



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

CENTRO DE TECNOLOGIA

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

CLÁUDIO GOUVEIA DE FREITAS JÚNIOR

**ANÁLISE ESTÁTICA DE PÓRTICO PLANO ATRAVÉS DO MÉTODO
DOS ELEMENTOS DE CONTORNO**

JOÃO PESSOA

2022

CLÁUDIO GOUVEIA DE FREITAS JÚNIOR

**ANÁLISE ESTATICA DE PÓRTICOS PLANOS ATRAVÉS DO
MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO**

Trabalho de conclusão de curso apresentado à
Universidade Federal da Paraíba (UFPB) como
parte das exigências para a obtenção do título de
bacharel em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. José Marcilio Filgueiras Cruz

JOÃO PESSOA

2022

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

J95a Junior, Claudio Gouveia de Freitas.
Análise Estática de Pórticos Planos Através do
Método dos Elementos de Contorno / Claudio Gouveia de
Freitas Junior. - João Pessoa, 2022.
69 f.

Orientação: Prof Dr José Marcílio Cruz.
Monografia (Graduação) - UFPB/CT.

1. Mec. 2. portico plano. 3. estrutura reticulada.
4. Estatica. I. Cruz, José Marcílio. II. Título.

UFPB/CT

CDU 624(043.2)

FOLHA DE APROVAÇÃO

CLÁUDIO GOUVEIA DE FREITAS JÚNIOR

ANÁLISE ESTÁTICA DE PÓRTICO PLANO ATRAVÉS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Trabalho de Conclusão de Curso em 28/11/2022 perante a seguinte Comissão Julgadora:

José Márcio Filgueiras Cruz

José Márcio Filgueiras Cruz

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental do CT/UFPB

Aprovado

Carlos Antônio Taurino de Lucena

Carlos Antônio Taurino de Lucena

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental do CT/UFPB

Aprovado

Enildo Tales Ferreira

Enildo Tales Ferreira

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental do CT/UFPB

APROVADO

Profª. Andrea Brasiliano Silva

Profª. Andrea Brasiliano Silva

Matrícula Siape: 1549557

Coordenadora do Curso de Graduação em Engenharia Civil

AGRADECIMENTOS

Ao olhar para trás é perceptível que as coisas tomaram um rumo minimamente pensado por um ser onipotente, detentor de todo o conhecimento e que tinha grandes ambições para a minha vida. Foi a partir de suas decisões que encontrei pessoas maravilhosas ao longo de minha trajetória e não foi obstante ao longo da minha graduação.

Muito do que sou hoje, bem como muito do que esse trabalho representa foi redesenhado pelas diversas fases que tive na minha existência. Ao longo das quais busquei extrair a melhor parte de todas elas, mesmo que com poucas horas de sono e com saudade dos lugares que me faziam bem.

Agradeço primeiramente a Deus, por saber das minhas capacidades e me colocar a prova a cada dia, para que viesse a conhecer minhas competências. Assim como me dando a paciência e a clareza necessária para que pudesse concluir o trabalho, pois tudo que aconteceu foi no tempo dele.

Gostaria aqui também fazer uma menção honrosa aos meus pais que sempre foram meus pilares e a todo momento me deram apoio, tornando os grandes obstáculos cada vez menores e propiciando ambientes acolhedores ao longo desses anos.

Agradeço também a minha noiva, minha guerreira, que conseguia de forma única amenizar cada dia ruim, me revigorando para o dia seguinte. Foi nela que encontrei grande parte da minha determinação e era para ela que desejava voltar a cada fim de semana.

Por fim, mas não menos importante, agradeço ao meu professor orientador, que foi um achado dentre tantos, me cativando por sua vontade de ensinar e dando os melhores direcionamentos para a conclusão desse trabalho.

RESUMO

FREITAS JUNIOR, C. G. de. ANÁLISE ESTÁTICA DE PÓRTICOS PLANOS ATRAVÉS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO; 2022, 69 pág. Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação em Engenharia Civil – Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa. 2022.

Neste TCC é apresentada uma estratégia conveniente para a montagem das matrizes de influência de pórticos planos, utilizando o método dos elementos de contorno. Neste caso a representação integral utilizada é feita utilizando soluções fundamentais que incorporam o efeito axial e o da flexão em Z, em cada barra, considerando apenas a análise estática e a formulação conhecida como de Euler-Bernoulli. Ao final são analisados dois pórticos planos simples nos quais em cada apoio chega apenas uma barra. Os resultados obtidos para as reações de apoio, deslocamentos no nó não vinculado e esforços nas extremidades de cada barra referidos ao sistema de coordenadas local unificado são comparados com os valores respectivos obtidos através da análise via F-tool.

Palavras-chave: MEC, Pórtico plano, Estrutura reticulada, Análise estática

ABSTRACT

FREITAS JUNIOR, C. G. de. ANÁLISE ESTÁTICA DE PÓRTICOS PLANOS ATRAVÉS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO; 2022, 69 pág. Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação em Engenharia Civil – Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa. 2022.

This TCC presents a convenient strategy for the assembly of influence matrices of plane frames, using the boundary element method. In this case, the integral representation used is made using fundamental solutions that incorporate the axial effect and the Z bending effect, in each bar, considering only the static analysis and the formulation known as Euler-Bernoulli. At the end, two simple frames are analysed in which only one bar arrives at each support, The results obtained for the support reactions, displacements in the unbound node and efforts at the ends of each member referred to the unified local coordinate system are compared with the respective values obtained through the analysis via F-tool.

Keywords: BEM, Frames, Reticulated Structure, Static analysis

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – (a), (b) e (c): Corpo tridimensional; bidimensional e unidimensional com seus respectivos contornos: bidimensional, unidimensional e com dimensão zero.	15
Figura 2 - Estruturas de barras e o elemento de contorno 0D.	16
Figura 3 - Barra (elemento estrutural unidimensional).	17
Figura 4 - Barra sob efeito axial	18
Figura 5 - Barras submetidas à flexão, com carregamento no plano xy.....	24
Figura 6 - Elemento para o estudo da flexão no plano xy.....	25
Figura 7 - Geometria da flexão.....	26
Figura 8 - Tensão na flexão.....	27
Figura 9 - Problema fundamental.	29
Figura 10 - Viga bi-apoiada com o ponto-fonte simetricamente posicionado.	30
Figura 11 - Representação gráfica do PVC.	32
Figura 12 - SCL para a avaliação da contribuição do efeito axial.....	39
Figura 13 - SCLU para a avaliação da contribuição do efeito axial.....	40
Figura 14 - SCL para a avaliação da contribuição da flexão em z.	42
Figura 15 - SCLU para avaliação da contribuição da flexão em z.	42
Figura 16 - Sistema de coordenadas local unificado de barras de pórtico plano (flexão em z).	46
Figura 17 - Coordenadas globais 0XY e locais 0xy	48
Figura 18 - Barras de pórtico convergindo.....	52
Figura 19 - Condição de Equilíbrio no nó.....	53
Figura 20 - Pórtico.....	54
Figura 21 - Barra (1) e o SCLU e esforços nas extremidades.....	62
Figura 22 - Barra (2) e o SCLU e esforços nas extremidades.....	63

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	8
2. OBJETIVO	9
2.1. OBJETIVO GERAL	9
2.2. OBJETIVO ESPECÍFICO	9
3. MATERIAIS E MÉTODOS	10
4. ORGANIZAÇÃO DO TCC	10
5. ESTADO DA ARTE	11
6. SOBRE A FORMULAÇÃO E A APLICAÇÃO DO MEC EM ESTRUTURAS RETICULADAS	13
6.1. OBJETIVOS DO MEC RELATIVOS À ANÁLISE DE ESTRUTURAS RETICULADAS	13
6.2. SOBRE OS ELEMENTOS DE CONTORNO E O ELEMENTO PONTO	15
6.3. AS HIPÓTESES	17
6.3.1. Hipóteses Gerais.....	17
6.3.2. Hipóteses particulares (efeito da flexão).....	18
7. OS PROBLEMAS REAL E FUNDAMENTAL, A EQUAÇÃO INTEGRAL E A REPRESENTAÇÃO ALGÉBRICA DOS EFEITOS AXIAL E DA FLEXÃO.....	18
7.1. O EFEITO AXIAL.....	18
7.1.1. A equação diferencial governante do efeito axial (o problema real)	18
7.1.2. A equação diferencial governante do efeito axial (o problema fundamental)	19
7.1.3. A equação Integral do efeito axial	21
7.1.4. A representação algébrica do efeito axial	22
7.2. O EFEITO DA FLEXÃO EM Z.....	24
7.2.1. A equação diferencial governante do efeito da flexão em Z na Teoria de Euler-Bernoulli (o problema real)	25

7.2.2. A equação diferencial governante do efeito da flexão em z na Teoria de Euler- Bernoulli (o problema fundamental)	28
7.2.3. A equação integral da flexão em Z na teoria de Euler-Bernoulli.....	32
7.2.4. Representação Algébrica do Efeito da Flexão em Z na Teoria de Euler-Bernoulli.....	35
8. O SISTEMA DE REFERÊNCIA LOCAL UNIFICADO	38
8.1. PROBLEMAS INDEPENDENTES	38
8.1.1. O efeito axial.....	39
8.1.2. O efeito da flexão em Z	41
8.2. OS PROBLEMAS COMBINADOS.....	44
8.2.1. Pórtico plano no SCLU	45
9. O SISTEMA DE COORDENADAS GLOBAIS E A MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO.....	46
9.1. A REPRESENTAÇÃO ALGÉBRICA DE BARRA DE PÓRTICO PLANO NO SCG.....	48
9.2. REPRESENTAÇÃO ALGÉBRICA DA ESTRUTURA.....	52
10. APLICAÇÃO	54
10.1. CARACTERIZAÇÃO DO PÓRTICO DA FIG. 20	54
10.2. ANÁLISE DO PÓRTICO DA FIG. 20	55
10.3. OS RESULTADOS OBTIDOS VIA MEC	62
10.4. RESULTADOS OBTIDOS VIA F-TOOL	63
11. CONSIDERAÇÕES FINAIS	64
REFERÊNCIAS	66
ANEXOS	68

1. INTRODUÇÃO

Os elementos estruturais são formados por peças que, em geral, possuem uma ou duas dimensões predominantes. Tais elementos são divididos em três grupos: elementos de volume (sapatas, blocos de fundação, blocos de coroamento e estacas de fundação), de área (lajes, chapas e cascas) e de barras (lance de pilar e vão de vigas). O modo como estas são arrançadas pode ser denominado de sistema estrutural.

Em um sistema estrutural alguns comportamentos dependem apenas do arranjo, ficando em segundo plano o material com o qual a estrutura é feita. Além disso, expressiva é a quantidade de arranjos possíveis na concepção de estruturas reticuladas, que são agrupadas segundo o desempenho e a quantidade de graus de liberdade em cada nó. Nesse contexto, têm-se as treliças e os pórticos entendidos como padrões, que podem estar presentes tanto na forma plana como também espacial. Ainda na mesma linha, as grelhas e os pórticos enrijecidos, sendo este efeito proporcionado por paredes estruturais ou núcleos.

O tema deste trabalho gira em torno apenas dos pórticos planos (PP) e para que seja feita a sua análise é necessário estudar o efeito dos esforços axial (tração e/ou compressão) e flexão, segundo um eixo perpendicular ao plano que contém a estrutura. Essa análise, em pórticos, assim como em outras estruturas reticuladas é feita, principalmente, por um de dois modelos comumente utilizados, que diferem quanto a consideração da deformação da estrutura com o efeito do cortante.

O modelo que desconsidera esse efeito é o modelo de Euler-Bernoulli, que será utilizado como base no estudo aqui explanado, e fica representado, no caso da flexão, quando considerado o posicionamento relativo entre a normal da seção e linha neutra se a ortogonalidade é assumida. Este modelo, destoa da realidade quando desconsidera o efeito do cisalhamento no ângulo de giro resultante, verificados em vigas sob a ação de carregamento quaisquer, perceptível nos casos com moderados índices de esbeltez ($\lambda=L/h$, razão entre o comprimento e a altura da seção transversal da barra). (CRUZ, 2012)

Em geral, os modelos matemáticos dos problemas físicos são expressos em equações diferenciais e/ou integrais. Sendo uma das maneiras de construir essas equações, entendidas como governantes, por meio de métodos analíticos, contudo, algumas ressalvas devem ser dadas, com a utilização exclusivamente desta técnica (analítica), em função de estar disponível para poucos casos, tais como a análise de estruturas aporticadas prismáticas isoladas sob carregamento estático. Entretanto, quando se tem em mente estruturas mais complexas, na qual

há interação de pórticos com outros elementos estruturais em um edifício (tais como placas, paredes estruturais, núcleos de rigidez, etc.), as soluções analíticas não mais estão disponíveis, passando a exigir procedimentos aproximados, para alcançar o resultado. Esses procedimentos caracterizam os métodos numéricos e de forma mais específica, envolvendo o conteúdo do trabalho em questão, O Método dos Elementos de Contorno (MEC).

O processo vai partir de modelos matemáticos estabelecidos pela Teoria da Elasticidade, para solução dos problemas envolvendo corpos de materiais elásticos, para isso, equações diferenciais ou integrais são estabelecidas. Estas equações incorporam princípios da Mecânica do Contínuo usualmente formulada na linguagem vetorial ou tensorial, que podem representar o corpo em equilíbrio parado e na configuração indeformada assim como em equilíbrio em movimento, sendo dividida em estática e dinâmica. (CRUZ; 2012)

A elastoestática quando considerada as relações constitutivas dos materiais e a situação da estrutura para verificação do equilíbrio, têm-se a presença de subgrupos, que são: Elastoestática linear e Elastoestática não-linear. A teoria da elasticidade linear, mencionada anteriormente, só pode ser aplicada e dessa forma desenvolvida, quando a linearidade física e geométrica pode ser considerada, caso contrário, tal consideração não pode ser feita. Cabe então neste momento informar que os problemas decorrentes da Eletrodinâmica e da Elastoestática Não-linear estão fora do escopo deste trabalho. Portanto, o material atenderá a lei de Hooke para tensão normal e tensão de cisalhamento, podendo ser analisada em sua configuração indeformada, que consiste na aplicação da hipótese de pequenos deslocamentos e pequenas deformações.

2. OBJETIVO

2.1. OBJETIVO GERAL

Análise estática dos efeitos de momento fletor e do efeito axial em um pórtico plano, por meio da representação algébrica da estrutura pelo MEC, tomando como base a teoria de Euler-Bernoulli e atendendo a lei de Hooke linear, para tensões normais e de cisalhamento, com a finalidade não só de aplicação da sua formulação, como também de divulgação do método, principalmente no ambiente da graduação.

2.2. OBJETIVO ESPECÍFICO

- Apresentar os problemas real e fundamental do efeito axial e do efeito da flexão em Z;

- Apresentar a técnica para obtenção da representação integral e da representação algébrica do efeito axial e do efeito da flexão em Z;
- Apresentar a técnica para obtenção da representação algébrica no sistema de coordenadas local unificado do efeito axial e do efeito da flexão em Z;
- Apresentar a técnica para obtenção do sistema algébrico no sistema de coordenadas globais do efeito axial e do efeito da flexão em Z;
- Apresentar a técnica para obtenção da representação algébrica da estrutura (pórtico plano);
- Analisar pórticos planos.

3. MATERIAIS E MÉTODOS

Tendo em vista que o trabalho envolve essencialmente uma pesquisa bibliográfica, para atingir os objetivos propostos, foi realizada uma revisão bibliográfica sendo consultados trabalhos que tratam da análise estática de estruturas reticuladas via MEC.

Dentre os trabalhos consultados, alguns foram selecionados de modo a possibilitar uma vista panorâmica sobre o estado da arte do tema enfocado neste TCC. Estes trabalhos são comentados ou apenas citados no item 5 intitulado “Estado da arte”.

4. ORGANIZAÇÃO DO TCC

Item 1 – INTRODUÇÃO

Item 2 – OBJETIVOS

Item 3 – MATERIAIS E MÉTODOS

Item 4 – ORGANIZAÇÃO DO TCC

Item 5 – ESTADO DA ARTE

Item 6 – SOBRE A FORMULAÇÃO DO MEC PARA ESTRUTURAS RETICULADAS

Item 7 - OS PROBLEMAS REAL E FUNDAMENTAL, A EQUAÇÃO INTEGRAL E A REPRESENTAÇÃO ALGÉBRICA DO EFEITO AXIAL E DO EFEITO DA FLEXÃO

Item 8 – O SISTEMA DE REFERÊNCIA LOCAL UNIFICADO

Item 9 – O SISTEMA DE COORDENADAS GLOBAIS E A MATRIZ DE

ROTAÇÃO

Item 10 – APLICAÇÃO

Item 11 – CONSIDERAÇÕES FINAIS

REFERENCIAS

ANEXO

No item 1 faz-se uma abordagem relativa às estruturas reticuladas em geral e em particular aos pórticos planas cuja solução é um dos objetivos específicos deste TCC.

No item 2 são explicitados os objetivos gerais e específicos do trabalho.

Os itens 3, 4 e 5 apresentam a metodologia utilizada e a organização do TCC, fazendo também uma abordagem relativa ao estado da arte sobre o tema.

No item 6 são apresentadas as etapas do desenvolvimento da teoria do MEC, algumas funções especiais utilizadas, a definição do elemento ponto etc.

O item 7 está organizado de modo a apresentar o efeito axial e da flexão em Z, os problemas real e fundamental, a equação integral e a obtenção da representação algébrica para barra de pórtico plano.

Nos itens 8 e 9, apresentam-se, respectivamente, a obtenção do sistema de coordenadas locais unificadas e o sistema de coordenadas globais com a matriz de rotação.

Enquanto o item 10 traz uma aplicação, o último item, o 11, é utilizados para as considerações finais.

5. ESTADO DA ARTE

Conforme Livesley (1975), ideias presentes nos documentos de Bendixen (1914) e Ostenfeld (1926), abordavam a utilização do cálculo matricial em estrutura. Contudo, não recebeu a devida atenção na época em função das dimensões relacionadas ao sistema de equações, que ao possuir grandes proporções demandavam bastante tempo e paciência, para alcançar as devidas soluções.

Tal atividade, por mais simples que se apresentava em relação a complexidade da estrutura, proporcionava um trabalho árduo para o engenheiro calculista, que precisava desenvolver uma grande quantidade de cálculos de forma manual ou por meio do auxílio de máquinas calculadoras simples.

Esse empecilho perdurou por mais alguns anos, tendo os primeiros passos da utilização Matricial do Método dos Deslocamentos registrados no ano de 1944, ainda conforme Livesley (1975), essa utilização, feita por Kron, detinha algumas restrições. Estas limitavam a análise de estruturas simples, cuja as equações não fossem representativas numericamente e que proporcionassem equação matricial com matrizes quadradas e de pequena ordem.

No entanto, com a chegada da era da informática, em meados de 1950, e com o entendimento da praticidade na formulação matricial, para a automação da análise estrutural, grande foi o empenho da comunidade para o desenvolvimento das técnicas matemáticas. Como resultado, do empenho dos engenheiros, vieram o Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método dos Elementos de Contorno (MEC).

Ao longo das últimas décadas se observa uma evolução do MEC, muito em função do aumento significativo no número de publicações. Segundo (CHENG, 2005), houve um grande aumento nessa área na década de 1990, seguida pelo começo dos anos 2000 com um número entre 700 a 800 artigos publicados. Em contrapartida, o número de publicações, no mesmo período, para a técnicas mais difundidas, como o Método dos Elementos Finitos e o Método das Diferenças Finitas, giraram em torno de 5000 e 1400 publicações anuais, respectivamente.

Essa diferença vai de encontro a versatilidade envolvida na aplicação do MEF, que se encontra plenamente estabelecida, com aplicação nas mais diversas estruturas, sejam elas reticulares e volumétricas. Bem como, nos mais diversos regimes, estáticos ou dinâmicos como bem atesta a leitura de (QUEIROZ, 2010) e (MACKERLE, 2000).

O MEC ganhou maior engajamento a partir da década de 1970, recebendo a atual denominação após a publicação do trabalho de Brebbia e Dominguez (1977). O método consiste na utilização do princípio de minimização dos erros, podendo fazer uso, assim como no presente trabalho, da Técnica do Resíduo Ponderado.

Esta técnica, quando devidamente aplicada, proporciona às equações diferenciais governantes do problema real, ou seja, o problema físico que se deseja ter uma discretização, uma maior simplificação. Esses modelos simplificados, que representam o problema real, em geral são EDOs e EDPs, que são definidas em um domínio e que aguardam por suas devidas soluções.

As soluções em geral não são tão simples de serem conseguidas e muitas das vezes indisponíveis. Sendo necessário a discretização do meio contínuo e sistematização do problema

discreto, que a partir de diversas idealizações e fazendo uso de um ou mais métodos numéricos combinados, passam a fornecer equações algébrica passíveis de serem utilizadas para diversos fenômenos, fornecendo valores aproximados dos estabelecidos no problema real.

6. SOBRE A FORMULAÇÃO E A APLICAÇÃO DO MEC EM ESTRUTURAS RETICULADAS

6.1. OBJETIVOS DO MEC RELATIVOS À ANÁLISE DE ESTRUTURAS RETICULADAS

Com a simplificação do problema real, resultando em modelos capazes de representar o campo de interesse, são estabelecidos modelos matemáticos, em geral, escritos a partir de equações diferenciais definidas em um domínio, dando início ao desenvolvimento das equações diferenciais equivalentes.

A filosofia do MEC entra com o objetivo de transformar essas EDs em equações integrais (EIs), que representaram algebricamente os efeitos analisados. Para esse fim, algumas etapas devem ser transpostas para alcançar as soluções numéricas, as principais são mostradas a seguir:

Etapas (a): A discretização e aproximação da geometria e das variáveis $\{u\}$ e $\{p\}$

Em se tratando de estruturas reticuladas o processo de discretização pelo método dos elementos de contorno utiliza um número finito de pontos de contorno, que são em geral os nós da estrutura.

Etapas (b): Representação algébrica de cada barra e da estrutura

Com a definição do contorno da estrutura de forma a ter um número n de elementos, com uma quantidade p de pontos nodais (nós funcionais), a representação da integral para o deslocamento, Eq. (6.1), é dada por:

$$u_i(s) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(q, s) u_j(q) d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(q, s) p_j(q) d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ij}^*(q, s) b_i(q) d\Omega \quad (6.1)$$

Com esta Eq. (6.1) são obtidas as representações algébricas, uma para cada barra, já referidas ao sistema de coordenadas globais. Nestas equações devem ser impostas as condições de compatibilidade.

Etapas (c): Sistematização algébrica para todos os nós do contorno

Resolvidas as integrais da Eq. (6.1) e escrevendo-as para pontos de colocação s no contorno, tem-se:

$$[C]\{U\} + [\hat{H}]\{U\} = [G]\{P\} + [D]\{B\} \quad (6.2)$$

onde as matrizes $[\hat{H}]$, $[G]$ e $[D]$ vêm, respectivamente, dos somatórios das integrais sobre cada elemento e , definidos na Eq. (6.1).

O sistema indicado na Eq. (6.2) pode ser reagrupado como:

$$[H]\{U\} = [G]\{P\} + [D]\{B\} \quad (6.3)$$

onde: $[H] = [C][\hat{H}]$.

Antes da solução do problema, condições de contorno devem ser impostas na Eq. (6.3), resultando em:

$$[A]\{V_D\} = \{V_I\} \quad (6.4)$$

onde: $[A]$ é a matriz quadrada de ordem igual à 3 vezes ao número de nós da malha, cheia e não simétrica, que contém elementos das matrizes $[H]$ e $[G]$ devidamente trocados (troca de colunas) para agrupar todas incógnitas do lado esquerdo da igualdade, sejam elas deslocamentos ou forças de superfície; $\{V_D\}$ é o vetor das incógnitas, deslocamentos e forças de superfícies; e $\{V_I\}$, o vetor independente formado pela multiplicação dos coeficientes das matrizes $[H]$ e $[G]$ relativos às componentes prescritas de deslocamentos e forças de superfície, somando-se, ainda, valores da parcela das forças de volume.

A solução do sistema indicado na Eq. (6.4) é simples, podendo ser representada por:

$$\{V_D\} = [A]^{-1} \{V_I\} \quad (6.5)$$

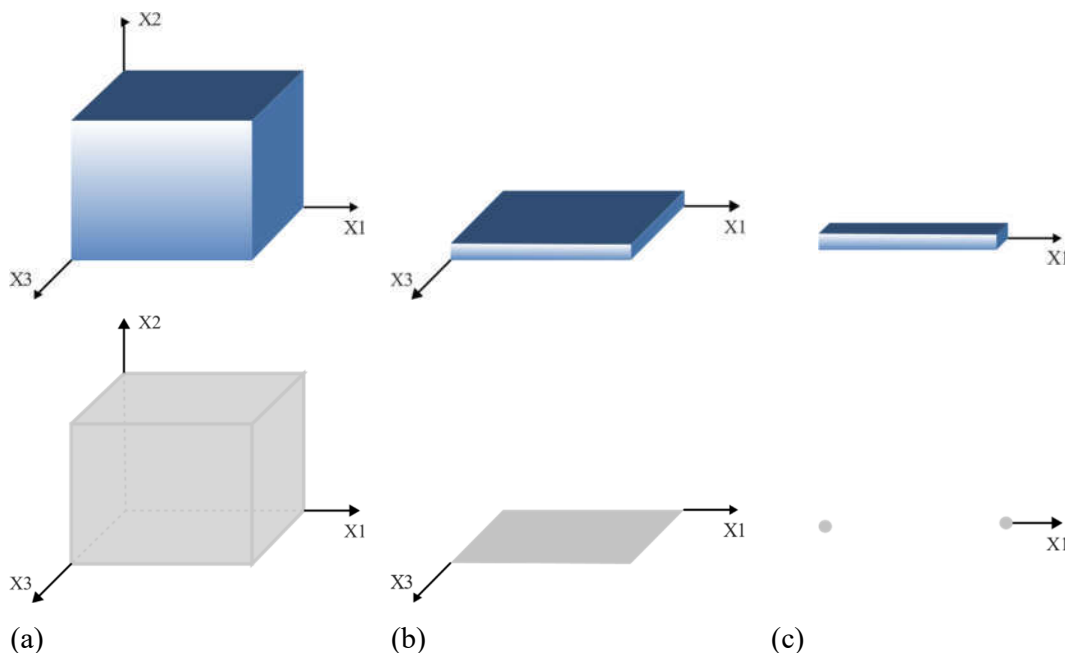
6.2. SOBRE OS ELEMENTOS DE CONTORNO E O ELEMENTO PONTO

Os elementos de contorno têm com relação ao seu corpo que contornam as dimensões diminuídas de uma unidade, para proporcionar compatibilidade geométrica. O que resulta em elementos de contorno bidimensionais (2D), unidimensional (1D) e pontual (0D).

Dessa maneira ao analisar um bloco de fundação - figura 1a, por exemplo, que se apresenta como um corpo tridimensional, é a sua área superficial que será aproximada por elementos de superfície. Já o contorno de uma laje delgada - figura 1b, que é representado por uma área, a área da sua face, tem o contorno compatibilizado formado por um conjunto de segmentos que a limitam. E por último o contorno de uma barra - figura 1c, é representado por um par de pontos, identificando suas extremidades.

Considerando, contudo, para fins do trabalho em questão que nas análises a serem desenvolvidas serão utilizados apenas elementos de contorno de pórticos planos, ou seja, os pontos que definem as extremidades de cada barra, não serão feitas referências à classificação dos elementos de contorno quanto as funções interpoladoras utilizadas para suas definições.

Figura 1 – (a), (b) e (c): Corpo tridimensional; bidimensional e unidimensional com seus respectivos contornos: bidimensional, unidimensional e com dimensão zero.



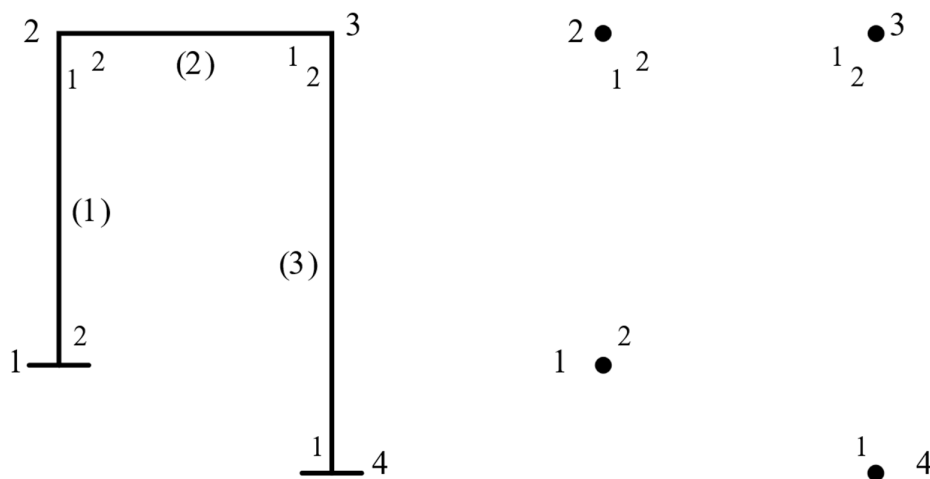
Fonte: CRUZ, JMF; CRUZ, LC e FREITAS JUNIOR, 2022 (no prelo)

Quando o domínio do corpo é formado por um conjunto de segmentos unidimensionais tem-se uma estrutura reticulada. Cada uma das barras de um corpo reticulado terá elementos de contorno pontuais em suas extremidades, vide Figura 2.

O elemento entendido como Elemento Ponto (EP), surge para a discretização do contorno dos elementos de corpos reticulados. Uma vez que a dimensão dos elementos de contorno é em uma unidade menor que a dimensão do corpo em estudo, tendo, portanto, dimensão zero (0D).

Uma característica de se trabalhar com esse tipo de elemento gira em torno da ausência de pontos internos (pontos do domínio do elemento), cabendo assim a não utilização de funções interpoladoras nem coordenadas homogêneas. Estas proporcionam mecanismos facilitadores para a integração numérica e para a obtenção das coordenadas dos deslocamentos e das forças superficiais, em qualquer dos pontos do elemento de contorno. Dessa maneira, as soluções obtidas para os nós da malha, ou melhor, para os nós geométricos do corpo reticulado analisado, coincidem com os valores exatos.

Figura 2 - Estruturas de barras e o elemento de contorno 0D.



Fonte: CRUZ, 2012.

O elemento de contorno (EP), Figura 2, de aplicação pouco comum nos livros texto sobre o MEC, que em geral tratam apenas de elementos de contorno em 1D e em 2D, tem sido utilizado raramente em trabalhos como o de Antes (2003), Antes e col. (2004), Souza e Mendonça (2008), Cruz e col. (2010), Cruz (2012), etc.

A transformação das equações integrais discretizadas é feita para alcanças as equações algébricas, que representam de forma aproximada o modelo. Estas são conseguidas por meio da resolução das integrais envolvidas.

As soluções, por sua vez, são difíceis de serem alcançadas, dada a complexidade das funções a serem integradas. Caso esse, que justifica a utilização de esquemas numéricos de integração, para que seja estabelecido um procedimento padrão e eficiente de obtenção dessas matrizes $[h]$ e $[g]$.

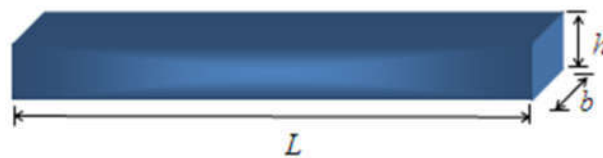
6.3. AS HIPÓTESES

Nesse subitem serão apresentadas as hipóteses relacionadas com: a) Geometria da barra: permitindo a consideração de um objeto tridimensional, que seria uma barra, como elemento de linha (unidimensional), como também hipóteses que garantam a manutenção da forma e das dimensões da seção transversal; b) Propriedade dos materiais: compreende o comportamento do material; c) Propriedades associadas à análise estática.

6.3.1. Hipóteses Gerais

- i) O problema tridimensional pode ser simplificado ao espaço unidimensional, desde que a maior de suas dimensões, que no caso é o comprimento L , seja suficiente maior que as outras duas dimensões do corpo, ou seja b e h da seção transversal. Como mostrado na figura 3:

Figura 3 - Barra (elemento estrutural unidimensional).



Fonte: CRUZ, 2012.

- ii) A barra deve ter seção transversal uniforme, ou seja, a barra deve ser prismática;
- iii) Quando no regime estático, as cargas devem ser aplicadas de modo que os efeitos da energia cinética sejam desprezíveis;
- iv) O material deve ser homogêneo e isotrópico;

- v) O material deve ser elasto-linear: a elasticidade implica que em um ciclo de carga descarga, não haverá deformação residual;
- vi) A planicidade das seções transversais deve ser mantida durante o processo de deformação;
- vii) O efeito de Poisson é desprezado;
- viii) Os campos de deslocamentos e deformações devem ser pequenos (suaves).

6.3.2. Hipóteses particulares (efeito da flexão)

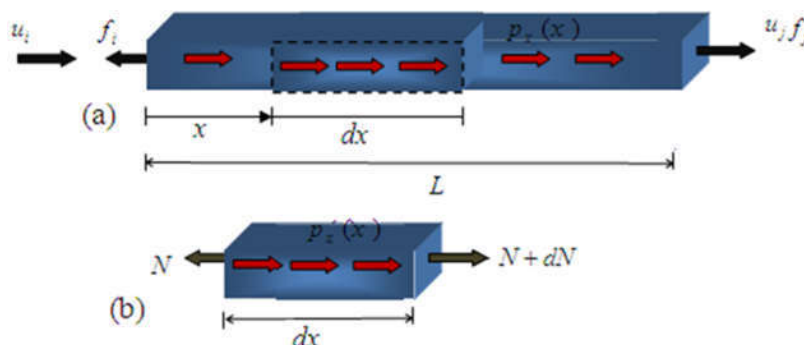
A seguinte consideração diz respeito a ortogonalidade da seção transversal com relação ao eixo longitudinal da barra, que conforme a Teoria de Euler-Bernoulli se mantém indeformável, pois desconsidera o efeito do cisalhamento no ângulo de giro.

7. OS PROBLEMAS REAL E FUNDAMENTAL, A EQUAÇÃO INTEGRAL E A REPRESENTAÇÃO ALGÉBRICA DOS EFEITOS AXIAL E DA FLEXÃO

7.1. O EFEITO AXIAL

Uma barra prismática com carregamento distribuído $p(x)$ conforme a Figura 4(a), com sua análise é possível escrever a equação diferencial governante do problema. Para tanto é necessário extrair um elemento infinitesimal da barra de comprimento dx , como representado na Figura 4(b).

Figura 4 - Barra sob efeito axial



Fonte: EXTRAÍDA CRUZ, 2012.

7.1.1. A equação diferencial governante do efeito axial (o problema real)

Com o balanço de forças no elemento de barra, presente na Figura 4 (b), tem-se:

$$dN + p_x(x)dx = 0 \quad (7.1 \text{ a})$$

$$\frac{dN}{dx} = -p_x(x) \quad (7.1 \text{ b})$$

No qual, N ou $N(x)$ representa o esforço normal aplicado e $p_x(x) = p_x$ o carregamento aplicado.

Da relação força deformação tem-se:

$$N = EA \frac{du}{dx} \quad (7.2)$$

Com u (ou $u(x)$) retratando o deslocamento segundo eixo x da barra e as constantes E e A , respectivamente, o módulo de elasticidade do material constituinte da barra e a sua seção transversal.

Igualando a derivada da Eq. (7.2) com a Eq. (7.1), obtém-se a equação diferencial governante do problema real em estudo, que se encontra contido no problema padrão da área, problema fundamental, tendo como domínio Ω e o contorno Γ .

$$EA \frac{d^2u}{dx^2} + p_x(x) = 0 \quad (7.3)$$

7.1.2. A equação diferencial governante do efeito axial (o problema fundamental)

Por analogia ao problema real, representado na Eq. (7.3), o equilíbrio do problema fundamental pode ser assim expresso em um domínio infinito Ω^* e de contorno Γ^* .

$$EA \frac{d^2u^*(x, \hat{x})}{dx^2} = -p_x^*(x, \hat{x}) \quad (7.4)$$

Sendo: $p_x^*(x, \hat{x}) = \delta(x, \hat{x})$ a função delta de Dirac, definido no anexo deste trabalho.

Ainda, por analogia ao problema real, obtém-se a relação força-deslocamento do problema fundamental, a partir da Eq. (7.2):

$$N^*(x, \hat{x}) = EA \frac{du^*(x, \hat{x})}{dx} \quad (7.5)$$

Uma das soluções possíveis para a Eq. (7.4) é:

$$u^*(x, \hat{x}) = \alpha r + \beta \quad (7.6)$$

Sendo: $r = |x - \hat{x}|$

Se a Eq. (7.4) for integrada no domínio e utilizada a propriedade do Delta de Dirac, tem-se:

$$\left[EA \frac{du^*(x - \hat{x})}{dx} \right]_0^L = -1 \quad (7.7)$$

As derivadas da Eq. (7.6) são:

$$u^*(x - \hat{x}) = \begin{cases} \alpha, & \text{se } x - \hat{x} \geq 0 \\ -\alpha, & \text{se } x - \hat{x} < 0 \end{cases}$$

Ao serem levadas para a Eq. (7.7) resulta em $EA \frac{du^*(L - \hat{x})}{dx} - EA \frac{du^*(0 - \hat{x})}{dx} = -1$, com $\alpha = -12EA$. Com isso, o valor da solução da Eq. (7.6), fica:

$$u^*(x - \hat{x}) = -\frac{1}{2EA} r + \beta \quad (7.8)$$

Como o valor de β pode ser tomado arbitrariamente, lhe atribuindo valor nulo, tem-se:

$$u^*(x, \hat{x}) = -\frac{1}{2EA} r = \frac{1}{2EA} |x - \hat{x}| \quad (7.9)$$

Substituindo a Eq. (7.9) na segunda parcela da Eq. (7.5), obtém-se a expressão para a força normal do problema fundamental.

$$N^*(x - \hat{x}) = EA u^*(x - \hat{x}) = -\frac{1}{2} \text{sgn}(x - \hat{x}) \quad (7.10)$$

Sendo: sgn a função sinal, definido no anexo desse trabalho.

7.1.3. A equação Integral do efeito axial

Com o Problema de Valor de Contorno (PVC) definido pelos valores de contorno indicados nas Eqs. (7.11 (a)-(d)), para as barras representadas na Figura 4 (a) e pela Eq. (7.3). A qual aplica-se a Técnica do Resíduo Ponderado (TRP), obtendo, dessa forma a Eq. (7.12):

$$\begin{aligned} u(x=0) &= u_i \\ u(x=L) &= u_j \\ f_x(x=0) &= f_i \\ f_x(x=L) &= f_j \end{aligned} \quad (7.11 \text{ a-d})$$

$$\int_0^L [EA \frac{d^2 u}{dx^2} + p_x(x)] u^*(x, \hat{x}) dx = 0 \quad (7.12)$$

Sendo: $u^*(x, \hat{x})$ a função ponderadora obtida justamente do problema fundamental e que representa o deslocamento, também conhecida por função peso. Com os valores de x , $\hat{x}$ e $f_x(x)$ retratando, respectivamente, a coordenada do ponto campo, do ponto fonte e as forças de corpo.

Integrando por partes a Eq. (7.12), tem-se:

$$\left[EA \frac{du}{dx}(x) u^*(x, \hat{x}) \right]_0^L - \int_0^L \frac{du}{dx} EA u^*(x, \hat{x}) + p_x(x) u^*(x, \hat{x}) dx = 0 \quad (7.13)$$

Fazendo as devidas substituições da relação força-deslocamento, abordado anteriormente na Eq. (7.2), e substituindo esses valores na Eq. (7.13), obtém-se:

$$[N(x) u^*(x, \hat{x})]_0^L - \int_0^L \left[\frac{du(x)}{dx} N^*(x, \hat{x}) - p_x(x) u^*(x, \hat{x}) \right] dx = 0 \quad (7.14)$$

Com a resolução da integral, fazendo uso da integração por partes, na Eq. (7.14) e substituindo a Eq. (7.5), obtém-se:

$$[N(x) u^*(x, \hat{x})]_0^L - [u(x) N^*(x, \hat{x})]_0^L + \int_0^L [u(x) N^*(x, \hat{x}) + p_x(x) u^*(x, \hat{x})] dx = 0 \quad (7.15)$$

Substituindo a Eq. (7.5), na Eq. (7.4), tem-se:

$$\frac{dN^*}{dx}(x, \hat{x}) = EA \frac{d^2 u^*}{dx^2}(x, \hat{x}) = -\delta^*(x, \hat{x}) \quad (7.16)$$

Com a aplicação da função delta de Dirac na Eq. (7.15), após a apropriada substituição da Eq. (7.16) na Eq. (7.15), obtém-se

$$u(\hat{x}) - [N(x)u^*(x, \hat{x})]_0^L + [u(x)N^*(x, \hat{x})]_0^L - \int_0^L [p_x(x)u^*(x, \hat{x})]dx = 0 \quad (7.17)$$

Já para pontos colocados no domínio, tem-se:

$$u(\hat{x}) - u(0)N^*(0, \hat{x}) + u(L)N^*(L, \hat{x}) + N(0)u^*(0, \hat{x}) - N(L)u^*(L, \hat{x}) - \int_0^L [p_x(x)u^*(x, \hat{x})]dx = 0 \quad (7.18)$$

A completa elucidação da equação integral, presente na Eq. (7.18), é obtida com a aquisição das forças de corpo, ou melhor, com a obtenção da integral de domínio que finaliza o primeiro membro dessa equação. Além desses, para a completa definição é necessário os valores das soluções fundamentais.

7.1.4. A representação algébrica do efeito axial

Quando é feita a colocação do ponto fonte nas extremidades da barra, ou seja, no contorno, quando: $\hat{x} \rightarrow 0 = \lim_{\xi \rightarrow 0}(0 + \xi)$ e $\hat{x} \rightarrow L = \lim_{\xi \rightarrow 0}(L - \xi)$, tem-se o seguinte resultado na equação anterior (Eq. (7.18)):

Para $\hat{x} \rightarrow 0$:

$$u(0) - u(0)N^*(0, 0 + \xi) + u(L)N^*(L, 0 + \xi) + N(0)u^*(0, 0 + \xi) - N(L)u^*(L, 0 + \xi) = 0 \quad (7.19)$$

Para $\hat{x} \rightarrow L$:

$$u(L) - u(0)N^*(0, L - \xi) + u(L)N^*(L, L - \xi) + N(0)u^*(0, L - \xi) - N(L)u^*(L, L - \xi) = 0 \quad (7.20)$$

Fazendo a mudança para notação matricial, das duas equações anteriores (Eq. (7.19) e (7.20)), tem-se:

$$\begin{Bmatrix} u(0) \\ u(L) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -N^*(0,0+\varepsilon) & N^*(L,0+\varepsilon) \\ -N^*(0,L-\varepsilon) & N^*(L,L-\varepsilon) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(0) \\ u(L) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -u^*(0,0+\varepsilon) & u^*(L,0+\varepsilon) \\ -u^*(0,L-\varepsilon) & u^*(L,L-\varepsilon) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N(0) \\ N(L) \end{Bmatrix} \quad (7.21)$$

onde as forças de corpo são:

$$f_{xi} = f_x(0) = \int_0^L p_x(x) u^*(x,0) dx \quad (7.22 \text{ a})$$

$$f_{xj} = f_x(L) = \int_0^L p_x(x) u^*(x,L) dx \quad (7.22 \text{ b})$$

Por meio das Eq. (7.9) e (7.10) é feito o cálculo das soluções fundamentais, para cada uma das extremidades, devido a aplicação da fonte em cada uma delas. Para isso tem-se:

a) Para a fonte na extremidade i

b) Para a fonte na extremidade j

$$u^*(0,0+\xi) = 0 \quad (7.23 \text{ a}) \quad u^*(0,L-\xi) = -\frac{L}{2EA} = -\beta_x \quad (7.23 \text{ e})$$

$$u^*(L,0+\xi) = -\frac{L}{2EA} = -\beta_x \quad (7.23 \text{ b}) \quad u^*(L,L-\xi) = 0 \quad (7.23 \text{ f})$$

$$N^*(0,0+\xi) = 1/2 \quad (7.23 \text{ c}) \quad N^*(0,L-\xi) = 1/2 \quad (7.23 \text{ g})$$

$$N^*(L,0+\xi) = -1/2 \quad (7.23 \text{ d}) \quad N^*(L,L-\xi) = -1/2 \quad (7.23 \text{ h})$$

Com, α_x e β_x , representando simplificações indicadas a seguir:

$$\alpha_x = -\frac{1}{2} \quad (7.24 \text{ a})$$

$$\beta_x = \frac{L}{2EA} \quad (7.24 \text{ b})$$

As forças de corpo, são obtidas substituindo a Eq. (7.16) nas Eqs (7.22 a e b). Ficando com:

$$f_{xi} = f_x(0) = \frac{1}{2EA} \int_0^L p_x(x) |x| dx = \frac{p_x L^2}{4EA} \quad (7.25 \text{ a})$$

$$f_{xj} = f_x(L) = \frac{1}{2EA} \int_0^L p_x(x) |x-L| dx = \frac{p_x L^2}{4EA} \quad (7.25 \text{ b})$$

Com a substituição na Eq. (7.21), as igualdades indicadas nas Eq. (7.23 a-h) e Eq. (7.25 a-b), obtém-se a seguinte representação algébrica do esforço axial:

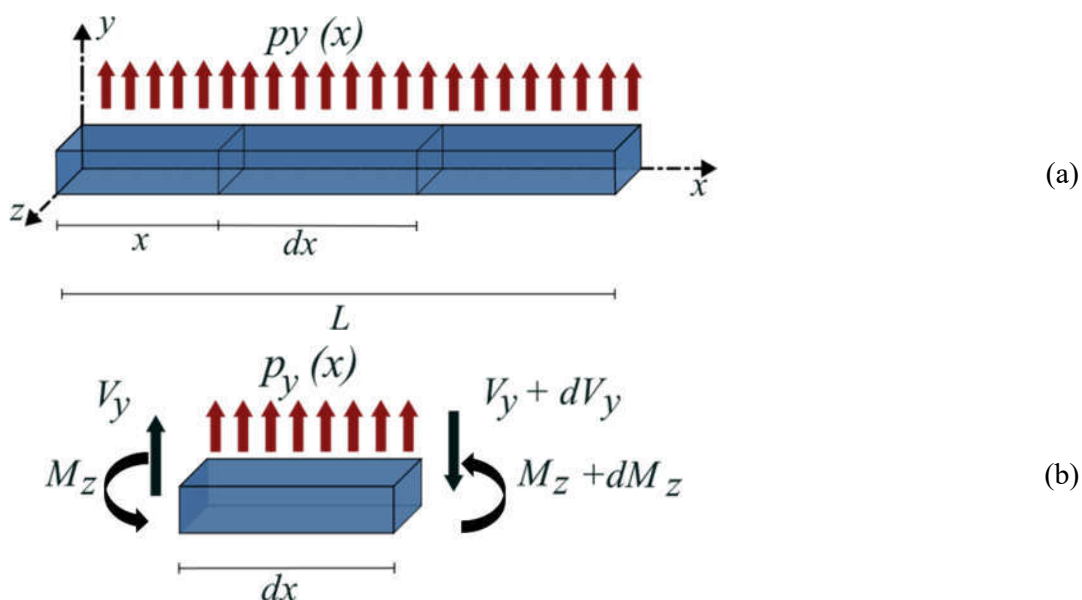
$$\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \alpha_x \\ \alpha_x & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\beta_x \\ \beta_x & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_{xi} \\ f_{xj} \end{Bmatrix} \quad (7.26 \text{ a})$$

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{L}{2EA} \\ \frac{L}{2EA} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_{xi} \\ f_{xj} \end{Bmatrix} \quad (7.26 \text{ b})$$

7.2. O EFEITO DA FLEXÃO EM Z

Para iniciar o estudo tem-se uma barra prismática sob a ação do carregamento distribuído no plano vertical, que nesse caso se trata do plano xy conforme Fig. 5 a, sendo I_z e E , respectivamente, o momento de inércia em torno do eixo z e o módulo de Yung do material. Em posse disso é possível escrever a EDO governante do problema, necessitando, contudo, o isolamento de um elemento da barra de comprimento dx para análise, como mostrado na Fig. 5 b.

Figura 5 - Barras submetidas à flexão, com carregamento no plano xy .



Fonte: ADAPTADA DE CRUZ, 2012.

7.2.1. A equação diferencial governante do efeito da flexão em Z na Teoria de Euler-Bernoulli (o problema real)

Com o balanceamento das forças atuantes no elemento dx de barra, visto anteriormente na Fig. 5 b, pode ser transcrito conforme a seguinte expressão: $V_y + p_y(x)dx - (V_y + dV_y) = 0$, ou:

$$\frac{dV_y}{dx} = -p_y(x) \quad (7.27)$$

Sendo: V_y é o esforço cortante em função do carregamento que é aplicado.

Com o balanceamento de momento, tendo em mente a seção mais à direita do elemento, tem-se:

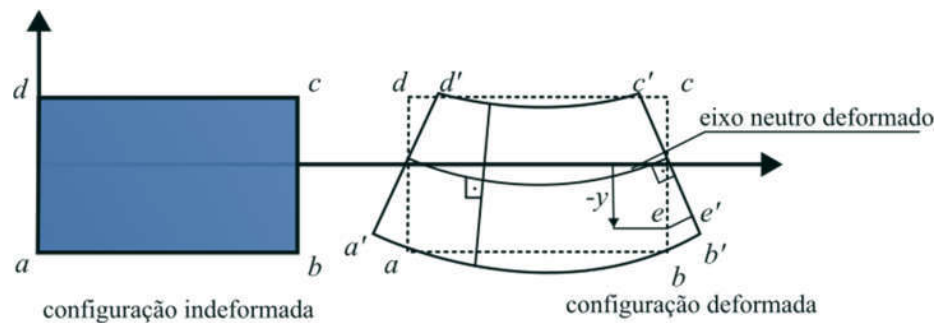
$$M_z + V_y dx + p_y(x)dx^2/2 - (M_z + dM_z) = 0. \quad (7.28)$$

Sendo M_z o momento decorrente do carregamento que é aplicado. Com isso e desconsiderando o termo infinitesimal de ordem superior, obtém-se:

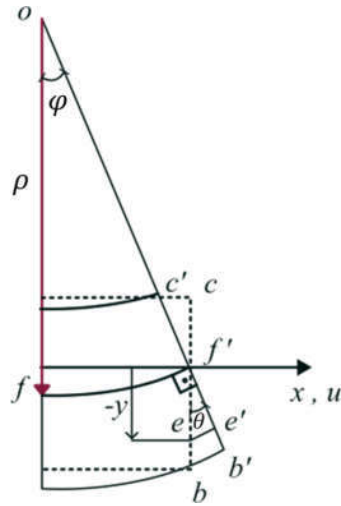
$$\frac{d^2 M_z}{dx^2} + p_y(x) = 0 \quad (7.29)$$

Tomando como base a teoria de Euler-Bernoulli, a qual diz que a ortogonalidade entre a seção transversal e o eixo longitudinal da barra é mantida, ou seja, são desprezadas as deformações decorrentes da ação do cortante, cuja distorção física é nula, $\gamma_{xy} = 0$. Vide Fig. 6.

Figura 6 - Elemento para o estudo da flexão no plano xy.



Fonte: ADAPTADA DE CRUZ, 2012.

Figura 7 - Geometria da flexão.

Fonte: ADAPTADA DE MENDONÇA, 2009.

A partir da geometria representada na Fig. 6 é possível concluir que: $ee' = -yd\theta$ e $ff' = \rho d\theta$.

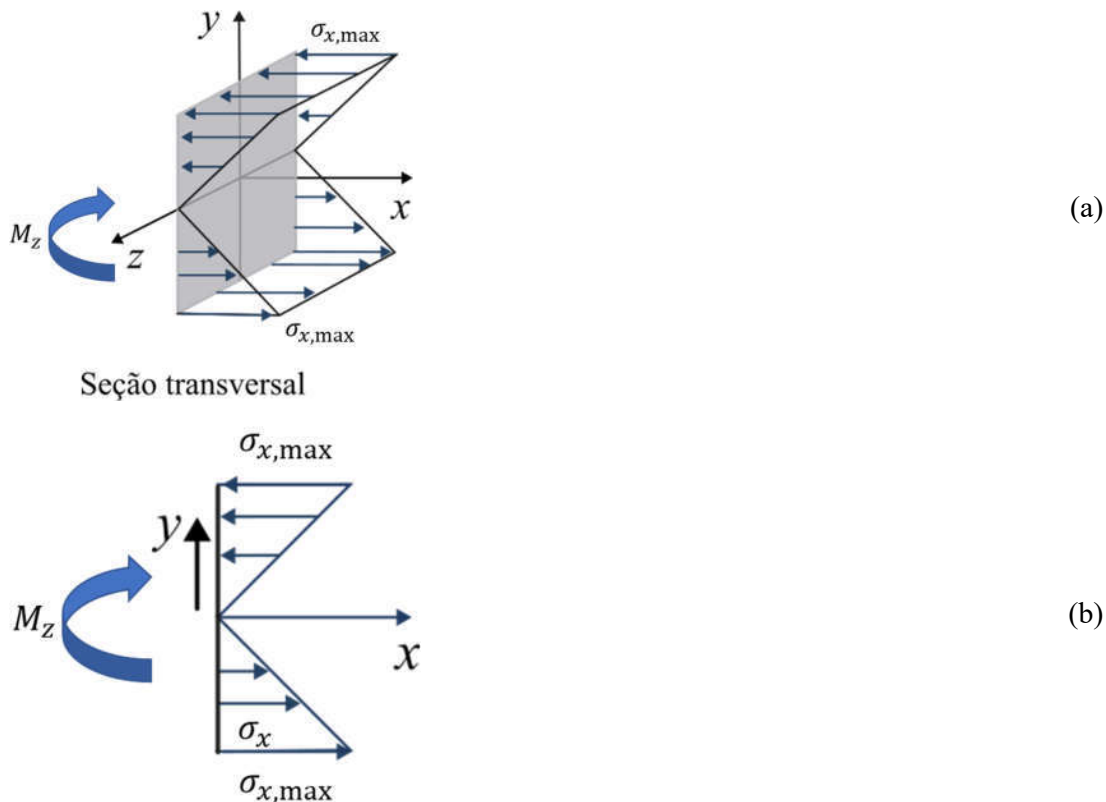
Sendo, portanto, $ff'' = -y/\rho$. Com isso, tem-se:

$$\varepsilon_x = \frac{ee'}{ff'} = -\frac{y}{\rho} \quad (7.30)$$

Sendo: ε_x a deformação unitária segundo o eixo x ; y a distância da camada da barra analisada ao eixo centroidal x , ρ é o raio de curvatura do eixo deformado da barra e φ é o ângulo de rotação da seção transversal em torno do eixo z . A Eq. (7.30) relaciona a deformação sofrida pela elementos da barra com a curvatura, conhecida como deformação-curvatura.

Com o coeficiente de Poisson, nesse caso, é considerado nulo, quando se tem em mente a deformação axial indicada na equação reológica conhecida como lei de Hooke linear. Esta fórmula, quando aplicada para materiais elásticos lineares e isotrópicos, resulta $\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$. Esta expressão representa a lei de Hooke linear aplicável nas análises em 1D. que é usualmente expressa como:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x \quad (7.31)$$

Figura 8 - Tensão na flexão.

Fonte: ADAPTADA DE SCHREYER, RAMM E WAGNER, 1967.

Da equação de equilíbrio do momento da seção (vide Fig. 8), $M_z = \int_A \sigma_x y dA$, na qual são substituídas primeiramente na Eq. (7.31) e em um segundo momento na Eq. (7.30), obtendo-se:

$$M_z = \int_A E \left(-\frac{y}{\rho} \right) y dA \quad (7.32)$$

Sendo: $I_z = \int_A y^2 dA$ o momento de inércia da seção transversal em torno do eixo z e a curvatura do eixo deformado da barra $\frac{1}{\rho} = \frac{v''(x)}{[1 + v'^2(x)]^{3/2}}$, que apoiado sobre as hipóteses de pequenos deslocamentos e pequenas deformações, fica representado da seguinte forma: $\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 v(x)}{dx^2}$. Com o acréscimo dessa informação o equilíbrio do momento da seção, representado na Eq. (7.31), passa a ser escrita como:

$$M_z = \int_A E \left(-\frac{y}{\rho} \right) y dA \quad (7.33)$$

De acordo com a Eq. (7.28) a derivada da Eq. (7.33) é igual ao esforço cortante aplicado na seção, ou seja:

$$\frac{d^3 v}{dx^3} = -\frac{V_y}{EI_z} \quad (7.34)$$

Substituindo a Eq. (7.33) na Eq. (7.29), obtém-se a Eq. (7.35), que é a EDO governante do problema real de flexão sob a hipótese de Euler-Bernoulli.

$$EI_z \frac{d^4 v}{dx^4} = p_y(x) \quad (7.35)$$

7.2.2. A equação diferencial governante do efeito da flexão em z na Teoria de Euler-Bernoulli (o problema fundamental)

Por analogia a Eq. (7.35) que representa o a equação diferencial do problema real pode ser escrita de forma a traduzir o problema fundamental. Assim, tem-se:

$$EI_z \frac{dv^{*4}(x, \hat{x})}{dx^4} - p_y^*(x, \hat{x}) = 0 \quad (7.36)$$

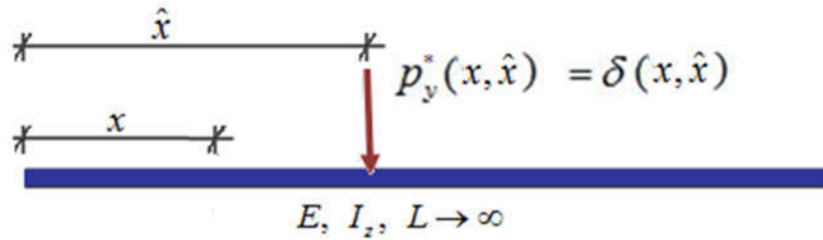
Da mesma forma que foi feito com a equação anterior outras grandezas de interesse para o problema podem ser escritas. Com isso, fazendo uso novamente da analogia, tem-se os seguintes resultados:

$$\varphi^*(x, \hat{x}) = \frac{dv^*(x, \hat{x})}{dx} \quad (7.37 \text{ a})$$

$$V_y^*(x, \hat{x}) = -EI_z \frac{dv^{*3}(x, \hat{x})}{dx^3} \quad (7.37 \text{ b})$$

$$M_z^*(x, \hat{x}) = -EI_z \frac{dv^{*2}(x, \hat{x})}{dx^2} \quad (7.37 \text{ c})$$

Figura 9 - Problema fundamental.



Fonte: EXTRAÍDA DE CRUZ, 2012.

O problema fundamental conduzido pela Eq. (7.36) e representado, para esse estudo, pela barra de comprimento infinito (Fig. 9) sob a ação da força concentrada $p_y^*(x, \hat{x}) = \delta(x, \hat{x})$. Que possui os esforços e deslocamentos observados nas seções definidos, na seguinte ordem: $V_y^*(x, \hat{x})$ e $M_z^*(x, \hat{x})$; $v^*(x, \hat{x})$ e $\theta_z^*(x, \hat{x})$.

Com o intuito de conseguir os resultados para a equação fundamental do problema é feito o uso da função delta de Dirac na Eq. (7.35), o que repercute na seguinte equação:

$$\int_0^L \left[EI_z \frac{dv^{*4}(x, \hat{x})}{dx^4} - p_y^*(x, \hat{x}) \right] dx = \left[EI_z \frac{dv^{*3}(x, \hat{x})}{dx^3} \right]_0^L - 1 = 0 \quad (7.38)$$

Tomando como resultado de Eq. (7.38) o polinômio indicado na Eq. (7.39), alcança-se ao derivar a função três vezes ($\frac{d^3}{dx^3} [A|x - \hat{x}|^3] = \pm 6A$), respectivamente para $x > \hat{x}$ e $x < \hat{x}$.

$$v^*(x - \hat{x}) = A|x - \hat{x}|^3 + B|x - \hat{x}|^2 + C|x - \hat{x}| + D \quad (7.39)$$

Com a substituição da terceira derivação do polinômio da Eq. (7.38), produz a seguinte resultado: $[6A]_{x=L} - [-6A]_{x=0} = 1/EI_z$, ou melhor:

$$A = 1/(12EI) \quad (7.40)$$

Conforma a solução adotada por Antes (2003) é possível inferir que os valores das constantes B, C e D se comportam de forma arbitrária, podendo nessa linha serem adotados como nulos. Por conseguinte, as relações de interesse, que se relacionam com o problema fundamental seriam:

$$v^*(x, \hat{x}) = \frac{1}{12EI_z} |x - \hat{x}|^3 \quad (7.41 \text{ a})$$

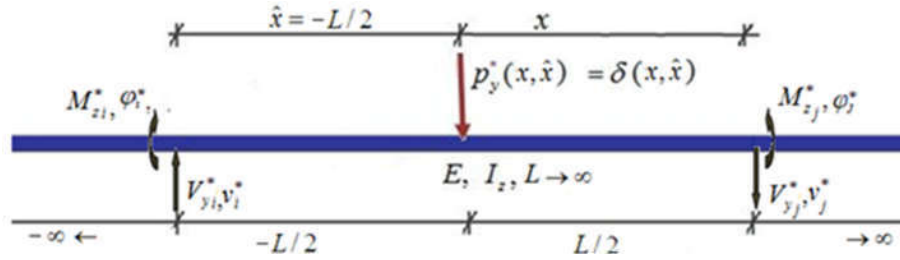
$$\varphi^*(x, \hat{x}) = \frac{dv^*(x, \hat{x})}{dx} = \frac{1}{4EI_z} |x - \hat{x}|^2 \operatorname{sgn}(x - \hat{x}) \quad (7.41 \text{ b})$$

$$V_y^*(x, \hat{x}) = -EI_z \frac{dv^{*3}(x, \hat{x})}{dx^3} = -\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x - \hat{x}) \quad (7.41 \text{ c})$$

$$M_z^*(x, \hat{x}) = -EI_z \frac{dv^{*2}(x, \hat{x})}{dx^2} = -\frac{1}{2} |x - \hat{x}| \quad (7.41 \text{ d})$$

Os valores das constantes em questão A, B, C e D, podem ser conseguidas de forma analítica, por meio de uma viga bi-apoiada com o ponto fonte simetricamente posicionado, como mostra a Fig. 10.

Figura 10 - Viga bi-apoiada com o ponto-fonte simetricamente posicionado.



Fonte: EXTRAÍDA DE CRUZ, 2012.

Sendo nulos os momentos nos apoios dessa estrutura, $M_z^*(x = \pm L/2, \hat{x} = 0) = 0$. Porém, como da segunda derivação do polinômio solução, Eq. (7.39), da equação governante da flexão, com $A = 1/(12EI)$, obtém-se: $\frac{dv^{*2}(x, \hat{x})}{dx^2} = \frac{1}{2EI_z} |x - \hat{x}| + 2B$ e, ainda, de acordo com a

terceira relação da Eq. (7.41d), $M_z^*(x, \hat{x}) = -EI_z \frac{dv^{*2}(x, \hat{x})}{dx^2}$, então:

$$-EI_z v^{*2}(x=L, \hat{x}=0) = -EI_z \left\{ \frac{1}{2EI_z} |L| + 2B \right\} = 0, \text{ de onde:}$$

$$B = -\left| \frac{L}{4EI} \right| \quad (7.42)$$

Como a rotação na seção de aplicação da fonte ($\hat{x}=0$), Fig.7.7, é nula, então:

$$\varphi^*(x=0, \hat{x}=0) = \frac{dv^*}{dx}(x=0, \hat{x}=0) = \frac{1}{4EI_z} |x - \hat{x}=0|^2 + 2B|x - \hat{x}=0| + C = 0, \text{ logo:}$$

$$C = 0 \quad (7.43)$$

Já a constante D é definida por meio da condição de deslocamento nulo segundo o eixo y, na extremidade à direita da viga que representa o problema fundamental em estudo.

$$\text{Então sendo: } v^*(x=L, \hat{x}=0) = \frac{1}{12EI_z} |L|^3 - \frac{L}{4EI_z} |L|^2 + 0|L| + D = 0, \text{ obtém-se:}$$

$$D = \frac{2L^3}{12EI} \quad (7.44)$$

Em posse dos valores determinados para as constantes A, B, C e D, que abrangem a solução do problema fundamental de flexão, explicitado na Eq. (7.39) e indicados, respectivamente, na Eq. (7.40), Eq. (7.42), Eq. (7.43) e Q. (7.44), essa solução pode ser assim explicitada:

$$v^*(x, \hat{x}) = \frac{L^3}{12EI_z} \left[\left| \frac{x - \hat{x}}{L} \right|^3 - 3 \left| \frac{x - \hat{x}}{L} \right|^2 + 2 \right] \quad (7.45)$$

Tem-se também, para as demais grandezas fundamentais da equação integral do deslocamento, exposta a seguir:

$$\varphi^*(x, \hat{x}) = \frac{dv^*(x, \hat{x})}{dx} = \frac{L^2}{4EI_z} \left[\left| \frac{x - \hat{x}}{L} \right|^2 - 2 \left| \frac{x - \hat{x}}{L} \right| \right] \text{sgn}(x - \hat{x}) \quad (7.46 a)$$

$$V_y^*(x, \hat{x}) = -EI_z \frac{dv^{*3}(x, \hat{x})}{dx^3} = -\frac{1}{2} \text{sgn}(x - \hat{x}) \quad (7.46 \text{ b})$$

$$M_z^*(x, \hat{x}) = -EI_z \frac{dv^{*2}(x, \hat{x})}{dx^2} = -\frac{L}{2} \left[\left| \frac{x - \hat{x}}{L} \right| - 1 \right] \quad (7.46 \text{ c})$$

Com a derivação das Eq. (7.45) e (7.46 a-c), que é feita em função de $\hat{x}$, é possível obter as grandezas fundamentais da equação integral de rotação, que estão representadas a seguir:

$$v_{,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) = \frac{dv^*(x, \hat{x})}{d\hat{x}} = -\frac{L^2}{4EI_z} \left[\left| \frac{x - \hat{x}}{L} \right|^2 - 2 \left| \frac{x - \hat{x}}{L} \right| \right] \text{sgn}(x - \hat{x}) \quad (7.47 \text{ a})$$

$$\varphi_{,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) = \frac{d\varphi^*(x, \hat{x})}{d\hat{x}} = \frac{L^2}{2EI_z} \left[\left| \frac{x - \hat{x}}{L} \right| - 1 \right] \quad (7.47 \text{ b})$$

$$V_{y,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) = -\frac{1}{2} \delta(x, \hat{x}) \quad (7.47 \text{ c})$$

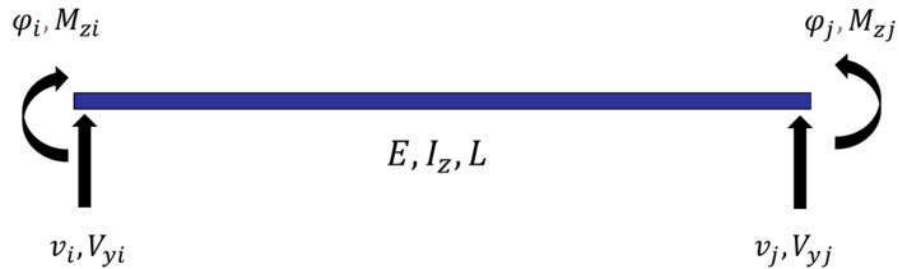
$$M_{z,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) = \frac{1}{2} \text{sgn}(x - \hat{x}) \quad (7.47 \text{ d})$$

7.2.3. A equação integral da flexão em Z na teoria de Euler-Bernoulli

Representação do PVC indicado Fig. 11, que tem sua definição extraída das Eq. (7.35) e Eq. (7.48 a-h). Na figura está representado comprimento L , momento de inércia I_z e módulo de elasticidade, E . Na mesma, mas dessa vez observando suas extremidades i e j existe a atuação dos esforços V_y e M_z , e ocorrem os deslocamentos v e φ .

Dito isso, as condições de contorno são:

Figura 11 - Representação gráfica do PVC.



a) Para a extremidade i

$$v(x=0) = v_i$$

$$\varphi(x=0) = \varphi_i$$

$$V_y(x=0) = V_{yi}$$

$$M_z(x=0) = M_{zi}$$

b) Para a Extremidade j

$$(7.48 \text{ a}) \quad v(x=L) = v_j \quad (7.48 \text{ e})$$

$$(7.48 \text{ b}) \quad \varphi(x=L) = \varphi_j \quad (7.48 \text{ f})$$

$$(7.48 \text{ c}) \quad V_y(x=L) = V_{yj} \quad (7.48 \text{ g})$$

$$(7.48 \text{ d}) \quad M_z(x=L) = M_{zj} \quad (7.48 \text{ h})$$

Com a aplicação da Técnica do Resíduo Ponderado (TRP) na equação governante Eq. (7.49) e sendo a função $v^*(x, \hat{x})$ ponderadora, obtém-se:

$$\int_0^L \left[EI_z \frac{dv^4(x)}{dx^4} - p_y(x) \right] v^*(x, \hat{x}) dx = 0 \quad (7.49)$$

Com a aplicação da integração por partes da Eq. (7.49), resulta:

$$\left[EI_z \frac{dv^3(x)}{dx^3} v^*(x, \hat{x}) \right] - \int_0^L EI_z \frac{dv^3(x)}{dx^3} \frac{dv^*}{dx}(x, \hat{x}) dx - \int_0^L p_y(x) v^*(x, \hat{x}) dx = 0 \quad (7.49 \text{ a})$$

Com a substituição da Eq. (3.34) nesta, obtém-se:

$$\left[-V_y(x) v^*(x, \hat{x}) \right] - \int_0^L EI_z \frac{dv^3(x)}{dx^3} \frac{dv^*}{dx}(x, \hat{x}) dx - \int_0^L p_y(x) v^*(x, \hat{x}) dx = 0 \quad (7.50)$$

Fazendo a integração por partes no segundo termo da Eq. (7.50), tem-se:

$$\left[-V_y(x) v^*(x, \hat{x}) \right] + \left[EI_z \frac{dv^2(x)}{dx^2} \varphi^*(x, \hat{x}) \right] \pm \int_0^L EI_z \frac{dv^3(x)}{dx^3} \frac{dv^*}{dx}(x, \hat{x}) dx - \int_0^L p_y(x) v^*(x, \hat{x}) dx = 0 \quad (7.51)$$

Com a substituição da Eq. (3.33) e da Eq. (7.37a) na Eq. (7.51), tem-se:

$$\left[-V_y(x) v^*(x, \hat{x}) \right] + \left[M_z(x) \varphi^*(x, \hat{x}) \right] + \int_0^L EI_z \frac{dv^2(x)}{dx^2} \frac{dv^{*2}}{dx^2}(x, \hat{x}) dx - \int_0^L p_y(x) v^*(x, \hat{x}) dx = 0 \quad (7.52)$$

Aplicando mais uma vez a integração por partes, mas dessa sendo feita na terceira parcela da Eq. (7.52), e fazendo uso como auxiliar a Eq. (7.37 b), tem-se:

$$\begin{aligned}
& \left[-V_y(x)v^*(x,\hat{x}) \right] + \left[M_z(x)\varphi^*(x,\hat{x}) \right] - \left[M_z^*(x,\hat{x})\varphi(x) \right] - \int_0^L EI_z \frac{dv(x)}{dx} \frac{dv^{*3}}{dx^3}(x,\hat{x})dx \\
& - \int_0^L p_y(x)v^*(x,\hat{x})dx = 0
\end{aligned} \tag{7.53}$$

Com isso, finalmente é feita a integração por partes da quarta parcela, presente na Eq. (7.53), que resulta:

$$\begin{aligned}
& \left[-V_y(x)v^*(x,\hat{x}) \right] + \left[M_z(x)\varphi^*(x,\hat{x}) \right] - \left[M_z^*(x,\hat{x})\varphi(x) \right] + \left[-V_y^*(x,\hat{x})v(x) \right] \\
& - \int_0^L EI_z v(x) \frac{dv^{*4}}{dx^4}(x,\hat{x})dx - \int_0^L p_y(x)v^*(x,\hat{x})dx = 0
\end{aligned} \tag{7.54}$$

Introduzindo, na Eq. (7.54) a Eq. (7.36) do problema fundamental, obtém-se:

$$\begin{aligned}
& \left[-V_y(x)v^*(x,\hat{x}) \right] + \left[M_z(x)\varphi^*(x,\hat{x}) \right] - \left[M_z^*(x,\hat{x})\varphi(x) \right] + \left[-V_y^*(x,\hat{x})v(x) \right] \\
& - \int_0^L v(x)\delta(x,\hat{x})dx - \int_0^L p_y(x)v^*(x,\hat{x})dx = 0
\end{aligned} \tag{7.55}$$

Que após a aplicação da propriedade de filtro delta de Dirac, fica:

$$\begin{aligned}
& v(x) + \left[-V_y(x)v^*(x,\hat{x}) \right] + \left[M_z(x)\varphi^*(x,\hat{x}) \right] - \left[M_z^*(x,\hat{x})\varphi(x) \right] + \left[-V_y^*(x,\hat{x})v(x) \right] \\
& - \int_0^L p_y(x)v^*(x,\hat{x})dx = 0
\end{aligned} \tag{7.56}$$

O problema até então tem apenas uma equação, o que contempla apenas uma das duas condições de contorno que precisam ser satisfeitas, para que o problema esteja totalmente estabelecido. Suprir essa necessidade é feita com a obtenção da equação integral para a rotação do ponto-fonte, que resultará na Eq. (7.55). Assim:

$$\begin{aligned}
& \varphi(x) + \left[-V_y(x)v_{,\hat{x}}^*(x,\hat{x}) \right] + \left[M_z(x)\varphi_{,\hat{x}}^*(x,\hat{x}) \right] - \left[M_{z,\hat{x}}^*(x,\hat{x})\varphi(x) \right] + \left[-V_{y,\hat{x}}^*(x,\hat{x})v(x) \right] \\
& - \int_0^L p_y(x)v^*(x,\hat{x})dx = 0
\end{aligned} \tag{7.57}$$

Sendo: $\hat{x}$ aparece nos índices das grandezas associadas ao problema fundamental indica derivação em $\hat{x}$. Desse modo tem-se $v_{,\hat{x}}^*$, $\varphi_{,\hat{x}}^*$, $M_{z,\hat{x}}^*$, $V_{y,\hat{x}}^*$.

Para a completa definição da Eq. (7.56) e da Eq. (7.57) a última parcela de cada uma delas deve ser calculada, o que será feito com a análise do problema fundamental.

7.2.4. Representação Algébrica do Efeito da Flexão em Z na Teoria de Euler-Bernoulli

Com a colocação do ponto fonte em cada uma das extremidades da barra, que representa justamente o contorno do corpo, que no problema em questão foi adotado os seguintes valores com $\hat{x} = 0$ e $\hat{x} = L$.

Com isso é feita a substituição em cada uma das expressões da Eq. (7.56) e da Eq. (7.57), o que resulta no seguinte:

$$\begin{aligned} v(0) - [V_y(x)v^*(x,0)]_0^L + [V_y^*(x,0)v(x)]_0^L + [M_z(x)\varphi^*(x,0)]_0^L \\ - [M_z^*(x,0)\varphi(x)]_0^L - \int_0^L p_y(x)v^*(x,0)dx = 0 \end{aligned} \quad (7.58)$$

$$\begin{aligned} v(L) - [V_y(x)v^*(x,L)]_0^L + [V_y^*(x,L)v(x)]_0^L + [M_z(x)\varphi^*(x,L)]_0^L \\ - [M_z^*(x,L)\varphi(x)]_0^L - \int_0^L p_y(x)v^*(x,L)dx = 0 \end{aligned} \quad (7.59)$$

$$\begin{aligned} \varphi(0) - [V_y(x)v_{,\hat{x}}^*(x,0)]_0^L + [V_{y,\hat{x}}^*(x,0)v(x)]_0^L + [M_z(x)\varphi_{,\hat{x}}^*(x,0)]_0^L \\ - [M_{z,\hat{x}}^*(x,0)\varphi(x)]_0^L - \int_0^L p_y(x)v_{,\hat{x}}^*(x,0)dx = 0 \end{aligned} \quad (7.60)$$

$$\begin{aligned} \varphi(L) - [V_y(x)v_{,\hat{x}}^*(x,L)]_0^L + [V_{y,\hat{x}}^*(x,L)v(x)]_0^L + [M_z(x)\varphi_{,\hat{x}}^*(x,L)]_0^L \\ - [M_{z,\hat{x}}^*(x,L)\varphi(x)]_0^L - \int_0^L p_y(x)v_{,\hat{x}}^*(x,L)dx = 0 \end{aligned} \quad (7.61)$$

Integrando cada uma das quatro últimas expressões, obtém-se, na ordem:

$$\begin{aligned} v(0) - V_y^*(0,0)v(0) + V_y^*(L,0)v(L) + M_z^*(0,0)\varphi(0) - M_z^*(L,0)\varphi(L) \\ - V_y(0)v^*(0,0) + V_y(L)v^*(L,0) - M_z(0)\varphi^*(0,0) + M_z(L)\varphi^*(L,0) \\ - \int_0^L p_y(x)v^*(x,0)dx = 0 \end{aligned} \quad (7.62)$$

$$\begin{aligned}
& v(L) - V_y^*(0, L)v(0) + V_y^*(L, L)v(L) + M_z^*(0, L)\varphi(0) - M_z^*(L, L)\varphi(L) \\
& - V_y(0)v^*(0, L) + V_y(L)v^*(L, L) - M_z(0)\varphi^*(0, L) + M_z(L)\varphi^*(L, L) \\
& - \int_0^L p_y(x)v^*(x, L)dx = 0
\end{aligned} \tag{7.63}$$

$$\begin{aligned}
& \varphi(0) - V_{y,\hat{x}}^*(0,0)v(0) + V_{y,\hat{x}}^*(L,0)v(L) + M_{z,\hat{x}}^*(0,0)\varphi(0) - M_{z,\hat{x}}^*(L,0)\varphi(L) \\
& - V_y(0)v_{,\hat{x}}^*(0,0) + V_y(L)v_{,\hat{x}}^*(L,0) - M_z(0)\varphi_{,\hat{x}}^*(0,0) + M_z(L)\varphi_{,\hat{x}}^*(L,0) \\
& - \int_0^L p_y(x)v_{,\hat{x}}^*(x,0)dx = 0
\end{aligned} \tag{7.64}$$

$$\begin{aligned}
& \varphi(L) - V_{y,\hat{x}}^*(0, L)v(0) + V_{y,\hat{x}}^*(L, L)v(L) + M_{z,\hat{x}}^*(0, L)\varphi(0) - M_{z,\hat{x}}^*(L, L)\varphi(L) \\
& - V_y(0)v_{,\hat{x}}^*(0, L) + V_y(L)v_{,\hat{x}}^*(L, L) - M_z(0)\varphi_{,\hat{x}}^*(0, L) + M_z(L)\varphi_{,\hat{x}}^*(L, L) \\
& - \int_0^L p_y(x)v_{,\hat{x}}^*(x, L)dx = 0
\end{aligned} \tag{7.65}$$

Reescrevendo as equações anteriores Eq. ((7.62) – (7.65)) na forma matricial, com as devidas substituições das igualdades apresentadas na Eq. (7.46 a-h) e Eq. (3.36), obtém-se:

$$\begin{aligned}
& \begin{Bmatrix} v(0) \\ \varphi(0) \\ v(L) \\ \varphi(L) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -V_y^*(0,0+\xi) & M_z^*(0,0+\xi) & V_y^*(L,0+\xi) & -M_z^*(L,0+\xi) \\ -V_{y,\hat{x}}^*(0,0+\xi) & M_{z,\hat{x}}^*(0,0+\xi) & V_{y,\hat{x}}^*(L,0+\xi) & -M_{z,\hat{x}}^*(L,0+\xi) \\ -V_y^*(0,L-\xi) & M_z^*(0,L-\xi) & V_y^*(L,L-\xi) & -M_z^*(L,L-\xi) \\ -V_{y,\hat{x}}^*(0,L-\xi) & M_{z,\hat{x}}^*(0,L-\xi) & V_{y,\hat{x}}^*(L,L-\xi) & -M_{z,\hat{x}}^*(L,L-\xi) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{v}(0) \\ \tilde{\varphi}(0) \\ \tilde{v}(L) \\ \tilde{\varphi}(L) \end{Bmatrix} = \\
& = \begin{Bmatrix} -v^*(0,0+\xi) & \varphi^*(0,0+\xi) & v^*(L,0+\xi) & -\varphi^*(L,0+\xi) \\ -v_{,\hat{x}}^*(0,0+\xi) & \varphi_{,\hat{x}}^*(0,0+\xi) & v_{,\hat{x}}^*(L,0+\xi) & -\varphi_{,\hat{x}}^*(L,0+\xi) \\ -v^*(0,L-\xi) & \varphi^*(0,L-\xi) & v^*(L,L-\xi) & -\varphi^*(L,L-\xi) \\ -v_{,\hat{x}}^*(0,L-\xi) & \varphi_{,\hat{x}}^*(0,L-\xi) & v_{,\hat{x}}^*(L,L-\xi) & -\varphi_{,\hat{x}}^*(L,L-\xi) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} V_y(0) \\ M_z(0) \\ V_y(L) \\ M(0) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_y(0) \\ f_\varphi(0) \\ f_y(L) \\ f_\varphi(L) \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{7.66}$$

Os valores dos elementos das matrizes acima podem ser calculados através das expressões indicadas nas Eq. (7.45), Eqs. (3.46 a-c) e Eqs. (3.47 a-d), logo:

$$v^*(0,0+\xi) = \beta_{z1} \tag{7.67 a} \quad v^*(L,0+\xi) = 0 \tag{7.67 i}$$

$$v^*(0,L-\xi) = 0 \tag{7.67 b} \quad v^*(L,L-\xi) = \beta_{z1} \tag{7.67 j}$$

$$\varphi^*(0,0+\xi) = 0 \tag{7.67 c} \quad \varphi^*(L,0+\xi) = -1 \tag{7.67 k}$$

$$\varphi^*(0,L-\xi) = 1 \tag{7.67 d} \quad \varphi^*(L,L-\xi) = 0 \tag{7.67 l}$$

$$v_{,x}^*(0,0+\xi) = 0 \quad (7.67 \text{ e}) \quad v_{,x}^*(L,0+\xi) = \beta_{z2} \quad (7.67 \text{ m})$$

$$v_{,x}^*(0,L-\xi) = -\beta_{z2} \quad (7.67 \text{ f}) \quad v_{,x}^*(L,L-\xi) = 0 \quad (7.67 \text{ n})$$

$$\varphi_{,\hat{x}}^*(0,0+\xi) = -\beta_{z3} \quad (7.67 \text{ g}) \quad \varphi_{,\hat{x}}^*(L,0+\xi) = 0 \quad (7.67 \text{ o})$$

$$\varphi_{,\hat{x}}^*(0,L-\xi) = 0 \quad (7.67 \text{ h}) \quad \varphi_{,\hat{x}}^*(L,L-\xi) = -\beta_{z3} \quad (7.67 \text{ p})$$

$$V_y^*(0,0+\xi) = \frac{1}{2} \quad (7.68 \text{ a}) \quad V_y^*(L,0+\xi) = -\frac{1}{2} \quad (7.68 \text{ i})$$

$$V_y^{*l}(0,L-\xi) = \frac{1}{2} \quad (7.68 \text{ b}) \quad V_y^{*l}(L,L-\xi) = -\frac{1}{2} \quad (7.68 \text{ j})$$

$$M_z^*(0,0+\xi) = \alpha_{z1} \quad (7.68 \text{ c}) \quad M_z^*(L,0+\xi) = 0 \quad (7.68 \text{ k})$$

$$M_z^*(0,L-\xi) = 0 \quad (7.68 \text{ d}) \quad M_z^*(L,L-\xi) = \alpha_{z1} \quad (7.68 \text{ l})$$

$$V_{y,\hat{x}}^*(0,0+\xi) = 0 \quad (7.68 \text{ e}) \quad V_{y,\hat{x}}^*(L,0+\xi) = -\frac{1}{2} \quad (7.68 \text{ m})$$

$$V_{y,\hat{x}}^*(0,L-\xi) = -\frac{1}{2} \quad (7.68 \text{ f}) \quad V_{y,\hat{x}}^*(L,L-\xi) = 0 \quad (7.68 \text{ n})$$

$$M_{z,\hat{x}}^*(0,0+\xi) = -\frac{1}{2} \quad (7.68 \text{ g}) \quad M_{z,\hat{x}}^*(L,0+\xi) = \frac{1}{2} \quad (7.68 \text{ o})$$

$$M_{z,\hat{x}}^*(0,L-\xi) = -\frac{1}{2} \quad (7.68 \text{ h}) \quad M_{z,\hat{x}}^*(L,L-\xi) = \frac{1}{2} \quad (7.68 \text{ p})$$

Onde:

$$\alpha_{z1} = M_z^*(0,0+\xi) = M_z^*(L,L-\xi) = \frac{L}{2} \quad (7.69 \text{ a})$$

$$\beta_{z1} = v^*(0,0+\xi) = v^*(L,L-\xi) = \frac{L^3}{6EI_z} \quad (7.69 \text{ b})$$

$$\beta_{z2} = v_{,x}^*(L,0+\xi) = -v_{,x}^*(0,L-\xi) = \frac{L^2}{4EI_z} \quad (7.69 \text{ c})$$

$$\beta_{z3} = -\varphi_{,\hat{x}}^*(0,0+\xi) = -\varphi_{,\hat{x}}^*(L,L-\xi) = \frac{L}{2EI_z} \quad (7.69 \text{ d})$$

Chegado esse momento é feita a substituição dos valores das Eqs. (7.68 a-p) e das Eqs. (7.69 a-p), obtendo-se dessa maneira a representação algébrica do efeito da flexão em z da viga de Euler-Bernoulli:

$$\begin{Bmatrix} v(0) \\ \varphi(0) \\ v(L) \\ \varphi(L) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/2 & \alpha_{z1} & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & -1/2 & -\alpha_{z1} \\ 0 & -1/2 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v(0) \\ \varphi(0) \\ v(L) \\ \varphi(L) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta_{z1} & 0 & 0 & \beta_{z2} \\ 0 & -\beta_{z3} & \beta_{z2} & 0 \\ 0 & \beta_{z2} & \beta_{z1} & 0 \\ \beta_{z2} & 0 & 0 & \beta_{z2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_y(0) \\ M_z(0) \\ V_y(L) \\ M_z(L) \end{Bmatrix} \quad (7.70 \text{ a})$$

$$\begin{Bmatrix} v(0) \\ \varphi(0) \\ v(L) \\ \varphi(L) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/2 & \alpha_{z1} & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & -1/2 & -\alpha_{z1} \\ 0 & -1/2 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v(0) \\ \varphi(0) \\ v(L) \\ \varphi(L) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{z1} & 0 & 0 & -\beta_{z2} \\ 0 & \beta_{z3} & \beta_{z2} & 0 \\ 0 & \beta_{z2} & \beta_{z1} & 0 \\ -\beta_{z2} & 0 & 0 & \beta_{z2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_y(0) \\ M_z(0) \\ V_y(L) \\ M_z(L) \end{Bmatrix} \quad (7.70 \text{ b})$$

8. O SISTEMA DE REFERÊNCIA LOCAL UNIFICADO

A adequação rápida e segura das equações (e resultados) de cada uma das barras que é desenvolvida é feita por meio da unificação dos sistemas de referências locais. Estas, equações e resultados, são obtidas através da análise do problema, que muitas das vezes estão em outro sistema de referência e necessitam que seja reescrito, levando dessa vez em conta outro referencial.

O processo é bastante simples e os resultados surgem de forma imediata, bastando para isso que seja feita uma análise física do problema e sua interpretação no sistema de referência a ser adotado. Neste trabalho é feita a utilização de um sistema de referência unificado para cada elemento da estrutura, que precisa ser analisado. Este processo é justificado pela ideia de utilização das matrizes (operadores matemáticos) de mudança de referencial de aplicação corrente no método matricial dos deslocamentos para análise estrutural, MMD, e no MEF, na solução desses mesmos problemas de estruturas reticuladas, nos quais se aplica o MEC.

Para a devida notação as grandezas foram grafadas com uma barra, quando referidas no sistema local de coordenadas unificado.

8.1. PROBLEMAS INDEPENDENTES

Cada representação algébrica dos efeitos independentes escrita com notação mais concisa, no SCL, referida através da Eq. (8.1 a), será indicada no SCLU, como mostrado na Eq. (8.1 b):

$$\{u\} + [h]\{u\} = [g]\{p\} + \{f\} \quad (8.1 \text{ a})$$

$$\{\bar{u}\} + [\hat{h}] \{\bar{u}\} = [\bar{g}] \{\bar{p}\} + \{\bar{f}\} \quad (8.1 \text{ b})$$

$$[\hat{h}] = [\eta_h]^{-1} [h] [\eta_h] \quad (8.2 \text{ a})$$

$$[\bar{g}] = [\eta_h]^{-1} [g] [\eta_g] \quad (8.2 \text{ b})$$

$$\{u\} = [\eta_h] \{\bar{u}\} \quad (8.2 \text{ c})$$

$$\{p\} = [\eta_g] \{\bar{p}\} \quad (8.2 \text{ d})$$

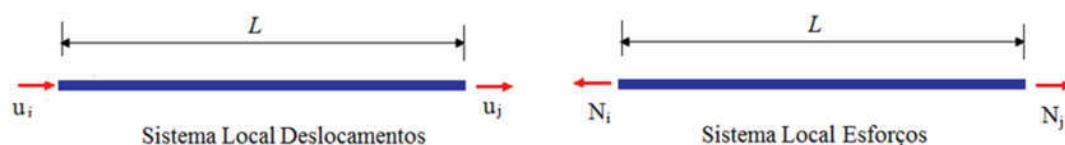
$$\{f\} = [\eta_h]^{-1} \{\bar{f}\} \quad (8.2 \text{ e})$$

Sendo: $\{u\}$, $[h]$ e $[g]$, e $\{\bar{u}\}$, $[\hat{h}]$ e $[\bar{g}]$, na ordem, o vetor dos deslocamentos nas extremidades da barra, a matriz de influência dos deslocamentos e dos esforços, nas extremidades da barra, referidos no SCL e no SCLU. As matrizes $[\eta_h]$ e $[\eta_g]$ associam os deslocamentos e esforços no SCL com seus respectivos no SCLU.

8.1.1. O efeito axial

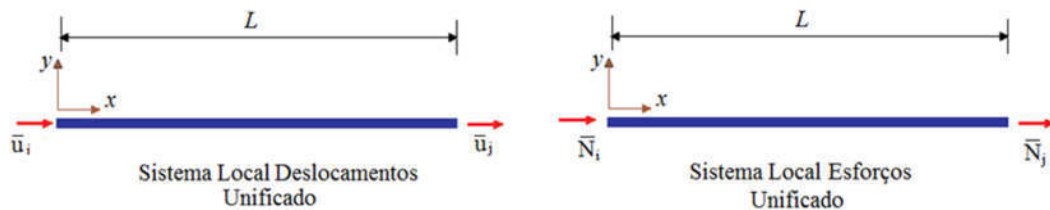
Nas imagens a seguir, que correspondem a Fig. 12 e na 13, estão representados respectivamente o Sistema Local de Coordenadas (SCL) utilizado na análise do efeito axial. Este estudo, demonstra o desempenho da barra de pórtico ao efeito de tração desenvolvido. Já na Fig. 13 existe o mesmo intuito, no entanto com utilização do Sistema Local de Coordenadas Unificado (SCLU).

Figura 12 - SCL para a avaliação da contribuição do efeito axial.



Fonte: EXTRAÍDO CRUZ, 2012.

Figura 13 - SCLU para a avaliação da contribuição do efeito axial.



Fonte: EXTRAÍDA DE CRUZ, 2012.

Com a comparação do sentido presente em cada deslocamento e esforço no SCL, com relação com a direção positiva adotada para o eixo no SCLU, que foram devidamente apresentadas acima, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{u}_j \end{Bmatrix} \quad (8.3 \text{ a})$$

em uma notação mais concisa fica:

$$\{u\} = [\eta_h] \{\bar{u}\} \quad (8.3 \text{ b})$$

e:

$$\begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{N}_i \\ \bar{N}_j \end{Bmatrix} \quad (8.4 \text{ a})$$

ou:

$$\{N\} = [\eta_g] \{\bar{N}\} \quad (8.4 \text{ b})$$

Com a substituição das Eq. (8.3 a) e (8.4 a) na Eq. (8.1 b) é obtido o efeito axial no SCLU:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{u}_j \end{Bmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{u}_j \end{Bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{N}_i \\ \bar{N}_j \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{f}_{xi} \\ \bar{f}_{xj} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (8.5)$$

Sendo: $\begin{bmatrix} \hat{h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{h}_{11} & \hat{h}_{12} \\ \hat{h}_{21} & \hat{h}_{22} \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$ matrizes de influência da representação

algébrica do efeito axial referidos no SCL, que são integrantes da Eq. (7.26)

Dessa forma a Eq. (8.5) pode ser reescrita com a utilização das matrizes: $[\eta_h]$ e $[\eta_g]$, da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{u}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \alpha_x \\ \alpha_x & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{u}_j \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\beta_x \\ -\beta_x & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{N}_i \\ \bar{N}_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{f}_{ui} \\ \bar{f}_{uj} \end{Bmatrix} \quad (8.6 \text{ a})$$

ou:

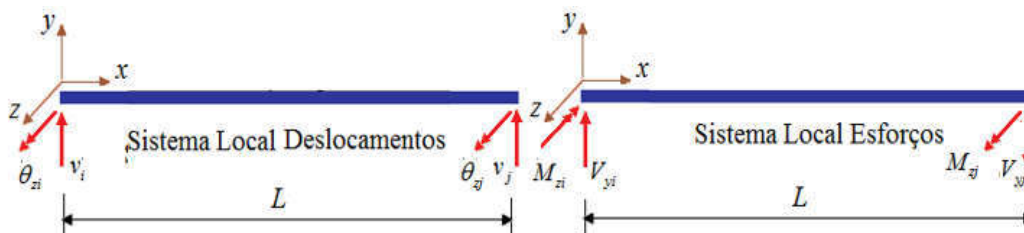
$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{u}_j \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{u}_j \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{L}{2EA} \\ -\frac{L}{2EA} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{N}_i \\ \bar{N}_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{f}_{ui} \\ \bar{f}_{uj} \end{Bmatrix} \quad (8.6 \text{ b})$$

Sendo: $\alpha_x = -\frac{1}{2}$ e $\beta = \frac{1}{2EA}$.

8.1.2. O efeito da flexão em Z

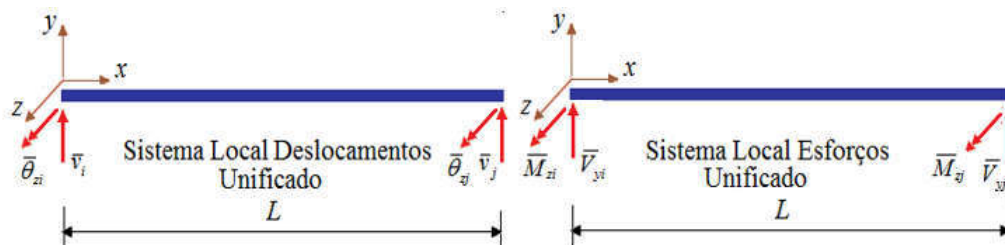
As seguintes imagens, que correspondem às Figs. 14 e 15, representam respectivamente os Sistemas de Coordenada Local e Local Unificado, para avaliação da contribuição do efeito de flexão no eixo z, o que permitirá analisar o desempenho da barra como elemento de pórtico.

Figura 14 - SCL para a avaliação da contribuição da flexão em z.



Fonte: EXTRAÍDA DE CRUZ, 2012.

Figura 15 - SCLU para avaliação da contribuição da flexão em z.



Fonte: EXTRAÍDA DE CRUZ, 2012.

Com a observação das duas figuras é possível concluir que:

- Para o deslocamento:

$$\begin{Bmatrix} v_i \\ \varphi_{zi} \\ v_j \\ \varphi_{zj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{v}_i \\ \bar{\varphi}_{zi} \\ \bar{v}_j \\ \bar{\varphi}_{zj} \end{Bmatrix} \quad (8.7 \text{ a})$$

Com a comparação da Eq. (8.7 a) com a Eq. (8.3 a), tem-se:

$$[n_h] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.7 \text{ b})$$

- Para os Esforços:

$$\begin{Bmatrix} V_{yi} \\ M_{zi} \\ V_{yj} \\ M_{zj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{V}_{yi} \\ \bar{M}_{zi} \\ \bar{V}_{yj} \\ \bar{M}_{zj} \end{Bmatrix} \quad (8.8 \text{ a})$$

Com a comparação da Eq. (8.8 a) com a Eq. (8.4 a), tem-se:

$$[\eta_g] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.8 \text{ b})$$

A Eq. (8.1 a) pode ser reescrita em coordenadas locais unificadas. Representada a seguir:

$$\begin{Bmatrix} \bar{v}_i \\ \bar{\varphi}_{zi} \\ \bar{v}_j \\ \bar{\varphi}_{zj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{h}_{11} & \hat{h}_{12} & \hat{h}_{13} & \hat{h}_{14} \\ \hat{h}_{21} & \hat{h}_{22} & \hat{h}_{23} & \hat{h}_{24} \\ \hat{h}_{31} & \hat{h}_{32} & \hat{h}_{33} & \hat{h}_{34} \\ \hat{h}_{41} & \hat{h}_{42} & \hat{h}_{43} & \hat{h}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{v}_i \\ \bar{\varphi}_{zi} \\ \bar{v}_j \\ \bar{\varphi}_{zj} \end{Bmatrix} + \quad (8.9)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{V}_{yi} \\ \bar{M}_{zi} \\ \bar{V}_{yj} \\ \bar{M}_{zj} \end{Bmatrix}$$

Sendo: $[h] = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} \\ h_{41} & h_{42} & h_{43} & h_{44} \end{bmatrix}$ e $[g] = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{bmatrix}$ as matrizes de influência,

referidas no SCL.

Dessa maneira, a representação algébrica no eixo Z, para teoria de Euler-Bernoulli, pode ser dada reformulando a equação anterior fazendo uso das matrizes definidas na Eq. (8.7 b) e a (8.8 b), como indicado a seguir:

$$\begin{Bmatrix} \bar{v}_i \\ \bar{\varphi}_{zi} \\ \bar{v}_j \\ \bar{\varphi}_{zj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & \alpha_{z1} & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & -1/2 & -\alpha_{z1} \\ 0 & -1/2 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{v}_i \\ \bar{\varphi}_{zi} \\ \bar{v}_j \\ \bar{\varphi}_{zj} \end{Bmatrix} + \quad (8.10)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{z1} & 0 & 0 & -\beta_{z2} \\ 0 & -\beta_{z3} & -\beta_{z2} & 0 \\ 0 & -\beta_{z2} & -\beta_{z1} & 0 \\ -\beta_{z2} & 0 & 0 & \beta_{z3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{V}_{yi} \\ \bar{M}_{zi} \\ \bar{V}_{yj} \\ \bar{M}_{zj} \end{Bmatrix}$$

O que resulta nas seguintes expressões:

$$\begin{Bmatrix} \bar{v}_i \\ \bar{\varphi}_{zi} \\ \bar{v}_j \\ \bar{\varphi}_{zj} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/2 & \alpha_{z1} & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & -1/2 & -\alpha_{z1} \\ 0 & -1/2 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{v}_i \\ \bar{\varphi}_{zi} \\ \bar{v}_j \\ \bar{\varphi}_{zj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{z1} & 0 & 0 & -\beta_{z2} \\ 0 & \beta_{z3} & \beta_{z2} & 0 \\ 0 & \beta_{z2} & \beta_{z1} & 0 \\ -\beta_{z2} & 0 & 0 & \beta_{z3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{V}_{yi} \\ \bar{M}_{zi} \\ \bar{V}_{yj} \\ \bar{M}_{zj} \end{Bmatrix} \quad (8.11 \text{ a})$$

ou,

$$\begin{Bmatrix} \bar{v}_i \\ \bar{\varphi}_{zi} \\ \bar{v}_j \\ \bar{\varphi}_{zj} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/2 & \frac{L}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & -1/2 & -\frac{L}{2} \\ 0 & -1/2 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{v}_i \\ \bar{\varphi}_{zi} \\ \bar{v}_j \\ \bar{\varphi}_{zj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L^3}{6EI_z} & 0 & 0 & -\frac{L^2}{4EI_z} \\ 0 & \frac{L}{2EI_z} & \frac{L^2}{4EI_z} & 0 \\ 0 & \frac{L^2}{4EI_z} & \frac{L^3}{6EI_z} & 0 \\ -\frac{L^2}{4EI_z} & 0 & 0 & \frac{L}{2EI_z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{V}_{yi} \\ \bar{M}_{zi} \\ \bar{V}_{yj} \\ \bar{M}_{zj} \end{Bmatrix} \quad (8.11 \text{ b})$$

Sendo: $\alpha_{z1} = \frac{L}{2}$, $\beta_{z1} = \frac{L^3}{6EI_z}$, $\beta_{z2} = \frac{L^2}{4EI_z}$ e $\beta_{z3} = \frac{L}{2EI_z}$.

8.2. OS PROBLEMAS COMBINADOS

A representação algébrica feita em barras de pórticos, são inicialmente elaboradas no SCLU, para em um segundo momento serem reescritas no Sistema de Coordenada Global (SCG). Para isso, é feita a superposição dos efeitos que agem sobre a barra de pórtico plano,

que é justamente o efeito axial e de flexão no plano da estrutura. Concluída essa substituição é obtida a representação algébrica da barra no SCLU.

Já com relação a notação da representação algébrica no SCLU, de maneira concisa, pode ser feita como indicado a seguir:

$$\{\bar{u}\}_{ec} + \left[\bar{\hat{h}} \right]_{ec} \{\bar{u}\}_{ec} = [\bar{g}]_{ec} \{\bar{p}\}_{ec} \quad (8.12 \text{ a})$$

$$\left[\bar{h} \right]_{ec} \{\bar{u}\}_{ec} = [\bar{g}]_{ec} \{\bar{p}\}_{ec} \quad (8.12 \text{ b})$$

Onde: $\left[\bar{\hat{h}} \right]_{ec}$ e $[\bar{g}]_{ec}$ são, na ordem, matrizes de influência de deslocamentos e a matriz de influência de forças de barra, com todos os esforços combinados compatíveis com o tipo de barra.

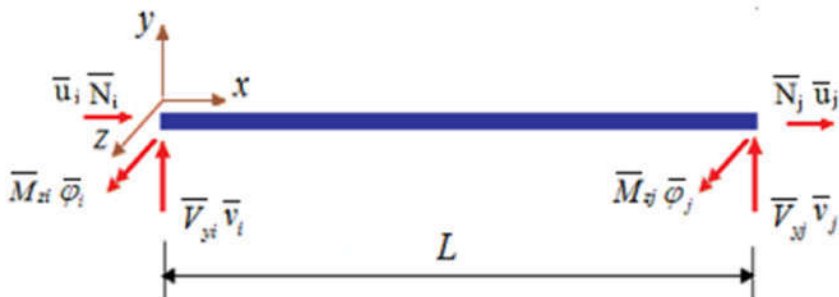
$[I]$, $\{\bar{u}\}_{ec}$ e $\{\bar{p}\}_{ec}$ são, respectivamente, a matriz identidade, os vetores dos deslocamentos e os dos esforços nodais da barra com todos os esforços combinados para o caso estudado, todas referidas ao SCLU.

As matrizes $\left[\bar{\hat{h}} \right]_{ec}$ e $[\bar{g}]_{ec}$ são quadradas cuja ordem é igual à quantidade de graus de liberdade considerados em cada extremidade da barra ou em cada nó da estrutura. No caso, 3 por nó em se tratando de barra de pórtico plano.

8.2.1. Pórtico plano no SCLU

Para barra de pórtico plano (estruturada no plano xy e flexão segundo o eixo z, conforme Fig.8.5), a representação algébrica, para a teoria de Euler-Bernoulli, é feita a partir da superposição da Eq. (8.6 a ou b) e Eq. (8.11a ou b), decorrentes da avaliação dos efeitos axial e de flexão no eixo z, como indicado na Eq. (8.13).

Figura 16 - Sistema de coordenadas local unificado de barras de pórtico plano (flexão em z).



Fonte: EXTRAÍDA DE CRUZ, 2012.

8.2.1.1. Pórtico plano no SCLU – Modelo de Euler-Bernoulli.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{L}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{L}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_{yi} \\ \bar{\phi}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_{yj} \\ \bar{\phi}_j \end{Bmatrix} = \frac{L}{2E} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{A} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^2}{3I_z} & 0 & 0 & 0 & -\frac{L}{2I_z} \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_z} & 0 & \frac{L}{2I_z} & 0 \\ -\frac{1}{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{2I_z} & 0 & \frac{L^2}{3I_z} & 0 \\ 0 & -\frac{L}{2I_z} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{N}_i \\ \bar{V}_{yi} \\ \bar{M}_{zi} \\ \bar{N}_j \\ \bar{V}_{yj} \\ \bar{M}_{zj} \end{Bmatrix} \quad (8.13)$$

9. O SISTEMA DE COORDENADAS GLOBAIS E A MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO

A representação algébrica da estrutura (pórtico plano) deve convenientemente acumular contribuições dos membros para descrever o comportamento de toda estrutura. Para atingir esse objetivo, precisamos realizar algumas transformações no sistema algébrico local unificado das barras para obter o sistema algébrico global dessas mesmas barras.

Como regra geral, os campos vetoriais (esforço e deslocamento) nas extremidades de cada barra devem ser sobrepostos pela soma vetorial (magnitude e orientação) em seu nó comum. Para somar algebricamente ou escalar esses vetores (apenas a magnitude), eles devem estar sempre na mesma direção para que suas contribuições possam ser contabilizadas corretamente.

Para fazer isso, precisa-se garantir para cada membro que a matriz de influência e seu vetor carga estão no mesmo sistema de coordenadas. Campos em sistemas locais unificados podem ser referenciados globalmente a partir das relações geométricas entre eixos de mesmo nome nesses sistemas. Portanto, deslocamento, esforço e força externa no SCLU estão relacionadas com suas seguintes partes globais da seguinte forma:

$$\{\bar{u}\} = [R]\{U\} \quad (9.1 \text{ a})$$

$$\{\bar{p}\} = [R]\{P\} \quad (9.1 \text{ b})$$

$$\{\bar{f}\} = [R]\{F\} \quad (9.1 \text{ c})$$

Então a relação entre matriz de influência local unificada (associado ao sistema centrado no CG) quando são treliças e a matriz de influência global a partir da matriz de rotação $[R]$ é definida como mostrado abaixo:

Substituindo na Eq. (8.1 b) as Eqs. (9.1 a-c), obtém-se:

$$\{U\} + [R]^T [\hat{h}] [R] \{U\} = [R]^T [g] [R] \{P\} + [R]^T [R] \{F\} \quad (9.2)$$

Comparando a Eq. (8.1 b) com a Eq. (9.2), tem-se:

$$[\hat{H}] = [R]^T [\hat{h}] [R] \quad (9.3 \text{ a})$$

$$[G] = [R]^T [g] [R] \quad (9.3 \text{ b})$$

$$[F] = [R]^T \{f\} \quad (9.3 \text{ c})$$

A matriz de transformação para pórtico plano, que é utilizada na Eq. (9.2), é expressa a seguir na Eq. (9.4):

$$[R] = \begin{bmatrix} [C] & [0] \\ [0] & [C] \end{bmatrix} \quad (9.4)$$

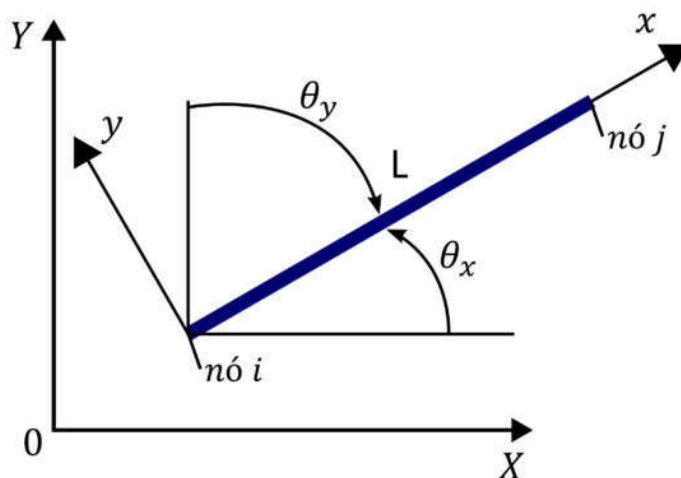
Sendo: $[C] = \begin{bmatrix} C_x & C_y & 0 \\ -C_y & C_x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $[0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, determinados pelos cossenos diretores da

barra em relação aos eixos do SCG (C_x e C_y), representados a seguir:

$$C_x = \cos \theta_x = \frac{X_j - X_i}{L} \quad (9.4 a)$$

$$C_y = \cos \theta_y = \frac{Y_j - Y_i}{L} \quad (9.4 b)$$

Figura 17 - Coordenadas globais 0XY e locais 0xy



Fonte: ADAPTADA DE CRUZ, 2012.

9.1. A REPRESENTAÇÃO ALGÉBRICA DE BARRA DE PÓRTICO PLANO NO SCG

Com a representação mais explícita, analisando a nível de extremidade da barra, a Eq. (9.2), encontra-se:

$$\begin{bmatrix} [H]_{11} & [H]_{12} \\ [H]_{21} & [H]_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U\}_1 \\ \{U\}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [G]_{11} & [G]_{12} \\ [G]_{21} & [G]_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{P\}_1 \\ \{P\}_2 \end{Bmatrix} \quad (9.5)$$

Na qual:

$$[H]_{11} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_x & -C_y & 0 \\ C_y & C_x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{L}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_x & C_y & 0 \\ -C_y & C_x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

(9.6 a)

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{L}{2}C_y \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{L}{2}C_x \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$[H]_{12} = \begin{bmatrix} H_{14} & H_{15} & H_{16} \\ H_{24} & H_{25} & H_{26} \\ H_{34} & H_{35} & H_{36} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_x & -C_y & 0 \\ C_y & C_x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_x & C_y & 0 \\ -C_y & C_x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

(9.6 b)

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$[H]_{21} = \begin{bmatrix} H_{41} & H_{42} & H_{43} \\ H_{51} & H_{52} & H_{53} \\ H_{61} & H_{62} & H_{63} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_x & -C_y & 0 \\ C_y & C_x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_x & C_y & 0 \\ -C_y & C_x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

(9.6 c)

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$[H]_{22} = \begin{bmatrix} H_{44} & H_{45} & H_{46} \\ H_{54} & H_{55} & H_{56} \\ H_{64} & H_{65} & H_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_x & -C_y & 0 \\ C_y & C_x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{L}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_x & C_y & 0 \\ -C_y & C_x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \quad (9.6 \text{ d})$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{L}{2}C_y \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}C_x \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$[G]_{11} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_x & -C_y & 0 \\ C_y & C_x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^3}{6EI_z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{2EI_z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_x & C_y & 0 \\ -C_y & C_x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \quad (9.7 \text{ a})$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{L^3}{6EI_z}C_y^2 & \frac{L^3}{6EI_z}C_xC_y & 0 \\ -\frac{L^3}{6EI_z}C_xC_y & \frac{L^3}{6EI_z}C_x^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{2EI_z} \end{bmatrix}$$

$$[G]_{12} = \begin{bmatrix} G_{14} & G_{15} & G_{16} \\ G_{24} & G_{25} & G_{26} \\ G_{34} & G_{35} & G_{36} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_x & -C_y & 0 \\ C_y & C_x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{L}{2EA} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{L^2}{4EI_z} \\ 0 & \frac{L^2}{4EI_z} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_x & C_y & 0 \\ -C_y & C_x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \quad (9.7 \text{ b})$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{L}{2EA}C_x^2 & -\frac{L}{2EA}C_xC_y & \frac{L^2}{4EI_z}C_y \\ -\frac{L}{2EA}C_xC_y & -\frac{L}{2EA}C_y^2 & \frac{L^2}{4EI_z}C_x \\ -\frac{L^2}{4EI_z}C_y & \frac{L^2}{4EI_z}C_x & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
[G]_{21} &= \begin{bmatrix} G_{41} & G_{42} & G_{43} \\ G_{51} & G_{52} & G_{53} \\ G_{61} & G_{62} & G_{63} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_x & -C_y & 0 \\ C_y & C_x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{L}{2EA} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L^2}{4EI_z} \\ 0 & -\frac{L^2}{4EI_z} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_x & C_y & 0 \\ -C_y & C_x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{L}{2EA}C_x^2 & -\frac{L}{2EA}C_xC_y & -\frac{L^2}{4EI_z}C_y \\ -\frac{L}{2EA}C_xC_y & -\frac{L}{2EA}C_y^2 & \frac{L^2}{4EI_z}C_x \\ \frac{L^2}{4EI_z}C_y & -\frac{L^2}{4EI_z}C_x & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{9.7 c}$$

$$\begin{aligned}
[G]_{22} &= \begin{bmatrix} G_{44} & G_{45} & G_{46} \\ G_{54} & G_{55} & G_{56} \\ G_{64} & G_{65} & G_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_x & -C_y & 0 \\ C_y & C_x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^3}{6EI_z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{2EI_z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_x & C_y & 0 \\ -C_y & C_x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{L^3}{6EI_z}C_y^2 & -\frac{L^3}{6EI_z}C_xC_y & 0 \\ -\frac{L^3}{6EI_z}C_xC_y & \frac{L^3}{6EI_z}C_x^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{2EI_z} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{9.7 d}$$

A seguir estão apresentadas algumas notações que são utilizadas no desenvolvimento do problema, sendo a segunda com os deslocamentos representados por “D” e os esforços pela letra “P”, utilizada na análise matricial das estruturas.

$$\{U\}_1 = \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ \phi_1 \end{Bmatrix}_{(1)} = \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix}_{(1)} \tag{9.8 a}$$

$$\{U\}_2 = \begin{Bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ \phi_2 \end{Bmatrix}_{(2)} = \begin{Bmatrix} D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{Bmatrix}_{(2)} \tag{9.8 b}$$

$$\{P\}_1 = \begin{Bmatrix} N_1 \\ Q_1 \\ M_1 \end{Bmatrix}_{(1)} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix}_{(1)} \tag{9.9 a}$$

$$\{P\}_2 = \begin{Bmatrix} N_2 \\ Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}_{(2)} = \begin{Bmatrix} P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{Bmatrix}_{(2)} \tag{9.9 b}$$

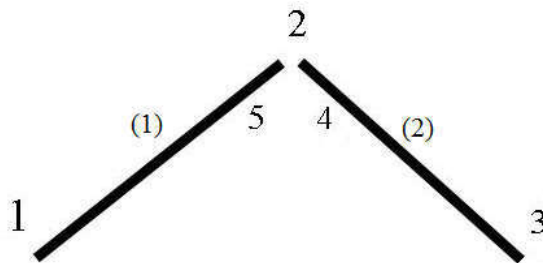
9.2. REPRESENTAÇÃO ALGÉBRICA DA ESTRUTURA

Se dois ou mais elementos reticulados convergem para um mesmo nó, a continuidade dos deslocamentos e as condições de equilíbrio devem ser consideradas. No caso de uma treliça, por exemplo, a definição de um nó virtual nas extremidades dessas barras é suficiente para garantir o equilíbrio entre os nós da estrutura.

Na discussão sobre a montagem de um sistema global dos pórticos planas, duas barras convergentes são consideradas (por simplicidade e concisão). Neste caso, o nó 2 é isolado e as vigas (1) e (2) convergentes sobre ele são marcadas, conforme a Figura 18.

Quando duas ou mais barras convergem no mesmo nó, a compatibilidade dos deslocamentos e as condições de equilíbrio devem ser consideradas. Por simplicidade e concisão, duas barras convergentes, barra (1) e (2), são tomadas como é mostrado na Figura 19.

Figura 18 - Barras de pórtico convergindo



Fonte: EXTRAÍDA DE CRUZ, 2012.

As Eq. (9.10) e Eq. (9.11) indicam, na ordem, as representações algébricas para as barras (1) e (2) no sistema global:

$$\begin{cases} [H_{11}^{(1)}]\{U_1\} + [H_{12}^{(1)}]\{U_5\} = [G_{11}^{(1)}]\{P_1\} + [G_{12}^{(1)}]\{P_5\} \\ [H_{21}^{(1)}]\{U_1\} + [H_{22}^{(1)}]\{U_5\} = [G_{21}^{(1)}]\{P_1\} + [G_{22}^{(1)}]\{P_5\} \end{cases} \quad (9.10)$$

$$\begin{cases} [H_{22}^{(2)}]\{U_4\} + [H_{23}^{(2)}]\{U_3\} = [G_{22}^{(2)}]\{P_4\} + [G_{23}^{(2)}]\{P_3\} \\ [H_{32}^{(2)}]\{U_4\} + [H_{33}^{(2)}]\{U_3\} = [G_{32}^{(2)}]\{P_4\} + [G_{33}^{(2)}]\{P_3\} \end{cases} \quad (9.11)$$

Com a aplicação das condições de compatibilidade dos deslocamentos nas seções a esquerda e a direita do nó 2, apresentados anteriormente na Figura 18, tem-se:

$$\{U_2\} = \{U_4\} = \{U_5\} \quad (9.12)$$

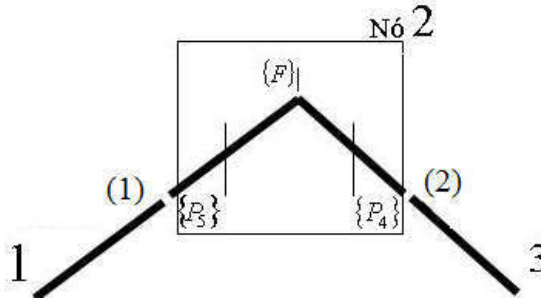
Somado a isso é necessário que exista também a compatibilização das condições de equilíbrio no nó 2, apresentado na Figura 19.

$$\{P_4\} + \{P_5\} - \{F\} = \{0\} \quad (9.13)$$

Onde: $\{F\}$, o vetor que contém as forças diretamente aplicadas no nó 2, estas forças traduzem a ação do nó na barra.

$\{P_5\}$ e $\{P_4\}$, são vetores que contém os esforços à esquerda e à direita desse nó, respectivamente.

Figura 19 - Condição de Equilíbrio no nó



Fonte: EXTRAÍDA DE CRUZ, 2012.

Substituindo-se as condições de compatibilidade de deslocamento, de acordo com a Eq. (9.12), e as condições de equilíbrio, conforme a Eq. (9.13), nas representações algébricas indicadas nas Eq. (9.10) e Eq. (9.11), o sistema algébrico da estrutura pode ser reagrupado como:

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{11}^{(1)} \\ H_{21}^{(1)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} H_{12}^{(1)} \\ H_{22}^{(1)} \\ H_{32}^{(2)} \\ H_{22}^{(2)} \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ H_{33}^{(2)} \\ H_{23}^{(2)} \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -G_{32}^{(2)} \\ -G_{22}^{(2)} \\ I \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -G_{12}^{(1)} \\ -G_{22}^{(1)} \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_1\} \\ \{U_2\} \\ \{U_3\} \\ \{P_4\} \\ \{P_5\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{11}^{(1)} \\ G_{21}^{(1)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ G_{33}^{(2)} \\ \hat{G}_{23}^{(2)} \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -I \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{P_1\} \\ \{0\} \\ \{P_3\} \\ \{0\} \\ \{F\} \end{Bmatrix} \quad (9.14)$$

10. APLICAÇÃO

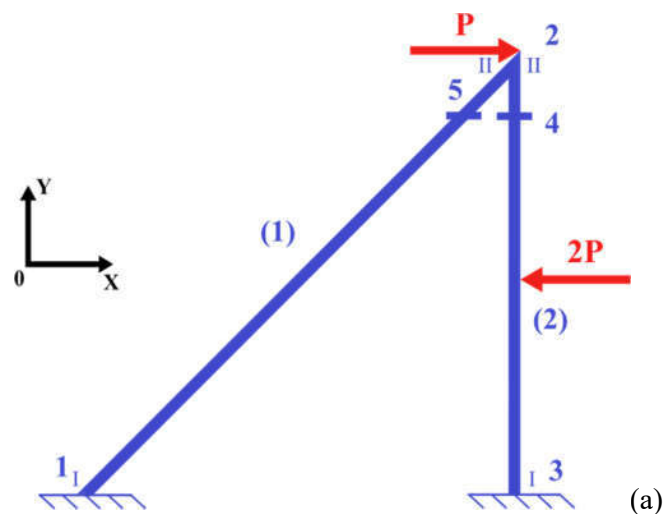
Neste capítulo, será apresentada a resolução via MEC de um pórtico plano simples com apenas uma barra chegando em cada nó vinculado.

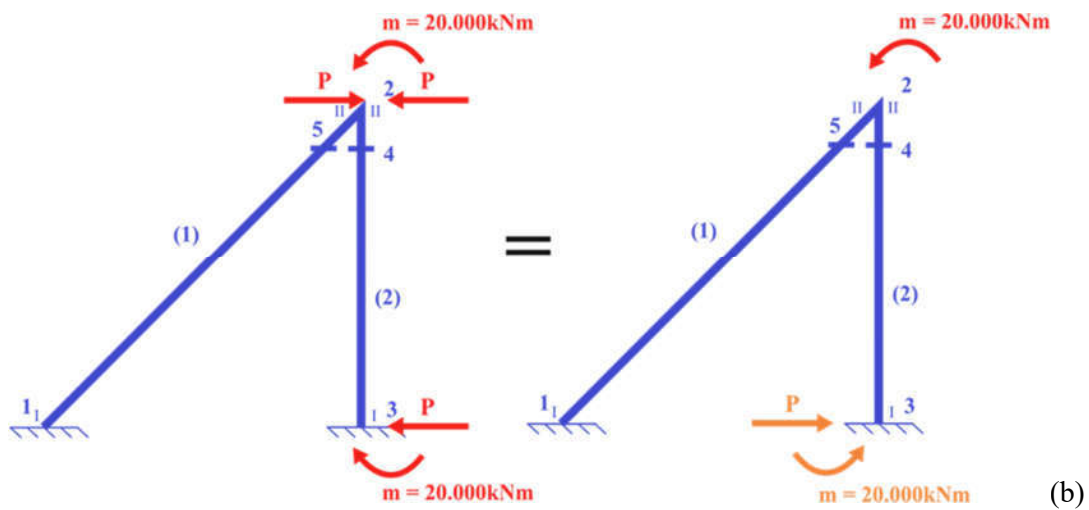
O pórtico analisado, Fig.20, é apoiado de forma que todos os deslocamentos das extremidades de ligação das barras vinculadas ao apoio sejam zero. O carregamento aplicado contém uma carga não nodal. Ele é composto por uma carga horizontal nodal (no nó 2) e outra, também, horizontal aplicada na metade da altura da barra (2). A validação dos resultados é obtida através da utilização do programa Ftool.

10.1. CARACTERIZAÇÃO DO PÓRTICO DA FIG. 20

A barra (1) inclinada a 45° com a horizontal (x crescente) tem comprimento igual a 5,6571 m e a barra (2), 4,0 m. Ambas têm seção transversal retangular de área igual a $0,20 \text{ m} \times 0,60 \text{ m}$ perfazendo $0,12 \text{ m}^2$ e momento de inércia igual a $0,0036 \text{ m}^4$. O material constituinte tem módulo de deformação longitudinal igual a $2,1 \times 10^9 \text{ KN/m}^2$. A estrutura está submetida a ação de duas forças horizontais concentradas. A força que atua no nó 2 tem intensidade igual a 20.000 kN , paralela ao eixo x com sentido positivo, enquanto a força não nodal que também é horizontal atuando em sentido negativo está aplicada na metade da altura da barra vertical e tem intensidade igual a 40.000 kN .

Figura 20 - Pórtico





10.2. ANÁLISE DO PÓRTICO DA FIG. 20

- Dados gerais

$$E = 2\,100\,000\,000 \text{ kN} / \text{m}^2$$

$$A = 0,12 \text{ m}^2$$

$$I_z = 0,0036 \text{ m}^4 \quad (10.1 \text{ a-c})$$

- Dados para a barra (1)

$$C_x = C_y = 0,7071$$

$$L_{(1)} = 5,657 \text{ m} \quad (10.2 \text{ a-b})$$

$$[R]_{(1)} = \begin{bmatrix} C_x & C_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -C_y & C_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_x & C_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -C_y & C_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,7071 & 0,7071 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,7071 & 0,7071 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,7071 & 0,7071 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,7071 & 0,7071 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10.3)$$

- Dados para a barra (2)

$$C_x = 0,0$$

$$C_y = 1,0$$

$$L_{(2)} = 4,0m \quad (10.4 \text{ a-c})$$

$$[R]_{(2)} = \begin{bmatrix} C_x & C_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -C_y & C_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_x & C_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -C_y & C_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10.5)$$

- As matrizes de influência no SGR para cada uma das barras.

A matriz $[H]^{(1)}$ para a barra (1)

$$[H]^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{L}{2}C_y & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{L}{2}C_x & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{L}{2}C_y \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{L}{2}C_x \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -2 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (10.6)$$

$$[H]_{11}^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (10.6 \text{ a})$$

$$[H]_{12}^{(1)} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (10.6 \text{ b})$$

$$[H]_{21}^{(1)} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (10.6 \text{ c})$$

$$[H]_{22}^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (10.6 \text{ d})$$

A matriz $[G]^{(1)}$ para a barra (1)

$$[G]^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{L^3}{6EI_z} C_y^2 & -\frac{L^3}{6EI_z} C_x C_y & 0 & -\frac{L}{2EA} C_x^2 & -\frac{L}{2EA} C_x C_y & \frac{L^2}{4EI_z} C_y \\ -\frac{L^3}{6EI_z} C_x C_y & \frac{L^3}{6EI_z} C_x^2 & 0 & -\frac{L}{2EA} C_x C_y & -\frac{L}{2EA} C_y^2 & -\frac{L^2}{4EI_z} C_x \\ 0 & 0 & \frac{L}{2EI_z} & -\frac{L^2}{4EI_z} C_y & \frac{L^2}{4EI_z} C_x & 0 \\ -\frac{L}{2EA} C_x^2 & -\frac{L}{2EA} C_x C_y & -\frac{L^2}{4EI_z} C_y & \frac{L^3}{6EI_z} C_y^2 & -\frac{L^3}{6EI_z} C_x C_y & 0 \\ -\frac{L}{2EA} C_x C_y & -\frac{L}{2EA} C_y^2 & \frac{L^2}{4EI_z} C_x & -\frac{L^3}{6EI_z} C_x C_y & \frac{L^3}{6EI_z} C_x^2 & 0 \\ \frac{L^2}{4EI_z} C_y & -\frac{L^2}{4EI_z} C_x & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{2EI_z} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix}
\frac{L^3}{6EI_z} C_y^2 & -\frac{L^3}{6EI_z} C_x C_y & 0 & -\frac{L}{2EA} C_x^2 & -\frac{L}{2EA} C_x C_y & \frac{L^2}{4EI_z} C_y \\
-\frac{L^3}{6EI_z} C_x C_y & \frac{L^3}{6EI_z} C_x^2 & 0 & -\frac{L}{2EA} C_x C_y & -\frac{L}{2EA} C_y^2 & -\frac{L^2}{4EI_z} C_x \\
0 & 0 & \frac{L}{2EI_z} & -\frac{L^2}{4EI_z} C_y & \frac{L^2}{4EI_z} C_x & 0 \\
-\frac{L}{2EA} C_x^2 & -\frac{L}{2EA} C_x C_y & -\frac{L^2}{4EI_z} C_y & \frac{L^3}{6EI_z} C_y^2 & -\frac{L^3}{6EI_z} C_x C_y & 0 \\
-\frac{L}{2EA} C_x C_y & -\frac{L}{2EA} C_y^2 & \frac{L^2}{4EI_z} C_x & -\frac{L^3}{6EI_z} C_x C_y & \frac{L^3}{6EI_z} C_x^2 & 0 \\
\frac{L^2}{4EI_z} C_y & -\frac{L^2}{4EI_z} C_x & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{2EI_z}
\end{bmatrix} \quad (10.7)$$

$$[G]_{11}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1,995.10^{-6} & -1,995.10^{-6} & 0 \\ -1,995.10^{-6} & 1,995.10^{-6} & 0 \\ 0 & 0 & 3.741.10^{-7} \end{bmatrix} \quad (10.7 \text{ a})$$

$$[G]_{12}^{(1)} = \begin{bmatrix} -5.612.10^{-9} & -5.612.10^{-9} & 7.483.10^{-7} \\ -5.612.10^{-9} & -5.612.10^{-9} & -7.483.10^{-7} \\ -7.483.10^{-7} & 7.483.10^{-7} & 0 \end{bmatrix} \quad (10.7 \text{ b})$$

$$[G]_{21}^{(1)} = \begin{bmatrix} -5.612.10^{-9} & -5.612.10^{-9} & -7.483.10^{-7} \\ -5.612.10^{-9} & -5.612.10^{-9} & 7.483.10^{-7} \\ 7.483.10^{-7} & -7.483.10^{-7} & 0 \end{bmatrix} \quad (10.7 \text{ c})$$

$$[G]_{22}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1,995.10^{-6} & -1,995.10^{-6} & 0 \\ -1,995.10^{-6} & 1,995.10^{-6} & 0 \\ 0 & 0 & 3,471.10^{-7} \end{bmatrix} \quad (10.7 \text{ d})$$

A matriz $[H]^{(2)}$ para a barra (2)

$$[H]^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{L}{2} C_y & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{L}{2} C_x & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{L}{2} C_y \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{L}{2} C_x \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{L}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{L}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (10.8)$$

$$[H]_{11}^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (10.8 \text{ a})$$

$$[H]_{12}^{(2)} = [H]_{21}^{(2)} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (10.8 \text{ b-c})$$

$$[H]_{22}^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (10.8 \text{ d})$$

A matriz $[G]^{(2)}$ para a barra (2)

$$[G]^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{L^3}{6EI_z} C_y^2 & -\frac{L^3}{6EI_z} C_x C_y & 0 & -\frac{L}{2EA} C_x^2 & -\frac{L}{2EA} C_x C_y & \frac{L^2}{4EI_z} C_y \\ -\frac{L^3}{6EI_z} C_x C_y & \frac{L^3}{6EI_z} C_x^2 & 0 & -\frac{L}{2EA} C_x C_y & -\frac{L}{2EA} C_y^2 & -\frac{L^2}{4EI_z} C_x \\ 0 & 0 & \frac{L}{2EI_z} & -\frac{L^2}{4EI_z} C_y & \frac{L^2}{4EI_z} C_x & 0 \\ -\frac{L}{2EA} C_x^2 & -\frac{L}{2EA} C_x C_y & -\frac{L^2}{4EI_z} C_y & \frac{L^3}{6EI_z} C_y^2 & -\frac{L^3}{6EI_z} C_x C_y & 0 \\ -\frac{L}{2EA} C_x C_y & -\frac{L}{2EA} C_y^2 & \frac{L^2}{4EI_z} C_x & -\frac{L^3}{6EI_z} C_x C_y & \frac{L^3}{6EI_z} C_x^2 & 0 \\ \frac{L^2}{4EI_z} C_y & -\frac{L^2}{4EI_z} C_x & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{2EI_z} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{L^3}{6EI_z} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L^2}{4EI_z} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{L}{2EA} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{2EI_z} & -\frac{L^2}{4EI_z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{L^2}{4EI_z} & \frac{L^3}{6EI_z} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{L}{2EA} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{L^2}{4EI_z} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{2EI_z} \end{bmatrix} \quad (10.9)$$

$$[G]_{11}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1,111.10^{-6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2,646.10^{-7} \end{bmatrix} \quad (10.9 \text{ a})$$

$$[G]_{12}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5,291.10^{-7} \\ 0 & -7,937.10^{-9} & 0 \\ -5,291.10^{-7} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (10.9 \text{ b})$$

$$[G]_{21}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -5,291.10^{-7} \\ 0 & -7,937.10^{-9} & 0 \\ 5,291.10^{-7} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (10.9 \text{ c})$$

$$[G]_{22}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1,411.10^{-6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2,646.10^{-7} \end{bmatrix} \quad (10.9 \text{ d})$$

$$\begin{bmatrix} [H]_{11}^{(1)} & [H]_{12}^{(1)} & [0] & [0] & [-G]_{12}^{(1)} \\ [H]_{21}^{(1)} & [H]_{22}^{(1)} & [0] & [0] & [-G]_{22}^{(1)} \\ [0] & [H]_{32}^{(2)} & [H]_{33}^{(2)} & [-G]_{32}^{(2)} & [0] \\ [0] & [H]_{22}^{(2)} & [H]_{23}^{(2)} & [-G]_{22}^{(2)} & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [I] & [I] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_1\} \\ \{U_2\} \\ \{U_3\} \\ \{P_4\} \\ \{P_5\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [G]_{11}^{(1)} & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [G]_{21}^{(1)} & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [G]_{33}^{(2)} & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [G]_{23}^{(2)} & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [I] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{P_1\} \\ \{0\} \\ \{P_3\} \\ \{0\} \\ \{P_2\} \end{Bmatrix} \quad (10.10)$$

$$\begin{bmatrix}
-[G]_{11}^{(1)} & [H]_{12}^{(1)} & [0] & [0] & [-G]_{12}^{(1)} \\
-[G]_{21}^{(1)} & [H]_{22}^{(1)} & [0] & [0] & [-G]_{22}^{(1)} \\
[0] & [H]_{32}^{(2)} & -[G]_{33}^{(2)} & -[G]_{32}^{(2)} & [0] \\
[0] & [H]_{22}^{(2)} & -[G]_{23}^{(2)} & -[G]_{22}^{(2)} & [0] \\
[0] & [0] & [0] & [I] & [I]
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix}
\{P\}_1 \\
\{U\}_2 \\
\{P\}_3 \\
\{P\}_4 \\
\{P\}_5
\end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix}
\{0\} \\
\{0\} \\
\{0\} \\
\{0\} \\
\{P\}_2
\end{Bmatrix}
\quad (10.11)$$

$$\begin{bmatrix}
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \vdots & 14 \\
-1.995 \cdot 10^{-6} & 1.995 \cdot 10^{-6} & 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & & \\
1.995 \cdot 10^{-6} & -1.995 \cdot 10^{-6} & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0 & & \\
0 & 0 & -3.741 \cdot 10^{-7} & 0 & 0 & -0.5 & 0 & & \\
5.612 \cdot 10^{-9} & 5.612 \cdot 10^{-9} & 7.483 \cdot 10^{-7} & 0.5 & 0 & 2 & 0 & & \\
5.612 \cdot 10^{-9} & 5.612 \cdot 10^{-9} & -7.483 \cdot 10^{-7} & 0 & 0.5 & -2 & 0 & & \\
-7.483 \cdot 10^{-7} & 7.483 \cdot 10^{-7} & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & & \\
0 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0 & -1.411 \cdot 10^{-6} & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0 & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & & \\
0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 2 & 0 & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & -5.291 \cdot 10^{-7} & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots &
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
P_1 \\
P_2 \\
P_3 \\
D_4 \\
D_5 \\
D_6 \\
P_7 \\
P_8 \\
P_9 \\
P_{N4} \\
P_{V4} \\
P_{M4} \\
P_{N5} \\
P_{V5} \\
P_{M5}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
-20000
\end{bmatrix}
\quad (10.12)$$

A matriz completa da Eq. (10.12) se encontra nos anexos.

$$\begin{bmatrix}
P_1 \\
P_2 \\
P_3 \\
D_4 \\
D_5 \\
D_6 \\
P_7 \\
P_8 \\
P_9 \\
P_{N4} \\
P_{V4} \\
P_{M4} \\
P_{N5} \\
P_{V5} \\
P_{M5}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
-4.203855 \cdot 10^3 \\
-7.3059143 \cdot 10^3 \\
-3.9722648 \cdot 10^3 \\
0.0003743 \\
-0.000116 \\
-0.00167 \\
4.203855 \cdot 10^3 \\
7.3059143 \cdot 10^3 \\
-5.2513922 \cdot 10^3 \\
-4.203855 \cdot 10^3 \\
-7.3059143 \cdot 10^3 \\
-1.1564028 \cdot 10^4 \\
4.203855 \cdot 10^3 \\
7.3059143 \cdot 10^3 \\
-8.4359722 \cdot 10^3
\end{bmatrix}
\quad (10.13)$$

10.3. OS RESULTADOS OBTIDOS VIA MEC

As reações dos apoios do nó 1 e do nó 3.

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_7 \\ P_8 \\ P_9 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -4203,85kN \\ -7305,91kN \\ -3972,26kNm \\ 4203,85kN \\ 7305,91kN \\ -5251,39kNm \end{Bmatrix} \quad (10.14)$$

Os deslocamentos do nó 2

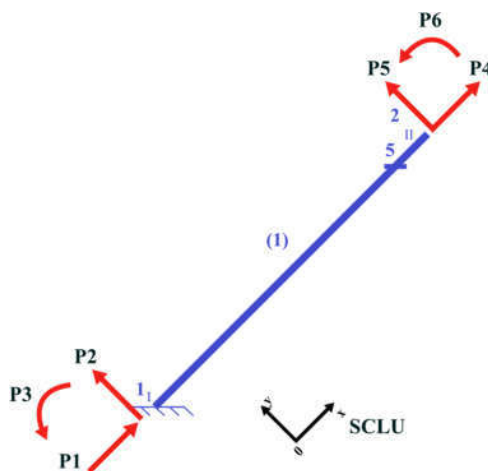
$$\begin{Bmatrix} D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,0003743m \\ -0,000116m \\ -0,00167rad \end{Bmatrix} \quad (10.15)$$

Esforços na extremidade 2 da barra (1)

É importante observar que os esforços na extremidade dois da barra (1) são os mesmos esforços do nó 5 referidos ao sistema local, conforme indicado na Fig. 21.

$$\begin{Bmatrix} p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{Bmatrix}_{(1)} = \begin{Bmatrix} 8138,55kN \\ 2193,47kN \\ -8435,97kNm \end{Bmatrix} \quad (10.16)$$

Figura 21 - Barra (1) e o SCLU e esforços nas extremidades

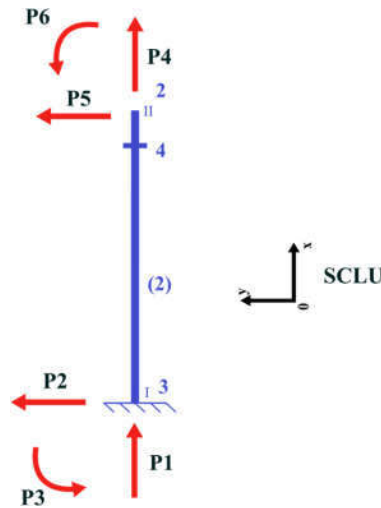


Esforços na extremidade 2 da barra (2)

Do mesmo modo é importante observar que os esforços na extremidade dois da barra (2) são os mesmos esforços do nó 4 referidos ao sistema local, conforme indicado na Fig. 22.

$$\begin{Bmatrix} p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{Bmatrix}_{(2)} = \begin{Bmatrix} -7305,91kN \\ -4203,85kN \\ -11564,03kNm \end{Bmatrix} \quad (10.17)$$

Figura 22 - Barra (2) e o SCLU e esforços nas extremidades



O programa utilizado para a resolução do problema foi o PTC mathcad prime 8. Esse, segundo dados fornecidos pela empresa responsável trabalha com dezesseis casas decimais, o que proporcionou encontrar para a matriz $[A]$ o seu determinante diferente de zero, para ser mais exato o valor $-1,802 \cdot 10^{-61}$ o que tornou o sistema possível.

10.4. RESULTADOS OBTIDOS VIA F-TOOL.

As reações dos apoios do nó 1 e do nó 3.

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_7 \\ P_8 \\ P_9 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -4203,85kN \\ -7305,91kN \\ -3972,26kNm \\ 4203,85kN \\ 7305,91kN \\ -5251,39kNm \end{Bmatrix} \quad (10.18)$$

Os deslocamentos do nó 2

$$\begin{Bmatrix} D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,0003743m \\ -0,000116m \\ -0,00167rad \end{Bmatrix} \quad (10.19)$$

Esforços na extremidade 2 da barra (1)

$$\begin{Bmatrix} p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{Bmatrix}_{(1)} = \begin{Bmatrix} 7305,9kN \\ -4203,9kN \\ -8435,7kNm \end{Bmatrix} \quad (10.20)$$

Esforços na extremidade 2 da barra (2)

$$\begin{Bmatrix} p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{Bmatrix}_{(2)} = \begin{Bmatrix} -7305,9kN \\ -4203,9kN \\ -11564,0kNm \end{Bmatrix} \quad (10.21)$$

11. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente TCC apresentou a formulação adequada – do efeito axial e do efeito da flexão em Z – é importante destacar que esta última, a da flexão em torno do eixo Z foi desenvolvida pelo autor, sendo as demais partes extraídas principalmente da referência Cruz, 2012. Com o objetivo principal a divulgação do MEC aplicado às estruturas reticuladas planas no ambiente da graduação no curso de engenharia civil da UFPB, considerou-se legítima a utilização do material presente na tese: *CONTRIBUIÇÃO À ANÁLISE ESTÁTICA E DINÂMICA DE PÓRTICOS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO*, sem a continuada citação de fonte ou de origem dos textos e das ideias utilizadas no esforço despendido para se alcançar o fim desejado

O estabelecimento da representação algébrica da estrutura e a obtenção da equação matricial $[A]\{V_D\} = \{V_I\}$ foi outro item da formulação que ganhou um detalhamento a parte se considerado o constante da tese referida, ficando mais detalhada e sequenciada as etapas para sua obtenção como se pode constatar na solução do pórtico da fig. 20.

Assim, da equação diferencial governante do problema real e do fundamental para os efeitos estudados, chega-se às equações integrais de cuja solução são obtidas as representações algébricas referidos ao sistema de coordenadas locais a serem considerados na análise de

pórticos planos. Em seguida estas representações são reescritas referidas ao chamado sistema de coordenadas locais unificados.

Nesse momento é feita a introdução da matriz $[R]$, que manipula as equações justamente para promover a definição de um sistema mais geral em relação ao qual todas as grandezas de interesse de cada uma das barras do pórtico estarão ao final referidas, o Sistema de Coordenadas Global.

Posto isto, é apresentada a técnica utilizada para a obtenção das matrizes de influência de pórticos planos, nos quais, como no caso deste trabalho, chega apenas uma barra a cada apoio. Para mais, também, foi considerada a estrutura submetida a um carregamento nodal, seja devido à condição original deste carregamento ou devido à utilização do conceito de carregamento nodal equivalente, através do qual a parcela do carregamento não nodal é transferida para as extremidades da barra no qual atua e, portanto, sendo transformado finalmente em um carregamento nodal. Para maiores detalhes vide por exemplo CRUZ; 2000.

A apresentação da formulação, ao término do TCC, mostrou-se apropriada pois foi desenvolvida de maneira a mais didática possível e sua aplicação levada a efeito a partir de várias etapas nas quais apresentam-se muitos detalhes e interpretações necessárias. Os valores das grandezas calculadas a partir da estratégia aqui indicada apresentaram ótima aproximação aos valores das grandezas obtidas via Ftool ou mesmo via analítica. Para comprovação basta comparar os resultados das reações de apoio obtidos via MEC Eq. (10.14) com os valores obtidos via F-TOOL, Eq. 10.18. A comparação pode continuar verificando por exemplo os deslocamentos do nó 2, obtidos via MEC e via F-TOOL, respectivamente nas Eqs. 10.15 e 10.19 e etc.

REFERÊNCIAS

ALEXANDER H. -D. CHENG, DAISY, T. C., 2005, “**HERITAGE AND ESRLY HISTORY OF THE BOUNDARY ELEMENT METHOD**”, Elsevier Ltd. Engineering Analysis with Boundary Elements, v. 29, pp. 268-302.

BREBBIA, C. A.; DOMINGUEZ, J. **BOUNDARY ELEMENT METHODS FOR POTENTIAL PROBLEMS. APPLIED MATHEMATICAL MODELLING**, v. 1, n. 7, p. 372-378, 1977.

BREBBIA, C. A., DOMINGUEZ. J, **BOUNDARY ELEMENTS AN INTRODUCTORY COURSE**; Computational Mechanics Publications; McGraw-Hill Book Company; Southampton, Boston; Second impression November, 1989;

BUFFON, L.P., **FORMULAÇÕES DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA A ANÁLISE MECÂNICA DE DOMÍNIOS PLANOS NÃO-HOMOGÊNEOS ENRIJECIDOS**. 2018. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Paulo.

CAVALCANTI, M. DO C. R. **ANÁLISE POR ELEMENTOS DE CONTORNO DE MEIOS PORO-ELÁSTICOS SATURADOS PELA TEORIA DE BIOT**.

CLOUGH, R. W.; WILSON, E. L. **EARLY FINITE ELEMENT RESEARCH AT BERKELEY**, 1999. (Nota técnica).

CRUZ, J. M. F. **ANÁLISE ESTÁTICA DE PÓRTICOS VIA MEC**. 1o ed. João Pessoa: v. 1

CRUZ, J. M. F. **CONTRIBUIÇÃO À ANÁLISE ESTÁTICA E DINÂMICA DE PÓRTICOS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO**. João Pessoa - PB: UFPB, 19 out. 2012.

LIVESLEY, R.K., 1975, **MATRIX METHODS OF STRUCTURAL ANALYSIS**. Oxford: Pergamon Press, 2. Ed.

MARTHA, L.F., **ANÁLISE DE ESTRUTURAS – CONCEITOS E MÉTODOS BÁSICOS**. Editora LTC. 2ª Edição.2010;

QUEIROZ, P.C. DE O., 2010, **ANÁLISE ESTÁTICA E DINÂMICA DE ESTRUTURAS RETICULADAS: AMBIENTE DE SIMULAÇÃO EM JAVA**. Dissertação, mestrado, UFPB, João Pessoa, PB.

SANTOS, R. S., **UMA ESTRATÉGIA PARA ANÁLISE ESTÁTICA DE PÓRTICOS PLANOS E ESPACIAIS UTILIZANDO-SE O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO**. Universidade Federal de São João Del-Rei; Associação Brasileira de métodos Computacionais em Engenharia; Nono Simpósio de Mecânica Computacional, 26 a 28 de maio de 2010. São João Del-Rei - MG; 2010

TIMOSHENKO, S. P; GOODIER, J. N; **THEORY OF ELASTICITY**; McGraw-Hill Book Company; Second Edition, 1951;

ANEXOS

ANEXO A1 FUNÇÕES ESPECIAIS UTILIZADAS NESTE TCC

A1.1 A função sgn

É a função sinal que é igual a 1 se $x > \hat{x}$, sendo igual a -1 quando $\hat{x} > x$.

A1.2 A função delta de Dirac

É a função sinal que é igual a 1 se $x > \hat{x}$, sendo igual a -1 quando $\hat{x} > x$.

O delta de Dirac (Paul Adrien Maurice **Dirac** (1902-1984) físico teórico britânico) tem a seguinte definição:

$$\delta(x, \hat{x}) = \begin{cases} \infty & \text{se } x = \hat{x} \\ 0, & \text{se } x \neq \hat{x} \end{cases}$$

onde: x é o ponto de leitura do efeito (ponto campo), e $\hat{x}$ é o ponto de aplicação da fonte (ponto fonte). Algumas propriedades do delta de Dirac são:

$$\int_{\Omega} \delta(x, \hat{x}) d\Omega = 1$$

$$\int_{\Omega} u(x) \delta(x, \hat{x}) d\Omega = u(\hat{x})$$

A1.3 Matriz resolução

[illegible]