



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CT – CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

YUSSEF HARUN TANNUSS

**DESENVOLVIMENTO DE CALCULADORA DE DEFORMAÇÃO DE VIGAS
CONFORME A TEORIA DE EULER-BERNOULLI E PRECONIZAÇÕES DA NBR
6118:2014**

João Pessoa, Paraíba

2023

YUSSEF HARUN TANNUSS

**DESENVOLVIMENTO DE CALCULADORA DE DEFORMAÇÃO DE VIGAS
CONFORME A TEORIA DE EULER-BERNOULLI E PRECONIZAÇÕES DA NBR
6118:2014**

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado à Coordenação de
Engenharia Civil da Universidade
Federal da Paraíba como requisito para
obtenção do grau de Bacharel em
Engenharia Civil.

Orientador: Dr. Givanildo Alves de
Azeredo

João Pessoa, Paraíba

2023

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

T167d Tannuss, Yussef Harun.

Desenvolvimento de calculadora de deformação de vigas conforme a Teoria de Euler-Bernoulli e preconizações da NBR 6118:2014 / Yussef Harun Tannuss. - João Pessoa, 2023.

115 f. : il.

Orientação: Givanildo Alves de Azeredo.
TCC (Graduação) - UFPB/CT.

1. Estruturas. 2. Concreto Armado. 3. Flecha. 4. Calculadora. 5. Estado Limite de Serviço (ELS). I. Azeredo, Givanildo Alves de. II. Título.

UFPB/CT/BSCT

CDU 624(043.2)

FOLHA DE APROVAÇÃO

YUSSEF HARUN TANNUSS

**DESENVOLVIMENTO DE CALCULADORA DE DEFORMAÇÃO DE VIGAS
CONFORME A TEORIA DE EULER-BERNOULLI E PRECONIZAÇÕES DA NBR
6118:2014**

Trabalho de Conclusão de Curso em 07/11/2023 perante a seguinte Comissão Julgadora:



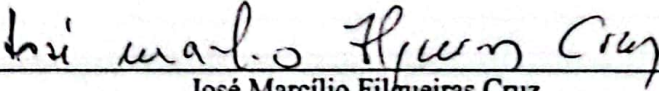
Givanildo Alves de Azeredo
Departamento de Engenharia Civil e Ambiental do CT/UFPB

APROVADO



Enildo Tales Ferreira
Departamento de Engenharia Civil e Ambiental do CT/UFPB

APROVADO



José Marcílio Filgueiras Cruz
Departamento de Engenharia Civil e Ambiental do CT/UFPB

APROVADO

'É a harmonia das diversas partes, a sua simetria, o seu feliz equilíbrio; em poucas palavras, é tudo o que introduz a ordem, tudo o que dá unidade, que nos permite ver claramente e compreender ao mesmo tempo o conjunto e os detalhes.', Henri Poincaré.

AGRADECIMENTOS

Dedico este trabalho

À minha mãe e minha irmã, as pessoas mais importantes da minha vida. O alicerce em que me edifiquei;

Ao meu querido pai, que instigou tamanha curiosidade pelas coisas visíveis e invisíveis, sendo esta a força motriz de meu estudo;

Aos queridos amigos que mantenho desde os tempos de colégio, que cresceram comigo e me inspiraram a seguir minha vocação, e aos queridos amigos com quem dividi as duras penas e grandes conquistas deste curso. Jamais os esquecerei;

Aos grandes mentores que tive a sorte de ter em meu caminho: Dr. Givanildo Alves de Azeredo, Dr. Marcílio Filgueiras Cruz e Dr. Enildo Tales Ferreira, que iluminaram as vias de dominar tão difícil matéria;

Aos profissionais da GME/SINFRA e da LOGOS Eng. e Arq., que acreditaram que eu era capaz de participar das grandes entregas que dão à sociedade, assumir responsabilidades e contribuir com minhas habilidades;

“Mas como tudo o que se relaciona ao homem é frágil e perecível, devemos sempre andar em busca de alguém a quem amar e por quem ser amado, pois uma vida privada de afeição e simpatia é uma vida sem graça nenhuma”, Sobre a Amizade, XXVII. 102., Marco Túlio Cícero.

RESUMO

A presente monografia se propôs a demonstrar a formulação matemática da Teoria de Vigas de Euler-Bernoulli, que afirma ser a função deslocamento de uma viga relacionada à função de momento fletor através de uma integral dupla, e depois utilizar tal formulação para encontrar as equações das deformadas de três vigas com vãos distintos sob carregamentos distribuídos e pontuais generalizados. Tais equações foram compiladas em um *software* executável capaz de computar a flecha de vigas de seção T, em qualquer ponto de seu vão, com considerações acerca da fissuração e fluência do concreto. A calculadora produzida não só efetuará toda a matemática necessária para o cálculo de deslocamento de vigas, mas também calculará o Módulo de Elasticidade e a Inércia Equivalente Fissurada conforme as preconizações da NBR 6118:2014. Os resultados de tal *software* são, então, comparados com as flechas obtidas pelo *software* TQS, considerando uma viga de cobertura de um projeto estrutural feito para um sobrado, após uma análise de Grelha Não-Linear considerando a rigidez final.

Palavras-chave: estruturas; concreto armado; flecha; calculadora; Estado Limite de Serviço (ELS).

ABSTRACT

The present work proposes to demonstrate the mathematical formulation of Euler-Bernoulli Beam Theory, which affirms that the deflection function of a beam relates to the double integral of its bending moment function, and then utilizing this formulation to find the deflection equation of three beams with different kinds of span and under generalized distributed and concentrated loads. Such equations were compiled in an executable software capable of computing the deflection of a T section beam, in any point of its span, considering the crackling and creep of the concrete. The created calculator not only will do all the necessary math of the beam deflection, but will also calculate the Elastic Modulus and the Equivalent Cracked Moment of Inertia according to the recommendations of NBR 6118:2014 standard. The results of such software will, then, be compared with the deflections obtained by the software TQS, considering a roof floor beam of a structural project made to a two-story house, after a Non-Linear Grid analysis considering the final stiffness.

Key-words: structures; reinforced concrete; deflection; calculator; Serviceability limit state (SLS).

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Exemplificação de operações no <i>Smath</i>	19
Figura 2 – Exemplificação do comando <i>solve</i>	20
Figura 3 – Exemplificação do comando <i>try / on error</i>	21
Figura 4 – Exemplificação do comando <i>if / else</i>	21
Figura 5 – Exemplificação de atribuição de variáveis e equações	23
Figura 6 – <i>Output</i> no executável do exemplo de atribuição de variáveis.....	24
Figura 7 – Criação de áreas, legendas e observações no <i>Smath</i>	25
Figura 8 – <i>Output</i> da criação de áreas, legendas e observações no executável.....	25
Figura 9 – Gráfico da relação Momento x Curvatura.....	26
Figura 10 – Deformação de trecho diferencial da viga	28
Figura 11 – Curvatura infinitesimal de uma função qualquer	31
Figura 12 – Maquinário para ensaio de viga biapoiada.....	34
Figura 13 – Maquinário para ensaio de viga engastada em balanço	34
Figura 14 – Comparação entre os resultados teóricos e experimentais para viga biapoiada ..	35
Figura 15 – Comparação entre os resultados teóricos e experimentais para viga engastada com carga central.....	35
Figura 16 – Comparação entre os resultados teóricos e experimentais de MAHATO et al para viga engastada com carga em extremidade	36
Figura 17 – Deformação no decorrer da microviga.....	37
Figura 18 – Comparação da deformação experimental e teórica da microviga	38
Figura 19 – Seção de Concreto Armado em Viga T generalizada	39
Figura 20 – Distribuição de deformações e tensões no Estádio I.....	40
Figura 21 – Módulos de Elasticidade importantes do Concreto	44
Figura 22 – Gráfico de valores de βft	48
Figura 23 – Tabela de valores de $\phi 1c$	48
Figura 24 – Esquema do vão efetivo	51
Figura 25 – Reações de Viga biapoiada sob carregamento uniforme	52
Figura 26 – Reações de Viga biapoiada sob carregamento pontual.....	53
Figura 27 – Viga biapoiada para comparação de resultados	57
Figura 28 – Resultados do <i>FTool</i> para primeiro trecho da Viga Biapoiada.....	58
Figura 29 – Resultados do <i>FTool</i> para segundo trecho da Viga Biapoiada	59
Figura 30 – Reações de Viga Engaste-Apoio sob carregamento uniforme.....	59

Figura 31 – Reações de Viga de Engaste-Apoio sob carregamento pontual.....	60
Figura 32 – Viga Engaste-Apoio para comparação de resultados.....	64
Figura 33 – Resultados do <i>FTool</i> para primeiro trecho da Viga Engaste-Apoio	65
Figura 34 – Resultados do <i>FTool</i> para segundo trecho da Viga Biapoiada	65
Figura 35 – Reações de Viga Biengastada sob carregamento uniforme	66
Figura 36 – Reações de uma Viga Biengastada sob carregamento pontual	66
Figura 37 – Viga Engaste-Engaste para comparação de resultados	70
Figura 38 – Resultados do <i>FTool</i> para viga Engaste-Engaste.....	71
Figura 39 – Carimbo do projeto arquitetônico considerado	74
Figura 40 – Planta arquitetônica do térreo	75
Figura 41 – Planta arquitetônica do pavimento superior.....	75
Figura 42 – Planta arquitetônica da cobertura	76
Figura 43 – Cortes presentes do projeto arquitetônico	76
Figura 44 – Planejamento da concepção estrutural	77
Figura 45 – Áreas de influência de pilares centrais, de extremidade e de canto.....	78
Figura 46 – Planta de forma da estrutura do térreo	79
Figura 47 – Planta de forma da estrutura do pavimento superior	80
Figura 48 – Planta de forma da estrutura da cobertura.....	80
Figura 49 – Visualização tridimensional da estrutura	81
Figura 50 – Visualização da viga estudada no modelador estrutural	82
Figura 51 – Estudo das charneiras plásticas da Laje 06	83
Figura 52 – Coleta da dimensão das tesouras.....	85
Figura 53 – Delimitação da influência das tesouras.....	87
Figura 54 – Inserção da seção generalizada no <i>Smath</i>	88
Figura 55 – Inserção das variáveis geométricas e de armação no <i>Smath</i>	89
Figura 56 – Visão do usuário da seção generalizada na calculadora	89
Figura 57 – Inserção das variáveis de material da viga no <i>Smath</i>	90
Figura 58 – Visão do usuário da colocação de dados dos materiais	91
Figura 59 – Inserção do cálculo normativo do Módulo de Young no <i>Smath</i>	92
Figura 60 – Visão do usuário de parâmetros e valores do Módulo de Young	92
Figura 61 – Inserção dos cálculos do Momento de Fissuração da seção	93
Figura 62 – Visão do usuário dos cálculos de Momento de Fissuração.....	93
Figura 63 – Inserção do equacionamento de propriedades brutas de seção no <i>Smath</i>	94

Figura 64 – Inserção do equacionamento de propriedades homogeneizadas de seção no <i>Smath</i>	95
Figura 65 – Inserção do equacionamento de propriedades fissuradas de seção no <i>Smath</i>	95
Figura 66 – Visão do usuário das propriedades geométricas diversas da seção	96
Figura 67 - Inserção dos dados de vão e carregamento no <i>Smath</i>	97
Figura 68 – Visão do usuário dos dados de vão e carregamento.....	97
Figura 69 – Inserção das equações de Momento e Cortante no <i>Smath</i>	98
Figura 70 – Equacionamento no <i>Smath</i> para cálculo de esforços máximos.....	99
Figura 71 – Visão do usuário dos cálculos de esforços máximos	99
Figura 72 - Equacionamento no <i>Smath</i> para cálculo de esforços em seção arbitrária	100
Figura 73 – Visão do usuário do cálculo de esforços em seção arbitrária	100
Figura 74 – Equacionamento no <i>Smath</i> de rigidezes fissuradas equivalentes.....	101
Figura 75 – Montagem de seleção arbitrária de rigidez de cálculo	102
Figura 76 – Visão do usuário do cálculo e seleção de rigidez flexional	102
Figura 77 – Inserção de equações da deflexão da viga no <i>Smath</i>	103
Figura 78 – Visão do usuário do cálculo de deslocamento em seção arbitrária.....	103
Figura 79 – Equacionamento do cálculo de deslocamentos máximos na viga no <i>Smath</i>	104
Figura 80 – Visão do usuário do cálculo de deslocamento máximo	104
Figura 81 – Validação via <i>FTool</i> do deslocamento máximo calculado	105
Figura 82 – Formação dos vetores a serem formatados em uma tabela	106
Figura 83 – Tabela de resultados finais de esforços e deslocamentos imediatos da viga	106
Figura 84 – Validação via <i>FTool</i> dos resultados obtidos para o esforço cortante.....	107
Figura 85 – Validação via <i>FTool</i> dos resultados obtidos para o momento fletor.....	107
Figura 86 – Validação via <i>FTool</i> dos deslocamentos da primeira metade da viga	107
Figura 87 – Validação via <i>FTool</i> dos deslocamentos da primeira metade da viga	108
Figura 88 – Equacionamento da consideração da fluência no <i>Smath</i>	108
Figura 89 – Visão do usuário da consideração da fluência	109
Figura 90 – Criação de combinação de cargas nova no TQS.....	109
Figura 91 – Resultados do processamento da Grelha Não Linear do TQS	110
Figura 92 – Carregamento estimado pelo modelador do TQS	111

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Método dos vãos ponderados	16
Quadro 2 – Primeira parte das limitações normativas de deflexão	72
Quadro 3 – Primeira parte das limitações normativas de deflexão	73

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Dados da Viga biapoiada para comparação de resultados	57
Tabela 2 – Resultados das Equações para primeiro trecho da Viga Biapoiada.....	58
Tabela 3 – Resultados das Equações para segundo trecho da Viga Biapoiada	58
Tabela 4 – Dados da Viga Engaste-Apoio para comparação de resultados	64
Tabela 5 – Resultados das Equações para primeiro trecho da Viga Engaste-Apoio	64
Tabela 6 - Resultados das Equações para segundo trecho da Viga Engaste-Apoio	65
Tabela 7 - Dados da Viga Engaste-Engaste para comparação de resultados	70
Tabela 8 – Resultados das Equações para primeiro trecho da Viga Engaste-Engaste	70
Tabela 9 – Resultados das Equações para primeiro trecho da Viga Engaste-Engaste	71
Tabela 10 – Peso encontrado das tesouras.....	85
Tabela 11 – Peso da trama de madeira da cobertura.....	85
Tabela 12 – Peso total da trama e telhas cerâmicas.....	86
Tabela 13 – Reações de apoio das tesouras	87

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	JUSTIFICATIVA	15
1.2	OBJETIVOS	17
1.2.1	Objetivo Geral	17
1.2.2	Objetivos Específicos.....	17
1.3	DELIMITAÇÃO DO TRABALHO	18
2	METODOLOGIA.....	18
2.1	UTILIZAÇÃO DE SOFTWARE PARA EFETUAÇÃO DOS CÁLCULOS	18
2.2	AVALIAÇÃO DE CÁLCULOS NORMATIVAMENTE NECESSÁRIOS	21
2.3	CONSTRUÇÃO DE PROGRAMA EXECUTÁVEL	22
2.4	COMPARAÇÃO DE RESULTADOS DA CALCULADORA COM PROJETO ESTRUTURAL NO TQS	26
3	TEORIA DE VIGAS DE EULER-BERNOULLI	27
3.1	DEMONSTRAÇÃO DO MODELO	27
3.2	VALIDAÇÃO TEÓRICA	33
4	CÁLCULOS NECESSÁRIOS PARA RESULTADOS REALÍSTICOS COM O MODELO	38
4.1	CONSIDERAÇÕES ACERCA DA INÉRCIA	38
4.1.1	Momento de fissuração e Estádios do concreto	39
4.1.2	Características geométricas do Estádio II puro	41
4.1.3	Formulação de Branson.....	42
4.1.4	Homogeneização da Seção de Concreto Armado	43
4.2	CONSIDERAÇÕES NORMATIVAS DO MÓDULO DE YOUNG.....	43
4.2.1	Definições e Métodos de Cálculo.....	43
4.3	CONTRIBUIÇÃO DA FLUÊNCIA PARA A DEFORMAÇÃO	45
4.3.1	Introdução ao fenômeno da fluência	45
4.3.2	Roteiro preconizado pelo Anexo A da Norma 6118:2014.....	46
4.3.3	Roteiro aproximado para cálculo da ação da fluência.....	49
4.4	VÃO EFETIVO DA VIGA	50
4.5	CONSIDERAÇÕES ACERCA DO CARREGAMENTO	51
5	APLICAÇÃO DA TEORIA DE EULER-BERNOULLI EM VÃOS COM CARGA DISTRIBUIDA E PONTUAL NÃO DEFINIDAS.....	52

5.1	VÃOS DE DUPLO APOIO.....	52
5.1.1	Equações de Momento Fletor e Esforço Cortante para Vigas Biapoiadas	52
5.1.2	Equações do deslocamento vertical no decorrer da Viga Biapoiada.....	55
5.1.3	Validação das equações de viga biapoiada.....	57
5.2	VÃOS DE ENGASTE-APOIO	59
5.2.1	Equações de Momento Fletor e Esforço Cortante para Vigas de Engaste-Apoio	59
5.2.2	Equações do deslocamento vertical no decorrer da Viga Engaste-Apoio	61
5.2.3	Validação das equações de Viga Engaste-Apoio	63
5.3	VÃOS DE DUPLO ENGASTE.....	65
5.3.1	Equações de Momento Fletor e Esforço Cortante para Vigas de Engaste-Engaste	65
5.3.2	Equações do deslocamento vertical no decorrer da Viga Biengastada	68
5.3.3	Validação das equações de Viga Engaste-Engaste	70
6	LIMITES DE DEFORMAÇÃO NORMATIVOS.....	71
7	ARQUITETURA DO SOFTWARE CONCEBIDO, RESOLUÇÃO DE EXEMPLO E COMPARAÇÃO DE RESULTADOS.....	73
7.1	PROJETO ARQUITETÔNICO A SER CONSIDERADO.....	74
7.2	ESTRUTURAÇÃO DA RESIDÊNCIA	77
7.3	ESCOLHA DE VIGA PARA EXEMPLO	81
7.4	PREVISÃO DE CARGAS ATUANTES SOBRE A VIGA	83
7.5	ARQUITETURA DO SOFTWARE E RESULTADOS OBTIDOS	87
7.6	RESULTADOS OBTIDOS NO TQS PARA ANÁLISE NÃO LINEAR.....	109
8	CONCLUSÃO.....	110
9	PROPOSTAS DE PESQUISA FUTURA.....	112

1 INTRODUÇÃO

1.1 JUSTIFICATIVA

A verificação das condições de serviço de um elemento estrutural torna-se tão fundamental quanto seu dimensionamento resistivo, uma vez que estão relacionadas com a funcionalidade, aparência, durabilidade e conforto dos usuários (Camacho, 2009). A Norma ABNT 6118:2014 é imperativa, no item 6.1, quanto à necessidade de uma estrutura de concreto armado, durante sua vida útil, possuir boas condições de utilização, sendo tal desempenho citado também no item 5.1.2.2 como um dos requisitos para a qualidade da estrutura. Torna-se, então, fundamental o estudo acerca dos Estados Limites de Serviço como um todo, estando abarcado neste trabalho o Estado Limite de deformações excessivas (ELS-DEF), tal como é definido no item 3.2.4 da mesma Norma.

Tendo em vista que o obedecimento do ELS-DEF é mandatório, o pré-dimensionamento de um elemento estrutural o deve ter como um dos critérios de análise, porém as metodologias usuais dessa fase de projeto não abarcam todas as variáveis relacionadas à deformação das vigas e suas limitações normativas. De uma breve avaliação do método mais difundido, sendo este o que afirma ser a altura da viga 10% de seu vão, pode-se ver que:

- Os limites estabelecidos pela norma são desconsiderados. Tomando uma viga a vencer um vão de seis metros como exemplo, o pré-dimensionamento de 60 centímetros de vão não considera que nos casos em que a viga só deve obedecer ao limite sensorial visual, sua flecha limite seria de 2,4 centímetros, mas caso ela apoie alvenarias, seria de apenas 1 centímetro. Ou seja, duas situações distintas chegariam à mesma altura pré-dimensionada, mas uma com um deslocamento permitido mais de duas vezes maior;
- O aumento proporcional da altura com o aumento do vão não condiz com o fenômeno de deformação das vigas, tomando como exemplo uma viga biapoiada de seção retangular: a altura da sua seção contribui cubicamente contra a flecha total, enquanto que o vão contribui a favor da flecha a uma potência à quarta. Também é possível citar que seu momento resistido antes da fissuração aumenta quadraticamente em relação à altura, tal como o momento máximo aumenta quadraticamente em relação ao vão do elemento, entretanto as duas grandezas se relacionam de maneira não trivial dentro da Metodologia de Branson para inércias equivalentes;

- Em nenhum momento, dentro desse método, é considerado fatores como o f_{ck} do concreto, bem como seu Módulo de Elasticidade e fatores que o influenciam (como agregados e momento de aplicação de carga). A metodologia, portanto, produz vigas de mesma altura para vencer um certo vão independente do concreto pertencer a uma classe de alta resistência ou baixa;
- A metodologia não distingue vigas posicionadas no centro do pavimento das de borda, tampouco considera as vigas que recebem cargas pontuais de outras vigas. Tais cargas pontuais podem ser determinantes para o valor da flecha máxima obtida;
- Não existe a possibilidade, nesse cenário, da consideração do modelo de mesa colaborante, permitido na norma para os casos de vigas em lajes maciças.

Métodos mais modernos surgiram ao longo do tempo, produzindo bons resultados quando avaliada sua facilidade de utilização. Pode-se citar a técnica dos vãos ponderados (Cunha; Pelizaro, 2017), visível no Quadro 1, em que ocorre uma análise melhor acerca do posicionamento das vigas dentro do pavimento e como isto vai afetar sua altura final.

Quadro 1 – Método dos vãos ponderados

Caso	Posição da viga	Dá apoio a outra(s) viga(s)	Fórmula
1	Central	Sim	$h = 14\% L$
2	Central	Não	$h = 10\% L$
3	Periférica	Sim	$h = 10\% L$
4	Periférica	Não	$h = 9\% L$

Fonte: Cunha, 2017, p. 7.

Tendo em vista a necessidade da verificação dos deslocamentos totais ocorridos na estrutura, ante a simplicidade dos métodos de pré-dimensionamento, uma calculadora de deflexão de vigas de concreto armado será concebida levando em conta todos os critérios normativos exigidos, tais como: a fissuração, a fluência, a combinação de cargas, o vão efetivo, entre outros.

Tal calculadora deverá ser de interface intuitiva, mas ao mesmo tempo de qualidade técnica, de modo a permitir a inserção de todas as variáveis envolvidas no fenômeno da

deflexão. Além disso, os relatórios emitidos pelo programa, mostrando toda a matemática feita para alcançar os resultados, possuirá valor didático para os usuários. Tais resultados tratam-se, principalmente, das deflexões finais ocorridas na estrutura, não possuindo, portanto, caráter de pré-dimensionamento.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo Geral

Desenvolver uma calculadora de deslocamentos e esforços solicitantes atuantes sobre vigas de diferentes vinculações e carregamentos generalizados. Isto para que seja utilizada de maneira eficaz e de funcionamento intuitivo para promover o aprendizado desta matéria e o devido dimensionamento de elementos estruturais.

1.2.2 Objetivos Específicos

- Realizar uma demonstração matemática da Teoria de Vigas de Euler-Bernoulli, que se propõe a relacionar, de maneira simples, o Momento Fletor com a deformada da viga;
- Mostrar um pouco das validações experimentais já feitas para essa Teoria de Vigas;
- Utilizar o modelo demonstrado de tal teoria para equacionar, mostrando as demonstrações devidas, as fórmulas das deformadas de vigas sob carregamento distribuído e pontual generalizados e três tipos de apoio: biapoiados, apoio e engaste e duplo engaste;
- Discutir as disposições normativas e da literatura acerca do tratamento dos mais diversos fatores que influenciam a deformação de vigas, visando a obtenção de resultados realistas. Dentre os fatores analisados, pode-se citar: a inércia final de uma viga fissurada, o módulo de Elasticidade a ser considerado, contribuição das armaduras na inércia da viga e a atuação do fenômeno da fluência;
- Reunir os conhecimentos discutidos em um programa de fácil uso para auxiliar o estudo da matéria de estruturas.

1.3 DELIMITAÇÃO DO TRABALHO

O presente trabalho apenas lida com a Teoria de Vigas de Euler-Bernoulli para inferir o comportamento da viga sob seus carregamentos, não sendo abarcados outros modelos tais como a Teoria de Vigas de Timoshenko-Ehrenfest e o Método dos Elementos Finitos. Os carregamentos considerados foram o de carga pontual e carga uniformemente distribuída perpendiculares à viga, sendo deixados de lado esforços torsores, carregamentos distribuídos crescentes, esforços axiais, entre outros. O único Estado Limite de Serviço a ser calculado será o relativo às flechas máximas da viga (ELS-DEF) e as vinculações da viga serão apenas as de duplo apoio, apoio e engaste e duplo engaste. Todas as referências normativas serão relacionadas à Norma 6118 em sua versão de 2014, coisa que não resulta em grandes diferenças em relação à utilização da versão de agosto de 2023, uma vez que esta manteve o mesmo cálculo em relação a: Inércia fissurada equivalente de Branson, Módulos de Elasticidade tangenciais e secantes, Momento de Fissuração e Resistência média do concreto sob tração para classes até C50.

2 METODOLOGIA

2.1 UTILIZAÇÃO DE SOFTWARE PARA EFETUAÇÃO DOS CÁLCULOS

O *Smath* é um software russo voltado à computação matemática cujo editor é definido pelo próprio site como “WYSIWYG”, sigla para ‘*What you see is What you get*’, ou, em tradução livre, ‘O que você vê é o que você leva’. Tratando-se de um software de fácil utilização, porém grande capacidade computacional para questões matemáticas, o mesmo, e alguns plugins disponibilizados gratuitamente, serão utilizados neste trabalho dentro dos objetivos de demonstrar as equações que definem a deformada das vigas a partir da Teoria de Euler-Bernoulli e de compor um programa que realize a análise da deformação de vigas de maneira roteirizada e de fácil entendimento.

Primeiramente, será demonstrada a ideia central da Teoria de Vigas de Euler-Bernoulli de que a função da deformada de uma viga pode ser obtida através da integral dupla da função momento fletor e considerações acerca da sua rigidez. A esta tarefa caberá intensa revisão da literatura, principalmente no que se refere à matéria “Resistência dos Materiais” e seus fundamentos. Tal teoria será, então, aplicada à três vãos já explicitados dentro dos objetivos do

trabalho: vãos de apoio duplo, engaste e apoio e engaste duplo, todos com uma única carga pontual e uma carga distribuída, para que sejam encontradas suas funções deslocamentos.

Isto será feito tendo em mãos os esforços relacionados a cada tipo e carregamento citado para cada tipo de vão, facilmente obtidos a partir de tabelas utilizadas para cálculo através do Método das Rigidezes (também dito Método dos deslocamentos). Tais esforços serão utilizados para inferir a função de Momento Fletor de cada viga a partir do somatório de momentos atuantes em uma seção distada x do apoio esquerdo, função esta que será integrada duas vezes no software *Smath* em cumprimento do Modelo de Vigas utilizado. Na maioria dos casos, esta tarefa é bastante simples com essa ferramenta digital uma vez que através dos comandos “int” e “diff” é possível, respectivamente, integrar equações definidas e também derivá-las em relação à alguma variável. Na Figura 1 é possível ver uma função $f(x)$ definida arbitrariamente, sua derivação e uma integral definida para certo intervalo. Integrais indefinidas também podem ser realizadas com plugins específicos.

Figura 1 – Exemplificação de operações no *Smath*

$$f(x) := x \cdot \cos(x)$$

$$\frac{d}{dx} f(x) = -x \cdot \sin(x) + \cos(x)$$

$$\int_0^{10} f(x) dx = -7,2793$$

Fonte: Elaborada pelo autor.

O Software, entretanto, não mostra automaticamente as constantes de integração quando integrais indefinidas são feitas. Estas serão impostas como variáveis e seus valores serão descobertos através de condições de contorno. Ao todo serão geradas quatro incógnitas: duas constantes de integração para a função pré-aplicação da carga pontual e duas constantes de

integração pós-aplicação. As quatro condições de contorno necessárias para inferir as quatro constantes são: o deslocamento nulo acima do primeiro e último apoio e a continuidade de valor e derivada no ponto de aplicação de carga pontual da função da deformada. Na prática, isto será resolvido através do método da substituição dentro desse sistema de equações. Outras soluções poderiam ser feitas, tal como montar uma matriz de coeficientes e encontrar sua inversa.

Um comando que será extensamente utilizado será o comando “solve”. Ele permite encontrar a raiz para uma expressão ou função em relação a uma variável em específico. Ao aplicar esse comando sobre a função derivada do Momento Fletor, que é idêntica – por definição – à função do cortante, tem-se a posição em que o Momento Fletor é máximo. De maneira análoga, aplicando tal comando à derivada da função deslocamento (descoberta através da Teoria de Euler-Bernoulli) obtém-se o ponto onde o deslocamento foi máximo. O comando “solve” também possui uma versão alternativa em que permite encontrar raízes apenas em um intervalo específico. Uma utilização do comando é exemplificada na Figura 2, na qual o software retorna um vetor com os valores $[-2,37; 3,37]$ para x , que correspondem às raízes da função criada.

Figura 2 – Exemplificação do comando *solve*

$$g(x) := x^2 - x - 8$$

$$\text{solve}(g(x); x) = \begin{bmatrix} -2,3723 \\ 3,3723 \end{bmatrix}$$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Dentro desse mesmo contexto, o comando “try / on error” se provará muito útil. Nele o software tentará executar certa ação e, em caso de erro, tentará executar uma outra ação em específico. Isto será utilizado extensamente no software uma vez que não é trivial se o ponto de flecha máxima estará antes ou depois do ponto de aplicação de carga pontual. A calculadora, então, tentará encontrar a raiz da derivada da função deslocamento para a função do trecho antes da carga pontual e, em caso de erro, procurará a raiz no trecho seguinte, sendo a montagem

desse comando visível na Figura 3. Similarmente, o comando “*if/else*” estabelecerá duas ações a serem executadas condicionalmente pelo programa. Entretanto, a condição de execução não será mais a falha da primeira delas, mas sim o obedecimento de determinada expressão. Isto pode ser utilizado, por exemplo, para estabelecer duas maneiras diferentes de calcular uma variável a partir do valor de outra variável, como acontece nas duas funções distintas de cálculo de Módulo de Elasticidade a depender do valor do f_{ck} do concreto, visível na Figura 4.

Figura 3 – Exemplificação do comando *try / on error*

```

Posição de Deslocamento Máximo
x_máximo_def:=try
    solve  $\left( \frac{d}{dx} v_{b,1}(x \text{ m}); x; 0; a + 0,00001 \text{ m} \right) \text{ m}$ 
on error
    solve  $\left( \frac{d}{dx} v_{b,2}(x \text{ m}); x; a - 0,00001 \text{ m}; L \right) \text{ m}$ 

```

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 4 – Exemplificação do comando *if/else*

```

Eci:=if fck < 55 MPa
     $\alpha E \cdot 5600 \cdot \sqrt{\frac{fck}{\text{MPa}}} \text{ MPa}$ 
else
     $21500 \cdot \alpha E \cdot \left( \frac{fck}{10 \text{ MPa}} + 1,25 \right)^{\frac{1}{3}}$ 

```

Fonte: Elaborada pelo autor.

2.2 AVALIAÇÃO DE CÁLCULOS NORMATIVAMENTE NECESSÁRIOS

O Modelo de Euler-Bernoulli possui limitações e hipóteses que afastam seu resultado do que ocorre de fato com a deformação de uma viga. Através de uma revisão de literatura, bem como um estudo do que prescreve a Norma vigente de projetos estruturais, serão descritas todas as considerações a serem feitas para que, aliadas ao Modelo de cálculo, produzam resultados factíveis. No curso do trabalho, então, estará descrito como são equacionadas questões não explícitas na matemática demonstrada, como:

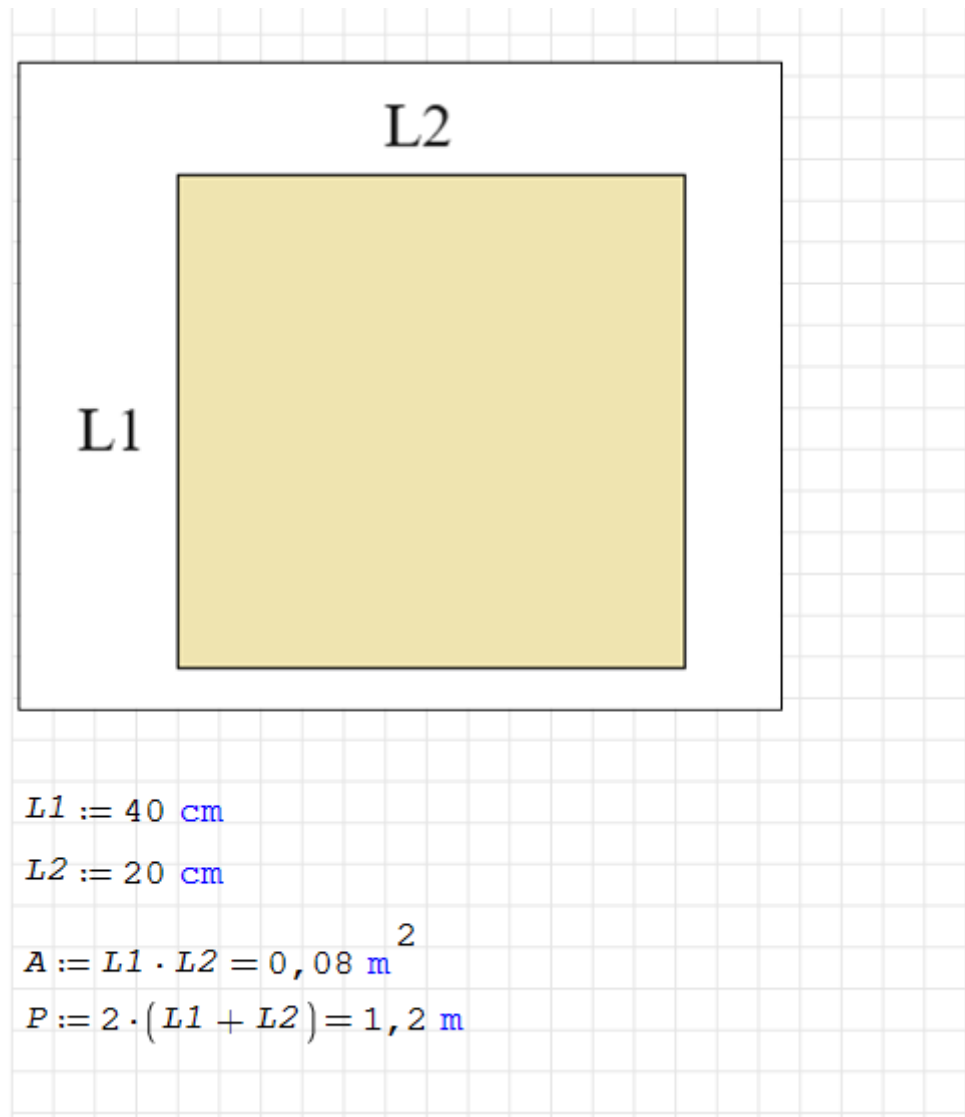
- A não homogeneidade da inércia da seção transversal, visto a presença de materiais diferentes (aço e concreto), e como suas características geométricas podem ser calculadas levando isso em conta;
- A não homogeneidade da rigidez à flexão no decorrer da viga, perante a fissuração do elemento estrutural em certas regiões. Discutir-se-á como uma rigidez equivalente pode ser encontrada mesmo com valores de inércia distintos para cada seção da viga;
- A consequência da manutenção da carga no decorrer dos meses e anos, no fenômeno denominado fluência, e os fatores que afetam o mesmo;
- Influência dos agregados e da resistência característica à compressão do concreto no Módulo de Elasticidade do mesmo, sendo este um parâmetro fundamental para o cálculo de flechas;
- Limitações do deslocamento perante as diferentes utilizações do pavimento em questão, descritas normativamente.

2.3 CONSTRUÇÃO DE PROGRAMA EXECUTÁVEL

O *Smath* é programado para gerar de maneira fácil softwares executáveis apenas com as expressões matemáticas colocadas no mesmo, necessitando de pouca formatação extra. O programa entende que variáveis com atribuição direta de números se tornam *inputs* editáveis, ao contrário de variáveis dadas junto a expressões matemáticas com outras variáveis, sendo estas visíveis em cor cinza e não editáveis. Também é possível colocar figuras, capacidade que será aproveitada para colocar as seções e vãos da viga, como também colocar gráficos caso os mesmos sejam gerados dentro do programa.

Na Figura 5 pode-se ver a colocação de expressões matemáticas simples no software. Foi criada uma imagem autoral de um retângulo e criadas variáveis para seus lados, sendo também colocadas expressões para sua área e perímetro. Arbitrariamente, às variáveis L1 e L2, foi atribuída a unidade de centímetro, podendo ser qualquer unidade armazenada na programação no *software*. Também pode ser visto que os resultados apareceram em metro quadrado e metro linear, porém, as unidades mostradas pelos resultados de expressões podem ser mudadas conforme o desejo do usuário.

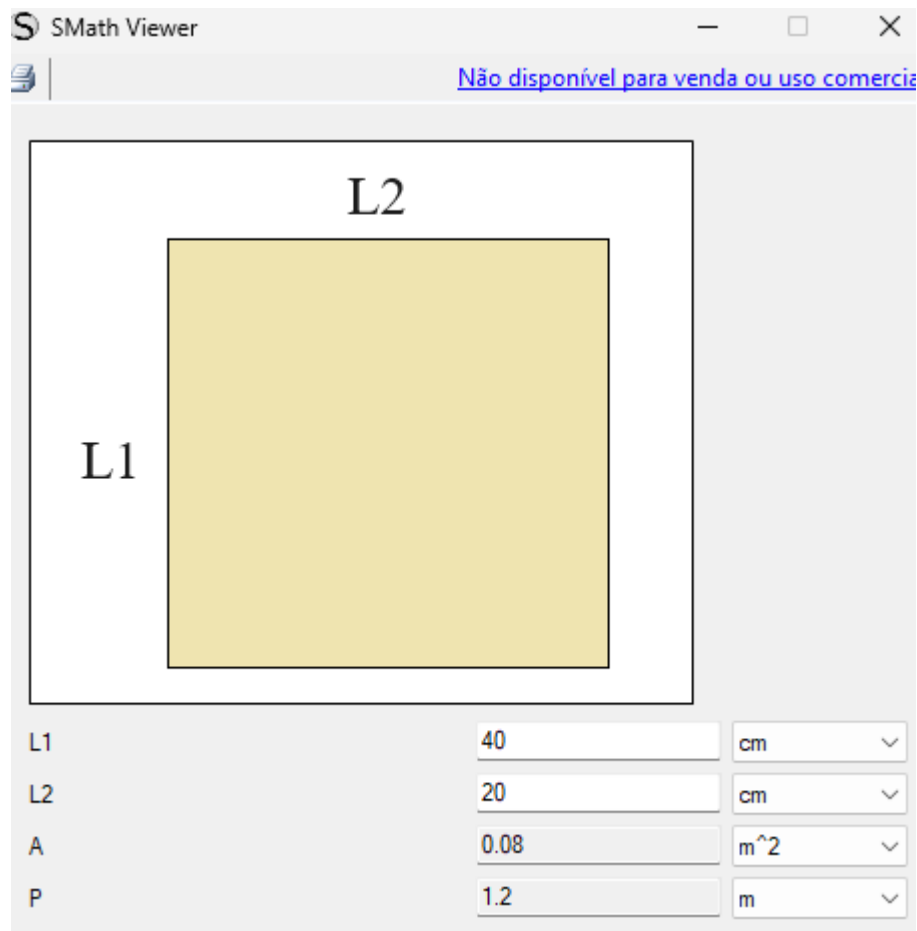
Figura 5 – Exemplificação de atribuição de variáveis e equações



Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Figura 6 pode-se ver o executável gerado com a exata programação mostrada anteriormente. As caixas brancas indicam que tais valores podem ser alterados, enquanto que as cinzas indicam que os valores são fixos por serem calculados a partir de outros. Vê-se, também, que as unidades aparecem em caixinhas editáveis, onde o usuário pode alterá-las.

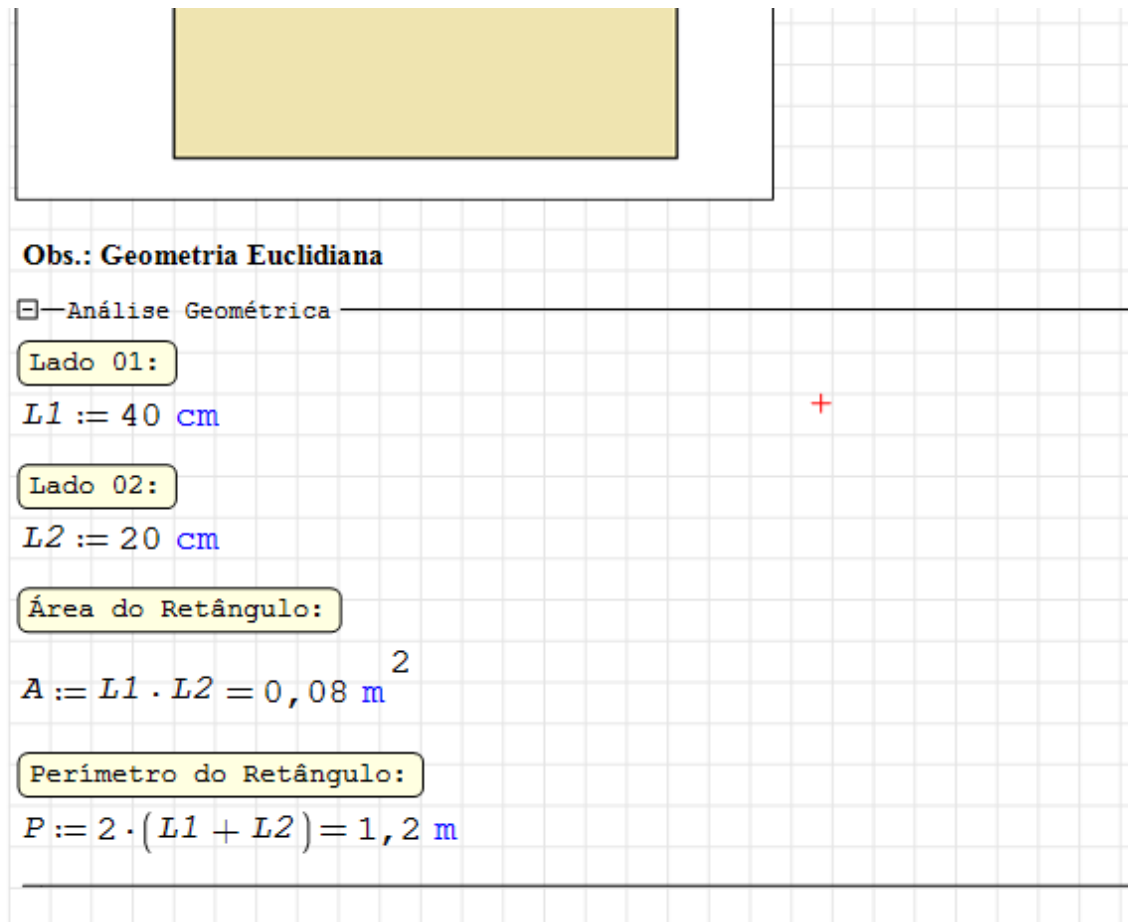
Figura 6 – *Output* no executável do exemplo de atribuição de variáveis



Fonte: Elaborada pelo autor.

A formatação do programa pode ser alterada de maneira a tornar mais fácil sua utilização e mais organizados os seus cálculos. Existem diversas maneiras para isso, mas as mais utilizadas neste trabalho foram a atribuição de descrição para as variáveis, feita no programa conforme a Figura 7, a criação de áreas intituladas, visível na mesma Figura e a colocação de observações, tal como foi colocada a de 'Geometria Euclidiana' no exemplo da Figura. O resultado dessas intervenções no programa executável é mostrado na Figura 8. Também é perfeitamente possível criar abas diferentes para o programa, em um procedimento semelhante ao de criação de áreas, porém seccionando as páginas do software.

Figura 7 – Criação de áreas, legendas e observações no *Smath*



Obs.: Geometria Euclidiana

☐ —Análise Geométrica

Lado 01:
 $L1 := 40 \text{ cm}$

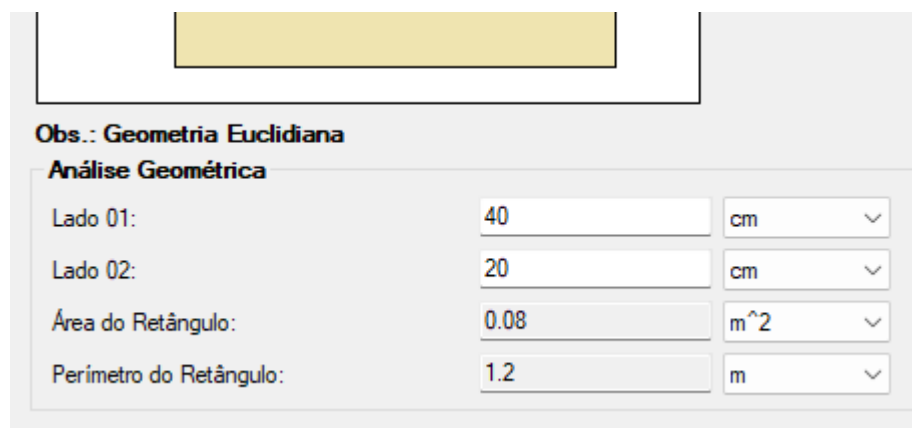
Lado 02:
 $L2 := 20 \text{ cm}$

Área do Retângulo:
 $A := L1 \cdot L2 = 0,08 \text{ m}^2$

Perímetro do Retângulo:
 $P := 2 \cdot (L1 + L2) = 1,2 \text{ m}$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 8 – *Output* da criação de áreas, legendas e observações no executável



Obs.: Geometria Euclidiana

Análise Geométrica

Lado 01:	40	cm
Lado 02:	20	cm
Área do Retângulo:	0.08	m ²
Perímetro do Retângulo:	1.2	m

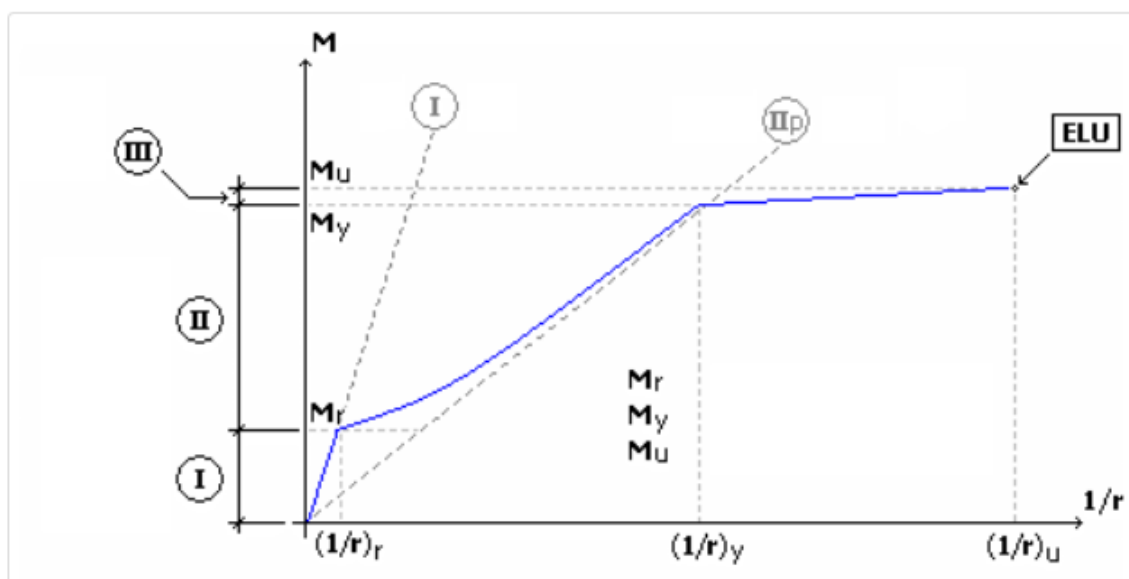
Fonte: Elaborada pelo autor.

2.4 COMPARAÇÃO DE RESULTADOS DA CALCULADORA COM PROJETO ESTRUTURAL NO TQS

O TQS é uma empresa brasileira fundada em 1986 cujo software de elaboração de projetos estruturais é extremamente completo e um dos mais bem conceituados do mercado. Uma das várias ferramentas disponíveis nesse software se trata da Grelha Não-Linear, utilizada para avaliar Estados Limites de Utilização de pavimentos ao disponibilizar regiões e valores de fissuração e flechas. Nela, ao contrário da Grelha Linear, pode-se avaliar as deformações obtidas levando em consideração a fissuração atuando na estrutura.

Tal fator, que invalida a consideração de uma linearidade elástica perfeita, faz parte do fenômeno denominado “Não Linearidade Física”, que é de extrema relevância para o cálculo estrutural e pode ser considerado de diferentes maneiras. Pode-se citar a consideração normativa de uma porcentagem da rigidez flexional de diversos elementos estruturais distintos (a citar, como exemplo, 30% no caso de lajes) para levar em conta a Não Linearidade Física na análise de estabilidade global de edifícios, conforme preconiza o item 15.7.3 da NBR 6118:2014. A maneira que tal fenômeno é levado em conta na análise de pavimentos no TQS é através da construção de funções que relacionam o Momento fletor atuante e a curvatura da barra considerada. Tais funções não são lineares e sua derivação varia conforme a estrutura navega pelos seus Estádios de tensão, conforme visível na Figura 9.

Figura 9 – Gráfico da relação Momento x Curvatura



Fonte: TQS Informática, 2023.

Cabe ressaltar que a construção dessa curva leva em conta a armação da seção, uma vez que a curvatura ($1/r$) é criada pela deformação diferencial entre a extremidade comprimida e a extremidade tracionada da seção. O TQS pode tanto utilizar os resultados de armadura obtidos no processamento global quanto estimar as quantidades de armadura para lajes e vigas. O TQS também faz uso de um mecanismo de cálculo que trabalha com incrementos de carga, sendo o primeiro equivalente a uma análise linear, e sua progressão resulta em valores cada vez mais próximos com a realidade.

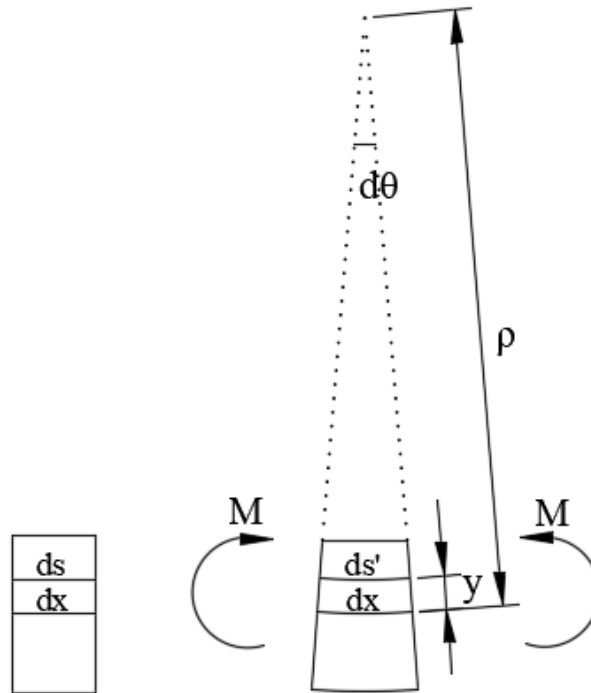
Um comparativo entre os resultados obtidos pela calculadora produzida neste trabalho e os resultados obtidos no TQS cumpriria duas funções principais:

- No caso de valores próximos, validaria a revisão de literatura realizada acerca da fenomenologia da deflexão de vigas, demonstrando que tanto os conceitos de engenharia, quanto as determinações normativas (as quais são programadas no TQS), foram obedecidos.
- Mostraria que a calculadora pode ser utilizada para avaliar vigas mesmo fazendo uso de metodologias de análise estrutural limitadas, tais como a consideração de engastamentos e rotulamentos perfeitos.

3 TEORIA DE VIGAS DE EULER-BERNOULLI

3.1 DEMONSTRAÇÃO DO MODELO

Na Figura 10 considera-se um trecho de viga de comprimento dx (imagem à esquerda) e sua disposição deformada sob influência de um momento fletor M (imagem à direita). Apenas este será considerado uma vez que “Se o comprimento da viga for muito maior que sua altura, a maior deformação será causada por flexão” (Hibbeler, 2010, p. 422).

Figura 10 – Deformação de trecho diferencial da viga

Fonte: Adaptado de Hibbeler, 2010.

Temos que ds representa uma fibra qualquer que dista y da fibra central, que também é a posição da linha neutra. O diferencial ds' representa a mesma fibra após a deformação, já sujeita à alteração de seu tamanho. O início e fim do trecho dx da viga formam, com extrapolação de seus redirecionamentos, um centro de curvatura de raio ρ e ângulo $d\theta$. Por trigonometria básica, o valor de ds' pode ser dado por uma simples relação com a curvatura, mostrada na Equação (1).

$$ds' = (\rho - y) \cdot d\theta \quad (1)$$

Seu valor original ds , previamente à flexão, é idêntico ao valor dx , ou seja, tal como mostrado na Equação (2):

$$ds = dx = \rho \cdot d\theta \quad (2)$$

Tal mudança de valor representa uma deformação ε , que por sua vez é definida como a razão entre a mudança de certo comprimento pelo seu valor original (Timoshenko; Gere, 1983). Aplicando este conceito à fibra supracitada, temos que a deformação é formulada tal como a Equação (3):

$$\varepsilon = \frac{ds - ds'}{ds} \quad (3)$$

Inserindo as Equações (1) e (2) na Equação (3), temos a Equação (4) que relaciona a deformação com o raio de curvatura e a posição da fibra:

$$\varepsilon = \frac{\rho \cdot d\theta - (\rho - y) \cdot d\theta}{\rho \cdot d\theta}$$

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho} \quad (4)$$

A razão $1/\rho$ é denominada como curvatura pela literatura padrão. Portanto, em todo o decorrer da seção haverá uma deformação ε proporcional à sua distancia da linha neutra. Disto, tem-se que também haverão tensões no decorrer da seção com a mesma proporcionalidade, visto o que afere a Lei de Hooke, formulada pela Equação (5):

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (5)$$

Unindo as Equações (4) e (5), temos a Equação (6):

$$\sigma = E \cdot \frac{y}{\rho} \quad (6)$$

A viga também deve respeitar condições de equilíbrio. O momento atuante M deve ser contido para que a viga esteja estática, e isto acontece através das tensões definidas anteriormente, geradas a partir da deformação. Cada tensão agirá sobre uma área diferencial dA distante da linha neutra com o valor y . Tal valor de distância atua como um braço de alavanca para a força resultante da tensão σ sobre a área dA , gerando um momento para combater o

momento agindo sobre a viga. A integral de todos os momentos criados por essa tensão ao longo da seção deve se igualar, necessariamente, ao momento externo, conforme visível na Equação (7).

$$M = \int_{-y}^y \sigma \cdot y \cdot dA \quad (7)$$

Impondo a Equação (6) dentro da Equação (7) para substituir a tensão, tem-se:

$$M = \int_{-y}^y E \cdot \frac{y}{\rho} \cdot y \cdot dA$$

$$M = \frac{E}{\rho} \cdot \int_{-y}^y y^2 \cdot dA$$

E, por definição, a integral supracitada é o Momento de Inércia da seção, representado por I (Timoshenko; Gere, 1983), donde a Equação acima pode ser reescrita tal como a Equação (8) abaixo.

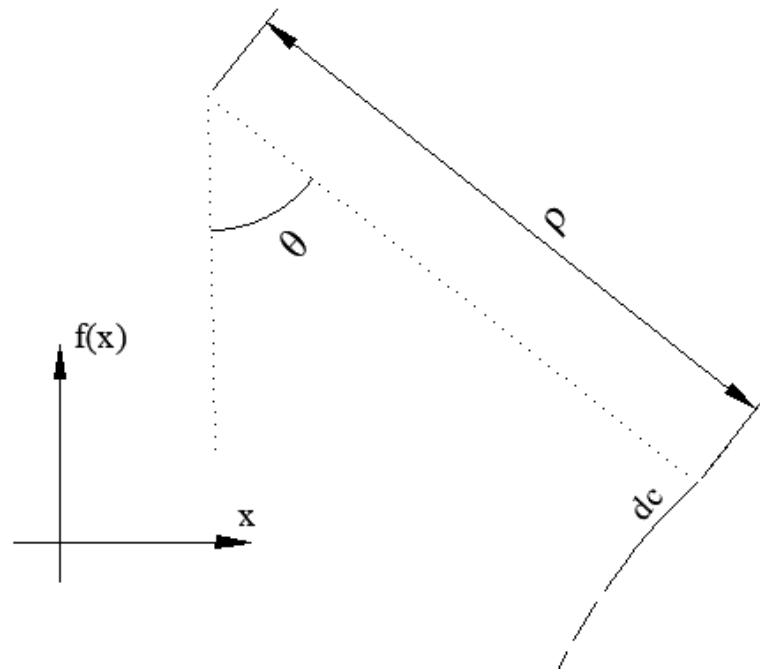
$$M = \frac{E \cdot I}{\rho} \quad (8)$$

Agora visualizando a questão do ponto de vista matemático, a curvatura $1/\rho$ pode ser relacionada com a função deslocamento vertical ao longo do comprimento da viga. A obtenção dessa função é o objetivo desta matéria, sendo seu relacionamento com a curvatura de vital importância, por estabelecer o deslocamento vertical para uma viga em equilíbrio sob a atuação de um momento fletor. A literatura de cálculo diferencial costuma estabelecer essa relação conforme mostrada abaixo (Hibbeler, 2010):

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)}{\left[1 + \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}$$

Essa relação pode ser demonstrada conforme se segue, lastreada na Figura 11. Considere uma curva formada por uma função qualquer $f(x)$. Um comprimento infinitesimal dessa função, dito dc , pode ser definido de duas maneiras: conforme o Teorema de Pitágoras aplicado aos diferenciais dx e $df(x)$ – visível na Equação (10) – e conforme a relação trigonométrica $\rho \cdot d\theta$ – visível na Equação (9):

Figura 11 – Curvatura infinitesimal de uma função qualquer



Fonte: Elaborada pelo autor.

$$dc = \rho \cdot d\theta \quad (9)$$

$$dc = \sqrt{dx^2 + df(x)^2} = dx \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{df(x)}{dx}\right)^2} \quad (10)$$

O ângulo θ é idêntico por trigonometria ao ângulo da reta tangente ao ponto $[x, f(x)]$ com a reta horizontal. Disso, tira-se que a derivada naquele ponto é a tangente desse mesmo ângulo. Através da dita ‘regra da cadeia’, pode-se então encontrar uma formulação para o valor de $d\theta$.

$$tg(\theta) = \frac{df(x)}{dx} \quad (11)$$

Derivando, tem-se:

$$\frac{1 + [tg(\theta)]^2}{d\theta} = \frac{d^2f(x)}{dx^2} \cdot \frac{1}{dx}$$

$$d\theta = \frac{1 + [tg(\theta)]^2}{\frac{d^2f(x)}{dx^2}} \cdot dx$$

Impondo a Equação (11):

$$d\theta = \frac{1 + \left[\frac{df(x)}{dx}\right]^2}{\frac{d^2f(x)}{dx^2}} \cdot dx \quad (12)$$

Unindo a Equação (9) e Equação (10) com a Equação (12), encontra-se a relação final idêntica ao anteriormente expresso:

$$dx \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{df(x)}{dx}\right)^2} = \rho \cdot \frac{1 + \left[\frac{df(x)}{dx}\right]^2}{\frac{d^2f(x)}{dx^2}} \cdot dx$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\left(\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right)}{\left[1 + \left(\frac{df(x)}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \quad (13)$$

No caso da matéria estudada, a função $f(x)$ é a função $w(x)$ do deslocamento vertical de um ponto x da viga. Entretanto, isto usualmente é modificado para fins de facilitar a obtenção numérica de resultados. Diferenciais de ordens superiores são usualmente desprezados, fazendo com que a curvatura se relacione com a função de deslocamento vertical sendo igual à sua segunda derivada, conforme a Equação (14) (Hibbeler, 2010).

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2w}{dx^2} \quad (14)$$

Unindo a Equação (14) com a Equação (8), que relaciona o momento à curvatura, obtemos a Equação (15):

$$\frac{M(x)}{EI} = \frac{d^2w}{dx^2} \quad (15)$$

Do qual integra-se para obter a função de deslocamento vertical da viga conforme mostrado na Equação (16).

$$w(x) = \frac{1}{EI} \cdot \int \int M(x) \cdot dx \quad (16)$$

Tal formulação é conhecida como Teoria de Vigas de Euler-Bernoulli. Através dela, conhecendo o Momento Fletor atuante no decorrer da viga, é possível conhecer seus deslocamentos verticais.

3.2 VALIDAÇÃO TEÓRICA

Diversos estudos procuraram validar os resultados previstos pela Teoria de Euler-Bernoulli ao compará-los com os dados experimentais. Em um artigo publicado na *International Journal of Advance Research in Engineering, Science & Technology*, por Mahato *et al.* (2015), duas vigas metálicas de seção retangular, sendo uma biapoiada e outra engastada em balanço, foram submetidas a cargas pontuais de 0,20 quilograma e 1 quilograma. A viga engastada em balanço foi submetida a duas cargas diferentes: uma em seu centro, e outra em sua extremidade. Isto foi feito com o maquinário mostrado nas Figura 12 e Figura 13.

Figura 12 – Maquinário para ensaio de viga biapoada



Fonte: Mahato *et al.*, 2015, p. 2.

Figura 13 – Maquinário para ensaio de viga engastada em balanço

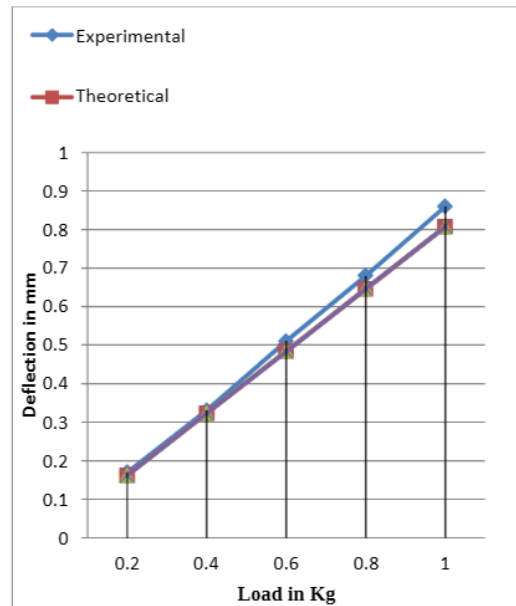


Fonte: Mahato *et al.*, 2015, p. 2.

Outras informações relevantes são de que o módulo de elasticidade do material utilizado foi de 210 GPa, seu momento de inércia era de $260,417 \text{ mm}^4$, e seu vão era de 600 milímetros. A comparação entre os valores obtidos em laboratório com os valores previstos teoricamente, que neste caso foram previstos pelos autores com a Teoria de Vigas de Euler-Bernoulli, é

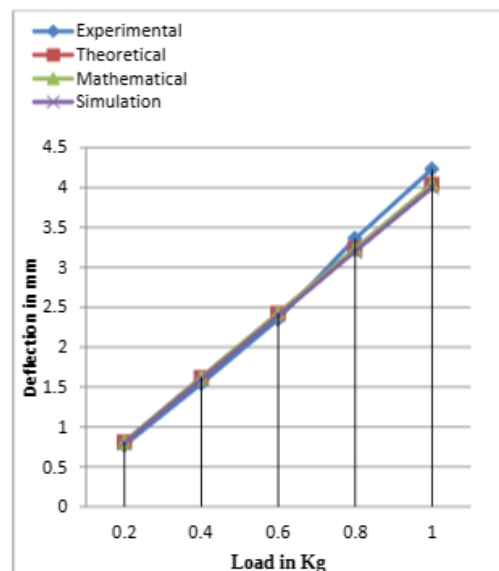
mostrada na Figura 14, Figura 15 e Figura 16, onde vê-se uma diminuição da exatidão da teoria conforme o aumento de carga.

Figura 14 – Comparação entre os resultados teóricos e experimentais para viga biapoiada



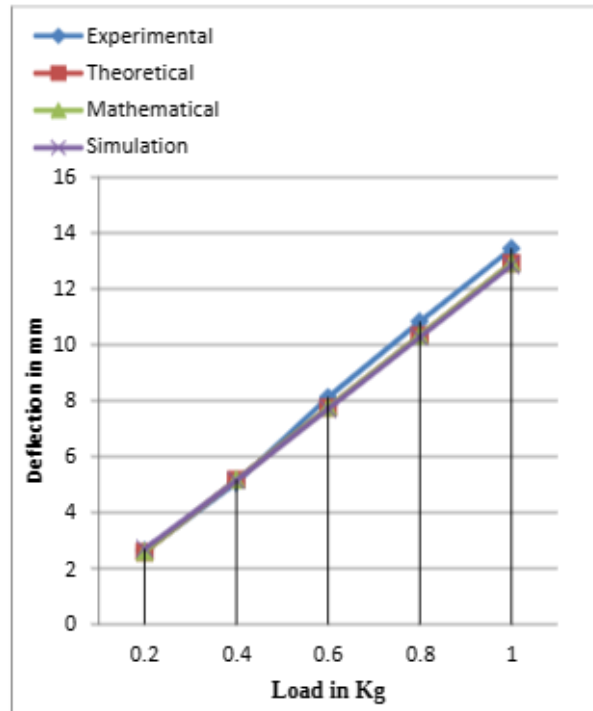
Fonte: Mahato *et al.*, 2015, p. 8.

Figura 15 – Comparação entre os resultados teóricos e experimentais para viga engastada com carga central



Fonte: Mahato *et al.*, 2015, p. 8.

Figura 16 – Comparação entre os resultados teóricos e experimentais de MAHATO et al para viga engastada com carga em extremidade



Fonte: Mahato et al, 2015, p. 8.

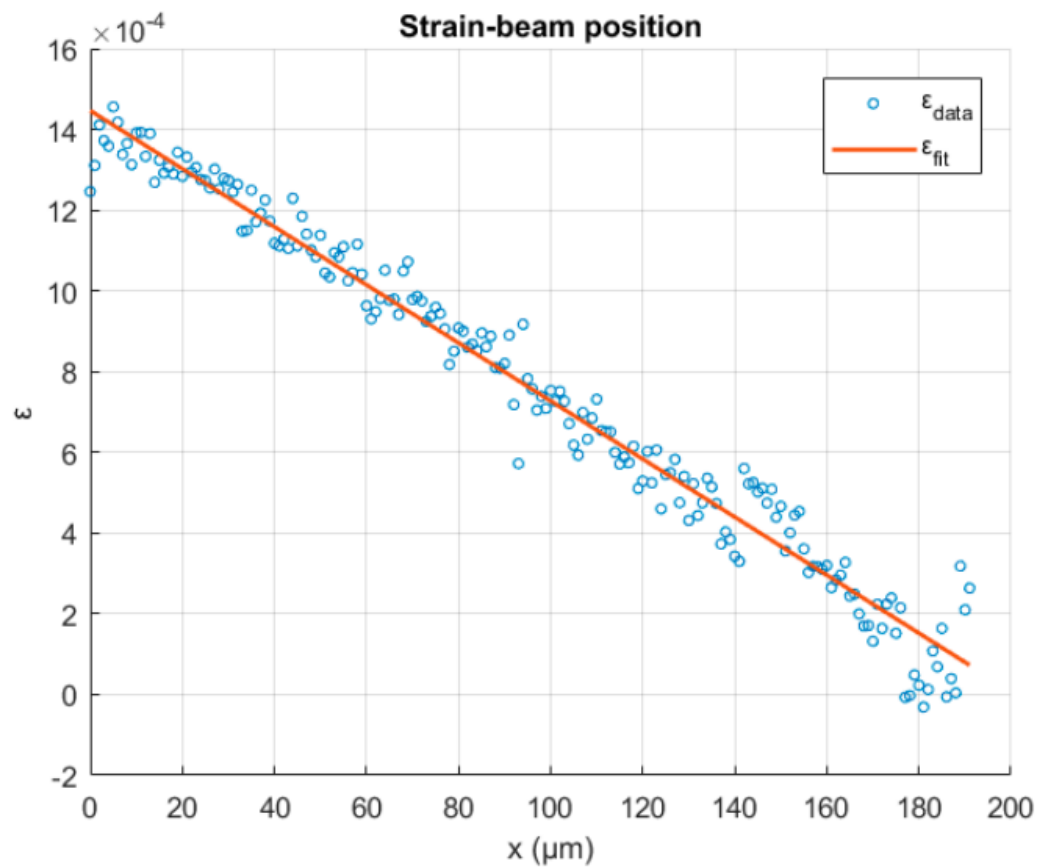
Ao fim, o estudo observou uma discrepância entre os resultados de aproximadamente 7% para a viga biapoiada e 5% para a viga engastada em balanço. Tais discrepâncias, segundo os autores, também podem ter como origem imperfeições da experimentação, tais como a influência da temperatura.

Outro trabalho que pode ser citado foi publicado na revista internacional *Axioms*, por Manoli *et al.* (2022). Nesse estudo, intitulado “Explorando os Limites da Teoria de Euler-Bernoulli na Micromecânica”, ou, originalmente, *Exploring the Limits of Euler–Bernoulli Theory in Micromechanics*, os pesquisadores analisaram a flexão de uma microviga (comprimento de 191 micrômetros) através da Espectroscopia de Raman e a compararam com os resultados previstos teoricamente. Eles citam como objetivo do estudo a validação da Teoria de Euler-Bernoulli como ferramenta eficaz para a micromecânica.

Neste caso o objeto comparado foi a deformação axial no decorrer da microviga. A mesma possuía um Módulo de Elasticidade de 169 GPa, um Momento de Inércia de $7,48 \cdot 10^{-22} \text{ m}^4$ e foi submetido a uma força de 251,8 micro Newtons. A Teoria de Euler-Bernoulli previa

uma linearidade entre o valor da deformação e a posição na viga em balanço, e tal relação linear foi comprovada pelos resultados conforme mostrado na Figura 17.

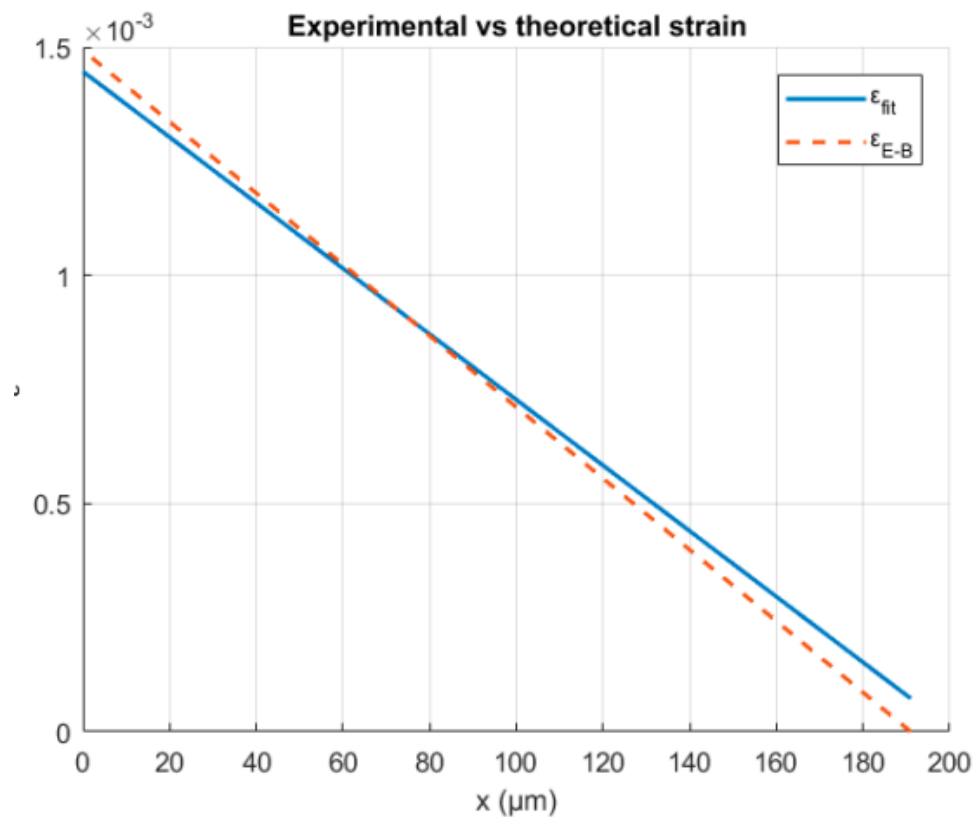
Figura 17 – Deformação no decorrer da microviga



Fonte: Manoli *et al.*, 2022, p. 6.

Ademais, uma comparação numérica entre os valores de deformação previstos para a microviga teoricamente e os valores obtidos via regressão linear resultou em uma quase equivalência, conforme visível na Figura 18.

Figura 18 – Comparação da deformação experimental e teórica da microviga



Fonte: Manoli *et al.*, 2022, p. 7.

4 CÁLCULOS NECESSÁRIOS PARA RESULTADOS REALÍSTICOS COM O MODELO

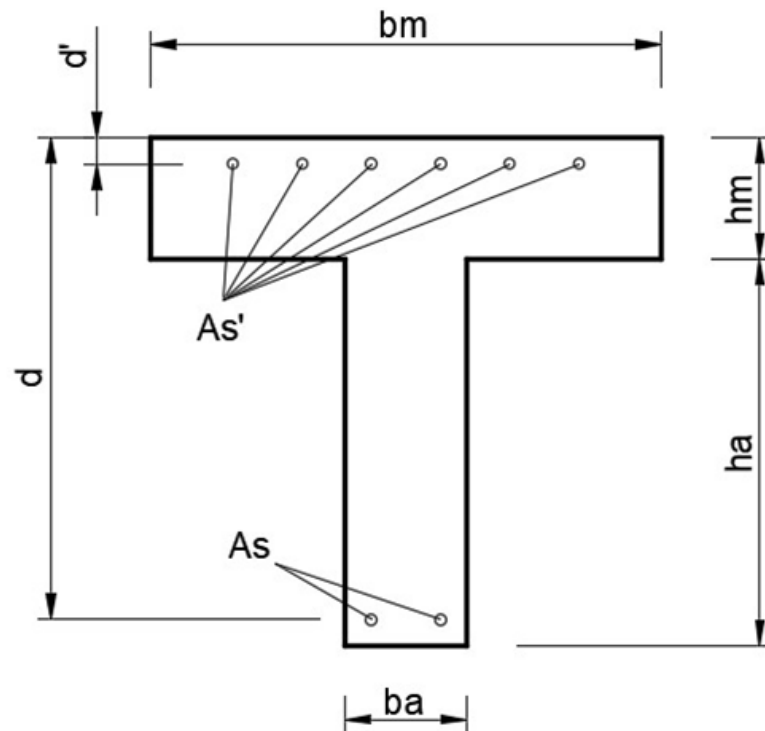
4.1 CONSIDERAÇÕES ACERCA DA INÉRCIA

Toma-se, como hipótese de cálculo, que o concreto é um material homogêneo e que suas tensões sob flexão podem ser calculadas a partir da ótica da Resistência dos Materiais. Entretanto, a partir da fissuração do concreto se torna necessária uma análise diferente (Carvalho; Filho, 2014). A viga com seção fissurada possuirá uma deformação diferente, uma vez que seu momento de inércia será alterado uma vez que parte do concreto não estaria mais contribuindo para o mesmo, sendo necessária para uma avaliação realista dos deslocamentos da viga levar em conta tais efeitos da fissuração sobre a inércia da viga.

As fórmulas apresentadas nessa seção se basearão, em parte, nas incógnitas mostradas na Figura 19 que exhibe uma versão generalizada de viga T armada. São visíveis as seguintes incógnitas: b_m e b_a são, respectivamente, a largura da mesa e da alma da seção; h_m e h_a são,

respectivamente a altura da mesa e da alma da seção (h será utilizado para representar a altura total, ou seja, $h_a + h_m$); d e d' são, respectivamente, a posição da armadura de tração e da armadura de compressão em relação ao topo da viga e, por fim, A_s e A_s' são, respectivamente, as áreas de aço da armadura de tração e de compressão. Cabe ressaltar que tal seção também abarca as seções retangulares ao considerar-se $b_m = b_a$ e $h_m = 0$.

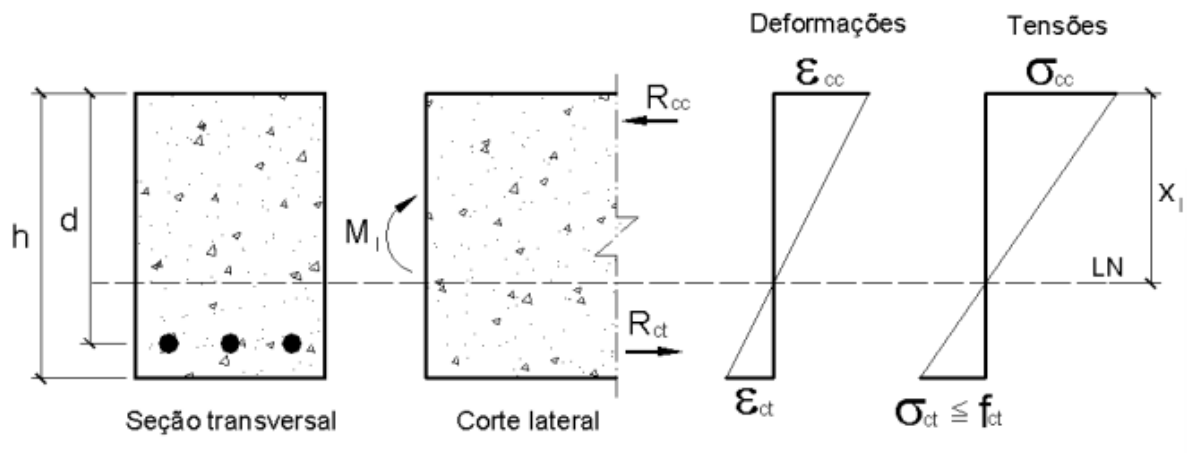
Figura 19 – Seção de Concreto Armado em Viga T generalizada



Fonte: Elaborada pelo autor.

4.1.1 Momento de fissuração e Estádios do concreto

Os estádios do concreto mostram o comportamento de uma viga de concreto armado submetida a diferentes níveis de flexão simples até o atingimento da ruptura. O Estádio I, que ocorre sob flexões de pequenas intensidades, caracteriza uma seção em que não há fissuração e pode-se assumir a proporcionalidade entre tensão e deformação (obedecimento à Lei de Hooke) (Camacho, 2009), conforme visível na Figura 20. Destaca-se que o concreto, nesse Estádio, resiste às tensões de tração e que o próximo Estádio começa a partir do surgimento de fissuração (Pinheiro; Muzardo; Santos, 2003).

Figura 20 – Distribuição de deformações e tensões no Estádio I

Fonte: Pinheiro *et al.*, 2003, p. 9.

O Estádio II do concreto se inicia com as fissurações da seção, de tal modo que o concreto na parte tracionada é totalmente desprezado e as tensões que equilibram a compressão se localizam nas armaduras. Conforme o carregamento aumenta, as tensões sob a armadura crescem e o tamanho da região de concreto inutilizada pela fissuração aumenta. Deve-se destacar, porém, que a região comprimida da seção continua obedecendo à Lei de Hooke. O Estádio II se finaliza com a plastificação da região comprimida. (Pinheiro; Muzardo; Santos, 2003). O Momento fletor que inicia a formação de fissuras pode ser determinado pela Equação (17), fornecida pelo item 17.3.1 da Norma NBR 6118:2014.

$$M_{fissuração} = \frac{\alpha \cdot f_{ctm} \cdot Ib}{y_t} \quad (17)$$

Em que: α é uma constante de correção de valores obtidos no ensaio de tração direta, Ib é a inércia da seção bruta, calculada conforme a Equação (18) para seções de vigas T; f_{ctm} é a resistência média à tração do concreto utilizado, encontrada a partir das Equações (21) e (22) para concretos de Classe 25 a 50 e 55 a 90 (utilizando f_{ck} em MPa e calculando o resultado também em MPa), respectivamente e y_t é a distância do centroide até a fibra mais tracionada.

$$I_b = \frac{(bm - ba).hm^3}{12} + \frac{ba.h^3}{12} + (bm - ba).hm.\left(y_{cgb} - \frac{hm}{2}\right)^2 + ba.h.\left(y_{cgb} - \frac{h}{2}\right)^2 \quad (18)$$

O parâmetro y_{cgb} é o centro de gravidade da seção T, calculado conforme a Equação (19) mostrada abaixo. Tal equação faz uso da variável A, que representa a área da seção transversal bruta, calculada pela Equação (20).

$$y_{cgb} = \frac{(bm - ba).\frac{hm^2}{2} + ba.\frac{h^2}{2}}{A} \quad (19)$$

$$A = (bm - ba).hm + ba.h \quad (20)$$

$$f_{ctm} = 0,3.f_{ck}^{\frac{2}{3}} \quad (21)$$

$$f_{ctm} = 2,12.ln(1 + 0,11.f_{ck}) \quad (22)$$

4.1.2 Características geométricas do Estádio II puro

O dito Estádio II puro é quando a seção de concreto não possui nenhum esforço de tração, por estar, abaixo da linha neutra, a seção inteiramente fissurada. O momento de inércia de uma seção neste caso pode ser encontrado a partir da Equação (23), quando a posição da linha neutra x_{II} se encontrar dentro da altura da mesa e a partir da Equação (24) quando a posição está abaixo da altura da mesa.

$$I_{IIpuro} = bm.\frac{x_{II}^3}{3} + ae.As.(x_{II} - d)^2 + (ae - 1).As'.(x_{II} - d')^2 \quad (23)$$

$$I_{IIpuro} = (bm - ba).\frac{(hm)^3}{12} + ba.\frac{x_{II}^3}{3} + hm.\left((bm - ba).\left(x_{II} - \frac{hm}{2}\right)^2\right) + ae.As.(x_{II} - d)^2 + (ae - 1).As'.(x_{II} - d')^2 \quad (24)$$

A posição da linha neutra pode ser calculada a partir da metodologia de Ghali e Favre (1986) sendo descrita pela Equação (25), levando em conta as outras Equações (26), (27) e (28) como auxílio (Carvalho; Filho, 2014).

$$x_{II} = \frac{-a_2 + \sqrt{a_2^2 - 4 \cdot a_1 \cdot a_3}}{2 \cdot a_1} \quad (25)$$

$$a_1 = \frac{ba}{2} \quad (26)$$

$$a_2 = hm \cdot (bm - ba) + (\alpha e - 1) \cdot As' + \alpha e \cdot As \quad (27)$$

$$a_3 = (-d') \cdot (\alpha e - 1) \cdot As' - d \cdot \alpha e \cdot As - \frac{hm^2}{2} \cdot (bm - ba) \quad (28)$$

4.1.3 Formulação de Branson

A viga, naturalmente, trabalha sob diferentes valores de momento fletor no seu decorrer, criando regiões em que existem fissuração em diferentes intensidades e regiões sem fissuração alguma. Torna-se necessário, então, formular uma inércia equivalente para impor às fórmulas da Teoria de Euler-Bernoulli, uma vez que não é hipótese correta utilizar a inércia não fissurada para toda a viga nem a completamente fissurada. Um método semiprobabilístico foi introduzido por Branson (1968) para encontrar essa rigidez equivalente a ser considerada em toda a viga, conforme a Equação (29) (Carvalho; Filho, 2014), sendo tal método hoje adotado pela Norma Brasileira 6118:2014 no item 17.3.2.1.1.

$$I_{eq} = \left(\frac{M_{fissuração}}{M_{máximo}} \right)^n \cdot Ib + \left(1 - \left(\frac{M_{fissuração}}{M_{máximo}} \right)^n \right) \cdot I_{Iipuro} \quad (29)$$

O expoente n equivale a 4, quando se aplica a expressão na análise de uma única seção e 3 quando se aplica tal inércia equivalente para toda a viga. No lugar da inércia bruta, presente na equação, pode-se utilizar a inércia homogeneizada (Carvalho; Filho, 2014), a ser tratada na

próxima seção. Mudando I_b pela posição da linha neutra no Estádio I e I_{IIpuro} pela posição da linha neutra no Estádio II puro, bem como utilizar um expoente n igual a 2,5, tem-se uma expressão para a posição da linha neutra equivalente (Camacho, 2009).

4.1.4 Homogeneização da Seção de Concreto Armado

O Aço, utilizado nas seções de concreto armado, possui um módulo de elasticidade muito superior ao do concreto, geralmente admitido com o valor de 210 GPa para armaduras passivas conforme o item 8.3.5 da Norma NBR 6118:2014. Tal valor pode contribuir significativamente, ou não, para a inércia da seção transversal, a depender da área da seção e da área de aço. Expressões podem ser utilizadas para levar em conta a área de aço para diversas propriedades geométricas, tais como a inércia, a área e a posição do centro de gravidade, respectivamente representadas pelas Equações (30), (31) e (32) abaixo. Tais equações são demonstradas ao se admitir que na região da armadura existe uma área de concreto tantas vezes maior quanto à razão entre o módulo de elasticidade dos dois materiais.

$$I_h = \frac{(bm - ba).hm^3}{12} + \frac{ba.h^3}{12} + (bm - ba).hm.\left(y_{cgh} - \frac{ha}{2}\right)^2 + ba.h.\left(y_{cgh} - \frac{h}{2}\right)^2 + As.(ae - 1).(y_{cgh} - d)^2 \quad (30)$$

$$Ah = (bm - ba).hm + ba.h + As.(ae - 1) \quad (31)$$

$$y_{cgh} = \frac{(bm - ba).\frac{hm^2}{2} + ba.\frac{h^2}{2} + As.(alfae - 1).d}{Ah} \quad (32)$$

4.2 CONSIDERAÇÕES NORMATIVAS DO MÓDULO DE YOUNG

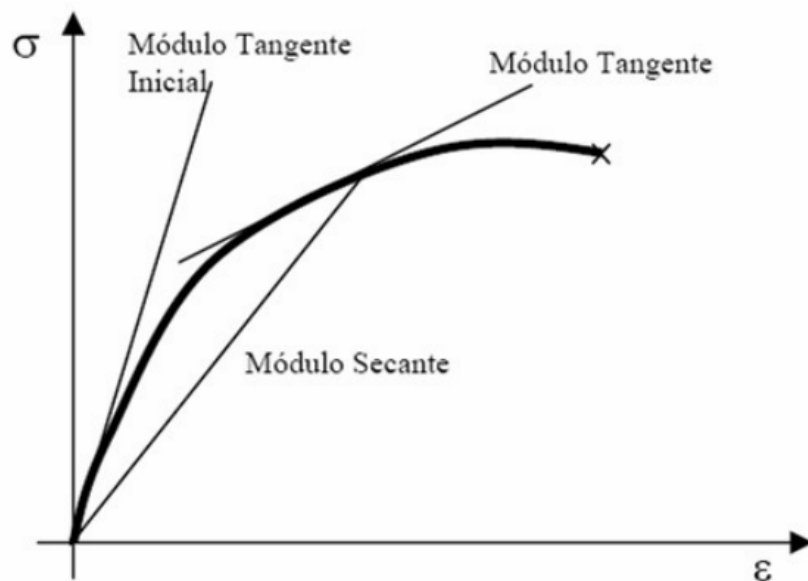
4.2.1 Definições e Métodos de Cálculo

O Módulo de Young, ou Módulo de Elasticidade, é a constante que estabelece a Lei de Hooke na deformação dos materiais. Em um gráfico tensão-deformação, tal módulo é relevante, principalmente, nas fases elásticas de um material. Conforme visível no diagrama tensão-deformação do concreto, mostrado abaixo, o trecho de elasticidade não é perfeitamente linear,

tornando útil o conceito de três diferentes Módulos de Elasticidades: o Módulo Secante, o Módulo Tangente e o Módulo Tangente Inicial do concreto.

Segundo Mehta e Monteiro (2008), o Módulo Tangente Inicial é utilizado como uma medida de Módulo de Elasticidade dinâmico, útil para avaliação de estruturas sob terremotos e cargas de impacto. O mesmo pode chegar a ser 40% maior do que o Módulo Secante nos casos de concretos de baixa resistência e 20% maior em concretos de alta resistência. O Módulo Secante é definido, pelo mesmo autor, como a linha entre a origem e o ponto do gráfico que representa 40% da resistência última do material. Uma representação visual, porém não escalonada, pode ser vista na Figura 21. Cabe ressaltar que os módulos, no diagrama da figura, são as tangentes do ângulo das retas mostradas com a horizontal.

Figura 21 – Módulos de Elasticidade importantes do Concreto



Fonte: ABECE, 2007, p.9.

Tais módulos de elasticidade são influenciados pelo f_{ck} do concreto em questão e também pelo seu agregado, que exerce influência tanto no seu Módulo de Young quanto na sua estabilidade dimensional do concreto (Mehta e Monteiro, 2008, p. 25). Segundo a Norma ABNT NBR 6118:2014, o Módulo de Elasticidade Tangente Inicial do concreto pode ser calculado com tais variáveis conforme a Equação (33):

$$E_{ci} = \alpha_E \cdot 5600 \cdot \sqrt{f_{ck}} \quad (33)$$

Sendo tal expressão válida para concretos de f_{ck} entre 20 e 50 MPa. Para classes superiores de concretos, temos a Equação (34):

$$E_{ci} = 21,5 \cdot 10^3 \cdot \alpha_E \cdot \left(\frac{f_{ck}}{10} + 1,25 \right)^{\frac{1}{3}} \quad (34)$$

Em ambas as expressões o coeficiente α_E representa a influência do tipo de agregado utilizado para a mistura, sendo 1,2 para basaltos e diabásio; 1,0 para granito e gnaiss; 0,9 para calcário e 0,7 para arenitos. Para encontrar o módulo secante do concreto, a norma descreve um segundo coeficiente denominado α_i , calculado conforme a Equação (35):

$$\alpha_i = 0,8 + 0,2 \cdot \frac{f_{ck}}{80} \leq 1,0 \quad (35)$$

E, então, o módulo de elasticidade secante é calculado conforme a Equação (36):

$$E_{cs} = E_{ci} \cdot \alpha_i \quad (36)$$

Os diferentes módulos de elasticidade possuem diferentes funções normativas. O Módulo tangencial é utilizado, por exemplo, durante o cálculo da deformação de fluência, conforme dita o item A.2.2.3 no Anexo A da Norma 6118:2014. Já o Módulo secante, deve ser utilizado para fins de cálculo da rigidez dos elementos estruturais (conforme indicado pelos itens 14.7.3.1 e 14.6.4.1), para o cálculo do parâmetro de instabilidade α (conforme indicado pelo item 15.5.2), para o cálculo relativo à estabilidade global da estrutura (conforme indicado pelos itens 15.5.1 e 15.7.3) e, por fim e mais relevantemente, para o cálculo da deformação excessiva de vigas de concreto armado (conforme indicado pelo item 17.3.2.1).

4.3 CONTRIBUIÇÃO DA FLUÊNCIA PARA A DEFORMAÇÃO

4.3.1 Introdução ao fenômeno da fluência

“O fenômeno do aumento gradual da deformação ao longo do tempo sob um dado nível de tensão constante é chamado de fluência” (Mehta; Monteiro, 2008, p. 89). No item 14.6.4.1,

que trata dos Valores de Rigidez de Elementos Lineares, a NBR 6118:2014 torna obrigatória a consideração da fluência no cálculo final das flechas, uma vez que a mesma mais do que dobra, na maioria dos casos, o valor da flecha imediata de uma estrutura.

Existem diversas explicações para a ocorrência deste fenômeno do ponto de vista microestrutural do concreto. Uma delas está no fato do C-S-H, molécula fundamental da pasta de cimento, sofrer uma perda da água fisicamente adsorvida quando o concreto se encontra sob pressão constante durante períodos prolongados. Tal perda de água adsorvida também é responsável por outros tipos de deformação, tal como a retração, sendo a perda desta relacionada à umidade do ambiente em que se encontra a estrutura.

Outras explicações trazidas por Mehta e Monteiro (2008) dizem respeito à microfissuração da zona de transição na interface causada pela retração por secagem, ou seja, haveria uma correlação entre os dois fenômenos. Também pode-se listar a “resposta elástica atrasada no agregado” (Mehta; Monteiro, 2008, p. 97). Com o decorrer do tempo, a tensão à qual a pasta de cimento está submetida vai gradualmente diminuindo com sua passagem aos agregados aderidos. Os mesmos sofrem deformações elásticas na medida em que a sua tensão aumenta, sendo este um dos fatores causadores da fluência.

Em um estudo de Madureira e Fontes (2020), *Temperature influence on creep of reinforced concrete*, publicado na revista IBRACON de Estruturas e Materiais, atestou que o aumento da temperatura acelera os efeitos da fluência. Ainda segundo os autores, como a fluência retira parte da tensão sobre o concreto e repassa para as armaduras, o escoamento pode ocorrer antes do previsto. Para esse estudo, foram criados modelos matemáticos de “formulação quadrática isoparamétrica”, a serem resolvidos por softwares iterativos trabalhando com o Método dos Elementos Finitos.

4.3.2 Roteiro preconizado pelo Anexo A da Norma 6118:2014

A Norma Brasileira NBR 6118:2014 roteiriza, no Anexo A, um método mais complexo de avaliar os efeitos da fluência em uma peça de concreto armado. O método se baseia na proposição da Equação (37) na qual a deformação por fluência ($\varepsilon_{cc}(t, t_0)$) é uma parcela da deformação total considerando a tensão sofrida (σ_c) e o módulo de elasticidade tangente inicial para uma idade de 28 dias ($E_{c_{28}}$). Tal parcela é calculada com o coeficiente de fluência $\varphi(t, t_0)$:

$$\varepsilon_{cc}(t, t_0) = \frac{\sigma_c}{E c_{28}} \cdot \varphi(t, t_0) \quad (37)$$

O coeficiente de fluência supracitado é calculado, conforme o item A.2.2.3 da Norma, a partir da Equação (38):

$$\varphi(t, t_0) = \varphi_a + \varphi_{f\infty} \cdot [\beta_f(t) - \beta_f(t_0)] + \varphi_{d\infty} \cdot \beta_d(t) \quad (38)$$

Os coeficientes β_d e $\beta_f(t, t_0)$ são, respectivamente, os coeficientes de deformação lenta reversível e de deformação lenta irreversível. São calculados conforme as Equações (39) e (40).

$$\beta_d(t) = \frac{t - t_0 + 20}{t - t_0 + 70} \quad (39)$$

E

$$\beta_f(t) = \frac{t^2 - A \cdot t + B}{t^2 - C \cdot t + D} \quad (40)$$

No qual, onde h é a espessura fictícia calculada conforme o item A.2.4 e A, B, C e D representam, respectivamente, as Equações (41), (42), (43) e (44).

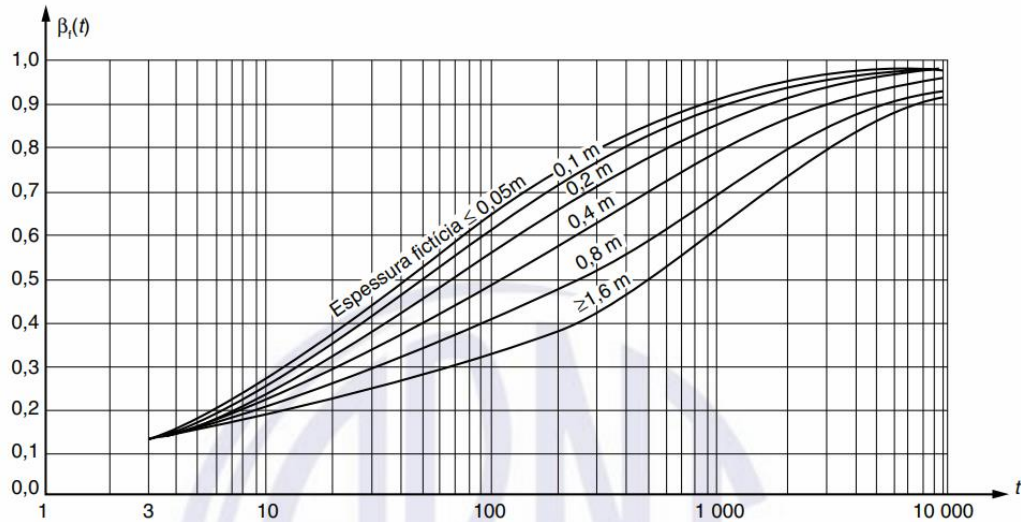
$$A = 42h^3 - 350h^2 + 588h + 113 \quad (41)$$

$$B = 768h^3 - 3060h^2 + 3234h - 23 \quad (42)$$

$$C = -200h^3 + 13h^2 + 1090h + 183 \quad (43)$$

$$D = 7579h^3 - 31916h^2 + 35343h + 1931 \quad (44)$$

O coeficiente $\beta_f(t)$ também pode ser obtido através do gráfico mostrado na Figura 22, que se baseia nas equações supracitadas.

Figura 22 – Gráfico de valores de $\beta_f(t)$ 

Fonte: ABNT, 2014, p. 211.

O coeficiente $\varphi_{f\infty}$ é relativo à deformação lenta irreversível em seu valor final. Ele é calculado através da multiplicação de dois outros coeficientes: φ_{1c} e φ_{2c} , calculados a Figura 23 e Equação (45). Para concretos da classe C50 a C90, multiplica-se ainda por 45%.

Figura 23 – Tabela de valores de φ_{1c}

Ambiente	Umidade U %	Fluência $\varphi_{1c}^{a, c}$			Retração $10^4 \varepsilon_{1s}^{b, c}$			γ^d
		Abatimento de acordo com a ABNT NBR NM 67 cm						
		0 – 4	5 – 9	10 – 15	0 – 4	5 – 9	10 – 15	
Na água	–	0,6	0,8	1,0	+ 1,0	+ 1,0	+ 1,0	30,0
Em ambiente muito úmido imediatamente acima da água	90	1,0	1,3	1,6	– 1,9	– 2,5	– 3,1	5,0
Ao ar livre, em geral	70	1,5	2,0	2,5	– 3,8	– 5,0	– 6,2	1,5
Em ambiente seco	40	2,3	3,0	3,8	– 4,7	– 6,3	– 7,9	1,0

a $\varphi_{1c} = 4,45 - 0,035U$ para abatimento no intervalo de 5 cm a 9 cm e $U \leq 90 \%$.

b $10^4 \varepsilon_{1s} = - 8,09 + (U/15) - (U^2/ 2\ 284) - (U^3/ 133\ 765) + (U^4/ 7\ 608\ 150)$ para abatimentos de 5 cm a 9 cm e $40 \% \leq U \leq 90 \%$.

c Os valores de φ_{1c} e ε_{1s} para $U \leq 90 \%$ e abatimento entre 0 cm e 4 cm são 25 % menores e, para abatimentos entre 10 cm e 15 cm, são 25 % maiores.

d $\gamma = 1 + \exp (-7,8 + 0,1\ U)$ para $U \leq 90 \%$.

NOTA 1 Para efeito de cálculo, as mesmas expressões e os mesmos valores numéricos podem ser empregados, no caso de tração.

NOTA 2 Para o cálculo dos valores de fluência e retração, a consistência do concreto é aquela correspondente à obtida com o mesmo traço, sem a adição de superplastificantes e superfluidificantes.

Fonte: ABNT, 2014, p. 212.

$$\varphi_{2c} = \frac{42 + h_{fic}}{20 + h_{fic}} \quad (45)$$

Por fim, calcula-se o coeficiente relativo à deformação de fluência rápida. Para concretos de classe C20 a C45 sua fórmula é tal como descrita nas Equações (46) e (47).

$$\varphi_a = 0,8 \cdot \left[1 - \frac{f_c(t_0)}{f_c(t_\infty)} \right] \quad (46)$$

Já para classes C50 a C90:

$$\varphi_a = 1,4 \cdot \left[1 - \frac{f_c(t_0)}{f_c(t_\infty)} \right] \quad (47)$$

Em um trabalho de Oliveira e Cardoso (2018), publicado na Revista de Engenharia e Tecnologia, os pesquisadores atestam que resultados experimentais obtidos por Marques, Bittencourt e Barbosa (2013) para deformações de fluência foram mais precisamente previstos pelas determinações do Anexo A da NBR 6118:2014 do que pela Norma Americana ACI 209R-92 de 1997, apesar da última ser mais complexa ao considerar outros fatores como a porcentagem de agregados finos e porcentagem de vazios.

4.3.3 Roteiro aproximado para cálculo da ação da fluência

A mesma Norma Brasileira estabelece um fator α_f que, multiplicado pela flecha inicial sofrida pela viga, resulta na parcela de deformação provinda da fluência do concreto. Tal fator é calculado conforme a Equação (48).

$$\alpha_f = \frac{\Delta\xi}{1 + 50\rho'} \quad (48)$$

O ρ' na equação é a taxa de armadura de compressão da seção. $\Delta\xi$ é uma função dependente de dois pontos no tempo: t_0 , que designa o momento em que a carga passa a atua

na viga (como, por exemplo, numa retirada de escoras) e t , que designa o ponto no tempo em que se quer saber a fluência. A mesma é mostrada na Equação (49).

$$\Delta\xi = \xi(t) - \xi(t_0) \quad (49)$$

Em que a função $\xi(t)$ é exibida na Equação (50):

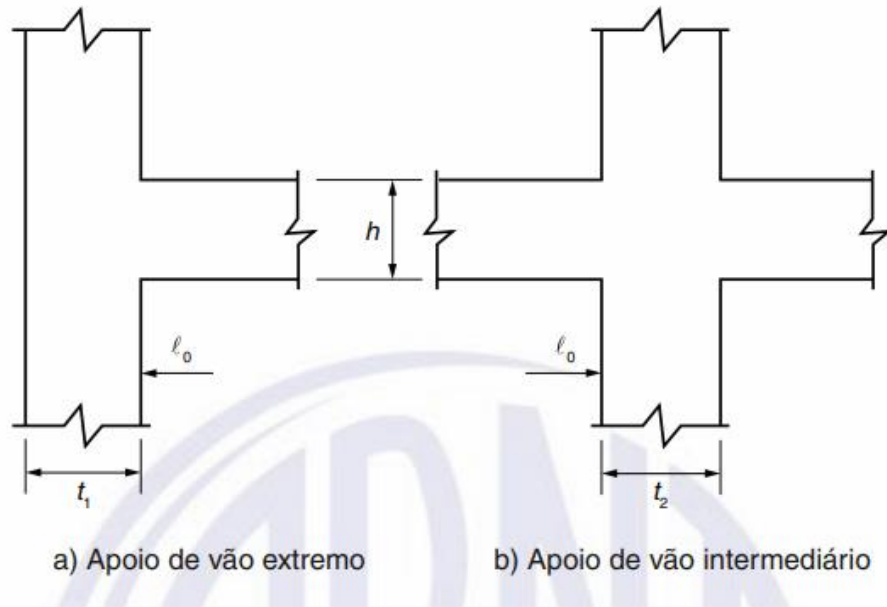
$$\xi(t) = 0,68 \cdot (0,996^t) \cdot t^{0,32} \quad (50)$$

Para t menores que 70 meses. Para tempos maiores pode-se adotar $\xi(t) = 2$. Por fim, temos como flecha final com consideração da fluência calculada conforme a Equação (51):

$$w_f(x) = w(x) \cdot (1 + \alpha_f) \quad (51)$$

4.4 VÃO EFETIVO DA VIGA

A Norma 6118:2014 estabelece, no item 14.6.2.4, o vão efetivo a ser considerado para a viga, uma vez que grandes seções nos apoios não podem ser tomadas integralmente para o vão, tampouco pode ser desconsiderado totalmente a região dos apoios. Para inferir, portanto, o tamanho de vão a ser utilizado, é realizado o procedimento mostrado na Figura 24 e Equações (52), (53) e (54), em que o vão l_0 (que corresponde à distância entre faces internas dos pilares) é somado às contribuições a_1 e a_2 . Há de se destacar que a calculadora não efetuará este cálculo automaticamente, porém ele será realizado na elaboração de um exemplo.

Figura 24 – Esquema do vão efetivo

Fonte: ABNT, 2014, p. 90.

$$a_1 \leq \begin{cases} \frac{t_1}{2} \\ \frac{h}{3} \end{cases} \quad (52)$$

$$a_2 \leq \begin{cases} \frac{t_2}{2} \\ \frac{h}{3} \end{cases} \quad (53)$$

$$l_{efetivo} = l_0 + a_1 + a_2 \quad (54)$$

4.5 CONSIDERAÇÕES ACERCA DO CARREGAMENTO

As cargas atuantes na estrutura não podem ser diretamente aplicadas sem o devido tratamento teórico. As diferentes naturezas dos carregamentos, principalmente no que diz respeito à sua frequência e origem, devem ser levadas em conta na hora de analisar uma estrutura, tanto no Estado Limite de Serviço, quanto no Estado Limite Último. A maneira normativa de realizar esse tratamento é através das combinações de cargas: os diferentes tipos

de carregamento serão combinados com coeficientes listados para cada situação e a soma total será o carregamento a ser aplicado na estrutura.

A norma descreve diferentes combinações a serem utilizadas em diferentes análises. Tem-se, por exemplo, que para a análise de fissuração deve-se utilizar a combinação frequente de cargas. Já para a análise de deformações, utiliza-se a combinação quase permanente. Nela as cargas permanentes – como, por exemplo, o peso próprio das estruturas – são contempladas com seu valor total, sem majorações ou minorações. Já as cargas acidentais são consideradas multiplicando-as por um coeficiente Ψ_2 , tabelado para diferentes situações.

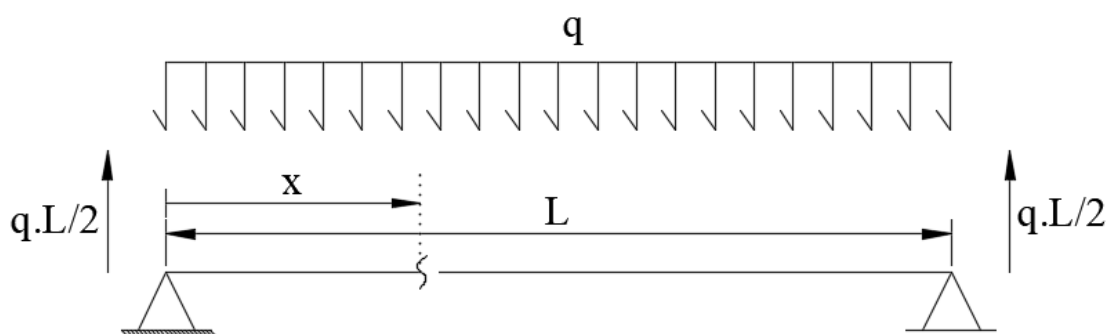
5 APLICAÇÃO DA TEORIA DE EULER-BERNOULLI EM VÃOS COM CARGA DISTRIBUIDA E PONTUAL NÃO DEFINIDAS

5.1 VÃOS DE DUPLO APOIO

5.1.1 Equações de Momento Fletor e Esforço Cortante para Vigas Biapoiadas

Considerando um vão de apoio simples em uma viga, as seguintes reações são obtidas quando a mesma é submetida a um carregamento uniforme. O esquema do vão e as reações são visíveis na Figura 25

Figura 25 – Reações de Viga biapoiada sob carregamento uniforme



Fonte: Elaborada pelo autor.

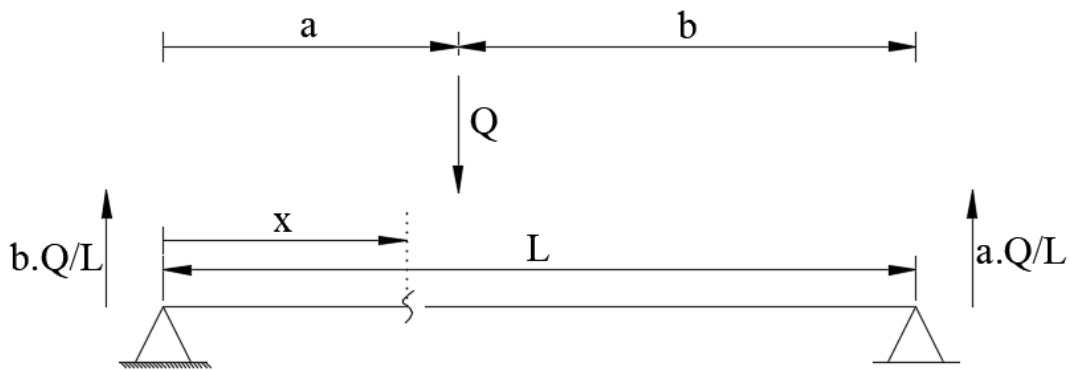
Disto, realizando um somatório dos momentos atuantes, indo da esquerda para direita a partir do apoio, numa seção S qualquer, tem-se o momento fletor na seção é descrito pela Equação (55).

$$M_{bacd}(x) = \frac{q \cdot L}{2} \cdot x - q \cdot x \cdot \frac{x}{2}$$

$$M_{bacd}(x) = \frac{q}{2} \cdot (L \cdot x - x^2) \quad (55)$$

Já para o carregamento pontual, serão necessárias duas funções de Momento Fletor. Uma até o ponto de carregamento, e outra posterior. As reações envolvidas nesse tipo de carregamento em uma viga biapoiada são mostradas na Figura 26.

Figura 26 – Reações de Viga biapoiada sob carregamento pontual



Fonte: Elaborada pelo autor.

Então, para uma seção qualquer até o ponto $x = a$, temos, para o Momento Fletor, a Equação (56).

$$M_{bacp(1)}(x) = \frac{b \cdot Q}{L} \cdot x \quad (56)$$

E, para seções entre $x = a$ e $x = L$, tem-se a Equação (57).

$$M_{bacp(2)}(x) = \frac{b \cdot Q}{L} \cdot x - Q \cdot (x - a) \quad (57)$$

Portanto, as equações que definem o Momento Fletor total na viga biapoiada são a soma das equações supracitadas, sendo isto lastreado no princípio da superposição, gerando as Equações (58) e (59) para os trechos antes e depois da carga pontual.

$$M_{ba(1)} = \frac{q}{2} \cdot (L \cdot x - x^2) + \frac{b \cdot Q}{L} \cdot x \quad (58)$$

E

$$M_{ba(2)} = \frac{q}{2} \cdot (L \cdot x - x^2) + \frac{b \cdot Q}{L} \cdot x - Q \cdot (x - a) \quad (59)$$

Temos, por definição, que a derivada das funções de Momento Fletor equivale às funções de Esforço Cortante no decorrer da viga. É de extrema importância conhecer o momento máximo que a viga enfrenta para realizar os cálculos relativos à fissuração. As equações do esforço cortante são, então, encontradas derivando-se as equações de Momento, gerando as Equações (60) e (61).

$$V_{ba(1)}(x) = \frac{dM_{ba(1)}}{dx}$$

$$V_{ba(1)}(x) = \frac{q \cdot (L - x) \cdot L + 2 \cdot (L - a) \cdot Q - x \cdot q \cdot L}{2 \cdot L} \quad (60)$$

Para o intervalo de $x = 0$ até $x = a$. Já para o intervalo de $x = a$ até $x = L$ temos, como equação do Cortante:

$$V_{ba(2)}(x) = \frac{dM_{ba(2)}}{dx}$$

$$V_{ba(2)}(x) = \frac{-L \cdot (q \cdot (-L + 2 \cdot x) + 2 \cdot Q) + 2 \cdot (L - a) \cdot Q}{2 \cdot L} \quad (61)$$

5.1.2 Equações do deslocamento vertical no decorrer da Viga Biapoiada

Por fim, encontram-se as funções de deslocamento vertical (flecha) antes e depois do carregamento pontual. Isto é feito conforme supracitado nas seções anteriores, integrando-se duas vezes a formulação do Momento conforme dita a Teoria de Vigas de Euler-Bernoulli. Para o primeiro trecho, de $x = 0$ até $x = a$, temos como solução da integral a Equação (62).

$$w_{ba(1)}(x) = \frac{1}{EI} \cdot \int \int \left[\frac{q}{2} \cdot (L \cdot x - x^2) + \frac{b \cdot Q}{L} \cdot x \right] dx$$

$$w_{ba(1)}(x) = \left(\frac{1}{EI} \right) \cdot \left[\frac{(x^3 \cdot (-q \cdot x \cdot L + 2 \cdot (q \cdot L^2 + 2 \cdot (L - a) \cdot Q)))}{24 \cdot L} + C1_{ba(1)} \cdot x \right. \\ \left. + C2_{ba(1)} \right] \quad (62)$$

$C1_{ba(1)}$ é a constante da primeira integração realizada que, por decorrência da segunda integração, é multiplicada por x . $C1_{ba(2)}$ é a constante provinda da segunda integração. Prossegue-se analogamente com o segundo trecho da viga, conforme é visto na Equação (63).

$$w_{ba(2)}(x) = \frac{1}{EI} \cdot \int \int \left[\frac{q}{2} \cdot (L \cdot x - x^2) + \frac{b \cdot Q}{L} \cdot x - Q \cdot (x - a) \right] dx$$

$$w_{ba(2)}(x) = \left[\frac{x^3 \cdot (x \cdot (-q \cdot x \cdot L + 2 \cdot (L \cdot (q \cdot L - 2 \cdot Q) + 2(L - a) \cdot Q)) + 12 \cdot Q \cdot a \cdot L)}{24 \cdot L} \right. \\ \left. + C1_{ba(2)} \cdot x + C2_{ba(2)} \right] \cdot \left(\frac{1}{EI} \right) \quad (63)$$

Tais constantes podem ser encontradas através das condições de contorno da viga. Iniciando da esquerda para a direita, temos que no primeiro apoio o deslocamento será nulo. Temos que $w_{ba(1)}(0) = 0$ se $C2_{ba(1)} = 0$, uma vez que o $x = 0$ anulava todos os outros termos da função. O deslocamento também é nulo na outra extremidade da viga, ou seja, $w_{ba(2)}(L) = 0$. Utilizando a ferramenta *solver* do *SMath*, tem-se que para que essa condição seja verdadeira o valor de $C2_{ba(2)}$ deve ser tal como mostrado na Equação (64).

$$C2_{ba(2)} = - \frac{L \cdot (L \cdot (L^2 \cdot q + 8 \cdot Q \cdot a) + 24 \cdot C1_{ba(2)})}{24} \quad (64)$$

Disto restam duas incógnitas: $C1_{ba(1)}$ e $C1_{ba(2)}$, uma vez que a expressão para $C2_{ba(2)}$ torna $w_{ba(2)}(x)$ apenas dependente de $C1_{ba(2)}$. Essas constantes serão encontradas a partir de um sistema com duas equações distintas. Tais equações estão relacionadas à continuidade das funções de deslocamentos no ponto de aplicação da carga pontual. Ou seja, nesse ponto deve haver uma igualdade entre o valor das duas funções e suas derivadas também. Sendo o ponto de aplicação da carga pontual definido como a , temos as Equações (65) e (66) como representantes dessa continuidade da função.

$$\frac{dw_{ba(1)}(a)}{dx} - \frac{dw_{ba(2)}(a)}{dx} = 0 \quad (65)$$

$$w_{ba(1)}(a) - w_{ba(2)}(a) = 0 \quad (66)$$

Através do *Solver* temos que a primeira dessas igualdades será verdadeira quando as constantes possuírem a seguinte relação:

$$C1_{ba(2)} = \frac{2 \cdot C1_{ba(1)} - Q \cdot a^2}{2} \quad (67)$$

Esta relação é, então, atribuída à constante $C1_{ba(2)}$ e resolve-se a segunda igualdade com apenas uma variável: $C1_{ba(1)}$, no qual se conclui que tal constante é definida pela Equação (68).

$$C1_{ba(1)} = - \frac{4 \cdot a \cdot Q \cdot (a^2 + 2 \cdot L^2 - 3 \cdot a \cdot L) + L^4 \cdot q}{24 \cdot L} \quad (68)$$

E, então, retroativamente substituindo a Equação (68) na (67) obtém-se a Equação (69), e inserindo a Equação (69) na Equação (64) obtém-se a Equação (70).

$$C1_{ba(2)} = - \frac{4 \cdot a \cdot Q \cdot (a \cdot (a - 3 \cdot L) + 2 \cdot L^2) + L^4 \cdot q + 12 \cdot Q \cdot a^2 \cdot L}{24 \cdot L} \quad (69)$$

$$C2_{ba(2)} = \frac{4 \cdot a \cdot Q \cdot (a \cdot (a - 3 \cdot L) + 2 \cdot L^2) + L^4 \cdot q + 12 \cdot Q \cdot a^2 \cdot L}{24} - \frac{L^2 \cdot (L^2 \cdot q + 8 \cdot Q \cdot a)}{24} \quad (70)$$

Desta forma, possui-se todas as formulações necessárias para o cálculo de uma viga biapoiada com carregamento pontual e distribuído generalizado.

5.1.3 Validação das equações de viga biapoiada

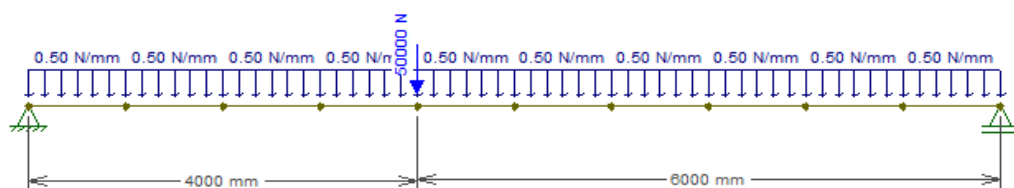
Através de um software bem estabelecido no mercado, como o *FTool*, é possível validar as equações obtidas. Foi, então, formulada uma viga-exemplo com os dados impostos mostrados na Tabela 1. As deflexões foram então obtidas separadamente através do *FTool*, cuja montagem é vista na Figura 27 e das equações demonstradas.

Tabela 1 – Dados da Viga biapoiada para comparação de resultados

Objeto de Cálculo	Valor	Unidade
E	200000	MPa
I	9000000	mm ⁴
a	4000	mm
b	6000	mm
L	10000	mm
q	0,5	N/mm
Q	50000	N

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 27 – Viga biapoiada para comparação de resultados



Fonte: Elaborada pelo autor.

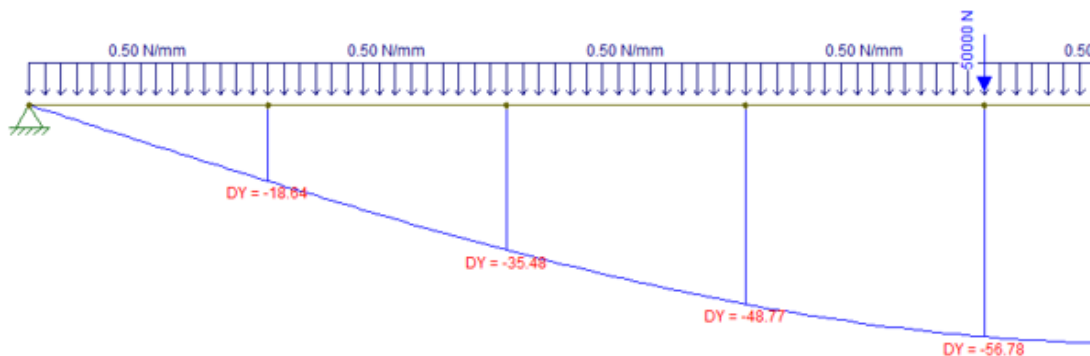
Os resultados obtidos através das equações estão mostrados na Tabela 2 na faixa da viga desde o primeiro apoio até o ponto de aplicação da carga pontual. Logo em seguida, mostram-se os mesmos no software *FTool*, na Figura 28.

Tabela 2 – Resultados das Equações para o primeiro trecho da Viga Biapoiada

x (mm)	Integral Dupla de M(x)	C1ba1*x	C2ba1	w(x) em mm	w(x) em cm
0	0	0	0	0,0	0,00
1000	5,39583E+12	-3,40833E+14	0	-186,4	-18,64
2000	4,3E+13	-6,81667E+14	0	-354,8	-35,48
3000	1,44563E+14	-1,0225E+15	0	-487,7	-48,77
4000	3,41333E+14	-1,36333E+15	0	-567,8	-56,78

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 28 – Resultados do *FTool* para primeiro trecho da Viga Biapoiada



Fonte: Elaborada pelo autor.

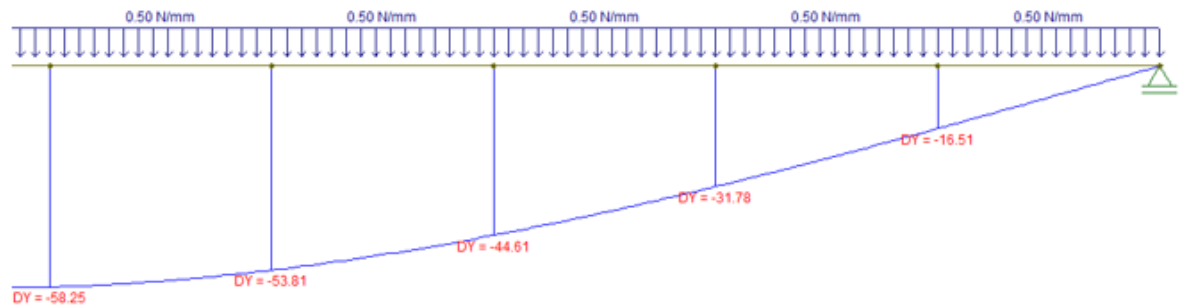
Já para o trecho da viga compreendido entre o ponto de aplicação da carga pontual e o segundo apoio, tem-se os seguintes resultados apresentados na Tabela 3, referente às equações encontradas e na Figura 29, referente ao *FTool*.

Tabela 3 – Resultados das Equações para segundo trecho da Viga Biapoiada

x (mm)	Integral Dupla de M(x)	C1ba2*x	C2ba2	w(x) em mm	w(x) em cm
5000	2,1224E+15	-3,704E+15	5,33E+14	-582,5	-58,25
6000	2,943E+15	-4,445E+15	5,33E+14	-538,1	-53,81
7000	3,84956E+15	-5,186E+15	5,33E+14	-446,1	-44,61
8000	4,82133E+15	-5,927E+15	5,33E+14	-317,8	-31,78
9000	5,83706E+15	-6,668E+15	5,33E+14	-165,1	-16,51
10000	6,875E+15	-7,40833E+15	5,33333E+14	0,0	0,00

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 29 – Resultados do *FTool* para segundo trecho da Viga Biapoiada



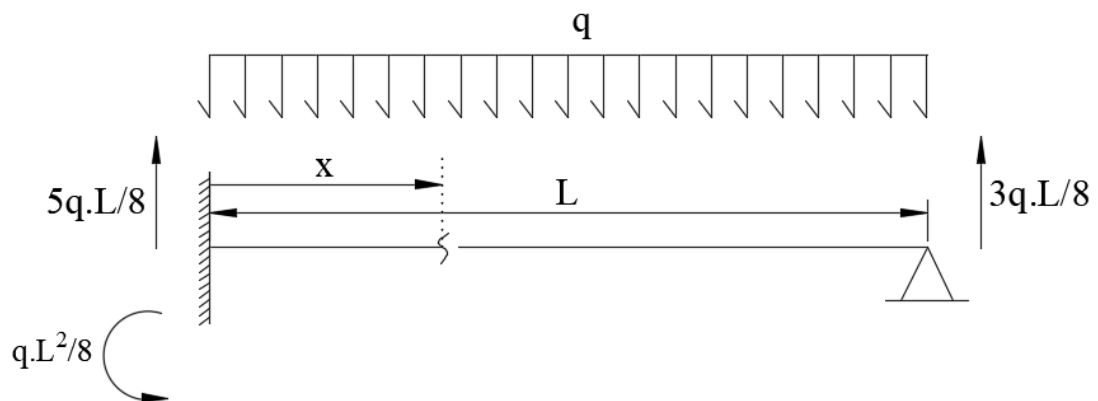
Fonte: Elaborada pelo autor.

5.2 VÃOS DE ENGASTE-APOIO

5.2.1 Equações de Momento Fletor e Esforço Cortante para Vigas de Engaste-Apoio

Temos, como reações de apoio em uma viga com engaste e apoio simples, sob carregamento uniforme, as reações indicadas na Figura 30.

Figura 30 – Reações de Viga Engaste-Apoio sob carregamento uniforme



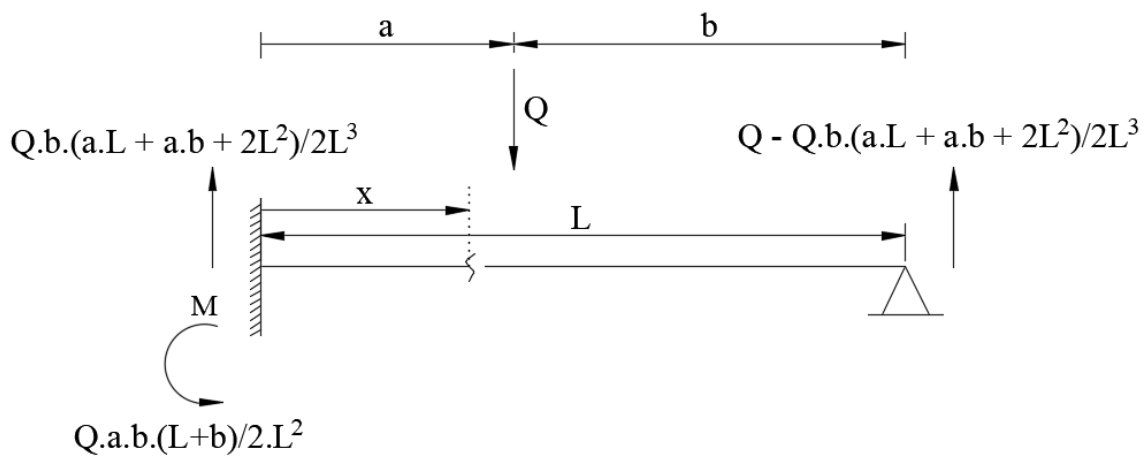
Fonte: Elaborada pelo autor.

Somando os Momentos fletores atuantes em uma seção qualquer a x de distância do engaste (esquerda para direita), possui-se a Equação (71) para o Momento Fletor no decorrer da viga.

$$M_{eacd}(x) = \frac{5q.L}{8} \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2} - \frac{q \cdot L^2}{8} \quad (71)$$

As duas equações para o Momento Fletor causado pela carga pontual são obtidas de maneira semelhante, conforme já mostrado na viga da seção anterior. As reações ocasionadas por esse tipo de carregamento são mostradas na Figura 31.

Figura 31 – Reações de Viga de Engaste-Apoio sob carregamento pontual



Fonte: Elaborada pelo autor.

Então, até o ponto $x = a$, tem-se a Equação (72):

$$M_{eacp(1)}(x) = \frac{Q \cdot b \cdot (a \cdot L + a \cdot b + 2L^2)}{2L^3} \cdot x - \frac{Q \cdot a \cdot b \cdot (L + b)}{2 \cdot L^2} \quad (72)$$

E, para seções entre $x = a$ e $x = L$, tem-se a Equação (73):

$$M_{eacp(2)}(x) = \frac{Q \cdot b \cdot (a \cdot L + a \cdot b + 2L^2)}{2L^3} \cdot x - \frac{Q \cdot a \cdot b \cdot (L + b)}{2 \cdot L^2} - Q \cdot (x - a) \quad (73)$$

Somando as equações de Momento, conforme o princípio da superposição, para os dois trechos, tem-se as Equações (74) e (75):

$$M_{ea(1)} = \frac{5q.L}{8}x - \frac{q \cdot x^2}{2} - \frac{q \cdot L^2}{8} + \frac{Q \cdot b \cdot (a \cdot L + a \cdot b + 2L^2)}{2L^3}x - \frac{Q \cdot a \cdot b \cdot (L + b)}{2 \cdot L^2} \quad (74)$$

E:

$$M_{ea(2)} = \frac{5q.L}{8}x - \frac{q.x^2}{2} - \frac{q.L^2}{8} + \frac{Q.b.(a.L + a.b + 2L^2)}{2L^3}x - \frac{Q.a.b.(L + b)}{2.L^2} - Q.(x - a) \quad (75)$$

As equações de Cortante são encontradas ao derivar-se as equações de Momento Fletor, conforme mostrado na Equação (76) para o intervalo de $x = 0$ até $x = a$:

$$V_{ea(1)}(x) = \frac{dM_{ea(1)}}{dx}$$

$$V_{ea(1)}(x) = \frac{q.(5L - 8x).L^3 + 4Q.(L - a).(a.(-a + 2L) + 2L^2)}{8.L^3} \quad (76)$$

Enquanto para o intervalo de $x = a$ até $x = L$ tem-se a Equação (77):

$$V_{ea(2)}(x) = \frac{dM_{ea(2)}}{dx}$$

$$V_{ea(2)}(x) = \frac{L^3.(q.(5.L - 8.x) - 8.Q) + 4.Q.(L - a).(a.(-a + 2L) + 2L^2)}{8.L^3} \quad (77)$$

5.2.2 Equações do deslocamento vertical no decorrer da Viga Engaste-Apoio

Conforme também feito para a viga biapoiada, realizam-se as integrações previstas pela Teoria de Euler-Bernoulli para o trecho de $x = 0$ a $x = a$, cujo resultado é visto na Equação (78).

$$w_{ea(1)}(x) = \frac{1}{EI} \cdot \int \int \left[\frac{5q.L}{8}x - \frac{q.x^2}{2} - \frac{q.L^2}{8} + \frac{Q.b.(a.L + a.b + 2L^2)}{2L^3}x - \frac{Q.a.b.(L + b)}{2.L^2} \right] dx$$

$$\begin{aligned}
w_{ea(1)}(x) = & \left(\frac{1}{EI} \right) \cdot \left[\left(-\frac{1}{16} \right) L^2 \cdot q \cdot x^2 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot Q \cdot x^2 - \frac{a^3 \cdot Q \cdot x^2}{4L^2} + \frac{3a^2 \cdot Q \cdot x^2}{4L} \right. \\
& + \frac{5}{48} L \cdot q \cdot x^3 + \frac{Q \cdot x^3}{6} + \frac{a^3 \cdot Q \cdot x^3}{12 \cdot L^3} - \frac{(a^2 \cdot Q \cdot x^3)}{4 \cdot L^2} - \frac{q \cdot x^4}{24} \\
& \left. + C1_{ea(1)} \cdot x + C2_{ea(1)} \right]
\end{aligned} \tag{78}$$

$C1_{ba(1)}$ sendo a constante provinda da primeira integração e $C1_{ba(2)}$ da segunda integração. Prossegue-se analogamente com o segundo trecho da viga, conforme visto na Equação (79).

$$\begin{aligned}
w_{ea(2)}(x) = & \frac{1}{EI} \cdot \int \int \left[\frac{5q \cdot L}{8} x - \frac{q \cdot x^2}{2} - \frac{q \cdot L^2}{8} + \frac{Q \cdot b \cdot (a \cdot L + a \cdot b + 2L^2)}{2L^3} x - \frac{Q \cdot a \cdot b \cdot (L + b)}{2 \cdot L^2} \right. \\
& \left. - Q \cdot (x - a) \right] dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_{ea(2)}(x) = & \left(\frac{1}{EI} \right) \cdot \left[\left(-\frac{1}{16} \right) L^2 \cdot q \cdot x^2 - \frac{a^3 \cdot Q \cdot x^2}{4L^2} + \frac{3a^2 \cdot Q \cdot x^2}{4L} + \frac{5}{48} L \cdot q \cdot x^3 \right. \\
& \left. + \frac{a^3 \cdot Q \cdot x^3}{12 \cdot L^3} - \frac{(a^2 \cdot Q \cdot x^3)}{4 \cdot L^2} - \frac{q \cdot x^4}{24} + C1_{ea(2)} \cdot x + C2_{ea(2)} \right]
\end{aligned} \tag{79}$$

Através das condições de contorno, indo da esquerda para a direita, tem-se que no primeiro apoio o deslocamento será zero, ou seja, para que $w_{ea(1)}(0) = 0$ tem-se $C2_{ea(1)} = 0$. O deslocamento é nulo no outro apoio, ou seja, $w_{ea(2)}(L) = 0$. Através da ferramenta *Solver* encontra-se o valor de $C2_{ea(2)}$ em função de $C1_{ea(2)}$, conforme visível na Equação (80).

$$C2_{ea(2)} = \frac{Q \cdot a^2 \cdot (a - 3 \cdot L) - 6 \cdot C1_{ea(2)} \cdot L}{6} \tag{80}$$

As duas incógnitas $C1_{ea(1)}$ e $C1_{ea(2)}$ serão encontradas através das equações de continuidade da função deslocamento, vistas na Equação (81) e (82). Assim como na viga biapoiada, isso será feito encontrando as raízes da diferença entre as funções de derivada e de deslocamento no ponto de carregamento pontual.

$$\frac{dw_{ea(1)}(a)}{dx} - \frac{dw_{ea(2)}(a)}{dx} = 0 \quad (81)$$

$$w_{ea(1)}(a) - w_{ea(2)}(a) = 0 \quad (82)$$

Encontrando, através da ferramenta *Solve* a raiz da primeira igualdade, tem-se a Equação (83).

$$C1_{ea(2)} = \frac{2 \cdot C1_{ea(1)} - a^2 \cdot Q}{2} \quad (83)$$

Já para a segunda igualdade, temos que sua raiz tem como solução a Expressão (84):

$$C1_{ea(1)} = 0 \quad (84)$$

Portanto, impondo a Equação (84) na Equação (83), tem-se a Equação (85) e impondo a Equação (85) na Equação (80), tem-se a Equação (86).

$$C1_{ea(2)} = -\frac{a^2 \cdot Q}{2} \quad (85)$$

$$C2_{ea(2)} = \frac{Q \cdot a^3}{6} \quad (86)$$

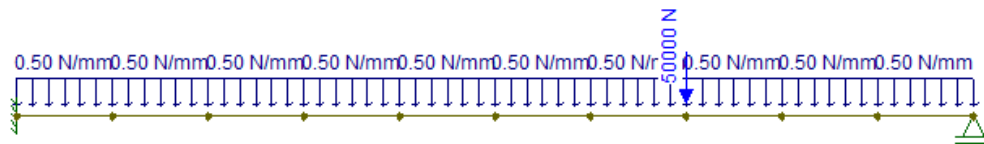
5.2.3 Validação das equações de Viga Engaste-Apoio

Uma nova viga exemplo foi concebida para realizar a validação. Procurou-se posicionar a carga pontual longe do engaste para maximizar as deformações. Esse e outros dados são mostrados na Tabela 4. A montagem da viga no *FTool* é mostrada na Figura 32

Tabela 4 – Dados da Viga Engaste-Apoio para comparação de resultados

Objeto de Cálculo	Valor	Unidade
E	200000	MPa
I	9000000	mm ⁴
a	7000	mm
b	3000	mm
L	10000	mm
q	0,5	N/mm
Q	50000	N

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 32 – Viga Engaste-Apoio para comparação de resultados

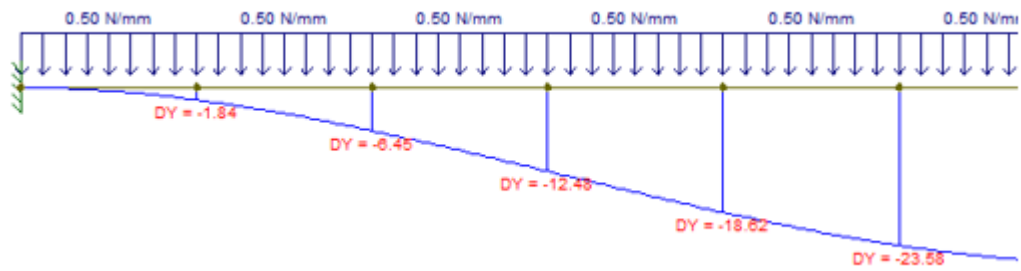
Fonte: Elaborada pelo autor.

Abaixo são mostrados os resultados calculados com as equações concebidas na Tabela 5 e na Tabela 6. Em seguida, mostram-se que os mesmos valores foram obtidos no *FTool* através da Figura 33 e da Figura 34.

Tabela 5 – Resultados das Equações para primeiro trecho da Viga Engaste-Apoio

x (mm)	Integral Dupla de M(x)	C1ba1*x	C2ba1	w(x) em mm	w(x) em cm
0	0	0	0	0,0	0,00
1000	-3,31125E+13	0	0	-18,4	-1,84
2000	-1,16067E+14	0	0	-64,5	-6,45
3000	-2,24663E+14	0	0	-124,8	-12,48
4000	-3,352E+14	0	0	-186,2	-18,62
5000	-4,24479E+14	0	0	-235,8	-23,58
6000	-4,698E+14	0	0	-261,0	-26,10
7000	-4,48963E+14	0	0	-249,42	-24,94

Fonte: Elaborada pelo autor.

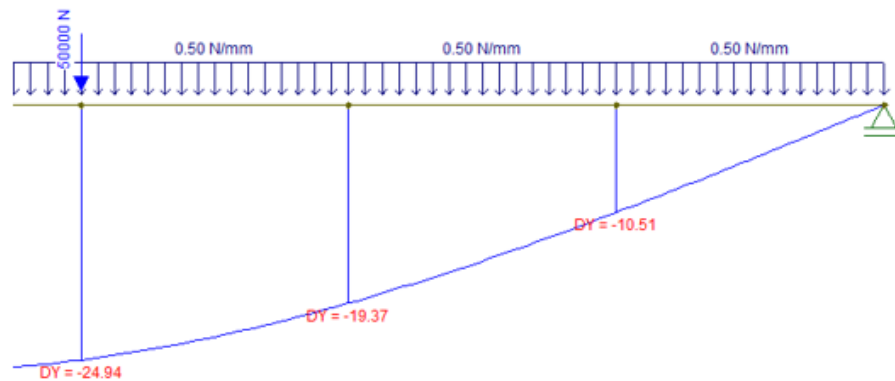
Figura 33 – Resultados do FTool para primeiro trecho da Viga Engaste-Apoio

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 6 - Resultados das Equações para segundo trecho da Viga Engaste-Apoio

x (mm)	Integral Dupla de M(x)	C1ba2*x	C2ba2	w(x) em mm	w(x) em cm
8000	6,59307E+15	-9,800E+15	2,86E+15	-193,7	-19,37
9000	7,97749E+15	-1,103E+16	2,86E+15	-105,1	-10,51
10000	9,39167E+15	-1,225E+16	2,85833E+15	0,00	0,00

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 34 – Resultados do FTool para segundo trecho da Viga Biapoiada

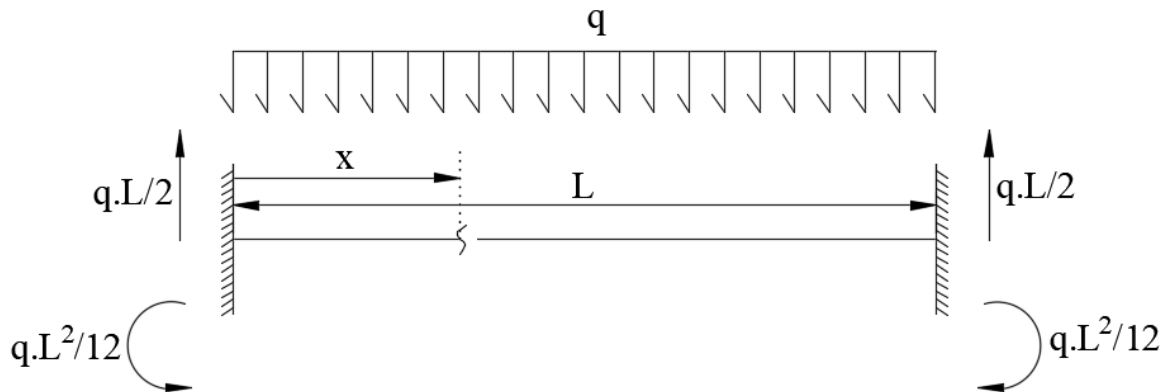
Fonte: Elaborada pelo autor.

5.3 VÃOS DE DUPLO ENGASTE

5.3.1 Equações de Momento Fletor e Esforço Cortante para Vigas de Engaste-Engaste

As reações de apoio de uma viga biengastada sob carregamento uniforme é mostrada na Figura 35, com as mesmas definições geométricas das vigas anteriores.

Figura 35 – Reações de Viga Biengastada sob carregamento uniforme



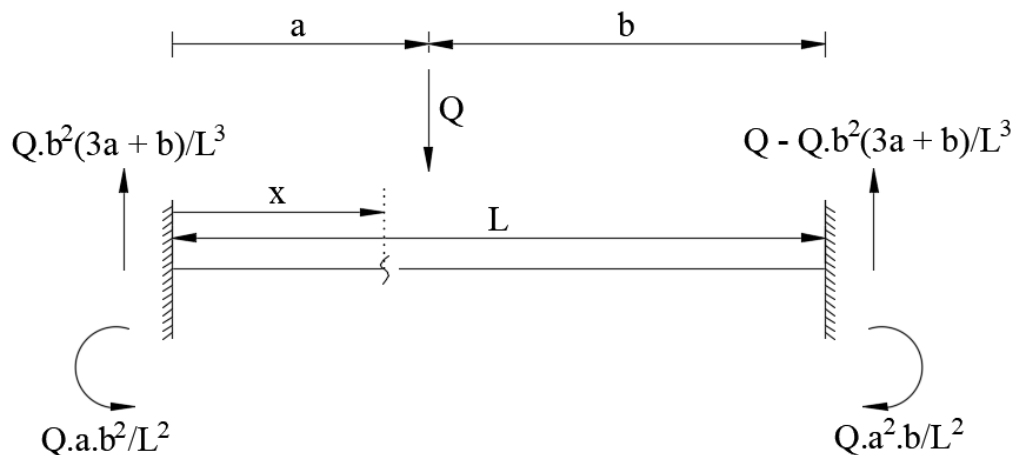
Fonte: Elaborada pelo autor.

Partindo da esquerda para a direita, saindo do apoio, ao somar-se os Momentos Fletores atuantes é possível encontrar a função de Momento Fletor no decorrer da viga biengastada, conforme visível na Equação (87).

$$M_{eecd}(x) = \frac{q \cdot L}{2} \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2} - \frac{q \cdot L^2}{12} \quad (87)$$

O mesmo é feito para o caso da carga pontual, visível na Figura 36, obtendo-se duas equações diferentes: a Equação (88), para $x = 0$ até $x = a$ e a Equação (89), para $x = a$ até $x = L$. Uma antes do ponto de aplicação da carga e outra depois.

Figura 36 – Reações de uma Viga Biengastada sob carregamento pontual



Fonte: Elaborada pelo autor.

$$M_{eexp(1)}(x) = \frac{Q \cdot b^2 \cdot (3a + b)}{L^3} \cdot x - \frac{Q \cdot a \cdot b^2}{L^2} \quad (88)$$

$$M_{eexp(2)}(x) = \frac{Q \cdot b^2 \cdot (3a + b)}{L^3} \cdot x - \frac{Q \cdot a \cdot b^2}{L^2} - Q \cdot (x - a) \quad (89)$$

Conforme o princípio da superposição, encontra-se as equações de momento dos dois trechos considerando-se os dois tipos de cargas, conforme visto na Equação (90) e (91).

$$M_{ee(1)} = \frac{q \cdot L}{2} \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2} - \frac{q \cdot L^2}{12} + \frac{Q \cdot b^2 \cdot (3a + b)}{L^3} \cdot x - \frac{Q \cdot a \cdot b^2}{L^2} \quad (90)$$

$$M_{ee(2)} = \frac{q \cdot L}{2} \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2} - \frac{q \cdot L^2}{12} + \frac{Q \cdot b^2 \cdot (3a + b)}{L^3} \cdot x - \frac{Q \cdot a \cdot b^2}{L^2} - Q \cdot (x - a) \quad (91)$$

Derivando as equações, encontram-se as equações de cortante para a viga biengastada. Portanto, para o intervalo de $x = 0$ até $x = a$, encontra-se a Equação (92).

$$V_{ee(1)}(x) = \frac{dM_{ee(1)}}{dx}$$

$$V_{ee(1)}(x) = \frac{q \cdot (L - 2 \cdot x) \cdot L^3 + 2 \cdot Q \cdot (L - a)^2 \cdot (L + 2 \cdot a)}{2 \cdot L^3} \quad (92)$$

Enquanto para o intervalo de $x = a$ até $x = L$ tem-se a Equação (93).

$$V_{ee(2)}(x) = \frac{dM_{ee(2)}}{dx}$$

$$V_{ee(2)}(x) = \frac{q \cdot (L - 2 \cdot x) \cdot L^3 + 2 \cdot Q \cdot (L - a)^2 \cdot (L + 2 \cdot a) - 2 \cdot Q \cdot L^3}{2 \cdot L^3} \quad (93)$$

5.3.2 Equações do deslocamento vertical no decorrer da Viga Biengastada

Integrando duas vezes a equação de Momento Fletor entre o primeiro apoio e o ponto de aplicação de carga pontual, bem como multiplicando pelo inverso da rigidez à flexão, descobre-se a equação de deslocamento vertical nesse trecho, conforme visto na Equação (94).

$$w_{ee(1)}(x) = \frac{1}{EI} \cdot \int \int \left[\frac{q \cdot L}{2} \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2} - \frac{q \cdot L^2}{12} + \frac{Q \cdot b^2 \cdot (3a + b)}{L^3} \cdot x - \frac{Q \cdot a \cdot b^2}{L^2} \right] dx$$

$$w_{ee(1)}(x) = \left(\frac{1}{EI} \right) \cdot \left[\frac{a^3 \cdot Q \cdot x^3}{3 \cdot L^3} - \frac{a^3 \cdot Q \cdot x^2}{2 \cdot L^2} - \frac{a^2 \cdot Q \cdot x^3}{2 \cdot L^2} + \frac{a^2 \cdot Q \cdot x^2}{L} - \frac{a \cdot Q \cdot x^2}{2} \right. \\ \left. - \frac{L^2 \cdot q \cdot x^2}{24} + \frac{1}{12} \cdot L \cdot q \cdot x^3 - \frac{q \cdot x^4}{24} + \frac{Q \cdot x^3}{6} + C1_{ee(1)} \cdot x + C2_{ee(1)} \right] \quad (94)$$

$C1_{ee(1)}$ e $C1_{ee(2)}$ são as constantes da primeira e segunda integração. O mesmo é feito para o segundo trecho da viga, conforme mostrado na Equação (95).

$$w_{ee(2)}(x) = \frac{1}{EI} \cdot \int \int \left[\frac{q \cdot L}{2} \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2} - \frac{q \cdot L^2}{12} + \frac{Q \cdot b^2 \cdot (3a + b)}{L^3} x - \frac{Q \cdot a \cdot b^2}{L^2} - Q \cdot (x - a) \right] dx$$

$$w_{ee(2)}(x) = \left(\frac{1}{EI} \right) \cdot \left[\frac{a^3 \cdot Q \cdot x^3}{3 \cdot L^3} - \frac{a^3 \cdot Q \cdot x^2}{2 \cdot L^2} - \frac{a^2 \cdot Q \cdot x^3}{2 \cdot L^2} + \frac{a^2 \cdot Q \cdot x^2}{L} - \frac{L^2 \cdot q \cdot x^2}{24} \right. \\ \left. + \frac{1}{12} \cdot L \cdot q \cdot x^3 - \frac{q \cdot x^4}{24} + C1_{ee(2)} \cdot x + C2_{ee(2)} \right] \quad (95)$$

Através da condição de contorno de que $w_{ee(1)}(0) = 0$ tem-se que a constante $C2_{ea(1)}$ é nula, conforme escrito na Equação (96). Outra condição de contorno é a de que $w_{ee(2)}(L) = 0$. A partir desta última, encontra-se $C2_{ee(2)}$ em função de $C1_{ee(2)}$ com o auxílio da ferramenta *Solve*, gerando a expressão vista na Equação (97):

$$C2_{ee(1)} = 0 \quad (96)$$

$$C2_{ee(2)} = \frac{Q \cdot a^2 \cdot (a - 3 \cdot L) - 6 \cdot C1_{ee(2)} \cdot L}{6} \quad (97)$$

As constantes $C1_{ee(1)}$ e $C1_{ee(2)}$ serão encontradas através das equações de continuidade da função deslocamento no ponto de aplicação de carga pontual. Estas estão mostradas abaixo, nas Equações (98) e (99). A ferramenta *solver* será utilizada para encontrar as raízes de tais funções.

$$\frac{dw_{ee(1)}(a)}{dx} - \frac{dw_{ee(2)}(a)}{dx} = 0 \quad (98)$$

$$w_{ee(1)}(a) - w_{ee(2)}(a) = 0 \quad (99)$$

Para a primeira igualdade e suas incógnitas, tem-se como resultado a Equação (100).

$$C1_{ee(2)} = \frac{2 \cdot C1_{ee(1)} - a^2 \cdot Q}{2} \quad (100)$$

Já para a segunda igualdade, conclui-se que a primeira constante do primeiro trecho é nula, conforme visto na Expressão (101).

$$C1_{ee(1)} = 0 \quad (101)$$

Portanto, impondo a Equação (101) na Equação (100), tem-se como resultado a Equação (102). Enquanto que, impondo a Equação (102) na Equação (97), encontra-se a Equação (103)

$$C1_{ee(2)} = -\frac{a^2 \cdot Q}{2} \quad (102)$$

$$C2_{ee(2)} = \frac{Q \cdot a^3}{6} \quad (103)$$

5.3.3 Validação das equações de Viga Engaste-Engaste

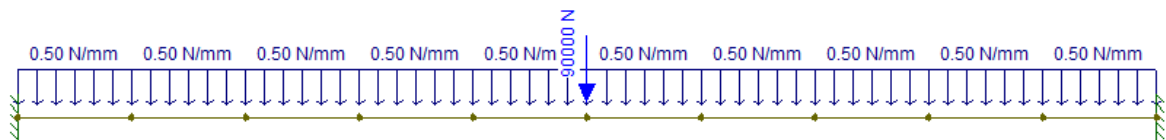
Na Tabela 7 são mostrados os dados de uma viga criada para validar os resultados das equações demonstradas com o *FTool*. A viga imposta ao programa é mostrada na Figura 37

Tabela 7 - Dados da Viga Engaste-Engaste para comparação de resultados

Objeto de Cálculo	Valor	Unidade
E	200000	MPa
I	9000000	mm ⁴
a	5000	mm
b	5000	mm
L	10000	mm
q	0,5	N/mm
Q	90000	N

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 37 – Viga Engaste-Engaste para comparação de resultados



Fonte: Elaborada pelo autor.

Os resultados encontrados através das equações demonstradas até o ponto de aplicação de carga pontual ($x = a$) são visíveis na Tabela 8:

Tabela 8 – Resultados das Equações para primeiro trecho da Viga Engaste-Engaste

x (mm)	Integral Dupla de M(x)	C1ee1*x	C2ee1	w(x) em mm	w(x) em cm
0	0	0	0	0,0	0,00
1000	-5,04375E+13	0	0	-28,0	-2,80
2000	-1,70333E+14	0	0	-94,6	-9,46
3000	-3,12938E+14	0	0	-173,9	-17,39
4000	-4,32E+14	0	0	-240,00	-24,00

Fonte: Elaborada pelo autor.

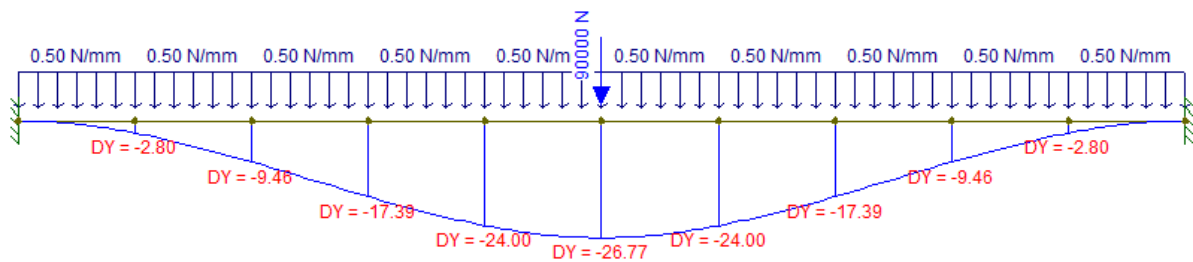
Já os deslocamentos entre os pontos $x = a$ e $x = L$ são mostrados na Tabela 9 e na Figura 38 os resultados nos *FTool* são mostrados, os quais validam todos os resultados mostrados nas tabelas anteriores.

Tabela 9 – Resultados das Equações para primeiro trecho da Viga Engaste-Engaste

x (mm)	Integral Dupla de M(x)	C1ee2*x	C2ee2	w(x) em mm	w(x) em cm
5000	3,26823E+15	-5,625E+15	1,88E+15	-267,7	-26,77
6000	4,443E+15	-6,750E+15	1,88E+15	-240,0	-24,00
7000	5,68706E+15	-7,875E+15	1,88E+15	-173,9	-17,39
8000	6,95467E+15	-9,000E+15	1,88E+15	-94,6	-9,46
9000	8,19956E+15	-1,013E+16	1,88E+15	-28,0	-2,80
10000	9,375E+15	-1,125E+16	1,875E+15	0,00	0,00

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 38 – Resultados do *FTool* para viga Engaste-Engaste



Fonte: Elaborada pelo autor.

6 LIMITES DE DEFORMAÇÃO NORMATIVOS

O item 13.3 da Norma determina os deslocamentos limites para as peças de concreto armado, separando tal limite em quatro diferentes critérios de análise: aceitabilidade sensorial (afim de evitar aspectos visuais indesejáveis e vibrações excessivas), efeitos específicos (quando os deslocamentos impediriam a “utilização adequada da construção”), efeitos em elementos não estruturais e efeitos em elementos estruturais. O Quadro 2 e Quadro 3 mostram as limitações normativas.

Quadro 2 – Primeira parte das limitações normativas de deflexão

Tipo de Efeito	Razão da Limitação	Exemplo	Deslocamento a considerar	Deslocamento Limite
Aceitabilidade Sensorial	Visual	Deslocamentos visíveis em elementos estruturais	Total	L/250
	Outro	Vibrações sentidas no piso	Devido a cargas acidentais	L/350
Efeitos Estruturais em Serviço	Superfícies que devem drenar água	Coberturas e Varandas	Total	L/250
	Pavimentos que devem permanecer planos	Ginásios e Pistas de Boliche	Total	L/350 + contraflecha
			Ocorrido após a construção do piso	L/600
	Elementos que suportam equipamentos sensíveis	Laboratórios	Ocorrido após o nivelamento do equipamento	De acordo com a recomendação do fabricante do equipamento
Efeitos em elementos não estruturais	Paredes	Alvenaria, caixilhos e revestimentos	Após a construção da parede	L/500, 10 mm e $\theta = 0,0017 \text{ rad}$
		Divisórias leves e caixilhos telescópicos	Ocorrido após a instalação da divisória	L/250 e 25 mm
		Movimento lateral de edifícios	Provocado pela ação do vento para combinação frequente ($\psi_1 = 0,30$)	H/1700 e Hi/850 entre pavimentos
		Movimentos térmicos verticais	Provocado por diferença de temperatura	l/400 g e 15 mm

Fonte: Adaptado de ABNT, 2014.

Quadro 3 – Primeira parte das limitações normativas de deflexão

Tipo de Efeito	Razão da Limitação	Exemplo	Deslocamento a considerar	Deslocamento Limite
Efeitos em Elementos não Estruturais	Forros	Movimentos Térmicos Horizontais	Provocado por diferença de temperatura	$H_i/500$
		Revestimentos colados	Ocorrido após a construção do forro	$L/350$
		Revestimentos pendurados ou com juntas	Deslocamento ocorrido após a construção do forro	$L/175$
	Pontes Rolantes	Desalinhamento de Trilhos	Deslocamento provocado pelas ações decorrentes da frenagem	$H/400$
Efeitos em Elementos Estruturais	Afastamento em relação às hipóteses de cálculo adotadas	Se os deslocamentos forem relevantes para o elemento considerado, seus efeitos sobre as tensões ou sobre a estabilidade da estrutura devem ser considerados, incorporando-os ao modelo estrutural adotado.		

Fonte: Adaptado de ABNT, 2014.

Carvalho e Filho (2014) observam que os limites normativos listados devem ser aplicados para o vão efetivo de vigas e o menor lado de elementos bidirecionais, com exceção da verificação de deslocamentos sob paredes que devem levar em conta o vão atravessado pela parede. O mesmo autor salienta que os deslocamentos excessivos podem ser compensados parcialmente com contraflechas e que em balanços o vão considerado deve ser o dobro do real.

7 ARQUITETURA DO SOFTWARE CONCEBIDO, RESOLUÇÃO DE EXEMPLO E COMPARAÇÃO DE RESULTADOS

Nesta seção será mostrado como a teoria apresentada foi organizada no software *Smath* para a montagem de uma calculadora de deflexão em vigas e, ao mesmo tempo, será mostrado a resolução das deflexões de uma viga exemplo de um projeto estrutural previamente realizado. Os resultados serão comparados, finalmente, com aqueles mostrados pelo software brasileiro TQS, versão 2024, para atestar a capacidade da calculadora concebida. Sendo a análise de flechas no TQS feita a partir de uma análise de pavimento, e não uma análise global da estrutura,

será apresentada resumidamente a elaboração da estrutura global e mais especificamente a situação da viga analisada no pavimento em questão.

7.1 PROJETO ARQUITETÔNICO A SER CONSIDERADO

A estrutura em questão se trata de uma pequena edificação residencial de térreo e primeiro andar, cobertura com telhas cerâmicas com estrutura de madeira e alvenaria comum de tijolo cerâmico. Sua planta baixa foi concebida por Fredy Godinho e foi obtida através da plataforma AditivoCAD. A Figura 39 mostra o carimbo de tal projeto.

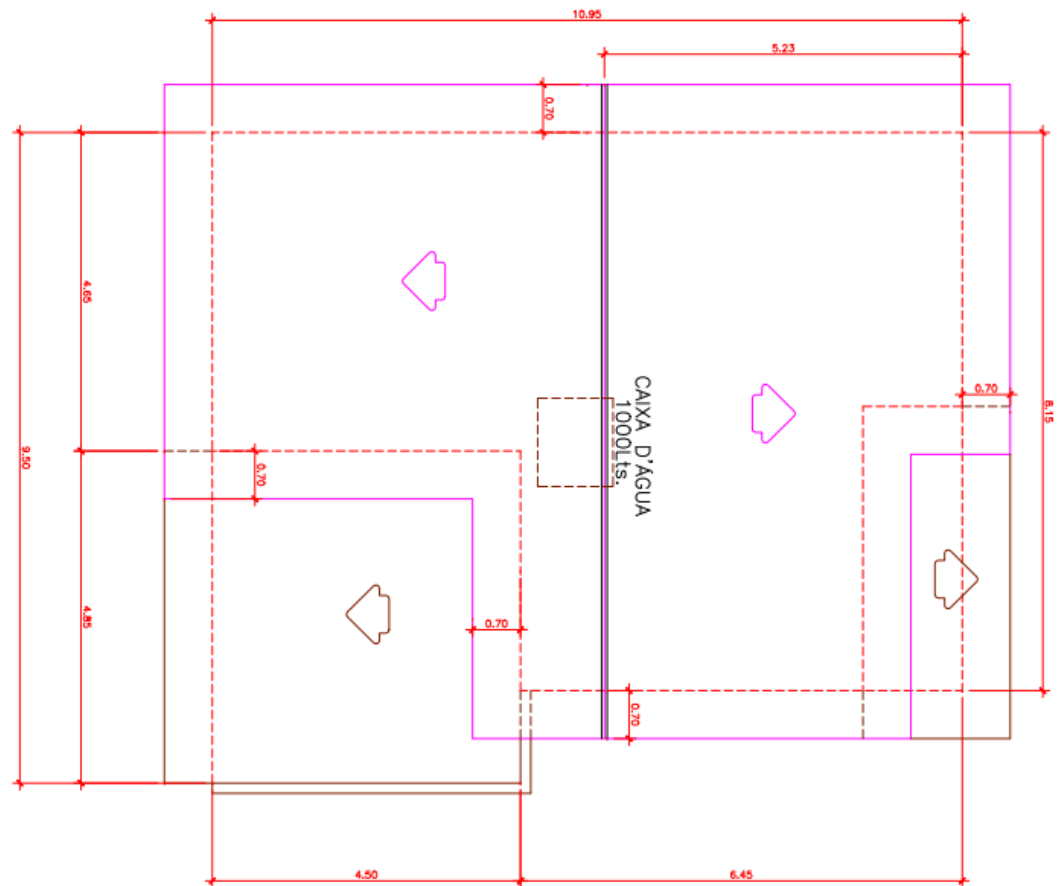
Figura 39 – Carimbo do projeto arquitetônico considerado

PROJETO RESIDENCIAL ARQUITETURA			
Local: Ficticio ANÁPOLIS-GOÍAS			
Proprietário: ***			
Autor do Projeto: ***			
Responsável Técnico: ***			
Áreas :		Conteúdo:	
TERRENO	: 240.00m ²	PLANTA BAIXA TÉRREO E SUPERIOR	
TÉRREO	: 96.22m ²	PLANTA DE COBERTURA .	
SUPERIOR	: 62.47m ²	CORTES E FACHADAS .	
TOTAL CONSTRUÍDA :		PLANTA DE SITUAÇÃO .	
158.69m ²		Desenho: Fredy Godinho www.aditivocad.com	Data: 2000
		Escalas: INDICADAS	Folha: 01/01

Fonte: Godinho, 2000.

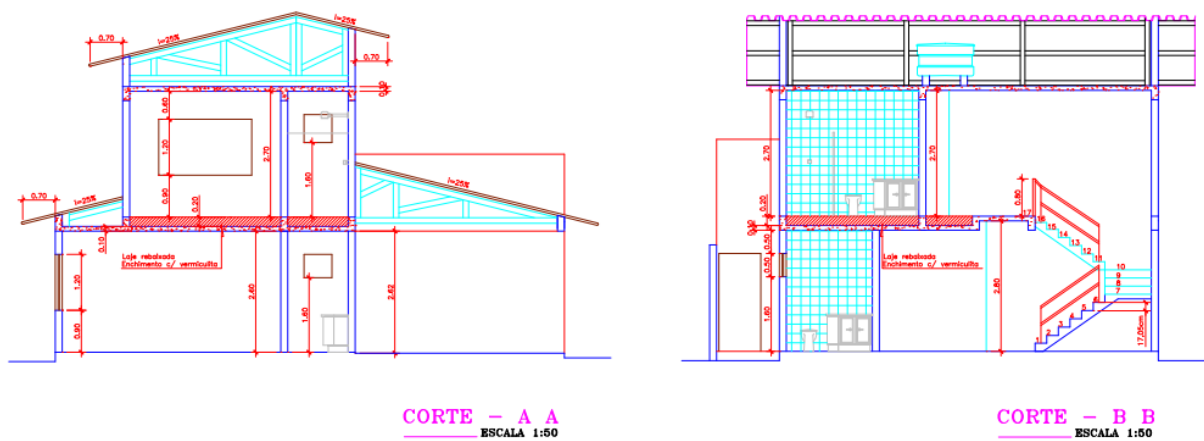
Na Figura 40, Figura 41 e Figura 42 são mostradas as plantas baixas do pavimento térreo (sendo cortado o restante da locação), pavimento superior e coberta. Já a Figura 43 mostra as elevações providas dos Cortes A-A e B-B, respectivamente. É visível que, apesar da telha não estar especificada, provavelmente se trata de uma telha do tipo romana. O posicionamento das tesouras utilizado para o cálculo foi o indicado pelo projeto arquitetônico, por não ser fim deste trabalho o cálculo das estruturas de madeira do telhado.

Figura 42 – Planta arquitetônica da coberta



Fonte: Godinho, 2000.

Figura 43 – Cortes presentes do projeto arquitetônico

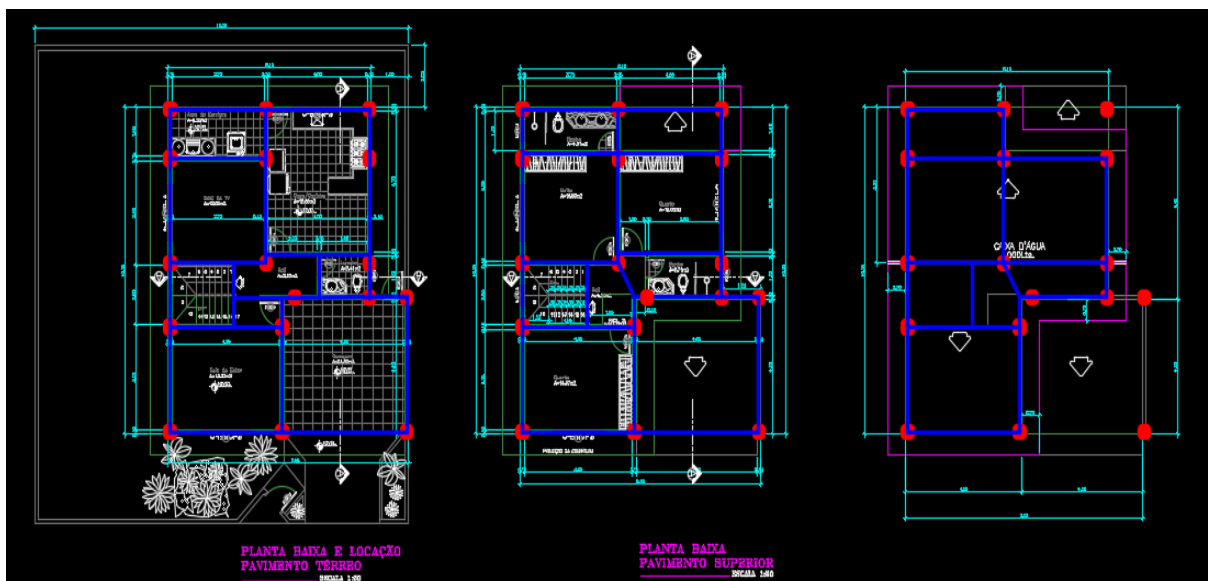


Fonte: Godinho, 2000.

7.2 ESTRUTURAÇÃO DA RESIDÊNCIA

Por se tratar de uma edificação de pequeno porte, foi utilizado um f_{ck} de 25 MPa para compor uma estrutura de Concreto Armado, realizada em um sistema de lajes sob vigas. O lançamento estrutural seguiu procedimentos padrões na literatura, sendo lastreado principalmente na arquitetura do projeto. Na Figura 44 pode-se ver um recorte da fase de lançamento estrutural, realizado no AutoCAD, em que se vê da esquerda para direita: térreo (vigas baldrame e posicionamento de pilares), pavimento superior e cobertura. É possível notar que o vigamento das lajes da coberta é idêntico ao do pavimento superior, uma vez que tal padronização auxiliaria na execução. As vigas baldrame, por sua vez, possuem uma formatação diferente, por apoiarem as alvenarias do térreo.

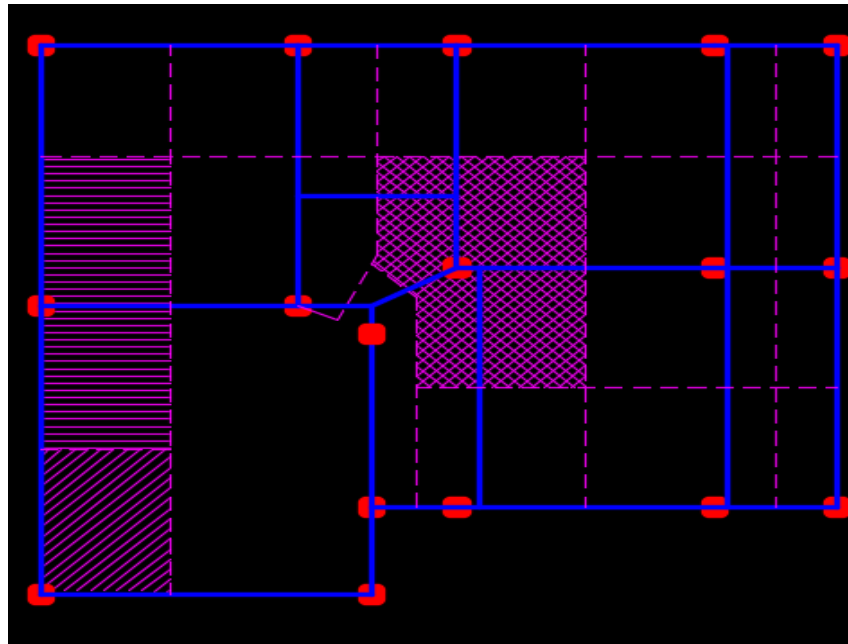
Figura 44 – Planejamento da concepção estrutural



Fonte: Elaborada pelo autor.

O pré-dimensionamento foi realizado em conformidade com o trabalho de Cunha e Pelizaro (2017). Pode ser destacado o trabalho realizado em torno da análise de pilares, que necessitou da coleta das áreas de influência de cada tipo de pilar: central, de extremidade e de canto. Na Figura 45 pode-se ver esta etapa sendo realizada.

Figura 45 – Áreas de influência de pilares centrais, de extremidade e de canto



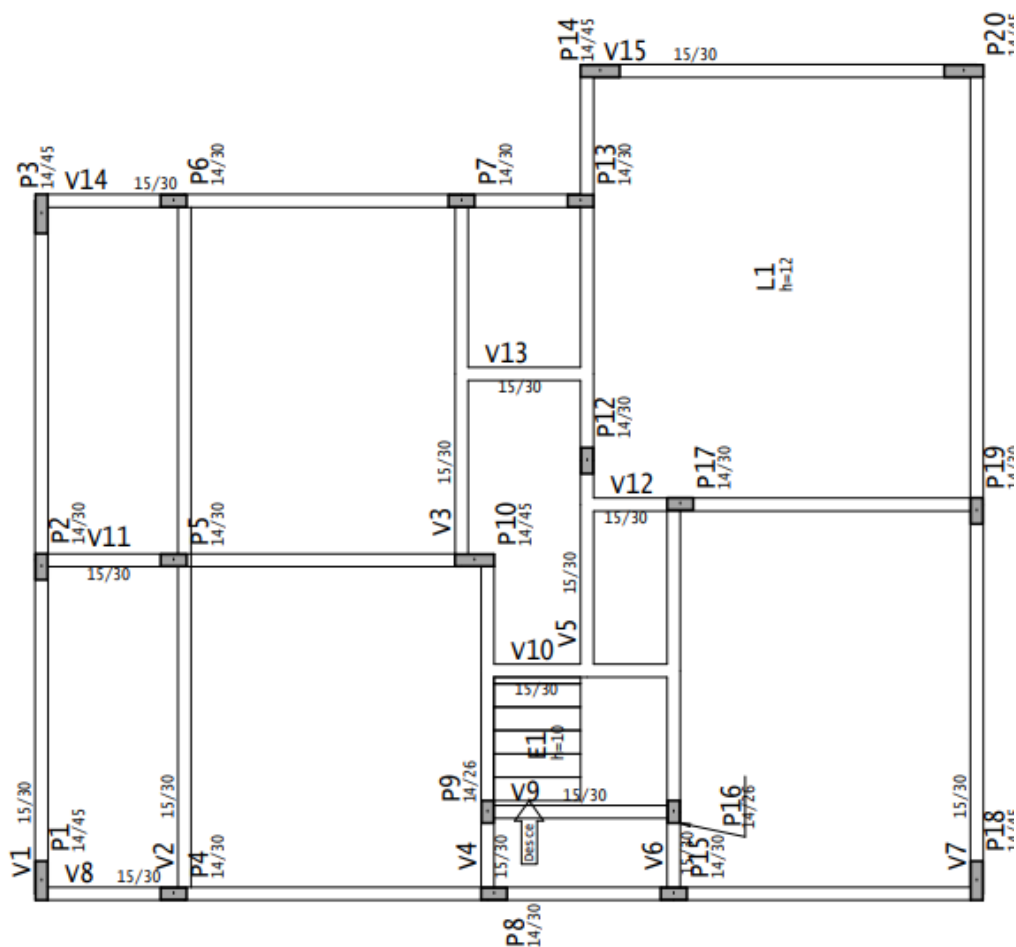
Fonte: Elaborada pelo autor.

O produto final do lançamento estrutural pode ser visto na Figura 46, para o nível térreo, na Figura 47 para o primeiro andar, na Figura 48 para a cobertura e na Figura 49 em uma visualização tridimensional. Todos os elementos estruturais presentes possuem um fck de 25 MPa. Optou-se por manter as vigas com a mesma largura dos pilares, de 14 centímetros, e sua altura variando de 30 centímetros a 35 centímetros. A altura de 40 centímetros não foi utilizada por estar em desacordo com o critério normativo de instabilidade lateral. Os pilares, por sua vez, possuem uma seção, em sua maioria, de 14 por 30 centímetros, sendo exceções alguns pilares de cantos que ficaram com seções maiores (14 por 45 centímetros) para melhor contribuir na estabilidade global da estrutura e alguns pilares menores, de 14 por 26 centímetros, quando a carga permitisse.

No térreo existe apenas uma única laje que se trata da garagem da residência, com sua altura mínima normativa de 12 centímetros. A maioria das lajes dos pavimentos seguintes possui uma espessura de 10 centímetros, sendo utilizada a espessura de 8 centímetros para lajes de tamanho reduzido. Mais detalhes acerca do lançamento da escada não serão mostrados por delimitação do trabalho, mas envolveu a criação de pequenos pilaretes para suportar uma grande diferença de nível da estrutura, pois os degraus seriam criados por enchimento para criar o formato em leque.

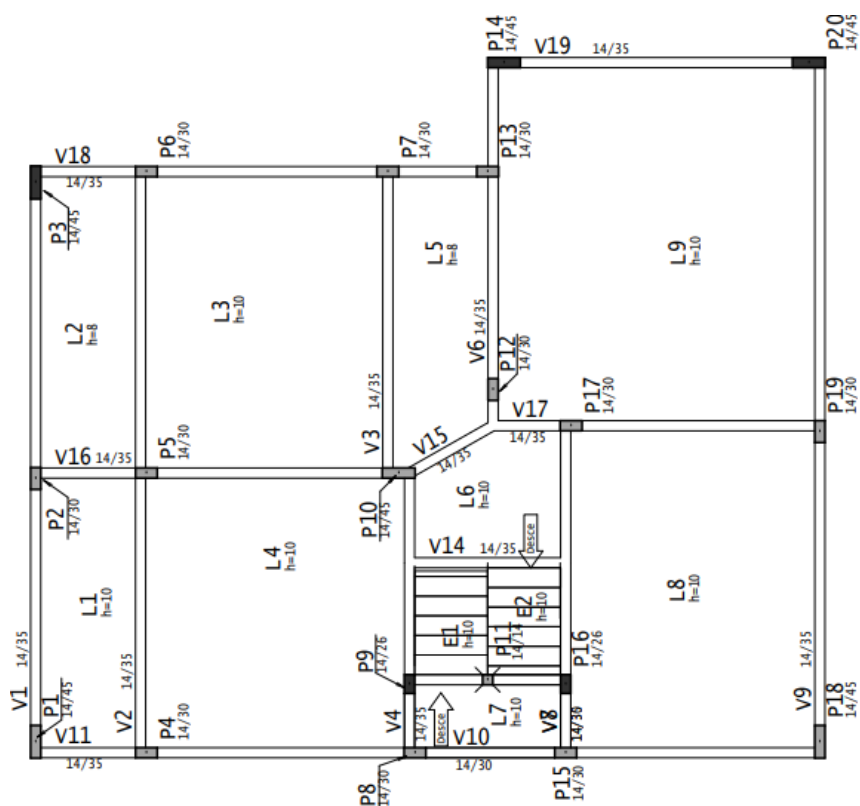
Quanto à estruturação do telhado, será detalhada a estrutura do último pavimento, apesar de existirem outros telhados em pavimentos inferiores. A cobertura será fixada com uma trama de madeira composta por ripas de 1,5 centímetros de largura e 5 centímetros de altura, espaçadas em 35 centímetros, por caibros de 5 centímetros de largura e 7,5 centímetros de altura, espaçados em 65 centímetros e por terças de 7,5 centímetros de largura e 15 centímetros de altura, espaçadas em 1,5 metro. Tal trama será apoiada por quatro tesouras; duas delas, nomeadas T1 e T2, se localizam na metade da casa que corresponde à posição da escadaria, visível da Figura 40, e perpassam todo o comprimento da casa. As outras duas tesouras, denominadas T3 e T4, estarão posicionadas na cobertura acima da posição do quarto do térreo, num comprimento reduzido. A madeira escolhida para fabricar a trama e as tesouras será a Maçaranduba.

Figura 46 – Planta de forma da estrutura do térreo



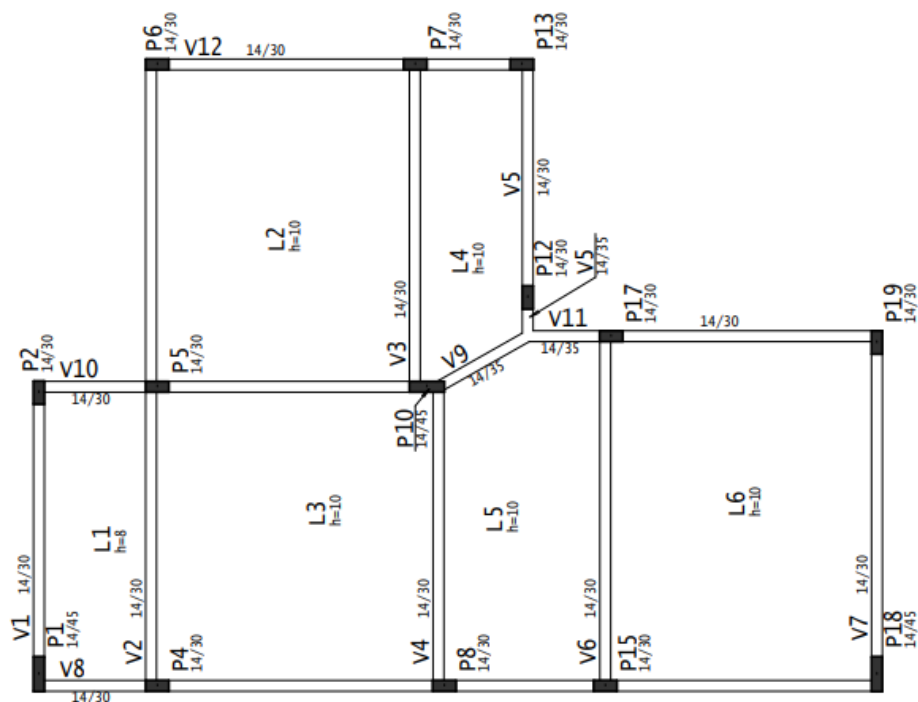
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 47 – Planta de forma da estrutura do pavimento superior



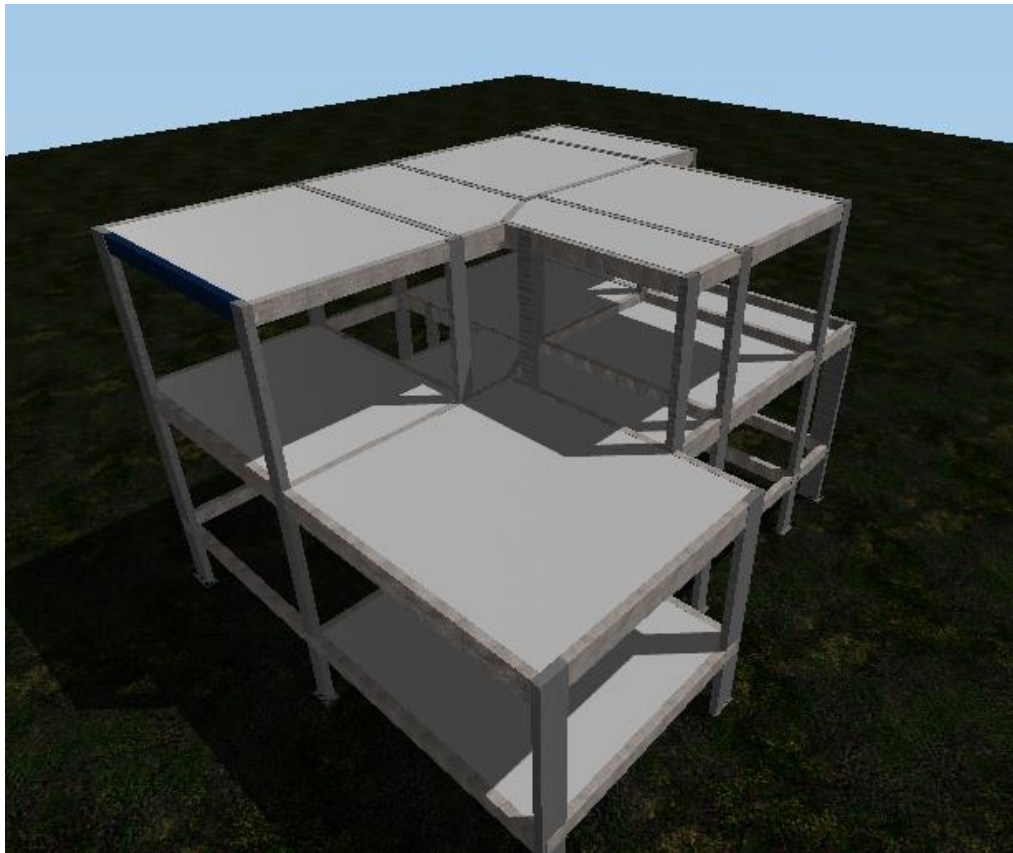
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 48 – Planta de forma da estrutura da coberta



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 49 – Visualização tridimensional da estrutura



Fonte: Elaborada pelo autor.

7.3 ESCOLHA DE VIGA PARA EXEMPLO

Foi tomada a Viga 07 da cobertura para demonstrar os resultados obtidos no software e compará-los com os resultados de deflexão dados no TQS. Isto porque trata-se de uma Viga que recebe tanto carregamento distribuído quanto carregamento pontual, além da mesma possuir um vão único de fácil análise. Trata-se de uma viga de contorno, servindo, portanto, como um apoio simples (não impedindo a rotação) para a Laje 06 de 10 centímetros de altura. A carga pontual recebida no meio do seu vão provém da tesoura denominada T2. Na Figura 50 é possível visualizar como essa Viga está localizada em relação ao modelador estrutural, e os valores visíveis serão explicados nas seções seguintes.

Figura 50 – Visualização da viga estudada no modelador estrutural



Fonte: Elaborada pelo autor.

A viga em si possui uma seção de 14 centímetros de largura por 30 centímetros de altura. Apesar da Laje possuir um vão de 4,5 metros, torna-se necessário o cálculo do vão efetivo da viga, para calcular a influência das seções dos pilares voltadas ao seu vão. Isto é feito conforme as Equações (52) e (53), cujo resultado é mostrado abaixo. Para tal, deve-se levar em conta que o vão livre da viga em questão é de 3,89 metros e que os apoios da esquerda e da direita possuem, respectivamente, 45 e 30 centímetros voltados para o vão.

$$a_1 \text{ é o menor de } \begin{cases} 30 \cdot 0,3 = 9 \text{ cm} \\ 45 \cdot 0,5 = 22,5 \text{ cm} \end{cases}$$

$$a_1 = 9 \text{ cm}$$

$$a_2 \text{ é o menor de } \begin{cases} 30 \cdot 0,3 = 9 \text{ cm} \\ 30 \cdot 0,5 = 15 \text{ cm} \end{cases}$$

$$a_2 = 9 \text{ cm}$$

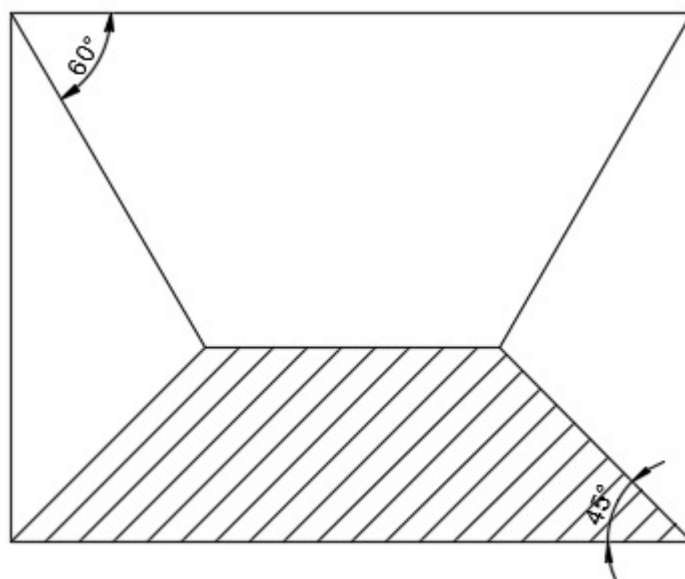
$$l_{ef} = 3,89 + 9 + 9 = 4,07 \text{ m}$$

Também é importante ressaltar que a carga pontual, provinda de tesoura e analisada na seção seguinte, encontra-se a 2,56 metros da extremidade esquerda do vão efetivo. Tal valor será utilizado dentro dos cálculos do software. Para fins de cálculo também será considerado que a viga possuirá uma armadura para tração de dois vergalhões de 10 mm (aproximadamente 1,6 centímetros quadrados) e uma armadura na zona de compressão de dois vergalhões de 8 mm (aproximadamente 1 centímetro quadrado)

7.4 PREVISÃO DE CARGAS ATUANTES SOBRE A VIGA

O método utilizado para estimar a carga distribuída provinda da laje será o método das charneiras plásticas, conforme descrito por Carvalho (2014). Na utilização de tal método, será considerado que a Laje 06 está engastada na borda superior e apoiada nas outras três, criando as charneiras visíveis na Figura 51. Nela, está hachurada a região que manda cargas para a Viga 07, se tratando de uma área de 4,124 metros quadrados.

Figura 51 – Estudo das charneiras plásticas da Laje 06



Fonte: Elaborada pelo autor.

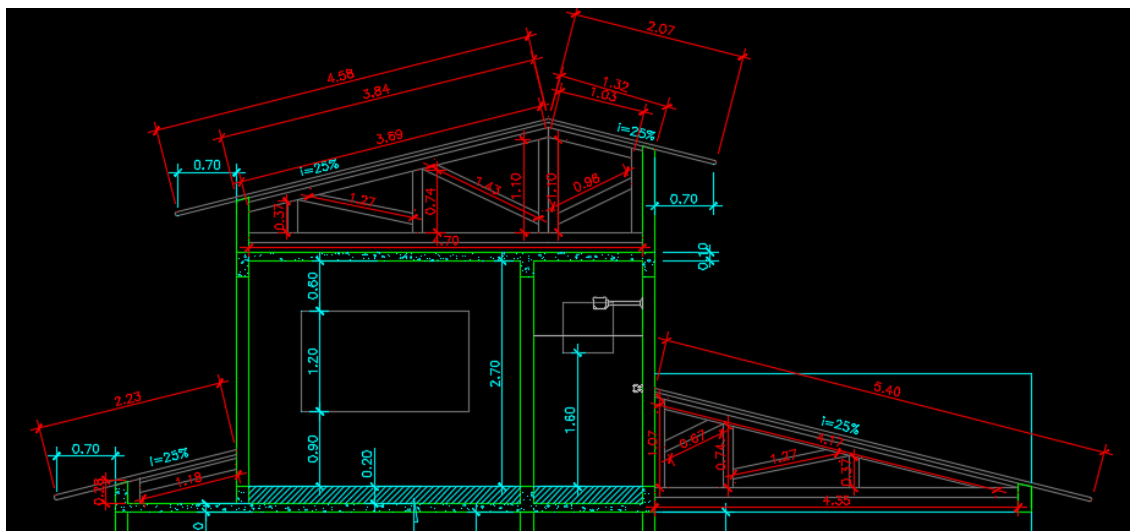
Será considerada uma carga de revestimento total de 100 quilogramas por metro quadrado e, conforme a Tabela 01 da NBR 6120:2019, 2500 quilogramas por metro cúbico de concreto armado, o que, considerando a espessura de 10 centímetros, resulta em uma carga por metro quadrado de laje de 250 quilogramas-força. Por fim, em conformidade com a Tabela 10 da NBR 6120:2019, a carga acidental de 100 quilogramas por metro quadrado será considerada, por se tratar de uma cobertura com acesso apenas para manutenção. Tal carga acidental será multiplicada por 0,3, valor obtido para o Ψ_2 através da Tabela 11.2 da NBR 6118:2014, correspondente à não predominância de pessoas ou equipamentos por longos períodos de tempo. Tal ponderação da carga está de acordo com a dita ‘Combinação Quase Permanente’ descrita na Tabela 11.4, da mesma norma. Portanto, a carga de área da laje será de:

$$q_{laje} = 100 + 250 + 100 \cdot 0,3 = 380 \frac{kgf}{m^2}$$

Considerando, então a área da charneira de influência da Viga 07, e dividindo pelo comprimento total da Viga, e acrescentando a carga de peso próprio da viga (multiplicando sua área de seção pela densidade do concreto armado já especificada), tem-se a carga linear distribuída no vão da Viga 07:

$$q = 380 \cdot 4,124 \cdot \frac{1}{4,50} + 2500 \cdot 0,30 \cdot 0,14 = 453,25 \frac{kgf}{m} = 4,53 \frac{kN}{m}$$

Para encontrar a carga pontual provinda da tesoura de madeira, basta encontrar o seu peso próprio e o peso da cobertura suportada pela mesma. Para a primeira parcela, mediu-se, conforme visível na Figura 52, os tamanhos de todos os elementos que modulavam a tesoura, para então multiplicar com sua seção e densidade e obter seu peso total. A Tesoura em questão perpassa todo o comprimento da residência, portanto, para aferir o seu tamanho total foram somadas as partes separadas. Os resultados dos pesos das tesouras são mostrados na Tabela 10. Duas delas, a T3 e T4, se limitam à tesoura mostrada no meio da Figura 52, enquanto a T1 e T2 equivalem à soma de todas as partes.

Figura 52 – Coleta da dimensão das tesouras

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 10 – Peso encontrado das tesouras

Tesoura	Larg. (m)	Alt. (m)	Comp. (m)	Peso por Volume (kg/m ³)	Peso da Tesoura (kg)
T1	0,075	0,2	30,51	1200	549,18
T2	0,075	0,2	30,51	1200	549,18
T3	0,075	0,2	16,41	1200	295,38
T4	0,075	0,2	16,41	1200	295,38

Fonte: Elaborada pelo autor.

Multiplicando a seção da peça de madeira pela sua densidade, e dividindo pelo seu espaçamento, é possível inferir o peso por unidade de área de cobertura de cada elemento da trama e, através da sua soma, o peso por unidade de área da trama como um todo. Os resultados obtidos neste exemplo estão mostrados na Tabela 11.

Tabela 11 – Peso da trama de madeira da cobertura

Elemento	Larg. (m)	Alt. (m)	Espaçamento (m)	Peso por Volume (kg/m ³)	Peso por unidade de área (kg/m ²)
Ripa	0,015	0,05	0,35	1200	2,57
Caibro	0,05	0,075	0,65	1200	6,92
Terça	0,075	0,15	1,5	1200	9
Peso das Tramas Utilizadas	-	-	-	-	18,49

Fonte: Elaborada pelo autor.

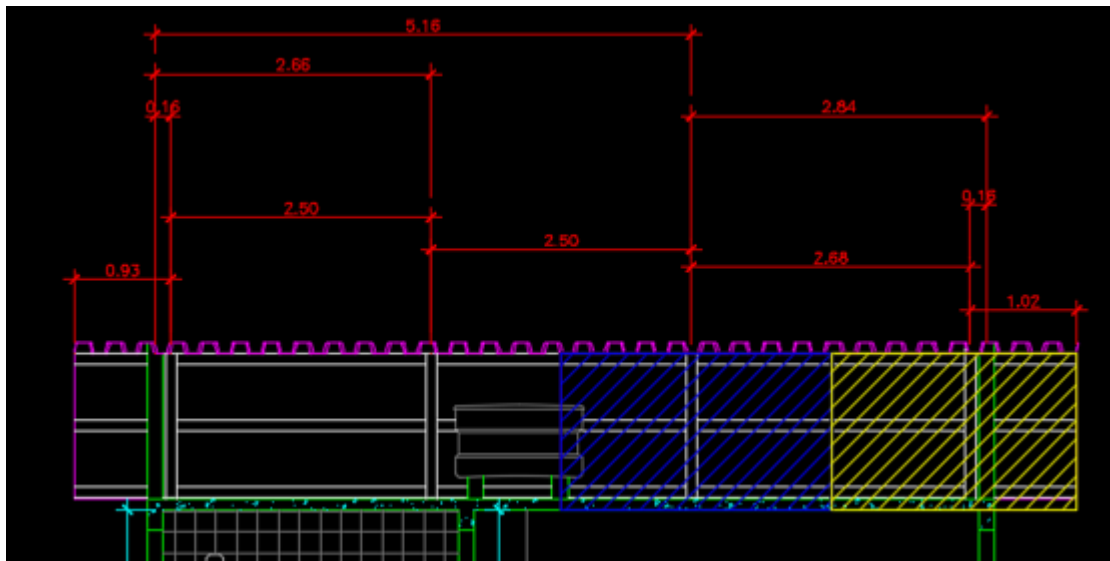
O peso das tramas utilizadas será acrescido do peso das telhas cerâmicas, obtido na Tabela 05 da NBR 6120:2019, equivalente a 45 quilogramas por metro quadrado, e da carga accidental, seguindo as preconizações do item 6.4 da NBR 6120:2019 para telhas com mais de 3% de inclinação, equivalente a 25 quilogramas por metro quadrado. Entretanto, tal carga accidental, assim como a que age sobre a laje, será multiplicada por 0,3 para sua consideração na combinação quase permanente. O resultado para essa carga é visível na Tabela 12.

Tabela 12 – Peso total da trama e telhas cerâmicas

Origem da Carga Considerada	Valor da Carga (kg/m ²)
Peso das Tramas Utilizadas	18,49
Peso das Telhas Utilizadas	45,00
Carga Accidental	7,50
Total da Trama + Telhas + Carga Accidental	70,99

Fonte: Elaborada pelo autor.

Para, então, obter a carga máxima transmitida pelas tesouras à estrutura de concreto armado, foi utilizado o método das áreas de influência. Neste método foi realizada uma divisão da área de telhado tomando médias geométricas nas distâncias das tesouras, semelhante ao processo de encontrar a área de influência dos pilares. Isto é mostrado na Figura 53, na qual pode ser vista a delimitação das regiões de influência das tesouras T1 e T2. Cabe ressaltar, porém que a área coletada não se trata da área hachurada na figura, mas sim a área de cobertura limitada pelas regiões mostradas. O peso em quilos obtido é, então, somado ao peso das próprias tesouras e dividido por dois, já que se trata de dois apoios. O resultado obtido é a carga transferida às vigas que suportam as tesouras e é visível na Tabela 13.

Figura 53 – Delimitação da influência das tesouras

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 13 – Reações de apoio das tesouras

Tesoura	Peso da Tesoura (kg)	Área de Influência (m ²)	Peso da Trama, Telhas e Carga Acidental (kg)	Peso Total nos Apoios (kg)
T1	549,18	30,18	2142,93	1346,05
T2	549,18	33,13	2351,77	1450,48
T3	295,38	16,625	1180,28	737,83
T4	295,38	14,497	1029,21	662,29

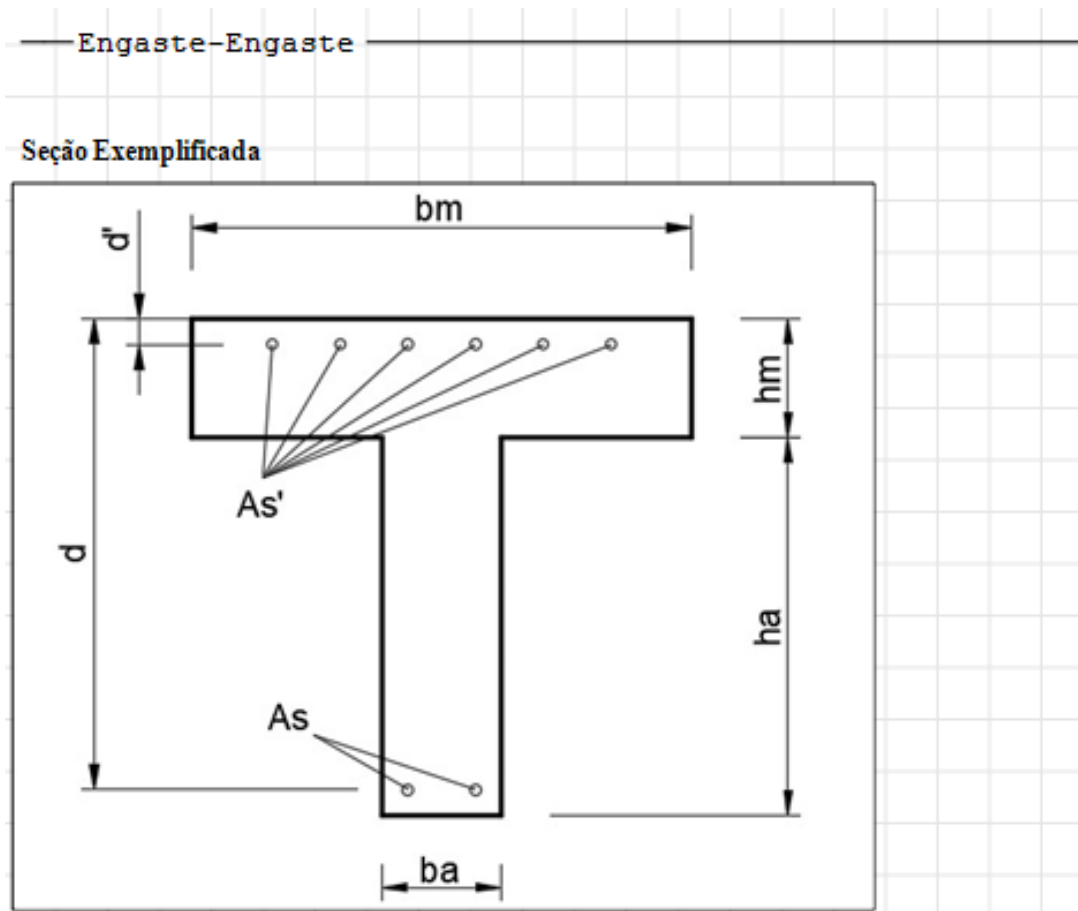
Fonte: Elaborada pelo autor.

Portanto, além da carga distribuída de 467 quilogramas por metro (ou 4,67 kN por metro), a Viga 07 receberá uma carga pontual provinda na tesoura T2 de 1,450 toneladas (ou 14,50 kN).

7.5 ARQUITETURA DO SOFTWARE E RESULTADOS OBTIDOS

A Figura 54, Figura 55 e Figura 56, respectivamente, mostram a imagem inicial para guiar o usuário nas dimensões na viga, variáveis criadas para receber cada informação de armadura e dimensão, imagem e mensagem conforme aparece para o usuário e como as variáveis de dimensão e armadura aparecem para o usuário atribuir seus valores.

Figura 54 – Inserção da seção generalizada no *Smath*



Fonte: Autoral, 2023.

Observação: Para seções retangulares, considerar $hm = 0$ e $bm = ba$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 55 – Inserção das variáveis geométricas e de armação no *Smath*

☐ Dados da Seção

Altura da Alma (h_a)
 $h_{a_{ee}} := 30 \text{ cm}$

Altura da Mesa (h_m)
 $h_{m_{ee}} := 0 \text{ cm}$

Largura da Alma (b_a)
 $b_{a_{ee}} := 14 \text{ cm}$

Largura da Mesa (b_m)
 $b_{m_{ee}} := 14 \text{ cm}$

☐ Dados da Armação

Área de Aço contra Tração (A_s)
 $A_{s_{ee}} := 1,60 \text{ cm}^2$

Área de Aço contra Compressão (A_s')
 $A_{s'_{ee}} := 1 \text{ cm}^2$

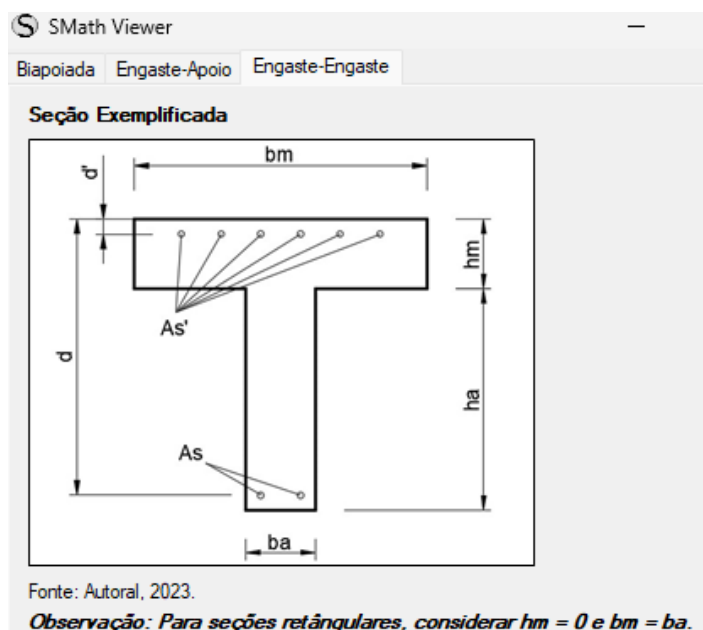
Altura útil (d)
 $d_{ee} := 26 \text{ cm}$

Posição da Armadura de Compressão (d')
 $d'_{ee} := 4 \text{ cm}$

$h_{ee} := h_{a_{ee}} + h_{m_{ee}}$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 56 – Visão do usuário da seção generalizada na calculadora



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 58 – Visão do usuário da colocação de dados dos materiais

Dados dos Materiais

Tipo de Cimento Utilizado (Coeficiente)

Observação: Para CP-III ou CP-IV: 0,38. Para CP-I ou CP-II: 0,25. Para CP-ARI: 0,20.

Resistência Característica à Compressão do Concreto MPa

Agregado Utilizado (Coeficiente)

Observação: Para Diabásio ou Basalto: 1,2. Para Granito ou Gnaiss: 1,0. Para Calcário: 0,9. Para Arenito: 0,7.

Resistência Característica Média à Tração do Concreto MPa

Tensão de Escoamento Característica do Aço MPa

Fonte: Elaborada pelo autor.

O tipo de cimento perguntado foi posto para que, caso futuramente torne-se desejável, o software disponha de uma análise temporal do módulo de elasticidade e do fck. Além disso, é pedido a resistência característica do concreto utilizado (em MPa) e qual o agregado da mistura, sendo este último indicado pelo usuário através do coeficiente de agregado respectivo para uma rocha específica. É visível na Figura 57 que, através das Equações (21) e (22) anteriormente dispostas neste trabalho, a calculadora avalia a resistência média à tração do material e a mostra para o usuário. Entretanto, a mesma aparece na cor cinza e não é passível de ser mudada uma vez que tem como variável unicamente o fck. Em seguida, com essas informações, são calculados os módulos de elasticidade dos materiais aos 28 dias, conforme mostrado na Figura 59 para o ambiente interno da calculadora e na Figura 60 para a visão do usuário.

Figura 59 – Inserção do cálculo normativo do Módulo de Young no *Smath*

The screenshot shows the Smath software interface with a grid background. The title bar indicates 'Times New Roman' font and a zoom level of 12. The main window contains the following code and comments:

```

Módulos de Elasticidade aos 28 dias

Eci_ee := if fck_ee < 55 MPa
    alfaE_ee := 5600 * sqrt(fck_ee / MPa) MPa
else
    21500 * alfaE_ee * ((fck_ee / 10 MPa) + 1,25)^(1/3)

Módulo de Elasticidade Tangente do Concreto
Eci_ee = 28000 MPa

if 0,8 + 0,2 * (fck_ee / 80 MPa) ≤ 1
    alfai_ee := 0,8 + 0,2 * (fck_ee / 80 MPa)
else
    alfai_ee := 1

Coeficiente de Relação entre os Módulos Secante e Tangente
alfai_ee = 0,8625
Ecs_ee := Eci_ee * alfai_ee

Módulo de Elasticidade Secante do Concreto
Ecs_ee = 24150 MPa

Módulo de Elasticidade do Aço
Es_ee := 210 GPa
alfas_ee := Es_ee / Ecs_ee

Razão dos Módulos de Elasticidade
alfas_ee = 8,6957
  
```

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 60 – Visão do usuário de parâmetros e valores do Módulo de Young

The screenshot shows a user interface for the modulus of elasticity parameters. It has a title 'Módulos de Elasticidade aos 28 dias' and five rows of input fields with units:

Parâmetro	Valor	Unidade
Módulo de Elasticidade Tangente do Concreto	28000	MPa
Coeficiente de Relação entre os Módulos Secante e Tangente	0.8625	
Módulo de Elasticidade Secante do Concreto	24150	MPa
Módulo de Elasticidade do Aço	210	GPa
Razão dos Módulos de Elasticidade	8.6957	

Fonte: Elaborada pelo autor.

São visíveis as Equações (33) e (34), supracitadas neste trabalho, para o cálculo do módulo de elasticidade tangencial para concretos de até 55 MPa e acima dessa marca, respectivamente. Logo em seguida, através da Equação (35), calcula-se o coeficiente que relaciona o Módulo Secante ao Módulo Tangente e impõe-se uma programação de *if else* para limitar este valor a 1, conforme a norma demanda. Vê-se que a única variável que o usuário poderá alterar o valor nesta parte é a do Módulo de Elasticidade do Aço que será utilizada para calcular o Alfa que corresponde à razão entre os módulos dos dois materiais. Em seguida, parte-se para a análise do Momento de Fissuração da Viga na perspectiva dentro do software na Figura 61 e para o usuário na Figura 62

Figura 61 – Inserção dos cálculos do Momento de Fissuração da seção

□—Cálculo do Momento de Fissuração da Viga—

$$ycgb_{ee} := \frac{(bm_{ee} - ba_{ee}) \cdot \frac{hm_{ee}^2}{2} + ba_{ee} \cdot \frac{h_{ee}^2}{2}}{A_{ee}}$$

if $hm_{ee} = 0$
 alfafiss_{ee} := 1,5
 else
 alfafiss_{ee} := 1,2

Coeficiente de correlação com os resultados experimentais de tração

alfafiss_{ee} = 1,5

$$A_{ee} := (bm_{ee} - ba_{ee}) \cdot hm_{ee} + ba_{ee} \cdot h_{ee}$$

$$Ib_{ee} := \frac{(bm_{ee} - ba_{ee}) \cdot \frac{hm_{ee}^3}{12} + ba_{ee} \cdot \frac{h_{ee}^3}{12}}{12} + (bm_{ee} - ba_{ee}) \cdot hm_{ee} \cdot \left(ycgb_{ee} - \frac{hm_{ee}}{2}\right)^2 + ba_{ee} \cdot h_{ee} \cdot \left(ycgb_{ee} - \frac{h_{ee}}{2}\right)^2$$

$$yt_{ee} := h_{ee} - ycgb_{ee}$$

Distância do centro de gravidade até a fibra mais tracionada

yt_{ee} = 0,15 m

$$M_{fissuração_ee} := \frac{alfafiss_{ee} \cdot fctm_{ee} \cdot Ib_{ee}}{yt_{ee}}$$

Momento de Fissuração da Seção

$M_{fissuração_ee} = 8,0796 \text{ kN m}$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 62 – Visão do usuário dos cálculos de Momento de Fissuração

Cálculo do Momento de Fissuração da Viga

alfafiss. ee	1.5
Coeficiente de correlação com os resultados experimentais de tração	1.5
Distância do centro de gravidade até a fibra mais tracionada	0.15 m
Momento de Fissuração da Seção	8.0796 kN m

Fonte: Elaborada pelo autor.

O cálculo do Momento de Fissuração levou em consideração apenas o Momento de Inércia bruto, para que haja o resultado de maior segurança e para atender ao que demanda a Norma. Para calcular a distância até as fibras mais tracionadas calculou-se, através da Equação (19), a posição do centro de gravidade da seção e em seguida ela foi subtraída da altura da seção. É visível, também, a Equação (18) para o Momento de Inércia bruto da seção e a Equação (17) para o cálculo do Momento de fissuração de fato. Logo em seguida a Figura 63 e Figura 64 mostram, respectivamente, as Equações (20), (19) e (18) para a área, centro de gravidade e Momento de Inércia da seção bruta de concreto e as Equações (31), (32) e (30) para a área, centro de gravidade e Momento de Inércia da seção homogeneizada de aço e concreto. Na Figura 65 vê-se as propriedades geométricas do Estádio II puro através das Equações de Linha neutra e Momento de Inércia de seção Fissurada. Por fim, todas essas informações são mostradas na Figura 66 da maneira que o usuário verá durante a utilização do software.

Figura 63 – Inserção do equacionamento de propriedades brutas de seção no *Smath*

☐ — Propriedades Geométricas Brutas —

$$A_{ss} := (bm_{ss} - ba_{ss}) \cdot hm_{ss} + ba_{ss} \cdot h_{ss}$$

Área da Seção Bruta

$$A_{ss} = 0,042 \text{ m}^2$$

$$ycgb_{ss} := \frac{(bm_{ss} - ba_{ss}) \cdot \frac{hm_{ss}^2}{2} + ba_{ss} \cdot \frac{h_{ss}^2}{2}}{A_{ss}}$$

Centro de Gravidade da Seção Bruta

$$ycgb_{ss} = 15 \text{ cm}$$

$$Ib_{ss} := \frac{(bm_{ss} - ba_{ss}) \cdot \frac{hm_{ss}^3}{12} + \frac{ba_{ss} \cdot h_{ss}^3}{12} + (bm_{ss} - ba_{ss}) \cdot hm_{ss} \cdot \left(ycgb_{ss} - \frac{hm_{ss}}{2}\right)^2 + ba_{ss} \cdot h_{ss} \cdot \left(ycgb_{ss} - \frac{h_{ss}}{2}\right)^2}$$

Momento de Inércia da Seção Bruta

$$Ib_{ss} = 31500 \text{ cm}^4$$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 64 – Inserção do equacionamento de propriedades homogeneizadas de seção no *Smath*

□—Propriedades Geométricas Homogeneizadas—

$$Ah_{ee} := (bm_{ee} - ba_{ee}) \cdot hm_{ee} + ba_{ee} \cdot h_{ee} + As_{ee} \cdot (alfae_{ee} - 1)$$

Área da Seção Homogeneizada

$$Ah_{ee} = 0,0432 \text{ m}^2$$

$$ycgh_{ee} := \frac{(bm_{ee} - ba_{ee}) \cdot \frac{hm_{ee}^2}{2} + ba_{ee} \cdot \frac{h_{ee}^2}{2} + As_{ee} \cdot (alfae_{ee} - 1) \cdot d_{ee}}{Ah_{ee}}$$

Centro de Gravidade da Seção Homogeneizada

$$ycgh_{ee} = 0,1531 \text{ m}$$

$$Ih_{ee} := \frac{(bm_{ee} - ba_{ee}) \cdot \frac{hm_{ee}^3}{12} + \frac{ba_{ee} \cdot h_{ee}^3}{12} + (bm_{ee} - ba_{ee}) \cdot hm_{ee} \cdot \left(ycgh_{ee} - \frac{h_{ee}}{2}\right)^2 + ba_{ee} \cdot h_{ee} \cdot \left(ycgh_{ee} - \frac{h_{ee}}{2}\right)^2 + As_{ee} \cdot (alfae_{ee} - 1) \cdot (ycgh_{ee} - d_{ee})^2}{1}$$

Momento de Inércia da Seção Homogeneizada

$$Ih_{ee} = 32947,4439 \text{ cm}^4$$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 65 – Inserção do equacionamento de propriedades fissuradas de seção no *Smath*

□—Propriedades de Estádio II Puro—

$$a1_{ee} := \frac{ba_{ee}}{2}$$

$$a2_{ee} := hm_{ee} \cdot (bm_{ee} - ba_{ee}) + (alfae_{ee} - 1) \cdot As'_{ee} + alfae_{ee} \cdot As_{ee}$$

$$a3_{ee} := (-d'_{ee}) \cdot (alfae_{ee} - 1) \cdot As'_{ee} - d_{ee} \cdot alfae_{ee} \cdot As_{ee} - \frac{hm_{ee}^2}{2} \cdot (bm_{ee} - ba_{ee})$$

$$xII_{ee} := \frac{-a2_{ee} + \sqrt{a2_{ee}^2 - 4 \cdot a1_{ee} \cdot a3_{ee}}}{2 \cdot a1_{ee}}$$

Posição da Linha Neutra no Estádio II Puro

$$xII_{ee} = 0,061 \text{ m}$$

$$I2puro_{ee} := \text{if } xII_{ee} \leq hm_{ee} \text{ then } \frac{bm_{ee} \cdot \frac{xII_{ee}^3}{3} + alfae_{ee} \cdot As_{ee} \cdot (xII_{ee} - d_{ee})^2 + (alfae_{ee} - 1) \cdot As'_{ee} \cdot (xII_{ee} - d'_{ee})^2}{1} \text{ else } \frac{(bm_{ee} - ba_{ee}) \cdot \frac{hm_{ee}^3}{12} + ba_{ee} \cdot \frac{hm_{ee}^3}{3} + hm_{ee} \cdot \left((bm_{ee} - ba_{ee}) \cdot \left(xII_{ee} - \frac{hm_{ee}}{2}\right)^2\right) + alfae_{ee} \cdot As_{ee} \cdot (xII_{ee} - d_{ee})^2 + (alfae_{ee} - 1) \cdot As'_{ee} \cdot (xII_{ee} - d'_{ee})^2}{1}$$

Momento de Inércia do Estádio II Puro

$$I2puro_{ee} = 6602,8863 \text{ cm}^4$$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 66 – Visão do usuário das propriedades geométricas diversas da seção

Propriedades Geométricas Brutas		
Área da Seção Bruta	0.042	m ² ▾
Centro de Gravidade da Seção Bruta	15	cm ▾
Momento de Inércia da Seção Bruta	31500	cm ⁴ ▾

Propriedades Geométricas Homogeneizadas		
Área da Seção Homogeneizada	0.0432	m ² ▾
Centro de Gravidade da Seção Homogeneizada	0.1531	m ▾
Momento de Inércia da Seção Homogeneizada	32947.4439	cm ⁴ ▾

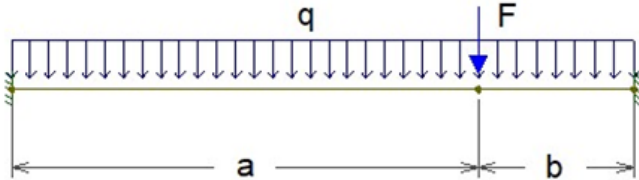
Propriedades de Estádio II Puro		
Posição da Linha Neutra no Estádio II Puro	0.061	m ▾
Momento de Inércia do Estádio II Puro	6602.8863	cm ⁴ ▾

Fonte: Elaborada pelo autor.

Prossegue-se, então, para a inserção de dados acerca do vão e carregamento enfrentado pela viga. O usuário terá em mãos uma imagem para auxiliar na colocação dos dados. Na não presença de uma carga pontual, o mesmo pode simplesmente tornar zero o valor de Q. Nota-se que foi mantida a mesma configuração utilizada na Seção 5 para demonstrar as equações. A Figura 67 e Figura 68 mostram como isso foi concebido no software e como é mostrado ao usuário. Trata-se de uma região simples do programa em que todas as partes são atribuíveis.

Figura 67 - Inserção dos dados de vão e carregamento no *Smath*

Representação do Vão



☐ — Dados do Vão —

Ponto de Aplicação da Carga Pontual (a)

$a := 2,56 \text{ m}$

Restante até o segundo apoio (b)

$b := 1,51 \text{ m}$

Vão Total

$L := a + b$

☐ — Dados do Carregamento —

Carregamento Pontual

$Q := 14,50 \text{ kN}$

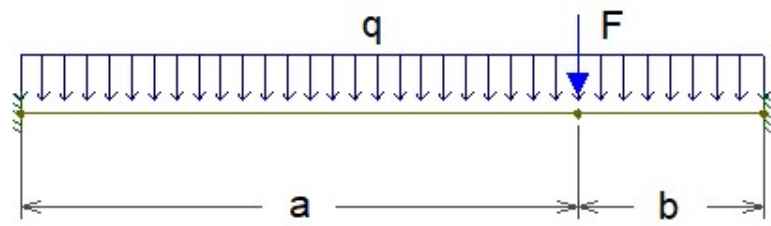
Carregamento Distribuído

$q := 4,53 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 68 – Visão do usuário dos dados de vão e carregamento

Representação do Vão



Dados do Vão

Ponto de Aplicação da Carga Pontual (a) m

Restante até o segundo apoio (b) m

Dados do Carregamento

Carregamento Pontual kN

Carregamento Distribuído kN/m

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tomou-se a decisão de logo em seguida colocar uma análise dos esforços máximos atuantes sobre a viga, por se tratar de uma informação vital para o projeto de Estados Limites. Na Figura 69 é possível ver as Equações (90), (91), (92) e (93) que correspondem, respectivamente, às equações de momento fletor das seções antes e depois da posição da carga pontual e as equações de esforço cortante das seções antes e depois da posição da carga pontual. Logo em seguida a posição de momento fletor máximo é encontrada, mostrado na Figura 70 a partir do seguinte algoritmo: caso a carga distribuída seja nula, a posição de momento máximo é a mesma posição da carga pontual. Não sendo isso verdade, o software tentará encontrar a raiz da equação de esforço cortante na região antes da carga pontual, pois tal equação é a derivada do momento fletor, e não encontrando-a tentará encontrar a raiz para a região após a carga pontual. Se ambas as raízes não existirem, significa que a posição de momento fletor é a posição da carga pontual, uma vez provada que a mesma se trata de um ponto de inflexão na função de momento fletor. É, conforme visível na Figura 71, mostrado ao usuário a posição do momento fletor encontrada, o momento nesta mesma posição e os cortantes nas regiões dos apoios.

Figura 69 – Inserção das equações de Momento e Cortante no *Smath*

Esforços Máximos sobre a Viga

$$M_{ee1}(x) := \frac{q \cdot L}{2} \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2} - \frac{q \cdot L^2}{12} + \frac{Q \cdot b^2 \cdot (3 \cdot a + b)}{L^3} \cdot x - \frac{Q \cdot a \cdot b^2}{L^2}$$

$$M_{ee2}(x) := \frac{q \cdot L}{2} \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2} - \frac{q \cdot L^2}{12} + \frac{Q \cdot b^2 \cdot (3 \cdot a + b)}{L^3} \cdot x - \frac{Q \cdot a \cdot b^2}{L^2} - Q \cdot (x - a)$$

$$V_{ee1}(x) := \frac{q \cdot (L - 2 \cdot x) \cdot L^3 + 2 \cdot Q \cdot (L - a)^2 \cdot (L + 2 \cdot a)}{2 \cdot L^3}$$

$$V_{ee2}(x) := \frac{q \cdot (L - 2 \cdot x) \cdot L^3 + 2 \cdot Q \cdot (L - a)^2 \cdot (L + 2 \cdot a) - 2 \cdot Q \cdot L^3}{2 \cdot L^3}$$

```

x_momento_maximo_positivo_ee := if q = 0
    a
else
    try
        solve(V_ee1(x m); x; 0; a) m
    on error
        try
            solve(V_ee2(x m); x; a; L) m
        on error
            a

```

$$\text{Momentos_Máximos_ee} := \begin{cases} \text{if } x_momento_maximo_positivo_ee < a \\ M_{ee1}(x_momento_maximo_positivo_ee) \\ \text{else} \\ M_{ee2}(x_momento_maximo_positivo_ee) \\ |M_{ee1}(0)| \\ |M_{ee2}(L)| \end{cases}$$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 70 – Equacionamento no *Smath* para cálculo de esforços máximos

```

x_momento_máximo_ee := if max (Momentos_Máximos_ee) = if x_momento_máximo_positivo_ee < a
                                                                M_ee1 ( x_momento_máximo_positivo_ee )
                                                                else
                                                                M_ee2 ( x_momento_máximo_positivo_ee )

                                                                x_momento_máximo_positivo_ee
                                                                else
                                                                if max (Momentos_Máximos_ee) = |M_ee1 ( 0 )|
                                                                0
                                                                else
                                                                L

```

Posição (x em metros) da Seção de Momento Máximo

```

x_momento_máximo_ee = 4,07 m

```

```

M_máximo_ee := if x_momento_máximo_ee ≥ a
                  M_ee2 ( x_momento_máximo_ee )
                  else
                  M_ee1 ( x_momento_máximo_ee )

```

Momento Máximo sobre a Viga

```

M_máximo_ee = -14,9156 kN m

```

Cortante após o apoio da direita

```

V_ee1 ( 0 ) = 13,7252 kN

```

Cortante após o apoio da esquerda

```

V_ee2 ( L ) = -19,2119 kN

```

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 71 – Visão do usuário dos cálculos de esforços máximos

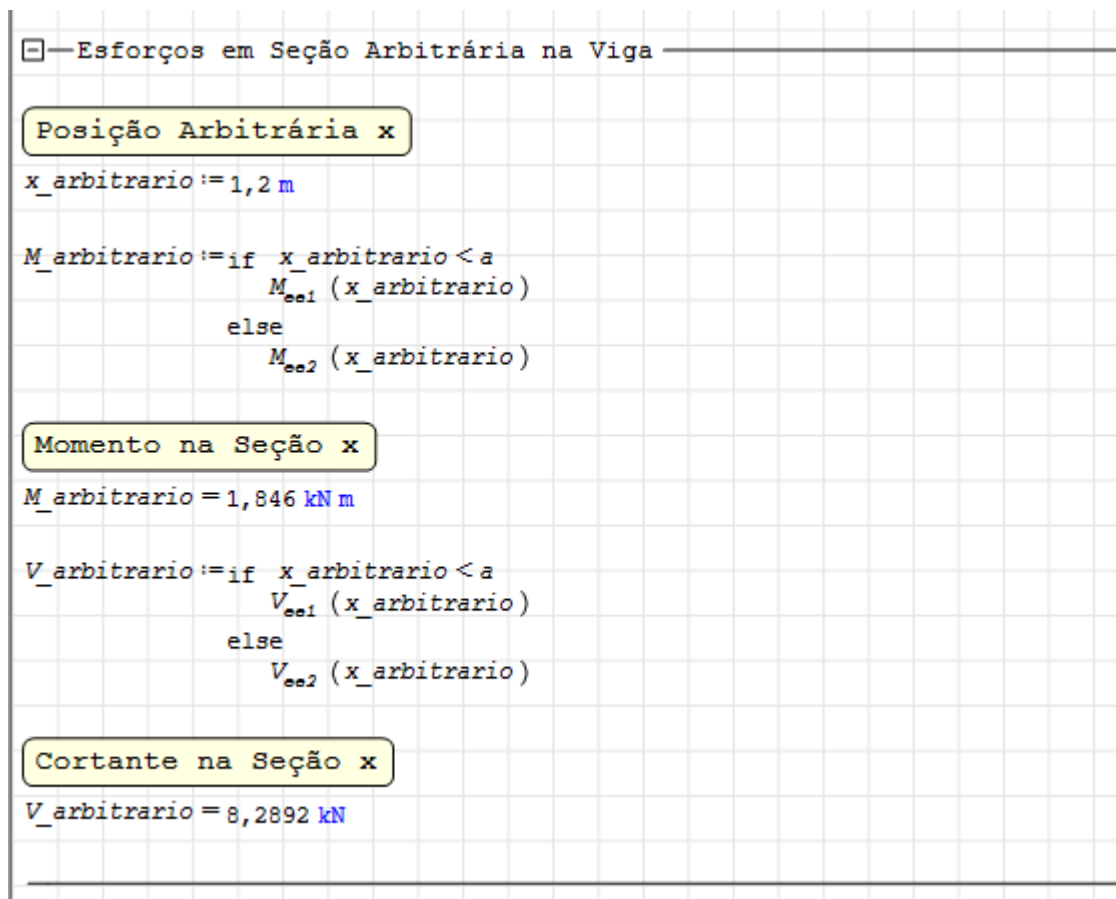
Esforços Máximos sobre a Viga		
Posição (x em metros) da Seção de Momento Máximo	4.07	m
Momento Máximo sobre a Viga	-14.9156	kN m
Cortante após o apoio da direita	13.7252	kN
Cortante após o apoio da esquerda	-19.2119	kN

Fonte: Elaborada pelo autor.

Também é permitido ao usuário uma análise de qualquer seção arbitrária desejada. Na Figura 72 é mostrado como tal formatação foi simples dentro do software, tratando-se apenas de uma atribuição de variável e sua colocação dentro das funções de momento e cortante. Para isso, através de um *if else*, é verificado se a posição escolhida pelo usuário está antes ou depois

do ponto de aplicação de carga pontual, uma vez que isso muda a equação a ser utilizada. Na Figura 73 é visível a formatação final dessa seção.

Figura 72 - Equacionamento no *Smath* para cálculo de esforços em seção arbitrária



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 73 – Visão do usuário do cálculo de esforços em seção arbitrária

Esforços em Seção Arbitrária na Viga		
Posição Arbitrária x	1.2	m
Momento na Seção x	1.846	kN m
Cortante na Seção x	8.2892	kN

Fonte: Elaborada pelo autor.

A calculadora, então, passa a tratar das rigidezes e dos temas relativos às flechas que ocorrem na viga. O usuário possui quatro opções: utilizar para analisar as flechas à rigidez

flexional bruta da seção, à rigidez flexional bruta fissurada, à rigidez flexional homogeneizada e à rigidez flexional homogeneizada fissurada. Depois de calculadas e armazenadas conforme mostrado na Figura 74, o usuário escolherá com qual trabalhar escrevendo B, FB, H e FH, respectivamente, conforme mostrado na Figura 75. Cabe ressaltar que a norma preconiza a análise sob rigidez bruta fissurada. A metodologia adotada para calcular o efeito da fissuração sob a inércia da viga foi o método de Branson sob a Equação (29). A maneira que isso fica apresentada é vista na Figura 76.

Figura 74 – Equacionamento no *Smath* de rigidezes fissuradas equivalentes

☐—Rigidezes Flexionais

$$EI_{bruto_{ee}} := Ecs_{ee} \cdot Ib_{ee}$$

Rigidez da Seção Bruta

$$EI_{bruto_{ee}} = 7607,25 \text{ kN m}^2$$

$$EI_{hom_{ee}} := Ecs_{ee} \cdot Ih_{ee}$$

Rigidez da Seção Homogeneizada

$$EI_{hom_{ee}} = 7956,8077 \text{ kN m}^2$$

$$EIEq_{bruto_{ee}} := \text{if } Ecs_{ee} \cdot \left(\left(\frac{M_{fissuração_{ee}}}{|M_{máximo_{ee}}|} \right)^3 \cdot Ib_{ee} + \left(1 - \left(\frac{M_{fissuração_{ee}}}{|M_{máximo_{ee}}|} \right)^3 \right) \cdot I2puro_{ee} \right) > EI_{bruto_{ee}} \\ EI_{bruto_{ee}} \\ \text{else} \\ Ecs_{ee} \cdot \left(\left(\frac{M_{fissuração_{ee}}}{|M_{máximo_{ee}}|} \right)^3 \cdot Ib_{ee} + \left(1 - \left(\frac{M_{fissuração_{ee}}}{|M_{máximo_{ee}}|} \right)^3 \right) \cdot I2puro_{ee} \right)$$

Rigidez equivalente de Branson para Seção Bruta

$$EIEq_{bruto_{ee}} = 2550,291 \text{ kN m}^2$$

$$EIEq_{hom_{ee}} := \text{if } Ecs_{ee} \cdot \left(\left(\frac{M_{fissuração_{ee}}}{|M_{máximo_{ee}}|} \right)^3 \cdot Ih_{ee} + \left(1 - \left(\frac{M_{fissuração_{ee}}}{|M_{máximo_{ee}}|} \right)^3 \right) \cdot I2puro_{ee} \right) > EI_{hom_{ee}} \\ EI_{hom_{ee}} \\ \text{else} \\ Ecs_{ee} \cdot \left(\left(\frac{M_{fissuração_{ee}}}{|M_{máximo_{ee}}|} \right)^3 \cdot Ih_{ee} + \left(1 - \left(\frac{M_{fissuração_{ee}}}{|M_{máximo_{ee}}|} \right)^3 \right) \cdot I2puro_{ee} \right)$$

Rigidez equivalente de Branson para Seção Homogeneizada

$$EIEq_{hom_{ee}} = 2605,8522 \text{ kN m}^2$$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 75 – Montagem de seleção arbitrária de rigidez de cálculo

Selecione a Rigidez da Peça para Análise	
$Seleção_de_Rigidez_{ee} := "FB"$	
<i>Observação: Para seções fissuradas brutas ou homogeneizadas, escrever: FB ou FH. Para seções não fissuradas: B ou H</i>	
$EI_{eq_{ee}} := \text{if } Seleção_de_Rigidez_{ee} = "FB"$ $EI_{eq_bruto_{ee}}$ else $\text{if } Seleção_de_Rigidez_{ee} = "FH"$ $EI_{eq_hom_{ee}}$ else $\text{if } Seleção_de_Rigidez_{ee} = "B"$ $EI_{bruto_{ee}}$ else $EI_{hom_{ee}}$	
$Alerta_Rigidez_{ee} := \text{if } EI_{eq_{ee}} < 0$ $"A SEÇÃO NÃO FISSUROU. ESCOLHER RIGIDEZ BRUTA OU HOMOGENEIZADA"$ else $"Rigidez Escolhida"$	
Rigidez Equivalente Escolhida	
$EI_{eq_{ee}} = 2550,291 \text{ kN m}^2$	

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 76 – Visão do usuário do cálculo e seleção de rigidez flexional

Rigidezes Flexionais		
Rigidez da Seção Bruta	7607.25	kN m ² ▾
Rigidez da Seção Homogeneizada	7956.8077	kN m ² ▾
Rigidez equivalente de Branson para Seção Bruta	2550.291	kN m ² ▾
Rigidez equivalente de Branson para Seção Homogeneizada	2605.8522	kN m ² ▾
Selecione a Rigidez da Peça para Análise	FB	
<i>Observação: Para seções fissuradas brutas ou homogeneizadas, escrever: FB ou FH. Para seções não fissuradas: B ou H</i>		
Rigidez Equivalente Escolhida	2550.291	kN m ² ▾

Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Figura 77 podem ser vistas as Equações (101), (102), (96), (103), (94) e (95), todas envolvidas no cálculo de flechas de vigas biengastadas no decorrer de todo o seu vão. Estando estas fórmulas impostas ao programa, tem-se, em seguida, uma seção que permite o cálculo da

deflexão em uma seção arbitrária no decorrer da viga. O programa automaticamente repassa a seção escolhida para algumas das equações a depender de sua posição: antes ou depois da entrada do carregamento pontual. A Figura 78 exibe como esta parte simples do programa aparece ao usuário.

Figura 77 – Inserção de equações da deflexão da viga no *Smath*

Deslocamento em Seção Arbitrária

$C1_{ee1} := 0 \cdot a$

$C1_{ee2} := -\frac{a^2 \cdot Q}{2}$

$C2_{ee1} := 0 \cdot a$

$C2_{ee2} := \frac{Q \cdot a^3}{6}$

$$v_{ee1}(x) := \left(\frac{a^3 \cdot Q \cdot x^3}{3 \cdot L^3} - \frac{a^3 \cdot Q \cdot x^2}{2 \cdot L^2} - \frac{a^2 \cdot Q \cdot x^3}{2 \cdot L^2} + \frac{a^2 \cdot Q \cdot x^2}{L} - \frac{a \cdot Q \cdot x^2}{2} - \frac{L^2 \cdot Q \cdot x^2}{24} + \frac{1}{12} \cdot L \cdot Q \cdot x^3 - \frac{Q \cdot x^4}{24} + \frac{Q \cdot x^3}{6} + C1_{ee1} \cdot x + C2_{ee1} \right) \cdot \left(\frac{1}{EIeq_{ee}} \right)$$

$$v_{ee2}(x) := \left(\frac{a^3 \cdot Q \cdot x^3}{3 \cdot L^3} - \frac{a^3 \cdot Q \cdot x^2}{2 \cdot L^2} - \frac{a^2 \cdot Q \cdot x^3}{2 \cdot L^2} + \frac{a^2 \cdot Q \cdot x^2}{L} - \frac{L^2 \cdot Q \cdot x^2}{24} + \frac{1}{12} \cdot L \cdot Q \cdot x^3 - \frac{Q \cdot x^4}{24} + C1_{ee2} \cdot x + C2_{ee2} \right) \cdot \left(\frac{1}{EIeq_{ee}} \right)$$

Posição Arbitrária x

$x_{arbitrario_def} := 3 \text{ m}$

$w_{arbitrario} := \text{if } x_{arbitrario_def} < a$
 $\quad w_{ee1}(x_{arbitrario_def})$
 $\quad \text{else}$
 $\quad \quad w_{ee2}(x_{arbitrario_def})$

Deslocamento na Seção x (Com Rigidez Equivalente)

$w_{arbitrario} = -0,1907 \text{ cm}$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 78 – Visão do usuário do cálculo de deslocamento em seção arbitrária

Deslocamento em Seção Arbitrária

Posição Arbitrária x: 3 m

Deslocamento na Seção x (Com Rigidez Equivalente): -0.1907 cm

Fonte: Elaborada pelo autor.

Parte-se, então, para uma análise do deslocamento máximo que ocorre na viga, encontrando seu valor e posição. Na Figura 79 é mostrado como isto é feito: primeiramente o software procura a raiz da derivada da função de deslocamento antes da carga pontual. Caso esta não exista, então o software parte para encontrar a raiz da derivada da função de deslocamento após a carga pontual. Tal algoritmo resultará na posição em que ocorre o deslocamento máximo, a qual é inserida em uma das funções de deslocamento para que então

obtenha-se a maior flecha da viga. Trata-se, também, de uma seção simples do programa visível na Figura 80 com os resultados da viga exemplo e, em seguida, mostra-se na Figura 81 uma validação desse resultado a partir do *FTool*.

Figura 79 – Equacionamento do cálculo de deslocamentos máximos na viga no *Smath*

```

Deslocamento Máximo Imediato

Posição de Deslocamento Máximo
x_máximo_def := try
    solve  $\left( \frac{d}{dx} w_{ee1}(x \text{ m}); x; 0,00001; a + 0,00001 \text{ m} \right) \text{ m}$ 
on error
    solve  $\left( \frac{d}{dx} w_{ee2}(x \text{ m}); x; a - 0,00001 \text{ m}; L - 0,00001 \text{ m} \right) \text{ m}$ 

Posição de Deslocamento Máximo
x_máximo_def = 2,1773 m
w_máximo := if x_máximo_def < a
    w_ee1(x_máximo_def)
else
    w_ee2(x_máximo_def)

Deslocamento Máximo
w_máximo = -0,2966 cm
  
```

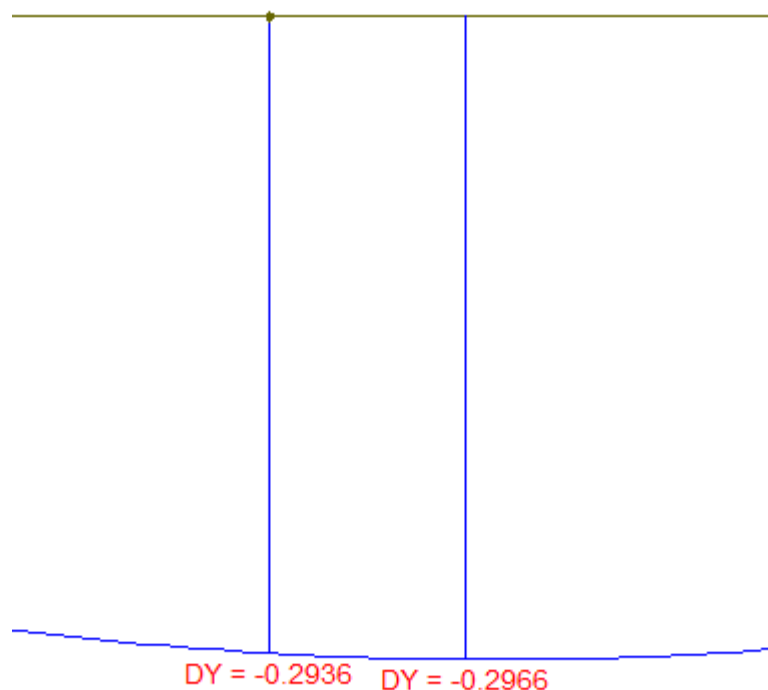
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 80 – Visão do usuário do cálculo de deslocamento máximo

Deslocamento Máximo Imediato		
Posição de Deslocamento Máximo	2.1773	m
Deslocamento Máximo	-0.2966	cm

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 81 – Validação via *FTool* do deslocamento máximo calculado



Fonte: Elaborada pelo autor.

As análises de deslocamentos e esforços até então foram pontuais, porém na calculadora foi programada uma visualização global desses cálculos através de uma tabela de resultados. Na Figura 82 é possível ver a programação que gera tal tabela, sendo utilizado um algoritmo que subdivide o comprimento da viga em dez pedaços (ou onze seções) e mostra os resultados associados a eles. O algoritmo é um *looping* desenvolvido com a função *for* que, enquanto roda cada iteração, alimenta quatro vetores diferentes (matrizes de coluna única). Tais vetores são, então, formatados em uma tabela que aparece somente na versão visível para o usuário (conforme a Figura 83). A Figura 84, Figura 85, Figura 86 e Figura 87 mostram, respectivamente, os diagramas de esforço cortante, momento fletor e deslocamento da viga (primeira e segunda metades), obtidos no *FTool*, para que haja uma validação dos resultados.

Figura 82 – Formação dos vetores a serem formatados em uma tabela

□—Resultados Imediatos sobre Viga—			
for i ∈ [1..11]			
Abscissa _i := $\frac{(a+b) \cdot (i-1)}{10}$			
for i ∈ [1..11]			
Vetor_Graf_V _i := if $\frac{(a+b) \cdot (i-1)}{10} < a$			
V _{es1} $\left(\frac{(a+b) \cdot (i-1)}{10} \right)$			
else			
V _{es2} $\left(\frac{(a+b) \cdot (i-1)}{10} \right)$			
for i ∈ [1..11]			
Vetor_Graf_M _i := if $\frac{(a+b) \cdot (i-1)}{10} < a$			
M _{es1} $\left(\frac{(a+b) \cdot (i-1)}{10} \right)$			
else			
M _{es2} $\left(\frac{(a+b) \cdot (i-1)}{10} \right)$			
for i ∈ [1..11]			
Vetor_Graf_w _i := if $\frac{(a+b) \cdot (i-1)}{10} < a$			
w _{es1} $\left(\frac{(a+b) \cdot (i-1)}{10} \right)$			
else			
w _{es2} $\left(\frac{(a+b) \cdot (i-1)}{10} \right)$			
Tabela_Geral := augment $\left(\text{Abscissa} \cdot \frac{1}{m}; \text{Vetor_Graf_V} \cdot \frac{1}{kN}; \text{Vetor_Graf_M} \cdot \frac{1}{kN \cdot m}; \text{Vetor_Graf_w} \cdot \frac{1}{cm} \right)$			
Colunas := ["x (m)" "V(x) (kN)" "M(x) (kN.m)" "w(x) (cm)"]			

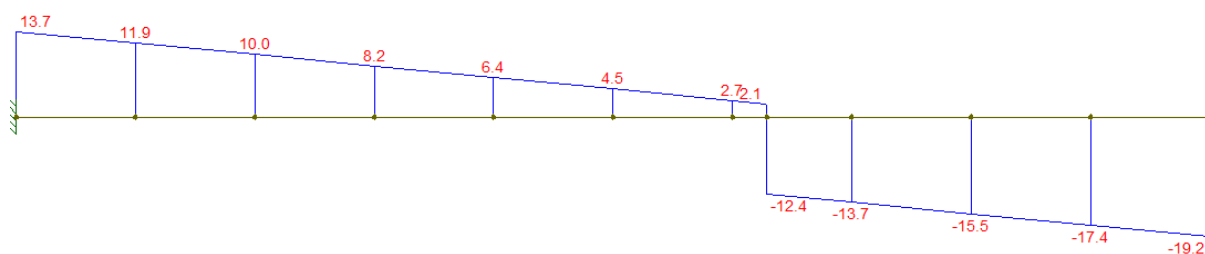
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 83 – Tabela de resultados finais de esforços e deslocamentos imediatos da viga

Resultados Imediatos sobre Viga			
x (m)	V(x) (kN)	M(x) (kN.m)	w(x) (cm)
0	13.73	-11.36	0
0.41	11.88	-6.15	-0.03
0.81	10.04	-1.69	-0.1
1.22	8.19	2.02	-0.19
1.63	6.35	4.98	-0.26
2.04	4.51	7.19	-0.29
2.44	2.66	8.65	-0.29
2.85	-13.68	5.17	-0.22
3.26	-15.52	-0.78	-0.13
3.66	-17.37	-7.47	-0.04
...			

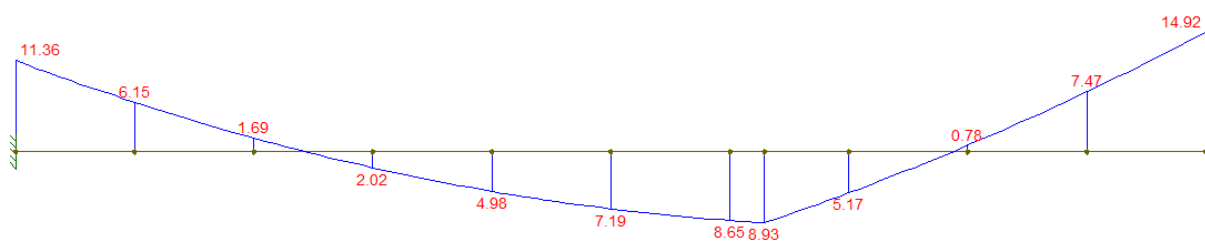
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 84 – Validação via *FTool* dos resultados obtidos para o esforço cortante



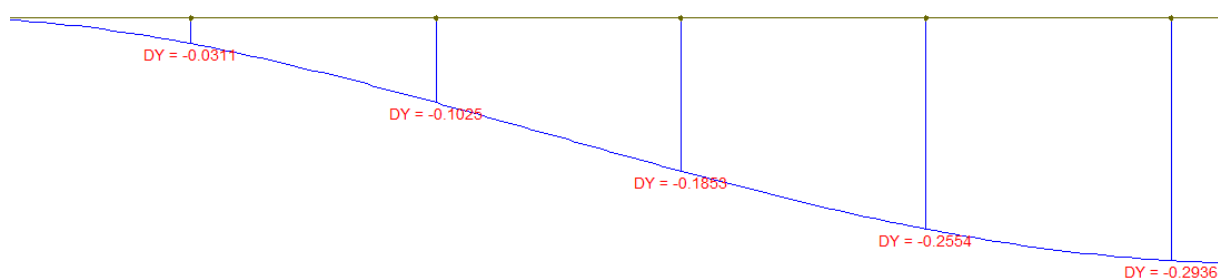
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 85 – Validação via *FTool* dos resultados obtidos para o momento fletor



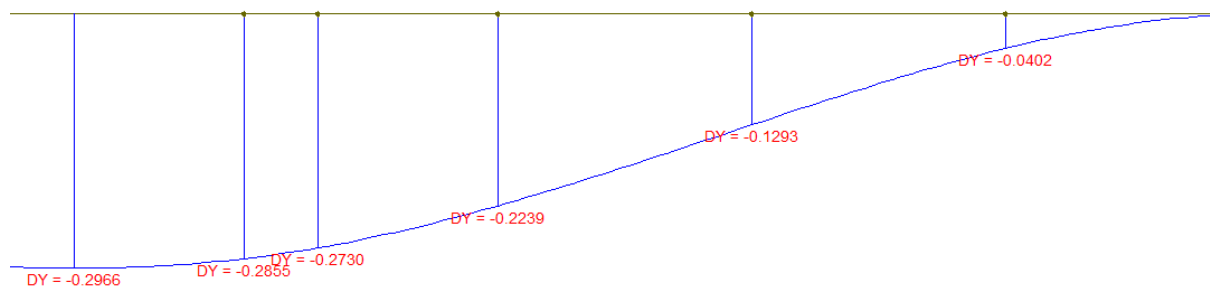
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 86 – Validação via *FTool* dos deslocamentos da primeira metade da viga



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 87 – Validação via *FTool* dos deslocamentos da primeira metade da viga



Fonte: Elaborada pelo autor.

Por fim, é necessária uma visualização da flecha máxima sob influência do tempo, ou seja, atuação do fenômeno da fluência na estrutura. Isto é feito com o processo explicitado na Norma 6118:2014 e explanado neste trabalho na Seção 4.3.3. Todas as equações envolvidas podem ser vistas na Figura 88 que abarca a programação e variáveis criadas no programa. Para a viga exemplo optou-se por manter um tempo de escoramento de 28 dias e os resultados aparecem ao usuário conforme visível na Figura 89.

Figura 88 – Equacionamento da consideração da fluência no *Smath*

```

Consideração da Fluência

Idade (em dias) de aplicação de Cargas na viga
dia_de_aplicação := 28

Observação: Representa, por exemplo, o dia de retirada de escoramento.

Idade (em meses) de análise de fluência
tempo_análise := 70

Observação: Para considerar um "tempo infinito" colocar 70 meses.

Epsilon (t) := 0,68 · (0,996t) · t0,32

Delta_Epsilon := Epsilon (tempo_análise) - Epsilon (dia_de_aplicação / 30)

Taxa_As' := As' / A

AlfaF := Delta_Epsilon / (1 + 50 · Taxa_As')

AlfaF = 1,3376

w_máximo_com_fluência := w_máximo · (1 + AlfaF)

Deslocamento Máximo considerando Fluência
w_máximo_com_fluência = -0,6933 cm
  
```

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 89 – Visão do usuário da consideração da fluência

Consideração da Fluência

Idade (em dias) de aplicação de Cargas na viga: 28

Observação: Representa, por exemplo, o dia de retirada de escoramento.

Idade (em meses) de análise de fluência: 70

Observação: Para considerar um "tempo infinito" colocar 70 meses.

AlfaF: 1.3376

Deslocamento Máximo considerando Fluência: -0.6933 cm

Fonte: Elaborada pelo autor.

Portanto, a flecha máxima sofrida pela Viga 07, calculada pelo programa desenvolvido e levando em consideração os efeitos da fissuração sobre a inércia e a fluência à longo prazo, foi de 0,6933 centímetros.

7.6 RESULTADOS OBTIDOS NO TQS PARA ANÁLISE NÃO LINEAR

Para a correta avaliação das flechas, foi inserido no TQS uma nova combinação de cargas, levando em consideração o coeficiente Ψ_2 reduzido por se tratar de uma coberta. A criação dessa combinação, com seus coeficientes e carregamentos correspondentes, é visível na Figura 90.

Figura 90 – Criação de combinação de cargas nova no TQS

Edição de combinação

Título da combinação:

ELS/CQPERM/PP+PERM+0.3ACID

Nº	CASO	FATOR
1	2 - Peso Próprio	1
2	3 - Cargas permanentes	1
3	4 - Cargas acidentais	0,3

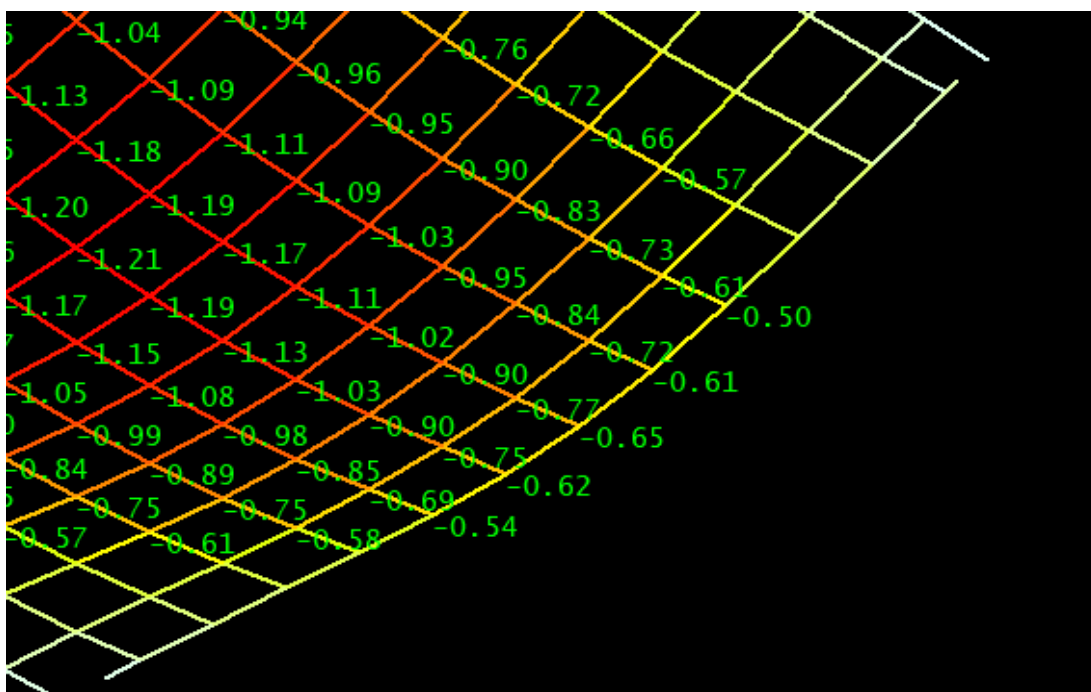
Nova Remover

Fechar

Fonte: Elaborada pelo autor.

A Grelha Não-Linear foi, então, processada. A consideração de armaduras foi feita através de uma estimativa própria do TQS e não com as armaduras detalhadas do processamento global. Os resultados mostrados na Figura 91 são referentes a esse modelo atuando sobre a Rigidez Final (F), o último estágio da consideração das fissurações pelo TQS, resultando numa flecha de 0,65 centímetros na viga em questão.

Figura 91 – Resultados do processamento da Grelha Não Linear do TQS



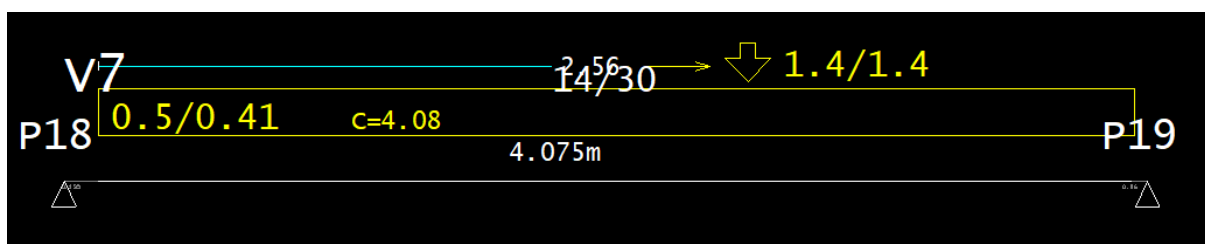
Fonte: Elaborada pelo autor.

8 CONCLUSÃO

Ao fim, a calculadora desenvolvida calculou um deslocamento previsto de 0,69 centímetros, 6,6% maior do que o deslocamento de 0,65 centímetros calculado pelo TQS. Tal resultado próximo valida a literatura e hipóteses admitidas para a sua programação, tais como as fórmulas obtidas através da Teoria de Euler-Bernoulli e inércias fissuradas através do modelo de Branson. O resultado também mostra que a calculadora pode ser, eficientemente, utilizada para fins de verificação do comportamento de vigas já dimensionadas, uma vez que sua utilização envolve muito menos critérios, variáveis, e *inputs* do que um lançamento estrutural no TQS ou em outro software corrente de estruturas.

Inicialmente era de se prever que os deslocamentos do TQS fossem mais elevados do que os da calculadora. Conforme já antes discutido, tal software consideraria as deflexões causadas nos apoios da viga, ao contrário do engastamento perfeito considerado na calculadora, porém esta produziu um deslocamento mais elevado do que o TQS. Uma das razões que pode ser listada para isso é o fato de que o carregamento distribuído, originário das cargas permanentes e acidentais da laje maciça, foi estimado através de uma metodologia simplificada (charneiras plásticas) para a calculadora, enquanto que o TQS faz uso de uma metodologia de Grelha Equivalente para computar como há a distribuição de cargas nas lajes. Entretanto, conforme pode ser visto na Figura 92, os carregamentos utilizados pelo TQS foram muito próximos aos calculados com o método das charneiras. Para a carga distribuída houve uma diferença de 45 quilos por metro a mais obtido via método das charneiras, uma vez que na figura supracitada vê-se uma carga de 4,08 kN por metro.

Figura 92 – Carregamento estimado pelo modelador do TQS



Fonte: Elaborada pelo autor.

Quando comparados com os limites normativos, ambas as deflexões passariam nos critérios estabelecidos, a se citar o critério de aceitabilidade visual, cujo limite seria de 1,6 centímetro (407 centímetros de vão divididos por 250) e o critério de estruturação de alvenarias, cujo limite seria de 1 centímetro. Isto demonstra uma eficácia prática do uso da calculadora, uma vez que, para um vão de 4 metros, usualmente se utilizaria uma seção com 40 centímetros de altura. Através de uma análise levando em conta a fissuração e fluência, bem como modelos adequados de cálculo, provou-se que uma seção de 30 centímetros seria mais do que suficiente, levando a uma economia de concreto no elemento utilizado. Tal economia pode ser potencializada caso, tomando-se a viga mais desfavorável do pavimento, utilize-se a calculadora para permitir seções menores na estrutura como um todo.

9 PROPOSTAS DE PESQUISA FUTURA

A calculadora desenvolvida, apesar de apresentar estruturação técnica e de formatação já utilizável em plenitude, pode ser aperfeiçoada em diversos aspectos em intervenções futuras.

Lista-se, então, algumas dessas intervenções possíveis de serem realizadas:

- Melhorias acerca da visualização do usuário, fazendo uso de mais cores, gráficos e tabelas para incrementar o *software* com uma melhor interface;
- Tornar ao usuário opcional a utilização de outras metodologias para cálculo de Inércia Fissurada, lastreadas na literatura produzida acerca do assunto, ao contrário de apenas disponibilizar a metodologia de Branson;
- Tornar ao usuário opcional a metodologia de cálculo de deslocamentos, ao invés de manter apenas a Teoria de Euler-Bernoulli. Métodos bem conceituados, como o de Timoshenko e Ehrenfest, podem e são até preferíveis de serem utilizados em situações diversas;
- Disponibilizar um desenho da viga deformada e dos carregamentos impostos, bem como o desenvolvimento ao longo do tempo da flecha pela fluência;
- Permitir ao usuário a colocação de mais tipos de carregamentos, tais como distribuições crescentes de carga e momentos fletores pontuais;
- Acrescentar mais tipos de vãos ao arsenal da calculadora, como, por exemplo, balanços e vãos de mais de dois apoios;
- Fazer a calculadora avisar, automaticamente, da ultrapassagem de limites normativos de deformação;
- Permitir o cálculo de combinações de cargas pelo programa;
- Permitir o cálculo de vãos efetivos pelo programa.

REFERÊNCIAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto - Procedimento**. Rio de Janeiro, 2014.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6120: Ações para cálculo de estruturas de edificações**. Rio de Janeiro, 2019.

BATTAGIN, I.L.S. **Módulo de elasticidade do concreto: como analisar e especificar**, Disponível em <www.abece.com.br/web/download/pdf/Eventos_EM_3_2007.pdf>. Acesso em Setembro, 2023.

CAMACHO, J. S. **Concreto Armado I – Estados Limites de Serviço: Fissuração – Deformação**. Universidade Estadual Paulista - Núcleo de Ensino e Pesquisa da Alvenaria Estrutural, Ilha Solteira, 2009.

CARVALHO, R.; FILHO, J. de F. **Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado**. São Carlos: EdUFSCar, 2014

CUNHA, J.; PELIZARO, T. V. G. **Estudo do pré-dimensionamento de lajes, vigas e pilares de Concret**. Revista Horizonte Científico, Uberlândia, v. 11, n. 2, 2017

GODINHO, F. **Sobrado Residencial**. 2000. Disponível em: www.aditivocad.com/baixar-projeto.php?cad=sobrado_arquitetura_hidro_estrutural_residencial_158m2. Acesso em: Janeiro, 2023.

HIBBELER, R. C., **Resistência dos materiais**, 7^a ed., São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2009

MADUREIRA, E. L.; FONTES, B. V. C. **Temperature influence on creep of reinforced concrete**. Revista IBRACON de Estruturas e Materiais, São Paulo, v. 13, n. 6, 2020. <https://doi.org/10.1590/S1983-41952020000600001>

MAHATO *et al.* **Experimental verification of deflection of beam using theoretical and numerical approach.** International Journal of Advance Research in Engineering, Science & Technology (IJAREST), v. 2, n. 3, 2015.

MANOLI, C.K.; PAPATZANI, S.; MOUZAKIS, D.E. **Exploring the Limits of Euler–Bernoulli Theory in Micromechanics.** Axioms, v. 11, n. 3, 2022.

<https://doi.org/10.3390/axioms11030142>

MEHTA, P. K.; MONTEIRO, P. J. M. **Concreto: microestrutura, propriedades e materiais.** 3ª ed. São Paulo: Ibracon, 2008.

OLIVEIRA, T. de S.; CARDOSO, A. C. S. **Deformação lenta das estruturas de concreto armado e suas manifestações patológicas.** Revista de Engenharia e Tecnologia, Ponta Grossa, v. 10, n. 2, 2018, p. 160-171.

PINHEIRO, L. M.; MUZARDO, C. D.; SANTOS, S. P. **Fundamentos do concreto e projeto de edifícios – Capítulo 06: Bases para Cálculo.** USP – Escola de Engenharia de São Carlos, São Carlos, 2003.

TQS INFORMÁTICA. **Grelha Não-Linear.** São Paulo, 2023.

TIMOSHENKO, S. P. e GERE, J. E. **Mecânica dos sólidos**, vol. 1, Rio de Janeiro: Editora LTC, 1983.