



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE TECNOLOGIA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Daniel Bezerra de Oliveira

Soluções de Sistemas Duplos de Placas Espessas Elasticamente Conectadas: Uma Abordagem Analítica.

João Pessoa-PB
Dezembro de 2022

DANIEL BEZERRA DE OLIVEIRA

Soluções de Sistemas Duplos de Placas Espessas Elasticamente Conectadas: Uma Abordagem Analítica.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Graduação em Engenharia Civil, da Universidade Federal da Paraíba, Centro de Tecnologia, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, como um dos requisitos para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia Civil

Orientador: Prof. Dr. Ângelo Vieira Mendonça

João Pessoa-PB

Dezembro de 2022

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

048s Oliveira, Daniel Bezerra de.
Soluções de Sistemas Duplos de Placas Espessas
Elasticamente Conectadas: uma Abordagem Analítica. /
Daniel Bezerra de Oliveira. - João Pessoa, 2022.
58 f. : il.

Orientação: Ângelo Vieira Mendonça.
Monografia (Graduação) - UFPB/CT.

1. Placas Duplas. 2. Pasternak. 3. Reissner/Mindlin.
I. Mendonça, Ângelo Vieira. II. Título.

UFPB/BSCT CDU 624(043.2)

FOLHA DE APROVAÇÃO

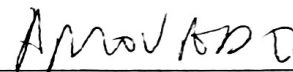
DANIEL BEZERRA DE OLIVEIRA

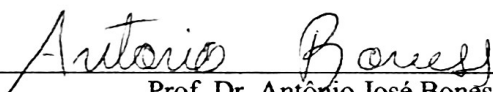
SOLUÇÕES DE SISTEMAS DUPLOS DE PLACAS ESPESSAS ELASTICAMENTE CONECTADAS: UMA ABORDAGEM ANALÍTICA.

Trabalho de Conclusão de Curso em 09/12/2022 perante a seguinte Comissão Julgadora:

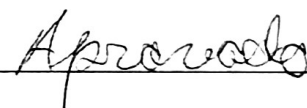


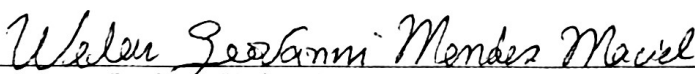
Prof. Dr. Ângelo Vieira Mendonça
Departamento de Engenharia Civil e Ambiental do CT/UFPB



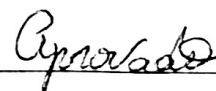


Prof. Dr. Antônio José Boness dos Santos
Departamento de Computação Científica do CI/UFPB





Prof. Dr. Weber Giovanni Mendes Maciel
Departamento de Engenharia Civil /IFPB





Prof.ª. Dra. Andrea Brasiliano Silva / Matrícula Siape: 1549557
Coordenadora do Curso de Graduação em Engenharia Civil

AGRADECIMENTOS

Esse trabalho é fruto de uma pesquisa que se desenvolve a cerca de 2 anos e, ao longo desse período, pessoas com significativa relevância passaram por minha vida, sem contar as pessoas que fizeram parte de toda a história da graduação e da minha vida em si. Sendo assim, deixo meus breves agradecimentos, como uma forma simbólica de mostrar para essas pessoas a importância com a qual eu as trato.

Primeiro e de forma inquestionável agradeço a Deus, em seguida a minha mãe, Maria Janaína, por tudo que fez por mim e continua a fazer e, automaticamente, a toda a minha família.

Depois, agradeço ao Professor Ângelo, por sua indiscutível dedicação com a ciência, por sua forma inspiradora de fazer ciência e sua capacidade de orientação. Pegando o embalo, ficam meus agradecimentos a todos do LAMFIC.

Na sequência, citarei algumas pessoas, as quais tenho muito apreço e que de alguma forma estiveram comigo e/ou me inspiraram durante essa passagem na graduação. São eles, Lucas Barros, Alex, Jadson, Victor Lispector, Faninho, Breno, Abigail, Ana Flávia, Letícia, Larissa, Gustavo, Rodrigo, Nathaly, Gabriel Monteiro, Abner, a Professora Lúcia Cossi, ao Professor Geilson, a Professora da UFG, Cláudia, e aos Professores Richarde e Celso.

Agradeço a todos os demais colegas, professores e servidores em geral do curso de Engenharia Civil, aos colegas da Residência Universitária e da UFPB.

Agradeço a própria UFPB e ao CNPq.

RESUMO

Análises de flexão, vibração e flambagem vêm sendo feitas para melhor entender o comportamento mecânico de problemas envolvendo placas simples e sistemas de placas interconectadas por camadas preenchimento entre elas, devido a larga aplicação desses problemas na engenharia civil, mecânica, aeronáutica e em outros campos das ciências tecnológicas. Neste trabalho, soluções analíticas para placas duplas espessas retangulares submetidas a cargas estáticas são deduzidas levando-se em conta as teorias de Kirchhoff, Reissner e Mindlin, onde as placas são constituídas de material elástico-linear, isotrópico e homogêneo e, a camada interconectante é assumida por ser uma fundação elástica de Pasternak. As soluções analíticas de algumas condições de contorno são deduzidas utilizando expansões em séries trigonométricas duplas e simples baseadas nos métodos de Navier e Levy, de acordo com suas aplicabilidades. Além disso, o método de Hormander é utilizado para fazer o desacoplamento do sistema de equações diferenciais parciais acopladas decorrente do método de Levy. Exemplos de aplicação são apresentados para validação das soluções, que comparam os deslocamentos e os momentos nas placas e verifica a influência do cortante nos deslocamentos à medida que a espessura cresce. Além disso também é verificado a influência do parâmetro de cisalhamento de Pasternak nos deslocamentos das placas. Os resultados indicam robustez e coerência dos cenários analisados.

Palavras Chaves: Placas Duplas. Pasternak. Reissner/Mindlin.

ABSTRACT

Bending, vibration and buckling analyses have been done to better understand the mechanical behavior of problems involving both single plates and systems of plates interconnected by layers in between them, due to the wide application of these problems in civil, mechanical, aeronautical engineering, and in other fields of the technological sciences. In this work, analytical solutions for rectangular double thick plates subjected to static loads are derived according to Kirchhoff, Reissner and Mindlin's theories, where the plates are made of elastic-linear, isotropic and homogeneous material, and the connecting layer is assumed to be an elastic Pasternak foundation. The analytical solutions for some boundary conditions are obtained using double and single trigonometric series expansions based on the methods of Navier and Levy, according to their applicability. In addition, Hormander's method is used to decouple the system of coupled partial differential equations resulting from Levy's method. Application examples are presented to validate the solutions, which compare the displacements and moments in the plates and verify the influence of the shear on the displacements as the thickness increases. In addition, the influence of the Pasternak shear parameter on the displacements of the plates is also verified. The results indicate robustness and coherence of the analyzed scenarios.

Keywords: Double Plates. Pasternak. Reissner/Mindlin.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Modelo Cúbico Infinitesimal

Figura 2 - Modelo Cinemático de Placa Simples de Kirchhoff

Figura 3 - Cinemática da Placa de Kirchhoff

Figura 4 - Representação dos Esforços Internos na Placa Simples

Figura 5 - Modelo Cinemático de Placa Simples de Mindlin

Figura 6 - Cinemática da Placa de Mindlin

Figura 7 - Representação Esquemática da Fundação de Pasternak

Figura 8 - Modelo de Placas Duplas Elasticamente Conectadas

Figura 9 - Modelo de Placas Duplas Elasticamente Conectadas (Solução de Navier).

Figura 10 - Modelo de Placa Dupla Elasticamente Conectadas (Solução de Levy).

Figura 11 - Placa Dupla Simplesmente Apoiada Sobre Carregamento Uniforme.

Figura 12 - Placa Dupla Sobre Carregamento Constante em Linha.

Figura 13 - Momentos Fletores ao Longo das Placas Inferior e Superior para a carga uniformemente distribuída.

Figura 14 - Momentos Fletores ao Longo das Placas Inferior e Superior para a carga em Linha, Constante e Uniforme

Figura 15 - Espessura Versus Erro Relativo nas Placas com Carga Uniformemente Distribuída

Figura 16 - Espessura Versus Erro Relativo nas Placas com Carga em Linha

Figura 17 - Influência do Módulo de Cisalhamento da fundação nos deslocamentos para Carga Uniformemente Distribuída.

Figura 18 - Influência do Módulo de Cisalhamento da fundação nos deslocamentos Placas com Carga em Linha.

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Condições de Contorno para Placas.

Tabela 2 - Deslocamentos nas placas com carga distribuída e espessura $h_1=h_2= 0,05$ m.

Tabela 3 - Deslocamentos nas placas com carga distribuída e com espessura $h_1=h_2= 0,2$ m.

Tabela 4 - Deslocamentos nas placas com carga aplicada em linha e com espessura $h_1=h_2= 0,08$ m.

Tabela 5 - Deslocamentos nas placas com carga aplicada em linha e com espessura $h_1=h_2= 0,25$ m.

SUMÁRIO

1. Introdução.....	10
2. Objetivo Geral	13
Objetivos específicos	13
3. Fundamentação Teórica	14
3.1 Equações Constitutivas do Estado Tridimensional	14
3.2 Teoria Clássica de Placas.....	15
3.3 Teoria de Placas de Mindlin	20
3.4 Teoria de Placas de Reissner	24
3.5 Fundação de Pasternak.....	26
4 Metodologia.....	27
4.1 Sistema Duplo de placas Retangulares Conectadas Elasticamente	27
4.2 Solução Analítica do Sistema	29
4.2.1 Método de Navier	29
4.2.2 Método de Levy.....	32
4.2.3 Método de Hormander Aplicado ao Sistema de Placas Duplo de Kirchhoff	40
4.3 Condições de Contorno.....	43
5 Resultados e Discussões	44
5.1 Estudo dos Deslocamentos	45
5.2 Estudo dos Momentos.....	49
5.3 Estudo da Influência da Espessura.....	50
5.4 Estudo da Influência do Módulo de Pasternak	52
6 Conclusão	54
Referências.....	

1. Introdução

Na análise de estruturas, diversos elementos estruturais (vigas, pilares, cascas, blocos de coroamento e fundações diversas) são alvos de estudos que buscam compreender o seu comportamento mecânico quando submetidos a cargas de diversas fontes. Entre esses elementos, encontram-se, também, as placas. Essas podem ser encontradas como modelos isolados, ligados a outros tipos de estruturas, apoiados sobre uma camada elástica e, ainda, como um sistema de placas conectadas por algum tipo de camada, seja elástica ou até mesmo viscoelástica.

Na prática, os exemplos de aplicação de placas simples aparecem em estruturas civis (edifícios), navais (navios) e aeronáuticas (aviões) (OTA, 2016). Tratando-se da construção civil, pode-se citar a aplicação de modelos de placas simples em lajes de edifícios, em tampas de elementos de drenagem (bueiros, bocas de lobo). Em se tratando de placas duplas conectadas por uma camada elástica, esses sistemas podem ser encontrados em viadutos, sistemas de decks, pontes, pavimentos rígidos, galerias de drenagem, placas sanduiches, nanoplacas de grafeno (PEREIRA, 2020) e (GBADEYAN, 2019).

As placas podem ser definidas como elementos tridimensionais, onde suas dimensões no plano são preponderantes diante de sua espessura, o que permite assumir uma representação plana para descrever o modelo, definido no plano médio da mesma. Além disso, esse elemento possui o carregamento sendo necessariamente aplicado perpendicularmente ao seu plano médio (PEREIRA, 2002 e REDDY, 2007). Quando essas placas aparecem ligadas e trabalhando conjuntamente por meio de uma interação promovida através de uma camada elástica, surgem então os sistemas duplos de placas elasticamente conectadas.

Para fazer o estudo do comportamento mecânico das placas existem algumas teorias que fornecem hipóteses e que, a depender da robustez do projeto estrutural, vai ser a mais adequada a ser utilizada. A teoria de Kirchhoff (1850), também conhecida por teoria clássica, traz hipóteses que podem ser aplicadas a placas de comportamento elástico linear, delgadas, com pequenos deslocamentos e conservação da planicidade da seção transversal juntamente com sua ortogonalidade com o plano médio da placa, implicando na desconsideração dos efeitos de cisalhamento. A teoria clássica resulta em uma equação diferencial, governante, de quarta ordem em termos de deslocamento transversal, requerendo apenas duas condições de contorno naturais (ANDRADE, 2001). Para uma análise mais robusta onde se percebe, inclusive, os

efeitos decorrentes do cisalhamento, pode-se citar duas teorias: a de Reissner (1945) e a de Mindlin (1951), ambas compartilham de muita similaridade em suas hipóteses formuladoras, diferindo no fato que enquanto Reissner trabalha com distribuições pré-definidas (assumidas) de tensões normais e tangenciais ao longo da espessura, Mindlin considera distribuições pré-definidas para os deslocamentos. Ambas as teorias são aptas a tratar tanto problemas de placas delgadas, como de placas espessas e em ambas se verifica um sistema de equações diferenciais condensado de sexta ordem quando escrita apenas em função dos deslocamentos transversais, onde se faz necessário a aplicação de três condições de contorno essenciais (CHINNABOON et al., 2011).

Já com relação as camadas elásticas, essas podem ser representadas por modelos físico-matemáticos que podem incorporar o problema com diversos níveis de detalhamento, tais como as abordagens do meio contínuo (teoria da elasticidade) ou modelos discretos de fundação elástica. Dois modelos bastante utilizados para fins de modelagem de fundação elástica são o modelo de Winkler (1867), o qual trabalha apenas com um parâmetro e leva em consideração a proporcionalidade entre a carga aplicada e os deslocamentos nas molas. E o modelo de Pasternak (1954), mais sofisticado, que leva em consideração dois parâmetros independentes para prever a reação das molas quando submetida a ações, um desses parâmetros é o mesmo do modelo de Winkler e outro visa reproduzir os efeitos de cisalhamento entre as molas (ALTOÉ, 2009).

Em termos de soluções analíticas, para esse tipo de análise e, para placas isoladas, existem os bem conhecidos métodos de Navier e Levy. Ambos trabalham com a formulação do carregamento e dos deslocamentos e rotações em termos de séries trigonométricas, a primeira sugere séries de duplos senos e/ou cossenos e a segunda propõe séries simples de senos e cossenos, Timoshenko e Woinowsky (1959). Devido, justamente, as funções trigonométricas assumidas para cada caso de solução, a proposta de Navier é apenas aplicável para placas retangulares com todas as bordas simplesmente apoiadas, o que não permite grande flexibilidade na elaboração de projetos. E a solução de Levy é aplicável a placas retangulares, com pelo menos duas bordas opostas simplesmente apoiadas, percebendo maior liberdade.

Diversos trabalhos envolvendo soluções analíticas e numéricas já foram publicados com o intuito de entender as placas simples delgadas (teoria de Kirchhoff) apoiada em bases elásticas. Em 1997, Omurtag et al. (1997), fizeram uma análise dinâmica envolvendo uma placa simples

apoiada em uma camada elástica de pasternak, onde a determinação das vibrações livres foi obtida via o método dos elementos finitos baseado no diferencial de Gâteaux.

No que se refere a estudos envolvendo a teoria de Mindlin, pode-se citar, Shi et al. (2017), fizeram estudos de vibrações livres e forçadas em placas retangulares apoiadas em bases elásticas de winkler ou Pasternak, para tanto foi utilizado o método que envolve as séries de Fourier. Rajesh e Koppanati (2018) e Kim et al. (2021), trabalharam na determinação das vibrações livres em placas retangulares. O primeiro, no entanto, desenvolveu um novo método para determinar tais grandezas com um sistema composto por placa simples com espessura moderada e se encontrava sobre uma camada elástica de Pasternak, enquanto o segundo foi feito para placas duplas ligadas entre si por uma camada elástica, segundo o método que envolve a ausência de malhas.

Outro trabalho focado na determinação de vibrações é apresentado por Shen et al. (2001), o mesmo trabalhou as placas simples com todos os lados simplesmente apoiados, sendo suportada por uma camada elástica de Pasternak e, além de considerar a influência do cisalhamento, efeitos térmicos foram levados em conta.

Um outro estudo sobre placas espessas foi realizado por Nobakhti e Aghdam (2011), fazendo uma análise estática dessas placas simples sobre uma fundação de Pasternak, o estudo envolveu a análise de várias condições de contorno na placa. Um trabalho envolvendo o método dos elementos de contorno para a análise do sistema duplo de placa finas conectadas por uma camada de Winkler foi realizado por Pereira (2020) e Pereira et al. (2022), além do método numérico, as soluções analíticas também foram desenvolvidas, diversos casos de combinação de carregamentos e condições de contorno foram abordados. Elias (2021), desenvolveu um elemento finito quadrilátero para placas simples usando fundamentos da teoria de Mindlin, baseando-se no princípio variacional, onde alguns casos de condições de contorno foram por ele analisados. Outros trabalhos também envolveram a determinação das vibrações em placas, a saber: Rosa e Lippiello (2008); Swamida e Kunukkasseril (1973) e (1975).

Além desses, Da Veiga et al. (2012) se envolveu em estudos baseados na teoria de Reissner-Mindlin, onde formulou um elemento finito para estimar os momentos fletores em placas simples engastadas. Outro estudo que considera as hipóteses de Reissner e faz o uso de elementos finitos para análise de placa simples é visto em Pereira (2002). Liu et al. (2022) elaborou um elemento finito para o estudo da flexão em placas simples decorrentes das hipóteses de Reissner-Mindlin. Altoé (2015), ainda trabalhando no estudo de placas simples e

usando a metodologia de elementos de contorno, examinou as placas de Reissner, simplesmente apoiadas e engastadas, suportadas pela base de Pasternak. Estudos de placas simples envolvendo o método dos elementos de contorno à luz da teoria de placa de Reissner podem ser citados, como, (RIBEIRO, 1992); (SILVA, 1996) e (ANDRADE, 2001), nos três estudos, as placas eram isoladas.

O estudo de placas duplas tem recebido bem menos atenção que os problemas de placas simples. Oniszczyk (2000), analisou as vibrações transversais livres em placas duplas, segundo a proposta analítica de Navier, conectadas entre si por uma camada de Winkler. O mesmo autor, Oniszczyk (2004), ampliou seus estudos sobre o mesmo sistema duplo de placas para entender as vibrações forçadas. Um estudo mais complexo realizado por Stojanovic et al. (2015), direcionou-se às vibrações naturais em sistemas de múltiplas placas conectadas entre si por uma camada elástica de Winkler, levando em conta as hipóteses da teoria clássica, da teoria de Mindlin e da teoria de Reddy e, além disso, também verificaram as cargas críticas de flambagem nesses sistemas. Millar e David (2015), se ocuparam em entender o problema de flambagem que envolve os sistemas de placas simplesmente apoiadas, para tal feito foi utilizado a metodologia de elementos finitos. Nasirshoaibi e Mohammadi (2015a) e Nasirshoaibi e Mohammadi (2015b), preocuparam-se em fazer a análise das placas duplas ligadas por uma camada de Pasternak, extraíndo resultados sobre vibrações livres e forçadas mediante solução analítica. Hedrih (2006) também estudou vibrações em sistemas duplos de placas de Kirchhoff.

Conforme descrito anteriormente, nota-se que por mais que existam alguns trabalhos envolvendo placas duplas, a maioria foi direcionada para estudar problemas de vibração. Além disso, a maior parte considera que as placas são delgadas ligadas por uma camada elástica de Winkler. No entanto, notam-se lacunas no entendimento dos deslocamentos e rotações em sistemas duplos de placas de Mindlin, Reissner e Kirchhoff ligados entre si por uma camada elástica de Pasternak, sendo então a proposta deste trabalho, que é apresentar soluções analíticas para esse tipo de sistema, sob certas condições de carregamentos e condições de contorno.

2. Objetivo Geral

Deduzir soluções analíticas para lidar com sistema de placas duplas elasticamente conectados.

Objetivos específicos

- a) Deduzir solução analítica via método de Navier para sistemas de placas de Reissner/Mindlin retangulares para casos específicos de carregamento e condições de contorno;
- b) Deduzir solução analítica via método de Levy/Homander para sistemas de placas de Reissner/Mindlin retangulares para casos específicos de carregamento e condições de contorno;

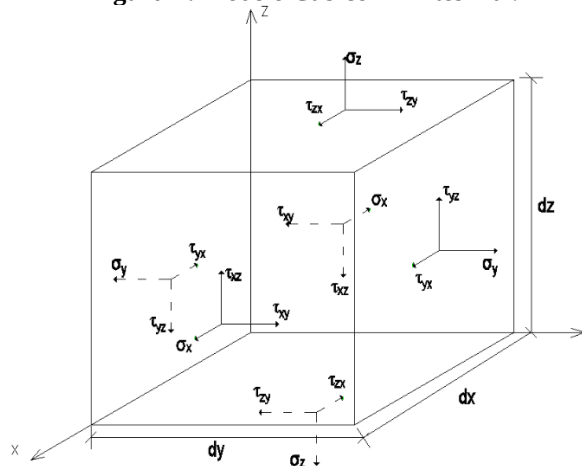
3. Fundamentação Teórica

Nesta seção, serão discutidas e apresentadas, com brevidade, as principais formulações, hipóteses, equações, bem como outras considerações acerca das teorias de placas de Kirchhoff, Mindlin e Reissner, além do modelo de camada elástica de Pasternak e de algumas relações apresentadas na teoria da elasticidade. Para mais detalhes e aprofundamento, o leitor pode consultar os trabalhos de Kirchhoff (1850); Reissner (1945); Mindlin (1951); Timoshenko e Goodier (1980); Ribeiro (1992); Mesquita (1998); Wang *et al.* (2000); Pereira (2002), Altoé (2009) e Maciel (2020).

3.1 Equações Constitutivas do Estado Tridimensional

Considerando o elemento infinitesimal cúbico apresentado na figura a seguir, Fig. 1, cujos eixos coordenados são $x, y, e z$ e suas dimensões são dx, dy e dz , respectivamente. Nele é possível observar as tensões de cisalhamento e tensões normais com seus sentidos positivos. Outra consideração importante é que os elementos estruturais estão submetidos a pequenos campos de deslocamentos e deformações.

Figura 1: Modelo Cúbico Infinitesimal.



Fonte: Adaptado de Timoshenko e Goodier (1980)

De acordo com Timoshenko e Goodier (1980), sabe-se que as tensões de cisalhamento em planos perpendiculares são iguais:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} ; \tau_{zx} = \tau_{xz} ; \tau_{zy} = \tau_{yz} \quad (1a-b)$$

Agora, partindo da representação que os deslocamentos axiais nos planos coordenados são dados por $u, v, e w$ para os eixos $x, y, e z$, respectivamente, as componentes de deformação unitária e de distorção, no elemento da Fig. 1, são dadas pelas seguintes expressões:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} ; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} ; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2a-c)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} ; \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} ; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3a-c)$$

Da Lei de Hooke para materiais homogêneos, isotrópicos e elastolineares, as seguintes relações constitutivas são válidas para um elemento submetido as três componentes de tensão normal:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)) ; \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)) ; \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)) \quad (4a-c)$$

O aparecimento do coeficiente de Poisson (ν) se deve ao fato que, se um elemento sofre uma deformação em uma direção, nas demais direções deformações com sinais opostos serão percebidas. O " E " é chamado de módulo de elasticidade axial.

As relações das tensões de cisalhamento com as correspondentes distorções podem ser escritas como:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} ; \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} ; \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad (5a-c)$$

Onde; $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ é conhecido por módulo de elasticidade transversal.

3.2 Teoria Clássica de Placas

A teoria clássica de placas ou teoria de Kirchhoff (1850) é uma teoria desenvolvida para tratar de problemas que envolvem placas simples delgadas. Nesta teoria, as seguintes hipóteses são assumidas:

- a) A espessura da placa é pequena quando comparada com seu comprimento e largura;

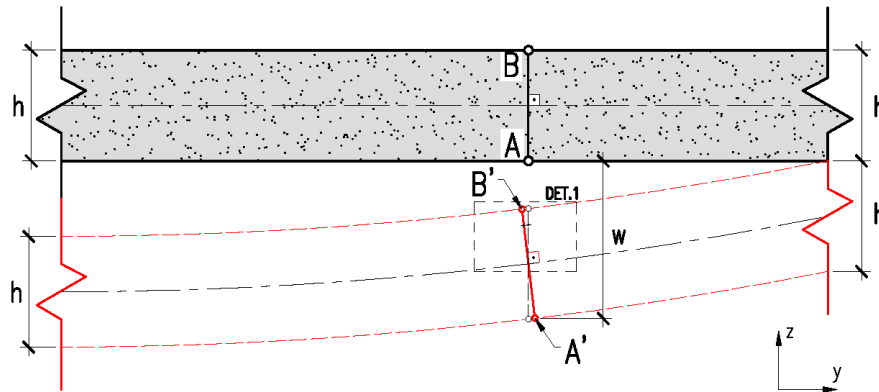
- b) A placa se constitui de material elástico-linear, isotrópico e homogêneo;
- c) Uma linha originalmente reta e perpendicular ao plano médio da placa, continua reta e perpendicular ao plano depois da deformação;
- d) As componentes tangenciais são nulas nas superfícies da placa;
- e) As tensões normais na direção vertical são desprezadas;

A hipótese "c" traz como consequência uma distribuição linear das tensões normais ao longo da espessura da placa, sendo essas tensões máximas nas bordas e nulo no plano médio.

Para descrever a cinemática da placa de Kirchhoff, considere a Fig. 2, onde uma placa de espessura " h ", na sua posição indeformada (em contorno preto) e deformada (em contorno vermelho) é apresentada. É possível perceber que todos os pontos da seção transversal " AB " sofrem um deslocamento " w " e que essa seção rotaciona de modo que os pontos A e B assumem a posição A' e B' , sofrendo um deslocamento horizontal " v ".

Uma ampliação da região tracejada da Fig. 2 é mostrada na Fig. 3, para uma melhor análise dos deslocamentos e rotações.

Figura 2: Modelo Cinemático de Placa Simples de Kirchhoff



Fonte: Autor (2022)

As distorções relacionadas à placa são apresentadas nas Eqs. 6:

$$\gamma_{xy} = -z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial xy} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \right) = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x = 0; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y = 0$$

(6a-c)

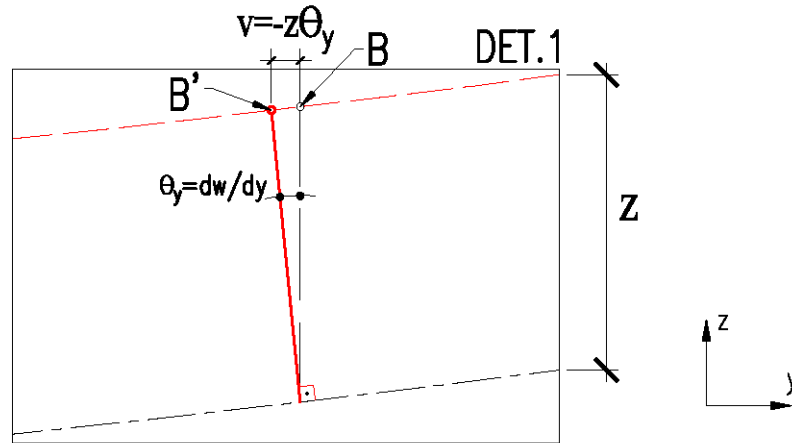
Nota-se, pela geometria da figura, que o deslocamento " v " percebido pelo ponto B, pode ser escrito em função da distância " z " em relação ao eixo central e da rotação " θ_y ". O " θ_y " por sua vez é a tangente do ângulo formado devido a rotação da seção AB.

$$v = z\theta_y \quad (7)$$

Ainda, pode-se concluir que devido ao fato que as distorções nos planos "xz" e "yz" serem assumidas como nulas, o " θ_y " passa a ser o contrário da derivada do deslocamento transversal, observar Eqs. 6b e 6c, assim a Eq. 7, pode ser reescrita como mostrado a seguir:

$$v = z\theta_y = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (8)$$

Figura 3: Cinemática da Placa de Kirchhoff



Fonte: Autor (2022)

Por analogia ao plano "yz", o deslocamento horizontal no plano "xz" pode ser escrito por:

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (9)$$

Substituindo as Eqs. 7 e 9 nas Eqs. 2 e 3, as deformações na placa podem ser obtidas, como mostra as Eqs.10. É importante pontuar que devido a hipótese "e", não deve existir deformação na direção "z".

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} ; \quad \varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} ; \quad \varepsilon_z = 0 \quad (10a-c)$$

Uma vez definida as deformações e distorções ocasionadas pela flexão, parte-se para a obtenção dos esforços internos. Para obter os momentos fletores e torçores, são substituídas

as Eqs. (6) e (10) nas Eqs. (4) e (5) e, após algumas manipulações algébricas, basta integrar as tensões obtidas ao longo da espessura da placa. Assim, tem-se:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} \left(-z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right) \quad (11)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} \left(-z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right) \quad (12)$$

$$\tau_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} G \quad (13)$$

Integrando na espessura as expressões anteriores, resulta:

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (14)$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (15)$$

$$M_{xy} = M_{yx} = -D(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (16)$$

Sendo $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ é o módulo de rigidez à flexão da placa.

Segundo Wang *et al.* (2000), para a teoria de Kirchhoff, a primeira variação do funcional associado a placa em termos de momentos, deslocamentos e da carga externa aplicada, é dada pela expressão:

$$\int_{\Omega} M_x \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} d\Omega + \int_{\Omega} M_y \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} d\Omega + \int_{\Omega} 2M_{xy} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} d\Omega - \int_{\Omega} q \delta w d\Omega = 0 \quad (17)$$

Seguindo com a integração por partes, de modo apropriado, na Eq. 17, chega-se em uma relação ponderada por δw :

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q \right) \delta w d\Omega = 0 \quad (18)$$

Como a variação do δw não pode ser zero, então, conclui-se que a equação equilíbrio será:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q = 0 \quad (19)$$

Aplicando as Eqs. 14, 15 e 16 na Eq.19. Chega-se na equação governante do sistema em termos de deslocamento transversal, Eq. 20.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \quad (20)$$

Considerando o equilíbrio do elemento tridimensional devido aos esforços internos e ações externas aplicadas, podem ser escritas as equações dos esforços cortantes nos planos "xz" e "yz" em termo das derivadas dos momentos, ver Eq. 21 e 22.

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \quad (21)$$

$$Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \quad (22)$$

Se for feita a substituição das Eqs. 14, 15 e 16 nas Eqs. 21 e 22, os cortantes em termos de deslocamento transversal são expressos:

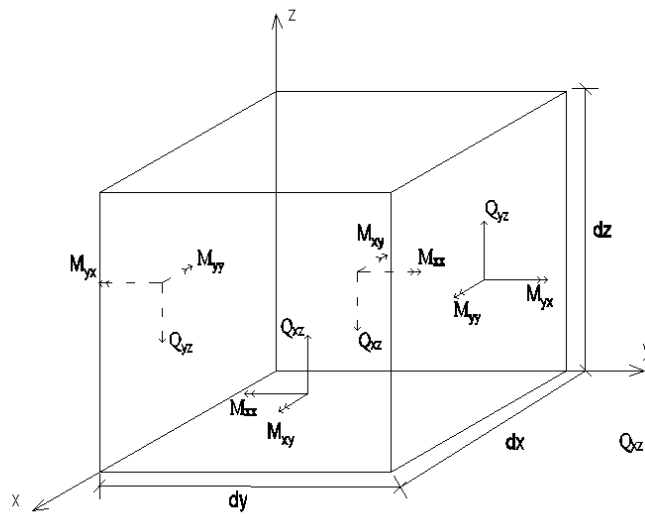
$$Q_x = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \quad (23)$$

$$Q_y = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right) \quad (24)$$

A representação dos momentos atuantes, bem como dos esforços cortantes podem ser visualizadas na Fig. 4.

Notar que na Eq. 20 foi desprezado o efeito da aplicação de momentos externos e "q" representa uma força externa aplicada.

Figura 4: Representação dos Esforços Internos na Placa Simples



Fonte: Autor (2022)

3.3 Teoria de Placas de Mindlin

A teoria de placas de Mindlin (1951) possui um maior campo de aplicação, ou seja, pode ser aplicado tanto para placas delgadas como para placas espessas. Assim, como também será visto na próxima seção, a diferença crucial entre as hipóteses assumidas nas teorias de Mindlin e Reissner em relação a de Kirchhoff, consiste na consideração dos efeitos de distorção nas seções transversais. Nesta teoria, as seguintes hipóteses são assumidas:

- a) A espessura da placa é pequena quando comparada com seu comprimento e largura;
- b) A placa se constitui de material elástico-linear, isotrópico e homogêneo;
- c) Devido aos efeitos oriundos da deformação por cisalhamento transversal, uma reta inicialmente perpendicular ao plano médio da placa continua reta, porém, não mais perpendicular ao plano médio da placa após a sua deformação;
- d) As componentes tangenciais são nulas nas superfícies da placa;
- e) As tensões normais na direção vertical são desprezadas.

Nesta teoria, uma distribuição linear das tensões normais e uma distribuição quadrática das tensões tangenciais ao longo da espessura da placa são percebidas.

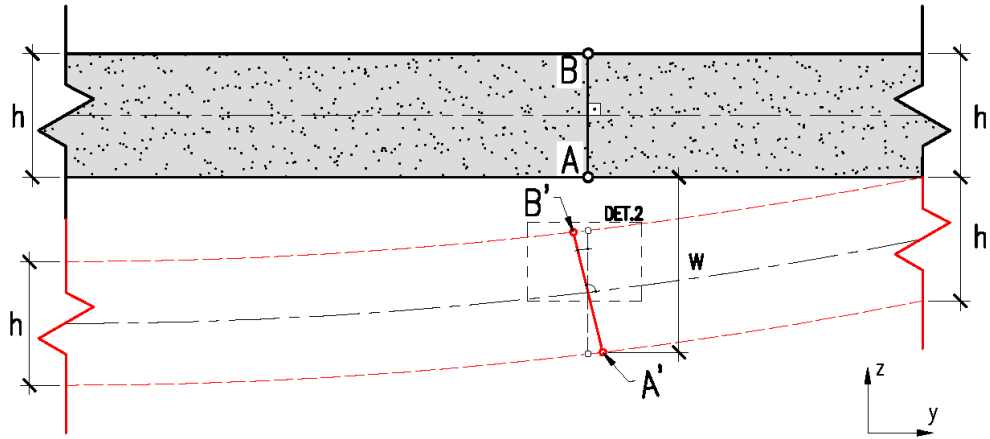
Para descrever a cinemática da placa de Mindlin, considere a Fig. 5, onde, mais uma vez, uma placa de espessura " h ", na sua posição indeformada (em contorno preto) e deformada (em contorno vermelho) é apresentada. Diferente da teoria de Kirchhoff, a rotação final que a seção sofre não é mais decorrente apenas da flexão, ou seja, de um movimento de corpo rígido, mas na verdade passa a ser a consideração simultânea da rotação decorrente do efeito de distorção e da rotação de corpo rígido, devido a flexão. Veja mais detalhes.

Na Figura 6, a reta de posição inicial OB assume a posição OB' decorrente da flexão (movimento de corpo rígido) e, assume a posição OB'' decorrente da distorção. O efeito da distorção gera originalmente uma curva (OB'') ao invés da forma linear OB' , entretanto, por simplicidade, a distorção média é considerada e a forma linear assumida.

Mais uma vez, as distorções na placa oriundas dos efeitos de cisalhamento são apresentadas a seguir:

$$\gamma_{xy} = z \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right); \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y \quad (25a-c)$$

Figura 5: Modelo Cinemático de Placa Simples de Mindlin

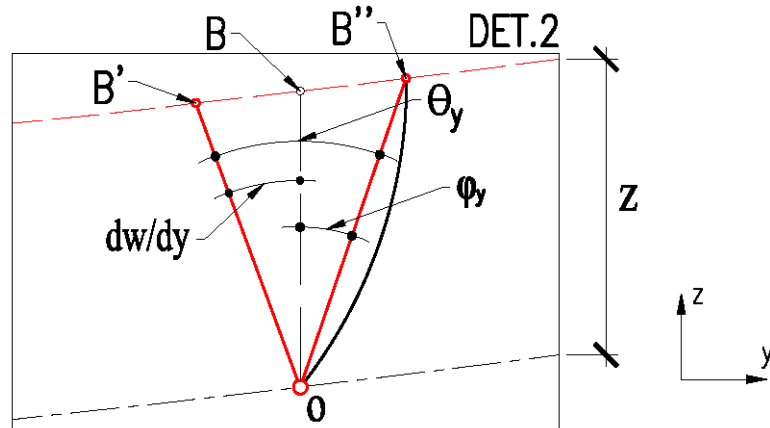


Autor: Autor (2022)

Nota-se, pela geometria da Fig. 6, que o deslocamento " v ", percebido pelo ponto B' , pode ser escrito em função da distância " z " em relação ao eixo central e da rotação " θ_y ".

$$v = z\theta_y \quad (26)$$

Figura 6: Cinemática da Placa de Mindlin



Fonte: Autor (2022)

Fazendo uma análise semelhante no plano " xz " os deslocamentos horizontais podem ser escritos por:

$$u = z\theta_x \quad (27)$$

Agora, fazendo um processo semelhante ao aplicado à teoria de Kirchhoff, tem-se as deformações na placa de Mindlin.

$$\varepsilon_x = z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} ; \quad \varepsilon_y = z \frac{\partial \theta_y}{\partial y} ; \quad \varepsilon_z = 0 \quad (28a-c)$$

Segue também a obtenção das tensões normais e cisalhantes, como resultado das deformações trazidas nas Eqs. 25 e 28, as quais são substituídas nas Eqs. 4 e 5 e fornecem:

$$\sigma_x = \frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) \quad (29)$$

$$\sigma_y = \frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \quad (30)$$

$$\tau_{xy} = z \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) G ; \quad \tau_{xz} = \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x \right) G ; \quad ; \quad \tau_{yz} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y \right) G \quad (31a-c)$$

Multiplicando as expressões anteriores e as integrando na espessura de cada elemento em relação ao plano de referência, tem-se os momentos fletores, torçores e forças cortantes:

$$M_x = D \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) \quad (32)$$

$$M_y = D \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \quad (33)$$

$$M_{xy} = M_{yx} = \frac{D(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \quad (34)$$

$$Q_x = kGh \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x \right) \quad (35)$$

$$Q_y = kGh \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y \right) \quad (36)$$

Notar que a quantidade " k " é definida como um fator de correção das deformações de cisalhamento atuantes na normal ao plano de referência e que a mesma visa corrigir a hipótese inicial de que as tensões cisalhantes são constantes ao longo da espessura da placa, algo que não possui sustentação física. Quando se usa o fator de correção, as tensões cisalhantes variam ao longo da espessura de modo quadrático, sendo máximo no plano médio e nula nas bordas. O valor de " k " depende não só da geometria da seção, mas também das condições de contorno da placa, Pereira (2002) apresentou esse valor como sendo $\frac{\pi^2}{12}$, para a placa de Mindlin.

Agora, a intenção é apresentar a equação variacional associada a teoria de placas de Mindlin, a mesma é mostrada na sequência em função dos momentos e deslocamentos generalizados, bem como do carregamento externo, Wang *et al.* (2000). Ver Eq. 37.

$$\int_{\Omega} M_x \frac{\partial \delta \theta_x}{\partial x} d\Omega + \int_{\Omega} M_y \frac{\partial \delta \theta_y}{\partial y} d\Omega + \int_{\Omega} M_{xy} \left(\frac{\partial \delta \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta \theta_y}{\partial x} \right) d\Omega + \int_{\Omega} Q_x \left(\delta \theta_x + \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right) d\Omega + \int_{\Omega} Q_y \left(\delta \theta_y + \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right) d\Omega - \int_{\Omega} q \delta w d\Omega = 0 \quad (37)$$

Seguindo com a integração por partes, de modo apropriado, na Eq. 37, chega-se em uma relação ponderada por $\delta w, \delta \theta_x, \delta \theta_y$:

$$\int_{\Omega} - \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q \right) \delta w d\Omega + \int_{\Omega} - \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x \right) \delta \theta_x d\Omega + \int_{\Omega} - \left(\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y \right) \delta \theta_y d\Omega = 0 \quad (38)$$

Como nenhuma dessas variações, $\delta w, \delta \theta_x, \delta \theta_y$, podem ser zero, então, conclui-se que a equações de equilíbrio será:

$$- \frac{\partial Q_x}{\partial x} - \frac{\partial Q_y}{\partial y} = q \quad (39a)$$

$$- \frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + Q_x = 0 \quad (39b)$$

$$- \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} + Q_y = 0 \quad (39c)$$

Notar que na Eq. 37 foi desprezado o efeito de aplicação de momentos externos e "q" representa uma força externa aplicada.

Finalmente, se for substituído as Eqs. 32 a 36 nas Eqs. 39, o sistema de equações governantes da placa de Mindlin em termos dos deslocamentos e rotações podem ser extraídos como segue:

$$D \frac{(1-\nu)\lambda^2}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) = -q \quad (40a)$$

$$D \left(\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y^2} + \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x \partial y} \right) - \frac{kEh}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x \right) = 0 \quad (40b)$$

$$D \left(\frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x^2} + \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x \partial y} \right) - \frac{kEh}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y \right) = 0 \quad (40c)$$

3.4 Teoria de Placas de Reissner

Quando for assumido o modelo de Reissner (1945) para representar as placas, as hipóteses a, b e d que aparecem nas considerações do modelo de Mindlin são mantidas. Além disso, são assumidas que as tensões normais e tangenciais ao longo da espessura variem linearmente e quadraticamente, respectivamente. A Fig. 6, a qual representa a cinemática da placa de Mindlin, pode ser utilizada para a placa de Reissner sem nenhuma implicação.

No entanto, uma observação crucial se faz necessária. Enquanto no modelo do Mindlin os deslocamentos generalizados são valores tomados nos pontos contidos no plano médio da placa. Para Reissner, os deslocamentos generalizados são valores ponderados ao longo da espessura.

Com relação as tensões normais que atuam na direção vertical, essas são assumidas como sendo:

$$\sigma_z = \pm \frac{q}{2}, \text{ em } z = \pm \frac{h}{2} \quad (41)$$

Como consequência dessa hipótese, a deformação na direção "z" não é mais nula. Pode-se escrever, segundo Reissner (1947), as seguintes expressões para as tensões normais e cisalhantes atuando na placa:

$$\sigma_x = \frac{12}{h^3} z D \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) \quad (42)$$

$$\sigma_y = \frac{12}{h^3} z D \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \quad (43)$$

$$\sigma_z = \frac{q}{2} \left(\frac{z}{h} \right) \left(3 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right) \quad (44)$$

$$\tau_{xy} = z \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) G; \quad \tau_{xz} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y \right) G; \quad ; \quad \tau_{yz} = \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x \right) G \quad (45a-c)$$

Sendo, θ_x ; θ_y ; w os deslocamentos ponderados ao longo da espessura e dados por:

$$\theta_x = \frac{12}{h^3} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} u_x z dz; \quad \theta_y = \frac{12}{h^3} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} u_y z dz; \quad w = \frac{3}{2h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} u_z \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right] dz \quad (46a-c)$$

Onde, u_x , u_y e u_z são os deslocamentos reais nas três direções, em um ponto qualquer da placa, para uma certa altura z.

Na análise da placa de Reissner, um estudo envolvendo o funcional de energia associado a placa se faz necessário. Nesse caso, é aplicado o princípio variacional de modo que a energia total do sistema seja zero, ou seja, a energia associada a placa devido ao trabalho interno menos o trabalho externo das cargas deve ser nulo. Maciel (2020) traz de forma explícita essa expressão, como segue:

$$\int_{\Omega} M_x \frac{\partial \delta \theta_x}{\partial x} d\Omega + \int_{\Omega} M_y \frac{\partial \delta \theta_y}{\partial y} d\Omega + \int_{\Omega} M_{xy} \left(\frac{\partial \delta \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta \theta_y}{\partial x} \right) d\Omega + \int_{\Omega} Q_{xz} \left(\delta \theta_x + \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right) d\Omega + \int_{\Omega} Q_{yz} \left(\delta \theta_y + \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right) d\Omega - \int_{\Omega} q \delta w d\Omega - \frac{1}{2E} \int_{\Omega} \frac{12}{h^3} [M_x^2 + M_y^2 - 2\nu M_x M_y + 2(1+\nu) M_{xy}^2] d\Omega - \frac{1}{2E} \int_{\Omega} \left[\frac{12}{5h^3} (1+\nu) (Q_{xz}^2 + Q_{yz}^2) - \frac{12\nu}{5h} (M_x + M_y) q \right] d\Omega = 0 \quad (47)$$

Onde, M_x , M_y , e M_{xy} são os momentos obtidos pela integração das respectivas tensões normais e de cisalhamento ao longo da espessura. Da mesma forma, Q_{xz} e Q_{yz} são as forças cortantes obtidas pela integração das tensões de cisalhamento ao longo da espessura. Finalmente, q é a carga externa aplicada na placa. Mais detalhes dessas expressões podem ser vistos na dissertação de Maciel (2020).

Definido, acima, o funcional de energia. Depois de algumas manipulações envolvendo o cálculo diferencial e variacional, as equações de equilíbrio podem ser obtidas, que por sinal são iguais as Eqs. 39, apresentadas para a teoria de Mindlin. Podem ser obtidas, ainda, os momentos e as forças cortantes, bem como a equação governante para esse modelo de placa, (MACIEL, 2020).

$$M_x = D \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) + \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \frac{\partial q}{\partial x} \quad (48)$$

$$M_y = D \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) + \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \frac{\partial q}{\partial y} \quad (49)$$

$$M_{xy} = M_{yx} = \frac{D(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \quad (50)$$

$$Q_x = kGh \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x \right) \quad (51)$$

$$Q_y = kGh \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y \right) \quad (52)$$

No caso de Reissner, o $\lambda^2 = \frac{10}{h^2}$ e o fator $k = \frac{5}{6}$. Restando agora escrever o sistema governante, desprezando a existência de momento externo aplicado. Então:

$$D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) = -q \quad (53a)$$

$$D\left(\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y^2} + \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x \partial y}\right) - \frac{kEh}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x\right) = -fator \frac{\partial q}{\partial x} \quad (53b)$$

$$D\left(\frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x^2} + \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x \partial y}\right) - \frac{kEh}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y\right) = -fator \frac{\partial q}{\partial y} \quad (53c)$$

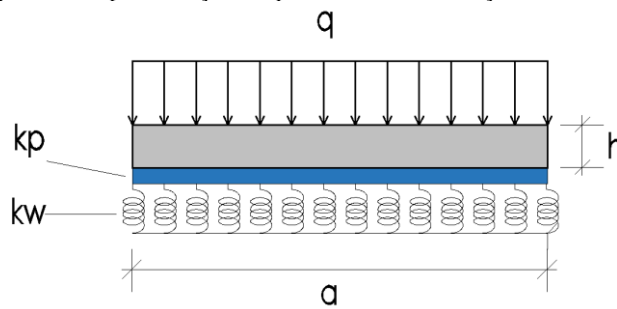
Onde, $fator = \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2}$

Nota-se que se o fator for igual a zero, as equações governantes de Reissner, recuperam as equações governantes do modelo de Mindlin.

3.5 Fundação de Pasternak

No modelo de fundação elástica de Pasternak (1954), representação esquemática vista na Fig. 7, a camada se deforma segundo a mobilização de dois parâmetros independentes quando da ação de uma carga externa " q ". Um desses parâmetros é conhecido por constante elástica de Winkler, kw , e está vinculado com a proposta de Fundação elástica de Winkler (1867). O parâmetro " kw " está relacionado com a carga aplicada " q " pela Eq. 54 e no modelo de fundação de Winkler, os deslocamentos são considerados apenas em pontos logo abaixo da região carregada e nulo fora dessa região de contato.

Figura 7: Representação Esquemática da Fundação de Pasternak



Fonte: Autor (2022)

Para compor a fundação de Pasternak, um parâmetro adicional, kp , deve ser descrito. Esse, por sua vez, busca traduzir os efeitos das interações entre as molas que deixam de ter um comportamento independente e, obviamente, os deslocamentos passam a ocorrer para além dos pontos imediatamente abaixo das regiões de contato. A Eq. 55 mostra como a carga externa " q " interage com os dois parâmetros da fundação de Pasternak.

$$q = k_w w \quad (54)$$

$$q = k_w w - k_p \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (55)$$

Sendo, "w" o deslocamento vertical da fundação devido a ação da carga externa.

Observação relevante na Eq. 55 é que se o k_p for tomado igual a zero, recai-se Eq. 54 que é justamente o modelo de Winkler.

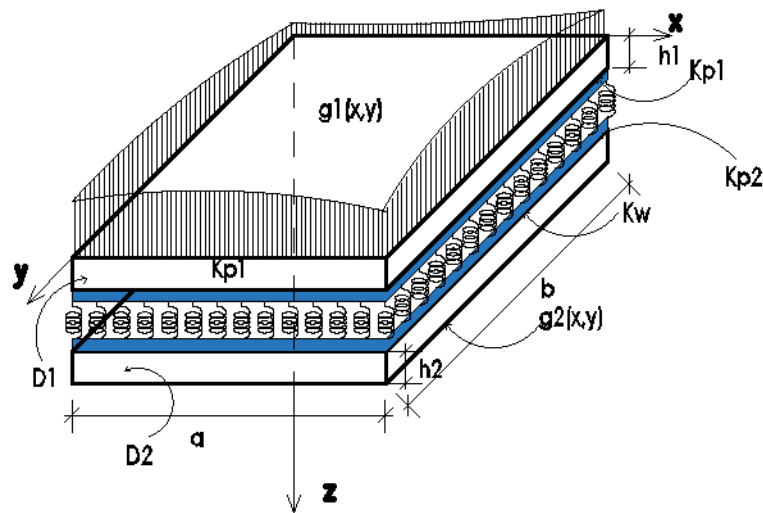
4 Metodologia

Nesta seção é apresentada a metodologia para obtenção das soluções analíticas do problema de placas duplas espessas.

4.1 Sistema Duplo de placas Retangulares Conectadas Elasticamente

Seja um sistema de placas duplas conectadas por meio uma camada elástica, conforme indicado na Fig.8.

Figura 8: Modelo de Placas Duplas Elasticamente Conectadas



Fonte: Autor (2022)

A obtenção das equações governantes para o sistema de placas indicado pode ser feita por meio da utilização do princípio variacional, consistindo da minimização do funcional de energia do sistema.

A primeira variação desse funcional é apresentada na Eq. 56.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} M_{\alpha\beta} \delta\theta_{\alpha,\beta} d\Omega + \int_{\Omega} T_{\alpha\beta} \delta\varphi_{\alpha,\beta} d\Omega + \int_{\Omega} Q_{\alpha} (\delta\theta_{\alpha} + \delta w_{,\alpha}) d\Omega + \int_{\Omega} V_{\alpha} (\delta\varphi_{\alpha} + \delta v_{,\alpha}) d\Omega + \int_{\Omega} K_w (w - v) \delta(w - v) d\Omega + \int_{\Omega} K_p (w_{,\alpha} - v_{,\alpha}) \delta(w_{,\alpha} - v_{,\alpha}) d\Omega + \int_{\Omega} K_p (w_{,\alpha} - v_{,\alpha}) \delta(w_{,\alpha} - v_{,\alpha}) d\Omega - \int_{\Omega} g_1 \delta w d\Omega - \int_{\Omega} g_2 \delta v d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (56)$$

Fazendo integrações sucessivas e organizando os termos, pode-se, ao final desse processo, chega-se em uma relação ponderada por $\delta w, \delta\theta_x, \delta\theta_y$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (-M_{\alpha\beta,\beta} + Q_{\alpha}) \theta_{\alpha} d\Omega + \int_{\Omega} (-T_{\alpha\beta,\beta} + V_{\alpha}) \varphi_{\alpha} d\Omega + \int_{\Omega} (-Q_{\alpha,\alpha} + K_w (w - v) + K_p (w_{,11} - v_{,11}) - g_1) \delta w d\Omega + \int_{\Omega} (-V_{\alpha,\alpha} - K_w (w - v) - K_p (w_{,22} - v_{,22}) - g_2) \delta v d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (57)$$

Novamente, como as variações $\delta w, \delta\theta_{\alpha}, \delta\varphi_{\alpha}$ não podem ser nulas, isso implica que as equações de equilíbrio são escritas por:

$$-M_{\alpha\beta,\beta} + Q_{\alpha} = 0 \quad (58a)$$

$$-T_{\alpha\beta,\beta} + V_{\alpha} = 0 \quad (58b)$$

$$-Q_{\alpha,\alpha} + K_w (w - v) + K_p (w_{,\alpha\alpha} - v_{,\alpha\alpha}) - g_1 = 0 \quad (58c)$$

$$-V_{\alpha,\alpha} - K_w (w - v) - K_p (w_{,\alpha\alpha} - v_{,\alpha\alpha}) - g_2 = 0 \quad (58d)$$

Aplicando as equações de momentos e esforços cortantes, Eqs. 48 a 52, nas Eqs. 58, é possível obter o sistema de equações governante para a teoria em questão, de forma compacta:

$$[B]\{u\} = \{f\} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \quad (59)$$

Onde:

$$\begin{aligned} [B_{11}] &= \begin{bmatrix} a_1(\nabla^2 - \lambda_1^2) + b_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} & b_1 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & -a_1 \lambda_1^2 \frac{\partial}{\partial x} \\ b_1 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & a_1(\nabla^2 - \lambda_1^2) + b_1 \frac{\partial^2}{\partial y^2} & -a_1 \lambda_1^2 \frac{\partial}{\partial y} \\ a_1 \lambda_1^2 \frac{\partial}{\partial x} & a_1 \lambda_1^2 \frac{\partial}{\partial y} & (s_1 + \frac{K_p}{D_1}) \nabla^2 - \hat{K}_{w1} \end{bmatrix} & [B_{12}] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{K}_{w1} - (\frac{K_p}{D_1}) \nabla^2 \end{bmatrix} \\ [B_{21}] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{K}_{w2} - (\frac{K_p}{D_2}) \nabla^2 \end{bmatrix}, & [B_{22}] &= \begin{bmatrix} a_2(\nabla^2 - \lambda_2^2) + b_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} & b_2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & -a_2 \lambda_2^2 \frac{\partial}{\partial x} \\ b_2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & a_2(\nabla^2 - \lambda_2^2) + b_2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} & -a_2 \lambda_2^2 \frac{\partial}{\partial y} \\ a_2 \lambda_2^2 \frac{\partial}{\partial x} & a_2 \lambda_2^2 \frac{\partial}{\partial y} & (s_2 + \frac{K_p}{D_2}) \nabla^2 - \hat{K}_{w2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\{u_1\} = [\theta_x \quad \theta_y \quad w]^T, \{u_2\} = [\varphi_x \quad \varphi_y \quad v]^T, \{f_1\} = [0 \quad 0 \quad -g_1]^T, \{f_2\} = [0 \quad 0 \quad -g_2]^T,$$

Sendo:

θ_x, φ_x são as rotações, em $\mathbf{x}$, na placa superior e inferior, respectivamente;

θ_y, φ_y são as rotações, em $\mathbf{y}$, na placa superior e inferior, respectivamente;

w, v são os deslocamentos transversais, em $\mathbf{z}$, na placa superior e inferior, respectivamente;

g_1 e g_2 são os carregamentos distribuídos nas placas superior e inferior, respectivamente;

M e T são os momentos fletores nas placas superior e inferior, respectivamente;

Q e V são as forças cortantes nas placas superior e inferior, respectivamente;

$\alpha = 1,2; \beta = 1,2$. Perceba que a utilização da notação indicial foi escolhida por questão de organização, uma vez que as expressões explícitas são muito longas.

$D_1 = \frac{E_1 h_1^3}{12(1-\nu_1^2)}$, $D_2 = \frac{E_2 h_2^3}{12(1-\nu_2^2)}$ são os módulos de flexão das placas superior e inferior respectivamente; $\nabla^2(.)$ o operador Laplaciano: $\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$, $a_1 = \frac{1-\nu_1}{2}$, $b_1 = \frac{1+\nu_1}{2}$, $a_2 = \frac{1-\nu_2}{2}$, $b_2 = \frac{1+\nu_2}{2}$, $s_1 = (\frac{1-\nu}{2})\lambda^2$ e $\lambda^2 = \frac{10}{h^2}$, $\hat{K}_{w1} = \frac{K_{w1}}{D_1}$ e $\hat{K}_{w1} = \frac{K_{w1}}{D_1}$.

Além disso, tem-se as seguintes propriedades geométricas e físicas para a placa superior: E_1 (Módulo de elasticidade), ν_1 (Coeficiente de Poisson), h_1 (Espessura da placa), g_1 (Carga aplicada na placa). Para a placa inferior, tem-se, de modo análogo, as propriedades E_2 (Módulo de elasticidade), ν_2 (Coeficiente de Poisson), h_2 (Espessura da placa), g_2 (Carga aplicada na placa), veja que nesse caso o g_2 é zero. Por fim, K_w é a rigidez da mola componente da camada elástica, K_p é o módulo de cisalhamento da fundação de Pasternak e, “a” e “b” são as dimensões das placas.

4.2 Solução Analítica do Sistema

Nesta subseção são apresentadas as deduções de sistemas de placas duplas pelos métodos de Navier e Levy.

4.2.1 Método de Navier

A solução analítica obtida pela abordagem de Navier é limitada às soluções de placas simplesmente apoiadas em todas as bordas, para tanto, equações de duplos senos e/ou cossenos são assumidas de modo a satisfazer as condições de contorno. Sendo assim, os deslocamentos, rotações e carregamentos das placas podem ser expandidos na forma das seguintes séries trigonométricas:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin(X_m x) \sin(Y_n y), \quad (60a)$$

$$\theta_x(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin(X_m x) \cos(Y_n y), \quad (60b)$$

$$\theta_y(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \cos(X_m x) \sin(Y_n y), \quad (60c)$$

$$g_1(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} G_{mn} \sin(X_m x) \sin(Y_n y), \quad (60d)$$

$$v(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} D_{mn} \sin(X_m x) \sin(Y_n y), \quad (60e)$$

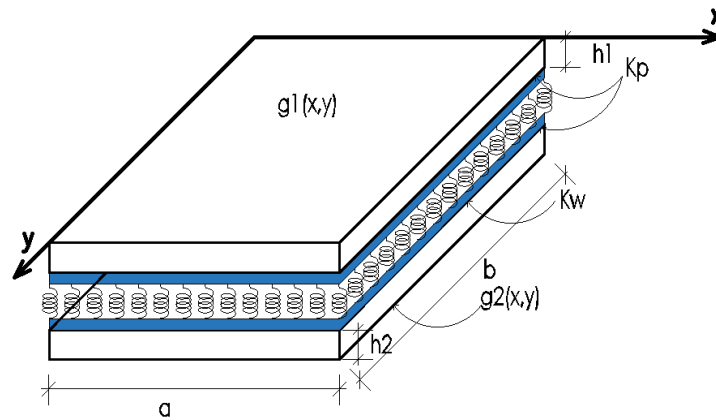
$$\varphi_x(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} E_{mn} \sin(X_m x) \cos(Y_n y), \quad (60f)$$

$$\varphi_y(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{mn} \cos(X_m x) \sin(Y_n y), \quad (60g)$$

$$g_2(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} H_{mn} \sin(X_m x) \sin(Y_n y). \quad (60h)$$

Sendo, $X_m = \frac{m\pi}{a}$ e $Y_n = \frac{n\pi}{b}$, "a" e "b" as dimensões da placa, conforme indicado na Fig. 9. Os coeficientes A_{mn} , B_{mn} , C_{mn} , D_{mn} , E_{mn} , F_{mn} , G_{mn} e H_{mn} devem ser determinados na solução do problema. Percebe-se que se forem utilizadas essas expansões dadas nas Eqs. 60, as três condições de contorno naturais para o caso simplesmente apoiado, $w(x, y) = v(x, y) = 0$, $\theta_x(x, y) = \varphi_x(x, y) = 0$ e $\theta_{y,y}(x, y) = \varphi_{y,y}(x, y) = 0$, para $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ e $y = a$ são automaticamente satisfeitas (TIMOSHENKO, 1989).

Figura 9: Modelo de Placas Duplas Elasticamente Conectadas (Solução de Navier).



Fonte: Autor (2022)

Substituindo as Eqs. 60 na Eq. 59 e sabendo que $\text{fat1} = \frac{v_1}{(1-v_1)\lambda_1^2}$ e $\text{fat2} = \frac{v_2}{(1-v_2)\lambda_2^2}$, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{mn} \\ C_{mn} \\ A_{mn} \\ E_{mn} \\ F_{mn} \\ D_{mn} \end{bmatrix} = \left(\frac{X_m G_{mn} fat1}{D_1} \quad \frac{Y_n G_{mn} fat1}{D_1} \quad \frac{G_{mn}}{D_1} \quad \frac{X_m H_{mn} fat2}{D_2} \quad \frac{Y_n H_{mn} fat2}{D_2} \quad \frac{H_{mn}}{D_2} \right)^T \quad (61)$$

Onde:

$$B_{11} = \begin{bmatrix} a_1(X_m^2 + Y_n^2) + s_1 + b_1 X_m^2 & b_1 X_m Y_n & s_1 X_m \\ b_1 X_m Y_n & a_1(X_m^2 + Y_n^2) + s_1 + b_1 Y_n^2 & s_1 Y_n \\ s_1 X_m & s_1 Y_n & (s_1 + \frac{K_p}{D_1})(X_m^2 + Y_n^2) + \hat{R}_{w1} \end{bmatrix}$$

$$B_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\hat{R}_{w1} - (\frac{K_p}{D_1})(X_m^2 + Y_n^2) \end{bmatrix} \quad B_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\hat{R}_{w2} - (\frac{K_p}{D_2})(X_m^2 + Y_n^2) \end{bmatrix}$$

$$B_{22} = \begin{bmatrix} a_2(X_m^2 + Y_n^2) + s_2 + b_2 X_m^2 & b_2 X_m Y_n & s_2 X_m \\ b_2 X_m Y_n & a_2(X_m^2 + Y_n^2) + s_2 + b_2 Y_n^2 & s_2 Y_n \\ s_2 X_m & s_2 Y_n & (s_2 + \frac{K_p}{D_2})(X_m^2 + Y_n^2) + \hat{R}_{w2} \end{bmatrix}$$

As constantes dos carregamentos podem ser obtidas pela integração conveniente das Eqs. 60. d) e 60. h), resultando em:

$$G_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a g_1(x, y) \sin(X_m x) \sin(Y_n y) dx dy, \quad (62)$$

$$H_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a g_2(x, y) \sin(X_m x) \sin(Y_n y) dx dy \quad (63)$$

Se a carga for uniformemente distribuída, $g(x, y) = \text{Constante}$ ou igual a g_1 e g_2 , então:

$$G_{mn} = \frac{16g_1}{\pi^2 mn} \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 \quad \text{e} \quad H_{mn} = \frac{16g_2}{\pi^2 mn} \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 \quad (64a-b)$$

Se a carga for em linha, paralela ao eixo y , uniforme e constate, $g(x, y) = g_i \delta(x, \varepsilon)$, $i=1,2$. Além disso, ε é a posição em “ x ” que a carga em linha se encontra. Então:

$$G_{mn} = \frac{8g_1}{\pi a n} (1 - \cos(m\pi)) \sqrt{\frac{1}{2} (1 - \cos\left(\frac{2m\pi}{a} \varepsilon\right))} \quad (65)$$

$$H_{mn} = \frac{8g_2}{\pi a n} (1 - \cos(m\pi)) \sqrt{\frac{1}{2} (1 - \cos\left(\frac{2m\pi}{a} \varepsilon\right))} \quad (66)$$

Assim, tomando a Eq. 61, invertendo a matriz de fatores $[B]$ e, em seguida, multiplicando-a pelo vetor de carga, é possível encontrar as constantes do vetor de deslocamentos $\{u\}$. Finalmente, com essas constantes, os deslocamentos e as rotações desejadas

podem ser encontradas a partir das Eqs. 60. Na prática, a forma explícita do vetor de deslocamentos $\{u\}$ é de difícil obtenção já que a matriz $[B]$ é de dimensão 6, exigindo uma grande capacidade de memória e processamento dos computadores utilizados.

4.2.2 Método de Levy

No método de Levy, aplicável apenas em placas retangulares e que necessariamente contenham pelo menos dois lados opostos simplesmente apoiados, os deslocamentos, as rotações e as cargas podem ser escritas em termos de uma série simples de seno ou cosseno, como segue:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m(y) \sin(X_m x) \quad (67a)$$

$$\theta_x(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m(y) \cos(X_m x) \quad (67b)$$

$$\theta_y(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m(y) \sin(X_m x) \quad (67c)$$

$$g_1(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} G_m(y) \sin(X_m x) \quad (67d)$$

$$v(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} D_m(y) \sin(X_m x) \quad (67e)$$

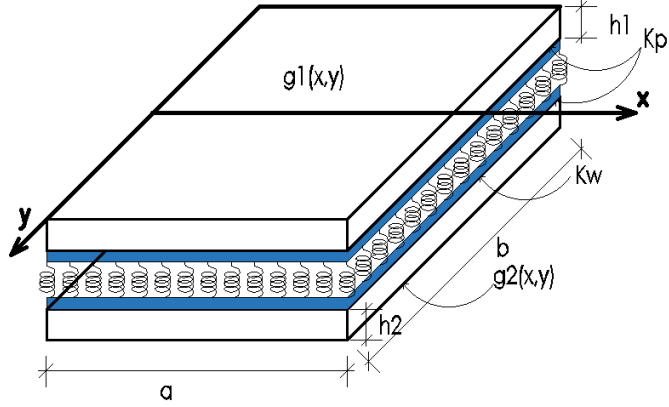
$$\varphi_x(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} E_m(y) \cos(X_m x) \quad (67f)$$

$$\varphi_y(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} F_m(y) \sin(X_m x) \quad (67g)$$

$$g_2(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} H_m(y) \sin(X_m x) \quad (67h)$$

As Equações 67 satisfazem, de forma automática, as condições de contorno da placa nos lados simplesmente apoiados, ou seja, em $x = 0$ e $x = a$, e as funções $A_m(y)$, $B_m(y)$, $C_m(y)$, $D_m(y)$, $E_m(y)$, $F_m(y)$ são determinadas mediante a satisfação das condições de contorno em $y = \pm \frac{b}{2}$, conforme mostrado na Fig. 10.

Figura 10: Modelo de Placa Dupla Elasticamente Conectadas (Solução de Levy).



Fonte: Autor (2022).

Ao substituir as Eqs. (67-a a 67-h) na Eq. (59), resulta no seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_m \\ C_m \\ A_m \\ E_m \\ F_m \\ D_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{X_m G_{mfat1}}{D_1} & 0 & -\frac{G_m}{D_1} & -\frac{X_m H_{mfat2}}{D_2} & 0 & -\frac{H_m}{D_2} \end{bmatrix}^T \quad (68)$$

$$\text{Onde: } B_{11} = \begin{bmatrix} a_1 \frac{d^2}{dy^2} - (X_m^2 + s_1) & b_1 X_m \frac{d}{dy} & -s_1 X_m \\ -b_1 X_m \frac{d}{dy} & -(a_1 X_m^2 + s_1) + \frac{d^2}{dy^2} & -s_1 \frac{d}{dy} \\ -s_1 X_m & s_1 \frac{d}{dy} & (s_1 + \frac{K_p}{D_1}) \left(-X_m^2 + \frac{d^2}{dy^2} \right) - \hat{K}_{w1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & -a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$B_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\hat{K}_{w1} - \frac{K_p}{D_1}) \left(-X_m^2 + \frac{d^2}{dy^2} \right) \end{bmatrix}$$

$$B_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\hat{K}_{w2} - \frac{K_p}{D_2}) \left(-X_m^2 + \frac{d^2}{dy^2} \right) \end{bmatrix}$$

$$B_{22} = \begin{bmatrix} a_2 \frac{d^2}{dy^2} - (X_m^2 + s_2) & b_2 X_m \frac{d}{dy} & -s_2 X_m \\ -b_2 X_m \frac{d}{dy} & -(a_2 X_m^2 + s_2) + \frac{d^2}{dy^2} & -s_2 \frac{d}{dy} \\ -s_2 X_m & s_2 \frac{d}{dy} & (s_2 + \frac{K_p}{D_2}) \left(-X_m^2 + \frac{d^2}{dy^2} \right) - \hat{K}_{w2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ -a_{45} & a_{55} & a_{56} \\ a_{46} & -a_{56} & a_{66} \end{bmatrix}$$

Com,

$$a_{36} = (\hat{K}_{w1} - \frac{K_p}{D_1}) \left(-X_m^2 + \frac{d^2}{dy^2} \right) \quad e \quad a_{63} = (\hat{K}_{w2} - \frac{K_p}{D_2}) \left(-X_m^2 + \frac{d^2}{dy^2} \right)$$

Percebe-se, então, que a Eq. 67 é um sistema de equações diferenciais ordinárias acopladas, o que é um fator de complexidade adicional para a construção de uma solução

analítica. Assim, se for aplicado um processo de transformação das equações acopladas em equações desacopladas equivalentes, pode-se atenuar as dificuldades em se obter as soluções do problema inicial. Desse modo, recorreu-se ao método de Hormander (1963), que é uma técnica de desacoplamento em que uma função escalar Ψ é usada para escrever todas as variáveis em termos de se própria.

Seja o sistema, em forma matricial, apresentado a seguir:

$$B * G = f \quad (69)$$

Onde G é o vetor das incógnitas.

Para produzir o desacoplamento, Hormander escreve o vetor das incógnitas em termos de uma função escalar:

$$G = (B^{co})^T * \Psi \quad (70)$$

Onde, " B^{co} " é a matriz de cofatores de " B ". Substituindo a Eq. 70 na Eq. 69, chega-se:

$$B * (B^{co})^T * \Psi = f \quad (71)$$

Pela definição de matriz inversa, sabe-se que:

$$B^{-1} = \frac{(B^{co})^T}{|B|} \quad \text{ou} \quad (B^{co})^T = B^{-1} * |B| \quad (72)$$

Onde, $|B|$ é o determinante da matriz B .

Substituindo a Eq. 72 na Eq. 71, obtém-se:

$$B * B^{-1} * |B| * \Psi = f \quad \text{ou} \quad I * |B| * \Psi = f \quad (73)$$

Onde, I é a matriz identidade.

Assumindo que o vetor de carga é dado por: $f = I * f_i$, é possível substituir essa relação na Eq. 73 e obter a seguinte equação diferencial desacoplada equivalente:

$$|B| * \Psi = f_i \quad (74)$$

Onde f_i , é o termo do vetor de carga que se encontra na linha i .

Nesse momento, o sistema é resolvido de modo a encontrar a função " Ψ " para posteriormente retornar as variáveis originais do problema. Para retomar as variáveis originais do problema, basta fazer:

$$G = B^{-1} * |B| * \Psi * \eta \quad (75)$$

Sendo, " η " um vetor onde todos os termos são nulos, menos aquele correspondente a posição i do termo do vetor de carga considerado.

Para aplicação da técnica de desacoplamento na Eq. 68, ela vai ser previamente reescrita como:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ -a_{12} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ a_{13} & -a_{23} & a_{33} & 0 & 0 & a_{36} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ 0 & 0 & 0 & -a_{45} & a_{55} & a_{56} \\ 0 & 0 & a_{63} & a_{46} & -a_{56} & a_{66} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} B_m \\ C_m \\ A_m \\ E_m \\ F_m \\ D_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-X_m * G_m * v}{D_1 * (1-v) * \lambda^2} \\ 0 \\ -\frac{G_m}{D_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad B * G = f \quad (76)$$

Convém notar que o modelo de placas de Mindlin exige que $\text{fat1} = 0$. Já para obtenção da solução para a placa de Reissner pode ser obtida pela superposição da solução da placa de Mindlin e de uma solução complementar:

$$\begin{bmatrix} B_m \\ C_m \\ A_m \\ E_m \\ F_m \\ D_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{m1} \\ C_{m1} \\ A_{m1} \\ E_{m1} \\ F_{m1} \\ D_{m1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{m2} \\ C_{m2} \\ A_{m2} \\ E_{m2} \\ F_{m2} \\ D_{m2} \end{bmatrix} \quad (77)$$

Onde o índice 2 implica na solução de Mindlin e o índice 1 na solução complementar.

Levando em conta a superposição descrita na Eq. 77, a Eq. 76 pode ser subdividida como:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ -a_{12} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ a_{13} & -a_{23} & a_{33} & 0 & 0 & \hat{K}_{w1} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ 0 & 0 & 0 & -a_{45} & a_{55} & a_{56} \\ 0 & 0 & \hat{K}_{w2} & a_{46} & -a_{56} & a_{66} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} B_{m1} \\ C_{m1} \\ A_{m1} \\ E_{m1} \\ F_{m1} \\ D_{m1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-X_m * Gm * v}{D_1 * (1-v) * \lambda^2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (78)$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ -a_{12} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ a_{13} & -a_{23} & a_{33} & 0 & 0 & \hat{K}_{w1} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ 0 & 0 & 0 & -a_{45} & a_{55} & a_{56} \\ 0 & 0 & \hat{K}_{w2} & a_{46} & -a_{56} & a_{66} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} B_{m2} \\ C_{m2} \\ A_{m2} \\ E_{m2} \\ F_{m2} \\ D_{m2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{-Gm}{D_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (79)$$

Desacoplando a equação da placa de Mindlin Eq. 79 pelo método de Hormander fica:

$$\left(tt1 \frac{d^{12}}{d^{12}y} + tt2 \frac{d^{10}}{d^{10}y} + tt3 \frac{d^8}{d^8y} + tt4 \frac{d^6}{d^6y} + tt5 \frac{d^4}{d^4y} + tt6 \frac{d^2}{d^2y} + tt7 \right) \Psi = \frac{-Gm}{D_1} \quad (80)$$

Onde,

$|B| = \left(tt1 \frac{d^{12}}{d^{12}y} + tt2 \frac{d^{10}}{d^{10}y} + tt3 \frac{d^8}{d^8y} + tt4 \frac{d^6}{d^6y} + tt5 \frac{d^4}{d^4y} + tt6 \frac{d^2}{d^2y} + tt7 \right)$, Ψ é a função escalar que vai desacoplar o sistema e $\frac{-Gm}{D_1}$ representa o carregamento na placa superior. Convém notar que $tt1, tt2, tt3, tt4, tt5, tt6$ e $tt7$ são combinações de $a1, a2, b1, b2, s1, s2, \hat{K}_{w1}, \hat{K}_{w2}$ e Xm , as quais foram aqui omitidas por serem expressões muito longas. É importante ressaltar que esses termos são constantes para cada parcela da série trigonométrica, ou seja, para cada valor de “m”. A solução da Eq. 80 deve ser obtida pelos métodos tradicionais de solução de EDO, em duas partes, sendo uma delas a solução da homogênea, do seu polinômio característico e a outra uma solução particular. Somando-se essas duas parcelas é encontrado a solução geral.

Uma solução particular pode ser obtida se for considerado que as funções dos deslocamentos generalizados são constantes no sistema dado na Eq.68, o que leva a cancelar todos os termos com derivadas na matriz [B] desse sistema. Depois da eliminação dos termos de derivados na matriz [B] e invertendo a mesma e, finalmente, multiplicando pelo vetor de carga do sistema das Eqs. 78 e 79, é possível encontrar uma expressão para cada função, $A_{pm1}, B_{pm1}, C_{pm1}, F_{pm1}, E_{pm1}$ e D_{pm1} e $A_{pm2}, B_{pm2}, C_{pm2}, F_{pm2}, E_{pm2}$ e D_{pm2} , onde os índices “1” estão relacionados a placa de Mindlin e o índice “2” é a consideração do efeito da placa de Reissner. como segue:

$$\begin{bmatrix} C_{pm1} \\ B_{pm1} \\ A_{pm1} \\ F_{pm1} \\ E_{pm1} \\ D_{pm1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-G_m s_1 ((\bar{R}_{w2} + X_m^4 + K_{p2} X_m^2) s_2 + X_m^2 \bar{R}_{w2} + K_{p2} X_m^4))}{D_1 X_m^3 ((\bar{R}_{w2} + \bar{R}_{w1} + X_m^4 + (K_{p2} + K_{p1}) X_m^2) s_1 + X_m^2 \bar{R}_{w1} + K_{p1} X_m^4) s_2 + (X_m^2 \bar{R}_{w2} + K_{p2} X_m^4) s_1} \\ 0 \\ \frac{(G_m (s_1 + X_m^2)) ((\bar{R}_{w2} + X_m^4 + K_{p2} X_m^2) s_2 + X_m^2 \bar{R}_{w2} + K_{p2} X_m^4)}{D_1 X_m^4 ((\bar{R}_{w2} + \bar{R}_{w1} + X_m^4 + (K_{p2} + K_{p1}) X_m^2) s_1 + X_m^2 \bar{R}_{w1} + K_{p1} X_m^4) s_2 + (X_m^2 \bar{R}_{w2} + K_{p2} X_m^4) s_1} \\ \frac{-(G_m * (\bar{R}_{w2} + K_{p2} X_m^2) * (s_1 + X_m^2) * s_2)}{D_1 X_m^3 ((\bar{R}_{w2} + \bar{R}_{w1} + X_m^4 + (K_{p2} + K_{p1}) X_m^2) s_1 + X_m^2 \bar{R}_{w1} + K_{p1} X_m^4) s_2 + (X_m^2 \bar{R}_{w2} + K_{p2} X_m^4) s_1} \\ 0 \\ \frac{(G_m (\bar{R}_{w2} + K_{p2} X_m^2) (s_1 + X_m^2) ((s_2 + X_m^2)))}{D_1 X_m^4 ((\bar{R}_{w2} + \bar{R}_{w1} + X_m^4 + (K_{p2} + K_{p1}) X_m^2) s_1 + X_m^2 \bar{R}_{w1} + K_{p1} X_m^4) s_2 + (X_m^2 \bar{R}_{w2} + K_{p2} X_m^4) s_1} \end{bmatrix} \quad (81)$$

$$\begin{bmatrix} C_{pm2} \\ B_{pm2} \\ A_{pm2} \\ F_{pm2} \\ E_{pm2} \\ D_{pm2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{v_1 G_m ((\bar{R}_{w2} + X_m^4 + K_{p2} X_m^2) s_1 + \bar{R}_{w1} X_m^2 + K_{p1} X_m^4) s_2 + (X_m^2 \bar{R}_{w2} + K_{p1} X_m^4) s_1}{2 D_1 X_m s_1 ((\bar{R}_{w2} + \bar{R}_{w1} + X_m^4 + (K_{p2} + K_{p1}) X_m^2) s_1 + X_m^2 \bar{R}_{w1} + K_{p1} X_m^4) s_2 + (X_m^2 \bar{R}_{w2} + K_{p2} X_m^4) s_1} \\ 0 \\ \frac{-(v_1 G_m ((\bar{R}_{w2} + X_m^4 + K_{p2} X_m^2) s_2 + \bar{R}_{w2} X_m^2 + K_{p2} X_m^4))}{2 D_1 X_m^2 ((\bar{R}_{w2} + \bar{R}_{w1} + X_m^4 + (K_{p2} + K_{p1}) X_m^2) s_1 + X_m^2 \bar{R}_{w1} + K_{p1} X_m^4) s_2 + (X_m^2 \bar{R}_{w2} + K_{p2} X_m^4) s_1} \\ \frac{(v_1 G_m s_2 ((\bar{R}_{w2} + K_{p2} X_m^2))}{2 D_1 X_m s_1 ((\bar{R}_{w2} + \bar{R}_{w1} + X_m^4 + (K_{p2} + K_{p1}) X_m^2) s_1 + X_m^2 \bar{R}_{w1} + K_{p1} X_m^4) s_2 + (X_m^2 \bar{R}_{w2} + K_{p2} X_m^4) s_1} \\ 0 \\ \frac{-(v_1 G_m (\bar{R}_{w2} + K_{p2} X_m^2) (s_2 + X_m^2))}{2 D_1 X_m^2 ((\bar{R}_{w2} + \bar{R}_{w1} + X_m^4 + (K_{p2} + K_{p1}) X_m^2) s_1 + X_m^2 \bar{R}_{w1} + K_{p1} X_m^4) s_2 + (X_m^2 \bar{R}_{w2} + K_{p2} X_m^4) s_1} \end{bmatrix} \quad (82)$$

Se somar as Eqs. 81 e 82, obtém-se a solução particular A_{pm} , B_{pm} , C_{pm} , F_{pm} , E_{pm} .

O polinômio característico da Eq. 84 pode ser escrito como:

$$tt1z^6 + tt2z^5 + tt3z^4 + tt4z^3 + tt5z^2 + tt6z + tt7 = \frac{-Gm}{D1tt7}, \quad (83)$$

Cuja forma homogênea é:

$$tt1z^6 + tt2z^5 + tt3z^4 + tt4 * z^3 + tt5z^2 + tt6z + tt7 = 0 \quad (84)$$

Como anteriormente citado, os valores dos coeficientes $tt1, tt2, tt3, tt4, tt5, tt6$ e $tt7$ são combinações de $a1, a2, b1, b2, s1, s2, \bar{R}_{w1}, \bar{R}_{w2}, K_{p1}, K_{p2}$ e X_m .

Nos casos de as placas possuírem propriedades independentes, a saber: espessuras distintas, módulos de elasticidade distintos e outras propriedades, as raízes do polinômio, Eq.84, podem assumir valores muito elevados, seja em termo de números complexos ou reais. O fato é que essas raízes serão os argumentos da solução da equação diferencial, Eq. 80, expressa em termo de senos e cossenos hiperbólicos, que devido aos altos valores dessas raízes podem levar a falhas na solução, quando essas são aplicadas às funções hiperbólicas.

Ainda mais, a quantidade de raízes imaginárias ou reais que o polinômio vai assumir depende dos valores de “m”, ou seja, para cada valor de “m” as raízes do polinômio da Eq. 84

podem assumir diferentes natureza, por exemplo, todas sendo reais, todas sendo complexas, um misto de reais e complexas. Dessa forma a solução explícita, por esse método, para a solução da Eq. 80 só seria válida para certos intervalos de “m” onde as características das raízes não se alterassem. Isso demonstra a necessidade de um algoritmo que identifique as características das raízes do polinômio para cada valor de “m” e então organize-as e, de acordo com as mesmas, apresente a solução geral para a homogênea.

No entanto ao se aprofundar no estudo do comportamento das raízes da homogênea e após um exaustivo processo de verificações e testes, foi possível se constatar que, para um caso específico, caso esse que admite que as duas placas possuem as mesmas propriedades, o polinômio da Eq. 84 pode ser fatorado explicitamente em um produto de dois polinômios cúbicos, como segue:

$$\eta_3 z_1^3 + \eta_2 z_1^2 + \eta_1 z_1^1 + \eta_0 = 0 \quad (85)$$

$$\eta_7 z_2^3 + \eta_6 z_2^2 + \eta_5 z_2^1 + \eta_4 = 0 \quad (86)$$

Onde:

$$\eta_0 = X_m^4 s_1^2 + X_m^6 a_1 s_1$$

$$\eta_1 = (-(2X_m^2 b_1) - 2X_m^2 a_1) s_1^2 + (X_m^4 b_1^2 - (X_m^4 a_1^2 + X_m^4 a_1 + X_m^4)) s_1$$

$$\eta_2 = s_1^2 + (X_m^2 a_1^2 + X_m^2 a_1 + X_m^2 + X_m^2 b_1^2) s_1$$

$$\eta_3 = -(a_1 s_1)$$

$$\eta_4 = (2K_{w1} + X_m^4 + 2K_{p1} X_m^4) s_1^2 + (2X_m^2 a_1 + X_m^2) K_{w1} + (X_m^6 + 2K_{p1} X_m^4) a_1 + 2X_m^4 a_1 K_{w1} + 2K_{p1} X_m^6 a_1$$

$$\eta_5 = (-(2X_m^2 b_1) - (2X_m^2 a_1 + 2K_{p1})) s_1^2 + (X_m^4 a_1^2 + (X_m^4 + 4K_{p1} X_m^2) a_1 + X_m^4 + 4K_{p1} X_m^2) - (2a_1 + 2) K_{w1} s_1 + (2X_m^2 b_1^2 - (2X_m^2 a_1^2 + 2X_m^2)) K_{w1} + (2K_{p1} X_m^4 b_1^2 - (2K_{p1} X_m^4 a_1^2 + 2K_{p1} X_m^4 a_1 + 2K_{p1} X_m^4))$$

$$\eta_6 = s_1^2 + (X_m^2 a_1^2 + (X_m^2 + 2K_{p1}) a_1 + X_m^2 + 2K_{p1} - X_m^2 b_1^2) s_1 + 2a_1 K_{w1} + (2K_{p1} X_m^2 a_1^2 + 2K_{p1} X_m^2 a_1 + 2K_{p1} X_m^2 - 2K_{p1} X_m^2 b_1^2)$$

$$\eta_7 = -(a_1 s_1) - 2K_{p1} a_1$$

Diante dos polinômios oriundos da fatoração, os quais estão descritos nas Eqs.85 e 86, a forma explícita das raízes pode ser obtida para cada polinômio, verificando, dessa forma, a natureza de cada raiz. Foi constatado que das seis raízes dos polinômios cúbicos, essas podem ser complexas ou reais e são dadas pelas seguintes expressões:

$$z_1 = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\Delta}} - \frac{\eta_2}{3}, \quad z_2 = \frac{-z_1 - \frac{\eta_2}{\eta_3} + \sqrt{\Delta_1}}{2}, \quad z_3 = \frac{-z_1 - \frac{\eta_2}{\eta_3} - \sqrt{\Delta_1}}{2} \quad (87a-c)$$

Sendo;

$$q = 2 \left(\frac{\eta_2}{\eta_3} \right)^3 - \frac{1}{3} \frac{\eta_2}{\eta_3} \frac{\eta_1}{\eta_3} + \frac{\eta_0}{\eta_3} \quad p = \frac{\eta_2}{\eta_3} - \frac{1}{3} \left(\frac{\eta_2}{\eta_3} \right)^2$$

$$\Delta = \left(\frac{q}{2} \right)^2 + \left(\frac{p}{3} \right)^3 \quad \Delta_1 = \left(z_1 + \frac{\eta_2}{\eta_3} \right)^2 - 4 \left[\frac{\eta_1}{\eta_3} + z_1 \left(z_1 + \frac{\eta_2}{\eta_3} \right) \right]$$

Para determinar as raízes (z_4, z_5, z_6), do segundo polinômio cúbico, ou seja, da Eq. 86 basta fazer os coeficientes $\eta_0 = \eta_4$; $\eta_1 = \eta_5$; $\eta_2 = \eta_6$; $\eta_3 = \eta_7$, nas expressões (87a-c).

É importante pontuar que a obtenção de raízes via a fatoração do polinômio da equação característica, Eq. 84, se fez necessário devido a pequenos ruídos obtidos quando se tentou utilizar a função “*Polyroots*” do software “*Mathcad*”, que por vezes não reproduzia a igualdade das raízes tais quais foram observadas quando do tratamento de cada polinômio cúbico individualmente.

Depois de determinada a função Ψ , basta aplicar as Eqs. 79 e 81 na Eq. 75, sendo possível obter a Eq. 88 a seguir, essa fornece de modo direto os valores das funções iniciais do problema.

$$\begin{bmatrix} B_{m2} \\ C_{m2} \\ A_{m2} \\ E_{m2} \\ F_{m2} \\ D_{m2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a12a23 - a13a22)((a44a55 + a45^2)a66 + (a44a56^2 + 2a45a46a456 - a46^2a55)) \\ -((a11a23 + a12a13)((a44a55 + a45^2)a66 + (a44a56^2 + 2a45a46a456 - a46^2a55)) \\ (a12^2 + a11a22)((a44a55 + a45^2)a66 + (a44a56^2 + 2a45a46a456 - a46^2a55)) \\ -(a63(a45a56 - a46a55)(a12^2 + a11a22)) \\ a63 * (a44a56 + a45a46)(a12^2 + a11a22) \\ -(a63(a12^2 + a11a22)(a45^2 + a44a55)) \end{bmatrix} \Psi \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (88)$$

Um procedimento análogo deve ser feito para o sistema da Eq. 78 associado ao problema complementar ao de Mindlin para se obter a solução de Reissner. Assim, após manipulações algébricas, os resultados para os coeficientes do problema complementar ficam:

$$\begin{bmatrix} B_{m1} \\ C_{m1} \\ A_{m1} \\ E_{m1} \\ F_{m1} \\ D_{m1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ((a22a33 + a23^2) * (a44a55 + a45^2))a66 + (a22a33 + a23^2) * (a44a56^2 + 2a45a46a56 - a46^2a55) - (a22a36a44a55 + a22a36a45^2)a63 \\ (a12a33 + a13a23)(a44a55 + a45^2)a66 + (a12a33 + a13a23)(a44a56^2 + 2a45a46a56 - a46^2a55) - (a12a36a44a55 + a12a36a45^2)a63 \\ (a12a23 - a13a22)((a44a55 + a45^2)a66 + (a44a56^2 + 2a45a46a56 - a46^2a55)) \\ -(a63(a12a23 - a13a22)(a45a56 - a46a55)) \\ (a63(a12a23 - a13a22)(a44a56 - a45a46)) \\ -(a63(a12a23 - a13a22)(a44a55 - a45^2)) \end{bmatrix} \Psi \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (89)$$

Assim é possível obter as incógnitas do problema original, ou seja, as incógnitas da Eq. 77. Finalmente, aplica-se esses valores na Eqs. 67 e se obtém os deslocamentos e rotações na placa superior e na placa inferior.

Os coeficientes de carregamentos G_m e H_m para método de Levy, partindo-se das Eqs. 67-d e 67-h, podem ser obtidos como:

$$G_m(y) = \frac{2}{a} \int_{-a/2}^{a/2} g_1(x, y) \sin(X_m x) dx \quad \text{e} \quad H_m(y) = \frac{2}{a} \int_{-a/2}^{a/2} g_2(x, y) \sin(X_m x) dx \quad (90a-b)$$

Se a carga for uniformemente distribuída, $g(x, y) = \text{Constante}$ ou igual a g_1 e g_2 , então:

$$G_m = \frac{4g_1}{\pi m} \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right)^2 \quad \text{e} \quad H_m = \frac{4g_2}{\pi m} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 \quad (91a-b)$$

Se a carga for em linha, paralela ao eixo y , uniforme e constate, $g(x, y) = g_i \delta(x, \varepsilon)$, $i=1,2$. Onde, ε é a posição em “ x ” que a carga em linha se encontra. Então:

$$G_m = \frac{2g_1}{a} \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{2m\pi}{a} \varepsilon\right)\right)} \quad \text{e} \quad H_m = \frac{2g_2}{a} \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{2m\pi}{a} \varepsilon\right)\right)} \quad (92a-b)$$

4.2.3 Método de Hormander Aplicado ao Sistema de Placas Duplo de Kirchhoff

Para a obtenção do sistema de equações governantes referentes ao problema de placas duplas de Kirchhoff, é mostrado na Eq. 93, em notação indicial, a sua respectiva equação variacional.

$$\int_{\Omega} M_{ij} \delta w_{,ij} d\Omega + \int_{\Omega} T_{ij} \delta v_{,ij} d\Omega + \int_{\Omega} K_w (w - v) \delta (w - v) d\Omega + \int_{\Omega} K_p (w_{,1} - v_{,1}) \delta (w_{,1} - v_{,1}) d\Omega + \int_{\Omega} K_p (w_{,2} - v_{,2}) \delta (w_{,2} - v_{,2}) d\Omega - \int_{\Omega} g_1 \delta w d\Omega - \int_{\Omega} g_2 \delta v d\Omega = 0 \quad (93)$$

Fazendo integrações sucessivas na Eq. 93 e organizando os termos, pode-se, ao final desse processo, chega-se em uma relação ponderada por $\delta w, \delta \theta_x, \delta \theta_y$:

$$\int_{\Omega} [M_{ij,ij} + K_w(w - v) + K_p(w_{,ii} - v_{,ii}) - g_1] \delta w d\Omega + \int_{\Omega} [T_{ij,ij} - K_w(w - v) - K_p(w_{,ii} - v_{,ii}) - g_2] \delta v d\Omega = 0 \quad (94)$$

Novamente, como as variações δw e δv não podem ser nulas, isso implica que as equações de equilíbrio são escritas por:

$$M_{ij,ij} + K_w(w - v) + K_p(w_{,ii} - v_{,ii}) - g_1 = 0 \quad (95a)$$

$$T_{ij,ij} - K_w(w - v) - K_p(w_{,ii} - v_{,ii}) - g_2 = 0 \quad (95b)$$

Substituindo as equações de momentos da teoria de Kirchhoff, Eqs. 14, 15, 16 nas equações de equilíbrio, o sistema de equações governantes de placas pode ser obtido, como apresentado na Eq. 96 para o caso de placa simétrica.

$$\begin{bmatrix} D_1 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 + K_w - K_p \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) & -K_w + K_p \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \\ -K_w + K_p \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) & D_1 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 + K_w - K_p \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(x, y) \\ g_2(x, y) \end{pmatrix} \quad (96)$$

Aplicando no sistema da Eq. 98, as propostas de deslocamentos generalizados de Levy, Eqs. 67, o sistema anterior pode ser reescrito como:

$$\begin{bmatrix} D_1 \left(-X_m^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 + K_w - K_p \left(-X_m^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) & -K_w + K_p \left(-X_m^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \\ -K_w + K_p \left(-X_m^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) & D_2 \left(-X_m^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 + K_w - K_p \left(-X_m^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_m(y) \\ D_m(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_m \\ 0 \end{pmatrix} \quad (97)$$

Agora é feita a aplicação da Eq. 97, na Eq. 74 e então é possível obter a equação diferencial em termos da função escalar Ψ :

$$\left(tt5 \frac{d}{d^8 y} + tt4 \frac{d}{d^6 y} + tt3 \frac{d}{d^4 y} + tt2 \frac{d}{d^2 y} + tt1 \right) * \Psi = Gm \quad (98)$$

Cujo polinômio característico, resulta:

$$tt5z^4 + tt4 * z^3 + tt3z^2 + tt2z + tt1 = Gm \quad (99)$$

Considerando placas com propriedades iguais, as raízes, $(Z_1; Z_2; Z_3; Z_4)$, da homogênea do polinômio acima, podem ser explicitamente calculadas, as mesmas são apresentadas a seguir. Nota-se, porém, que todas as quatro raízes são função de X_m , o qual varia com o número de termos da série. Ou seja, mais uma vez, a construção de uma solução geral para a homogênea só seria válida para um intervalo de termos da série onde a natureza das raízes não mudassem. Então a otimização da solução para cada intervalo invariante da natureza das raízes foi feita em um código.

$$\begin{pmatrix} Z_1 = Z_2 \\ Z_3 = -Z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_m^2 \\ \frac{\sqrt{-(2D_1K_w + K_p^2) + (D_1X_m^2 - K_p)}}{D_1} \end{pmatrix} \quad (100)$$

Por outro lado, uma solução particular para Eq. 97, pode ser obtida pela consideração de $A_m(y)$ e $D_m(y)$ lineares. O que cancela os termos de ordem superior da Eq. 97 e fornece então as seguintes soluções particulares:

$$\begin{pmatrix} A_{pm} \\ D_{pm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{G_m(D_1X_m^4 + K_pX_m^2 + K_w)}{D_1X_m^4(D_1X_m^4 + 2K_pX_m^2 + 2K_w)} \\ \frac{G_m(K_pX_m^2 + K_w)}{D_1X_m^4(D_1X_m^4 + 2K_pX_m^2 + 2K_w)} \end{pmatrix} \quad (101)$$

Finalmente, encontrada a função Ψ e as constantes associadas a mesma pela imposição das condições de contorno, retorna-se as variáveis originais, bastando para tanto aplicar a função Ψ na Eq. 75. Assim:

$$\begin{pmatrix} A_m(y) \\ D_m(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 \frac{\partial^4}{\partial y^4} - (2D_1X_m^2 + K_p) \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (D_1X_m^4 + K_pX_m^2 + K_w) \\ -K_p \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + K_pX_m^2 + K_w \end{pmatrix} \Psi \quad (102)$$

Com as funções $A_m(y)$ e $D_m(y)$ definidas, os deslocamentos podem ser obtidos pela Eqs. 67 e mais ainda, é importante notar que todo o procedimento foi realizado considerando apenas carga aplicada na placa superior. No caso de existir carregamento na placa inferior, um procedimento semelhante deve ser realizado e então, as duas soluções somadas.

4.3 Condições de Contorno

A solução dos sistemas de placas, independente da teoria que está sendo utilizada para a sua modelagem, é obtida para cada combinação de condições de contorno e carregamentos e, de modo geral, são soluções de equações diferenciais, essas soluções, por sua vez, possuem constantes que devem ser definidas mediante a aplicação de condições de contorno conhecidas. Assim, é relevante ter ciência de quais critérios devem ser atendidos para cada condição de suporte nas extremidades das placas para, por conseguinte, poder obter a solução geral do caso específico de sistema de placas para o qual o projetista ou estudioso da área está trabalhando.

A seguir, Tab. 1, é apresentado as condições de contorno para o sistema duplos de placas retangulares, na situação onde as placas possuem as quatro bordas simplesmente apoiadas (SSSS); para a situação de placas com duas bordas opostas simplesmente apoiadas e duas bordas opostas engastadas (CSCS) e, finalmente, para os casos onde as placas possuem duas bordas opostas simplesmente apoiadas e duas bordas opostas livres (FSFS).

Para a solução de Levy, considerar a Fig. 10 e para a solução de Navier, considerar a Fig. 9.

Tabela 1: Condições de Contorno para Placas

Solução	Levy				Navier	
	Teoria					
Condição de Suporte	Kirchhoff	Mindlin/Reissner	Kirchhoff	Mindlin/Reissner		
SSSS	$w(x, y) = M_y = 0;$ Para $y = \pm \frac{b}{2}$	$w(x, y) = M_y = \theta_x = 0;$ Para $y = \pm \frac{b}{2}$	$w(x, y) = M_y = 0;$ Para $y = 0$ e $y = b$	$w(x, y) = M_y = \theta_x = 0;$ Para $y = 0$ e $y = b$		
CSCS	$w(x, y) = \theta_y = 0;$ Para $y = \pm \frac{b}{2}$	$w(x, y) = \theta_y = \theta_x = 0;$ Para $y = \pm \frac{b}{2}$				
FSFS	$w(x, y) = Q_y = 0;$ Para $y = \pm \frac{b}{2}$	$w(x, y) = Q_y = \theta_x = 0;$ Para $y = \pm \frac{b}{2}$				

Fonte: Autor (2022)

Para os sistemas duplos com camada de Pasternak, as equações de momentos e cortante são expressões do tipo:

$$M_x = D_1(\theta_{x,x} + v_1\theta_{y,y}) + \frac{gv_1}{2s_1} \quad (103)$$

$$M_y = D_1(\theta_{y,y} + v_1\theta_{x,x}) + \frac{gv_1}{2s_1} \quad (104)$$

$$T_x = D_2(\varphi_{x,x} + v_2\varphi_{y,y}) + \frac{gv_2}{2s_1} \quad (105)$$

$$T_y = D_2(\varphi_{y,y} + v_2\varphi_{x,x}) + \frac{gv_2}{2s_1} \quad (106)$$

$$Q_x = kG_1h_1\left(\frac{\partial w(x,y)}{\partial x} + \theta_x\right) + K_{p1}\left(\frac{\partial w(x,y)}{\partial x}\right) \quad (107)$$

$$Q_y = kG_1h_1\left(\frac{\partial w(x,y)}{\partial y} + \theta_y\right) + K_{p1}\left(\frac{\partial w(x,y)}{\partial y}\right) \quad (108)$$

$$V_x = kG_2h_2\left(\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} + \theta_x\right) + K_{p2}\left(\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\right) \quad (109)$$

$$V_y = kG_1h_1\left(\frac{\partial v(x,y)}{\partial y} + \theta_y\right) + K_{p2}\left(\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\right) \quad (110)$$

Para o caso da teoria de Kirchhoff, o sistema duplo de placa ligado por camada de pasternak possui as seguintes equações de cortante.

$$Q_x = -D_1\left(\frac{\partial^3 w(x,y)}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w(x,y)}{\partial x \partial y^2}\right) + K_{p1}\left(\frac{\partial w(x,y)}{\partial x}\right) \quad (111)$$

$$Q_y = -D_1\left(\frac{\partial^3 w(x,y)}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w(x,y)}{\partial y \partial x^2}\right) + K_{p1}\left(\frac{\partial w(x,y)}{\partial y}\right) \quad (112)$$

$$V_x = -D_2\left(\frac{\partial^3 v(x,y)}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v(x,y)}{\partial x \partial y^2}\right) + K_{p2}\left(\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\right) \quad (113)$$

$$V_y = -D_2\left(\frac{\partial^3 v(x,y)}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 v(x,y)}{\partial y \partial x^2}\right) + K_{p2}\left(\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\right) \quad (114)$$

Onde o subíndices "1 e 2" fazem referência as placas superior e inferior respectivamente.

5 Resultados e Discussões

Nesta seção são apresentados os estudos de validação das soluções propostas a partir da resolução de alguns exemplos de aplicação de interesse prático. No final da seção, será discutido a influência do cortante nos deslocamentos das placas à medida que a sua espessura aumenta, além de verificar a influência do módulo de cisalhamento da camada elástica.

Este trabalho também teve a intenção de abordar outras condições de contorno, tais como o caso FSFS e CSCS, porém ao analisar os resultados e comparar os valores de deslocamentos obtidos entre a teoria de Kirchhoff e a de Mindlin e de Reissner, notou-se um comportamento físico incoerente, optando por deixar de fora os dados no momento.

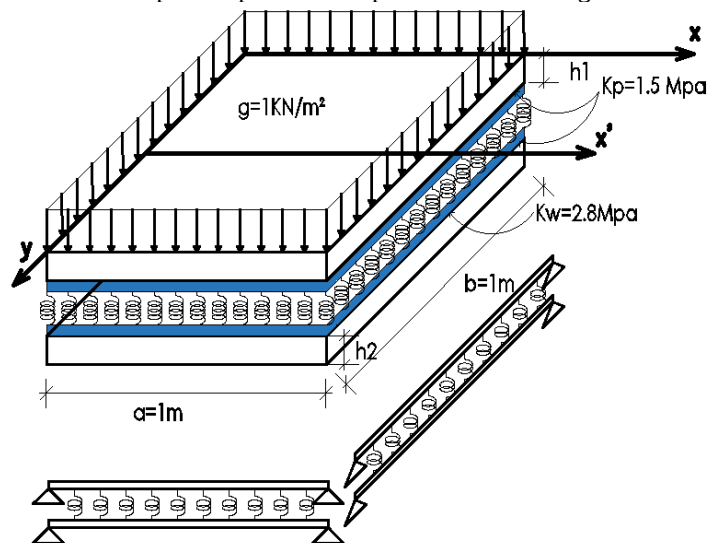
5.1 Estudo dos Deslocamentos

Considere um sistema de placas de Kirchhoff, Mindlin e Reissner interconectadas por uma camada elástica de Pasternak e cujas soluções foram obtidas via Navier e Levy-Homander para combinações de casos de carga (distribuída e constante em linha paralela ao eixo y), conforme Fig. 11 e Fig. 12, condição de contorno SSSS. Os resultados dos deslocamentos apresentados nesta seção, para o caso “SSSS”, são referentes aos pontos ao longo do eixo central paralelo ao eixo “ y ” ($x=0.5$ e $x'=0,5$), como pode ser visualizado nas Figs. 11 e 12, alterando, portanto, apenas a coordenada “ y ”. É importante comentar que o ponto (0.5, 0.250) na solução de Navier corresponde ao ponto (0.5, -0.250) na solução de Levy. Porém se o sinal negativo for omitido na coordenada da solução de Levy, por simplicidade de apresentação, nesta situação, isso não deve alterar os resultados referentes aos pontos estudados, uma vez que as placas são simétricas. Dessa maneira é mostrado os valores para cada solução analítica.

Aplicação 1: Seja um sistema de placas duplo com carga uniformemente distribuída, conforme indicado na Fig.12. O qual possui as seguintes características: Comprimento e largura igual a 1 m, espessura das placas h_1 e h_2 , constante da mola de ligação $K_w = 2.8$ MPa e $K_p = 1.5$ MPa, carga distribuída aplicada na placa superior igual a $q = 1$ kN/m², módulo de elasticidade $E_1 = E_2 = 200$ MPa e coeficiente de Poisson $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$. Deseja-se avaliar os deslocamentos transversais nas placas pelas abordagens de Navier e Levy, para as três situações de condições de contorno mostradas na Fig. 11.

Os resultados para a condição de apoio SSSS são apresentados nas Tabs. 2 e 3, para ambas as soluções (Navier e Levy), considerando uma placa de 5 cm e outra de 20 cm, respectivamente.

Figura 11: Placa Dupla Simplesmente Apoiada Sobre Carregamento Uniforme



Fonte: Autor (2022).

Tabela 2: Deslocamentos nas placas com carga distribuída e espessura $h_1=h_2= 0,05$ m.

Deslocamentos – Placa Superior ($\times 10^{-4}$)							
Levy				Navier			
y (m)	Kirchhoff	Mindlin	Reissner	y (m)	Kirchhoff	Mindlin	Reissner
0.000	8.9825	9.0974	9.0886	0.500	8.9825	9.0974	9.0800
0.250	6.5032	6.5926	6.5863	0.250	6.5032	6.5926	6.5790
0.375	3.5976	3.6522	3.6487	0.125	3.5976	3.6522	3.6439

Deslocamentos – Placa Inferior ($\times 10^{-4}$)							
Levy				Navier			
y (m)	Kirchhoff	Mindlin	Reissner	y (m)	Kirchhoff	Mindlin	Reissner
0.000	8.7619	8.8768	8.8682	0.500	8.7619	8.8768	8.8597
0.250	6.3308	6.4203	6.4140	0.250	6.3308	6.4203	6.4070
0.375	3.4927	3.5471	3.5437	0.125	3.4927	3.5471	3.5391

Fonte: Autor

Tabela 3: Deslocamentos nas placas com carga distribuída e com espessura $h_1=h_2= 0,2$ m.

Deslocamentos – Placa Superior ($\times 10^{-5}$)							
Levy				Navier			
y (m)	Kirchhoff	Mindlin	Reissner	y (m)	Kirchhoff	Mindlin	Reissner
0.000	2.0238	2.3562	2.3466	0.500	2.0238	2.3562	2.2963
0.250	1.4716	1.7377	1.7343	0.250	1.4716	1.7377	1.6902
0.375	0.8172	0.9856	0.9867	0.125	0.8172	0.9857	0.9561

Deslocamentos – Placa Inferior ($\times 10^{-6}$)							
Levy				Navier			
y (m)	Kirchhoff	Mindlin	Reissner	y (m)	Kirchhoff	Mindlin	Reissner
0.000	7.4871	9.9106	9.8687	0.500	7.4871	9.9107	9.6473
0.250	5.3367	7.1487	7.1257	0.250	5.3367	7.1487	6.9521
0.375	2.9066	3.9473	3.9400	0.125	2.9066	3.9474	3.8343

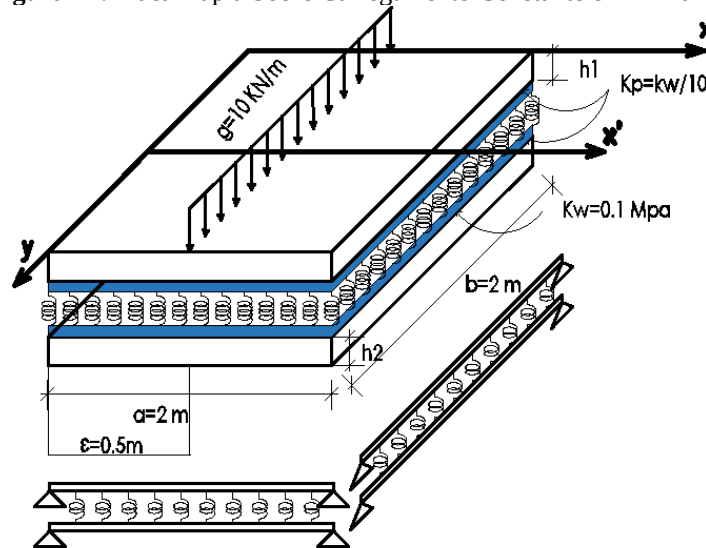
Fonte: Autor

Os resultados das Tabs. 2 e 3 mostram que as soluções convergiram, para as duas espessuras de placas, de modo geral a solução envolvendo as hipóteses da teoria de Reissner apresentaram valores de deslocamentos inferiores aos obtidos à luz da teoria de Mindlin para as duas espessuras testadas. Quando comparado os resultados do deslocamento na placa de Reissner mediante a solução de Levy versus a de Navier, o maior erro relativo entre os resultados obtidos foi de 0.13% para a ambas as placas de 0.05 metros e de 3,1% para a placa superior de 0.2 metros, no ponto ($x=0.5$ e $y=0.375$ ou $y=0.125$), ou seja, a solução de Navier, para este ponto e para a Placa de Reissner, obteve um valor de deslocamento de 0.13% menor que o obtido via Levy para as placas de 5 cm e obteve um valor 3,1% menor que a solução de Levy para a placa superior de 20 cm.

Nota-se que, como esperado, os resultados da teoria de Kirchhoff trazem deslocamentos menores que os das demais teorias, justamente pela não inclusão dos efeitos de cisalhamento.

Aplicação 2: Seja um sistema de placas duplo com carga constante em linha, conforme indicado na Fig.12. O qual possui as seguintes características: Comprimento e largura igual a 2 m, espessura das placas h_1 e h_2 , constante da mola de ligação $K_w = 0.1$ MPa e $K_p = \frac{K_w}{10}$, carga distribuída aplicada na placa superior igual a $q = 10$ kN/m, módulo de elasticidade $E_1 = E_2 = 10$ GPa e coeficiente de Poisson $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$. Deseja-se avaliar os deslocamentos transversais nas placas pelas abordagens de Navier e Levy.

Figura 12: Placa Dupla Sobre Carregamento Constante em Linha



Fonte: Autor (2022).

Os resultados para a condição de apoio SSSS são apresentados nas Tabs. 4 e 5, para ambas as soluções (Navier e Levy), considerando uma placa de 25 cm e outra de 8 cm, respectivamente.

Tabela 4: Deslocamentos nas placas com carga aplicada em linha e com espessura $h_1=h_2= 0,08$ m.

Deslocamentos – Placa Superior ($\times 10^{-4}$)							
Levy				Navier			
y (m)	<i>Kirchhoff</i>	<i>Mindlin</i>	<i>Reissner</i>	y (m)	<i>Kirchhoff</i>	<i>Mindlin</i>	<i>Reissner</i>
0.000	7.4323	7.4887	7.4848	1.000	7.4323	7.4887	7.4801
0.500	5.3599	5.4032	5.4005	0.500	5.3599	5.4032	5.3966
0.750	2.9515	2.9774	2.9759	0.250	2.9515	2.9774	2.9735

Deslocamentos – Placa Inferior ($\times 10^{-6}$)							
Levy				Navier			
y (m)	<i>Kirchhoff</i>	<i>Mindlin</i>	<i>Reissner</i>	y (m)	<i>Kirchhoff</i>	<i>Mindlin</i>	<i>Reissner</i>
0.000	10.003	10.179	10.173	1.000	10.003	10.179	10.166
0.500	7.0888	7.2144	7.2096	0.500	7.0888	7.2144	7.2048
0.750	3.8427	3.9113	3.9087	0.250	3.8427	3.9113	3.9060

Fonte: Autor

Tabela 05: Deslocamentos nas placas com carga aplicada em linha e com espessura $h_1=h_2= 0,25$ m.

Deslocamentos – Placa Superior ($\times 10^{-5}$)							
Levy				Navier			
y (m)	<i>Kirchhoff</i>	<i>Mindlin</i>	<i>Reissner</i>	y (m)	<i>Kirchhoff</i>	<i>Mindlin</i>	<i>Reissner</i>
0.000	2.4671	2.6529	2.6404	1.000	2.4671	2.6529	2.6250
0.500	1.7788	1.9212	1.9127	0.500	1.7788	1.9212	1.8999
0.750	0.9793	1.0642	1.0598	0.250	0.9793	1.0643	1.0515

Deslocamentos – Placa Inferior ($\times 10^{-9}$)							
Levy				Navier			
y (m)	<i>Kirchhoff</i>	<i>Mindlin</i>	<i>Reissner</i>	y (m)	<i>Kirchhoff</i>	<i>Mindlin</i>	<i>Reissner</i>
0.000	11.014	13.000	12.924	1.000	11.014	12.999	12.845
0.500	7.8044	9.2273	9.1738	0.500	7.8044	9.2232	9.1125
0.750	4.2305	5.0196	4.9907	0.250	4.2305	5.0056	4.9450

Fonte: Autor

Os resultados das Tabs. 4 e 5 mostram que as soluções também convergiram, para as duas espessuras de placas. De um de modo geral, a solução envolvendo as hipóteses da teoria de Reissner apresentaram valores de deslocamentos inferiores aos obtidos à luz da teoria de Mindlin. Quando comparado os resultados do deslocamento na placa de Kirchhoff mediante a solução de Levy versus a de Navier, não houve erro relativo para nenhuma das duas espessuras consideradas. Além disso, quando comparado os resultados do deslocamento na placa de Reissner mediante a solução de Levy versus a de Navier, o maior erro relativo entre os resultados obtidos foi de 0.92% para a placa superior de espessura de 0.25 m, no ponto ($x=0.5$ e $y=0.375$, sistema de eixos de Levy), ou seja, a solução de Navier para este ponto e para a

Placa de Reissner obteve um valor de deslocamento de 0.92% menor que aquele obtido via Levy. Para esse mesmo ponto, a teoria de Mindlin apresentou maior erro relativo entre as duas propostas de solução, 0,28%.

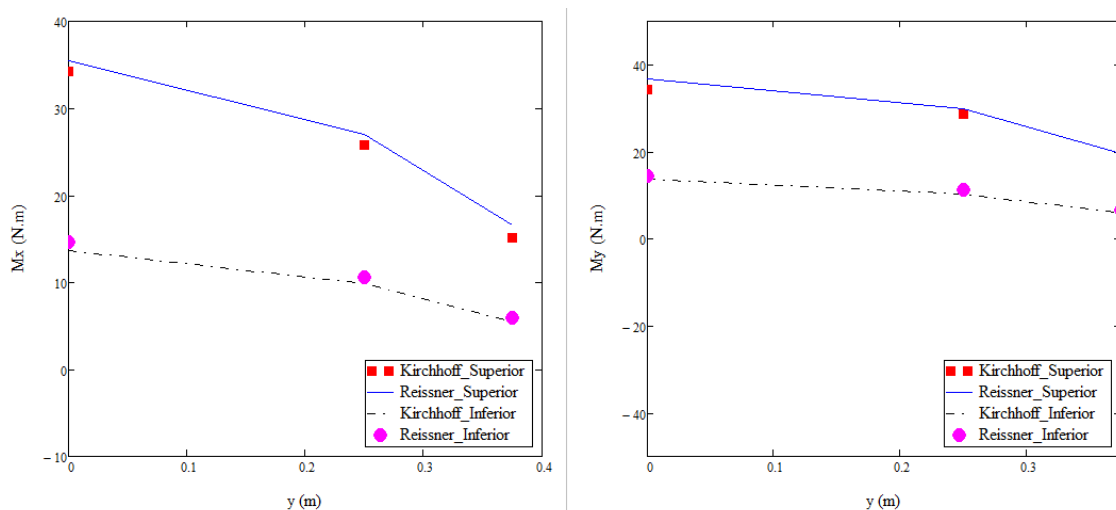
Nota-se, novamente, que os resultados da teoria de Kirchhoff trazem deslocamentos menores que os das demais teorias, justamente pela não inclusão dos efeitos de cisalhamento.

5.2 Estudo dos Momentos

Para o estudo do momento atuando ao longo das placas, será considerado os dados dos exemplos da aplicação 1 e 2, para o exemplo de aplicação 1, considere o caso da placa com 20 cm de espessura, onde na Fig. 13a são apresentados os momentos fletores nas placas superior e inferior na direção “x”, enquanto que na Fig.13b tem-se os momentos fletores na direção “y”,

Já na Fig. 14a e 14b são mostrados os mesmos esforços para o caso de carga em linha. A solução de Levy foi utilizada para tal comparação e na Fig. 14a é plotado os momentos em ambas as direções da placa superior e na Fig. 14b é plotado para a placa inferior.

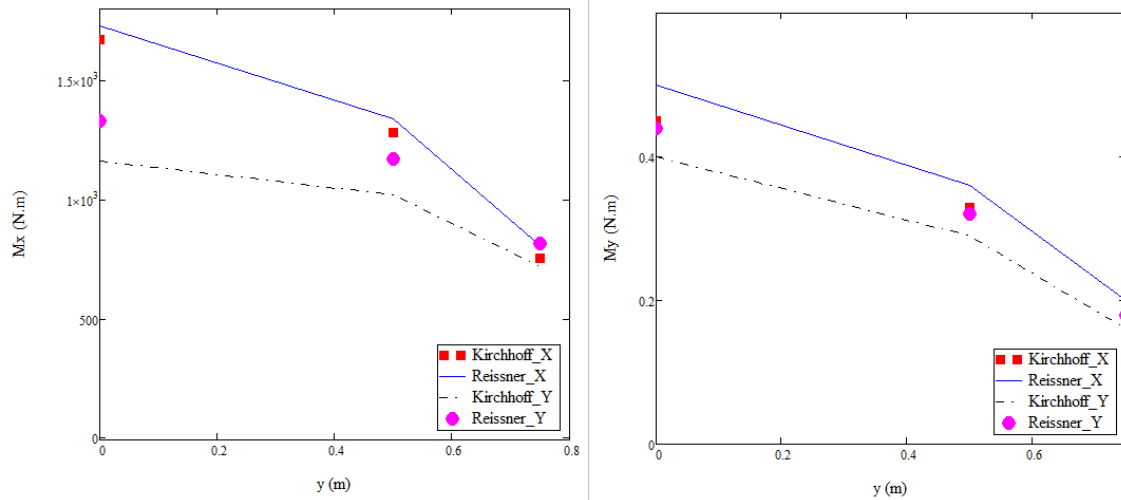
Figura 13: Momentos Fletores ao Longo das Placas Inferior e Superior para a carga uniformemente distribuída: a) direção x, b) direção y.



Fonte: Autor

Comparando as duas abordagens teóricas de placas, os momentos estimados via a proposta de Levy, para a placa de Reissner, apresentaram valores maiores que os da teoria clássica. Encontrando erros relativos entre 3% a 12%. Porém, percebe-se uma convergência entre os resultados.

Figura 14: Momentos Fletores ao Longo das Placas Inferior e Superior para a carga em Linha, Constante e Uniforme: a) direção x, b) direção



Fonte: Autor

Em contrapartida, para o caso de carga em linha, os momentos possuem um comportamento convergente, com os momentos nas placas de Reissner maiores que os da placa de Kirchhoff, encontrando erros relativos variando de 3% a 13%.

5.3 Estudo da Influência da Espessura

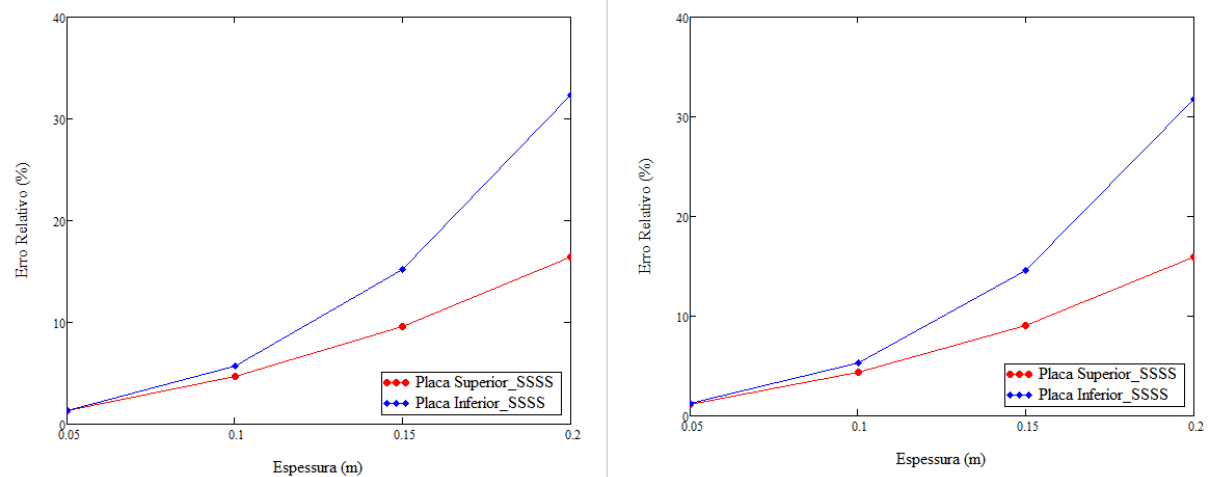
Com o objetivo de verificar a influência do cortante nas placas à medida que a espessura aumenta, foi realizado o cálculo dos erros relativos entre os resultados obtidos pela abordagem de Levy-Hormander, levando em conta as teorias de Reissner e Mindlin, que consideram efeitos de cortante e, a teoria de Kirchhoff, que despreza esses efeitos.

Diante disto, são apresentados nas Fig. 15 e Fig. 16 os resultados que relacionam a espessura versus o erro relativo das análises obtidos a partir de cada hipótese. Na Fig. 15a é mostrado o erro relativo entre os resultados dos deslocamentos no centro da placa pela abordagem de Levy quando se considera as hipóteses de Mindlin e Kirchhoff tanto na placa superior como na placa inferior, com carga distribuída. Enquanto que na Fig. 15b são mostrados

resultados análogos para os deslocamentos no centro da placa pela abordagem de Levy quando se considera as hipóteses de Reissner e Kirchhoff, com carga distribuída.

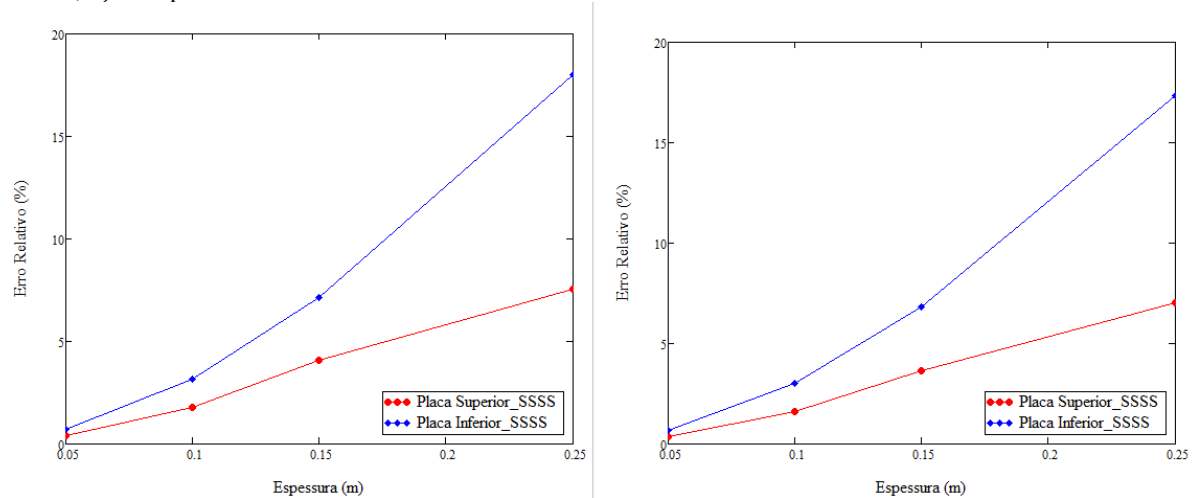
Já na Fig. 16a é mostrado o erro relativo entre os resultados dos deslocamentos no centro da placa pela abordagem de Levy quando se considera as hipóteses de Mindlin e Kirchhoff tanto na placa superior como na placa inferior, com carga em linha. Enquanto que na Fig. 16b são mostrados resultados análogos para os deslocamentos no centro da placa pela abordagem de Levy, quando se considera as hipóteses de Reissner e Kirchhoff com o mesmo tipo de carregamento.

Figura 15: Espessura Versus Erro Relativo nas Placas com Carga Uniformemente Distribuída. a) Comparativo entre Kirchhoff e Mindlin, b) Comparativo entre Kirchhoff e Reissner.



Fonte: Autor

Figura 16: Espessura Versus Erro Relativo nas Placas com Carga em Linha. a) Comparativo entre Kirchhoff e Mindlin, b) Comparativo entre Kirchhoff e Reissner.



Fonte: Autor

Em ambas as situações de aplicação de carga, claramente, nota-se a influência do efeito de cisalhamento no valor dos deslocamentos com o aumento da espessura das placas. Para o caso de cargas distribuídas em área e placas com espessura de 0,2 m, tem-se erros relativos de aproximadamente 16% e 32% nas placas superior e inferior, respectivamente, tanto para o caso Mindlin-Kirchhoff, como para o caso Reissner-Kirchhoff.

Para o caso de carga em linha com placas de 25 cm de espessura, esses valores ficam, 7.53% e 18.03% para as placas superior e inferior, respectivamente, na comparação da placa de Mindlin e de Kirchhoff. Já para o caso da comparação entre a placa de Reissner e Kirchhoff, tem-se erros relativos de aproximadamente 7.02% e 17.34%.

Esses resultados indicam que a deformação por cortante em sistemas duplos de placas segue o mesmo padrão observados em placas simples, que sua influência se torna mais pronunciada à medida que a placa se torna mais compacta (menor relação vão/espessura).

Por mais que não tenha sido apresentado, neste estudo, um exemplo com uma placa muito delgada, por exemplo 1 ou 2 cm de espessura. Nos resultados da Fig. 15 já é perceptível, mesmo com 5 cm de espessura, a tendência que existe em as teorias de Mindlin e Reissner recuperarem os resultados oriundos da teoria de Kirchhoff quanto mais delgada for as placas.

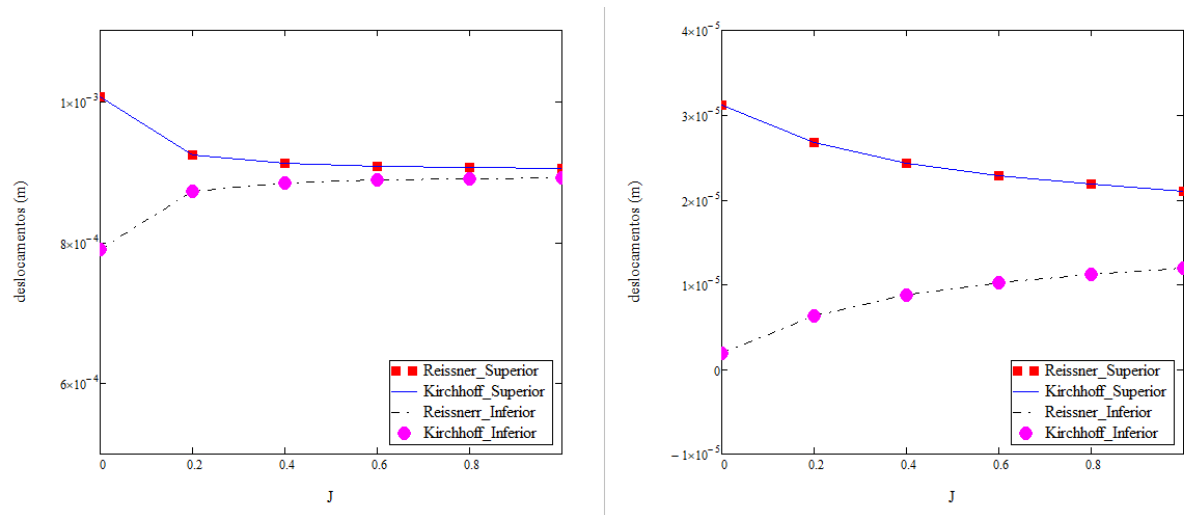
5.4 Estudo da Influência do Módulo de Pasternak

Finalmente, será feito um estudo sobre a influência do segundo parâmetro da camada elástica, ou seja, do módulo de cisalhamento da fundação elástica de Pasternak, nos valores dos deslocamentos no ponto central das placas para as teorias de Kirchhoff e Reissner. Mais uma vez, considerar os dados dos exemplos das aplicações 1 e 2. Nesse caso, o módulo de Pasternak será tomado variando desde 0,0% até 100% do valor do módulo de Winkler, variando em intervalos de 20%, podendo essa variação ser expressa pela seguinte relação: $K_p = \frac{J}{1} * K_w$, $J = 0,0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8$ e 1. As espessuras das placas serão, primeiro uma placa delgada com 0.05 m e depois uma placa mais espessa, com 0.2 m.

Na Fig. 17 serão considerados o caso de carga uniformemente distribuída em área, sendo que no gráfico da Fig. 17a será mostrado essa influência para a solução de Levy com placas de 0.05 m de espessura. Em contrapartida, no gráfico da Fig. 17b é mostrado essa influência para

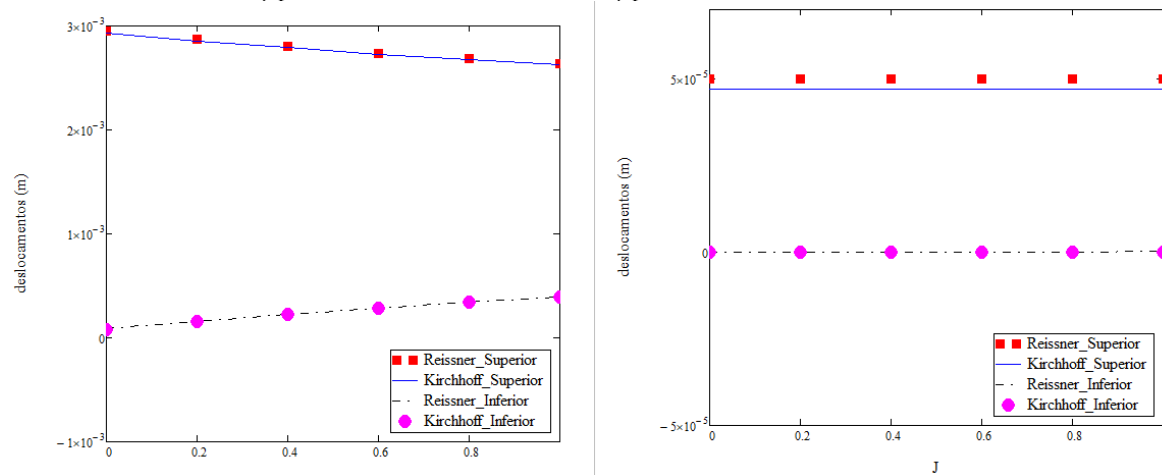
as mesmas situações, alterando a espessura para 20 cm. Uma análise semelhante é mostrada na Figs. 18 para carga em linha.

Figura 17: Influência do Módulo de Cisalhamento da fundação nos deslocamentos para Carga Uniformemente Distribuída. a) placas com $h=h_1=h_2=0,05$ m, b) placas com $h=h_1=h_2=0,2$ m.



Fonte: Autor

Figura 18: Influência do Módulo de Cisalhamento da fundação nos deslocamentos Placas com Carga em Linha. a) placas com $h=h_1=h_2=0,05$ m, b) placas com $h=h_1=h_2=0,2$ m.



Fonte: Autor

Em ambos os casos de carregamento e tanto para a placa mais delgada, como para a mais espessa, pode-se perceber que existe uma tendência de o módulo de cisalhamento de Pasternak diminuir os valores de deslocamento na placa superior e aumentar o valor desses na placa inferior.

Devido a escala do gráfico, na situação de carga em linha, não fica claro, porém, a variação dos deslocamentos na placa mais delgada é insignificante com a variação do módulo de Pasternak, sendo mais acentuada na placa espessa. Nessa situação específica, os deslocamentos da placa superior possuíram pouca variação, para as duas espessuras consideradas, diferente da placa inferior. Uma possibilidade desse acontecimento pode estar relacionada ao alto valor do módulo de elasticidade usado.

6 Conclusão

Diante dos resultados obtidos é possível concluir que as soluções desenvolvidas ao longo deste estudo representaram bem o problema, convergindo entre si para um resultado único, tanto em termos de momentos fletores, como em termos de deslocamentos. Porém, percebeu-se que as soluções via Levy foram mais suscetíveis a perturbações, devido, a necessidade de obtenção das raízes dos polinômios característicos utilizados na solução da equação diferencial poderem apresentar erros de truncamento numérico em decorrência da magnitude dos argumentos das funções hiperbólicas que compõem a solução homogênea.

Percebeu-se também a importância de se tomar nota sobre influência dos efeitos de cisalhamento à medida que as espessuras das placas aumentam, quando comparado as teorias que consideram o efeito de corte e aquela que suprime ao mesmo.

Ainda, pode-se concluir que os efeitos decorrentes do módulo cisalhante da fundação elástica de Pasternak, tendem a reduzir os valores dos deslocamentos nas placas superiores e tendem a aumentar esses valores nas placas inferiores. Adicionalmente, foi observado que para as placas mais delgadas essa redução ou aumento é quase desprezível.

Por fim com esse trabalho, foi possível entender um pouco mais do comportamento de placas espessas interligadas por fundações elásticas de Pasternak, atendendo as expectativas esperadas e os objetivos propostos.

Este trabalho também teve a intenção de abordar outras condições de contorno, tais como o caso FSFS e CSCS, porém ao analisar os resultados e comparar os valores de deslocamentos obtidos entre a teoria de Kirchhoff e a de Mindlin e de Reissner, notou-se um comportamento físico incoerente, optando por deixar de fora os dados no momento. Sendo ainda indicado para trabalhos futuros a verificação das soluções para os casos CSCS e FSFS.

Referências

ANDRADE, R. C. **Uma análise das soluções fundamentais aplicáveis às placas espessas pelas teorias de Reissner e Mindlin e suas relações com a teoria clássica para o uso no método dos elementos de contorno.** Dissertação de mestrado, Universidade Estadual de Campinas. Campinas-SP, (2001).

ALTOÉ, M. **O Método dos Elementos de Contorno para Placas de Reissner sobre Fundações do Tipo Pasternak.** Dissertação de mestrado, Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro – UENF. Campos dos Goytacazes - RJ, (2009).

ALTOÉ, M., RIBEIRO, N. S. e KARAM, V. J. **"Analysis of Simply Supported and Clamped Reissner's Plates on Pasternak-type Foundation by the Boundary Element Method."** Engineering Analysis with Boundary Elements 52: 64-70. Web. (2015).

Chinnaboon, B., Chucheepsakul, S., Katsikadelis, J. T. **A Bem-based domain meshless method for the analysis of Mindlin plates with general boundary conditions.** Elsevier. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 200 1379–1388, (2011).

DA VEIGA, L. B., DAVID, M. e RODOLFO, R. **"Numerical Analysis of a Locking-free Mixed Finite Element Method for a Bending Moment Formulation of Reissner-Mindlin Plate Model."** Numerical Methods for Partial Differential Equations 29.1. 40-63. Web: (2012).

ELIAS, Z. M. **"Finite Elements for Mindlin and Kirchhoff Plates Based on a Mixed Variational Principle."** International Journal for Numerical Methods in Engineering 122.22. 6680-713. Web: (2021).

Gbadeyan, J. A., Ogunmiloro, O. M., Fadugba, S. E. **Dynamic response of an elastically connected double non-mindlin plates with simply-supported end condition due to moving load.** Khayyam J. Math., 1, 40 –59 (2019).

HEDRIH, K. (Stevanović). **Transversal vibrations of double-plate systems.** Acta Mechanica Sinica, v. 22, n. 5, p. 487-501, 2006.

KIM, K., SONGHUN, K., PAEKSAN, J., MYONGKUK, S., SUNJONG, J. e KUMCHOL RI. **"Free Vibration Analysis of Elastically Connected Composite Laminated Double-plate System with Arbitrary Boundary Conditions by Using Meshfree Method."** AIP Advances 11.3. 35119-035119-17. Web: (2021).

KIRCHHOFF, G. **Uber das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scleibe.** J. Math., n. 40, 51-58, (1850).

LIU, D. S., CHEN, Y. W. e LU, C. J. **"Development of High-Order Infinite Element Method for Bending Analysis of Mindlin–Reissner Plates."** Mathematical Problems in Engineering 2020 (2020): Mathematical Problems in Engineering, 2020, Vol.2020. Web.

MACIEL, W. G. M. A. **O Método Dos Elementos de Contorno Aplicado às Teorias de Placas de Reissner, Mindlin e Reddy.** Tese de doutorado, Universidade Federal da Paraíba. João Pessoa-PB, (2020).

Mesquita, A. D. **Uma formulação do método dos elementos finitos aplicada a análise elastoplástica de cascas.** Dissertação de mestrado, Universidade de São Paulo. São Carlos-SP, (1998).

MILLAR, F. e DAVID M. **"A Finite Element Method for the Buckling Problem of Simply Supported Kirchhoff Plates."** Journal of Computational and Applied Mathematics 286. 68-78. Web: (2015).

MINDLIN, R. D. **Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates.** Journal of applied mechanics, New York, (1951).

NASIRSHOAIBI, M. e MOHAMMADI, N. **"Analyzing of Free Transverse Vibration of an Elastically Connected Rectangular Plate-Membrance System with a Pasternak Layer In-Between."** ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences 10. 5845-5854: (2015a).

NASIRSHOAIBI, M. e MOHAMMADI, N. **"Forced transverse vibration analysis of an**

elastically connected rectangular double-plate system with a Pasternak middle layer." ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences 10. 6004-6013: (2015b).

NOBAKHTI, S. e M.M, A. **"Static Analysis of Rectangular Thick Plates Resting on Two-parameter Elastic Boundary Strips."** European Journal of Mechanics, A, Solids 30.3 442-48. Web: (2011).

OMURTAG, M. H., ÖZUTOK, A. e AKÖZ, A. Y. **"Free Vibration Analysis of Kirchhoff Plates Resting on Elastic Foundation by Mixed Finite Element Formulation Based on Gâteaux Differential."** International Journal for Numerical Methods in Engineering 40.2. 295-317. Web: (1997).

ONISZCZUK, Z. **"Free Transverse Vibrations of an Elastically Connected Rectangular Simply Supported Double-Plate Complex System."** Journal of Sound and Vibration 236.4. 595-608. Web: (2000).

ONISZCZUK, Z. **"Forced Transverse Vibrations of an Elastically Connected Complex Rectangular Simply Supported Double-plate System."** Journal of Sound and Vibration 270.4. 997-1011. Web: (2004).

Ota, N. S. N. **O elemento finito T6-3I na análise de placas e dinâmica de cascas.** Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo. São Carlos-SP, (2016).

PASTERNAK, P.L. **On a new method of analysis of na elastic foundation by means of two foundation constants,** (In Russian) Gosudarstvennoe Izdatelstvo Linteraturi Po Stroitelstvu, IArkhitektura, Moscow, Russia.(1954).

PEREIRA, A. C. A. **Análise de placas duplas delgadas elasticamente conectadas: Uma abordagem pelo método dos elementos finitos.** Dissertação de mestrado, Universidade Federal da Paraíba. João Pessoa-PB, (2020).

PEREIRA, A. C. A., Maciel, W.G.M, Mendonla, A.V. **" Static boundary element solution of double plates."** Engineering Analysis with Boundary Elements 143, 639–662.

Elsevier: (2022).

PEREIRA, C. E. L. **Formulação variacional e aproximação por elementos finitos dos modelos de placa de Kirchhoff e Reissner-Mindlin**. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas. Campinas-SP, (2002).

RAJESH, K. e KOPPANATI, M. S. **"Free Vibration Analysis of Mindlin Plates Resting on Pasternak Foundation Using Coupled Displacement Method."** Archiwum Budowy Maszyn 65.1. 107. Web: (2018).

Reddy, J.N. **Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells**. 2ª ed. New York-NY: CRC Press, (2007).

REISSNER, E. **On Theory of bending of elastic plates**. J. Math Physics. v.23, p.184-191. (1944).

REISSNER, E. **The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates**. A.M.S.E. (The American Society of Mechanical Engineers), 29. New York (1945).

RIBEIRO, G. O. **Sobre a formulação do método dos elementos de contorno para flexão de placas usando as hipóteses de Reissner**. Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo. São Carlos-SP, (1992).

ROSA, M. A. e LIPPIELLO, M. **Free vibrations of simply supported double plate on two models of elastic soils**. Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech. 33: 331-353. (2008).

SHEN, H.-S, YANG, J. e ZHANG, L. **"Free And Forced Vibration of Reissner–Mindlin Plates with Free Edges Resting on Elastic Foundations."** Journal of Sound and Vibration 244.2. 299-320. Web: (2001).

SHI, D., HONG, Z., QINGSHAN. W., e SHUAI, Z. **"Free and Forced Vibration of the Moderately Thick Laminated Composite Rectangular Plate on Various Elastic Winkler and Pasternak Foundations."** Shock and Vibration 2017. 1-23. Web: (2017).

SILVA, N. A. **Aplicação do método dos elementos de contorno à placas com enrijecedores utilizando a teoria de Reissner.** Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo. São Carlos-SP, (1996).

STOJANOVIC, V., PREDRAG, K. e MARKO, R. "**Vibrations and Stability Analysis of Multiple Rectangular Plates Coupled with Elastic Layers Based on Different Plate Theories.**" International Journal of Mechanical Sciences 92. 233-44. Web: (2015).

SWAMIDAS, A. S. J., KUNUKKASSERIL, V. X. **Normal modes of elastically connected circular plate.** Journal of Sound and Vibration, v. 30, 99-108 (1973).

SWAMIDAS, A. S. J., KUNUKKASSERIL, V. X. **Free vibration of elastically connected circular plate system.** Journal of Sound and Vibration, v. 39, 229-235 (1975).

TIMOSHENKO, S.P., GOODIER, J. N. **Teoria da Elasticidade.** 3ª ed. Rio de Janeiro-RJ: Guanabara Dois, (1959).

TIMOSHENKO, S. P., WOINOWSKY-KRIEGER, S. **Theory of Plates and Shells.** 2ª ed. New York-NY: McGRAW-HILL, (1959).

Wang, C.M., Reddy, J.N., Lee, K.H. **Shear deformable Beams and Plates (Relationships with classical Solutions).** 1ª ed. New York-NY: Elsevier, (2000).

WINKLER, E. **The theory of elasticity and stiffness.** H. Dominicus, Prague. (1867).