Correlações com o módulo de elasticidade

A teoria da elasticidade estima o recalque imediato em argilas considerando a forma, a rigidez e a largura das sapatas. A forma é considerada através do fator de influência, cujos valores estão indicados na Tabela 3. A largura, que é a menor dimensão do quadrado, é representada por B.

A sapata, que pode ser rígida ou flexível, é apoiada numa camada argilosa semi-infinita, homogênea, com módulo de elasticidade E constante com a profundidade. A tensão média na interface horizontal solo-sapata é representada por σ , o coeficiente de Poisson por ν , e o fator de forma por Φ . Assim, o recalque imediato é dado pela Eq. (1.3)

$$\text{Recalque imediato} = \sigma \cdot B \cdot \left(\frac{1 - \nu^2}{E} \right) I_p \quad (1.3)$$

De onde obtém-se o coeficiente k_v , através da Eq (1.4):

$$k_v = \frac{E}{(1 - \nu^2) \cdot B \cdot I_p} \quad (1.4)$$

Tabela 3 - Fator de influência I_p .

<i>Forma</i>	<i>Sapata Flexível</i>			<i>Sapata Rígida</i>
	<i>Centro</i>	<i>Canto</i>	<i>Médio</i>	
<i>Circular</i>	1,00	0,64*	0,85	0,79
<i>Quadrada</i>	1,12	1,12	0,95	0,99
<i>L/B = 1,5</i>	1,36	1,36	1,15	
<i>2</i>	1,52	1,52	1,30	
<i>3</i>	1,78	1,78	1,52	
<i>5</i>	2,10	2,10	1,83	
<i>10</i>	2,53	2,53	2,25	
<i>100</i>	4,00	4,00	3,70	

*Borda.

Fonte: Perloff e Baron, 1976 *apud* Cintra et. al. (2003).

Pela Eq. (1.4) é possível observar que, quanto maior for a fundação, (lado B), menor será o coeficiente k_v . Além disso, quanto mais a formato da fundação se distanciar do quadrado ou do círculo, tendendo assim para uma forma retangular mais alongada, também será menor o valor de k_v .

Segundo Cintra et. al. (2003), pode-se observar que o recalque no centro de uma sapata quadrada flexível é o dobro do apresentado nos cantos. Logo, para passar a sapata flexível para rígida, as tensões de contato devem se acentuar nas bordas e ser aliviadas na região central. No caso de areias a situação é contrária, os recalques de uma sapata flexível são menores no centro devido ao efeito de confinamento. Por isso, as tensões de contato na base da sapata rígida devem ser acentuadas no centro e reduzidas nas bordas.

Para os EEF que permanecem rígidos mesmo após a deformação elástica do solo, e considerando uma variação linear das tensões, segundo Scarlat (1993, p.35), é possível substituir o conjunto de molas em cada uma das direções por três molas, uma em cada direção, aplicadas no centro da fundação.

K_{mv} Coeficiente de mola para os deslocamentos verticais;

K_{mh} Coeficiente de mola para os deslocamentos horizontais;

$K_{m\theta}$ Coeficiente de mola para as rotações;

Com esses coeficientes de mola, os deslocamentos podem ser calculados nas direções vertical, horizontal e angular, utilizando o modelo de Winkler.

$$d_v = \frac{F_v}{K_{mv}} = \frac{\sigma_v}{k_v A_f} \quad (1.5)$$

$$d_h = \frac{F_h}{K_{mh}} = \frac{\sigma_h}{k_h A_f} \quad (1.6)$$

$$d_\theta = \frac{M}{K_{m\theta}} = \frac{M}{k_\theta A_f} \quad (1.7)$$

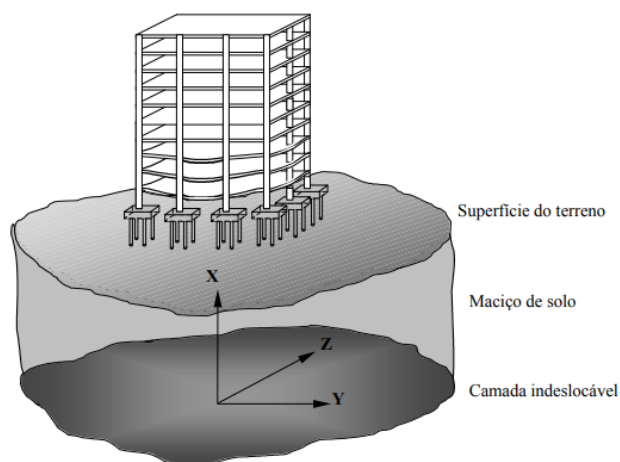
Existem diversos trabalhos que buscam metodologias para modelar a interação solo-estrutura, e entre eles, três são considerados os mais originais e inovadores.

O primeiro modelo, elaborado por Mindlin (1936) e citado em Cruz (2012, p. 29), trata o solo como um meio homogêneo, isotrópico e contínuo, fazendo uso da teoria da elasticidade e aplicando a lei de Hooke. Este modelo impõe um conjunto de forças aplicadas nas três

direções e, com base nas hipóteses mencionadas, gera condições de contorno com deslocamentos nulos a grandes distâncias.

Os modelos que empregam métodos discretos de aproximação, especialmente o Método dos Elementos de Contorno e o Método dos Elementos Finitos, constituem o segundo grupo. O último é muito eficiente em problemas bidimensionais, porém requer um grande processamento de dados em situações tridimensionais.

Figura 4 - Camadas do maciço no modelo solo-estrutura.



Fonte: Iwamoto (2000).

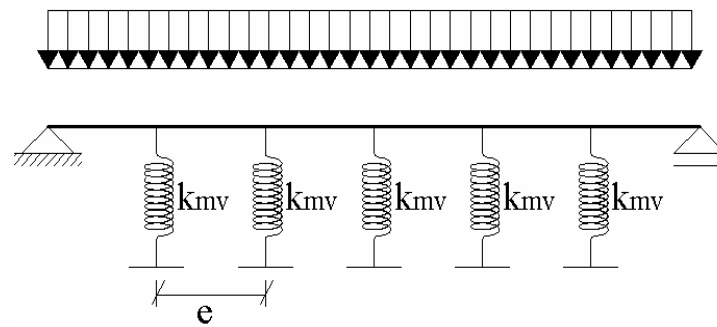
O terceiro modelo, o mais difundido e utilizado neste trabalho para representar esse fenômeno, é o modelo de Winkler (1867), que consiste na substituição do solo por um conjunto de molas discretas. Emil Winkler foi o primeiro a formular e resolver o problema de uma viga elástica apoiada em uma base deformável. Este modelo de viga sobre uma fundação elástica, que assume uma relação linear entre força e deslocamento, é conhecido como fundação de Winkler. Normalmente, correlações empíricas são usadas para determinar os coeficientes de rigidez das molas, o que pode afetar os resultados.

A maior vantagem desse modelo é a sua simplicidade e facilidade de implementação computacional, além de gerar resultados satisfatórios em termos de recalques, tensões e esforços para análises (ANTONIAZZI, 2011).

Para compreender o fenômeno de interação entre o solo e a estrutura, é essencial analisar o comportamento do solo quando submetido às cargas dos edifícios. De acordo com Cintra, Aoki e Albiero (2011), durante o carregamento, ocorrem deslocamentos verticais que podem variar de centímetros a centenas de centímetros.

Outro fator fundamental nesse processo é a rigidez da estrutura, uma vez que, quanto maior ela for, os recalques teóricos tendem a ser maiores do que aqueles que realmente ocorrem.

Figura 5 - Viga sobre base elástica: molas de Winkler.



Fonte: Cruz e Cruz (2023).

Portanto, a previsão do comportamento do solo representa um dos desafios na área da mecânica dos solos. Os modelos adotados consideram três tipos de recalques originados de diferentes fenômenos, o que leva a mecânica dos solos a avançar tratando-os de forma separada: o recalque imediato ou elástico, o recalque por adensamento primário e o recalque por adensamento secundário. No caso do modelo com as molas de Winkler, os recalques elásticos assumem uma importância significativa. Portanto, alguns comentários serão feitos sobre esses recalques.

Recalques imediatos ou elásticos

Esses recalques ocorrem predominantemente em solos arenosos e são independentes do tempo. Eles resultam da deformação quase instantânea do solo, sem que ocorra a redução do índice de vazios quando o carregamento é aplicado.

Embora o solo não seja um material elástico, esse recalque pode ser modelado utilizando a teoria da elasticidade.

1.1.2 O ESTADO DA ARTE DA ANÁLISE MATRICIAL DE ESTRUTURAS

1.1.2.1. Considerações Históricas

O método de rigidez (ou dos deslocamentos) existe há aproximadamente 150 anos. Navier, em 1826, foi talvez o primeiro a usá-lo. Embora seja difícil afirmar quem foi o pioneiro na utilização do cálculo matricial na análise estrutural, sabe-se que em documentos de Bendixen (1914) e Ostenfeld (1926), citados em Cruz e Cruz (2023). Entretanto, em 1940, foram publicados trabalhos utilizando a álgebra matricial em análises de estruturas. Devido às dificuldades na solução de sistemas de equações, a ideia não recebeu a devida atenção.

Somente com a chegada dos computadores, a análise matricial passou a merecer a devida atenção. O método dos deslocamentos foi o que melhor se adaptou ao cálculo automático, passando, assim, a se sobrepor ao Método Matricial das Forças (Cruz e Cruz, 2023).

Em 1954, Argyris, ligado à indústria aeronáutica, promoveu grande desenvolvimento e divulgação dos métodos de análise estrutural através da álgebra matricial nos EUA, marcando o surgimento dos primeiros programas.

Ainda de acordo com Cruz (2023 e Cruz, p. 22), foi o brasileiro Fernando Venâncio Filho, do Instituto Tecnológico Aeronáutico (ITA), que publicou o primeiro trabalho sobre o tema em 1960, intitulado “Matrix analyses of plane rigid frames”, republicado em 1962 na revista “Estrutura” nos números 42 e 43, sob o título “Formulação Matricial da Hiperestática”.

A formulação matricial para a análise estrutural é considerada a precursora dos grandes métodos de análise existentes atualmente, como o Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método dos Elementos de Contorno (MEC).

1.1.2.2. O método

A análise de uma estrutura implica a determinação de todas as solicitações internas, das deformações e dos deslocamentos resultantes da ação dos esforços externos que atuam sobre ela (Cruz, 1985).

Para atingir esse objetivo, o método dos deslocamentos faz uso das equações de equilíbrio após as equações de compatibilidade. Nesse caso, os deslocamentos nodais são as incógnitas cinéticas a serem determinadas inicialmente, enquanto os esforços nas extremidades das barras e as reações dos apoios serão conhecidos posteriormente. Nesse método, considerando a notação matricial, a equação principal é do tipo:

$$\{P\} = [K]\{D\}. \quad (1.8)$$

$\{P\}$ é o vetor dos esforços externos nodais;

$[K]$ é a matriz de rigidez da estrutura;

$\{D\}$ é o vetor dos deslocamentos nodais da estrutura

A matriz de rigidez da estrutura é obtida a partir de uma soma conveniente das rigidezes das barras referidas ao Sistema Global de Referência (SGR). As matrizes de rigidez das barras

referidas ao SGR são aqui representadas por $[K]$, e quando referidas ao Sistema Local de Referência (SLR), por $[k']$.

É possível considerar que a aplicação do método matricial dos deslocamentos inicia com as equações força-deslocamentos. Resolvidas estas equações, obtêm-se os deslocamentos desconhecidos e, em seguida, com esses valores, calculam-se as reações dos apoios. Também a partir desses deslocamentos e com as equações de compatibilidade de deslocamentos, calculam-se os esforços nas extremidades das barras.

As equações força-deslocamento, por sua vez, são obtidas a partir das condições de equilíbrio, das equações de compatibilidade e dos coeficientes de rigidez da estrutura, conforme demonstrado na Eq. (1.9).

$$\begin{aligned} P_1 &= K_{11}D_1 + K_{12}D_2 + K_{13}D_3 + \dots + K_{19}D_9 \\ P_2 &= K_{21}D_1 + K_{22}D_2 + K_{23}D_3 + \dots + K_{29}D_9 \\ P_3 &= K_{31}D_1 + K_{32}D_2 + K_{33}D_3 + \dots + K_{39}D_9 \end{aligned} \quad (1.9)$$

em que:

P_i é o esforço externo nodal na coordenada i

$K_{i,j}$ é o coeficiente de rigidez da estrutura ou global, que associa esforço na coordenada i com deslocamento nodal na coordenada j .

D_j é o deslocamento nodal na coordenada j

Este sistema de equações, quando escrito na forma matricial, resulta na Eq. (1.10), que pode ser reescrito com notação para coordenadas livres e coordenadas vinculadas, conforme segue:

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ P_7 \\ P_8 \\ P_9 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} & K_{17} & K_{18} & K_{19} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} & K_{27} & K_{28} & K_{29} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} & K_{37} & K_{38} & K_{39} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} & K_{47} & K_{48} & K_{49} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} & K_{57} & K_{58} & K_{59} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} & K_{67} & K_{68} & K_{69} \\ K_{71} & K_{72} & K_{73} & K_{74} & K_{75} & K_{76} & K_{77} & K_{78} & K_{79} \\ K_{81} & K_{82} & K_{83} & K_{84} & K_{85} & K_{86} & K_{87} & K_{88} & K_{89} \\ K_{91} & K_{92} & K_{93} & K_{94} & K_{95} & K_{96} & K_{97} & K_{98} & K_{99} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \\ D_9 \end{Bmatrix} \quad (1.10)$$

$$\begin{Bmatrix} \{P\}_C \\ \{P\}_R \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K]_{CC} & [K]_{CR} \\ [K]_{RC} & [K]_{RR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{D\}_C \\ \{D\}_R \end{Bmatrix} \quad (1.11)$$

Em que:

$\{P\}_C$ Esforços externos nodais nas coordenadas não vinculadas (o carregamento nodal),

$\{P\}_R$ Esforços externos nodais nas coordenadas vinculadas (as reações de apoio),

$[K]_{CC}$ Submatriz de rigidez global que associa o $\{P\}_C$ ao $\{D\}_C$,

$[K]_{CR}$ Submatriz de rigidez global que associa o $\{P\}_C$ ao $\{D\}_R$,

$[K]_{RC}$ Submatriz de rigidez global que associa o $\{P\}_R$ ao $\{D\}_C$,

$[K]_{RR}$ Submatriz de rigidez global que associa o $\{P\}_R$ ao $\{D\}_R$,

$\{D\}_C$ Deslocamentos nodais nas coordenadas não vinculadas,

$\{D\}_R$ Deslocamentos nodais nas coordenadas vinculadas (nos apoios),

Da solução da equação matricial Eq. (1.11), obtém-se:

$$\{P\}_C = [K]_{CC} \{D\}_C + [K]_{CR} \{D\}_R \quad (1.12)$$

$$\{P\}_R = [K]_{RC} \{D\}_C + [K]_{RR} \{D\}_R \quad (1.13)$$

O vetor $\{D\}_R$ pode ser considerado nulo nos casos em que as fundações da estrutura não sejam consideradas apoiadas em base elástica, ou seja, em base deformável. Além disso, esse vetor pode ser considerado conhecido, pois foi definido a partir de cálculos simplificados que adotam uma estimativa de carga e uma estimativa para a rigidez (coeficiente de adensamento) do solo.

Sendo $\{D\}_R = \{0\}$, o cálculo dos deslocamentos nodais das coordenadas nodais livres, (isto é não vinculadas) é feito a partir da Eq. (1.12“a”), como segue:

$$\{D\}_C = [K]_{CC}^{-1} \{P\}_C \quad (1.12\text{“a”})$$

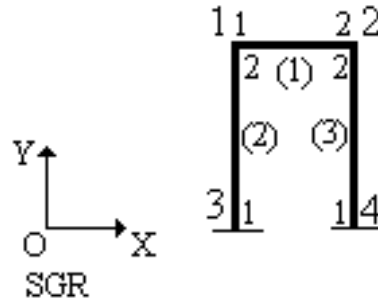
$$\{P\}_R = [K]_{RC} \{D\}_C \quad (1.13\text{“a”})$$

Quando os deslocamentos $\{D\}_R$ são pré-definidos, com pelo menos um deles diferente de zero, então o cálculo do $\{D\}_C$ será feito como segue:

$$\{D\}_C = \frac{\{P\}_C - [K]_{CR} \{D\}_R}{[K]_{CC}} \quad (1.14)$$

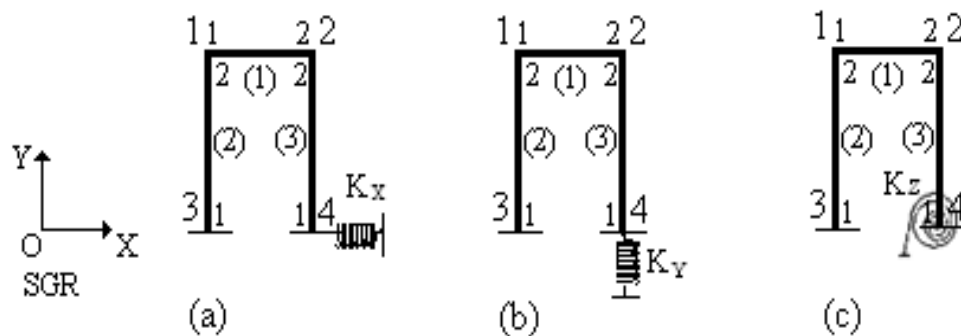
Por fim, se a fundação estiver assente em base deformável, então, para a consideração de sua deslocabilidade nas direções estabelecidas pelo SGR, serão inseridas molas nestas coordenadas. A análise da estrutura original deverá levar em conta agora a estrutura equivalente, incluindo as barras que representarão as molas e os nós que surgirão, como mostrado nas Figuras de 6 a 9.

Figura 6 - Estrutura original.



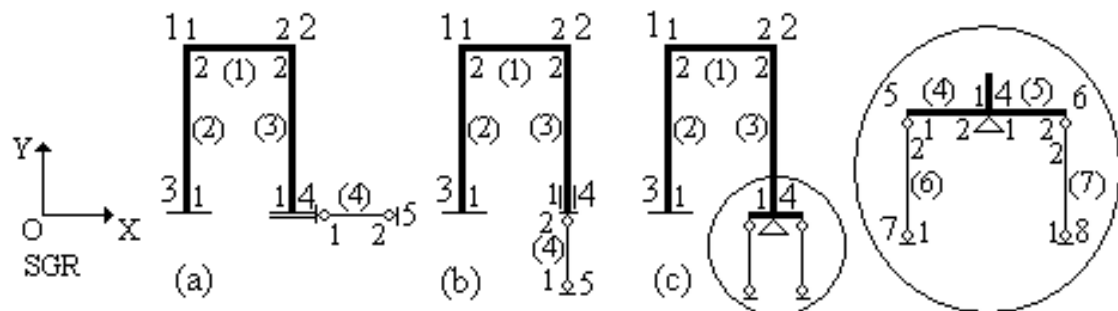
Fonte: Cruz e Cruz (2023).

Figura 7 - Molas para representar a deformabilidade do solo sob a fundação.



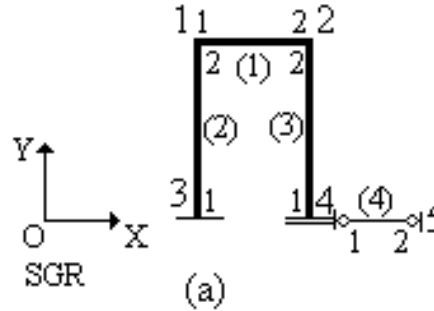
Fonte: CRUZ (2023).

Figura 8 - Barras biarticuladas para representar as molas da Figura 7.



Fonte: Cruz (2023).

Figura 9 - Elemento de conexão horizontal no nó 4.



Fonte: Cruz e Cruz (2023).

Na Figura 6, temos o pórtico a ser analisado, e a representação esquemática indica que o nó 4 será considerado indeslocável. Na Figura 7 (a), (b) e (c), as molas indicam que agora o nó 4, um dos dois apoios do pórtico, será analisado sob o efeito de uma base elástica. Na Figura 7 (a), a mola horizontal ali colocada interpreta a deformabilidade da base do apoio da fundação na direção horizontal, ou seja, do eixo X do SGR. Na Figura 7 (b), a deformabilidade considerada é na direção vertical, ou seja, ao longo do eixo Y do SGR. Na Figura 7 (c), a mola é de rotação, considerando a deformabilidade do maciço em relação ao efeito de momento.

Na Figura 8, as molas foram substituídas por barras biarticuladas cuja rigidez axial, k , deve ser igual ao k da mola que ela representa. A mola de rotação da Figura 7 (c) é substituída por um esquema representado por duas barras, também biarticuladas, uma em cada extremidade de uma barra perfeitamente rígida que se conecta à extremidade 1 da barra (3), estando apoiada exatamente no ponto (ou nó) 4. O apoio ali colocado é do tipo apoio fixo. A Figura 9, que repete a Figura 8 (a), mostra o pórtico original com uma barra horizontal biarticulada que chega ao nó 4. Esta é a estrutura que será analisada a seguir para o estabelecimento da formulação a ser aplicada quando da consideração de base(s) elástica(s).

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ P_7 \\ P_8 \\ P_9 \\ P_{10} \\ P_{11} \\ P_{12} \\ P_{13} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} & K_{1,3} & K_{1,4} & K_{1,5} & K_{1,6} & K & K & K & K_{1,10} & K_{1,11} & K_{1,12} & 0 & 0 & 0 \\ K_{2,1} & K & K & K & K & K & K & K & K & K & K & K & 0 & 0 & 0 \\ K_{3,1} & K & K & K & K & K & K & K & K & K & K & K & 0 & 0 & 0 \\ K_{4,1} & K & K & K & K & K & K & K & K & K & K & K & 0 & 0 & 0 \\ K_{5,1} & K & K & K & K & K & K & K & K & K & K & K & 0 & 0 & 0 \\ K_{6,1} & K & K & K & K & K & K & K & K & K & K & K & 0 & 0 & 0 \\ K & K & K & K & K & K & K & K & K & K & K & K & 0 & 0 & 0 \\ K & K & K & K & K & K & K & K & K & K & K & K & 0 & 0 & 0 \\ K & K & K & K & K & K & K & K & K & K & K & K & 0 & 0 & 0 \\ K_{10,1} & K & K & K & K & K & K & K & K & k'_{11(3)} + k_h & k'_{12(3)} & k'_{13(3)} & -k_h & 0 & 0 \\ K_{11,1} & K & K & K & K & K & K & K & K & k'_{21(3)} & k'_{22(3)} & k'_{23(3)} & 0 & 0 & 0 \\ K_{12,1} & K & K & K & K & K & K & K & K & k'_{31(3)} & k'_{32(3)} & k'_{33(3)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_h & 0 & 0 & k_h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ D_{10} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.15)$$

Da observação da Eq. (1.15), percebe-se que as duas últimas linhas e colunas podem ser removidas. Se a linha e a coluna 13 também forem retiradas da Eq. (1.15), resultaria na Eq. (1.16).

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ P_7 \\ P_8 \\ P_9 \\ P_{10} \\ P_{11} \\ P_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} & K_{1,3} & K_{1,4} & K_{1,5} & K_{1,6} & K & K & K & K_{1,10} & K_{1,11} & K_{1,12} \\ K_{2,1} & K & K & K & K & K & K & K & K & K & K & K \\ K_{3,1} & K & K & K & K & K & K & K & K & K & K & K \\ K_{4,1} & K & K & K & K & K & K & K & K & K & K & K \\ K_{5,1} & K & K & K & K & K & K & K & K & K & K & K \\ K_{6,1} & K & K & K & K & K & K & K & K & K & K & K \\ K & K & K & K & K & K & K & K & K & K & K & K \\ K & K & K & K & K & K & K & K & K & K & K & K \\ K & K & K & K & K & K & K & K & K & K & K & K \\ K_{10,1} & K & K & K & K & K & K & K & K & k'_{11(3)} + k_h & k'_{12(3)} & k'_{13(3)} \\ K_{11,1} & K & K & K & K & K & K & K & K & k'_{21(3)} & k'_{22(3)} & k'_{23(3)} \\ K_{12,1} & K & K & K & K & K & K & K & K & k'_{31(3)} & k'_{32(3)} & k'_{33(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ D_{10} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.16)$$

É importante notar que na equação matricial, Eq. (1.16), todos os coeficientes de rigidez são exatamente iguais aos que seriam obtidos para o pórtico original. Apenas o coeficiente k foi alterado, pois a ele foi acrescentado o coeficiente da mola horizontal, conforme mostrado na Eq. (1.17).

$$[K] = 10^2 \begin{bmatrix} 1,5 & 0 & -3 & -1,5 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 150 & 0 & 0 & -150 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 8 & 3 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1,5 & 0 & 3 & 151,5 & 0 & 3 & -150 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -150 & 0 & 0 & 151,5 & 3 & 0 & -1,5 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 4 & 3 & 3 & 16 & 0 & -3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -150 & 0 & 0 & 150,768 & 0 & -1,92 & -0,768 & 0 & 1,92 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1,5 & -3 & 0 & 121,5 & -3 & 0 & -120 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 1,92 & -3 & 14,4 & -1,92 & 0 & 3,2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,768 & 0 & -1,92 & 0,768+10 & 0 & -1,92 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -120 & 0 & 0 & 120 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,92 & 0 & 3,2 & -1,92 & 0 & 6,4 \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

Como estamos no campo de validade da formulação linear do método dos deslocamentos, a superposição de causas e efeitos é válida. Portanto, o desenvolvimento apresentado pode ser aplicado tanto à mola vertical quanto à mola rotacional, e as conclusões podem ser aplicadas à matriz de rigidez de um único elemento de conexão.

$$[k]' = \begin{bmatrix} k_{mX} & 0 & 0 & -k_{mX} & 0 & 0 \\ 0 & k_{mY} & 0 & 0 & -k_{mY} & 0 \\ 0 & 0 & k_{mZ} & 0 & 0 & -k_{mZ} \\ -k_{mX} & 0 & 0 & k_{mX} & 0 & 0 \\ 0 & -k_{mY} & 0 & 0 & k_{mY} & 0 \\ 0 & 0 & -k_{mZ} & 0 & 0 & k_{mZ} \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

Dessa forma, é fácil perceber que ao aplicar molas na direção vertical e de rotação no nó 4, os coeficientes de rigidez da estrutura, denotados por $K_{11,11}$ e $K_{12,12}$ deveriam ser adicionados os valores de K_{mv} ou K_{mY} e K_{mZ} ou $K_{m\theta}$. Se a extremidade I do elemento de conexão cuja rigidez é dada pela Eq. (1.19) está no nó 4 do pórtico, então, tudo seria resolvido ao ser somado os elementos não nulos da submatriz da Eq. (1.19) aos elementos $K_{10,10}$, $K_{11,11}$ e $K_{12,12}$ da matriz de rigidez da estrutura.

$$\begin{bmatrix} K_{mX} & 0 & 0 \\ 0 & K_{mY} & 0 \\ 0 & 0 & K_{m\theta} \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

1.2 JUSTIFICATIVA

Os projetos de engenharia que não consideram apoios elásticos (ou seja, que consideram apoios inamovíveis) podem levar a interpretações errôneas no dimensionamento da estrutura. Casos de edifícios em Santos/SP, nos quais ocorrem fissuras e outras patologias, exemplificam a necessidade de analisar conjuntamente as estruturas e o maciço sobre os quais estão apoiados.

Segundo Colares (2006), citado por Pavan, Costella e Guarnieri (2014, p. 2), "Há vários casos de edificações que apresentaram deformidades não previstas devido a alterações no comportamento mecânico idealizado na análise estrutural." Entre essas deformidades, destacam-se problemas graves, como fissuras em vigas e lajes, e até mesmo o esmagamento de pilares.

Portanto, é inegável a importância de quantificar as mudanças nos esforços resultantes da aplicação de métodos simplificados que não representam adequadamente a realidade da estrutura. É essencial continuar avançando nos estudos teóricos para aprimorar os procedimentos de análise estrutural, especialmente no contexto da AISE.

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 GERAL

Evidenciar os efeitos da deslocabilidade das fundações na variação das grandezas de interesse para análise e dimensionamento de estruturas reticuladas planas. Para alcançar esse objetivo, serão comparados os valores das grandezas de interesse, ou seja, dos deslocamentos nodais, das solicitações nas extremidades das barras e das reações de apoio resultantes de análises de pórticos planos simples sob várias condições relacionadas à deslocabilidade ou não dos apoios.

1.3.2 ESPECÍFICOS

Proceder a análise estrutural de dois pórticos planos simples considerando algumas das possibilidades de ligação da fundação com o maciço que lhe dá apoio.

- a) Considerando os apoios indeslocáveis;
- b) Considerando os apoios sobre as molas de Winkler;
- c) Considerando deslocamentos impostos aos apoios;
- d) Considerando a interação solo estrutura, ISE.

1.3.3 O ESCOPO DO TCC

O presente trabalho é o resultado de pesquisa bibliográfica sobre o tema desenvolvida pelo autor, com aplicações em pórticos planos cujo material é considerado elástico linear e o comportamento estrutural restrito à linearidade (linearidade física e geométrica). Isso possibilita a superposição de causas e efeitos, bem como a análise estrutural na configuração inicial indeformada.

Dessa forma, quanto aos procedimentos para análise estrutural, a formulação será limitada à abordagem linear do Método Matricial dos Deslocamentos.

Devido a isso, o desenvolvimento abordado neste trabalho se baseará no estudo da interação solo-estrutura, considerando os esforços e deslocamentos calculados para os pontos nodais da estrutura analisada. Isso se aplica especialmente quando se trata de deslocamentos e esforços nas coordenadas vinculadas de estruturas reticuladas ou na subdivisão da estrutura em vários elementos de barra. Em cada extremidade desses elementos, serão analisados os efeitos da base elástica.

Portanto, o Modelo de Winkler será considerado por meio de molas aplicadas de acordo com as coordenadas globais da estrutura, conforme necessário em cada caso.

1.4 A ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O conteúdo deste Trabalho de Conclusão de Curso está apresentado em sete capítulos, indicados a seguir:

Capítulo 1 – INTRODUÇÃO;

Capítulo 2 – O PÓRTICO, A DESLOCABILIDADE DOS APOIOS E O
CÁLCULO DAS GRANDEZAS DE INTERESSE;

Capítulo 3 – ANÁLISE ITERATIVA COM A APLICAÇÃO DAS MOLAS DE
WINKLER;

Capítulo 4 – ANÁLISE DOS RESULTADOS;

Capítulo 5 – CONCLUSÕES.

No Capítulo 1, pretende-se contextualizar o trabalho no estudo da influência dos deslocamentos nas solicitações e reações de apoio de estruturas (pórticos planos) sob a ótica da deslocabilidade dos apoios. Apresentação dos objetivos, escopo e organização.

No Capítulo 2, serão introduzidos os conceitos e as formulações que possibilitam a realização das análises da estrutura para cada caso considerado.

O Capítulo 3 está estruturado de modo a apresentar a análise de estruturas sobre base elástico através do processo iterativos.

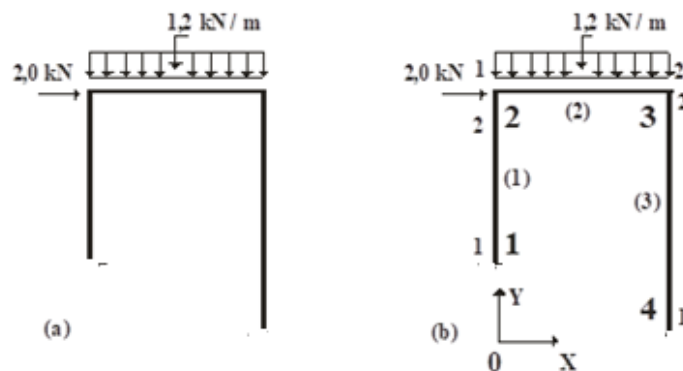
No Capítulo 4, serão analisados os resultados obtidos e no Capítulo 5 e serão apresentadas as conclusões.

2. O PÓRTICO, A DESLOCABILIDADE DOS APOIOS E O CÁLCULO DAS GRANDEZAS DE INTERESSE

Neste capítulo, inicialmente, será feita a apresentação do pórtico a ser analisado sob cada uma das condições de indeslocabilidade ou de deslocabilidade dos apoios consideradas.

2.1 O PÓRTICO MODELO

Figura 10 - Pórtico padrão, SCG, carregamento, definição das barras, dos nós e da incidência de cada uma delas.



Fonte: Cruz e Cruz (2023).

Dados:

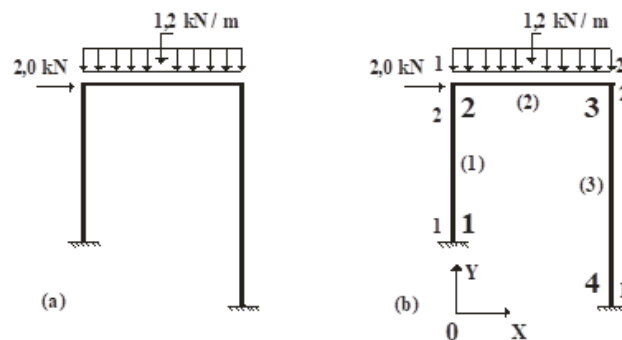
$$E = 2000000 \text{ kN} / \text{m}^2 \quad L_1 = L_2 = 4 \text{ m} \quad I = 0,0004 \text{ m}^4$$

$$A = 0,03 \text{ m}^2 \quad L_3 = 5 \text{ m}$$

2.2 O PÓRTICO E OS DESLOCAMENTOS NULOS NOS APOIOS

Análise da estrutura implementada com a formulação do Método Matricial dos Deslocamentos para estruturas de comportamento linear (físico e geométrico).

Figura 11 - Pórtico padrão, com sua discretização.



Fonte: Cruz e Cruz (2023).

1ª etapa:

Definir o Sistema Global de Referência (SGR), numerar os nós, identificar e numerar as barras, bem como estabelecer a incidência de cada uma delas na estrutura.

A Figura 11 - "b" apresenta a representação da estrutura discretizada, incluindo a numeração dos nós, a identificação das barras com suas extremidades numeradas e a definição do Sistema Global de Referência (SGR).

2ª etapa:

Determinação das matrizes de rigidez - $[k]$, no Sistema Local de Referência (SLR), das matrizes de rotação - $[T]$, e das matrizes de incidência - $[a]$, de cada barra da estrutura.

a) As matrizes de rigidez

A matriz de rigidez da barra do pórtico plano é calculada conforme a expressão geral indicada na Eq. (3.26) do Vol. I de Cruz JMF e Cruz LC (2023), substituindo adequadamente os valores de: E , L , A e I , adequadamente.

- Matriz de rigidez da barra (1), $[k]_{(1)}$.

$$[k]_{(1)} = \begin{bmatrix} 15000 & 0 & 0 & -15000 & 0 & 0 \\ 0 & 150 & 300 & 0 & -150 & 300 \\ 0 & 300 & 800 & 0 & -300 & 400 \\ -15000 & 0 & 0 & 15000 & 0 & 0 \\ 0 & -150 & -300 & 0 & 150 & -300 \\ 0 & 300 & 400 & 0 & -300 & 800 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

- Matriz de rigidez da barra (2), $[k]_{(2)}$

Considerando que a barra (2) possui o mesmo comprimento, material, seção transversal e condições de contorno que a barra (1), então:

$$[k]_{(1)} = [k]_{(2)} \quad (2.2)$$

- Matriz de rigidez da barra (3), $[k]_{(3)}$

$$[k]_{(3)} = \begin{bmatrix} 12000 & 0 & 0 & -12000 & 0 & 0 \\ 0 & 76,8 & 192 & 0 & -76,8 & 192 \\ 0 & 192 & 640 & 0 & -1920 & 320 \\ -12000 & 0 & 0 & 12000 & 0 & 0 \\ 0 & -76,8 & -192 & 0 & 76,8 & -192 \\ 0 & 192 & 320 & 0 & -192 & 640 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

b) As matrizes de rotação

A matriz de rotação aplicável às grandezas da barra de pórtico plano em função de θ é indicada na Eq. (4.11) do Vol. I de Cruz, J.M.F e Cruz, L.C (2023).

- Matriz de rotação da barra (1), $[T]_{(1)}$ com $\alpha = 90^\circ$

$$[T]_{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

- Matriz de rotação da barra (2), $[T]_{(2)}$ com $\alpha = 0^\circ$

$$[T]_{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

- Matriz de rotação da barra (3), $[T]_{(3)}$

Sendo a barra (3) paralela à barra (1), e tendo aquela incidência crescente no mesmo sentido desta, então:

$$[T]_{(1)} = [T]_{(3)} \quad (2.6)$$

a) As matrizes de incidência

- Matriz de incidência da barra (1), $[a]_{(1)}$

$$[a]_{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

- Matriz de incidência da barra (2), $[a]_{(2)}$

$$[a]_{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

- Matriz de incidência da barra (3), $[a]_{(3)}$

$$[a]_{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

3º etapa:

Cálculo do vetor $\{p_0\}$ e $\{p_0\}'$ de cada uma das barras da estrutura. Calcular o vetor $\{P_0\}$ e montar os vetores $\{P\}$ e $\{D\}$.

a) Determinação do vetor $\{p_0\}$ de cada uma das barras

Sem cargas ao longo das barras (1) e (3), $\{p_0\}_{(1)}$ e $\{p_0\}_{(3)}$ são nulos. Considerando a barra (2) como uma viga biengastada, cujo carregamento está indicado na Fig. 2.2, as reações dos apoios serão os elementos do vetor $\{p_0\}_{(2)}$. Logo:

$$\{p_0\}_{(2)} = \begin{Bmatrix} 0kN \\ 2,4kN \\ 1,6kNm \\ 0kN \\ 2,4kN \\ -1,6kNm \end{Bmatrix} \quad (2.10)$$

b) Determinação do vetor $\{p_0\}'$ de cada uma das barras

Assim, $\{p_0\}'_{(1)}$ e $\{p_0\}'_{(3)}$ são nulos também. Com o vetor $\{p_0\}'_{(2)}$, e com a matriz $[T]_{(2)} = [I]$, dada na Eq. (2.1), calcula-se o vetor $\{p_0\}'_{(2)}$:

$$[p_0]_{(2)} = [p_0]_{(2)} \quad (2.11)$$

c) Determinação do vetor $\{P_0\}$

O vetor $\{P_0\}$ pode ser obtido através do somatório: $\sum_{i=1}^n [a]_{(i)}^T \{p_0\}'_{(i)}$, em que n é o número de barras da estrutura. Devido ao fato de $\{p_0\}'_{(1)}$ e $\{p_0\}'_{(3)}$ serem nulos, então $\{P_0\} = [a]_{(2)}^T \{p_0\}'_{(2)}$, com $\{p_0\}'_{(2)}$ dado na Eq. (2.11) e, sendo $[a]_{(2)}^T$ a transposta da matriz dada na Eq. (2.8). Logo:

$$\{P_0\}^T = \{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 2,4 \quad 1,6 \quad 0 \quad 2,4 \quad -1,6 \quad 0 \quad 0 \quad 0\} \quad (2.12)$$

d) Obtenção dos vetores $\{P\}$ e $\{D\}$

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ P_{10} \\ P_{11} \\ P_{12} \end{Bmatrix} \quad \{D\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \\ D_9 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.13 - \text{"a"} \text{ e "b"})$$

4ª etapa:

Obtenção da matriz de rigidez de cada uma das barras da estrutura, referidas ao sistema global - $[k]$, através da expressão $[k] = [T][k][T]^T$.

- Matriz de rigidez da barra (1), no sgr, $[k]_{(1)}''$

$$[k]_{(1)}'' = \begin{bmatrix} 150 & 0 & -300 & -150 & 0 & -300 \\ 0 & 15000 & 0 & 0 & -15000 & 0 \\ -300 & 0 & 800 & 300 & 0 & 400 \\ -150 & 0 & 300 & 150 & 0 & 300 \\ 0 & -15000 & 0 & 0 & 15000 & 0 \\ -300 & 0 & 400 & 300 & 0 & 800 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

- Matriz de rigidez da barra (2), no sgr, $[k]_{(2)}''$

Para a barra (1), sendo $[T]_{(2)} = [I]$, tem-se que:

$$[k]_{(2)}'' = [k]_{(2)} \quad (2.15)$$

- Matriz de rigidez da barra (3), no sgr, $[k]_{(3)}''$

$$[k]_{(3)}'' = \begin{bmatrix} 76,8 & 0 & -192 & -76,8 & 0 & -192 \\ 0 & 12000 & 0 & 0 & -12000 & 0 \\ -192 & 0 & 640 & 192 & 0 & 320 \\ -76,8 & 0 & 192 & 76,8 & 0 & 192 \\ 0 & -12000 & 0 & 0 & 12000 & 0 \\ -192 & 0 & 320 & 192 & 0 & 640 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

5ª etapa:

Obtenção da matriz de rigidez $[K]$ da estrutura e montagem da equação $\{P\} = [K]\{D\}$

a) Obtenção da matriz $[K]$, (através do procedimento prático)

Escrevendo a matriz $[K]$ com notação ao nível de nó, tem-se:

$$[K] = \begin{bmatrix} [K]_{11} & [K]_{12} & [K]_{13} & [K]_{14} \\ [K]_{21} & [K]_{22} & [K]_{23} & [K]_{24} \\ [K]_{31} & [K]_{32} & [K]_{33} & [K]_{34} \\ [K]_{41} & [K]_{42} & [K]_{43} & [K]_{44} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

na qual cada elemento é uma submatriz $[K]_{ij}$, quadrada com $n=3$, que associa os deslocamentos do nó j aos esforços do nó i . A obtenção da matriz $[K]$ se dará com a determinação de todas as submatrizes $[K]_{ij}$.

- Determinação dos $[K]_{i,j}$

Conforme explicado no item 6.2, do Vol. I de CRUZ, JMF e CRUZ, L.C. (2023), tem-se:

$$[K]_{11} = [k]_{1,1(1)}''$$

$$[K]_{12} = [k]_{1,2(1)}''$$

$$[K]_{14} = [0]$$

$$[K]_{13} = [0] \quad [K]_{22} = [k]_{22(1)}'' + [k]_{11(2)}''$$

$$[K]_{23} = [k]_{1,2(2)}''$$

$$[K]_{24} = [0]$$

$$[K]_{33} = [k]_{2,2(2)}'' + [k]_{2,2(3)}''$$

$$[K]_{34} = [k]_{2,1(3)}''$$

$$[K]_{44} = [k]_{1,1(3)}'' \quad (2.18 - \text{“a”}, \text{“b”}, \text{“c”}, \dots \text{“h”}, \text{“i”} \text{ e “j”})$$

Cada $[k]_{ij(b)}''$ é uma submatriz da matriz de rigidez da barra (b) definida conforme a Eq. (3.55) e especificada nas Eqs. (3.27), (3.28 – “a” e “b”) e (3.29) do Vol. I de CRUZ, JMF e CRUZ, L.C. (2023).

Com a adequada substituição das $[k]_{ij(b)}''$ a partir das Eqs. (2.14), (2.15) e (2.16), e organizando-as conforme a Eq. (2.17), obtém-se, a matriz de rigidez global ou da estrutura.

$$[K]=10^2 \begin{bmatrix} 1,5 & 0 & -3 & -1,5 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 150 & 0 & 0 & -150 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 8 & -3 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1,5 & 0 & -3 & 151,5 & 0 & 3 & -150 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -150 & 0 & 0 & 151,5 & 3 & 0 & -1,5 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 3 & 3 & 16 & 0 & -3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -150 & 0 & 0 & 150,77 & 0 & 1,92 & -0,77 & 0 & 1,92 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1,5 & -3 & 0 & 121,5 & -3 & 0 & -120 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 1,92 & -3 & 14,4 & -1,92 & 0 & 3,2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,77 & 0 & -1,92 & 0,77 & 0 & -1,92 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -120 & 0 & 0 & 120 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,92 & 0 & 3,2 & -1,92 & 0 & 6,4 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

b) Montagem da equação $\{P\} = [K]\{D\} + \{P_0\}$

Com a utilização da notação ao nível de nó, a equação: $\{P\} = [K]\{D\} + \{P_0\}$ terá a forma apresentada na Eq. (2.20).

$$\begin{Bmatrix} \{P\}_1 \\ \{P\}_2 \\ \{P\}_3 \\ \{P\}_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K]_{11} & [K]_{12} & [K]_{13} & [K]_{14} \\ [K]_{21} & [K]_{22} & [K]_{23} & [K]_{24} \\ [K]_{31} & [K]_{32} & [K]_{33} & [K]_{34} \\ [K]_{41} & [K]_{42} & [K]_{43} & [K]_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{D\}_1 \\ \{D\}_2 \\ \{D\}_3 \\ \{D\}_4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \{P_0\}_1 \\ \{P_0\}_2 \\ \{P_0\}_3 \\ \{P_0\}_4 \end{Bmatrix} \quad (2.20)$$

Os vetores $\{P\}_i$, $\{D\}_i$ e $\{P_0\}_i$ são, na ordem, o vetor dos esforços externos nodais, o vetor dos deslocamentos nodais e, por último, o vetor dos esforços decorrentes das cargas aplicadas fora dos nós, todos referentes ao nó i .

6ª etapa:

Solução da equação $\{P\} = [K]\{D\} + \{P_0\}$ em duas partes: sendo a primeira $\{P\}_C = [K]_{CC}\{D\}_C + \{P_0\}_C$ e a outra $\{P\}_R = [K]_{RC}\{D\}_C + \{P_0\}_R$, das quais foram excluídas respectivamente as parcelas $[K]_{CR}\{D\}_R$ e $[K]_{RR}\{D\}_R$, em razão dos deslocamentos das coordenadas vinculadas serem nulos.

Observa-se que $\{P\}_2$ e $\{P\}_3$ são as matrizes-elemento do vetor $\{P\}_C$ e, analogamente, $\{P\}_1$ e $\{P\}_4$ são as matrizes-elemento do vetor $\{P\}_R$ (acontecendo de modo semelhante com os deslocamentos e com o vetor $\{P_0\}$).

Devido a isso, é necessário mover a linha correspondente ao vetor de forças externas $\{P\}_1$ (primeira linha) para a terceira linha. Para garantir que o valor do determinante da matriz de rigidez global não seja alterado, é obrigatório alterar a posição da primeira coluna dessa matriz, movendo-a para a terceira posição. Assim, temos:

$$\begin{Bmatrix} \{P\}_2 \\ \{P\}_3 \\ \{P\}_1 \\ \{P\}_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K]_{22} & [K]_{23} & [K]_{21} & [K]_{24} \\ [K]_{32} & [K]_{33} & [K]_{31} & [K]_{34} \\ [K]_{12} & [K]_{13} & [K]_{11} & [K]_{14} \\ [K]_{42} & [K]_{43} & [K]_{41} & [K]_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{D\}_2 \\ \{D\}_3 \\ \{D\}_1 \\ \{D\}_4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \{P_0\}_2 \\ \{P_0\}_3 \\ \{P_0\}_1 \\ \{P_0\}_4 \end{Bmatrix} \quad (2.21)$$

a) Cálculo dos deslocamentos nas coordenadas “livres”

Agora, resolvendo $\{P\}_C = [K]_{CC} \{D\}_C + \{P_0\}_C$, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 15150 & 0 & 300 & -15000 & 0 & 0 \\ 0 & 15150 & 300 & 0 & -150 & 300 \\ 300 & 300 & 1600 & 0 & -300 & 400 \\ -15000 & 0 & 0 & 15076,8 & 0 & 192 \\ 0 & -150 & -300 & 0 & 12150 & -300 \\ 0 & 300 & 400 & 192 & -300 & 1440 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \\ D_9 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 2,4 \\ 1,6 \\ 0 \\ 2,4 \\ -1,6 \end{Bmatrix} \quad (2.22)$$

donde:

$$\begin{Bmatrix} D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \\ D_9 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,013370379m \\ -0,000095582m \\ -0,003617718rad \\ 0,013298395m \\ -0,000280521m \\ 0,000304384rad \end{Bmatrix} \quad (2.23)$$

b) Cálculo das reações dos apoios

Calculados os deslocamentos nodais incógnitos, tornou-se possível a solução da equação $\{P\}_R = [K]_{RC} \{D\}_C + \{P_0\}_R$,

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_{10} \\ P_{11} \\ P_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -150 & 0 & -300 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -15000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 300 & 0 & 400 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -76,8 & 0 & 192 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -192 & 0 & 320 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0,013370379 \\ -0,000095582 \\ -0,003617718 \\ 0,013298395 \\ -0,000280521 \\ 0,000304384 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.24)$$

donde:

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_{10} \\ P_{11} \\ P_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,92kN \\ 1,43kN \\ 2,56kNm \\ -1,08kN \\ 3,37kN \\ 2,65kNm \end{Bmatrix} \quad (2.25)$$

7.ª etapa:

Escrita das equações de compatibilidade de deslocamentos para cada nó; o cálculo dos deslocamentos das extremidades das barras no sgr e a obtenção do vetor dos esforços das extremidades das barras referido ao sistema da local - $\{p\}$.

Redação das equações de compatibilidade de deslocamentos para cada nó; cálculo dos deslocamentos nas extremidades das barras no SGR; e obtenção do vetor dos esforços nas extremidades das barras referido ao SLR - $\{p\}$.

a) Cálculo dos deslocamentos das extremidades das barras, SGR

- Da barra (1), $\{d\}'_{(1)} = [a]_{(1)} \{D\}$

$$\begin{Bmatrix} d_1' \\ d_2' \\ d_3' \\ d_4' \\ d_5' \\ d_6' \end{Bmatrix}_{(1)} = \begin{Bmatrix} 0m \\ 0m \\ 0rad \\ 0,013370379m \\ -0,000095582m \\ -0,003617718rad \end{Bmatrix} \quad (2.26)$$

- Da barra (2), $\{d\}'_{(2)} = [a]_{(2)} \{D\}$

$$\begin{Bmatrix} d_1' \\ d_2' \\ d_3' \\ d_4' \\ d_5' \\ d_6' \end{Bmatrix}_{(2)} = \begin{Bmatrix} 0,013370379m \\ -0,000095582m \\ -0,003617718rad \\ 0,013298395m \\ -0,000280521m \\ 0,000304384rad \end{Bmatrix} \quad (2.27)$$

- Da barra (3), $\{d\}'_{(3)} = [a]_{(3)} \{D\}$

$$\begin{Bmatrix} d_1' \\ d_2' \\ d_3' \\ d_4' \\ d_5' \\ d_6' \end{Bmatrix}_{(3)} = \begin{Bmatrix} 0m \\ 0m \\ 0rad \\ 0,013298395m \\ -0,000280521m \\ 0,000304384rad \end{Bmatrix} \quad (2.28)$$

b) Cálculo do vetor $\{d\}$ de cada barra da estrutura

- Da barra (1), $\{d\}_{(1)} = [T]_{(1)}^T \{d\}'_{(1)}$

$$\begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{Bmatrix}_{(1)} = \begin{Bmatrix} 0m \\ 0m \\ 0rad \\ -0,000095582m \\ -0,013370379m \\ -0,003617718rad \end{Bmatrix} \quad (2.29)$$

- Da barra (2), $\{d\}_{(2)} = [T]_{(2)}^T \{d\}'_{(2)}$

$$\begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{Bmatrix}_{(2)} = \begin{Bmatrix} 0,013370379m \\ -0,000095582m \\ -0,003617718rad \\ 0,013298395m \\ -0,000280521m \\ 0,000304384rad \end{Bmatrix} \quad (2.30)$$

- Da barra (3), $\{d\}_{(3)} = [T]_{(3)}^T \{d\}_{(3)}$

$$\begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{Bmatrix}_{(3)} = \begin{Bmatrix} 0m \\ 0m \\ 0rad \\ -0,000280521m \\ -0,013298395m \\ 0,000304384rad \end{Bmatrix} \quad (2.31)$$

- c) Cálculo do vetor $\{p\}$ de cada uma das barras da estrutura, através da equação $\{p\} = [k]\{d\} + \{p_0\}$.**

- Da barra (1), $\{p\}_{(1)} = [k]_{(1)} \{d\}_{(1)} + \{p_0\}_{(1)}$

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{Bmatrix}_{(1)} = \begin{Bmatrix} 1,43kN \\ 0,92kN \\ 2,56kNm \\ -1,43kN \\ -0,92kN \\ -1,12kNm \end{Bmatrix} \quad (2.32)$$

- Da barra (2), $\{p\}_{(2)} = [k]_{(2)} \{d\}_{(2)}$

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{Bmatrix}_{(2)} = \begin{Bmatrix} 1,08kN \\ 1,43kN \\ -1,13kNm \\ -1,08kN \\ 3,37kN \\ -2,75kNm \end{Bmatrix} \quad (2.33)$$

- Da barra (3), $\{p\}_{(3)} = [k]_{(3)} \{d\}_{(3)}$

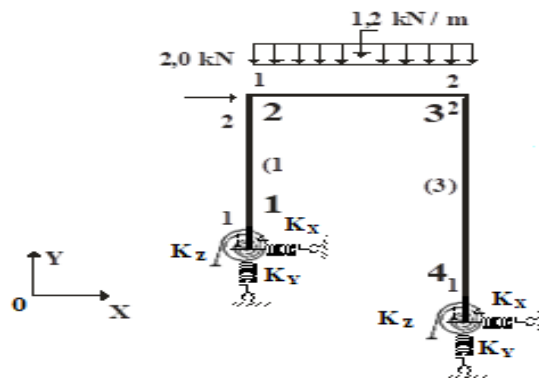
$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{Bmatrix}_{(3)} = \begin{Bmatrix} 3,37kN \\ 1,08kN \\ 2,65kNm \\ -3,37kN \\ -1,08kN \\ -2,75kNm \end{Bmatrix} \quad (2.34)$$

2.3 O PÓRTICO E OS DESLOCAMENTOS ELÁSTICOS NOS APOIOS

2.3.1 O MODELO DE WINKLER E A AME

Neste subitem, o pórtico modelo da Figura 11 - “a” será submetido a análise por meio do Método Matricial dos Deslocamentos, considerando seus apoios sobre bases elásticas (as molas de Winkler). Assim, as três coordenadas do nó 1 e do 4 do pórtico da Figura 11 - “a” estão sobre bases elásticas, representadas por três molas em cada apoio, conforme indicado na Figura 12. O objetivo é calcular os vetores dos deslocamentos e das reações de apoio, $\{D\}_C$ e $\{P\}_R$.

Figura 12 - O pórtico da Figura 11 com três molas no nó 1 e no nó 4.



Fonte: Cruz e Cruz (2023).

Dados:

$$\begin{aligned}
 E &= 2000000 \text{ kN} / \text{m}^2 & L_1 = L_2 &= 4 \text{ m} & K_X &= 2000 \text{ kN} / \text{m} & K_Z &= 1000 \text{ kNm} / \text{rad} \\
 A &= 0,03 \text{ m}^2 & L_3 &= 5 \text{ m} & K_Y &= 3000 \text{ kN} / \text{m} & I &= 0,0004 \text{ m}^4
 \end{aligned}$$

Neste caso, é $[K]_{CC} = [K]_{(12 \times 12)}$, com $[K]_{(12 \times 12)}$, Eq. (2.35), com a qual se escreve a equação $\{P\}_C - \{P_0\}_C = [K]_{CC} \{D\}_C$ com notação ao nível de coordenadas, a Eq. (2.36).

$$[K] = 10^2 \begin{bmatrix} 1,5 & 0 & -3 & -1,5 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 150 & 0 & 0 & -150 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 8 & -3 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1,5 & 0 & -3 & 151,5 & 0 & 3 & -150 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -150 & 0 & 0 & 151,5 & 3 & 0 & -1,5 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 3 & 3 & 16 & 0 & -3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -150 & 0 & 0 & 150,77 & 0 & 1,92 & -0,77 & 0 & 1,92 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1,5 & -3 & 0 & 121,5 & -3 & 0 & -120 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 1,92 & -3 & 14,4 & -1,92 & 0 & 3,2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,77 & 0 & -1,92 & 0,77 & 0 & -1,92 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -120 & 0 & 0 & 120 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,92 & 0 & 3,2 & -1,92 & 0 & 6,4 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ -2,4 \\ -1,6 \\ 0 \\ -2,4 \\ 1,6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2150 & 0 & -300 & -1500 & 0 & 300 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 18000 & 0 & 0 & -15000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -300 & 0 & 1800 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -15000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -150 & 300 & 0 & 0 & 0 & 0 & -150 & 300 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -300 & 400 & 0 & 0 & 0 & 0 & -300 & 400 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 15077 & 0 & 192 & -76,8 & 0 & 192 & 15077 & 0 & 192 & -76,8 & 0 & 192 & 0 \\ 0 & 12150 & -300 & 0 & -12000 & 0 & 0 & 12150 & -300 & 0 & -12000 & 0 & 0 \\ 192 & -300 & 1440 & -192 & 0 & 320 & 192 & -300 & 1440 & -192 & 0 & 320 & 0 \\ -76,8 & 0 & -192 & 2076,8 & 0 & -192 & -76,8 & 0 & -192 & 2076,8 & 0 & -192 & 0 \\ 0 & -12000 & 0 & 0 & 15000 & 0 & 0 & -12000 & 0 & 0 & 15000 & 0 & 0 \\ 192 & 0 & 320 & -192 & 0 & 1640 & 192 & 0 & 320 & -192 & 0 & 1640 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \\ D_9 \\ D_{10} \\ D_{11} \\ D_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.36)$$

É importante observar que aos elementos: K_{11} e $K_{10\ 10}$, K_{22} e $K_{11\ 11}$, K_{33} , $K_{12\ 12}$ foi adicionado o valor do coeficiente da mola aplicada às coordenadas referidas nos índices. Assim, aos coeficientes K_{11} e $K_{10\ 10}$ acrescentou-se o valor 2000; aos K_{22} e $K_{11\ 11}$, o valor 3000 e aos K_{33} , $K_{12\ 12}$ o valor 1000. Este conjunto de ações e deslocamentos será referido como do Pórtico P1.

Igualmente importante é observar que nas três primeiras e nas três últimas linhas do vetor $\{P\}_C$ colocou-se o valor zero.

Da solução da Eq. (2.36), obtemos, na Eq. (2.37), o vetor com os deslocamentos de todas as doze coordenadas envolvidas na estrutura em análise. Finalmente, após conhecermos os deslocamentos nodais, calculamos as reações dos apoios elásticos. Neste caso, as reações de apoio são obtidas a partir da equação que representa o método dos deslocamentos, como indicado na Eq. (2.38).

$$\begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \\ D_9 \\ D_{10} \\ D_{11} \\ D_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,000475m \\ -0,000425m \\ -0,002290rad \\ 0,019890m \\ -0,000050m \\ -0,004252rad \\ -0,019820m \\ -0,001468m \\ 0,0023rad \\ 0,000525m \\ -0,001175m \\ -0,002262rad \end{Bmatrix} \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned}
P_1 &= -K_X D_1 \\
P_2 &= -K_Y D_2 \\
P_3 &= -K_Z D_3 \\
P_{10} &= -K_X D_{10} \\
P_{11} &= -K_Y D_{11} \\
P_{12} &= -K_Z D_{12}
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Com: $K_X = 2000 \text{ kN/m}$, $K_Y = 3000 \text{ kN/m}$, $K_Z = 1000 \text{ kNm/rad}$ e os deslocamentos nas coordenadas sobre base elásticas dados na Eq. (2.37), tem-se o vetor das reações nos apoios elásticos procurados.

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_{10} \\ P_{11} \\ P_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,95 \\ 1,28 \\ 2,29 \\ -1,05 \\ 3,52 \\ 2,26 \end{Bmatrix} \tag{2.39}$$

No item 2.4 serão incluídos os valores das reações de apoio e dos deslocamentos nas coordenadas livre do pórtico da Figura 12 obtidos com molas cujas rigidezes são dadas a seguir: $K_X = 1000 \text{ kN/m}$, $K_Y = 1500 \text{ kN/m}$, $K_Z = 500 \text{ kNm/rad}$. Este conjunto de ações e deslocamentos será referido como do Pórtico P2.

2.4 OS RESULTADOS

A seguir, os resultados da aplicação do MMD no pórtico modelo são apresentados em tabelas, considerando duas condições de apoios: a) apoios indeslocáveis e b) apoios sobre base elástica (as molas de Winkler). Os resultados obtidos para o pórtico sob a condição (a) estão dispostos em colunas ao lado dos resultados obtidos para o pórtico sobre base elástica, ou seja, na condição (b).

Tabela 4a - As reações dos apoios (Apoios indeslocáveis X Apoios sobre molas - P1).

<i>Reações de apoio</i>	<i>Pórtico</i>		<i>Erro ε (%)</i>
	<i>Apoios indeslocáveis</i>	<i>Apoios deslocáveis</i>	
<i>Horizontal no nó 1 (kN)</i>	-0,92	-0,95	-3,16
<i>Vertical no nó 1 (kN)</i>	1,43	1,28	11,72
<i>Momento no nó 1 (kNm)</i>	2,56	2,29	11,79
<i>Horizontal no nó 4 (kN)</i>	-1,08	-1,05	2,86
<i>Vertical no nó 4 (kN)</i>	3,37	3,52	-4,26
<i>Momento no nó 4 (kNm)</i>	2,65	2,26	-17,26

ε (%) com valores positivos significam erros a favor da segurança nas reações de apoio do pórtico ao serem considerados as calculadas com os apoios indeslocáveis. Valor de referência é o calculado no pórtico com apoios deslocáveis.

Fonte: O autor.

Tabela 4b - As reações dos apoios (Apoios indeslocáveis X Apoios sobre molas - P2).

<i>Reações de apoio</i>	<i>Pórtico</i>		<i>Erro ε (%)</i>
	<i>Apoios indeslocáveis</i>	<i>Apoios deslocáveis</i>	
<i>Horizontal no nó 1 (kN)</i>	-0,92	-0,94	-2,13
<i>Vertical no nó 1 (kN)</i>	1,43	1,16	23,27
<i>Momento no nó 1 (kNm)</i>	2,56	2,16	18,52
<i>Horizontal no nó 4 (kN)</i>	-1,08	-1,06	1,89
<i>Vertical no nó 4 (kN)</i>	3,37	3,65	-8,22
<i>Momento no nó 4 (kNm)</i>	2,65	2,20	20,45

ε (%) com valores positivos significam erros a favor da segurança nas reações de apoio do pórtico ao serem considerados as calculadas com os apoios indeslocáveis. Valor de referência é o calculado no pórtico com apoios deslocáveis.

Fonte: O autor.

Tabela 5a - Deslocamentos das coordenadas “livres” (Apoios indeslocáveis X Apoios sobre molas - P1).

<i>Deslocamentos das coordenadas livres</i>	<i>Pórtico</i>		ε (%)
	<i>Apoios indeslocáveis</i>	<i>Apoios deslocáveis</i>	
<i>Horizontal no nó 2 (m)</i>	$1,337 \times 10^{-2}$	$1,989 \times 10^{-2}$	-32,78
<i>Vertical no nó 2 (m)</i>	$-9,556 \times 10^{-5}$	$-5,000 \times 10^{-5}$	91,12
<i>Rotação no nó 2 (rad)</i>	$-3,612 \times 10^{-3}$	$-4,252 \times 10^{-3}$	-15,05
<i>Horizontal no nó 3 (m)</i>	$1,330 \times 10^{-2}$	$1,982 \times 10^{-2}$	-32,89
<i>Vertical no nó 3 (m)</i>	$-0,2805 \times 10^{-3}$	$-1,468 \times 10^{-3}$	-80,89
<i>Rotação no nó 3 (rad)</i>	$3,048 \times 10^{-4}$	$2,300 \times 10^{-4}$	56,92

ε (%) com valores positivos significam que os deslocamentos maiores foram calculados com o pórtico com os apoios indeslocáveis Valor de referência é o calculado no pórtico com apoios deslocáveis.

Fonte: O autor.

Tabela 5b - Deslocamentos das coordenadas “livres” (Apoios indeslocáveis X Apoios sobre molas - P2).

<i>Deslocamentos das coordenadas livres</i>	<i>Pórtico</i>		ε (%)
	<i>Apoios indeslocáveis</i>	<i>Apoios deslocáveis</i>	
<i>Horizontal no nó 2 (m)</i>	$1,337 \times 10^{-2}$	$2,520 \times 10^{-2}$	-33,70
<i>Vertical no nó 2 (m)</i>	$-9,556 \times 10^{-5}$	$-8,43 \times 10^{-5}$	43,33
<i>Rotação no nó 2 (rad)</i>	$-3,612 \times 10^{-2}$	$-2,520 \times 10^{-2}$	43,33
<i>Horizontal no nó 3 (m)</i>	$1,330 \times 10^{-2}$	$2,737 \times 10^{-2}$	51,40
<i>Vertical no nó 3 (m)</i>	$-0,2805 \times 10^{-3}$	$-1,468 \times 10^{-3}$	80,89
<i>Rotação no nó 3 (rad)</i>	$3,048 \times 10^{-4}$	$5,29 \times 10^{-4}$	-42,38

ε (%) com valores positivos significam que os deslocamentos maiores foram calculados com o pórtico com os apoios indeslocáveis Valor de referência é o calculado no pórtico com apoios deslocáveis.

Fonte: O autor.

Tabela 6 - Esforços nas extremidades das barras (Apoios indeslocáveis X Apoios deslocáveis - P1).

Barras	Extremidades	Solicitações	Esforços nas extremidades		Erro ε^* (%)
			(Apoios indeslocáveis)	(Apoios deslocáveis)	
(1)	I no nó 3	Axial = p_1 (kN)	1,43	1,28	11,17
		Cortante = p_2 (kN)	0,92	0,95	-3,16
		Momento = p_3 (kN)m	2,56	2,29	11,79
	II no nó 1	Axial = p_4 (kN)	-1,43	-1,28	11,72
		Cortante = p_5 (kN)	-0,92	-0,95	-3,16
		Momento = p_6 (kNm)	1,12	1,28	-12,5
(2)	I no nó 1	Axial = p_1 (kN)	1,08	1,05	2,86
		Cortante = p_2 (kN)	1,43	1,28	11,72
		Momento = p_3 (kN)m	-1,13	-1,51	25,16
	II no nó 2	Axial = p_4 (kN)	-1,08	-1,05	2,88
		Cortante = p_5 (kN)	3,37	3,52	-4,26
		Momento = p_6 (kN)m	-2,75	-2,99	-8,03
(3)	I no nó 4	Axial = p_1 (kN)	3,37	3,52	-4,26
		Cortante = p_2 (kN)	1,08	1,05	2,86
		Momento = p_3 (kN)m	2,65	2,26	17,26
	II no nó 2	Axial = p_4 (kN)	-3,37	-3,52	-4,25
		Cortante = p_5 (kN)	-1,08	-1,05	2,86
		Momento = p_6 (kN)m	2,75	2,99	-8,03

Fonte: O autor.

O sinal positivo do erro, ε , indica que, em módulo, o valor do esforço obtido para o pórtico com apoios indeslocáveis é maior do que o calculado para o pórtico sobre apoio elástico.

3. ANÁLISE ITERATIVA COM A APLICAÇÃO DAS MOLAS DE WINKLER

3.1. O MÉTODO

O método baseia-se em um processo iterativo. Inicialmente, na iteração zero, analisa-se o pórtico considerando-o com base indeslocável e sapata rígida. Obtidas as reações de apoio e conhecida a tensão admissível do solo - $\sigma_{solo} = 0,2MPa$, as sapatas são predimensionadas. Neste ponto, toda a estrutura é pré-dimensionada, uma vez que já são conhecidos os esforços nas extremidades das barras.

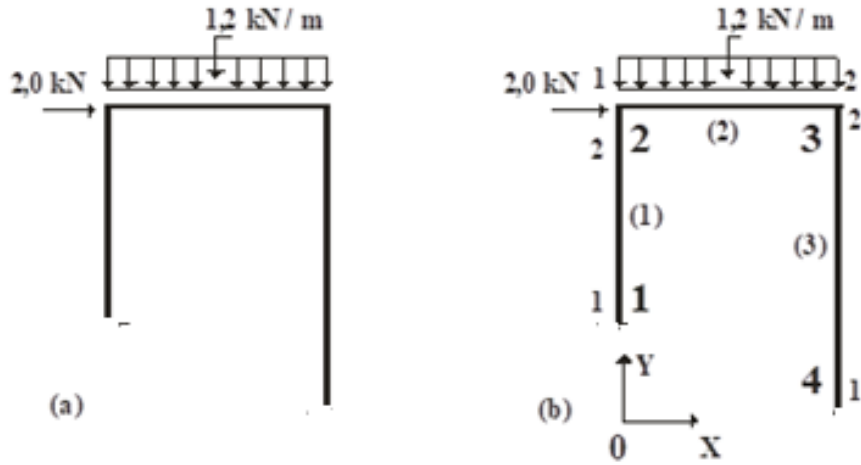
Com as características necessárias do solo, - $E_{solo} = 20MPa$, $\nu = 0,30$,
 $k_v = \frac{E_{solo}}{(1-\nu^2)BI_f}$ em que E_{solo} é o modulo de deformação do solo, ν é coeficiente de Poisson,
 k_v é a reação vertical do solo, B é a menor dimensão da sapata retangular e I_f é o fator de forma
 - são obtidos os coeficientes de mola - $K_{mv} = k_v A_s$, $K_{m\theta} = k_v I_{z(Asapata)}$ e, com esses valores, determinam-se os deslocamentos a serem aplicados aos apoios na iteração 1. Com esses deslocamentos, na iteração 2, calculam-se as novas reações de apoio, novos esforços nas extremidades das barras e seus deslocamentos.

A partir dessas novas reações de apoio, calculam-se outros deslocamentos nos apoios, que, novamente, são impostos à estrutura, produzindo novos deslocamentos a serem utilizados na iteração seguinte. Esse processo se repete até que as novas reações (e/ou os novos deslocamentos) nos apoios se tornem praticamente iguais às anteriores. Nessa condição, as deformações no solo convergem para determinados valores e os deslocamentos nos apoios cessam.

3.2 APLICAÇÃO COM O PÓRTICO MODELO

Neste subitem, considera-se o pórtico da Figura 10 com o objetivo de realizar uma AISE. Neste contexto, o foco é o desenvolvimento e aplicação da formulação (a marcha de cálculo), sem a preocupação com limites práticos de deslocamentos e estabilidade/instabilidade das barras comprimidas envolvidas.

Figura 10 - Pórtico padrão, SCG, carregamento, definição das barras, dos nós e da incidência de cada uma delas.



Fonte: Cruz e Cruz (2023).

Dados:

Tipo do solo: argila de dura para média. Das tabelas do anexo são definidas as características do solo: $E_{solo} = 20MPa$; $\sigma_{solo} = 0,2MPa$ e $\nu = 0,30$

$$\begin{aligned}
 E &= 2000000kN / m^2 & L_1 = L_2 &= 4m & I &= 0,0004m^4 & K_{mv} &= k_v A_s \\
 A &= 0,03m^2 & L_3 &= 5m & k_v &= \frac{E_{solo}}{(1-\nu^2)BI_f} & K_{m\theta} &= k_v I_{z(A(paata))}
 \end{aligned}$$

Para permitir a utilização dos cálculos previamente desenvolvidos durante a análise deste pórtico no item 2.2, o carregamento da estrutura foi multiplicado por 100. Isso foi feito para viabilizar o pré-dimensionamento das sapatas com valores mais razoáveis, uma vez que o aumento do carregamento resultou em reações de apoio, deslocamentos nodais e esforços nas extremidades das barras com vezes maiores

- **Iteração zero: Análise do pórtico considerando os apoios indeslocáveis**

$$\begin{Bmatrix} D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \\ D_9 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1,337038m \\ -0,009558m \\ -0,361772rad \\ 1,329398m \\ -0,028052m \\ 0,030438rad \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_{10} \\ P_{11} \\ P_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -920,0kN \\ 143,2kN \\ 256,5kNm \\ -108kN \\ 336,6kN \\ 2,65,0kNm \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

Com base nos resultados obtidos, serão realizados os pré-dimensionamentos das sapatas rígidas e o cálculo dos valores de: k_v , de K_{mv} e $K_{m\theta}$. Os resultados correspondentes estão apresentados nas Tabelas 7 e 8. Uma vez que os dados relativos às sapatas dos nós 1 e 4 permanecem inalterados ao longo das iterações subsequentes, a Tabela 8 será repetida nas demonstrações que seguem.

- Pré-dimensionamento das sapatas

$$\sigma_{solo} = 0,2MPa = \frac{\text{Ação vertical}}{A_{(sapata)}}$$

Sapata do nó 1

Dimensões da sapata (m): 0,80x0,90

Sapata do nó 4

Dimensões (m):1,50x1,70

Tabela 7 - Solicitações no solo e dimensões das sapatas.

<i>Sapata</i>	<i>N_k(kN)</i>	<i>M_k (KNm)</i>	<i>Dimensões da sapata (m)</i>
Nó 1	-143,3	-256,5	0,80x0,90
Nó 4	-336,6	-265,0	1,50x1,70

Fonte: O Autor.

Sapata do nó 1

$$k_v = \frac{20.000}{0,91 \times 0,80 \times 0,99} = 27.750,03 \text{ kN/m}^3$$

$$K_{mv} = 27.750,03 \times 0,80 \times 0,90 = 19.980,02 \text{ kN/m}$$

$$K_{m\theta} = 27.750,03 \times 0,80 \times 0,90^3 / 12 = 1348,65 \text{ kNm/rad}$$

Sapata do nó 4

$$k_v = \frac{20.000}{0,91 \times 1,50 \times 0,99} = 14.800,01$$

$$K_{mv} = 14.800,01 \times 1,50 \times 1,70 = 37.740,03$$

$$K_{m\theta} = 14.800,01 \times 1,50 \times 1,70^3 / 12 = 9.089,06$$

Tabela 8 - Coeficientes de mola vertical e de rotação.

<i>Sapata</i>	<i>k_v (kN/m³)</i>	<i>K_{mv} (kN/m)</i>	<i>K_{mθ} (kNm/rad)</i>
Nó 1	27.750,03	19.980,02	1.348,65
Nó 4	14.800,01	37.740,03	9.089,06

Fonte: O Autor.

Tabela 9 - Deslocamentos a serem impostos na iteração 1.

<i>Sapata</i>	<i>Deslocamento vertical (m)</i>	<i>Rotação em torno do eixo Z (rad)</i>
Nó 1	-0,007172	-0,190190
Nó 4	-0,008919	-0,029156

Fonte: O Autor.

- Iteração 1

Imposição dos deslocamentos dos apoios calculados na iteração zero

Tabela 10 - Solicitações no solo e dimensões das sapatas.

<i>Sapata</i>	<i>N_k(kN)</i>	<i>M_k (KNm)</i>	<i>Dimensões da sapata (m)</i>
Nó 1	133,3	190,4	0,80x0,90
Nó 4	346,5	304,8	1,50x1,69

Fonte: O Autor.

Tabela 8 - Coeficientes de mola vertical e de rotação.

<i>Sapata</i>	<i>k_v (kN/m³)</i>	<i>K_{mv} (kN/m)</i>	<i>K_{mθ} (kNm/rad)</i>
Nó 1	27.750,03	19980,02	1.348,65
Nó 4	14.800,01	37.740,03	9.089,06

Fonte: O Autor.

Tabela 11 - Deslocamentos a serem impostos aos apoios na iteração 2.

<i>Sapata</i>	<i>Deslocamento vertical (m)</i>	<i>Rotação em torno do eixo Z (rad)</i>
Nó 1	-0,006672	-0,141178
Nó 4	-0,009181	-0,033535

Fonte: O Autor.

- Iteração 2

Imposição dos deslocamentos dos apoios calculados na iteração 1

Tabela 12 - Solicitações no solo e dimensões das sapatas.

<i>Sapata</i>	<i>N_k(kN)</i>	<i>M_k (KNm)</i>	<i>Dimensões da sapata (m)</i>
Nó 1	135,1	214,2	0,80x0,90
Nó 4	344,7	282,2	1,50x1,69

Fonte: O Autor.

Tabela 8 - Coeficientes de mola vertical e de rotação.

<i>Sapata</i>	<i>k_v (kN/m³)</i>	<i>K_{mv} (kN/m)</i>	<i>K_{mθ} (kNm/rad)</i>
Nó 1	27.750,03	19980,02	1.348,65
Nó 4	14.800,01	37.740,03	9.089,06

Fonte: O Autor.

Tabela 13 - Deslocamentos a serem impostos aos apoios na iteração 3.

<i>Sapata</i>	<i>Deslocamento vertical (m)</i>	<i>Rotação em torno do eixo Z (rad)</i>
Nó 1	-0,006762	-0,158825
Nó 4	-0,009133	-0,031048

Fonte: O Autor.

- Iteração 3

Tabela 14 - Solicitações no solo e dimensões das sapatas.

<i>Sapata</i>	<i>N_k(kN)</i>	<i>M_k (KNm)</i>	<i>Dimensões da sapata (m)</i>
Nó 1	134,3	207,5	0,80x0,90
Nó 4	346,8	280,9	1,50x1,69

Fonte: O Autor.

Tabela 8 - Coeficientes de mola vertical e de rotação.

<i>Sapata</i>	k_v (kN/m ³)	K_{mv} (kN/m)	$K_{m\theta}$ (kNm/rad)
Nó 1	27.750,03	19980,02	1.348,65
Nó 4	14.800,01	37.740,03	9.089,06

Fonte: O Autor.

Tabela 15 - Deslocamentos a serem impostos aos apoios na iteração 4.

<i>Sapata</i>	<i>Deslocamento vertical (m)</i>	<i>Rotação em torno do eixo Z (rad)</i>
Nó 1	-0,006722	-0,158825
Nó 4	-0,009189	-0,030953

Fonte: O Autor.

- Iteração 4

Tabela 16 - Solicitações no solo e dimensões das sapatas.

<i>Sapata</i>	Nk (kN)	Mk (KNm)	<i>Dimensões da sapata (m)</i>
Nó 1	134,5	209,5	0,80x0,90
Nó 4	346,3	285,9	1,50x1,69

Fonte: O Autor.

Tabela 8 - Coeficientes de mola vertical e de rotação.

<i>Sapata</i>	k_v (kN/m ³)	K_{mv} (kN/m)	$K_{m\theta}$ (kNm/rad)
Nó 1	27.750,03	19980,02	1.348,65
Nó 4	14.800,01	37.740,03	9.089,06

Fonte: O Autor.

Tabela 17 - Deslocamentos a serem impostos aos apoios na iteração 5.

<i>Sapata</i>	<i>Deslocamento vertical (m)</i>	<i>Rotação em torno do eixo Z (rad)</i>
Nó 1	-0,006732	-0,155340
Nó 4	-0,009176	-0,031455

Fonte: O Autor.

- Iteração 5

Tabela 18 - Solicitações no solo e dimensões das sapatas.

<i>Sapata</i>	<i>N_k(kN)</i>	<i>M_k (KNm)</i>	<i>Dimensões da sapata (m)</i>
Nó 1	134,5	208,8	0,80x0,90
Nó 4	346,4	286,0	1,50x1,69

Fonte: O Autor.

Tabela 8 - Coeficientes de mola vertical e de rotação.

<i>Sapata</i>	<i>k_v (kN/m³)</i>	<i>K_{mv} (kN/m)</i>	<i>K_{mθ} (kNm/rad)</i>
Nó 1	27.750,03	19980,02	1.348,65
Nó 4	14.800,01	37.740,03	9.089,06

Fonte: O Autor.

Tabela 19 - Deslocamentos a serem impostos aos apoios na iteração 6.

<i>Sapata</i>	<i>Deslocamento vertical (m)</i>	<i>Rotação em torno do eixo Z (rad)</i>
Nó 1	-0,006732	-0,154821
Nó 4	-0,009178	-0,031466

Fonte: O Autor.

Sendo os deslocamentos obtidos para a iteração 6 praticamente iguais aos calculados para a iteração 5, o processo é interrompido. Pois, conclui-se que a estrutura parou. Isto é não ocorrem mais deslocamentos nas coordenadas dos apoios. Desse modo, os resultados podem ser organizados em novas tabelas (Tabelas 20, 21, 22, 23 e 24) de modo a tornar possível algumas conclusões.

Tabela 20 - Evolução dos deslocamentos vertical e angular de cada sapata em cada iteração.

<i>Iteração</i>	<i>Deslocamentos</i>			
	<i>Vertical para baixo (m)</i>		<i>Angular dextrogiro (rad)</i>	
	<i>Nó 1(10⁻³)</i>	<i>Nó 4(10⁻³)</i>	<i>Nó 1(10⁻¹)</i>	<i>Nó 4(10⁻²)</i>
<i>Zero</i>	0,000	0,000	0,000	0,0000
<i>1</i>	7,172	8,919	1,9019	2,9156
<i>2</i>	6,672	9,181	1,41178	3,3535
<i>3</i>	6,762	9,133	1,58825	3,1048
<i>4</i>	6,722	9,189	1,58825	3,0953
<i>5</i>	6,732	9,176	1,5534	3,1455
<i>6</i>	6,732	-9,178	1,54821	3,1466

Fonte: O Autor.

Tabela 21 - Evolução das ações vertical e angular atuantes no solo em cada iteração.

Iteração	Axial (Compressão) em kN		Momento (Destrogiro) em kNm	
	Nó 1	Nó 4	Nó 1	Nó 4
Zero	143,3	336,6	256,5	265,0
1	133,3	346,5	190,4	304,8
2	135,3	344,7	214,2	282,2
3	134,3	346,8	204,5	280,9
4	134,5	346,3	209,5	285,9
5	134,5	346,4	208,8	286,0

Fonte: O Autor.

Na tabela 22 estão os esforços nas extremidades das barras obtidos para a três situações de cálculo. Nas tabelas 23 e 24 que se seguem, cada uma com seis colunas, a coluna relativa ao ε (%) expressa o erro em percentual cometido ao serem adotados os valores da quarta (apoios indeslocáveis). Assim, os erros com sinal positivo são a favor da segurança. O (*) indica que os valores foram obtidos via processo iterativo.

Tabela 22 - Esforços nas extremidades das barras (Ap. indesloc. X Ap. desloc.*).

Barras	Extremidades	Solicitações	Apoios	
			(Ap. indesloc.)	(Ap. desloc.)*
(1)	I no nó 3	Axial = p_1 (kN)	1,43	1,345
		Cortante = p_2 (kN)	0,92	0,894
		Momento = p_3 (kN)m	2,56	2,88
	II no nó 1	Axial = p_4 (kN)	-1,43	-1,349
		Cortante = p_5 (kN)	-0,92	-0,894
		Momento = p_6 (kNm)	1,12	1,247
(2)	I no nó 1	Axial = p_1 (kN)	1,08	1,168
		Cortante = p_2 (kN)	1,43	1,345
		Momento = p_3 (kN)m	-1,13	-1,499
	II no nó 2	Axial = p_4 (kN)	-1,08	-1,168
		Cortante = p_5 (kN)	3,37	3,454
		Momento = p_6 (kN)m	-2,75	-2,97
(3)	I no nó 4	Axial = p_1 (kN)	3,37	3,454
		Cortante = p_2 (kN)	1,08	1,186
		Momento = p_3 (kN)m	2,65	2,26
	II no nó 2	Axial = p_4 (kN)	-3,37	-3,454
		Cortante = p_5 (kN)	-1,08	-1,186
		Momento = p_6 (kN)m	2,75	2,86

Fonte: O autor.

Tabela 23 - Esforços nas extremidades das barras (Apoios indeslocáveis X Apoios deslocáveis*).

Barras	Extremidades	Solicitações	Esforços nas extremidades		Erro ε^* (%)
			(Apoios indeslocáveis)	(Apoios deslocáveis)*	
(1)	I no nó 3	Axial = p_1 (kN)	1,43	1,345	6,32
		Cortante = p_2 (kN)	0,92	0,894	2,91
		Momento = p_3 (kNm)	2,56	2,88	-11,11
	II no nó 1	Axial = p_4 (kN)	-1,43	-1,349	6,00
		Cortante = p_5 (kN)	-0,92	-0,894	2,91
		Momento = p_6 (kNm)	1,12	1,247	-10,18
(2)	I no nó 1	Axial = p_1 (kN)	1,08	1,168	-7,53
		Cortante = p_2 (kN)	1,43	1,345	6,32
		Momento = p_3 (kNm)	-1,13	-1,499	-24,61
	II no nó 2	Axial = p_4 (kN)	-1,08	-1,168	-7,53
		Cortante = p_5 (kN)	3,37	3,454	-2,49
		Momento = p_6 (kNm)	-2,75	-2,97	-8,00
(3)	I no nó 4	Axial = p_1 (kN)	3,37	3,454	-2,49
		Cortante = p_2 (kN)	1,08	1,186	-9,81
		Momento = p_3 (kNm)	2,65	2,26	14,72
	II no nó 2	Axial = p_4 (kN)	-3,37	-3,454	-2,49
		Cortante = p_5 (kN)	-1,08	-1,186	-9,81
		Momento = p_6 (kNm)	2,75	2,86	-4,00

Fonte: O autor.

4. ANÁLISE DOS RESULTADOS

Das Tabelas 4a, 4b, 5a e 5b observa-se que ao serem utilizados resultados da análise do pórtico em estudo sem considerar os deslocamentos nos apoios sobre molas aceitam-se estimativas que levam a erros consideráveis seja nas reações de apoio, seja nos deslocamentos das coordenadas livres.

No que diz respeito às reações de apoio verticais, no caso do pórtico referido como P.1, tem-se: $\varepsilon (\%) = 11,72 \text{ AFS}$ e $\varepsilon (\%) = 17,26 \text{ CS}$, e para os momentos de engastamento: $\varepsilon (\%) = 11,79 \text{ AFS}$ e $\varepsilon (\%) = 17,26 \text{ CS}$. Dos resultados do pórtico referido como P.2, tem-se: reações verticais: $\varepsilon (\%) = 23,27 \text{ AFS}$ e $\varepsilon (\%) = 8,22 \text{ CS}$. Já para os momentos: $\varepsilon (\%) = 20,45 \text{ AFS}$.

Quanto aos deslocamentos, no caso do pórtico referido como P.1, tem-se: $\varepsilon (\%) = 91,12 \text{ AFS}$ e $\varepsilon (\%) = 80,89 \text{ CS}$, para os deslocamentos verticais e para as rotações: $\varepsilon (\%) = 56,92 \text{ AFS}$ e $\varepsilon (\%) = 15,05 \text{ CS}$. Dos resultados do pórtico referido como P.2, tem-se: deslocamentos verticais: $\varepsilon (\%) = 80,89 \text{ AFS}$. Já para as rotações: $\varepsilon (\%) = 43,33 \text{ AFS}$ e $\varepsilon (\%) = 42,38 \text{ CS}$.

A Tabela 6 dos esforços nas extremidades das barras apresenta os erros entre os valores estimados (calculados com os apoios indeslocáveis) e os valores considerados exatos (os calculados com a utilização de mola sob os apoios). Nela é possível observar que os valores estimados para os efeitos de flexão apresentam erros que chegam a **25,16% AFS** e, no caso dos cortantes observa-se erros de até **11,72% AFS**. Já para os esforços axiais tem-se erros de **11,72% AFS**.

A Tabela 23 compara erros entre valores estimados (apoios indeslocáveis) e valores exatos (apoios elásticos por iteração) para esforços nas extremidades das barras. Nela é possível notar que os valores estimados para os efeitos axial tem-se erros de até **6,32% AFS** e até **7,53% CS**. No caso dos cortantes observa-se erros de até **6,32% AFS** e até **9,81% CS**. Já para os esforços de flexão tem-se erros de até **14,72% AFS** e de até **24,61% CS**.

5. CONCLUSÕES

No presente trabalho, foi realizada uma revisão do tema, buscando estabelecer um Marco Teórico relacionado ao problema da análise estrutural com interação solo-estrutura, com destaque para a aplicação das molas de Winkler. Algumas contribuições de autores são mencionadas ao longo do trabalho. A partir de um trabalho recente de Cruz e Cruz (2023), o autor incorporou a ideia de adicionar uma barra biarticulada à estrutura original para simular a base elástica (mola) que se deseja (ou necessita) considerar. A rigidez axial da barra EA/L é igual ao chamado coeficiente de mola, k_{mx} para molas paralelas ao eixo X do SGR (ou k_{mh} quando o eixo coincidir com a direção horizontal), k_{my} para molas paralelas ao eixo Y do SGR (ou k_{mv} , quando o eixo Y coincidir com a direção vertical) ou $k_{m\theta}$, para as molas de rotação.

A formulação matricial para análise de estruturas planas é utilizada a partir da sua formulação linear.

Como o objetivo principal é a solução de estruturas sobre base elástica (molas de Winkler), considerou-se importante apresentar o dito processo prático para obtenção da matriz de rigidez global, $[K]$. Sempre com a intenção de promover uma maior generalização na aplicação da AME, a numeração dos nós da Figura 10 foi definida de modo a tornar necessário uma reorganização da equação matricial que representa matematicamente o sistema físico em estudo e apenas duas coordenadas em cada apoio foram consideradas: a coordenada Y e Z referidas, respectivamente, ao SLR e ao SGR.

Foram analisadas três estruturas, detalhando todas as etapas da AME para determinar deslocamentos nodais e reações de apoio. Os resultados foram comparados com o software Ftool, mostrando que os deslocamentos calculados são semelhantes, embora haja pequenas discrepâncias nas reações de apoio, possivelmente devido à precisão adotada, considerando a sensibilidade da inversão da submatriz.

Quanto a avaliação da variação das solicitações na estrutura devido a movimentação dos apoios constata-se que erros consideráveis são cometidos ao dimensionar estruturas sob a condição de indeslocabilidade dos apoios principalmente nas regiões de solos mais deformáveis. Outra constatação que se faz é que a análise através do processo iterativo conduz a resultados com valores que se situam em posição intermediária entre os obtidos do cálculo com apoios indeslocáveis e do cálculo sobre base elástica com o processo iterativo.

REFERÊNCIAS

- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **6122**: Projeto e execução de fundações. Rio de Janeiro: ABNT, 1996. Disponível em: <https://docente.ifrn.edu.br/valtencirgomes/disciplinas/construcao-de-edificios/nbr-06122-1996-projeto-e-execucao-de-fundacoes>. Acesso em: 09 nov. 2023.
- ANTONIAZZI, J. P. **Interação Solo-Estrutura de Edifícios com Fundações Superficiais**. 2011. 138 f. Tese (Doutorado) - Curso de Área de Construção Civil, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2011. Disponível em: <https://repositorio.ufsm.br/bitstream/handle/1/7763/ANTONIAZZI,%20JULIANA%20PIPPI.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 23 ago. 2023.
- BARATA, F.E. **Recalque de edifício sobre fundações diretas em terrenos de compressibilidade rápida e com consideração da rigidez da estrutura**. Tese de Concurso para professor Titular da EEUFRJ em 1986.
- CINTRA, José Carlos A.; AOKI, Nelson; ALBIERTO, José Henrique. **Fundações diretas: projeto geotécnico**. São Paulo: Oficina de Textos, 2011.
- COLARES, George Moura. **Programa para análise da interação solo-estrutura no projeto de edifícios**. 2006. 83 p. Tese (Doutorado) - Curso de Engenharia de Estruturas, USP, São Carlos – SP, 2006.
- CRUZ, J.M.F. **Contribuição à análise estática e dinâmica de pórticos pelo Método dos Elementos de Contorno**. 2012. 366 f. Tese (Doutorado) - CT, UFPB, João Pessoa – PB, 2012.
- CRUZ, J.M.F. **Estruturas – Introdução à Análise Matricial de Estruturas (Método dos Deslocamentos)**. EDUFPB, João Pessoa – PB, 2001.
- CRUZ, J.M.F.; CRUZ, L.C. **Análise Matricial de Estruturas, Método dos Deslocamentos (Estruturas Planas): V1 - Teoria e Aplicações**. Ed. Leia Livros. E-book: ISBN 978-65-88416-53-2, 182p. João Pessoa – PB, 2023.
- CRUZ, J.M.F.; CRUZ, L.C. **Análise Matricial de Estruturas, Método dos Deslocamentos (Estruturas Planas): V1I – Exercícios Resolvidos**. Ed. Leia Livros. E-book: ISBN 978-65-88416-56-3, 182p. João Pessoa – PB, 2023.
- IWAMOTO, R. K. **Alguns Aspectos dos Efeitos da Interação Solo – Estrutura em Edifícios de Múltiplos Andares com Fundação Profunda**. 2000. 140 p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, São Carlos – SP, 2000.
- MARANGON, M. **3 – Parâmetros dos Solos para Cálculo de Fundações**. 2018. Disponível em: <[http://lmcg.ufpe.br/~leo/taludes/bibliografia_\(temporario\)/GF03-Par%C3%A2metros-dos-Solos-para-C%C3%A1lculo-de-Funda%C3%A7%C3%B5es.pdf](http://lmcg.ufpe.br/~leo/taludes/bibliografia_(temporario)/GF03-Par%C3%A2metros-dos-Solos-para-C%C3%A1lculo-de-Funda%C3%A7%C3%B5es.pdf)>. Acesso em: 09 nov. 2023.
- MORAES, M. C. **Estruturas de fundações**. 3. ed. São Paulo: McGraw Hill, 1976. 15p.

PAVAN; R. C.; COSTELLA; M. F.; GUARNIERI; G. **Interação solo-estrutura para sistemas estruturais reticulados sobre fundações rasas**. Rev. IBRACON Estrut. Mater. vol.7 no.2 São Paulo Apr. 2014. <https://doi.org/10.1590/S1983-41952014000200005>.

SILVA, A. R. **Análise de Placas com Restrição de Contato**. 1998. 126 p. Dissertação (Mestrado). Escola de Minas, UFOP, Ouro Preto – MG, 1998.

SILVA; L. F da. **Cálculo dos esforços internos e deflexões de viga sobre a base elástica não linear usando o método da flexibilidade**. 2004. 96 p. Dissertação (Mestrado). Escola de Minas, UFOP. Ouro Preto – Minas Gerais, 2004. p.227-264.

TEIXEIRA, A. H., Godoy, N.S. **Análise projeto e execução de fundações rasas**. In: Hachich, W. et col. ed. Fundações: teoria e prática. São Paulo. PINI. Cap.7, 1996, p.227-264.

TERZAGHI, K. **Evaluation of coefficients of subgrade reaction**. Géotechnique, London. V, 4, n. 4, December, 1955, p. 297-326.

ANEXOS

ANEXO A – TENSÃO ADMISSÍVEL

<i>Tipo de Solo</i>	<i>Tensão admissível (kg/cm²)</i>
<i>Rocha sã, maciça, sem laminação ou sinal de decomposição</i>	<i>3,0</i>
<i>Rochas laminadas, com pequenas fissuras, estratificadas</i>	<i>1,5</i>
<i>Rochas alteradas ou em decomposição</i>	<i>ver nota</i>
<i>Solos granulares concrecionados - conglomerados</i>	<i>1,0</i>
<i>Solos pedregulhosos compactos a muito compactos</i>	<i>0,6</i>
<i>Solos pedregulhosos fofos</i>	<i>0,3</i>
<i>Areias muito compactas</i>	<i>0,5</i>
<i>Areias compactas</i>	<i>0,4</i>
<i>Areias medianamente compactas</i>	<i>0,2</i>
<i>Argilas duras</i>	<i>0,3</i>
<i>Argilas rijas</i>	<i>0,2</i>
<i>Argilas médias</i>	<i>0,1</i>
<i>Siltes duros (muito compactos)</i>	<i>0,3</i>
<i>Siltes rijos (compactos)</i>	<i>0,2</i>
<i>Siltes médios (medianamente compactos)</i>	<i>0,1</i>

Nota: Para rochas alteradas ou em decomposição, têm que ser levados em conta a natureza da rocha matriz e o grau de decomposição ou alteração.

Fonte: NBR 6122:2019.

ANEXO B – COEFICIENTE DE POISSON

<i>Solo</i>	<i>ν</i>
<i>Areia pouco compacta</i>	0,2
<i>Areia compacta</i>	0,4
<i>Silte</i>	0,3-0,5
<i>Argila saturada</i>	0,4-0,5
<i>Argila não saturada</i>	0,1-0,3

Teixeira e Godoy (1996).

ANEXO C – COEFICIENTES DE POISSON (UV)

<i>Solo</i>	<i>Coefficiente de Poisson (ν)</i>
<i>Argila saturada</i>	<i>0,4-0,5</i>
<i>Argila não-saturada</i>	<i>0,1-0,3</i>
<i>Argila arenosa</i>	<i>0,2-0,3</i>
<i>Silte</i>	<i>0,3-0,35</i>
<i>Areia compacta</i>	<i>0,2-0,4</i>
<i>Areia grossa ($e = 0,4$ a $0,7$)</i>	<i>0,15</i>
<i>Areia fina ($e = 0,4$ a $0,7$)</i>	<i>0,25</i>
<i>Rocha (depende do tipo)</i>	<i>0,1-0,4</i>
<i>Concreto</i>	<i>0,15</i>
<i>Gelo</i>	<i>0,36</i>

Correções empíricas - uso limitado a estudos preliminares.

Fonte: Marangon (2018).

ANEXO D – VALORES DO MÓDULO DE ELASTICIDADE PARA DIFERENTES TIPOS DE SOLO (URV)

<i>Solo</i>	<i>E (kgf/cm²)</i>
<i>1. Argila</i>	
<i>Muito mole</i>	<i>3-30</i>
<i>Mole</i>	<i>20-40</i>
<i>Média</i>	<i>45-90</i>
<i>Dura</i>	<i>70-200</i>
<i>Arenosa</i>	<i>300-425</i>
<i>2. Areia</i>	
<i>Siltosa</i>	<i>50-200</i>
<i>Fofa</i>	<i>100-250</i>
<i>Compacta</i>	<i>500-1000</i>
<i>3. Areia e Pedregulho</i>	
<i>Compacto</i>	<i>800-2000</i>
<i>Fofo</i>	<i>500-1400</i>
<i>4. Silte</i>	<i>20-200</i>

Correções empíricas - uso limitado a estudos preliminares.

$1\text{kN/cm}^2 = 100\text{Kgf/cm}^2$.

Fonte: Marangon (2018).