



**UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE TECNOLOGIA - CT
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL**

MOAB BEZERRA RODRIGUES

**SOLUÇÕES ANALÍTICAS PARA PLACAS DELGADAS
SUBMETIDAS A CARGA PONTUAL E EM LINHA: UMA ANÁLISE
PELO MÉTODO DE LEVY**

João Pessoa-PB
2024

MOAB BEZERRA RODRIGUES

**SOLUÇÕES ANALÍTICAS PARA PLACAS DELGADAS
SUBMETIDAS A CARGA PONTUAL E EM LINHA: UMA ANÁLISE PELO
MÉTODO DE LEVY**

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado à Universidade Federal da
Paraíba como requisito para a obtenção do
título de bacharel em Engenharia Civil.
Orientador: Prof. Dr. Ângelo Vieira
Mendonça.

ORIENTADOR PROF. DR. ÂNGELO VIEIRA MENDONÇA

João Pessoa-PB
2024

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

R696s Rodrigues, Moab Bezerra.

SOLUÇÕES ANALÍTICAS PARA PLACAS DELGADAS SUBMETIDAS
A CARGA PONTUAL E EM LINHA: UMA ANÁLISE PELO MÉTODO DE
LEVY. / Moab Bezerra Rodrigues. - João Pessoa, 2024.
77 f.

Orientação: ANGELO VIEIRA MENDONÇA.
TCC (Graduação) - UFPB/CT.

1. Método de Levy. 2. Delta de Dirac. 3. Método de
Navier. 4. Winkler. 5. Pasternak. I. MENDONÇA, ANGELO
VIEIRA. II. Título.

UFPB/BSCT

CDU 624

FOLHA DE APROVAÇÃO

MOAB BEZERRA RODRIGUES

SOLUÇÕES ANALÍTICAS PARA PLACAS DELGADAS SUBMETIDAS A CARGA PONTUAL E EM LINHA: UMA ANÁLISE PELO MÉTODO DE LEVY

Trabalho de Conclusão de Curso em 11/04/2023 perante a seguinte Comissão Julgadora:

Á APROVADO
Ângelo Vieira Mendonça
Departamento de Engenharia Civil e Ambiental do CT/UFPB

Enildo Tales Ferreira APROVADO
Enildo Tales Ferreira
Departamento de Engenharia Civil e Ambiental do CT/UFPB

PRIMO FERNANDES FILHO APROVADO
Primo Fernandes Filho
Departamento de Engenharia Civil e Ambiental do CT/UFPB

Pablo Brilhante de Souza
Matrícula Siape: 1483214
Coordenador do Curso de Graduação em Engenharia Civil

Dedico esse trabalho a minha família,
minha mãe, Rubia e meus avós, Eduardo e
Severina.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pelas oportunidades a mim concebidas.

A minha mãe, Rubia, pelo dom da vida.

A minha vó, Severina, por me ensinar o que é amar e respeitar o próximo.

Ao meu avô, Eduardo, por me ensinar a nunca desistir dos meus objetivos, independente das adversidades.

A minha irmã, Ruth, por me guiar durante a minha trajetória acadêmica.

Ao meu tio, Gilmar, por me orientar a tomar as decisões que me fizeram chegar até aqui.

Ao professor e orientador, Ângelo Vieira Mendonça, pela orientação, paciência e disponibilidade ao longo deste trabalho.

Aos meus professores do ensino fundamental, médio e graduação, que me mostraram o quão magnífico pode ser o conhecimento.

A todos os meus amigos que fiz durante a graduação, pelas conversas, orientações e conhecimentos repassados.

A todos que me ajudaram direta e indiretamente a realizar esse trabalho, em especial a meus amigos: Maria, Ana e Gesiel pelo auxílio e orientação durante o processo final de desenvolvimento do trabalho.

*“Entrega o teu caminho ao Senhor;
confia nele, e ele o fará” (Salmos, 37,5)*

RESUMO

Este trabalho visa viabilizar soluções analíticas, via método Levy, para placas retangulares finas submetidas a carregamento pontual e carregamento linear distribuído. Tais cargas podem resultar em Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) envolvendo a função delta de Dirac, que podem exigir manipulações adicionais para determinar as soluções particulares. Assim, neste trabalho são deduzidas soluções de Levy tanto para placas isoladas quanto para aquelas apoiadas em Fundações elásticas de Winkler e Pasternak. Além disso, as soluções propostas são comparadas e validadas tanto pelo método analítico de Navier quanto pelas soluções numéricas pelo método dos elementos finitos.

Palavras-chaves: Método de Levy; Delta de Dirac; Método de Navier; Winkler; Pasternak.

ABSTRACT

This work aims to enable analytical solutions, through the Levy method, for thin rectangular plates subjected to point load and line distributed load. Such loadings can result Ordinary Differential Equations (ODE) involving the Dirac delta function, which may require additional manipulations to determine the particular solutions. Thus, in this work Levy solutions are deduced for both isolated plates and those supported on Winkler and Pasternak elastic foundations. Furthermore, the proposed solutions are compared and validated both using the Navier analytical method and numerical solutions by the finite element method.

Key-Words: Levy method; Dirac Delta function; Navier method; Winkler; Pasternak.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Placas na engenharia aplicada.....	13
Figura 1.2 - Carregamento em linha.....	14
Figura 2.1 - Placas finas com pouca deflexão	17
Figura 2.2 - Placas finas com muita deflexão.....	17
Figura 2.3 - Placas espessas.....	18
Figura 2.4 - Ortogonalidade da seção transversal.....	19
Figura 2.5 - Condições de contorno para placas simplesmente apoiadas.....	19
Figura 2.6 - Solução para diferentes geometrias de cargas.	20
Figura 3.1 – Ortogonalidade da seção transversal.	21
Figura 3.2 - Equilíbrio das forças verticais.....	24
Figura 3.3 - Equilíbrio de rotação.....	24
Figura 3.4 - (a) solução adotada no trabalho (b) solução comumente adotada	30
Figura 3.5 - Condição de Summerfeld.....	33
Figura 3.6 - Número complexos	42
Figura 3.7 - Placa sobre base de Pasternak.....	46
Figura 3.8 - Fluxograma do trabalho	49
Figura 4.1 - Referencias para o método de Levy e de Navier	50
Figura 4.2 - Deslocamento por Levy e por MEF na SSSS para placas isoladas	52
Figura 4.3 - Erro relativo do deslocamento na condição SSSS para placas isoladas	53
Figura 4.4 - Deslocamento por Levy e por MEF na SCSC para placas isoladas	54
Figura 4.5 - Erro relativo do deslocamento na condição SCSC para placas isoladas	55
Figura 4.6 - Deslocamento por Levy e por MEF na SSSS para placas em Winkler	56
Figura 4.7 - Erro relativo do deslocamento na condição SSSS para placas em Winkler	57
Figura 4.8 - Deslocamento por Levy e por MEF na SCSC para placas em Winkler	58
Figura 4.9 - Erro relativo do deslocamento na condição SCSC para placa sobre base de Winkler.	59
Figura 4.10 - Deslocamento por Levy e por MEF na SFSF para placas isoladas.	60
Figura 4.11 - Erro relativo do deslocamento na condição SFSF para placas isoladas.	61
Figura 4.12 - Deslocamento na condição SCSF para placas isoladas.	62
Figura 4.13 - Erro relativo do deslocamento na condição SCSF para placas isoladas.....	63
Figura 4.14 - Convergência dos deslocamentos	64
Figura 4.15 - Comparação para placa com razão geométrica (1/1).....	66

Figura 4.16 - Comparação para placa com razão geométrica (1/2).....	67
Figura 4.17 - Comparação para placa com razão geométrica (1/3).....	68
Figura 4.18 - Comparação para placa com razão geométrica (1/4).....	69
Figura 4.19 - Comparação para placa com razão geométrica (1/5).....	70
Figura 4.20 - Erro entre o método de Levy e equação da linha elástica para diferentes vãos..	71

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 - Solução por Navier para placas isoladas	28
Tabela 3.2 - Solução por Navier para placas apoiadas em base elástica de Winkler.....	28
Tabela 3.3 - Solução por Navier para placas apoiadas em base elástica de Pasternak	29
Tabela 3.4 - Condições de contorno para as bordas não obrigatoriamente simplesmente apoiadas	37
Tabela 3.5 – Solução particular por Levy para placas delgadas	40
Tabela 3.6 - Solução para placas sobre base elástica Winkler.....	44
Tabela 3.7 - Solução para placas apoiadas sobre base elástica de Pasternak	48
Tabela 4.1– Dados da placa	51
Tabela 4.2 - Coordenadas para carga pontual	51
Tabela 4.3 - Deslocamento da placa isolada na condição SSSS.....	52
Tabela 4.4 - Erro relativo do deslocamento da placa isolada na condição SSSS	53
Tabela 4.5 - Deslocamento da placa isolada na condição SCSC.....	54
Tabela 4.6 - Erro relativo do deslocamento da placa isolada na condição SCSC	55
Tabela 4.7 - Deslocamento da placa em Winkler na condição SSSS	56
Tabela 4.8 - Erro relativo do deslocamento da placa em Winkler na condição SSSS.....	57
Tabela 4.9 - Deslocamento da placa em Winkler na condição SCSC	58
Tabela 4.10 - Erro relativo do deslocamento da placa em Winkler na condição SCSC.....	59
Tabela 4.11 - Deslocamento da placa isolada na condição SFSF.....	60
Tabela 4.12 - Erro relativo do deslocamento da placa isolada na condição SFSF	61
Tabela 4.13 - Deslocamento da placa isolada na condição SFSC	62
Tabela 4.14 - Erro relativo do deslocamento da placa isolada na condição SFSC.....	63
Tabela 4.15 - Comparação para placa com razão geométrica (1/1).....	66
Tabela 4.16 - Comparação para placa com razão geométrica (1/2).....	67
Tabela 4.17 - Comparação para placa com razão geométrica (1/3).....	68
Tabela 4.18 - Comparação para placa com razão geométrica (1/4).....	69
Tabela 4.19 - Comparação para placa com razão geométrica (1/5).....	70
Tabela 4.20 - Erro entre placa e viga, para diferentes vãos	71

LISTA DE SÍMBOLOS

E	– Módulo de elasticidade longitudinal
ν	– Coeficiente de Poisson
$\delta(i - j_0)$	– Delta de Dirac
σ	– Tensão normal
ε	– Deformação linear
τ	– Tensão tangencial
a	– Dimensão da placa paralela ao eixo x
b	– Dimensão da placa paralela ao eixo y
K	– Constante elástica da mola da camada elástica
t	– Espessura da placa
D	– Módulo de rigidez à flexão da placa
r	– Distância entre ponto-fonte e o ponto-campo
w	– Deslocamento vertical do plano médio da placa superior
v	– Deslocamento vertical do plano médio da placa inferior
θ	– Rotação da seção transversal da placa
P	– Módulo da carga concentrada
q	– Módulo da carga distribuída
α	– Parâmetro de carregamento
m, n	– Número de ciclos para as séries trigonométricas
M_i, M_{ij}	– Momentos fletor e volvente, atuantes na placa
p	– Parcela real da $\sqrt{z}$
q	– Parcela imaginária da $\sqrt{z}$
∇^4	– Operador bi-harmônico
G	– Parâmetro de Pasternak
Ve	– Cortante equivalente de Kirchhoff
MEF	– Método dos Elementos Finitos
SSSS	– Todas as bordas simplesmente apoiadas
SCSC	– Duas bordas paralelas engastadas
SFSF	– Duas bordas paralelas livres

SUMÁRIO

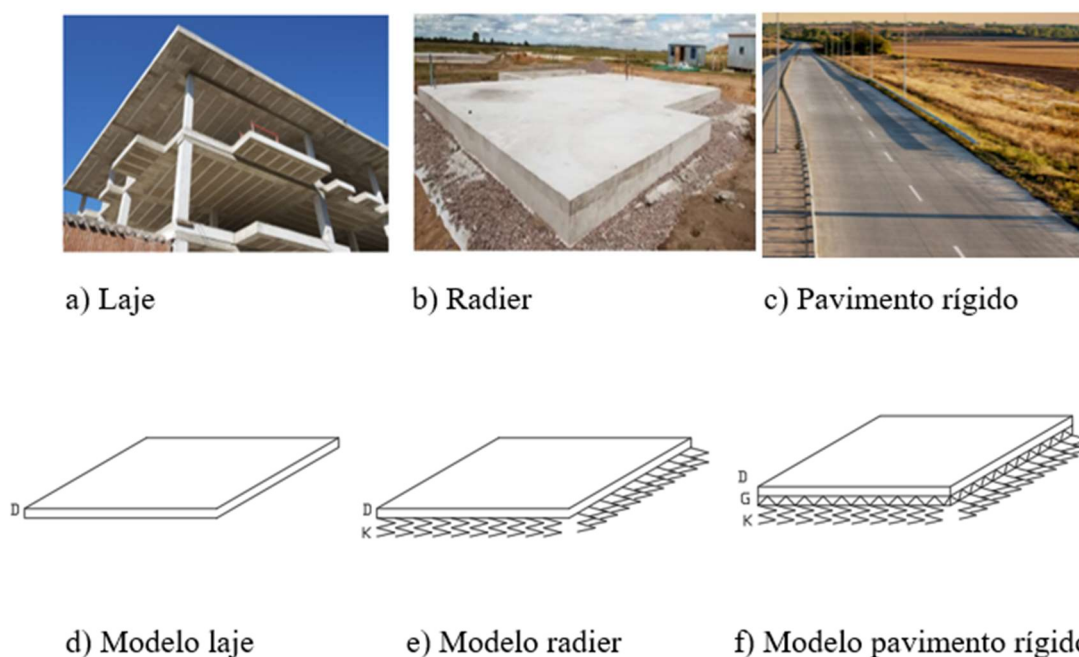
1. INTRODUÇÃO	13
1.2 OBJETIVOS	15
1.2.1 OBJETIVO GERAL	15
1.2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS	15
2. REFERENCIAL TEÓRICO	16
2.1 REVISÃO	16
3. METODOLOGIA	21
3.1 PLACAS DELGADAS: EQUAÇÃO GERAL	21
3.2 SOLUÇÃO DE NAVIER.....	25
3.2.1 DESENVOLVIMENTO DO MÉTODO	25
3.2.2 PLACAS ISOLADAS.....	26
3.3.3 PLACAS DELGADAS SOBRE BASE ELÁSTICA DE WINKLER.....	28
3.3.4 PLACAS DELGADAS SOBRE BASE DE PASTERNAK.....	29
3.4 SOLUÇÃO DE LEVY	29
3.4.1 DESENVOLVIMENTO DO MÉTODO	29
3.4.2 PLACAS DELGADAS ISOLADAS	39
3.4.3 PLACAS DELGADAS SOBRE BASE ELÁSTICA DE WINCKLER.....	41
3.4.4 PLACAS DELGADAS SOBRE BASE ELÁSTICA DE PASTERNAK.....	46
3.5 FLUXOGRAMA	49
4. RESULTADOS.....	50
4.1 VERIFICAÇÕES.....	50
4.1.1 DADOS DE ENTRADA.....	50
4.2.1 VELOCIDADE DE CONVERGÊNCIA	64
4.1 APLICAÇÃO.....	65
5. CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	72
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	74

1. INTRODUÇÃO

Na forma que a construção civil cresce, vê-se a demanda por estruturas mais econômicas em valor e espaço, sendo necessário para alcançar isso, dimensionamentos estruturais mais refinados. Neste contexto, as placas elásticas surgem como elementos fundamentais em uma vasta gama de aplicações. Sendo elas utilizadas em demasia nas engenharias, como na engenharia civil em lajes de edifícios Figura 1.1 – a), fundações do tipo radier Figura 1.1 – b) e pavimentos rígidos Figura 1.1 – c), fora diversas outras aplicações.

A capacidade de suportar cargas e transmitir esforços com eficácia, enquanto se mantêm leves e econômicas, também faz das placas um tópico de estudo indispensável na mecânica dos sólidos. Sendo então importante, aprimorar a análise desses elementos estruturais, visando garantir, de forma genuína, estruturas mais esmeradas.

Figura 1.1 – Placas na engenharia aplicada



Fonte: a) (CIMENTO ITAMBE, 2023) b) (ZAP IMOVEIS, 2015) c) (VIVA DECORA, 2022) d), e), f) (Autorial, 2024)

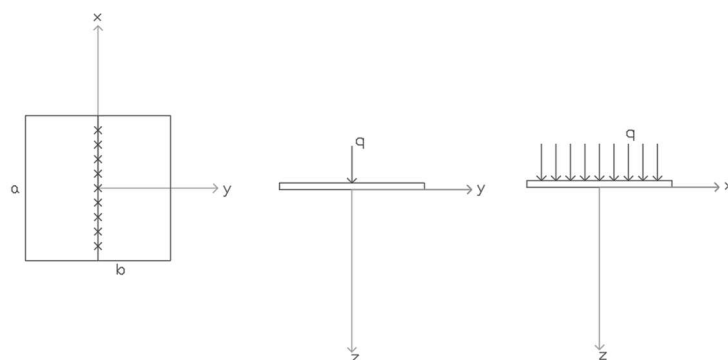
Desde os trabalhos pioneiros de Kirchhoff (1850), que estabeleceu as bases para a análise clássica de placas finas, até os avanços proporcionados pelo Método dos Elementos Finitos, as soluções para as teorias das placas elásticas tem evoluído significativamente. Este desenvolvimento não apenas aprimorou nossa compreensão teórica, mas também expandiu as

fronteiras da análise estrutural, permitindo a criação de estruturas cada vez mais complexas e eficientes.

As soluções analíticas para as placas elásticas, envolvem resolver EDP (Equações Diferenciais Parciais). Sendo, atualmente, essas soluções limitadas a casos particulares de geometria, condição de contorno e carregamento. Para o caso das placas retangulares, o método de Navier e o método de Levy são os mais conhecidos para a obtenção das soluções analíticas. Tendo o primeiro método a desvantagem de que todos os bordos da placa devem obrigatoriamente estar simplesmente apoiados. Já o método de Levy é menos restritivo, tendo em vista que apenas os dois bordos paralelos da placa retangular necessitam estar simplesmente apoiados. Contudo, a construção da solução do tipo Levy é sensivelmente mais trabalhosa já que primeiro é necessário transformar o sistema original de EDPs em um sistema equivalente de EDOs (Equações Diferenciais Ordinárias). Ademais, um aspecto raramente discutido na literatura, indiferente do modelo de placas utilizado, é como construir soluções analíticas usando o método de Levy para cargas concentradas ou cargas em linha arbitrariamente aplicadas no domínio da placa. Convém notar que o desenvolvimento de soluções analíticas do tipo Levy para placas simples (principalmente para aqueles casos onde todos os bordos não estejam necessariamente simplesmente apoiados) têm relevância já que muitas aplicações engenharia podem ser encontradas para este fim, tais como: determinação de esforços devido a cargas de paredes (carga em linha) em lajes de edifícios, determinação de superfície de influência devido à cargas móveis como em lajes de pontes e pavimento rígidos rodoviários.

Diante do exposto, torna-se notória a necessidade de construir soluções analíticas pelo método de Levy para cargas pontuais e cargas lineares, a fim de contribuir para o desenvolvimento mais refinado da análise estrutural de placas. Assim, neste trabalho será apresentada um possível caminho para solucionar os empecilhos encontrados no método de Levy para carregamento pontual e em linha Figura 1.2.

Figura 1.2 - Carregamento em linha



Fonte: (Autorial, 2024).

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo geral

Neste trabalho tem-se como objetivo geral discutir alguns aspectos da obtenção de soluções analíticas para problemas de placas delgadas submetidas a cargas pontual e distribuída em linha. Sendo possível, através dos resultados das soluções analíticas desenvolvidas, produzir resultados mais genuínos em projetos estruturais que envolvam placas finas.

1.2.2 Objetivo específico

a) Investigações de soluções analíticas em placas retangulares simples, pelos métodos de Navier e Levy, submetidas a cargas pontuais e distribuídas em linha segundo a teoria de placas de Kirchhoff.

b) Estudo de solução analítica de cargas, pontual e distribuída em linha, em placas delgadas apoiadas em bases de fundações elásticas de Winkler e Pasternak, pelo método de Levy.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 REVISÃO

Placas são elementos estruturais superficiais, simétricos em relação a seu plano médio e sujeitos a cargas ortogonais a ele, apresentando espessura relativamente pequena em relação a sua largura e comprimento. São elementos importantíssimos na engenharia, seja civil, mecânica, aeroespacial, dentre outras. No que tange a construção civil, as placas estão presentes em vários tipos de obras como edifícios, pontes e pavimentos rígidos.

A análise matemática das placas pode ser feita através de diversos modelos, variando o nível de detalhamento, sendo os mais precisos e rigorosos baseados na teoria da elasticidade tridimensional até descrições mais simplificadas como as teorias de placas.

Como afirmou Maciel (2020) “Nos modelos baseados na elasticidade, tem-se um detalhamento minucioso das tensões e das deformações tanto no interior quanto nas interfaces do sólido elástico. No entanto, esses modelos requerem um tratamento matemático mais complexo para determinação da solução para todos os pontos do domínio 3D. Além disso, quando a solução desses modelos é obtida numericamente, geralmente requer um grande número de graus de liberdade demandando um alto custo computacional, limitando a aplicação desses modelos em casos específicos onde efeitos locais exijam uma representação das tensões e deformações de uma forma mais precisa.”

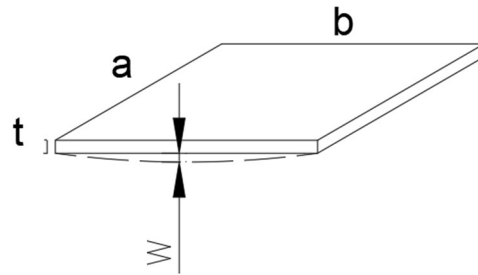
Timoshenko (1959) afirma que as placas podem ser classificadas quanto a espessura de três maneiras, placas delgadas com pequenos deslocamentos/rotações (tratadas nesse trabalho), placas delgadas com grandes deslocamentos/rotações e placas incorporando deformação por cortante.

Placas delgadas com pequenos deslocamentos/rotações:

Se a deflexão w da placa for pequena em comparação com sua espessura t , uma aproximação satisfatória da teoria da elasticidade das placas por carregamento lateral pode ser desenvolvida fazendo-se algumas considerações:

- a) Não há deformação no plano médio da placa, esse plano mantém neutro durante a flexão.
- b) Pontos da placa que inicialmente estão em um plano normal ao plano médio da placa permanecem na superfície normal ao plano médio da placa após a flexão.
- c) A tensão normal à direção transversal da placa pode ser desprezada.

Figura 2.1 - Placas finas com pouca deflexão

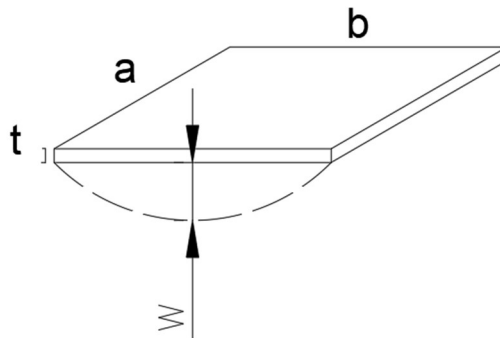


Fonte: (Autorial, 2024)

Placas delgadas com grandes deslocamentos/rotações:

A primeira consideração é satisfeita apenas se a placa flexionada gerar uma superfície desenvolvível. Caso contrário, a flexão da placa é acompanhada por tensão no plano médio, sendo que cálculos mostraram que tensões no plano médio da placa são desprezíveis se os deslocamentos/rotações da placa forem pequenos se comparado com sua espessura, caso contrário, as tensões complementares devem ser levadas em consideração na EDP (Equação Diferencial Parcial) das placas. Nesse caso chega-se a equações não-lineares e a solução do problema vira algo bem mais complicado.

Figura 2.2 - Placas finas com muita deflexão

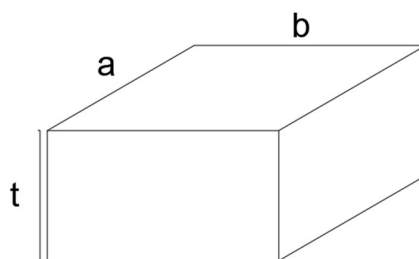


Fonte: (Autorial, 2024)

Placas incorporando deformações por cortante:

As teorias das placas delgadas supracitadas, tornam-se inaplicáveis para o caso de placas que incorporam as deformações por cortante, especialmente no caso de cargas muito concentradas. Nesse caso, a teoria das placas espessas deve ser aplicada. Essa teoria considera o problema das placas como um problema tridimensional de elasticidade. A análise das tensões vira, conseqüentemente, mais complexa.

Figura 2.3 - Placas espessas

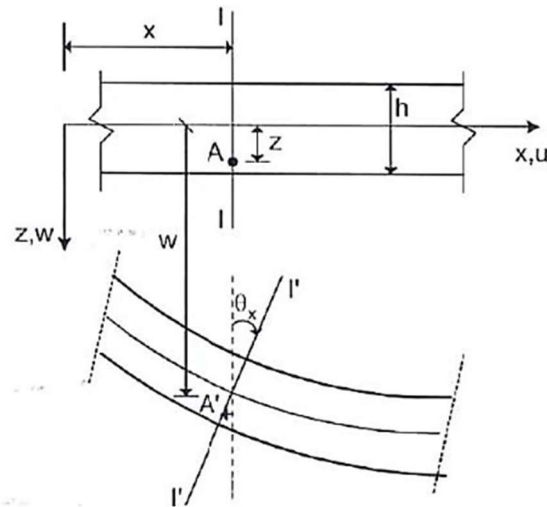


Fonte: (Autorial, 2024)

Todavia Martinelli (2003) classifica placas delgadas quando a razão entre a espessura t e a largura a , fica no intervalo $(1/5 - 1/100)$. O mesmo também afirma que a depender das propriedades do material que constitui a placa, esta pode ser ortotrópica, com propriedades diferentes em duas direções ortogonais ou isotrópica (tratadas nesse trabalho) se as propriedades são iguais em todas as direções. Note-se que se pode construir uma placa ortotrópica com um material isotrópico, bastando alterar a forma da placa em duas direções ortogonais: nesse caso a ortotropia é dita ortotropia de forma.

Nesse contexto, a primeira teoria confirmada para descrever o comportamento de placas simples foi proposta por Kirchhoff (1850), no qual uma das principais considerações é de que a seção transversal se mantém ortogonal ao plano médio após a deflexão da placa, conforme mostrado na Figura 2.4. Como consequência da ortogonalidade da seção transversal na teoria de Kirchhoff, não há como descrever os efeitos de deformação por esforço cortante, sendo então, essa solução limitada a placas delgadas. Ademais, foram desenvolvidas outras teorias como de Reissner (1945), Mindlin (1951) e Reddy (1984), que não serão abordadas nesse trabalho.

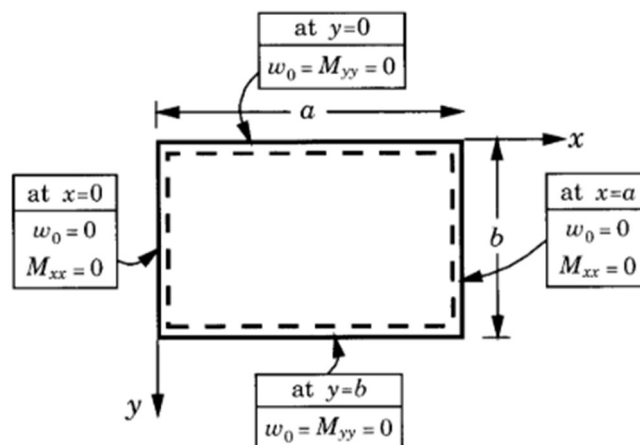
Figura 2.4 - Ortogonalidade da seção transversal



Fonte: Araújo (2014, apud Santana, 2019)

Independente da teoria, no que tange placas retangulares, existem atualmente dois métodos de solução bastante conhecidas no âmbito acadêmico, sendo eles o de Navier e o de Levy. Relativo ao primeira, é constituído de uma dupla série trigonométrica ponderada por coeficiente a determinar, tem como desvantagem o fato ser restrita aos quatro bordos simplesmente apoiados como mostrado na Figura 2.5.

Figura 2.5 - Condições de contorno para placas simplesmente apoiadas



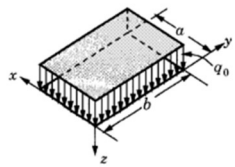
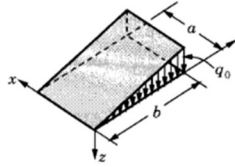
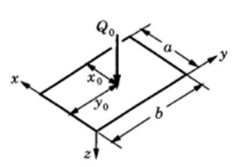
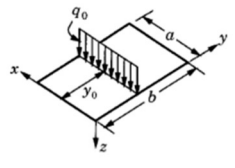
Fonte: (Reddy, 1993)

Diferente da solução de Navier, a solução de Levy trabalha apenas com uma série trigonométrica e tem como vantagem o fato de abranger diferentes condições de contorno,

tornando-se uma solução mais completa, não sendo limitada a condição das quatro bordas simplesmente apoiadas.

Observando a solução de Levy, convém notar que na literatura não está devidamente documentado soluções particulares para o caso de carregamento concentrado ou distribuída em linha ortogonal aos bordos simplesmente apoiados. Apesar de Reddy (2007) apresentar a solução para cargas concentradas, conforme mostrado na (Figura 2.6.c) e para cargas distribuídas em linha, conforme mostrado na (Figura 2.6.d) a solução particular não foi apresentada explicitamente em seu trabalho.

Figura 2.6 - Solução para diferentes geometrias de cargas.

	Load $q(x)$	Coefficients Q_n
(a)	Uniform load, $q = q_0$ 	$Q_n = \frac{4q_0}{\pi n}$ $(n = 1, 3, 5, \dots)$
(b)	Hydrostatic load, $q(x) = (q_0 y/b)$ 	$Q_n = \frac{2q_0}{n\pi} (-1)^{n+1}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$
(c)	Point load, $q(x) = Q_0$ at (x_0, y_0) 	$Q_n = \frac{2Q_0}{b} \sin \frac{n\pi y_0}{b}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$
(d)	Line load, $q(x) = q_0$ at $y = y_0$ 	$Q_n = \frac{2q_0}{b} \delta(x - x_0) \sin \frac{n\pi y_0}{b}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$

(Fonte: Reddy, 2007)

Vale salientar que a solução parcial apresentada na (Figura 2.6.c) e (Figura 2.6.d) é desenvolvida paralelo as bordas obrigatoriamente simplesmente apoiadas. Não havendo a apresentação para a trajetória ortogonal as bordas obrigatoriamente simplesmente apoiadas.

3. METODOLOGIA

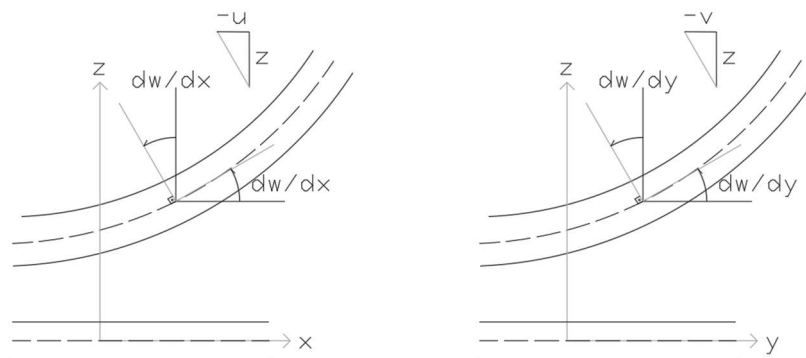
3.1 PLACAS DELGADAS: EQUAÇÃO GERAL

Como definido por Matinelli (2003), as placas são elementos estruturais, simétricos em relação a um plano, conhecido como plano médio, cuja dimensão normal a esse plano (a espessura) é pequena em relação às demais, e que são solicitados por esforços externos normais a esse plano médio.

Analisando a teoria de placas de Kirchhoff (1850), convém notar a analogia entre suas hipóteses com as hipóteses abordadas na teoria clássica de vigas de Euler-Bernoulli. Seguindo esse raciocínio, as hipóteses de Kirchhoff para placas delgadas, são:

- O material da placa é elástico e linear.
- O material da placa é homogêneo e isotrópico. Sendo sua deformação caracterizada pelo módulo de Young E e o coeficiente de Poisson ν .
- A espessura da placa é ínfima se comparada as suas dimensões laterais. A tensão normal à direção transversal da placa pode ser negligenciada se comparada a tensão normal no plano da placa.
- Após deformação, o plano perpendicular as fibras da placa, continua perpendicular.
- A deflexão w da placa é pequena quando comparada à sua espessura. A curvatura da placa depois da deformação pode ser aproximada para a segunda derivada da deflexão.
- O plano médio da placa é livre de tensões, pode-se desprezar tensões das fibras.
- As cargas são aplicadas na direção perpendicular ao plano médio da placa.

Figura 3.1 – Ortogonalidade da seção transversal.



Fonte: (Autorial, 2024).

Através da Figura 3.1 sabe-se que:

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.1)$$

$$v = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.2)$$

No qual u e v são os deslocamentos axiais nas direções x e y , sendo as deformações lineares ($\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}$) para essas direções e a distorção (γ_{xy}) descritas nas equações (3.3) e (3.4).

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Da lei de hooke, tem-se que as deformações lineares e distorção, podem ser descritas em função das tensões normais (σ_{xx}, σ_{yy}) e de cisalhamento (σ_{xy}).

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1 + \nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{Transversal}}{\varepsilon_{Longitudinal}} \quad (3.5)$$

Isolando as tensões e substituído as deformações da equação (3.3), tem-se:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Sabe-se que os momentos estão em função das tensões:

$$M_{xx} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xx} z^2 dz = \sigma_{xx} I \quad (3.7)$$

$$M_{yy} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{yy} z^2 dz = \sigma_{yy} I \quad (3.8)$$

$$M_{yx} = M_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xy} z^2 dz = \sigma_{xy} I \quad (3.9)$$

Sendo I o momento axial de inércia por unidade de comprimento da placa, tal qual, para seções retangulares:

$$I = \frac{t^3}{12} (m^3/m) \quad (3.10)$$

Através disso, seguem os momentos:

$$\begin{pmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{pmatrix} = -D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (3.11)$$

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (3.12)$$

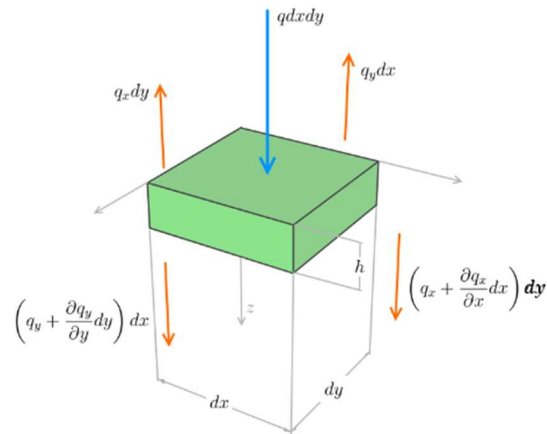
Supondo a presença de um carregamento $q(x,y)$ uniformemente distribuído na placa Figura 3.2, aplica-se o equilíbrio das forças verticais.

$$\begin{aligned} q_x dy - \left(q_x dy + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx dy \right) + q_y dx - \left(q_y dx + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy dx \right) - q(x,y) dx dy &= 0 \\ -\frac{\partial q_x}{\partial x} dx dy - \frac{\partial q_y}{\partial y} dy dx - q(x,y) dx dy &= 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Sendo assim:

$$-q = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} \quad (3.14)$$

Figura 3.2 - Equilíbrio das forças verticais



Fonte: (Altoqi, 2022)

Aplicando o equilíbrio dos momentos na direção y conforme Figura 3.3, tem-se:

$$\begin{aligned}
 m_x dy - \left(m_x dy + \frac{\partial m_x}{\partial x} dx dy \right) + m_{yx} dx - \left(m_{yx} dx + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} dy dx \right) + q_x dy dx \\
 + q_y dx \frac{dx}{2} - q_y dx \frac{dx}{2} - \frac{\partial q_y}{\partial y} dy dx \frac{dx}{2} - q dx dy \frac{dx}{2} = 0 \\
 - \frac{\partial m_x}{\partial x} dx dy - \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} dy dx + q_x dy dx = 0
 \end{aligned} \quad (3.15)$$

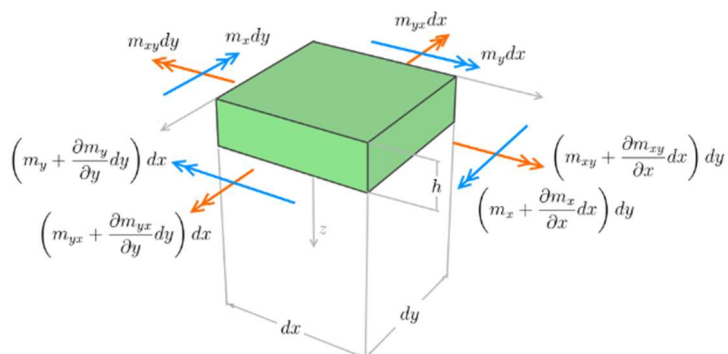
Sendo assim:

$$q_x = \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} \quad (3.16)$$

Aplicando o equilíbrio dos momentos na direção x, tem-se:

$$q_y = \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} \quad (3.17)$$

Figura 3.3 - Equilíbrio de rotação



Fonte: (Altoqi, 2022)

Aplicando as equações (3.16) e (3.17) na equação (3.14), tem-se:

$$-q = \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial m_{yx}}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} \quad (3.18)$$

Calculando as derivadas dos momentos da equação (3.11):

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} = -D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + v \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + v \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial m_{yx}}{\partial y \partial x} = -D(1-v) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \quad (3.21)$$

Colocando as derivadas das equações (3.19), (3.20) e (3.21) na equação (3.18) chega-se em:

$$-q = -D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + v \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) - D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + v \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) - D(1-v) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \quad (3.22)$$

Simplificando a equação (3.22) chega-se na equação governante (3.33)

$$g = D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) \quad (3.23)$$

$$g = \nabla^4 w D \quad (3.24)$$

A equação (3.23) trata-se apenas de placas simples, para placas com base elástica de winkler segue a equação (3.25), sendo o k reconhecido como coeficiente da mola:

$$g = D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + k \quad (3.25)$$

Já para as placas com base elástica de Pasternak, a equação geral é dada pela equação (3.26), sendo G o módulo de elasticidade transversal do material.

$$g = D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + k - G \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (3.26)$$

3.2 SOLUÇÃO DE NAVIER

3.2.1 DESENVOLVIMENTO DO MÉTODO

Na solução de Navier, é usada dupla série trigonométrica, como mostrado na equação (3.15).

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{mtotal} \sum_{n=1}^{ntotal} A_{mn} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (3.27)$$

Sendo os coeficientes a e b, largura e comprimento da placa e A_{mn} coeficiente a ser determinado na solução.

As expressões para os momentos fletores podem ser obtidas substituindo-se a equação (3.27) na equação (3.11) e resolvendo as derivadas. Desse modo, tem-se.

$$M_x = D \sum_{m=1}^{mtotal} \sum_{n=1}^{ntotal} \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \nu \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \right] A_{mn} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (3.28)$$

$$M_y = D \sum_{m=1}^{mtotal} \sum_{n=1}^{ntotal} \left[\nu \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \right] A_{mn} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (3.29)$$

$$M_{xy} = -D(1 - \nu) \sum_{m=1}^{mtotal} \sum_{n=1}^{ntotal} \left[\frac{mn\pi^2}{ab} \right] A_{mn} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (3.30)$$

Mediante isso, torna-se apenas necessário encontrar o coeficiente A_{mn} para placas isoladas, com base elástica de Winkler e com base elástica de Pasternak.

3.2.2 PLACAS ISOLADAS

Substitui-se a equação (3.15) na equação (3.13) e resolve-se as equações diferenciais:

$$g(x, y) = \sum_{m=1}^{mtotal} \sum_{n=1}^{ntotal} D \left[\left(\frac{m^2\pi^2}{a^2}\right)^2 + 2 \left(\frac{m^2\pi^2}{a^2}\right) \left(\frac{n^2\pi^2}{b^2}\right) + \left(\frac{n^2\pi^2}{b^2}\right)^2 \right] A_{mn} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (3.31)$$

Aplica-se uma nova Série de Fourier para um coeficiente F_{mn} :

$$g(x, y) = \sum_{m=1}^{mtotal} \sum_{n=1}^{ntotal} F_{mn} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (3.32)$$

Igualando as duas equações, tem-se:

$$A_{mn} \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \left[\left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2}\right)^2 + 2 \left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2}\right) \left(\frac{n^2 \pi^2}{b^2}\right) + \left(\frac{n^2 \pi^2}{b^2}\right)^2 \right] D = F_{mn} \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (3.33)$$

Simplificando a equação tem-se:

$$A_{mn} = \frac{F_{mn}}{D \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \right]^2} \quad (3.34)$$

Isolando A_{mn} e substituindo na equação de deslocamento, tem-se:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{m_{total}} \sum_{n=1}^{n_{total}} \frac{F_{mn}}{D \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \right]^2} \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (3.35)$$

O coeficiente F_{mn} pode ser encontrado, mediante a equação (3.36):

$$F_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a g(x, y) \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx dy \quad (3.36)$$

Tratando-se de carga pontual, deve ser incluso o Delta de Dirac nas duas direções:

$$g(x, y) = F \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \quad (3.37)$$

Onde F é a intensidade da carga pontual e o Delta de Dirac vale:

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} \infty, & x = x_0 \\ 0, & x \neq x_0 \end{cases} \quad (3.38)$$

$$\delta(y - y_0) = \begin{cases} \infty, & y = y_0 \\ 0, & y \neq y_0 \end{cases}$$

Mediante a propriedade de filtragem do Delta de Dirac, como mostrado na equação (3.39):

$$\int F(x) \delta(x - x_0) dx = F(x_0) \quad (3.39)$$

$$F_{mn} = \frac{4}{ab} F \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x_0}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y_0}{b} \right) \quad (3.40)$$

Tratando-se de carga distribuída em linha paralela a direção x, deve ser incluso o Delta de Dirac na direção y:

$$g(x, y) = F \delta(y - y_0) \quad (3.41)$$

Onde F é a intensidade da força distribuída em linha. Sendo assim:

$$F_{mn} = \frac{8}{m\pi b} F \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y_0}{b} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi}{2} \right)^2 \quad (3.42)$$

Tabela 3.1 - Solução por Navier para placas isoladas

Carregamento	F_{mn}	A_{mn}
Pontual	$\frac{4}{ab} F \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x_0}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y_0}{b} \right)$ $g(x, y) = F \delta(x - x_0) \delta(y - y_0)$	$\frac{F_{mn}}{D \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2}$
Distribuído em linha na direção x	$\frac{8}{m\pi b} F \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y_0}{b} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi}{2} \right)^2$ $g(x, y) = F \delta(y - y_0)$	$\frac{F_{mn}}{D \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2}$

Fonte: (Autorial, 2024)

3.3.3 PLACAS DELGADAS SOBRE BASE ELÁSTICA DE WINKLER

Para o caso de placas sobre base elástica de Winkler, após desenvolver a equação (3.25) obtém-se:

$$A_{mn} = \frac{F_{mn}}{D \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2 + k} \quad (3.43)$$

Tabela 3.2 - Solução por Navier para placas apoiadas em base elástica de Winkler.

Carregamento	F_{mn}	A_{mn}
Pontual	$\frac{4}{ab} F \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x_0}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y_0}{b} \right)$ $g(x, y) = F \delta(x - x_0) \delta(y - y_0)$	$\frac{F_{mn}}{D \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2 + k}$
Distribuído em linha na direção x	$\frac{8}{m\pi b} F \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y_0}{b} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi}{2} \right)^2$ $g(x, y) = F \delta(y - y_0)$	$\frac{F_{mn}}{D \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2 + k}$

Fonte: (Autorial, 2024)

3.3.4 PLACAS DELGADAS SOBRE BASE DE PASTERNAK

Assim como no caso nas placas a placa de Winkler, para o caso de placas apoiadas sobre base de Pasternak, após desenvolver a equação (3.26) obtém-se:

$$A_{mn} = \frac{F_{mn}}{D \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2 + k + G \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]} \quad (3.44)$$

Vale salientar que na expressão (3.44) o valor do denominador independe do carregamento na placa, apenas das suas propriedades e das camadas que ela possa estar sobreposta.

O valor do coeficiente F_{mn} , sendo este presente nas equações (3.40) e (3.42) é um valor dependente do carregamento. Sendo assim, pode-se considerar que a solução A_{mn} da expressão (3.44), parcela depende do tipo de placa e outra parcela do carregamento. Como nota-se nas tabelas (Tabela 3.1, Tabela 3.2, Tabela 3.3).

Tabela 3.3 - Solução por Navier para placas apoiadas em base elástica de Pasternak

Carregamento	F_{mn}	A_{mn}
Pontual	$\frac{4}{ab} F \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x_0}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y_0}{b} \right)$ $g(x, y) = F \delta(x - x_0) \delta(y - y_0)$	$\frac{F_{mn}}{D \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2 + k + G \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]}$
Distribuído em linha na direção x	$\frac{8}{m\pi b} F \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y_0}{b} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi}{2} \right)^2$ $g(x, y) = F \delta(y - y_0)$	

Fonte: (Autorial, 2024)

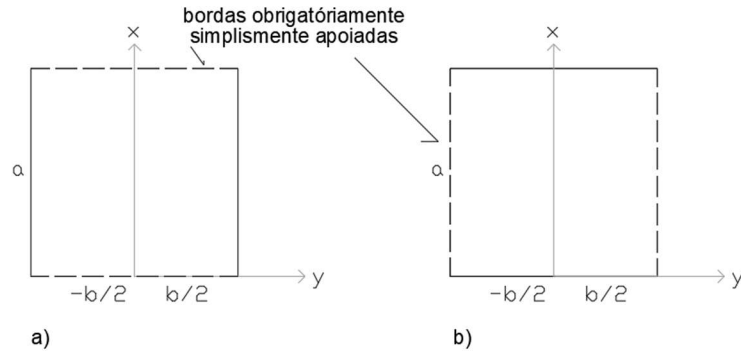
3.4 SOLUÇÃO DE LEVY

3.4.1 DESENVOLVIMENTO DO MÉTODO

Para o método de Levy, no presente trabalho, tem-se as seguintes considerações:

- Assim como no método de Navier, a solução apresentada será para a teoria de placas de Kirchhoff.
- A análise será na direção perpendicular as bordas obrigatoriamente simplesmente apoiadas, como pode ser visto na (Figura 3.4.a).
- Visando aproveitar da simetria de alguns carregamentos o eixo y coincide com o eixo central da placa e o eixo x com uma das bordas horizontais.

Figura 3.4 - (a) solução adotada no trabalho (b) solução comumente adotada



(Fonte: (Autorial, 2024))

Para a solução de Levy o deslocamento advém de dois tipos de solução, uma homogênea que depende das condições de contorno e uma solução particular, como prescrito na equação (3.45):

$$w = w_h + w_p \quad (3.45)$$

Diferente do método de Navier que utiliza séries duplas, o método de Levy consiste em uma série trigonométrica simples, tendo em vista que a abordagem será em apenas em uma direção:

$$\begin{aligned} w_h &= \sum_{m=1}^{mtotal} A_{mh(y)} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \\ w_p &= \sum_{m=1}^{mtotal} A_{mp(y)} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \end{aligned} \quad (3.46)$$

Substituindo o termo da equação homogênea (3.46) na equação geral (3.23) tem-se a equação (3.47):

$$g(x, y) = \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} \sum_{m=1}^{mtotal} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \sum_{m=1}^{mtotal} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \sum_{m=1}^{mtotal} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \right) A_{mh(y)} D \quad (3.47)$$

Após as derivadas parciais, chega-se na expressão (3.48):

$$g(x, y) = \sum_{m=1}^{mtotal} \left[\frac{\partial^4}{\partial y^4} - 2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 \right] A_{mh(y)} D \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \quad (3.48)$$

Tendo em vista reduzir a extensão das equações e facilitar a compreensão da resolução do problema, optou-se por algumas substituições:

$$\chi_m = \frac{m\pi}{a}$$

$$z = \frac{\partial^2 A_{mh(y)}}{\partial y^2}$$

Sabe-se que umas das condições de contorno é que nas bordas simplesmente apoiadas o deslocamento no eixo z é nulo, sendo assim:

$$D(z^2 - 2z\chi_m^2 + \chi_m^4) = 0 \quad (3.49)$$

$$D(z - z_1)(z - z_2) = 0$$

Através disso, pode-se utilizar a seguinte solução homogênea a partir das raízes:

$$A_{mh(y)} = C_1 e^{\sqrt{z_1}y} + C_2 e^{-\sqrt{z_1}y} + C_3 e^{\sqrt{z_2}y} + C_4 e^{-\sqrt{z_2}y} \quad (3.50)$$

Convém notar que a solução exponencial (3.50), embora matematicamente viável, não viabiliza a introdução de condições de simetria ou anti-metria na solução, porque a função exponencial não é nem ímpar, nem par. Assim, se essas condições forem de interesse, é conveniente buscar soluções alternativas com essas propriedades, tais como as famílias de funções trigonométricas hiperbólicas. Logo, uma solução homogênea que acomoda simetria e/ou anti-metria em (3.49) é:

$$A_{mh(y)} = C_1 \sinh(z_1 y) + C_2 \cosh(z_1 y) + C_3 \sinh(z_2 y) + C_4 \cosh(z_2 y) \quad (3.51)$$

Relativo à solução particular, tem-se que:

$$g = \sum F_m(y) \sin(\chi_m x) \quad (3.52)$$

$$F_m(y) = \left[(\chi_m)^4 - 2 \frac{d^2}{dy^2} (\chi_m)^2 + \frac{d^4}{dy^4} \right] A_{mp(y)} D \quad (3.53)$$

A equação (3.54) pode ser descrita de forma concentrada, como:

$$F_m(y) = \left(\frac{d^2}{dy^2} - z_1\right)\left(\frac{d^2}{dy^2} - z_2\right)A_{mp(y)}D \quad (3.54)$$

Vide as propriedades das Equações Diferenciais Ordinárias, sabe-se que:

$$F_m(y) = \frac{2}{a} \int_0^a g \operatorname{sen}(\chi_m x) dx \quad (3.55)$$

Sendo para cargas pontuais:

$$g = P\delta(y - y_0)\delta(x - x_0) \quad (3.56)$$

$$F_m(y) = \frac{2}{a} \int_0^a P\delta(y - y_0)\delta(x - x_0)\operatorname{sen}(\chi_m x) dx$$

$$F_m(y) = \frac{2}{a} \delta(y - y_0)P\operatorname{sen}(\chi_m x_0) \quad (3.57)$$

$$\alpha = \frac{2}{a}P\operatorname{sen}(\chi_m x_0)$$

Onde α é o coeficiente de carregamento.

Para carregamento linear ortogonal as bordas obrigatoriamente simplesmente apoiadas, tem-se:

$$g = g_0\delta(y - y_0) \quad (3.58)$$

$$F_m(y) = \frac{2}{a} g_0\delta(y - y_0) \int_0^a \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) dx$$

Sendo a integral resultada em:

$$\int_0^a \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) dx = -\frac{a}{m\pi} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \Big|_0^a = \frac{a}{m\pi} (-\cos(m\pi) + 1) = \frac{a}{m\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{2}\right)^2 \quad (3.59)$$

Substituindo o resultado da equação (3.59) na equação (3.58), tem-se:

$$F_m(y) = \frac{2}{m\pi} g_0 \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{2}\right)^2 \delta(y - y_0) \quad (3.60)$$

$$\alpha = \frac{2}{m\pi} g_0 \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{2}\right)^2$$

Analisando as equações (3.67) e (3.59), percebe-se que o problema está em se desfazer do Delta de Dirac. Visando solucionar isso, a metodologia adotada para esse trabalho, foi usar a decomposição linear da equação.

$$H_m = \left(\frac{d^2}{dy^2} - z_2 \right) A_{mp(y)} \quad (3.61)$$

$$\left(\frac{d^2}{dy^2} - z_1 \right) H_m = \frac{\alpha}{D} \delta(y - y_0) \quad (3.62)$$

Pela equação característica, tem-se duas soluções:

$$H_m = C_1 e^{-\sqrt{z_1}r} + C_2 e^{+\sqrt{z_1}r} \quad (3.63)$$

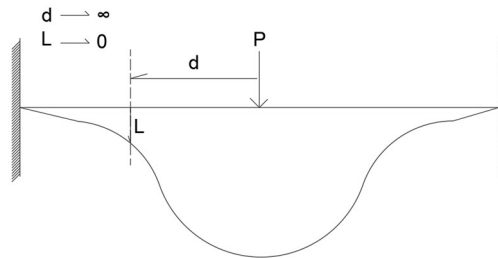
$$H_m = C_1 \cosh \sqrt{z_1}r + C_2 \sinh \sqrt{z_1}r \quad (3.64)$$

Onde, $r = |y - y_0|$, para coordenada de campo y e coordenada da carga y_0

Analisando as duas alternativas, pode-se presumir que a (3.63) seja a solução mais eficiente, por aproveitar da simetria. Contudo, para a problemática de cargas pontuais essa simetria não é aproveitada. Parafraseando a condição de Summerfeld, enquanto a distância à fonte de energia tender ao infinito, a energia no ponto analisado tenderá a zero, condição a qual não é atendida fisicamente pela (3.54), visto que ao $r \rightarrow \infty$, $H_m \rightarrow \infty$. Sendo assim, resta a solução proposta pela (3.64), sendo essa manipulada para atender as condições físicas:

$$H_m = C_1 e^{-\sqrt{z_1}r}, r \rightarrow \infty, H_m \rightarrow 0$$

Figura 3.5 - Condição de Summerfeld



Fonte: (Autorial, 2024)

Portanto, a solução coerente é:

$$H_m = C_1 e^{-\sqrt{z_1}r} \quad (3.65)$$

$$\frac{dH_m}{dy} = -\sqrt{z_1} C_1 e^{-\sqrt{z_1} r} \frac{dr}{dy} \quad (3.66)$$

Visto que r é uma função modular, deve-se analisa-la como uma função sinal, tal qual:

$$\frac{dr}{dy} = Sgn(y - y_0) \quad (3.67)$$

A função sinal deve ser analisada conforme o intervalo que ela está contida:

$$Sgn(y - y_0) \begin{cases} \frac{dr}{dy} = 1, & Y_0 < Y \\ \frac{dr}{dy} = -1, & Y_0 > Y \end{cases} \quad (3.68)$$

Inserindo a função sinal, tem-se:

$$\frac{dH_m}{dy} = -\sqrt{z_1} e^{-\sqrt{z_1} r} Sgn(y - y_0) C_1 \quad (3.69)$$

Na derivada de segunda ordem, tem-se:

$$\frac{d^2 H_m}{dy^2} = (z_1 e^{-\sqrt{z_1} r} Sgn(y - y_0) Sgn(y - y_0) - \sqrt{z_1} e^{-\sqrt{z_1} r} \frac{d}{dy} Sgn(y - y_0)) C_1 \quad (3.70)$$

Da literatura tem-se:

$$\frac{d}{dy} Sgn(y - y_0) = 2\delta(y - y_0) \quad (3.71)$$

Seguindo as propriedades da função sinal:

$$Sgn(y - y_0) Sgn(y - y_0) = 1 \quad (3.72)$$

Sendo assim:

$$\frac{d^2 H_m}{dy^2} = [z_1 e^{-\sqrt{z_1} r} - z_1 e^{-\sqrt{z_1} r} 2\delta(y - y_0)] C_1 \quad (3.73)$$

Partindo da (3.61), basta substituir a segunda derivada de H_m , para encontrar o coeficiente C_1 :

$$z_1 C_1 e^{-\sqrt{z_1} r} - z_1 e^{-\sqrt{z_1} r} 2\delta(y - y_0) C_1 - z_1 C_1 e^{-\sqrt{z_1} r} = \frac{\alpha}{D} \delta(y - y_0) \quad (3.74)$$

Dois termos anulam-se, logo a equação se resume a:

$$-\sqrt{z_1} e^{-\sqrt{z_1} r} 2\delta(y - y_0) C_1 = \frac{\alpha}{D} \delta(y - y_0) \quad (3.75)$$

A equação (3.75) não atende no intervalo $y \neq y_0$ e para $y = y_0$ é atendida, visto que:

$$\delta(y - y_0) \begin{cases} 0, & y \neq y_0 \\ \infty, & y = y_0 \end{cases} \quad (3.76)$$

Para $Y = Y_0$, $r = 0$ e $e^{-\sqrt{z_1} r} = 1$

$$-\sqrt{z_1} 2C_1 = \frac{\delta(y - y_0) \alpha}{\delta(y - y_0) D}$$

$$-\sqrt{z_1} 2C_1 = \frac{\alpha}{D}$$

Resultando no coeficiente:

$$C_1 = -\frac{1}{2\sqrt{z_1}} \frac{\alpha}{D} \quad (3.77)$$

Substituindo na (3.65), tem-se:

$$H_m = -\frac{\alpha}{D} \frac{1}{2\sqrt{z_1}} e^{-\sqrt{z_1} r} \quad (3.78)$$

Mediante esses resultados, utilizando o coeficiente para outra parcela, tem-se:

$$\left(\frac{d^2}{dy^2} - z_2 \right) P_m = \frac{\alpha}{D} \delta(Y - Y_0) \quad (3.79)$$

$$P_m = \left(\frac{d^2}{dy^2} - z_1 \right) A_{mp(y)} \quad (3.80)$$

De semelhante modo a equação (3.79):

$$P_m = -\frac{\alpha}{D} \frac{1}{2\sqrt{z_2}} e^{-\sqrt{z_2}r} \quad (3.81)$$

Subtraindo as duas parcelas, para encontrar o $A_{mp(y)}$

$$H_m - Pm = \left(\frac{d^2}{dy^2} - z_2 \right) A_{mp(y)} - \left(\frac{d^2}{dy^2} - z_1 \right) A_{mp(y)} \quad (3.82)$$

$$H_m - Pm = (-z_2 + z_1) A_{mp(y)}$$

Isolando, encontra-se a solução particular:

$$A_{mp(y)} = \frac{H_m - Pm}{-z_2 + z_1} \quad (3.83)$$

Substituindo os valores de H_m e Pm , tem-se:

$$A_{mp(y)} = \frac{-\frac{\alpha}{2D} \frac{1}{\sqrt{z_1}} e^{-\sqrt{z_1}r} - \left(-\frac{\alpha}{2D} \frac{1}{\sqrt{z_2}} e^{-\sqrt{z_2}r} \right)}{-z_2 + z_1} \quad (3.84)$$

Isolando os termos comuns, tem-se como solução para o coeficiente A_m :

$$A_{mp(y)} = -\frac{\alpha}{2D(z_1 - z_2)} \left(\frac{1}{\sqrt{z_1}} e^{-\sqrt{z_1}r} - \frac{1}{\sqrt{z_2}} e^{-\sqrt{z_2}r} \right) \quad (3.85)$$

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \left[C_1 \sinh(z_1 y) + C_2 \cosh(z_1 y) + C_3 \sinh(z_2 y) + C_4 \cosh(z_2 y) - \frac{\alpha}{2D(z_1 - z_2)} \left(\frac{1}{\sqrt{z_1}} e^{-\sqrt{z_1}r} - \frac{1}{\sqrt{z_2}} e^{-\sqrt{z_2}r} \right) \right] \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \quad (3.86)$$

Para encontrar os coeficientes da solução homogênea C_1 , C_2 , C_3 e C_4 , basta analisar as condições de contorno, no qual serão diferentes a depender de como a placa estará apoiada. conforme a Tabela 3.4.

Tabela 3.4 - Condições de contorno para as bordas não obrigatoriamente simplesmente apoiadas

Tipo de apoio das bordas	Coordenada da borda	Condição de contorno
Simplesmente apoiada (S)	$\left(x, \frac{b}{2}\right)$	$w = 0$ $\frac{d^2w}{dy^2} = 0$
	$\left(x, -\frac{b}{2}\right)$	
Engastada (C)	$\left(x, \frac{b}{2}\right)$	$w = 0$ $\frac{dw}{dy} = 0$
	$\left(x, -\frac{b}{2}\right)$	
Livre (F)	$\left(x, \frac{b}{2}\right)$	$M_y = 0$ $v_y = 0$
	$\left(x, -\frac{b}{2}\right)$	

Fonte: (Autorial, 2024)

Convém notar, que a Tabela 3.4 contém apenas condições iguais para bordas paralelas. Entretanto, pode-se utilizar bordas paralelas apoiadas de forma diferente, basta que cada borda utilize sua condição de contorno.

Consequente, a solução homogênea vai ser igual a particular, sendo assim, pode-se isolar os coeficientes:

$$(C) = (F)[M]^{-1} \quad (3.87)$$

No qual, $[M]$ é a matriz da solução homogênea, (F) é a matriz da solução particular e (C) são os coeficientes.

Para efeito demonstrativo nesse trabalho será mostrado o desenvolvimento dos cálculos para as bordas simplesmente apoiadas e engastadas, sendo necessário para o caso das bordas livres a utilização do esforço cortante equivalente de Kirchhoff.

Todavia, sabe-se que nos bordos livres todos os esforços internos são nulos, porém, como a EDO é de quarta ordem, deve-se introduzir apenas duas condições de contorno. Sendo assim, Kirchhoff formulou uma condição de contorno que compatibiliza o esforço cortante e o momento torçor. Para tal, o momento torçor é substituído por binários equivalentes, os quais geram forças verticais de sentido contrário, cuja diferença é de $\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}$ para y. (ARAÚJO, 2014, *apud* SANTANA, 2019)

$$v_y = q_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \quad (3.88)$$

Sendo q_y :

$$q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \quad (3.89)$$

Substituindo, tem-se:

$$v_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \quad (3.90)$$

Substituindo os momentos descritos na equação (3.11) na equação (3.90):

$$v_y = -D \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + 2(1 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right] \quad (3.91)$$

Simplificando, tem-se a equação do cortante equivalente de Kirchhoff:

$$v_y = -D \left[(\nu - 2) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right] \quad (3.92)$$

- **Todas as bordas simplesmente apoiadas:**

Para encontrar os coeficientes através da equação (3.87) necessita-se utilizar das condições de contorno da Tabela 3.4.

$$[M] = \begin{bmatrix} -sh_1 & ch_1 & -sh_2 & ch_2 \\ -z_1 sh_1 & z_1 ch_1 & -z_2 sh_2 & z_2 ch_2 \\ sh_1 & ch_1 & sh_2 & ch_2 \\ z_1 sh_1 & z_1 ch_1 & z_2 sh_2 & z_2 ch_2 \end{bmatrix} \quad (3.93)$$

Sendo:

$$\begin{pmatrix} \sinh(z_1 \frac{b}{2}) \\ \cosh(z_1 \frac{b}{2}) \\ \sinh(z_2 \frac{b}{2}) \\ \cosh(z_2 \frac{b}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sh_1 \\ ch_1 \\ sh_2 \\ ch_2 \end{pmatrix} \quad (3.94)$$

Condições de contorno para solução particular:

$$(F) = -\alpha \begin{pmatrix} \frac{1}{2D(z_1-z_2)} \left(\frac{1}{\sqrt{z_1}} e^{-\sqrt{z_1} \left| -\frac{b}{2} - y_0 \right|} - \frac{1}{\sqrt{z_2}} e^{-\sqrt{z_2} \left| -\frac{b}{2} - y_0 \right|} \right) \\ \frac{1}{2D(-z_2+z_1)} \left(\sqrt{z_2} e^{-\sqrt{z_2} \left| -\frac{b}{2} - y_0 \right|} - \sqrt{z_1} e^{-\sqrt{z_1} \left| -\frac{b}{2} - y_0 \right|} \right) \\ \frac{1}{2D(z_1-z_2)} \left(\frac{1}{\sqrt{z_1}} e^{-\sqrt{z_1} \left| \frac{b}{2} - y_0 \right|} - \frac{1}{\sqrt{z_2}} e^{-\sqrt{z_2} \left| \frac{b}{2} - y_0 \right|} \right) \\ \frac{1}{2D(-z_2+z_1)} \left(\sqrt{z_2} e^{-\sqrt{z_2} \left| \frac{b}{2} - y_0 \right|} - \sqrt{z_1} e^{-\sqrt{z_1} \left| \frac{b}{2} - y_0 \right|} \right) \end{pmatrix} \quad (3.95)$$

• **Duas bordas paralelas engastadas:**

Condições de contorno da solução homogênea:

$$[M] = \begin{bmatrix} -sh_1 & ch_1 & -sh_2 & ch_2 \\ \sqrt{z_1}ch_1 & -\sqrt{z_1}sh_1 & \sqrt{z_2}ch_2 & -\sqrt{z_2}sh_2 \\ sh_1 & ch_1 & sh_2 & ch_2 \\ \sqrt{z_1}ch_1 & \sqrt{z_1}sh_1 & \sqrt{z_2}ch_2 & \sqrt{z_2}sh_2 \end{bmatrix} \quad (3.96)$$

Condições de contorno para solução particular:

$$(F) = -\alpha \begin{pmatrix} \frac{1}{2D(z_1-z_2)} \left(\frac{1}{\sqrt{z_1}} e^{-\sqrt{z_1} \left| -\frac{b}{2} - y_0 \right|} - \frac{1}{\sqrt{z_2}} e^{-\sqrt{z_2} \left| -\frac{b}{2} - y_0 \right|} \right) \\ \frac{1}{2D(-z_2+z_1)} \left(e^{-\sqrt{z_1} \left| \frac{b}{2} - y_0 \right|} - e^{-\sqrt{z_2} \left| \frac{b}{2} - y_0 \right|} \right) \\ \frac{1}{2D(z_1-z_2)} \left(\frac{1}{\sqrt{z_1}} e^{-\sqrt{z_1} \left| \frac{b}{2} - y_0 \right|} - \frac{1}{\sqrt{z_2}} e^{-\sqrt{z_2} \left| \frac{b}{2} - y_0 \right|} \right) \\ \frac{1}{2D(-z_2+z_1)} \left(e^{-\sqrt{z_1} \left| \frac{b}{2} - y_0 \right|} - e^{-\sqrt{z_2} \left| \frac{b}{2} - y_0 \right|} \right) \end{pmatrix} \quad (3.97)$$

Resolvendo o produto de matrizes da equação (3.87) tem-se os coeficientes, no qual são colocados na equação geral do deslocamento gerando a nova equação para o deslocamento:

$$w = \sum_{m=1}^{m_{total}} \left[C_1 \sinh(z_1 y) + C_2 \cosh(z_1 y) + C_3 \sinh(z_2 y) + C_4 \cosh(z_2 y) + \frac{\alpha}{2D(z_1-z_2)} \left(\frac{1}{\sqrt{z_1}} e^{-\sqrt{z_1} r} - \frac{1}{\sqrt{z_2}} e^{-\sqrt{z_2} r} \right) \right] \sin(\chi_m x) \quad (3.98)$$

3.4.2 PLACAS DELGADAS ISOLADAS

Vale ressaltar, que para placas isoladas, sem base elástica, $z_1 = z_2 = \chi_m^2$ e isso irá gerar uma singularidade na equação (3.85), mediante isso, deve-se aplicar a regra de l'Hôpital:

$$\lim_{(z_2 \rightarrow z_1)} \frac{d}{dz_1} \left(\frac{1}{\sqrt{z_2}} e^{-\sqrt{z_2} r} - \frac{1}{\sqrt{z_1}} e^{-\sqrt{z_1} r} \right) \quad (3.99)$$

$$\lim_{(z_2 \rightarrow z_1)} \frac{d}{dz_1} (-z_2 + z_1)$$

Obtém-se:

$$A_{mp(y)} = \frac{\alpha}{4D} \frac{e^{-\sqrt{z_1}r}}{z_1} \left(\frac{1}{\sqrt{z_1}} + r \right) \quad (3.100)$$

A Tabela 3.5 apresenta um resumo da solução particular para os dois tipos de carregamentos desenvolvidos.

Tabela 3.5 – Solução particular por Levy para placas delgadas

Carga	$F_{m(y)}$	$A_{mp(y)}$
Pontual	$\frac{2}{a} P \text{sen}(\chi_m x_0) \delta(y - y_0)$	$\frac{\alpha}{4D} \frac{e^{-\sqrt{z_1}r}}{z_1} \left(\frac{1}{\sqrt{z_1}} + r \right)$
Distribuído em linha na direção x	$\frac{2}{m\pi} g_0 \text{sen}\left(\frac{m\pi}{2}\right)^2 \delta(y - y_0)$	

Fonte: (Autorial, 2024)

Para placas isoladas a equação homogênea segue na equação (3.118)

$$A_{mh(y)} = C_1 \text{senh}(\sqrt{z_1}y) + C_2 \cosh(\sqrt{z_1}y) + C_3 \sqrt{z_1}y \text{senh}(\sqrt{z_1}y) + C_4 \sqrt{z_1}y \cosh(\sqrt{z_1}y) \quad (3.101)$$

Sendo $z_1 = \chi_m^2$

Para encontrar os coeficientes através da equação (3.87) necessita-se utilizar das condições de contorno da Tabela 3.4.

- **Todas as bordas simplesmente apoiadas:**

Condições de contorno para solução homogênea:

$$[M] = \begin{bmatrix} -sh_1 & ch_1 & \sqrt{z_1} \frac{b}{2} sh_1 & -\sqrt{z_1} \frac{b}{2} ch_1 \\ -z_1 sh_1 & z_1 ch_1 & 2z_1 ch_1 + z_1 \sqrt{z_1} \frac{b}{2} sh_1 & -2z_1 sh_1 + z_1 \sqrt{z_1} \frac{b}{2} ch_1 \\ sh_1 & ch_1 & \sqrt{z_1} \frac{b}{2} sh_1 & \sqrt{z_1} \frac{b}{2} ch_1 \\ z_1 sh_1 & z_1 ch_1 & 2z_1 ch_1 + z_1 \sqrt{z_1} \frac{b}{2} sh_1 & 2z_1 sh_1 + z_1 \sqrt{z_1} \frac{b}{2} ch_1 \end{bmatrix} \quad (3.102)$$

Condições de contorno para solução particular:

$$(F) = -\alpha \begin{pmatrix} \frac{1}{4z_1 D} e^{-\sqrt{z_1} \left| -\frac{b}{2} - y_0 \right|} \left(\frac{1}{\sqrt{z_1}} + \left| -\frac{b}{2} - y_0 \right| \right) \\ \frac{1}{4D} e^{-\sqrt{z_1} \left| -\frac{b}{2} - y_0 \right|} \left(\left| -\frac{b}{2} - y_0 \right| - \frac{1}{\sqrt{z_1}} \right) \\ \frac{1}{4z_1 D} e^{-\sqrt{z_1} \left| \frac{b}{2} - y_0 \right|} \left(\frac{1}{\sqrt{z_1}} + \left| \frac{b}{2} - y_0 \right| \right) \\ \frac{1}{4D} e^{-\sqrt{z_1} \left| \frac{b}{2} - y_0 \right|} \left(\left| \frac{b}{2} - y_0 \right| - \frac{1}{\sqrt{z_1}} \right) \end{pmatrix} \quad (3.103)$$

• **Duas bordas paralelas engastadas:**

Condições de contorno da solução homogênea:

$$[M] = \begin{bmatrix} -sh_1 & ch_1 & \sqrt{z_1} \frac{b}{2} sh_1 & -\sqrt{z_1} \frac{b}{2} ch_1 \\ \sqrt{z_1} ch_1 & -\sqrt{z_1} sh_1 & -\sqrt{z_1} sh_1 - \frac{b}{2} z_1 ch_1 & \sqrt{z_1} ch_1 + \frac{b}{2} z_1 sh_1 \\ sh_1 & ch_1 & \sqrt{z_1} \frac{b}{2} sh_1 & \sqrt{z_1} \frac{b}{2} ch_1 \\ \sqrt{z_1} ch_1 & \sqrt{z_1} sh_1 & \sqrt{z_1} sh_1 + \frac{b}{2} z_1 ch_1 & \sqrt{z_1} ch_1 + \frac{b}{2} z_1 sh_1 \end{bmatrix} \quad (3.104)$$

Condições de contorno para solução particular:

$$(F) = -\alpha \begin{pmatrix} \frac{1}{4z_1 D} e^{-\sqrt{z_1} \left| -\frac{b}{2} - y_0 \right|} \left(\frac{1}{\sqrt{z_1}} + \left| -\frac{b}{2} - y_0 \right| \right) \\ \frac{1}{4D} e^{-\sqrt{z_1} \left| -\frac{b}{2} - y_0 \right|} \left(\left| -\frac{b}{2} - y_0 \right| - \frac{1}{\sqrt{z_1}} \right) \\ \frac{1}{4z_1 D} e^{-\sqrt{z_1} \left| \frac{b}{2} - y_0 \right|} \left(\frac{1}{\sqrt{z_1}} + \left| \frac{b}{2} - y_0 \right| \right) \\ \frac{1}{4D} e^{-\sqrt{z_1} \left| \frac{b}{2} - y_0 \right|} \left(\left| \frac{b}{2} - y_0 \right| - \frac{1}{\sqrt{z_1}} \right) \end{pmatrix} \quad (3.105)$$

Resolvendo o produto de matrizes da equação (3.87) tem-se os coeficientes, no qual são colocados na equação geral do deslocamento gerando a nova equação para o deslocamento:

$$w = \sum_{m=1}^{m_{total}} \left[C_1 \sinh(z_1 y) + C_2 \cosh(z_1 y) + C_3 z_1 y \sinh(z_2 y) + C_4 z_1 y \cosh(z_2 y) + \frac{\alpha}{4z_1 D} \frac{1}{\sqrt{z_1}} e^{-\sqrt{z_1} r} \left(\frac{1}{\sqrt{z_1}} + r \right) \right] \sin(\chi_m x) \quad (3.106)$$

3.4.3 PLACAS DELGADAS SOBRE BASE ELÁSTICA DE WINCKLER

Para placas delgadas sobre base elástica de Winkler, com auxílio da equação geral (3.25), tem-se:

$$[D \left(\frac{d^4}{dy^4} - 2\chi_m^2 \frac{d^2}{dy^2} + \chi_m^4 \right) + k] A_{m(y)} = \alpha \delta(Y - Y_0) \quad (3.107)$$

Substituindo $z = \frac{d^2}{dy^2}$ tem-se:

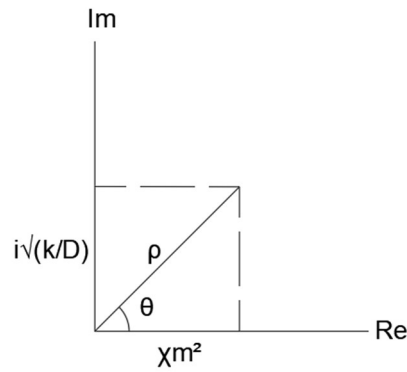
$$D(z^2 - 2\chi_m^2 z + \chi_m^4 + \frac{k}{D}) A_{mp(y)} = \alpha \delta(Y - Y_0) \quad (3.108)$$

Desenvolve-se a equação quadrática para encontrar as raízes, utilizando a seguinte fórmula:

$$z_{1,2} = \frac{2\chi_m^2 \pm \sqrt{4\chi_m^4 - 4(\chi_m^4 + \frac{k}{D})}}{2} \quad (3.109)$$

$$z_{1,2} = \chi_m^2 \pm i \sqrt{\frac{k}{D}}$$

Figura 3.6 - Número complexos



Fonte: (Autorial, 2024)

Tendo em vista o resultado, percebe-se a apresentação de números complexos:

$$z_1 = \chi_m^2 + i \sqrt{\frac{k}{D}} \quad (3.110)$$

$$z_2 = \chi_m^2 - i \sqrt{\frac{k}{D}}$$

Das propriedades dos números complexos, tem-se:

$$\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \quad (3.111)$$

$$z = \rho e^{i\theta} = \rho \cos \theta + i \rho \sin \theta \quad (3.112)$$

$$z^n = \rho^n e^{n\theta i} = \rho^n \cos(n\theta) + i\rho^n \sin(n\theta) \quad (3.113)$$

Utilizando-se da equação (3.85), sendo as raízes substituídas por (3.109). Antes disso, deve-se simplificar as raízes com intuito de no decorrer do cálculo o termo imaginário seja eliminado. Portanto, vamos inserir os termos p e q, sendo eles a representação do termo real e do imaginário, respectivamente.

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{\chi_m^4 + k/D} \\ p &= R_e \sqrt{z} = \sqrt{\rho} \cos \frac{\theta}{2} \\ q &= I_m \sqrt{z} = \sqrt{\rho} \sin \frac{\theta}{2} \\ \sqrt{z} &= \sqrt{\rho} e^{\frac{1}{2}\theta i} = \sqrt{\rho} \cos \frac{\theta}{2} \pm i \sqrt{\rho} \sin \frac{\theta}{2} \\ \sqrt{z} &= p \pm iq \\ z &= (p \pm iq)^2 \end{aligned} \quad (3.114)$$

Sendo assim, tem-se as raízes em função dos coeficientes real e imaginário:

$$\begin{aligned} z_1 &= (p + iq)^2 \\ z_2 &= (p - iq)^2 \end{aligned} \quad (3.115)$$

Substituindo, tem-se:

$$A_{mp(y)} = \frac{\alpha}{2D((p+iq)^2 - (p-iq)^2)} \left[\frac{1}{p+iq} e^{-r(p+iq)} - \frac{1}{p-iq} e^{-r(p-iq)} \right] \quad (3.116)$$

Sendo os coeficientes p e q:

$$\begin{aligned} p &= \sqrt[4]{\chi_m^4 + k/D} \cos \frac{\theta}{2} \\ q &= \sqrt[4]{\chi_m^4 + k/D} \sin \frac{\theta}{2} \\ \theta &= \arctg\left(\frac{\chi_m^2}{\sqrt{k/D}}\right) \end{aligned} \quad (3.117)$$

Desenvolvendo, tem-se:

$$\begin{aligned}
A_{mp(y)} &= \frac{\alpha}{8Dpq i} \left[\frac{1}{p+iq} e^{-r(p+iq)} - \frac{1}{p-iq} e^{-r(p-iq)} \right] \\
A_{mp(y)} &= \frac{\alpha}{8Dpq i} \left[\frac{e^{-r(p+iq)}(p-iq) - e^{-r(p-iq)}(p+iq)}{p^2 - (iq)^2} \right] \\
A_{mp(y)} &= \frac{\alpha}{8Dpq i} \left[\frac{2ie^{-rp}(q \cos(qr) + p \sin(qr))}{p^2 + q^2} \right]
\end{aligned} \tag{3.118}$$

Resultando na solução particular $A_{mp(y)}$:

$$A_{mp(y)} = \frac{\alpha}{4Dqp} \left[\frac{(p \sin(r) + q \cos(qr))}{p^2 + q^2} e^{-pr} \right] \tag{3.119}$$

Sendo utilizada a equação (3.120) para atender uma das condições de contorno na borda simplesmente apoiada.

$$\frac{dA_{mp(y)}^2}{d^2y} = \frac{\alpha}{2Dqp} (p \sin(qr) + q \cos(qr)) e^{-pr} \tag{3.120}$$

Assim como no caso das placas isoladas, deve-se separar em duas soluções, homogênea e particular. Conforme isso, a solução homogênea é dada pela equação (3.121).

$$A_{mh(y)} = C_1 \cosh(py) \cos(qy) - C_2 \cosh(py) \sin(qy) - C_3 \sinh(py) \cos(qy) + C_4 \sinh(py) \sin(qy) \tag{3.121}$$

Tabela 3.6 - Solução para placas sobre base elástica Winkler

Carga	$F_{m(y)}$	$A_{mp(y)}$
Pontual	$\frac{2}{a} \delta(y - y_0) \sin(\chi_m x_0)$	$\frac{\alpha}{4Dqp} \left[\frac{(p \sin(qr) + q \cos(qr))}{p^2 + q^2} e^{-pr} \right]$
Distribuído em linha na direção x	$\frac{2}{m\pi} g_0 \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right)^2 \delta(y - y_0)$	

Fonte: (Autorial, 2024)

Para encontrar os coeficientes através da equação (3.87) necessita-se utilizar das condições de contorno da Tabela 3.4.

- **Todas as bordas simplesmente apoiadas:**

Condições de contorno para solução homogênea:

$$[M] = \begin{bmatrix} ch \cdot c & -s \cdot ch & -sh \cdot c & sh \cdot s \\ A \cdot ch \cdot c - B \cdot sh \cdot s & -A \cdot ch \cdot s - B \cdot sh \cdot c & -A \cdot sh \cdot c + B \cdot ch \cdot s & A \cdot sh \cdot s + B \cdot ch \cdot c \\ ch \cdot c & s \cdot ch & sh \cdot c & sh \cdot s \\ A \cdot ch \cdot c - B \cdot sh \cdot s & A \cdot ch \cdot s + B \cdot sh \cdot c & A \cdot sh \cdot c - B \cdot ch \cdot s & A \cdot sh \cdot s + B \cdot ch \cdot c \end{bmatrix} \quad (3.122)$$

deCondições de contorno para solução particular:

$$(F) = -\alpha \begin{pmatrix} \frac{1}{D} \frac{1}{4pq} e^{-p|\frac{b}{2}-y_0|} \left(p \operatorname{sen} \left(q \left| -\frac{b}{2} - y_0 \right| \right) + q \cos \left(q \left| -\frac{b}{2} - y_0 \right| \right) \right) \frac{1}{p^2+q^2} \\ \frac{1}{D} \frac{1}{4pq} e^{-p|\frac{b}{2}-y_0|} \left(p \operatorname{sen} \left(q \left| -\frac{b}{2} - y_0 \right| \right) - q \cos \left(q \left| -\frac{b}{2} - y_0 \right| \right) \right) \\ \frac{1}{D} \frac{1}{4pq} e^{-p|\frac{b}{2}-y_0|} \left(p \operatorname{sen} \left(q \left| \frac{b}{2} - y_0 \right| \right) + q \cos \left(q \left| \frac{b}{2} - y_0 \right| \right) \right) \frac{1}{p^2+q^2} \\ \frac{1}{D} \frac{1}{4pq} e^{-p|\frac{b}{2}-y_0|} \left(p \operatorname{sen} \left(q \left| \frac{b}{2} - y_0 \right| \right) - q \cos \left(q \left| \frac{b}{2} - y_0 \right| \right) \right) \end{pmatrix} \quad (3.123)$$

- **Duas bordas paralelas engastadas:**

Condições de contorno para solução homogênea:

$$[M] = \begin{bmatrix} ch \cdot c & -s \cdot ch & -sh \cdot c & sh \cdot s \\ A \cdot ch \cdot c - B \cdot sh \cdot s & -A \cdot ch \cdot s - B \cdot sh \cdot c & -A \cdot sh \cdot c + B \cdot ch \cdot s & A \cdot sh \cdot s + B \cdot ch \cdot c \\ ch \cdot c & s \cdot ch & sh \cdot c & sh \cdot s \\ A \cdot ch \cdot c - B \cdot sh \cdot s & A \cdot ch \cdot s + B \cdot sh \cdot c & A \cdot sh \cdot c - B \cdot ch \cdot s & A \cdot sh \cdot s + B \cdot ch \cdot c \end{bmatrix} \quad (3.124)$$

Condições de contorno para solução particular:

$$(F) = -\alpha \begin{pmatrix} \frac{1}{D} \frac{1}{4pq} e^{-p|\frac{b}{2}-y_0|} \left(p \operatorname{sen} \left(q \left| -\frac{b}{2} - y_0 \right| \right) + q \cos \left(q \left| -\frac{b}{2} - y_0 \right| \right) \right) \frac{1}{p^2+q^2} \\ \frac{1}{D} \frac{1}{4pq} \left(-e^{-p|\frac{b}{2}-y_0|} \operatorname{sen} \left(q \left| -\frac{b}{2} - y_0 \right| \right) \right) \\ \frac{1}{D} \frac{1}{4pq} e^{-p|\frac{b}{2}-y_0|} \left(p \operatorname{sen} \left(q \left| \frac{b}{2} - y_0 \right| \right) + q \cos \left(q \left| \frac{b}{2} - y_0 \right| \right) \right) \frac{1}{p^2+q^2} \\ \frac{1}{D} \frac{1}{4pq} \left(-e^{-p|\frac{b}{2}-y_0|} \operatorname{sen} \left(q \left| \frac{b}{2} - y_0 \right| \right) \right) \end{pmatrix} \quad (3.125)$$

Resolvendo o produto de matrizes da equação (3.87) tem-se os coeficientes, no qual são colocados na equação geral do deslocamento gerando a nova equação para o deslocamento:

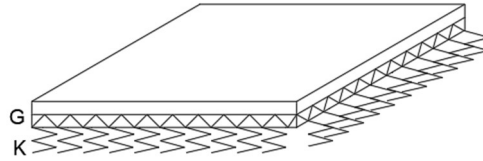
$$w = \sum_{m=1}^{mtotal} \left[C_1 \cosh(py) \cos(qy) + C_2 \sin(qy) \cosh(py) + \sinh(py) \cos(qy) + \sinh(py) \sin(qy) + \frac{\alpha}{D^4 p q} e^{-p|y-y_0|} (p \sin(q|y-y_0|) + q \cos(q|y-y_0|)) \frac{1}{p^2+q^2} \right] \sin(\chi_m x) \quad (3.126)$$

3.4.4 PLACAS DELGADAS SOBRE BASE ELÁSTICA DE PASTERNAK

Para o caso de pavimentos, onde há camadas responsáveis por transferir energia de uma camada para outra, torna-se necessário a consideração da placa apoiada sobre base elástica de Pasternak. Sendo assim, deve ser considerado o parâmetro G de Pasternak, resultando na equação geral (3.127).

$$g = D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + k - G \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (3.127)$$

Figura 3.7 - Placa sobre base de Pasternak



Fonte: (Autorial, 2024)

Derivando a função do deslocamento em função do coeficiente $A_{mp(y)}$ tem-se:

$$g = D \left(\frac{d^4}{dx^4} - 2 \frac{\chi_m^2 d}{dy^2} + \chi_m^4 \right) A_{mp(y)} + k A_{mp(y)} - G \left(-\chi_m^2 + \frac{d^2}{dy^2} \right) A_{mp(y)} \quad (3.128)$$

$$\frac{g}{D} = \left[\frac{d^4}{dy^4} - \left(2\chi_m^2 + \frac{G}{D} \right) \frac{d^2}{dy^2} + \chi_m^4 + \frac{G}{D} \chi_m^2 + \frac{k}{D} \right] A_{mp(y)}$$

Substituindo $z = A_{mp(y)} \frac{d^2}{dy^2}$

$$\left[z^2 - \left(2\chi_m^2 + \frac{G}{D} \right) z + \chi_m^4 + \frac{G}{D} \chi_m^2 + \frac{k}{D} \right] = 0 \quad (3.129)$$

Resolvendo como uma equação quadrática, tem-se:

$$\begin{aligned}
a &= z \\
b &= -(2\chi_m^2 + \frac{G}{D}) \\
c &= \chi_m^4 + \frac{G}{D}\chi_m^2 + \frac{k}{D}
\end{aligned} \tag{3.130}$$

Sendo as raízes dadas na equação (3.131):

$$z_{1,2} = \chi_m^2 + \frac{G}{2D} \pm \sqrt{\Delta} \tag{3.131}$$

$$\text{Sendo } \Delta = (\chi_m^2 + \frac{G}{D})^2 - (\chi_m^4 + \frac{G}{D}\chi_m^2 + \frac{k}{D})$$

Nota-se que o Δ pode dispor de três situações diferentes, cuja essas situações resultam em três soluções particulares e homogêneas diferentes, sendo elas:

$\Delta = 0$..

Essa situação implica $z_{1,2} = \chi_m^2 + \frac{G}{2D}$, ou seja, $z_1 = z_2$.

Para esse caso, utiliza-se a solução particular utilizada em placas isoladas como descrito na equação (3.100) e equação (3.101) para solução homogênea, alterando apenas as raízes, pelas raízes da equação (3.131).

Os coeficientes da solução homogênea são calculados da mesma forma que foi para as placas isoladas, como segue nas equações (3.102) e (3.103) para placas com todas as bordas simplesmente apoiadas e (3.104) e (3.105) para as bordas paralelas engastadas. Sendo o deslocamento igual o da equação (3.106), alterando as raízes para as raízes da equação (3.131).

$\Delta > 0$..

Para esse caso, convém notar que as raízes z_1 e z_2 são diferentes para essa situação, mediante isso, usa-se a equação (3.85) para a solução particular e (3.51) para a solução homogênea, substituindo os valores das raízes pelas raízes contidas na equação (3.131).

Os coeficientes da solução homogênea são calculados da mesma forma que foi para as placas com base elástica de Winkler, como segue nas equações (3.93) e (3.95) para placas com todas as bordas simplesmente apoiadas e (3.96) e (3.97) para as bordas paralelas engastadas. Sendo o deslocamento igual o da equação (3.98), alterando as raízes para as raízes da equação (3.131).

$\Delta < 0$..

Nesse caso, há presença dos números complexos, sendo assim, deve-se usar a equação (3.119) para a solução particular. Utilizando as raízes de (3.131) para calcular os novos coeficientes reais e imaginários, p e q , respectivamente, obtém-se a solução particular.

Para a solução homogênea, assim como a particular, deve-se adotar a mesma solução utilizada na placa com base elástica de Winkler. Sendo assim, utiliza-se a equação (3.121) utilizando as raízes da equação (3.131).

Os coeficientes da solução homogênea são calculados da mesma forma que foi para as placas com base elástica de Winkler, como segue nas equações (3.122) e (3.123) para placas com todas as bordas simplesmente apoiadas e (3.124) e (3.125) para as bordas paralelas engastadas. Sendo o deslocamento igual o da equação (3.126), alterando as raízes para as raízes da equação (3.131).

Em resumo, para Pasternak, encontrou-se três soluções particulares, dependendo do resultado do Δ . Mediante isso, as soluções estão resumidas na Tabela 3.7.

Tabela 3.7 - Solução para placas apoiadas sobre base elástica de Pasternak

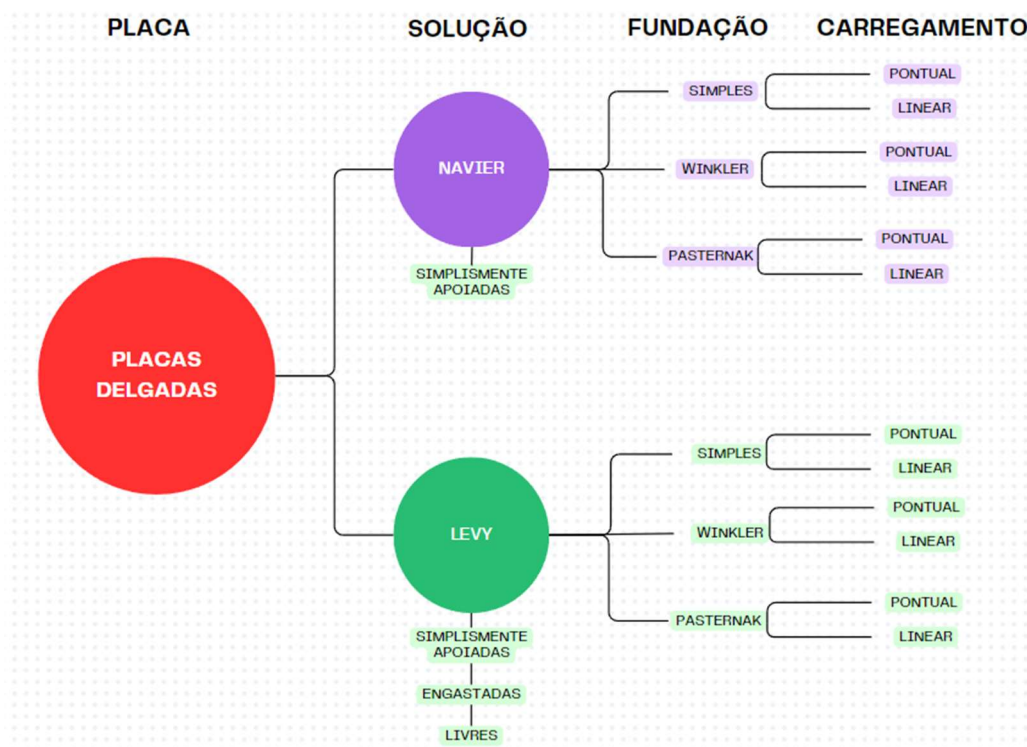
Δ	$A_{mp(y)}$	α	
		Carga pontual	Distribuído em linha na direção x
$= 0$	$-\frac{\alpha}{4D(\chi_m^2 + 2G)} e^{-\sqrt{\chi_m^2 + \frac{G}{2D}}r} \left(\frac{1}{\sqrt{\chi_m^2 + \frac{G}{2D}}} + r \right)$		
> 0	$-\frac{\alpha}{4D\sqrt{\Delta}} \left(\frac{1}{\sqrt{(\chi_m^2 + \frac{G}{2D}) - \Delta}} e^{-\sqrt{(\chi_m^2 + \frac{G}{2D}) - \Delta}r} - \frac{1}{\sqrt{(\chi_m^2 + \frac{G}{2D}) + \Delta}} e^{-\sqrt{(\chi_m^2 + \frac{G}{2D}) + \Delta}r} \right)$	$\frac{2}{a} P \text{sen}(\chi_m x_0)$	$\frac{2}{m\pi} g_0 \text{sen}\left(\frac{m\pi}{2}\right)^2$
< 0	$\frac{\alpha}{4Dqp} \left[\frac{(p \text{sen}(qr) + q \cos(qr))}{p^2 + q^2} e^{-pr} \right]$		

Fonte: (Autorial, 2024)

3.5 FLUXOGRAMA

Visando facilitar a compreensão do seguimento dos cálculos, foi realizado um fluxograma, conforme exposto na Figura 3.8.

Figura 3.8 - Fluxograma do trabalho



Fonte: (Autorial, 2024)

4. RESULTADOS

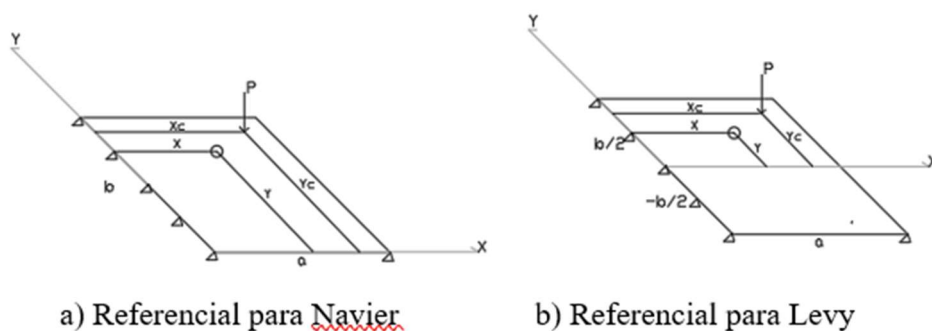
Através do software Mathcad15, foi possível desenvolver os resultados e validá-los por intermédio de gráficos e tabelas no Excel. A princípio, a solução foi verificada mediante comparação com resultados encontrados por intermédio do MEF (Método dos Elementos Finitos), ademais, foi analisada a velocidade de convergência entre a solução proposta por Levy e a proposta por Navier para placas simplesmente apoiadas em todas as bordas. Em seguida, foram feitas verificações, através do erro relativo, para as outras condições de contorno supracitadas no trabalho. Por último, foram calculadas situações aplicadas da engenharia, como o caso de cargas de paredes em lajes, radiers e cargas móveis em pavimentos rígidos.

Os erros relativos para validação da solução, foram realizados com referência ao MEF, visto que o método de Navier é restrito aos bordos simplesmente apoiados. Sendo o erro relativo calculado conforme a equação (3.132):

$$Erro (\%) = \left| \frac{MEF - Levy}{MEF} \right| 100 \quad (3.132)$$

Vale salientar que como a solução por Levy e Navier, no trabalho, foram desenvolvidas através de referenciais diferentes, as coordenadas em uma direção serão alteradas, conforme vê-se na Figura 4.1.

Figura 4.1 - Referencias para o método de Levy e de Navier



Fonte: (Autorial, 2024)

4.1 VERIFICAÇÕES

4.1.1 Dados de entrada

Foi considerada uma placa unitária, com 8 centímetros de espessura, com respeito ao material, foi utilizada considerada uma placa de concreto armado, com módulo de Young de 28 GPa e coeficiente de Poisson de 0,2, conforme a Tabela 4.1.

Tabela 4.1– Dados da placa

a	b	t	E	ν
(m)	(m)	(m)	(kN/m ²)	
1	1	0,08	28×10^6	0,2

Fonte: (Autorial, 2024)

Sendo o D (rigidez da placa), calculada pela equação (3.12)

Para MEF, foi considerada uma malha com 32 partições. Sendo necessário, para análise da placa submetida a cargas pontuais, considerar a localização da carga no nó da malha. Sendo assim, como o MEF vai ter 33 nós ao longo de cada eixo, para verificação do erro relativo da solução com o MEF, a solução proposta foi calculada em 33 pontos ao longo do eixo.

Considerando uma placa delgada isolada, submetida a carga pontual de 40kN, localizada no centro da placa nas coordenadas da Tabela 4.2, realizou-se a validação do método para diferentes condições de contorno.

Tabela 4.2 - Coordenadas para carga pontual

	Coordenadas de campo		Coordenadas da carga	
	x	Y	xc	yc
Navier	a/2	(3/4)b	a/2	b/2
Levy	a/2	b/4	a/2	0

Fonte: (Autorial, 2024)

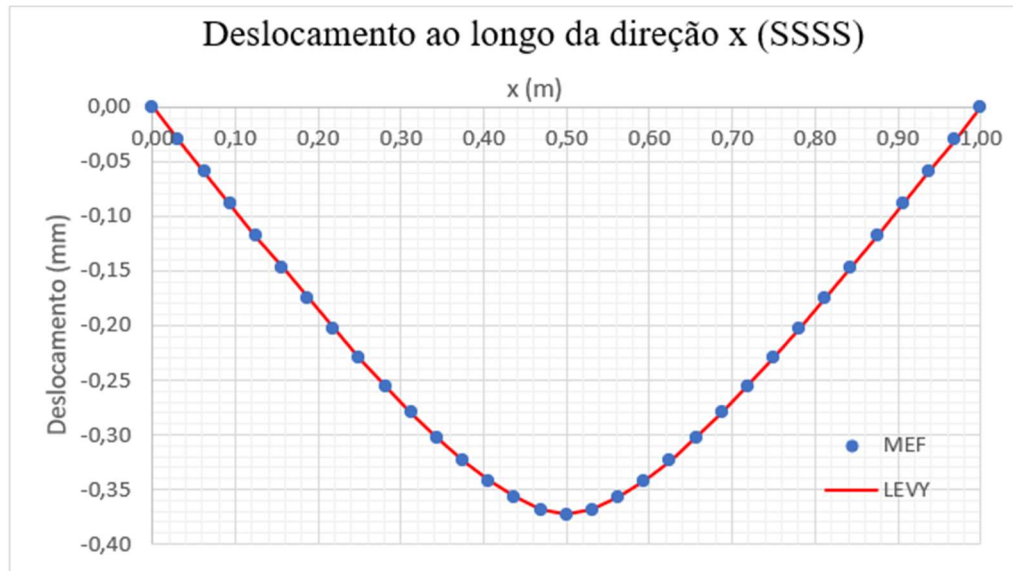
4.1.2 Validação por meio do MEF

Utilizando as propriedades da Tabela 4.1 realizou-se a verificação da solução, utilizando o MEF. Relativo ao MEF, foi utilizada uma malha 32x32 e calculado segundo o método DKT (*Discrete Kirchhoff Theory*), visto que o trabalho aborda placas delgadas. Para a solução de Levy, foi utilizando um total de 20 ciclos, visto que mais do que isso apresenta pouca possibilidade de alteração do valor até 5 casas decimais após a vírgula.

Foram gerados gráficos e tabelas contendo o deslocamento e o erro relativo, mediante solução de Levy e o MEF, ao longo da coordenada x adotada para placa, como visto na Figura 4.1. Esses gráficos demonstram algumas situações de apoio, contendo a placa simplesmente apoiada, engastada e livre.

Para a realização dos gráficos foram utilizados os valores das tabelas de deslocamento, como a placa está submetida a situação de simetria, os valores são espalhados a partir do centro, sendo assim as tabelas contêm os valores apenas até o centro da placa, visando otimizar espaço no trabalho.

Figura 4.2 - Deslocamento por Levy e por MEF na SSSS para placas isoladas



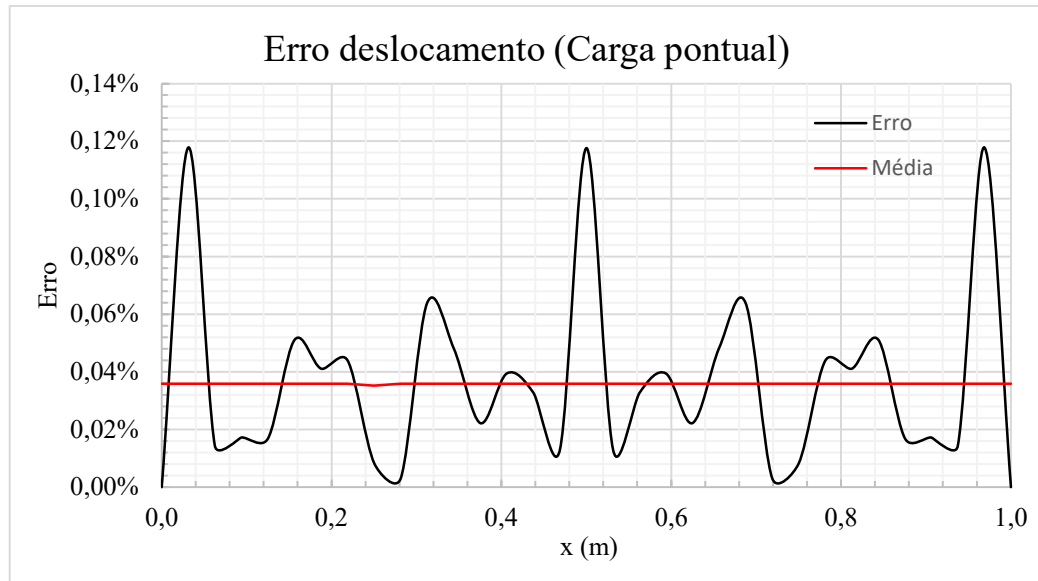
Fonte: (Autorial, 2024)

Tabela 4.3 - Deslocamento da placa isolada na condição SSSS

x (m)	Deslocamento (mm)	
	MEF	LEVY
0,00	0	0
0,03	-0,02970	-0,02967
0,06	-0,05932	-0,05933
0,09	-0,08877	-0,08875
0,13	-0,11790	-0,11788
0,16	-0,14680	-0,14673
0,19	-0,17510	-0,17503
0,22	-0,20270	-0,20261
0,25	-0,22950	-0,22948
0,28	-0,25530	-0,25531
0,31	-0,27990	-0,27972
0,34	-0,30280	-0,30265
0,38	-0,32370	-0,32363
0,41	-0,34200	-0,34187
0,44	-0,35720	-0,35708
0,47	-0,36830	-0,36825
0,50	-0,37300	-0,37256

Fonte: (Autorial, 2024)

Figura 4.3 - Erro relativo do deslocamento na condição SSSS para placas isoladas



Fonte: (Autorial, 2024)

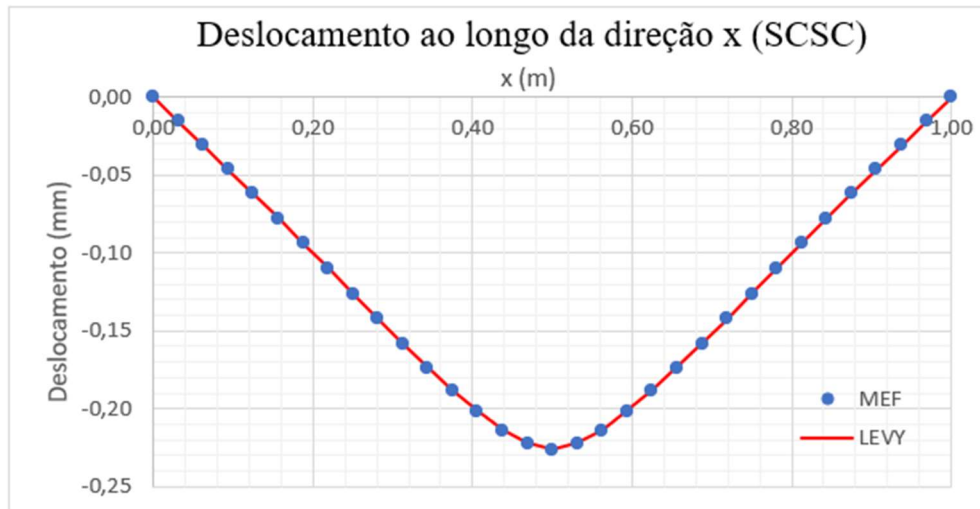
Os valores utilizados para desenvolver o gráfico da Figura 4.3 seguem na Tabela 4.4.

Tabela 4.4 - Erro relativo do deslocamento da placa isolada na condição SSSS

x (m)	Erro	Média
0,00	0,000%	
0,03	0,118%	
0,06	0,014%	
0,09	0,017%	
0,13	0,017%	
0,16	0,051%	
0,19	0,041%	
0,22	0,044%	
0,25	0,008%	0,03590%
0,28	0,003%	
0,31	0,064%	
0,34	0,048%	
0,38	0,022%	
0,41	0,039%	
0,44	0,033%	
0,47	0,013%	
0,50	0,118%	

A baixo tem-se o gráfico na Figura 4.4 contendo os deslocamentos por Levy e MEF para placas isoladas simplesmente engastadas nos dois bordos da direção x.

Figura 4.4 - Deslocamento por Levy e por MEF na SCSC para placas isoladas



Fonte: (Autorial, 2024)

Para a realização do gráfico da Figura 4.4 foram utilizados os valores da Tabela 4.5.

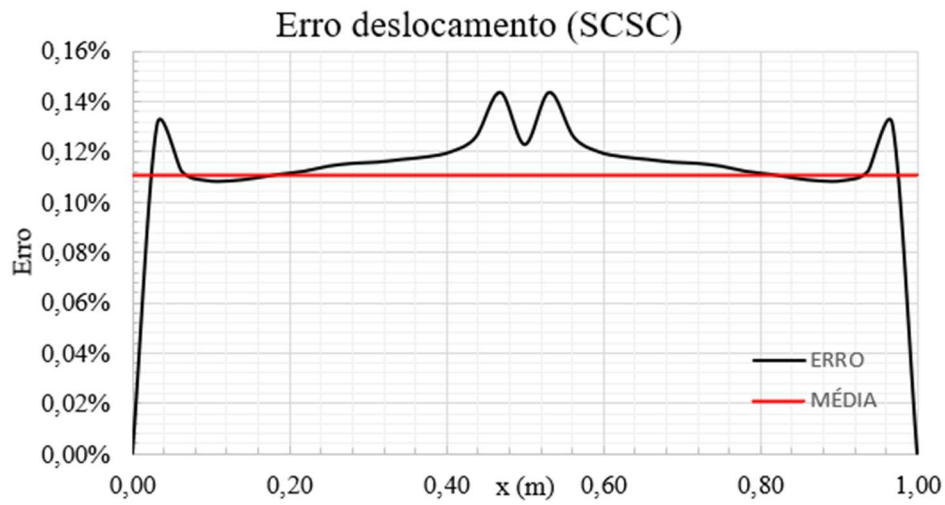
Tabela 4.5 - Deslocamento da placa isolada na condição SCSC

x (m)	Deslocamento (mm)	
	MEF	LEVY
0,00	0,00000	0,00000
0,03	-0,01540	-0,01538
0,06	-0,03084	-0,03080
0,09	-0,04638	-0,04633
0,13	-0,06205	-0,06198
0,16	-0,07788	-0,07779
0,19	-0,09386	-0,09376
0,22	-0,10997	-0,10984
0,25	-0,12614	-0,12599
0,28	-0,14226	-0,14210
0,31	-0,15818	-0,15800
0,34	-0,17366	-0,17346
0,38	-0,18839	-0,18817
0,41	-0,20191	-0,20167
0,44	-0,21360	-0,21333
0,47	-0,22249	-0,22217
0,50	-0,22654	-0,22626

Fonte: (Autorial, 2024)

Mediante os resultados obtidos pela solução desenvolvida e por MEF, chegou-se ao erro relativo, ao longo do eixo central na direção (x) da placa. Conforme mostrado no gráfico da Figura 4.5.

Figura 4.5 - Erro relativo do deslocamento na condição SCSC para placas isoladas



Os valores utilizados para desenvolver o gráfico da Figura 4.5 seguem na Tabela 4.6.

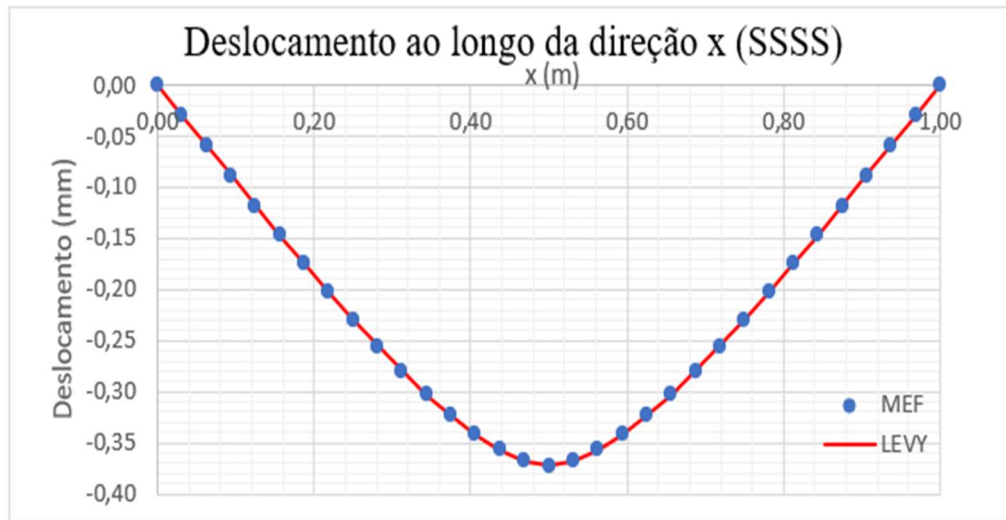
Tabela 4.6 - Erro relativo do deslocamento da placa isolada na condição SCSC

x (m)	Erro	Média
0,00	0,00000%	0,11044%
0,03	0,13055%	
0,06	0,11220%	
0,09	0,10846%	
0,13	0,10830%	
0,16	0,10940%	
0,19	0,11091%	
0,22	0,11213%	
0,25	0,11416%	
0,28	0,11528%	
0,31	0,11575%	
0,34	0,11683%	
0,38	0,11784%	
0,41	0,11990%	
0,44	0,12570%	
0,47	0,14347%	
0,50	0,12272%	

Fonte: (Autorial, 2024)

A baixo tem-se o gráfico da Figura 4.6 contendo os deslocamentos por Levy e MEF para placas sobre base de Winkler simplesmente apoiada nos quatro bordos.

Figura 4.6 - Deslocamento por Levy e por MEF na SSSS para placas em Winkler



Fonte: (Autorial, 2024)

Para a realização do gráfico da Figura 4.6 foram utilizados os valores da Tabela 4.7.

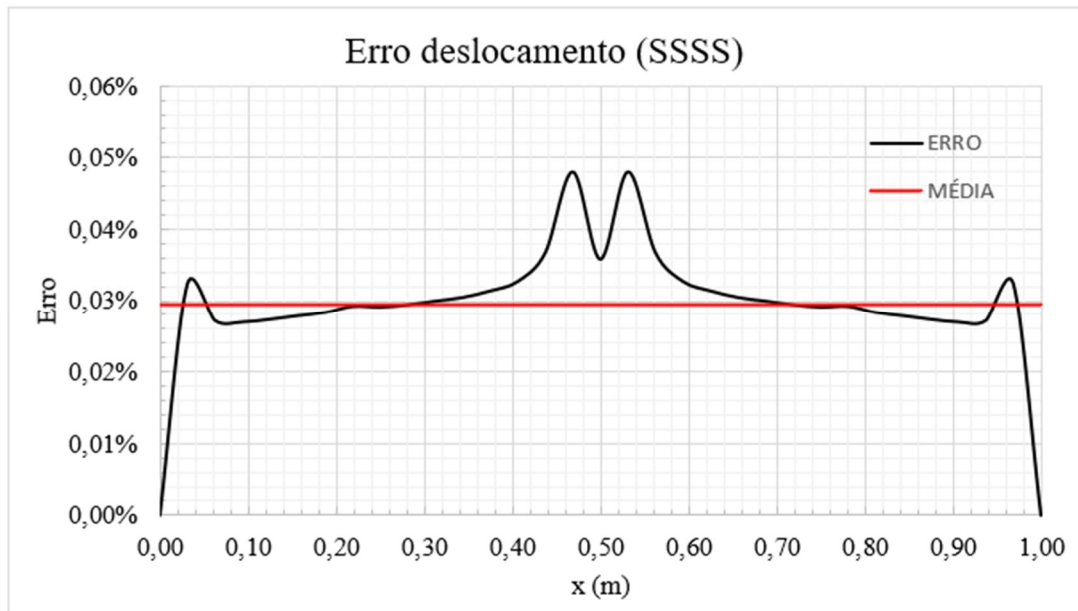
Tabela 4.7 - Deslocamento da placa em Winkler na condição SSSS

x (m)	Deslocamento (mm)	
	MEF	LEVY
0,00	0,00000	0,00000
0,03	-0,02970	-0,02969
0,06	-0,05930	-0,05929
0,09	-0,08874	-0,08872
0,13	-0,11791	-0,11788
0,16	-0,14671	-0,14667
0,19	-0,17501	-0,17496
0,22	-0,20266	-0,20260
0,25	-0,22948	-0,22942
0,28	-0,25528	-0,25520
0,31	-0,27978	-0,27970
0,34	-0,30268	-0,30259
0,38	-0,32358	-0,32348
0,41	-0,34197	-0,34185
0,44	-0,35716	-0,35703
0,47	-0,36817	-0,36799
0,50	-0,37293	-0,37280

Fonte: (Autorial, 2024)

Mediante os resultados obtidos pela solução desenvolvida e por MEF, chegou-se ao erro relativo, ao longo do eixo central na direção (x) da placa. Conforme mostrado no gráfico da Figura 4.7.

Figura 4.7 - Erro relativo do deslocamento na condição SSSS para placas em Winkler



Fonte: (Autorial, 2024)

Os valores utilizados para desenvolver o gráfico da Figura 4.7 seguem na Tabela 4.8.

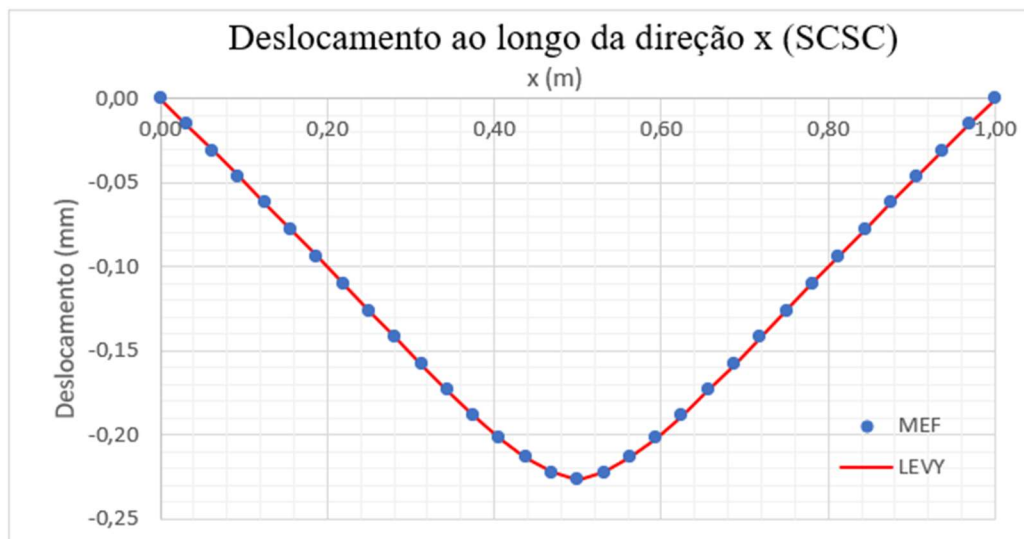
Tabela 4.8 - Erro relativo do deslocamento da placa em Winkler na condição SSSS

x (m)	Erro	Média
0,00	0,00000%	
0,03	0,03233%	
0,06	0,02715%	
0,09	0,02693%	
0,13	0,02731%	
0,16	0,02781%	
0,19	0,02828%	
0,22	0,02916%	
0,25	0,02907%	0,02935%
0,28	0,02938%	
0,31	0,02992%	
0,34	0,03043%	
0,38	0,03134%	
0,41	0,03266%	
0,44	0,03668%	
0,47	0,04791%	
0,50	0,03574%	

Fonte: (Autorial, 2024)

A baixo tem-se o gráfico da Figura 4.8 contendo os deslocamentos por Levy e MEF para placas sobre base de Winkler engastada nos dois bordos da direção x.

Figura 4.8 - Deslocamento por Levy e por MEF na SCSC para placas em Winkler



Fonte: (Autorial, 2024)

Para a realização do gráfico da Figura 4.8 foram utilizados os valores da Tabela 4.9.

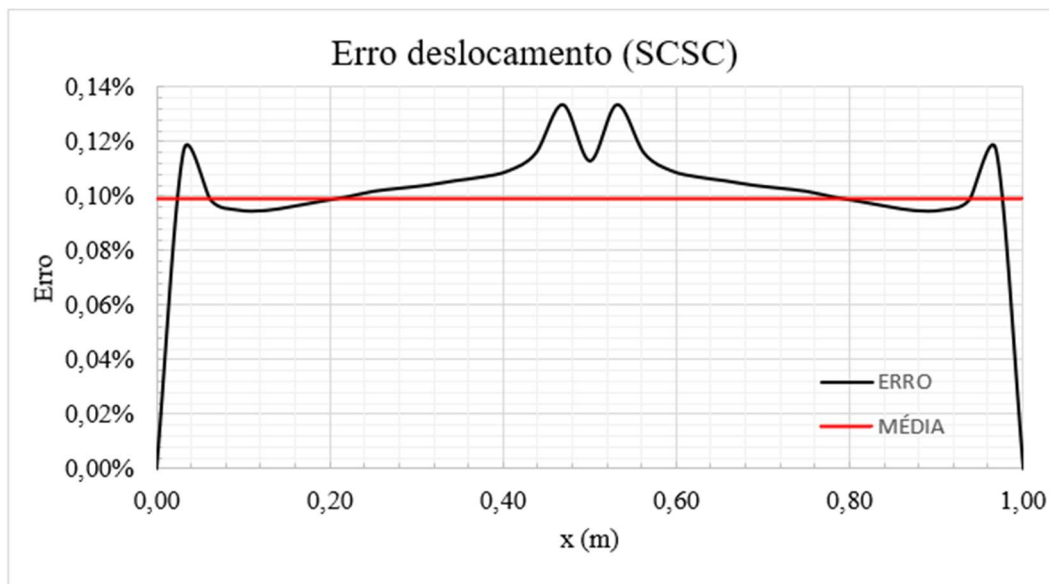
Tabela 4.9 - Deslocamento da placa em Winkler na condição SCSC

x (m)	Deslocamento (mm)	
	MEF	LEVY
0,00	0,00000	0,00000
0,03	-0,01538	-0,01539
0,06	-0,03080	-0,03083
0,09	-0,04633	-0,04637
0,13	-0,06198	-0,06204
0,16	-0,07779	-0,07787
0,19	-0,09376	-0,09385
0,22	-0,10984	-0,10995
0,25	-0,12599	-0,12612
0,28	-0,14210	-0,14224
0,31	-0,15800	-0,15816
0,34	-0,17346	-0,17364
0,38	-0,18817	-0,18837
0,41	-0,20167	-0,20189
0,44	-0,21333	-0,21358
0,47	-0,22217	-0,22246
0,50	-0,22626	-0,22652

Fonte: (Autorial, 2024)

Mediante os resultados obtidos pela solução desenvolvida e por MEF, chegou-se ao erro relativo, ao longo do eixo central na direção (x) da placa. Conforme mostrado na Figura 4.9.

Figura 4.9 - Erro relativo do deslocamento na condição SCSC para placa sobre base de Winkler.



Fonte: (Autorial, 2024)

Os valores utilizados para desenvolver o gráfico da Figura 4.9 seguem na Tabela 4.10.

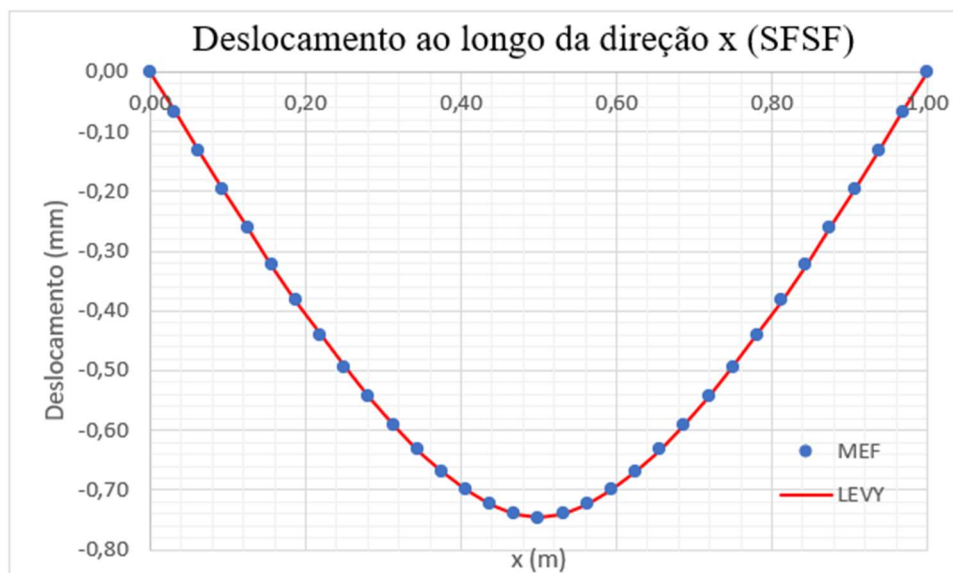
Tabela 4.10 - Erro relativo do deslocamento da placa em Winkler na condição SCSC

x (m)	Erro	Média
0,00	0,00000%	
0,03	0,11641%	
0,06	0,09837%	
0,09	0,09476%	
0,13	0,09454%	
0,16	0,09602%	
0,19	0,09781%	
0,22	0,09951%	
0,25	0,10159%	0,09892%
0,28	0,10275%	
0,31	0,10386%	
0,34	0,10544%	
0,38	0,10682%	
0,41	0,10914%	
0,44	0,11555%	
0,47	0,13332%	
0,50	0,11270%	

Fonte: (Autorial, 2024)

A baixo tem-se o gráfico da Figura 4.10 contendo os deslocamentos por Levy e MEF para placas sobre base de Winkler engastada nos dois bordos da direção x.

Figura 4.10 - Deslocamento por Levy e por MEF na SFSF para placas isoladas.



Fonte: (Autorial, 2024)

Para a realização do gráfico da Figura 4.10 foram utilizados os valores da Tabela 4.11.

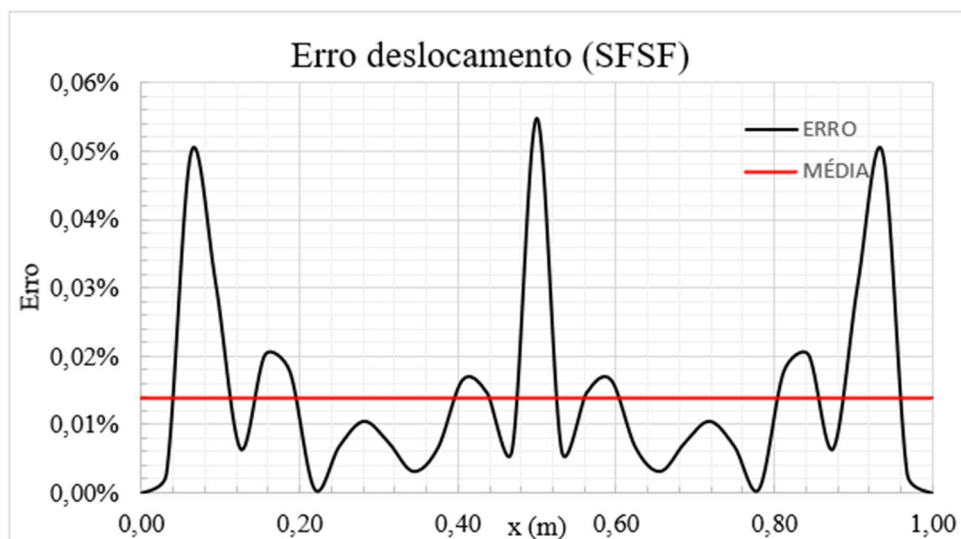
Tabela 4.11 - Deslocamento da placa isolada na condição SFSF

x (m)	Deslocamento (mm)	
	MEF	LEVY
0,00	0,00000	0,00000
0,03	-0,06629	-0,06629
0,06	-0,13216	-0,13223
0,09	-0,19717	-0,19723
0,13	-0,26088	-0,26089
0,16	-0,32284	-0,32290
0,19	-0,38261	-0,38268
0,22	-0,43975	-0,43975
0,25	-0,49378	-0,49382
0,28	-0,54425	-0,54431
0,31	-0,59064	-0,59060
0,34	-0,63244	-0,63242
0,38	-0,66906	-0,66911
0,41	-0,69984	-0,69972
0,44	-0,72398	-0,72387
0,47	-0,74039	-0,74044
0,50	-0,74696	-0,74655

Fonte: (Autorial, 2024)

Atendendo aos resultados obtidos pela solução desenvolvida e por MEF, chegou-se ao erro relativo, ao longo do eixo central na direção (x) da placa. Conforme mostrado na Figura 4.11.

Figura 4.11 - Erro relativo do deslocamento na condição SFSF para placas isoladas.



Fonte: (Autorial, 2024)

Os valores utilizados para desenvolver o gráfico da Figura 4.11 seguem na Tabela 4.12.

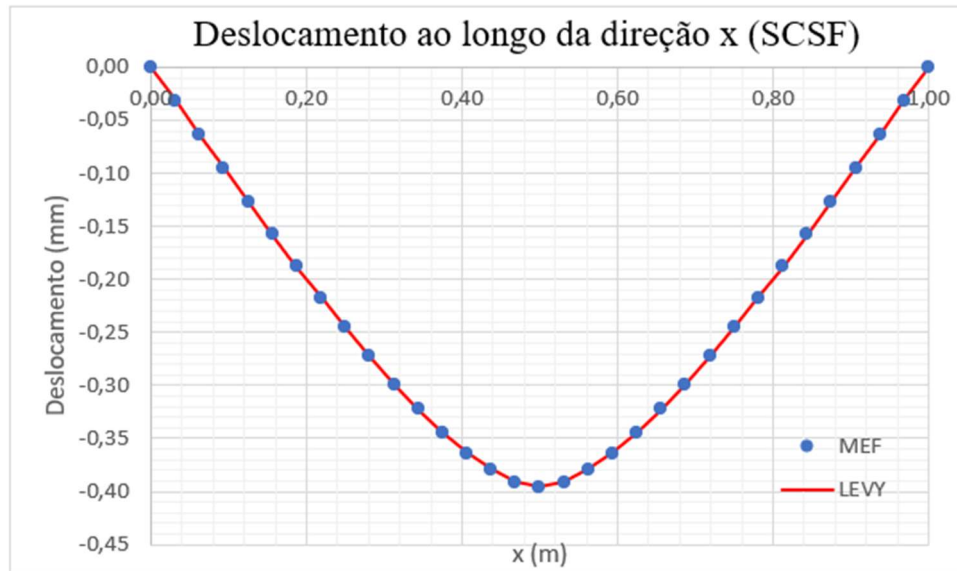
Tabela 4.12 - Erro relativo do deslocamento da placa isolada na condição SFSF

x (m)	Erro	Média
0,00	0,0000%	0,0138%
0,03	0,0027%	
0,06	0,0498%	
0,09	0,0307%	
0,13	0,0065%	
0,16	0,0203%	
0,19	0,0178%	
0,22	0,0006%	
0,25	0,0068%	
0,28	0,0105%	
0,31	0,0074%	
0,34	0,0032%	
0,38	0,0067%	
0,41	0,0166%	
0,44	0,0146%	
0,47	0,0063%	
0,50	0,0548%	

Fonte: (Autorial, 2024)

A baixo tem-se o gráfico da Figura 4.12 contendo os deslocamentos por Levy e MEF para placa isolada engastada em um bordo e livre no outro na direção x.

Figura 4.12 - Deslocamento na condição SCSF para placas isoladas.



Fonte: (Autorial, 2024)

Para a realização do gráfico da Figura 4.12 foram utilizados os valores da Tabela 4.13.

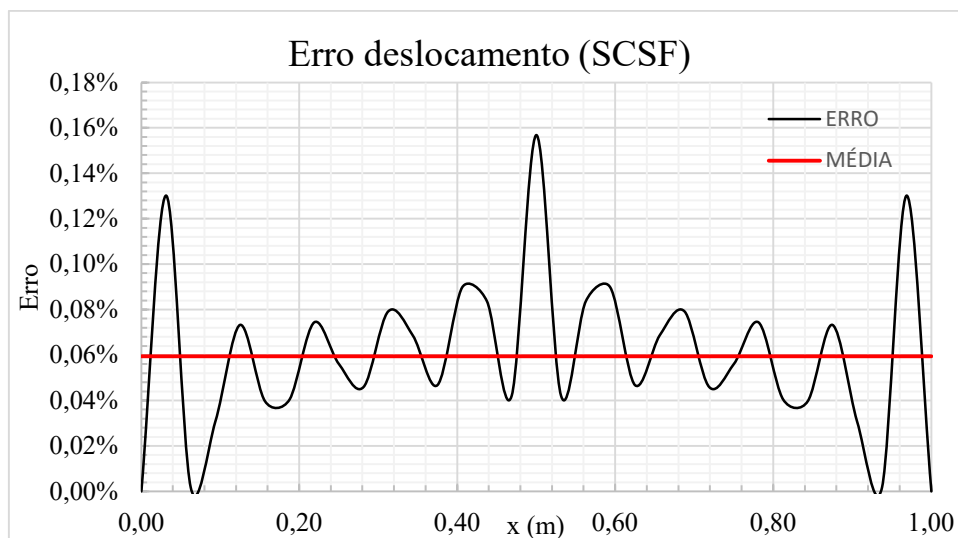
Tabela 4.13 - Deslocamento da placa isolada na condição SFSC

x (m)	Deslocamento (mm)	
	MEF	LEVY
0,00	0,00000	0
0,03	-0,03193	-0,03189
0,06	-0,06376	-0,06376
0,09	-0,09537	-0,09534
0,13	-0,12665	-0,12656
0,16	-0,15748	-0,15742
0,19	-0,18770	-0,18762
0,22	-0,21715	-0,21698
0,25	-0,24563	-0,24549
0,28	-0,27293	-0,27280
0,31	-0,29877	-0,29853
0,34	-0,32282	-0,32260
0,38	-0,34467	-0,34451
0,41	-0,36382	-0,36349
0,44	-0,37956	-0,37924
0,47	-0,39090	-0,39073
0,50	-0,39577	-0,39515

Fonte: (Autorial, 2024)

Mediante os resultados obtidos pela solução desenvolvida e por MEF, chegou-se ao erro relativo, ao longo do eixo central na direção (x) da placa. Conforme mostrado na Figura 4.13.

Figura 4.13 - Erro relativo do deslocamento na condição SCSF para placas isoladas.



Fonte: (Autorial, 2024)

Os valores utilizados para desenvolver o gráfico da Figura 4.13 seguem na Tabela 4.14.

Tabela 4.14 - Erro relativo do deslocamento da placa isolada na condição SFSC

x (m)	Erro	Média
0,00	0,0000%	
0,03	0,1303%	
0,06	0,0019%	
0,09	0,0307%	
0,13	0,0733%	
0,16	0,0398%	
0,19	0,0405%	
0,22	0,0744%	
0,25	0,0561%	0,0595%
0,28	0,0459%	
0,31	0,0793%	
0,34	0,0686%	
0,38	0,0468%	
0,41	0,0898%	
0,44	0,0836%	
0,47	0,0422%	
0,50	0,1568%	

Fonte: (Autorial, 2024)

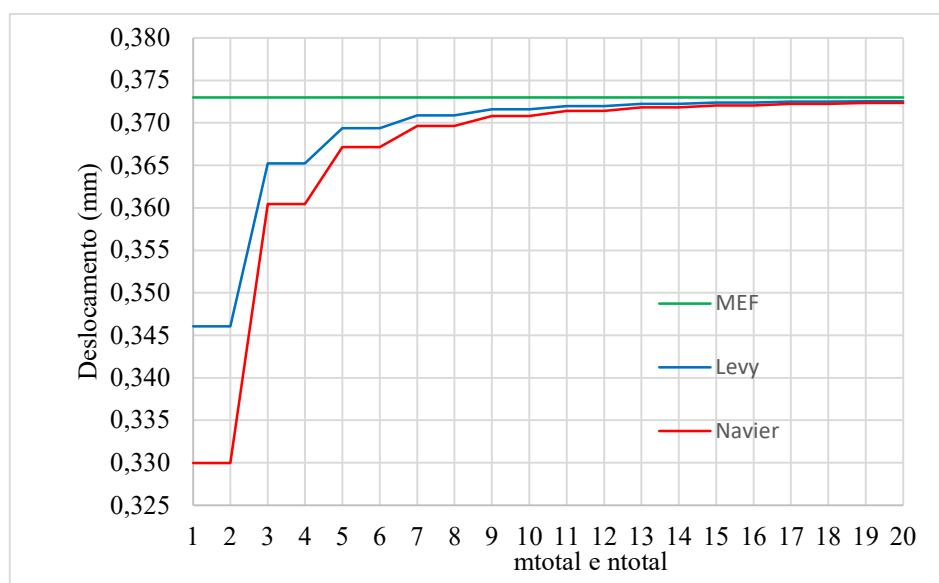
Fazendo uso dos gráficos das figuras (Figura 4.2, Figura 4.4, Figura 4.6, Figura 4.8, Figura 4.10, Figura 4.12) percebe-se uma aparente convergência de valores, sendo notado nas tabelas (Tabela 4.3, Tabela 4.5, Tabela 4.7, Tabela 4.9, Tabela 4.11, Tabela 4.13) que a maioria dos pontos são iguais até a terceira casa decimal após a vírgula, sendo no meio da placa uma diferença um pouco mais significativa, devido ao fato de que a singularidade da análise está sendo feito abaixo da carga pontual.

Vide os deslocamentos pelo método de Levy e por MEF, conseguiu-se traçar os erros relativos, conforme visto nos gráficos das figuras (Figura 4.3, Figura 4.5, Figura 4.7, Figura 4.9, Figura 4.11, Figura 4.13). A partir dos erros, pode-se perceber que os valores estão relativamente baixos, sempre estando a baixo de 1% para todas as situações. Com isso pode-se aferir que a solução apresenta valores concisos e então pode ser aplicada.

4.2.1 Velocidade de convergência

Tendo em vista que as soluções, tanto de Levy quanto de Navier, são fundamentadas por séries aritméticas, nota-se que quanto maior o intervalo que a série alcança, mais o resultado tende a encontrar um valor convergente. Nessa perspectiva, foram desenvolvidos os gráficos, através do Excel, para comparação de velocidade de convergência de Levy e Navier para com o MEF, sendo esse gráfico composto pelo número de ciclos das séries nas abscissas e nas ordenadas o deslocamento em milímetros.

Figura 4.14 - Convergência dos deslocamentos



Fonte: (Autorial, 2024)

Nota-se a partir do Figura 4.14 que a solução de Levy converge mais rápido do que Navier, desde os primeiros ciclos. Confirmando que, além do método de Levy ser mais irrestrito, o mesmo apresenta-se mais eficiente.

4.1 APLICAÇÃO

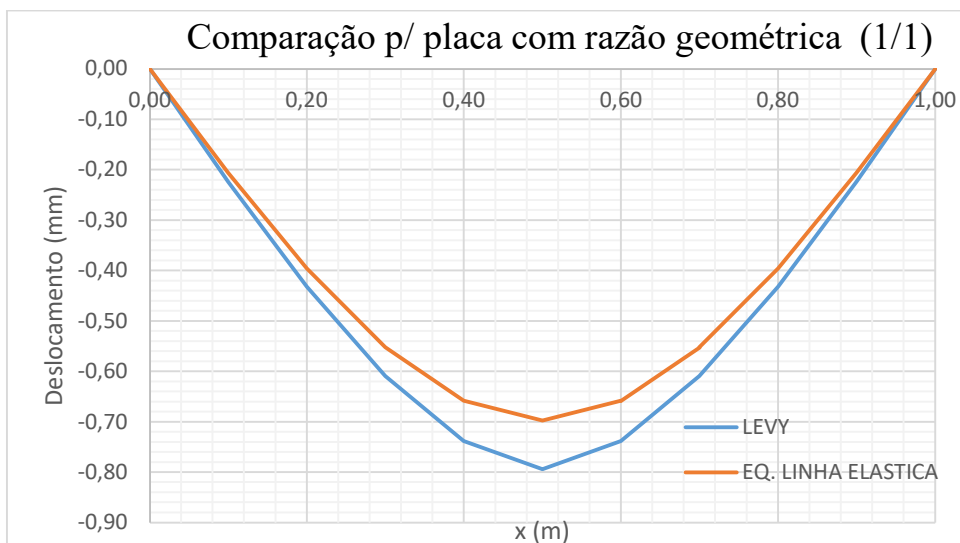
Mediante os resultados validados, percebe-se que há inúmeras aplicações dessa solução, dentro da vasta gama de aplicações, notou-se a partir de testes que a placa delgada obtém resultados semelhantes ao das vigas calculadas utilizando a equação da linha elástica, vide equação (3.133):

$$\begin{aligned}
 & x \leq \frac{a}{2} \\
 w &= \frac{P}{48EI} (4x^3 - 3a^2x) \\
 & x > \frac{a}{2} \\
 w &= \frac{P}{48EI} (4(a-x)^3 - 3a^2(a-x))
 \end{aligned} \tag{3.133}$$

Foi realizada a verificação para placas com diferentes relações de largura e vão (b/a), sendo elas feitas em comparação com uma viga bi-apoiada, visto que a solução de Levy restringe duas bordas (b) a condição obrigatoriamente simplesmente apoiada. Tanto a placa como a viga, apresentam as mesmas propriedades da Tabela 4.1, sendo apenas o vão (a) variável e o coeficiente de Poisson, visto que o seu valor é nulo para vigas. Relativo a carga, foi aplicada uma carga pontual na metade do vão, com cerca de 40kN.

Mediante o cálculo no software Mathcad, foi possível desenvolver os gráficos (Figura 4.15, Figura 4.16, Figura 4.17, Figura 4.18, Figura 4.19), contendo o deslocamento nas ordenadas e a razão do eixo x e o vão (x/a) nas abcissas.

Figura 4.15 - Comparação para placa com razão geométrica (1/1)



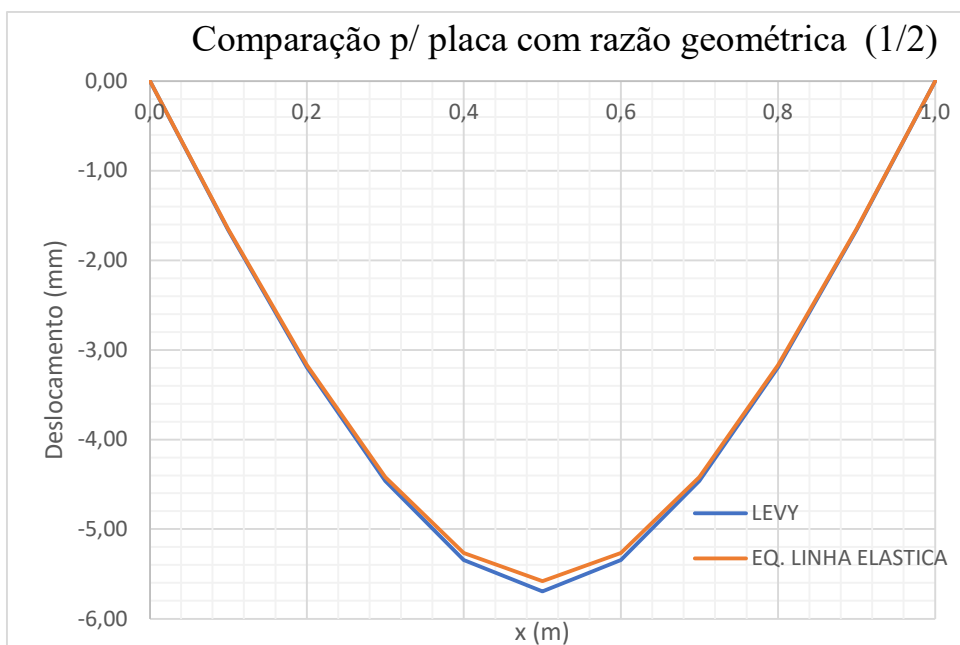
Fonte: (Autorial, 2024)

Tabela 4.15 - Comparação para placa com razão geométrica (1/1)

x/a	LEVY	EQ. LINHA ELASTICA
0,00000	0,00000	0,00000
-0,22385	-0,20647	-0,22385
-0,43231	-0,39621	-0,43231
-0,60963	-0,55246	-0,60963
-0,73852	-0,65848	-0,73852
-0,79394	-0,69754	-0,79394
-0,73852	-0,65848	-0,73852
-0,60963	-0,55246	-0,60963
-0,43231	-0,39621	-0,43231
-0,22385	-0,20647	-0,22385
0,00000	0,00000	0,00000

Fonte: (Autorial, 2024)

Figura 4.16 - Comparação para placa com razão geométrica (1/2)



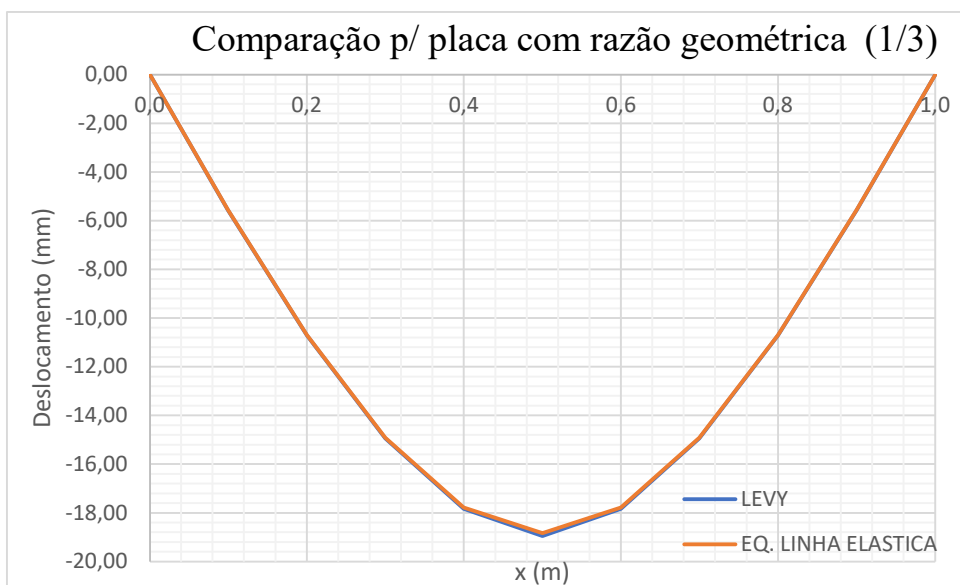
Fonte: (Autorial, 2024)

Tabela 4.16 - Comparação para placa com razão geométrica (1/2)

x/a	LEVY	EQ. LINHA ELASTICA
0,00	0,00000	0,00000
0,10	-1,66243	-1,65179
0,20	-3,19375	-3,16964
0,30	-4,46404	-4,41964
0,40	-5,34499	-5,26786
0,50	-5,69377	-5,58036
0,60	-5,34499	-5,26786
0,70	-4,46404	-4,41964
0,80	-3,19375	-3,16964
0,90	-1,66243	-1,65179
1,00	0,00000	0,00000

Fonte: (Autorial, 2024)

Figura 4.17 - Comparação para placa com razão geométrica (1/3)



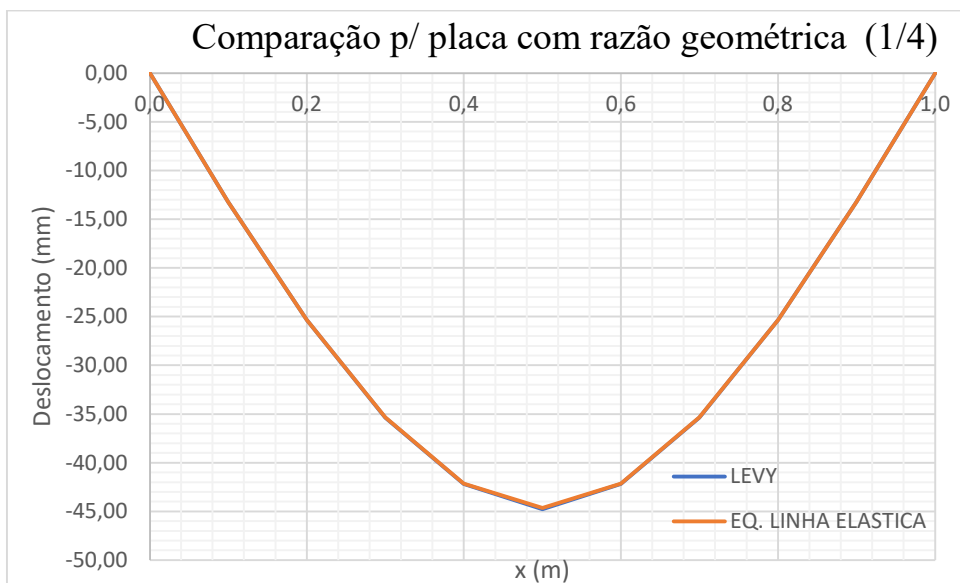
Fonte: (Autorial, 2024)

Tabela 4.17 - Comparação para placa com razão geométrica (1/3)

x/a	LEVY	EQ. LINHA ELASTICA
0,00	0,00000	0,00000
0,10	-5,58001	-5,57478
0,20	-10,71070	-10,69750
0,30	-14,94450	-14,91630
0,40	-17,84020	-17,77900
0,50	-18,94750	-18,83370
0,60	-17,84020	-17,77900
0,70	-14,94450	-14,91630
0,80	-10,71070	-10,69750
0,90	-5,58001	-5,57478
1,00	0,00000	0,00000

Fonte: (Autorial, 2024)

Figura 4.18 - Comparação para placa com razão geométrica (1/4)



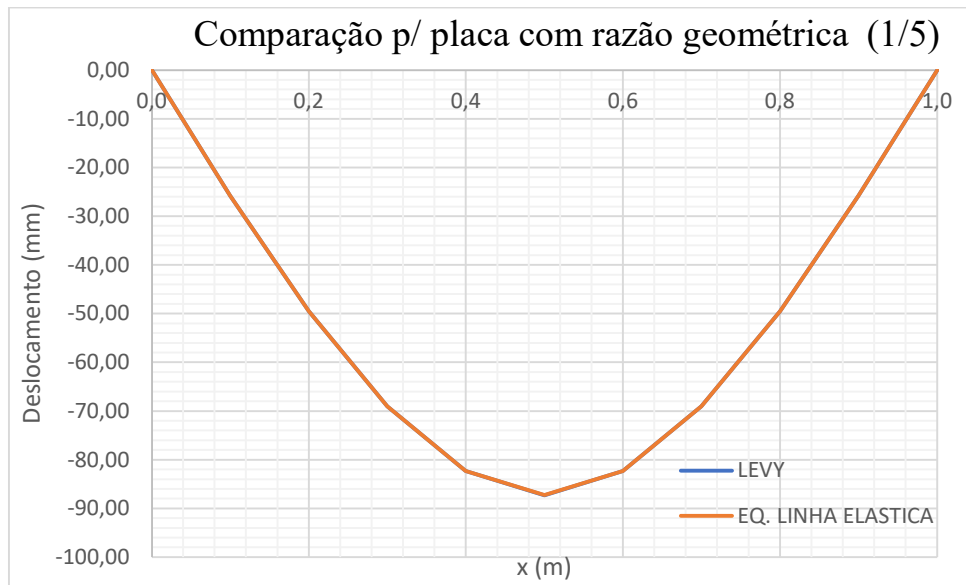
Fonte: (Autorial, 2024)

Tabela 4.18 - Comparação para placa com razão geométrica (1/4)

x/a	LEVY	EQ. LINHA ELASTICA
0,00	0,00000	0,00000
0,10	-13,21660	-13,21430
0,20	-25,36390	-25,35710
0,30	-35,37470	-35,35710
0,40	-42,18990	-42,14290
0,50	-44,75450	-44,64290
0,60	-42,18990	-42,14290
0,70	-35,37470	-35,35710
0,80	-25,36390	-25,35710
0,90	-13,21660	-13,21430
1,00	0,00000	0,00000

Fonte: (Autorial, 2024)

Figura 4.19 - Comparação para placa com razão geométrica (1/5)



Fonte: (Autorial, 2024)

Tabela 4.19 - Comparação para placa com razão geométrica (1/5)

x/a	LEVY	EQ. LINHA ELASTICA
0,00	0,00000	0,00000
0,10	-25,81010	-25,80920
0,20	-49,52910	-49,52570
0,30	-69,06780	-69,05690
0,40	-82,34630	-82,31030
0,50	-87,30170	-87,19310
0,60	-82,34630	-82,31030
0,70	-69,06780	-69,05690
0,80	-49,52910	-49,52570
0,90	-25,81010	-25,80920
1,00	0,00000	0,00000

Fonte: (Autorial, 2024)

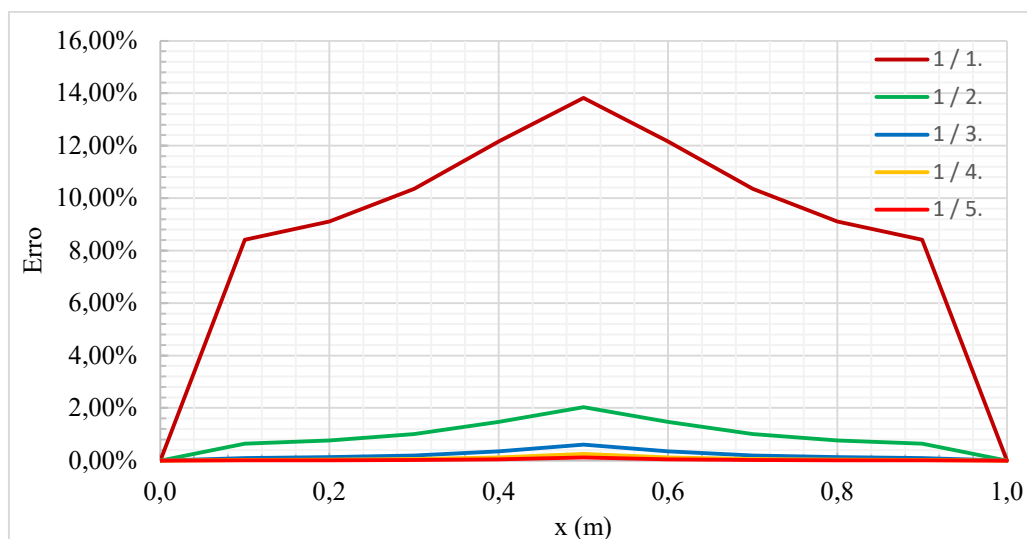
Vale salientar, conforme os gráficos (Figura 4.15, Figura 4.16, Figura 4.17, Figura 4.18, Figura 4.19) e as tabelas (Tabela 4.15, Tabela 4.16, Tabela 4.17, Tabela 4.18, Tabela 4.19), que os extremos da placa apresentam resultados mais próximos dos resultados fornecidos pela equação da linha elástica. Sendo a carga aplicada no centro da placa, semelhantemente ao caso da validação, a região de aplicação da carga pontual é um local de singularidade, sendo assim é passível de apresentar valores um pouco mais distintos. Ademais, percebe-se que as vigas apresentam maiores deflexões que as placas, uma justificativa seria o fato de as vigas não apresentarem deformações transversais ($\nu = 0$), sendo assim toda a energia de deformação é

dispersa apenas longitudinalmente, aumentando a flexão da viga. Diferente das placas, que apresentam deformação transversal, aumentando assim a rigidez longitudinal da placa e, consequentemente, reduzindo os valores de deslocamento provocados pela flexão.

Mediante os gráficos e tabelas apresentados, foi calculado o erro relativo do resultado pelo método de Levy para com o resultado pela equação da linha elástica. Esse erro apresenta-se, graficamente através da Figura 4.20 e numericamente através da

Tabela 4.20.

Figura 4.20 - Erro entre o método de Levy e equação da linha elástica para diferentes vãos



Fonte: (Autorial, 2024)

Tabela 4.20 - Erro entre placa e viga, para diferentes vãos

$\begin{matrix} b/a \\ x/a \end{matrix}$	1 / 1	1 / 2	1 / 3	1 / 4	1 / 5
0,0	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
0,1	8,417%	0,645%	0,094%	0,017%	0,003%
0,2	9,113%	0,760%	0,123%	0,027%	0,007%
0,3	10,348%	1,005%	0,189%	0,050%	0,016%
0,4	12,155%	1,464%	0,344%	0,112%	0,044%
0,5	13,820%	2,032%	0,604%	0,250%	0,125%
0,6	12,155%	1,464%	0,344%	0,112%	0,044%
0,7	10,348%	1,005%	0,189%	0,050%	0,016%
0,8	9,113%	0,760%	0,123%	0,027%	0,007%
0,9	8,417%	0,645%	0,094%	0,017%	0,003%
1,0	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
MÉDIA	8,535%	0,889%	0,191%	0,060%	0,024%

Fonte: (Autorial, 2024)

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Sabe-se que os métodos numéricos apresentam resultados satisfatórios para a análise estrutural de placas. Contudo, as soluções analíticas providenciam resultados mais eficientes e exatos, visto que não ocorrem mediante aproximação.

No caso das placas delgadas, a solução analítica é realizada através da teoria de placas de Kirchhoff, tendo como os métodos de solução de Levy e Navier os mais utilizados. Sabe-se que o método de Levy, apresenta uma grande vantagem em relação ao método de Navier que é a não restrição de todos os bordos como simplesmente apoiados. Não obstante, Levy apresenta dificuldades na sua solução quando a placa é submetida a carregamento pontual e distribuído em linha, devido a presença do Delta de Dirac.

O desenvolvimento desse trabalho teve como característica encontrar uma forma de minuiar a dificuldade existente no método de Levy para cargas pontuais e distribuídas em linha. Sendo essa dificuldade responsável por limitar as soluções analíticas para placas delgadas submetidas a esse tipo de carregamento. Ademais, a forma de preencher essa lacuna é vide a retirada do Delta de Dirac, conforme realizado, mediante manipulação física e matemática, da equação (3.61) à equação (3.84). Intrinsecamente, aplicou-se a solução para a placa a isolada, sobre base elástica de Winkler e sobre base elástica de Pasternak, sendo variada as condições de apoio para simplesmente apoiada, engastada e livre.

Através da solução encontrada, tornou-se necessário validar os resultados e pode-se observar conforme os gráficos das figuras (Figura 4.3, Figura 4.5, Figura 4.7, Figura 4.9, Figura 4.11, Figura 4.13) que os erros mostram-se bastante satisfatórios, sendo grande parte deles menor que 1%. Tornando-se assim válida a solução proposta.

Validada a solução, foi possível comprovar, mediante o gráfico da Figura 4.14, que a solução de Levy converge mais rápido do que a solução via método de Navier. Sendo assim, aprimorando a afirmativa que o método de Levy é mais eficiente que o método de Navier, tendo em vista a abrangência de situações, menor consumo de memória de cálculo e velocidade de convergência dos métodos.

Notou-se conforme os resultados obtidos nos gráficos (Figura 4.15, Figura 4.16, Figura 4.17, Figura 4.18, Figura 4.19) que para a relação largura vão de $1/2$ a placa apresenta os resultados satisfatórios, sendo o erro menor que 1%. Indo então em concordância com o parâmetro λ , razão entre vão maior e vão menor, apresentado por (CARVALHO, 2014) no qual afirma que a partir de λ igual a 2, a laje já pode ser aproximada a uma viga e consequentemente armada unidirecionalmente.

Para os trabalhos futuros, sugere-se o desenvolvimento da solução para placas delgadas submetidas a outras variações de carregamento distribuído em linha, como parcial e não uniforme. Além do desenvolvimento da solução para outras teorias de placas como a de Mindlin (1951), Reissner (1945) e Reddy (1984) que abordam placas espessas. Ademais a comparação entre a solução apresentada e a superposição dos métodos proposta por Boris Koyalovic (1867-1941, apud Carvalho, 2020).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALTOQI SUPORT (2022). **Análise placas pela teoria da elasticidade**. Disponível em: https://www.google.com/search?q=teoria+das+placas+alto+qi&oq=teoria+das+placas+alto+qi&gs_lcrp=EgZjaHJvbWUyBggAEEUYOTIHCAEQIRigATIHCAIQIRigATIHCAEQIRigAdIBCDU4MDlqMGo5qAIAAsAIB&sourceid=chrome&ie=UTF-8. Acesso em: 27 mar. 2024.

CARVALHO, M.S. (2020). **Uma revisão dos métodos clássicos de análise de placas**. TCC (Bacharelado em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Sergipe – São Cristóvão - SE
https://ri.ufs.br/bitstream/riufs/15845/2/Matheus_Santos_Carvalho.pdf.

CIMENTO ITAMBE (2023). **Curso sobre pavimento de concreto: ensina métodos a profissionais da área**. Disponível em: <https://www.cimentoitambe.com.br/massa-cinzenta/curso-sobre-pavimento-de-concretoensina-metodos-e-conceitos-a-profissionais-da-area/>. Acesso em: 24 mar. 2024.

KIRCHHOFF, G. (1850). **Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe**. 40. ed. Journal für die reine und Angewandte Mathematik (Crelles Journal). 51-88 p. Disponível em: <https://www.semanticscholar.org/paper/%C3%9Cber-das-Gleichgewicht-und-die-Bewegung-einer-Scheibe-Germain/1f80a1fb6c32f9d222c20af15e6e513fa55bc5b8>. Acesso em: 8 abr. 2024.

MACIEL, W. G. M. (2020). **O método dos elementos de contorno aplicado às teorias de placas de Reissner, Mindlin e Reddy**. Tese (Doutorado) Programa de Pós-graduação de Engenharia Civil e Ambiental- Universidade Federal da Paraíba. DOI <https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/123456789/20230>. Disponível em: https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/123456789/20230?locale=pt_BR. Acesso em: 24 mar. 2024.

MARTINELLI, D. A. O. (2023). *et al.* **Placas elásticas: Equações gerais, placas retangulares, conceituação teórica, Método das diferenças finitas e MEF**. São Carlos. 117 p. DOI <http://repositorio.eesc.usp.br/server/api/core/bitstreams/fda8aa93-717a-41bc-a9d5-afba698225d1/content>. Disponível em: <http://repositorio.eesc.usp.br/server/api/core/bitstreams/fda8aa93-717a-41bc-a9d5-afba698225d1/content>. Acesso em: 24 mar. 2024.

MINDLIN, R. D. (1951). **Influence of rotatory inertia and shear on flexural motion of isotropic, elastic plates**. Appl. Mech. 31-38 p.

REDDY, J. N. (1984). **A refined nonlinear theory of plates with transverse shear deformation.**: International Journal of Solids Structures. 881– 896 p.

REDDY, J. N. (1993). **An introduction to the finite element method**. McGraw Hill. 684 p.

REDDY, J. N. (2007). **Theory and analysis of elastic plates and shells**. CRC Press.

SANTANA, V. C. (2019). **Análise estrutural de placas retangulares submetidas a carregamentos estáticos trapezoidais**. TCC (Bacharelado em Engenharia Civil) – Universidade Federal Rural de Pernambuco – Cabo de Santo Agostinho - PE. Disponível em: https://repository.ufrpe.br/bitstream/123456789/1622/1/tcc_vitorcarneirosantana.pdf.

TIMOSHENKO, P; WOINOWSKY, K. (1959). **Theory of plates and shells**. 2. ed. Singapura: McGraw Hill. 594 p. Theory of plates and shells.

ZAP IMOVEIS. (2015). **Lajes: Tipos de lajes usadas na construção de casas**. Disponível em: <https://www.zapimoveis.com.br/blog/casa-e-decoracao/reforma/veja-quais-os-tipos-de-lajes-podem-ser-usados-na-construcao-de-casas/>. Acesso em: 24 mar. 2024.

VIVA DECORA. (2022). **O Que é Radier? Conheça as Vantagens, Desvantagens e Quando Usar**. Disponível em: <https://www.vivadecora.com.br/pro/radier/>. Acesso em: 24 mar. 2024.