

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

**ANÁLISE DA MATRIZ TANGENTE DE TRELIÇAS PLANAS: UMA
VERIFICAÇÃO DA CONTRIBUIÇÃO DO COMPONENTE $[\Delta K_0]$**

RAFAELLA AUGUSTA DETOGNI SCHMIT

JOÃO PESSOA – PB

2023

RAFAELLA AUGUSTA DETOGNI SCHMIT

**ANÁLISE DA MATRIZ TANGENTE DE TRELIÇAS PLANAS: UMA
VERIFICAÇÃO DA CONTRIBUIÇÃO DO COMPONENTE $[\Delta K_0]$**

Trabalho de Conclusão de Curso, na área de estruturas, submetido à Coordenação do Curso de Engenharia Civil da Universidade Federal da Paraíba, como um dos requisitos obrigatórios para obtenção do grau de Bacharel em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. José Márcilio Filgueiras Cruz

JOÃO PESSOA – PB

2023

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S355a Schmit, Rafaella Augusta Detogni.

Análise de matriz tangente de treliças planas: uma
verificação da contribuição do componente [?K0] /
Rafaella Augusta Detogni Schmit. - João Pessoa, 2023.
64 f. : il.

Orientação: José Márcilio Filgueiras Cruz.
Monografia (Graduação) - UFPB/CT.

1. Método matricial dos deslocamentos (MMD). 2. Não
linearidade geométrica. 3. Matriz tangente de treliça
plana. I. Cruz, José Márcilio Filgueiras. II. Título.

UFPB/BSCT

CDU 624(043.2)

FOLHA DE APROVAÇÃO

RAFAELLA AUGUSTA DETOGNI SCHMIT

ANÁLISE DA MATRIZ TANGENTE DE TRELIÇAS PLANAS: UMA VERIFICAÇÃO DA CONTRIBUIÇÃO DO COMPONENTE $[\Delta K_0]$

Trabalho de Conclusão de Curso em 12/06/2023 perante a seguinte Comissão Julgadora:

José Marcílio Filgueiras Cruz

Prof. Dr. José Marcílio Filgueiras Cruz (Orientador)

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental do CT/UFPB

APROVADO

Situação

Enildo Tales Ferreira

Prof. Dr. Enildo Tales Ferreira (Membro)

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental do CT/UFPB

APROVADO

Situação

Carlos A. Taurino de Lucena

Prof. Dr. Carlos Antonio Taurino de Lucena (Membro)

Aposentado do Departamento de Engenharia Civil e Ambiental do CT/UFPB

APROVADA

Situação

Documento assinado digitalmente

gov.br

PABLO BRILHANTE DE SOUSA
Data: 13/06/2023 15:27:07-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Pablo Brilhante de Souza

Matrícula Siape: 1483214

Coordenador do Curso de Graduação em Engenharia Civil da UFPB

Dedico aos meus pais e minha irmã, pois gigante é a
dáviva de os ter somados a tamanho amor, desde o
início de minha existência.

AGRADECIMENTOS

Nada na vida se desenvolve só e igualmente o ser humano não é composto de uma só coisa. Assim, como em todas minhas orações diárias, agradeço primeiramente à Deus por tudo e todos que fazem parte da minha vida e, junto a mim, criam oportunidades de aprender, seja do que fazer ou não fazer. Obrigada Senhor por ouvir minhas preces, viabilizar caminhos e me ensinar na trajetória que tudo é no Seu tempo.

Obrigada por todos os momentos bons e ainda mais aos difíceis, pois com eles encontrei o poder da resiliência e a chance de evoluir de menina à mulher: forte, determinada, objetiva, focada e pronta para a luta, crendo que, não desistindo, estarei apta para vencer fazendo o meu melhor e desse modo chegarei aonde sonhar, assim como aqui estou.

Agradeço aos meus pais, Adroaldo Alaone Bruno Dalberto Schmit e Marlei Terezinha Detogni Schmit, por todo esforço e empenho batalhado para proporcionar a melhor educação possível e assim proporcionar o maior sonho da minha criança interior: ser Engenheira Civil pela Universidade Federal da Paraíba. Pela criação repleta de amor, carinho, valores essenciais, fé em Deus, na vida e em mim mesma. Grata por acreditarem no meu potencial quando nem eu mesma acredito, serem minha maior fonte de inspiração e razão de eu ser quem sou e fazer o que faço diariamente, por rezarem por mim, falarem tantas palavras bonitas e fazer o possível para ser – como diz o pai – “confiante, alegre e feliz sempre”.

À minha amada irmã, Emanuelle Francine Detogni Schmit, por de certo modo ser a razão da minha existência – afinal foi quem tanto pediu uma irmã aos meus pais e escolheu meu nome -, por ser meu espelho e maior exemplo de que com muito estudo e dedicação podemos abrir – ou construir – portas inimagináveis, que temos o poder de ultrapassar qualquer barreira e chegar onde bem entendermos, pois a única coisa que pode nos barrar é nossa mente. Nossa irmandade me dá forças para vencer cada dia e o orgulho de ser sua irmã mais nova me dá ânimo para crescer.

Ao meu namorado, Guilherme Vinícius Carneiro de Oliveira, por há 8 anos compartilhar a vida sendo meu fiel companheiro para todo e qualquer momento. Por quando eu estudava para o ENEM ter dado meu primeiro capacete e dito “Eu quero que você todos os dias coloque esse capacete, se olhe no espelho e diga eu quero, eu posso, eu consigo, eu vou passar e vou ser uma grande engenheira civil!”. Por ter me ensinado a trabalhar mais a autoconfiança, compreender todos os meus momentos e ultrapassá-los em conjunto com tamanho amor e dedicação a um futuro unido, leal e plenamente belo.

Aos pets: minhas cachorrinhas Pretah (*in memoriam*), Cacau e Pluma, meu gatinho Mimi e a cachorrinha da minha irmã, Melanie, que estudam diversas vezes comigo, garantem alegria diária, me acalmam e incentivam a aplicação do método pomodoro ao me chamar para jogar bolinha, fazer carinho, passear, dormir abraçadinha e receber mil “lambeijos”.

In memoriam, aos meus avós por parte de mãe, Irene Del’Sávio Detogni, Anacleto Detogni, e por parte de pai, Dorvalina Maria Dalberto Schmit e Lindolfo João Schmit, por serem as raízes genealógicas do pensamento e prática de onde quer que nasçamos e onde quer que cheguemos, não devemos desistir de nos tornar alguém melhor, não esquecer da importância daqueles que são nossa base e tratar a todos da maneira como nós mesmos gostaríamos de sê-lo. Especialmente ao vô “Creto”, desejo que do céu possa ver a sua neta cumprindo o legado de um carpinteiro, de seus filhos pintores e pedreiros, se concretizar à profissionalização completa no meio da construção civil. Obrigada por tanto amor, para mim é uma realização completa ser a primeira engenheira de toda linhagem!

Aos parentes Detogni e Schmit como um todo e aos da família de meu namorado, mas especialmente aos meus padrinhos Luciano Detogni e Tânia Detogni e meu sogro Doriedson Rodrigues de Oliveira, por também investirem e facilitarem meus estudos na crença de que sempre valeria a pena.

À minha psicóloga Josiany Melo di Pasce por colaborar tão profissional e significativamente com o meu crescimento e amadurecimento mental em diferentes fases da vida. Obrigada por tamanho impacto positivo!

Aos meus amigos desde a infância, Danilo Viana Borges, Thiago Filipe Soares da Rocha, Thais Letícia Cunha, Suanny Fabyne e Mariana Galvão por há mais de 10 anos sermos verdadeiros irmãos, vivermos de forma leve em conjunto, torcermos uns pelos outros e comprovarmos que nada no mundo compra a felicidade de ter as companhias certas e amizades verdadeiras ao lado.

Aos meus amigos de jornada acadêmica, Yasmin Lira, Matheus Thé, Rafael Brasileiro, Paulo Dutra, Daniella Pereira, Enilson Júnior, Kleiton Lopes, Ayza Nery, Mirela Pereira, Ingrid Sales e Eduarda Gabrielle por dividirem as dificuldades da rotina árdua de estudos do nosso meio, mas ao mesmo passo por tantas vezes terem tornado os meus dias mais felizes e com energia pelo Centro de Tecnologia.

Aos docentes do curso de Engenharia Civil da UFPB que compartilham tamanho conhecimento e dedicam seu tempo a verdadeiramente educar e viabilizar a formação de novos profissionais e concretização, muito além de construções, de sonhos. Agradeço especialmente ao meu orientador Prof. Dr. José Márcilio Filgueiras Cruz por em 2021 na última aula online

de Análise Estrutural II, em plena Pandemia de Covid-19, ter me dado um feedback positivo, reconhecido minha dedicação ao aprendizado e tornado esse o momento mais feliz e grato de toda minha graduação, sem sequer imaginar tamanha admiração que eu já tinha para com ele desde o primeiro contato com estruturas e como tal verbalização pudesse guiar tantas lágrimas de alegria e um largo sorriso em meu rosto.

Aos engenheiros(as), mestres e profissionais em geral da construção civil com quem pude trocar experiências, aprendizados e ascender na prática profissional, em específico aos integrantes das empresas Construtora Equilíbrio, Urban Incorporadora, Forte Protensão e RTG Engenharia. Especialmente nos nomes da engenharia Gustavo Belmont, Bruna Siegenes, Sóstenes Medeiros e Romildo Neto, ao metre de obras Jean Souza, ao armador Vinícius, carpinteiros Francisco e Luciano e aos operadores de protensão Alex e Ricardo.

A todos aqueles não citados, mas que querem meu bem e de minha família, desejo a recíproca em dobro.

Minha história e cada conquista não existiriam sem cada um de vocês. Gratidão!

“If you can dream, you can do it.”

(Walt Disney)

RESUMO

O papel primordial da Engenharia Civil é garantir, por meio da técnica, soluções de problemas reais da construção civil, com resultados que viabilizem a melhor proporção entre segurança, economia e eficiência. Nesse contexto, tendo em vista que na prática os modelos não são ideais, se encaixa a análise estrutural à luz da teoria da segunda ordem simplificada, considerando a linearidade reológica (respeito à lei de Hooke) e a não linearidade geométrica de estruturas reticuladas planas. Esse trabalho tem por enfoque a análise matricial de treliças planas pelo método dos deslocamentos (MMD), avaliando-se a contribuição ou não do termo de correção da rigidez devido às mudanças de coordenadas nodais $[\Delta K_0]$ como componente da matriz de rigidez tangente das barras $[k_t]$ e, conseqüentemente, da estrutura $[K_T]$. Para tal, foram revisadas literaturas e artigos científicos para embasamento e exemplificação da teoria, e organizado o raciocínio do seguinte modo: primeiramente foi desenvolvida uma revisão teórica acerca do método dos deslocamentos e sua formulação matricial considerando as análises estruturais de primeira e segunda ordem, apresentando a dedução das matrizes que regem tais sistemas para treliças planas e sua eficiência na verificação de estabilidade estrutural; posteriormente, embasado em exemplos de cálculo, foi feita uma avaliação da possibilidade de desconsideração do componente $[\Delta K_0]$ no cálculo da matriz tangente de treliças planas. Por fim, se apresentaram os resultados e conclusões.

Palavras-chave: Método matricial dos deslocamentos (MMD). Não linearidade geométrica. Matriz tangente de treliça plana.

ABSTRACT

The primary role of Civil Engineering is to guarantee, through technique, solutions to real problems in civil construction, with results that enable the best proportion between safety, economy and efficiency. In this context, considering that in practice the models are not ideal, the structural analysis fits in the light of the simplified second order theory, considering the rheological linearity (respect for Hooke's law) and the geometric non-linearity of plane reticulated structures. This work focuses on the matrix analysis of plane trusses by the displacement method (MMD), evaluating the contribution or not of the stiffness correction term due to changes in nodal coordinates $[\Delta K_0]$ as a component of the matrix of tangent stiffness of the bars $[k_t]$ and, consequently, of the structure $[K_T]$. To this end, literature and scientific articles were reviewed to support and exemplify the theory, and the reasoning was organized as follows: firstly, a theoretical review was developed about the method of displacements and its matrix formulation considering the structural analyzes of first and second order, presenting the deduction of the matrices that govern such systems for plane trusses and their efficiency in verifying structural stability; later, based on calculation examples, an evaluation was made of the possibility of disregarding the component $[\Delta K_0]$ in the calculation of the tangent matrix of plane trusses. Finally, the results and conclusions were presented.

Keywords: Matrix displacement method (MMD). Geometric non-linearity. Plane truss tangent array.

NOTAÇÕES

[] – Matriz

{ } – Matriz coluna ou vetor

[]* ou { }* - Matriz transposta

[T] – Matriz de rotação

A – Área da seção transversal

L – Comprimento inicial

L' – Comprimento após deformação

U – Energia de deformação

E – Módulo de elasticidade

N – Esforço normal

\bar{N} – Esforço normal associado a \bar{P}

ε – Deformação axial

ε' – Deformação axial de 1ª ordem

x, y – Coordenadas cartesianas (S.L.R.)

X, Y – Coordenadas cartesianas (S.G.R.)

u, v - Deslocamentos

$\text{sen}\alpha$ - Seno do ângulo α

$\text{cos}\alpha$ - Cosseno do ângulo α

P – Carga nodal

{P} – Matriz das cargas nodais da estrutura

p_x, p_y, m – Esforços nas extremidades das barras

{ p_i } , { p_{xi}, p_{yi}, m_i } – Matriz dos esforços da extremidade i de uma barra (S.L.R.)

{ p_i '} , { p_{xi}', p_{yi}', m_i' } – Matriz dos esforços da extremidade i de uma barra (S.G.R.)

\bar{P} – Carga nodal de referência

{ \bar{P} } – Matriz do carregamento nodal de referência

D – Deslocamento nodal associado ao respectivo P

{D} – Matriz dos deslocamentos nodais da estrutura

{ d_i } , { $\delta_{xi}, \delta_{yi}, \theta_i$ } – Matriz dos deslocamentos da extremidade i de uma barra (S.L.R.)

{ d_i '} , { $\delta_{xi}', \delta_{yi}', \theta_i'$ } – Matriz dos deslocamentos da extremidade i de uma barra (S.G.R.)

Ko – Rigidez linear de uma estrutura com único grau de liberdade

[k], [ko] – Matriz de rigidez linear de uma barra (S.L.R.)

$[k]'$, $[ko]$ – Matriz de rigidez linear de uma barra (S.G.R.)

$[Ko]$ – Matriz de rigidez linear da estrutura (S.G.R.)

Kg – Rigidez geométrica de uma estrutura com único grau de liberdade

$[kg]$ – Matriz de rigidez geométrica de uma barra (S.L.R.)

$[kg]'$ – Matriz de rigidez geométrica de uma barra (S.G.R.)

$[Kg]$ – Matriz de rigidez geométrica da estrutura (S.G.R.)

Kt – Rigidez tangente de uma estrutura com único grau de liberdade

$[Kt]$ – Matriz de rigidez tangente da estrutura (S.G.R.)

ΔKo – Termo de correção da rigidez da estrutura devido às mudanças de coordenadas nodais

$[\Delta ko]$ – Matriz de correção da rigidez de uma barra (S.L.R.)

$[\Delta ko]'$ – Matriz de correção da rigidez de uma barra (S.G.R.)

$[\Delta Ko]$ – Matriz de correção da rigidez da estrutura (S.G.R.)

Γ_i – Constantes a serem determinadas

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Treliças históricas: à esquerda para uso em coberturas e à direita para passagens.	21
Figura 2 – Eixos globais, cargas, reações de apoio e esforços internos normais de uma treliça plana.	22
Figura 3 – Composição geral de uma treliça plana.	22
Figura 4 – Composição estrutural em função do modelo de análise.	30
Figura 5 – Treliça plana com indicação de deslocabilidades e superposição de soluções básicas do método dos deslocamentos.	32
Figura 6 – Indicação de deslocabilidades e enumeração de apoios fictícios de um pórtico plano.	32
Figura 7 – Convenção de sinais adotada para quadros planos no método dos deslocamentos.	35
Figura 8 – Exemplo de enumeração de nós, barras, esforços nodais e deslocamentos em uma treliça plana, segundo o S.G.R adotado.	37
Figura 9 – Treliça plana, seu S.G.R. e detalhamento de sua barra (a), esforços e deslocamentos de extremidades quanto ao S.L.R.	39
Figura 10 – Diagramas força-deslocamento de uma barra entre $x = 0$ e $x = x_1$ (à esquerda o caso arbitrário e à direita o caso de um corpo conduzido pela lei de Hooke).	43
Figura 11 – Coordenadas generalizadas globais e locais de um modelo de treliça plana.	44
Figura 12 – Decomposição dos esforços da extremidade 1 da barra da treliça da Figura 9, partindo do seu S.L.R. ao S.G.R da estrutura.	44
Figura 13 – Carregamento de treliça plana abatida (a), sua deformação e deslocamento devido a incrementos $P+dP$ (b).	51
Figura 14 – Instabilidade por ponto limite em treliça plana abatida devido ao salto na trajetória $P-\theta$	57
Figura 15 – Instabilidade por flambagem em treliça plana não abatida devido à bifurcação na trajetória $P-\delta_xA$	57
Figura 16 – Treliça isostática com grandes deslocamentos e respectiva curva P-D (normalizada pelas razões P/EA e D/L).	58
Figura 17 – Exemplo de gráfico P-D e obtenção da curva P-D por procedimento iterativo de verificação de estabilidade direta.	59

Figura 18 – Exemplo de gráfico P-D e obtenção da curva P-D pelas aproximações 1' e 2' viabilizada por iterações do Método de Newton-Raphson aplicado à verificação de estabilidade indireta. 59

LISTA DE QUADROS

- Quadro 1** – Compreensão resumida do raciocínio para o método dos deslocamentos.....33
- Quadro 2** – Coordenadas nodais e incidência das barras da treliça plana da Figura 8.....37

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	17
2. JUSTIFICATIVA.....	18
3. OBJETIVOS.....	18
4. METODOLOGIA	19
5. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	20
5.1. ESTUDO DE TRELIÇAS – A ESTRUTURA À LUZ DA MECÂNICA GERAL, RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS E ANÁLISE ESTRUTURAL	20
5.1.1. Definição do elemento	20
5.1.2. Condições básicas da análise estrutural	23
5.1.3. A estaticidade de treliças planas e os graus de liberdade	24
5.1.4. O comportamento da estrutura – Lei de Hooke e as teorias da elasticidade 27	
5.2. UMA REVISÃO DO MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS.....	30
5.2.1. O método	30
5.2.2. Nós, convenção de sinais, numeração e os sistemas de referência local e global (S.L.R. e S.G.R.).....	34
5.3. O MÉTODO MATRICIAL DOS DESLOCAMENTOS – ANÁLISE DE 1ª ORDEM	37
5.3.1. A matriz de rigidez [k] de uma barra de treliça plana (S.L.R.)	40
5.3.2. A matriz de rotação [T] de uma barra de treliça plana.....	44
5.3.3. A matriz de rigidez [k]' de uma barra de treliça plana (S.G.R.)	45
5.3.4. A matriz de rigidez [K] de uma treliça plana (S.G.R.).....	46
5.4. O MÉTODO MATRICIAL DOS DESLOCAMENTOS – ANÁLISE DE 2ª ORDEM.....	49
5.4.1. Apresentação da rigidez tangente KT e suas componentes	50
5.4.2. A matriz de rigidez tangente [kt] de uma barra de treliça plana (S.L.R.) .	52
5.4.3. A matriz de rigidez tangente [kt]' de uma barra de treliça plana (S.G.R.)	54

5.4.4.	A matriz de rigidez tangente $[KT]$ de uma treliça plana (S.G.R.)	55
5.5.	ANÁLISE DE ESTABILIDADE ESTÁTICA DE ESTRUTURAS	56
5.6.	POSSIBILIDADE E INFLUÊNCIA DA DESCONSIDERAÇÃO DE $[\Delta K_0]$ NA COMPOSIÇÃO DA MATRIZ TANGENTE DE TRELIÇAS PLANAS $[KT]$	59
6.	CONSIDERAÇÕES FINAIS	61
7.	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	63

1. INTRODUÇÃO

O pontapé do entendimento das estruturas na Engenharia Civil se dá pelo conhecimento dos componentes abordados pela mecânica geral e pela mecânica dos sólidos na construção civil. São estudados principalmente os seguintes elementos: vigas, pórticos, grelhas e treliças – essa última material de estudo desse trabalho.

As treliças planas são estruturas reticuladas formadas por um conjunto de barras articuladas conectadas nas extremidades por meio de nós rotulados, os quais recebem atuação direta das cargas e, em teoria, são ideais e não transmitem flexão às barras, sendo o esforço axial o único existente para sua resistência.

Contudo, é fato que na prática a reação dos apoios das estruturas às cargas aplicadas não é ideal, demandando o conhecimento não somente da composição da estrutura, mas também das análises específicas do seu comportamento, a fim de nortear e viabilizar a concepção de um projeto estrutural que atenda as condições de segurança necessárias seu uso.

Cruz (1985) afirma que não basta saber o que são treliças, mas como se comportam sob os diferentes carregamentos e consequentes esforços atuantes em suas diversas seções, tanto no que diz respeito a aspectos matemáticos que descrevem o comportamento da estrutura (linearidade ou não linearidade geométrica), quanto a físicos que traduzem o comportamento do material (linearidade ou não linearidade reológica) e é nesse contexto que se encaixa o cálculo estrutural embasado em análises de primeira e segunda ordem.

A análise de segunda ordem é comentada por Martha (2010) como um método computacional de complexa resolução, porém Cruz (1985) viabiliza a introdução do raciocínio da marcha de cálculo ao tratar a análise não linear geométrica com a consideração da teoria linear simplificada. Do mesmo modo, esses autores e dos Santos (2022) mostram resoluções de situações problema de análises de segunda ordem em treliças planas com resultados satisfatórios quanto à estabilidade da estrutura e resistência a problemas como ponto limite e flambagem.

Somando-se esses cenários, é possível compreender a aplicação e obtenção da matriz tangente de treliças planas $[K_T]$ e avaliar a viabilidade de desconsideração do componente dos termos de carga do avanço da deformação $[\Delta K_0]$ por meio de resoluções de problemas práticos defendidos por Magalhães e Avancini, de Souza (2015) e de Paula e Proença (2015).

2. JUSTIFICATIVA

O avanço das tecnologias propicia o surgimento de empreendimentos com arquitetura inovadora e, conseqüentemente, a necessidade de estruturas formadas por peças esbeltas e/ou definidas a fim de se vencer grandes vãos.

Nesse tocante, se inserem as treliças, estruturas que desde marcos históricos são aplicadas, por exemplo, em grandes pontes e demais situações propostas a substituir vigas pelo comportamento somente com esforço axial atuando. Sua composição se dá por barras conectadas por rótulas, que na prática não são ideais iniciando assim a necessidade de abordagens de análise mais complexa da estrutura para que seja possível obter resultados mais próximos da realidade.

Do ponto de vista da análise estrutural, um dos principais feitos é a possibilidade de consideração de pequenos deslocamentos e obediência a lei de Hooke à grande maioria das estruturas por intermédio da análise de primeira ordem, a qual permite validar a hipótese do comportamento linear (esforços e deslocamentos variam linearmente às cargas de serviço aplicadas).

Porém, através do exposto anteriormente, por existirem estruturas que na prática sofrem fenômenos do comportamento não linear, é de suma importância o seu estudo. Assim se justifica a necessidade de complementar as resoluções de treliças planas a partir da resistência dos materiais (análise de primeira ordem) com as considerações dos efeitos de segunda ordem. Outrossim, ao se basear na teoria da segunda ordem simplificada, se considera que quanto à reologia há linearidade e resta somente sua verificação geométrica.

3. OBJETIVOS

O objetivo geral foi desenvolver comentários sobre a influência da não-linearidade geométrica em estruturas reticuladas planas, especificamente treliças, por intermédio do método matricial dos deslocamentos – MMD e aplicação da teoria de segunda ordem simplificada, apresentando a matriz de rigidez tangente $[K_T]$ e avaliando a possibilidade de desconsideração do componente $[\Delta K_0]$ na sua composição.

Já como objetivos específicos, foram elencados os seguintes:

- Detalhar e caracterizar o que são treliças planas;

- Tecer comentários a respeito da lei de Hooke e definir a diferença entre o comportamento estrutural linear e não linear;
- Apresentar o entendimento teórico do método dos deslocamentos;
- Desenvolver o raciocínio do método matricial dos deslocamentos (MMD) para treliças planas sob a luz das análises de primeira e segunda ordem;
- Aplicar a teoria de segunda ordem simplificada a treliças planas, apresentando a matriz de rigidez tangente $[K_T]$ e seus componentes (são eles: rigidez inicial $[K_0]$, termo de correção devido aos deslocamentos $[\Delta K_0]$ e rigidez geométrica $[K_G]$);
- Fazer registros sobre a verificação de estabilidade de treliças no que tange ponto limite e flambagem;
- Analisar a possibilidade e fidelizar a desconsideração do componente $[\Delta K_0]$ no cálculo da matriz tangente de treliças planas;
- Contribuir com o entendimento prático e simplificado da importância da análise estrutural para futuros engenheiros(as) calculistas projetistas.

4. METODOLOGIA

Tendo em vista que a obtenção do carregamento crítico e consequentes deslocamentos da estrutura, são de suma importância aos calculistas estruturais, foram estudadas treliças planas cujo equilíbrio de sua estrutura só é viabilizado pela posição deformada e, por isso, precisam ser analisadas levando em consideração a análise não linear e avaliados os problemas relacionados à instabilidade (ponto limite de equilíbrio e bifurcação).

Assim sendo, a metodologia abordada foi de revisão de livros e artigos científicos nos quais foram encontrados comentários e soluções de problemas envolvendo a análise matricial não linear de treliças planas por meio da aplicação do método dos deslocamentos, mais especificamente no que tange a composição da matriz de rigidez tangente e verificação de estabilidade por procedimentos computacionais e iterativos.

Visando facilitar a compreensão do conteúdo explorado, esse trabalho possui o conteúdo completo da revisão bibliográfica no capítulo 5, o qual foi subdividido em seis seções que apresentam os seguintes conteúdos: a primeira expõe a definição do elemento estrutural em estudo (treliças planas), as condições básicas para a análise estrutural e tece comentários sobre a estaticidade de treliças planas, seus graus de liberdade e comportamento da estrutura quanto

à lei de Hooke e as teorias da elasticidade; a segunda revisa o entendimento do método dos deslocamentos, mostrando também a convenção de sinais, numeração de componentes e os sistemas de referência abordados nos cálculos; a terceira e a quarta esclarecem, respectivamente, a formulação linear e não linear desse método; a quinta traz a análise de estabilidade e instabilidade do equilíbrio das estruturas quanto ao ponto limite e de flambagem; e a sexta avalia a contribuição – ou não – do componente $[\Delta K_0]$ na análise de segunda ordem simplificada de treliças planas por meio de exemplos de situações problema demonstrados pela literatura. Por fim, no capítulo 6, são apresentadas as considerações finais e os resultados desse estudo, seguido, no capítulo 7, pela lista de referências adotadas.

5. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

5.1. ESTUDO DE TRELIÇAS – A ESTRUTURA À LUZ DA MECÂNICA GERAL, RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS E ANÁLISE ESTRUTURAL

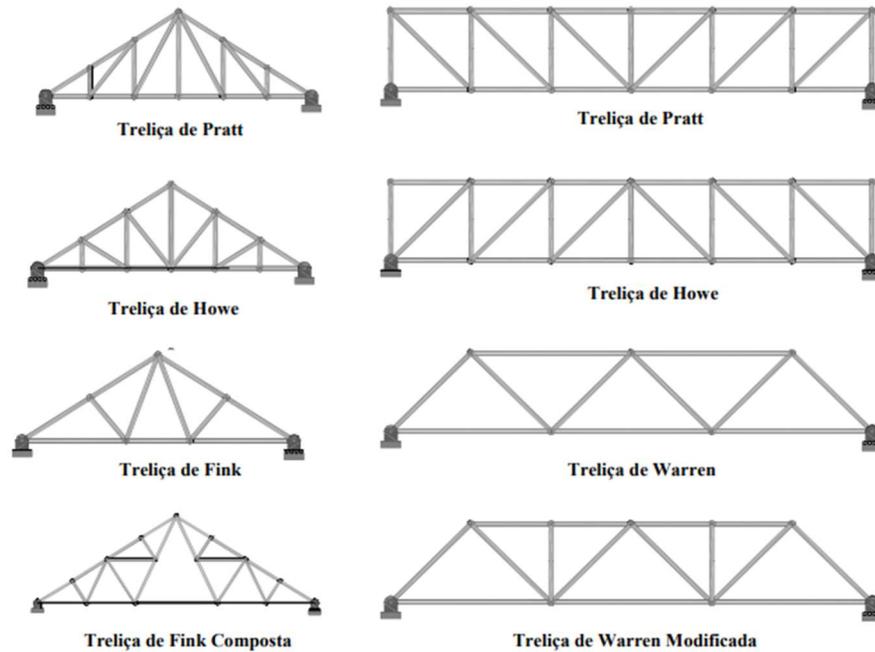
5.1.1. Definição do elemento

Estruturas reticuladas planas são elementos formados por barras e cargas situadas no mesmo plano XY, que, ao se comparar suas dimensões, uma delas é significativamente maior que as outras – normalmente trata-se da distinção entre a espessura versus a altura e o comprimento da peça.

A classificação dos tipos de modelos se dá pelo arranjo espacial do elemento e de suas cargas, complementado pela caracterização dos seus esforços internos, direções dos deslocamentos e rotações, tipos de apoios e simbologia (MARTHA, 2010).

Segundo Gomes (2016), dentre os diversos modelos estruturais existentes, as treliças são um dos principais tipos de estruturas da engenharia civil e marcam presença em imponentes locais desde a Revolução Industrial, em meados do século XIX. Sua composição é variável de acordo com a configuração dos painéis, materiais e a capacidade de resistir a elevados esforços e grandes vãos.

Figura 1 – Treliças históricas: à esquerda para uso em coberturas e à direita para passagens.



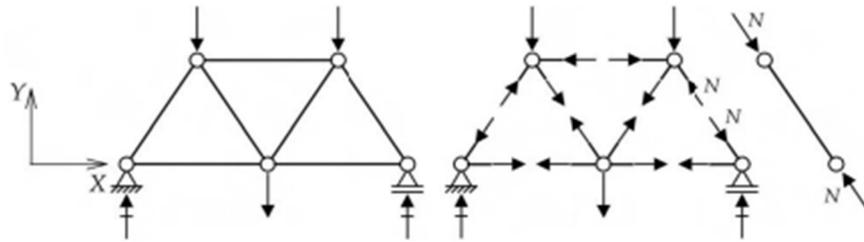
Fonte: Gomes (2016).

Conforme Filho (2014), as treliças planas “São estruturas formadas por barras retas articuladas (rotuladas) em suas extremidades, situadas num mesmo plano, com carga preferencialmente atuando nos nós [...] de modo a formar painéis triangulares.”. Já as treliças espaciais têm por diferencial a existência de barras além de um único plano.

O fato de as cargas serem consideradas como atuantes diretamente sobre os nós tem por consequência a apresentação apenas de esforços internos axiais de tração ou compressão. Pois, como no modelo ideal não existe aplicação de cargas ao longo das barras, os momentos fletores nas rótulas de cada barra isolada são nulos e, assim sendo, o esforço interno existente é, necessariamente, axial (MARTHA, 2010).

Na Figura 2, há à esquerda uma treliça formada por três painéis triangulares e cinco (05) nós, havendo em dois deles apoios de primeiro e segundo gênero, dispostos a garantir a estabilidade da estrutura perante a ação de cargas aplicadas, através da reação dos apoios de primeiro e segundo gêneros existentes. Com isso, à direita, é possível visualizar a transmissão dos esforços internos axiais e suas respectivas ações em cada uma das barras rotuladas.

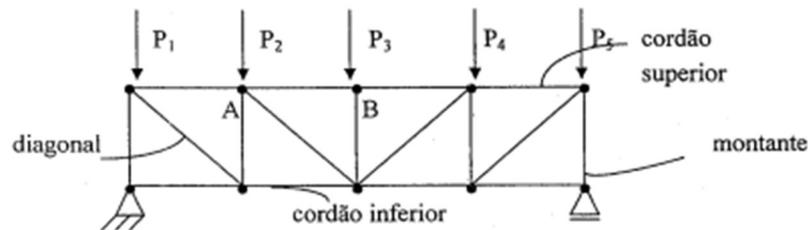
Figura 2 – Eixos globais, cargas, reações de apoio e esforços internos normais de uma treliça plana.



Fonte: West (1989 *apud* Martha, 2010).

Da composição geral, classifica-se as barras superiores como cordão superior, as inferiores como cordão inferior, as verticais como montante e as inclinadas como diagonais, como ilustrado na Figura 3.

Figura 3 – Composição geral de uma treliça plana.



Fonte: Filho (2014).

Destaca-se a existência de dois deslocamentos e duas cargas nodais possíveis, cada um na direção dos eixos x e y, dos quais se exclui a rotação e o momento fletor (CRUZ, 1985). Isso se dá, pois os apoios em treliças planas, como exposto nas figuras acima, são de 1º ou 2º gênero, já que as ligações são articuladas, fazendo com que a estrutura reaja somente com forças de apoio, as quais tem equilíbrio global garantido pelas equações dos seus nós (MARTHA, 2010).

É afirmado por dos Santos (2022) que pelo fato dos nós serem considerados ideais, não ocorre essa transmissão de esforços de flexão para as barras, porém, pontua, assim como Magalhães e Avancini, que na prática grande parte das treliças não possuem essas rótulas ideais, limitando a possibilidade de giro e introduzindo flexão nas barras.

Contudo, como em grande parte dos casos os carregamentos são nodais, os esforços de flexão que aparecem são pequenos ou desprezíveis quando comparados aos esforços normais, podendo a análise ser balizada somente quanto aos esforços axiais de tração ou compressão (dos SANTOS, 2022). Por outro lado, ao longo desse trabalho, será observado que tal limitação se aplica somente às estruturas em que a análise de primeira ordem já garante a estabilidade de seus componentes, não abrangendo os casos reais em sua totalidade.

5.1.2. Condições básicas da análise estrutural

A análise estrutural tem por finalidade a determinação dos esforços internos, das reações de apoio, deslocamentos, rotações, tensões e deformações da estrutura. Para isso é desenvolvido o cálculo estrutural, que tem por essência a compreensão das condições e hipóteses básicas das estruturas: condições de equilíbrio, de continuidade geométrica e da composição dos materiais.

Entende-se por condições de equilíbrio aquelas que garantem o equilíbrio estático de uma parte ou da estrutura por completo. Já por condições de compatibilidade entre deslocamentos e deformações, as condições geométricas que garantem a continuidade da estrutura (compatibilidade interna) e compatibilidade de seus vínculos externos (compatibilidade externa), mesmo após sua deformação (MARTHA, 2010). Por último, mas não menos importante, as condições da reologia estabelecem que as relações da lei constitutiva dos materiais são equações lineares que obedecem a teoria da elasticidade, tendo em vista que as estruturas trabalham em regime elástico-linear.

O comportamento elástico é aquele em que ao descarregar a estrutura não há deformação residual e linear aquele que apresenta proporcionalidade entre tensões e deformações. Porém, essa consideração exata só é possibilitada em análises de primeira ordem (TIMOSHENKO & GOODIER, 1980 *apud* MARTHA, 2010). Tal conteúdo será mais bem detalhado na seção 5.1.4. – O comportamento da estrutura – lei de Hooke e as teorias da elasticidade.

Para a determinação de solicitações internas de um conjunto de elementos estruturais quaisquer, segundo Cruz (1985), são avaliados os seguintes pontos:

- As equações de equilíbrio dos seus nós;
 - $\sum F_x = 0 \rightarrow$ somatório de forças na direção horizontal igual a zero;
 - $\sum F_y = 0 \rightarrow$ somatório de forças na direção vertical igual a zero;
 - $\sum M_o = 0 \rightarrow$ somatório de momentos em relação a um ponto O igual a zero.
- As equações de compatibilidade entre os deslocamentos nodais da estrutura e as extremidades das barras;
- As equações da reologia do material (leis constitutivas), as quais relacionam tensões aplicadas e deformações consequentes.

Os cenários acima elencados compõem a base dos métodos de análise estrutural. A partir da ordem de resolução das equações, firma-se, em geral, o desenvolvimento do método das

forças ou do método dos deslocamentos. O segundo está contido na metodologia do presente trabalho e terá sua descrição na seção 5.2. – Uma revisão do método dos deslocamentos.

Notadamente quanto à formulação e resolução das equações de equilíbrio de uma treliça, Filho (2014) e Gomes (2016), fixam que se aplica o desenvolvimento por intermédio de um dos dois métodos específicos: método dos nós ou de Cremona e método das seções ou de Ritter. Contudo, o detalhamento dessas resoluções não faz parte do escopo principal desse trabalho.

5.1.3. A estaticidade de treliças planas e os graus de liberdade

Segundo Martha (2010), as estruturas lineares reticuladas planas podem ser classificadas em hipostáticas, isostáticas e hiperestáticas. Essa classificação é definida da seguinte forma:

- Estrutura hipostática: Não possui estabilidade e, portanto, não tem número suficiente de vínculos (incógnitas) em relação às condições (equações) de equilíbrio;
- Estrutura isostática: Estaticamente determinada, é aquela em que as reações de apoio e esforços internos podem ser determinados somente avaliando as condições de equilíbrio, ou seja, o número de vínculos externos e internos (incógnitas) é igual ao número de condições (equações) de equilíbrio;
- Estrutura hiperestática: Estaticamente indeterminada, ou seja, tem vínculos externos ou internos (incógnitas) excedentes em relação ao número de condições (equações) de equilíbrio.

Tais definições físicas são contabilizadas pelo cálculo do grau de hiperestaticidade, também chamado de grau de indeterminação estática, o qual expõe a diferença entre o número de incógnitas e o número de equações de equilíbrio disponíveis no problema a ser desenvolvido.

Desse ponto de vista, por Filho (2014), determina-se:

$$N^{\circ} \text{ de incógnitas} = N^{\circ} \text{ de reações de apoio} + N^{\circ} \text{ de barras} \rightarrow N^{\circ} \text{ incógnitas} = NR + NB$$

$$N^{\circ} \text{ de equações de equilíbrio} = 2 \times N^{\circ} \text{ de nós} \rightarrow N^{\circ} \text{ de equações} = 2N$$

Tal que:

$$\text{Se } NR + NB < 2N \rightarrow \text{A treliça é hipoestática;}$$

$$\text{Se } NR + NB = 2N \rightarrow \text{A treliça é isostática;}$$

$$\text{Se } NR + NB > 2N \rightarrow \text{A treliça é hiperestática.}$$

Porém, como frisado por Martha (2010) e Gomes (2016), para os modelos isostáticos e hiperestáticos, apesar de o cálculo do grau de hiperestaticidade ser uma condição necessária para caracterização do elemento quanto à estabilidade, esse não é suficiente por si só. Isso se

dá pois em situações em que possa haver instabilidade (a exemplo de ponto limite e bifurcação), se faz indispensável avaliar a estrutura em três sentidos: estaticidade interior, estaticidade exterior e estaticidade global da estrutura.

Tendo “a” como número de incógnitas, “b” como número de barras e “n” como número de nós, Gomes (2016) define as três estaticidades:

- A estaticidade interior (h_i) se refere à composição de barras para a formação dos painéis da treliça e é calculada da seguinte forma:

$$h_i = b - (2n - 3)$$

Tal que:

Se $h_i < 0 \rightarrow$ Deficiência de barras \rightarrow A treliça é interiormente hipoestática;

Se $h_i = 0 \rightarrow$ Condição necessária, mas insuficiente para garantir a estabilidade da treliça;

Se $h_i > 0 \rightarrow$ Excesso de barras \rightarrow A treliça é hiperestática.

- A estaticidade exterior (h_e) verifica se os apoios do sistema estão colocados de modo a impedir movimentos de corpo rígido e restringir graus de liberdade. Calcula-se:

$$h_e = a - 3$$

Tal que:

Se $h_e < 0 \rightarrow$ A treliça é exteriormente hipoestática;

Se $h_e = 0 \rightarrow$ A treliça é exteriormente isostática;

Se $h_e > 0 \rightarrow$ A treliça é exteriormente hiperestática.

- A estaticidade global (h_g) é dada por:

$$h_g = a + b - 2n$$

Tal que:

Se $h_g < 0 \rightarrow$ A treliça é globalmente hipoestática;

Se $h_g = 0 \rightarrow$ A treliça é globalmente isostática;

Se $h_g > 0 \rightarrow$ A treliça é globalmente hiperestática.

Todavia, avaliada a configuração de seus painéis, pode-se distinguir o grau de hiperestaticidade para treliças planas comparando, como inicialmente, o número de incógnitas versus o número de equações de equilíbrio, complementado ao cálculo de sua estaticidade global, pois é considerado que o equilíbrio global é alcançado pelo equilíbrio individual dos seus nós. Visto que há duas equações de equilíbrio por nó e que as incógnitas do equilíbrio são a soma do esforço normal de cada barra às reações de apoio, adapta-se da formulação inicial (MARTHA, 2010):

$$g = (\text{n}^\circ \text{ de incógnitas do problema estático}) - (\text{n}^\circ \text{ de equações de equilíbrio})$$

Para a formulação em conformidade com o equilíbrio global:

$$g = [(n^\circ \text{ de componentes de reação de apoio}) + (n^\circ \text{ de barras})] - [(n^\circ \text{ de nós}) \times 2]$$

O método dos deslocamentos é aplicável tanto para estruturas isostáticas, quanto hiperestáticas, pois apesar de as estruturas isostáticas poderem ser resolvidas somente pela avaliação do seu equilíbrio e, assim, se encontrar mais rapidamente os resultados necessários, há possibilidade de complementar sua análise e estudo firmando ainda mais os valores encontrados, bem como a teoria exposta, ao se aplicar o método dos deslocamentos e análise de segunda ordem também.

Mas, de modo geral, isso se dá principalmente para estruturas hiperestáticas, pois é guiado o seguinte raciocínio:

“Para determinar os esforços internos e reações de apoio em estruturas hiperestáticas, é necessário considerar, além das condições de equilíbrio, outras condições que, de forma simplista, levam em conta a “deformabilidade” do modelo estrutural.”
(MARTHA, 2010, p. 38).

Com base nas definições teóricas, fica claro que a abordagem do presente estudo se trata de treliças planas em que deve ser avaliado seu comportamento não somente quanto às condições de equilíbrio, mas também às de compatibilidade geométrica e reológica da estrutura. Nesse caso, será utilizado como artifício o método dos deslocamentos, mais especificamente a sua configuração para a análise matricial estrutural.

O grau de liberdade corresponde a quantidade de vetores $\{P\}$ ou $\{D\}$ que são linearmente independentes entre si, podendo ser respectivos a avaliação de um nó ou da estrutura (grau de liberdade global) como um todo. Ou seja, se refere ao quantitativo de deslocamentos e rotações nodais livres e/ou associados às restrições de apoio.

Dá-se nome de nó a todo e qualquer ponto interessante de estudo e pertencente à estrutura. Porém, para o cálculo estrutural matricial em questão, resume o raciocínio abordando como nó os pontos de encontro das barras ou extremidades das barras. Assim sendo, se nomeia grau de liberdade global ou deslocabilidade os valores de deslocamentos e rotações nos nós da estrutura. Para cada nó, o primeiro grau de liberdade a ser enumerado é o deslocamento horizontal, seguido do vertical e, por último, a rotação (MARTHA, 2010).

Portanto, é possível concluir, igualmente a Cruz e Cruz (2023) que em cada nó de uma treliça há no máximo dois graus de liberdade, a depender dos seus apoios que podem ser de 1º ou segundo gênero.

Como informação complementar, seguindo o raciocínio de Boldrini (1980) para a álgebra linear, em síntese a independência entre vetores é dada quando eles não são combinação linear de outros, tal que, para um espaço vetorial V com $v_1, \dots, v_n \in V$ e $\alpha_1 \dots \alpha_n$ constantes, a equação $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0 \rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.

5.1.4. O comportamento da estrutura – Lei de Hooke e as teorias da elasticidade

Ao se tratar de comportamento, diz-se que uma estrutura procede de modo linear ou não-linear. No primeiro caso, como a própria nomenclatura infere, esforços e deslocamentos variam linearmente às cargas aplicadas, já no segundo, há variedades geométricas (ligada à disposição estrutural) e/ou físicas (ligada à reologia do material).

Segundo Souza (2009 *apud* Magalhães e Avancini), a análise estrutural linear geométrica considera que o equilíbrio da estrutura se dá na posição inicial, ou seja, indeformada, já a análise estrutural não linear geométrica considera o equilíbrio na posição deslocada, ou seja, deformada.

Cunha (2017 *apud* Magalhães e Avancini) complementa a respeito da linearidade física do material versus essa não linearidade, no primeiro caso o modelo se comporta de modo elástico, ou seja, as tensões não ultrapassam o limite da resistência ao escoamento, já o segundo caso apresenta um comportamento plástico (não linear), durante o qual o material passa a deformar mesmo sem acréscimo de tensões.

Cruz (1985, p. 01), ainda na introdução da sua dissertação, resume os casos da seguinte forma:

“Quando a sua disposição é tal que possibilita o aparecimento de deslocamentos que tornam consideráveis as parcelas não-lineares das equações componentes de deformação-deslocamentos, observa-se a não-linearidade geométrica. Porém, se a reologia do material constituinte indica que a relação tensão e deformação é não linear, a situação é de não-linearidade física.”.

A lei constitutiva que relaciona as tensões normais e deformações normais é a conhecida lei de Hooke (BEER & JOHNSTON, 2006; FÉODOSIEV, 1977 *apud* MARTHA, 2010). Segundo Timoshenko (1969) a lei de Hooke estabelece que para materiais estruturais o alongamento das barras é diretamente proporcional à força aplicada e ao comprimento da barra,

e inversamente proporcional à área da seção transversal e ao módulo de elasticidade. Esse experimento se traduz na seguinte equação:

$$\delta = \frac{PL}{AE}$$

Onde:

$P = N$ = força normal aplicada [kN];

L = comprimento da barra [cm];

A = área da seção transversal da barra [cm²];

E = módulo de elasticidade = constante elástica do material [GPa];

δ = encurtamento ou alongamento (deslocamento) total da barra [cm].

Seguindo o raciocínio, quando admitido que a força aplicada se distribui continuamente ao longo da área da seção, pode ser avaliada a intensidade desse esforço, ao qual nomeamos como normal:

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

Esse esforço σ , força por unidade de área, é chamado de tensão [MPa]. Além disso, tem o alongamento da barra por unidade de comprimento (alongamento relativo), dado por:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L}$$

ε corresponde à deformação à tração (P positivo) ou compressão (P negativo) e é um número abstrato. A relação entre tensão e deformação é o módulo de elasticidade e com essa relação é estabelecido o limite linear dos materiais. Tal que:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \rightarrow \sigma = E \varepsilon$$

Substituindo em função da carga P :

$$P = E\varepsilon A \rightarrow P = \frac{EA\delta}{L}$$

Como, em cálculo, para tração P é positivo e compressão P é negativo, conseqüentemente, tensões e deformações de tração são positivas e de compressão são negativas (TIMOSHENKO, 1969).

Os elementos lineares geometricamente e com componentes reológicos que obedecem a lei de Hooke, ou seja, elásticos, são descritos como respeitosos à teoria da elasticidade linear exata. Contudo, visto que na realidade os materiais não são ideais, assim como a formalização e funcionamento dos seus apoios, como é o caso das rótulas de ligação entre extremidades das barras de treliças, se faz necessário avaliar os casos em que tal lei não se aplica por completo, os quais fazem parte da teoria da elasticidade não linear.

Os casos em que a hipótese da lei de Hooke linear não pode ser adotada (não-linearidade física) e/ou nem os deslocamentos desprezados (não-linearidade geométrica), o cronograma de resoluções se torna consideravelmente mais complexo. No entanto, há viés para se aplicar a teoria da elasticidade não linear simplificada para que sejam traçados decréscimos a tais dificuldades.

Assim sendo, são elencadas as seguintes descomplicações para os casos enquadrados na não linearidade geométrica (CRUZ, 1985):

- Abordar que a relação tensão versus deformação dos materiais comuns à engenharia civil (a exemplo o concreto) tende a ser linear sob carregamentos com combinações normais;
- As consequentes deformações são muito pequenas (em condições de carregamento com combinações normais);
- Os deslocamentos assumem valores muito pequenos (em condições de carregamento com combinações normais).

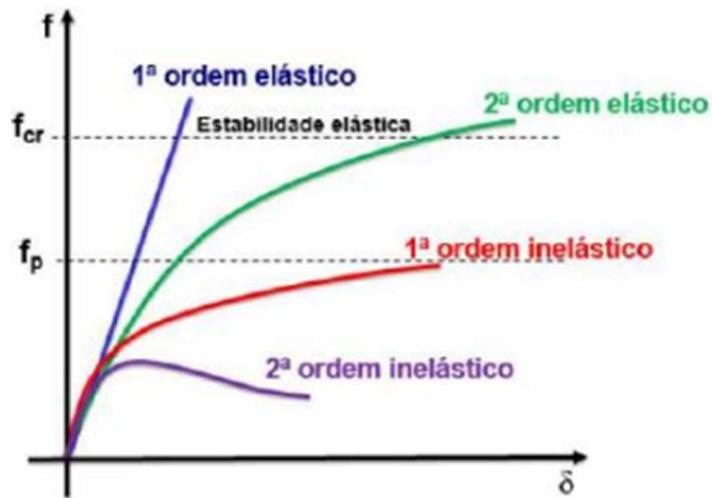
É sabido que, dentre os esforços, o levantado como mais crítico normalmente é o momento fletor, tendo em vista que em seu conjunto há um efeito cortante. Com isso, dentre os deslocamentos, fica clara a necessidade de distinguir as contribuições das rotações para as estruturas reticuladas. Assim Cruz (1985) classifica:

- Teoria linear: Considera-se rotações θ muito pequenas, cuja ordem de grandeza é a das deformações ε ;
- Teoria da segunda ordem simplificada: Considera-se rotações pequenas θ , cuja ordem de grandeza é $\sqrt{|\varepsilon|}$;
- Teoria da segunda ordem exata: Considera-se rotações θ grandes.

Vale lembrar que estruturas que obedecem a teoria de elasticidade linear são aquelas em que a aplicação da análise estrutural de primeira ordem já garante o equilíbrio global da estrutura na posição indeformada. Por outro lado, as que não funcionam no modo idealizado, se enquadram na teoria de elasticidade não linear e, a depender das hipóteses da questão, são calculadas pela teoria da segunda ordem simplificada ou pela exata, as quais tem estabilidade garantida somente na posição deslocada, sendo necessário avaliar os três componentes: equilíbrio, compatibilidade e reologia.

Com isso, é possível distinguir quatro casos de enquadramento da estrutura quanto ao comportamento: 1ª ordem elástico, 1ª ordem inelástico, 2ª ordem elástico e 2ª ordem inelástico. Vide Figura 4.

Figura 4 – Composição estrutural em função do modelo de análise.



Fonte: Adaptado de Souza (2019 *apud* Magalhães e Avancini).

Frisa-se que nesse trabalho, são estudadas treliças planas lineares quanto à reologia, ou seja, obedecem a lei de Hooke (materiais elásticos), e não-lineares quanto ao funcionamento geométrico, mais especificamente as estruturas que têm sua estabilidade na posição deformada, enquadrando-se na 2ª ordem elástica.

5.2. UMA REVISÃO DO MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS

5.2.1. O método

A análise de uma estrutura hiperestática se dá por três grupos de condições: condições de equilíbrio, condições de compatibilidade entre deslocamentos e deformações, e condições impostas pelas leis constitutivas dos materiais (WHITE *et al.*, 1976 *apud* MARTHA, 2010). Para isso, existem dois métodos: o método das forças e o método dos deslocamentos. Esse segundo, material do presente trabalho, recebe tal nomenclatura, porque as incógnitas do sistema são as deslocabilidades, ou seja, os deslocamentos ou rotações.

Para a resolução com esse método, é considerada a seguinte ordem:

- 1º) Condições de compatibilidade entre os deslocamentos e deformações (continuidade interna e respeito aos vínculos externos);
- 2º) Condições impostas pela lei constitutiva (reologia) dos materiais (lei de Hooke);

3°) Condições de equilíbrio.

Tal metodologia se traduz como o inverso do método das forças, visto que se soma os casos básicos que satisfazem a compatibilidade da estrutura original, mas não o equilíbrio, para, posteriormente, restabelecer tais condições não supridas através da superposição dos efeitos de configurações deformadas conhecidas e tabeladas. O fato de as últimas equações consolidadas serem as de equilíbrio faz com que também se dê o nome de método do equilíbrio (WEST & GESCHWINDNER, 2002 *apud* MARTHA, 2010).

“O método dos deslocamentos tem como ideia básica determinar, dentro do conjunto de soluções em deslocamentos que satisfazem as condições de compatibilidade, qual solução faz com que as condições de equilíbrio também sejam satisfeitas.” (MARTHA, 2010, p. 92).

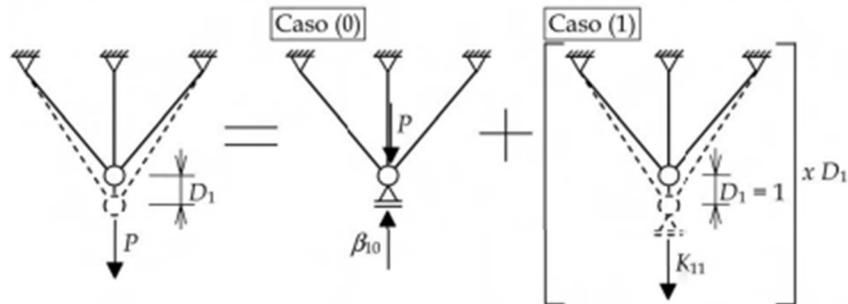
Ao se deparar com a estrutura original, desmembra-se em casos de configurações deformadas elementares (soluções básicas de estrutura cinematicamente determinada), tal que, o caso (0) contém o efeito da solicitação externa e nos demais, caso (1) ...caso (n), visualiza-se uma causa isoladamente.

Em cada, apenas uma componente deslocamento ou rotação nodal (deslocabilidade) é levada em conta e as demais são tomadas como nula, ou seja, o efeito da solicitação externa (carregamento) é isolado no caso (0), o efeito da deslocabilidade D_i é isolado no caso (1) e assim sucessivamente. Desse modo, ao somar os efeitos locais, obtém-se os efeitos globais (MARTHA, 2010).

Esse princípio da superposição dos efeitos prescreve que a superposição dos deslocamentos provocados pelas forças atuando isoladamente (casos das soluções básicas) se iguala aos deslocamentos provocados pelas forças que atuam ao mesmo tempo (caso real) (WHITE *et al.*, 1976; FELTON & NELSON, 1996; WEST & GESCHWINDNER, 2002 *apud* MARTHA, 2010).

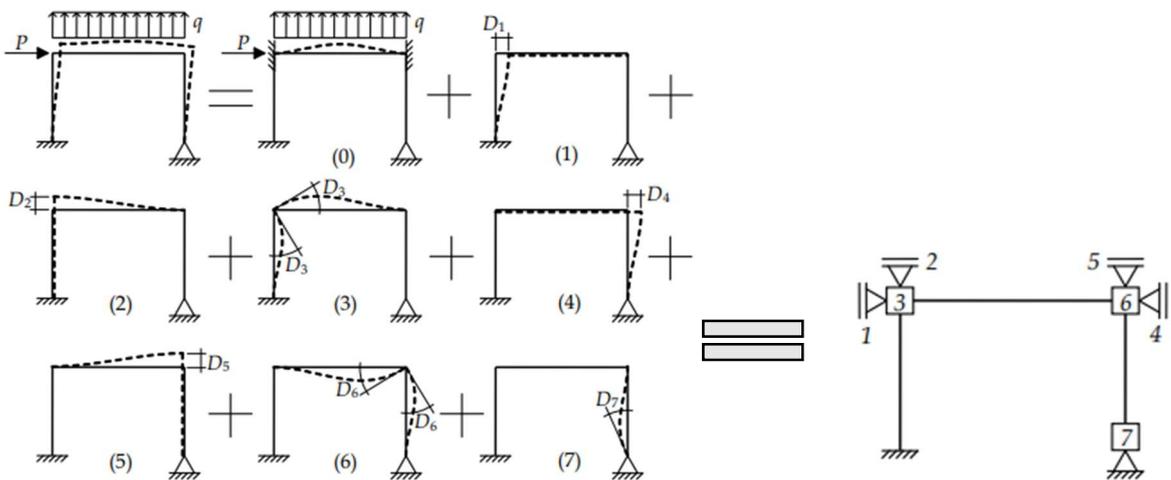
Tal detalhamento pode ser melhor compreendido com o desmembramento dos sistemas da Figura 5 e Figura 6. Na primeira imagem é vista uma treliça plana hipergeométrica que, por ser simétrica, não terá movimentação lateral do nó inferior. Já na segunda imagem, é mostrada a decomposição de um pórtico em casos conhecidos, validando ainda mais que o método das forças pode ser aplicado para diferentes tipos de estruturas reticuladas com comportamento reológico linear, não apenas às do assunto restrito desse trabalho (treliças planas).

Figura 5 – Treliça plana com indicação de deslocabilidades e superposição de soluções básicas do método dos deslocamentos.



Fonte: Martha (2010).

Figura 6 – Indicação de deslocabilidades e enumeração de apoios fictícios de um pórtico plano.



Fonte: Adaptado de Martha (2019).

A viabilidade do método pode ser defendida pela seguinte afirmação:

“[...] a configuração deformada final de uma estrutura reticulada pode ser parametrizada pelas componentes de deslocamentos e rotações dos nós da estrutura. Isso é possível porque pode-se determinar a configuração deformada de uma barra a partir dos deslocamentos e rotações dos nós extremos da barra e do seu carregamento.” (MARTHA, 2010, p. 300)

Por intermédio do raciocínio exposto, de modo geral, a marcha de cálculo para o método dos deslocamentos se traduz em definir as deslocabilidades (D_i) da estrutura, que serão as incógnitas do problema, e, concomitantemente, o sistema hipergeométrico (SH), pois o MD determina o valor que D_i deve assumir para recompor o equilíbrio da estrutura original sem o apoio fictício inserido no SH.

Como visto nas seções anteriores, as deslocabilidades correspondem a cada item de deslocamento ou rotação não restrita por apoio em um nó da estrutura na direção de um dos eixos globais, isto é, as incógnitas do problema que definem a configuração deformada da estrutura. Já o sistema hipergeométrico é o nome dado ao modelo que tem todas as deslocabilidades definidas, ou seja, à estrutura cinematicamente determinada, a partir da original acrescentada de apoios fictícios (vínculos) (MARTHA, 2010). Por exemplo, na Figura 6 há sete (07) deslocabilidades e o sistema hipergeométrico correspondente é o da imagem à direita da igualdade.

Vale lembrar que a enumeração dos apoios fictícios se dá igualmente à respectiva deslocabilidade associada a cada um e o papel primordial do SH é isolar os efeitos das deslocabilidades da estrutura em análise e, seja dada uma estrutura original, haverá somente um sistema hipergeométrico compatível a ela.

Em vista do exposto, é possível resumir os dizeres do método dos deslocamentos no seguinte quadro:

Quadro 1 – Compreensão resumida do raciocínio para o método dos deslocamentos.

Método dos deslocamentos
<u>Ideia básica:</u> Determinar, dentro do conjunto de soluções em deslocamentos que satisfazem as condições de compatibilidade, qual das soluções faz com que as condições de equilíbrio também sejam satisfeitas.
<u>Metodologia:</u> Superpor uma série de soluções cinematicamente determinadas (configurações deformadas conhecidas) que satisfazem as condições de compatibilidade da estrutura para obter uma solução final que também satisfaz as condições de equilíbrio.
<u>Incógnitas:</u> Deslocabilidades: componentes de deslocamentos e rotações nodais que definem a configuração deformada da estrutura.
<u>Número de incógnitas:</u> É o número de incógnitas excedentes das equações de compatibilidade, denominado grau de hipergeometria.
<u>Estrutura auxiliar utilizada nas soluções básicas:</u> Sistema hipergeométrico (SH): estrutura cinematicamente determinada (estrutura com configuração deformada conhecida) obtida da estrutura original pela adição dos vínculos necessários para impedir as deslocabilidades. Essa estrutura auxiliar viola condições de equilíbrio da estrutura original.
<u>Equações finais:</u> São equações de equilíbrio expressas em termos das deslocabilidades. Essas equações recompõem as condições de equilíbrio violadas nas soluções básicas.
<u>Termos de carga das equações finais:</u> Forças e momentos (reações) nos vínculos adicionados no SH provocados pela solicitação externa (carregamento).
<u>Coefficientes das equações finais:</u> Coefficientes de rigidez: forças e momentos nos vínculos adicionados no SH para impor configurações deformadas com deslocabilidades isoladas com valores unitários.

Fonte: Adaptado de Martha (2010).

5.2.2. Nós, convenção de sinais, numeração e os sistemas de referência local e global (S.L.R. e S.G.R.)

Tendo em vista que para execução do método dos deslocamentos são estudados os equilíbrios dos nós nas direções das deslocabilidades, convém definir os nós, a convenção de sinais adotada no método e o caminho para enumeração das deslocabilidades, para assim dar prosseguimento ao encaixe final com a superposição dos efeitos dos sistemas adequados.

Define-se como nó a ligação feita entre barras, que pode ser vinculada ou não, ou extremidades livres das barras ou qualquer ponto da seção com desejável estudo (CRUZ e CRUZ, 2023). Com isso, em resumo, Martha (2010) traz o raciocínio base da quantificação de deslocabilidades ao tipo de apoio existente – ou não - no nó analisado, tal que:

- Nó livre ou de ligação entre barras (não vinculado à apoio): Permite movimentação livre na horizontal, vertical e rotação, portanto haverá 3 deslocabilidades associadas;
- Apoio de 1° (primeiro) gênero: Permite um deslocamento e rotação, portanto haverá 2 deslocabilidades associadas;
- Apoio de 2° (segundo) gênero: Permite rotação, portanto haverá 1 deslocabilidade associada;
- Rótula: Permite rotação – similarmente ao comportamento de um apoio de 2° gênero -, portanto haverá 1 deslocabilidade associada;
- Engaste: Não permite deslocamentos, nem rotação, portanto não há deslocabilidade associada.

Quanto à orientação dos esforços, deslocamentos e rotações, segue a padronização da Figura 7.

Figura 7 – Convenção de sinais adotada para quadros planos no método dos deslocamentos.

<i>Deslocamentos horizontais</i>		
<i>Deslocamentos verticais</i>		
<i>Rotações</i>		
<i>Forças horizontais</i>		
<i>Forças verticais</i>		
<i>Momentos</i>		
<i>Esforços axiais em extremidades de barra</i>		
<i>Esforços cortantes em extremidades de barra</i>		
<i>Momentos fletores em extremidades de barra</i>		

Fonte: Martha, 2010.

A respeito da enumeração dos integrantes (nós, barras, deslocabilidades, forças aplicadas e reações de apoio) de uma estrutura plana, em tese é possível numerar como se bem entender, entretanto, como pontuado por Cruz e Cruz (2023) se opta, no caso dos nós, por abordar o critério que direciona a obtenção de uma matriz de rigidez $[K]$ mais compacta, ou seja, com elementos não nulos próximos da diagonal principal, facilitando a resolução do sistema $\{P\}=[K]\{D\}$.

É possível compreender mais facilmente da seguinte forma:

“Quando a maior diferença entre os números que representam dois nós consecutivos de uma estrutura for a menor possível, então a numeração considerada é a que tornará mais compacta a matriz de rigidez da estrutura.” (CRUZ e CRUZ, 2023)

Já quanto às barras, usualmente a enumeração se define com base na função ou, em geral, da esquerda para a direita e de cima para baixo. Contudo especificamente às treliças – material objeto do presente trabalho -, se parte do banzo inferior para o superior, em seguida para as diagonais e montantes.

Além do exposto, sobre a enumeração dos grupos esforços $\{P\}$ e deslocabilidades (deslocamentos) $\{D\}$ de cada um dos nós, inicia-se dando nome ao componente horizontal, ou

seja, paralelo ao eixo x, em seguida ao componente vertical, isto é, paralelo ao eixo y, e, por fim, ao componente atuante ao eixo z que se refere aos momentos fletores e rotações (MARTHA, 2010).

Para viabilizar cálculos, da física à engenharia civil, há uma primeira necessidade indispensável: a definição do referencial. Quanto à análise matricial de estruturas, tendo em vista a aplicação da superposição dos efeitos, são definidos dois sistemas: o sistema local de referência (S.L.R.) e o sistema global de referência (S.G.R.).

O primeiro (S.L.R.), também denominado sistema de referência da barra, tem o eixo x coincidente ao longitudinal da barra avaliada e o eixo y ortogonal a ele, de modo que o produto vetorial entre os versores que determinam a direção dos eixos e o sentido positivo de cada um seja positivo. Assim também se define a incidência das barras (maneira como ela se orienta na estrutura, participando de sua formação) (CRUZ e CRUZ, 2023).

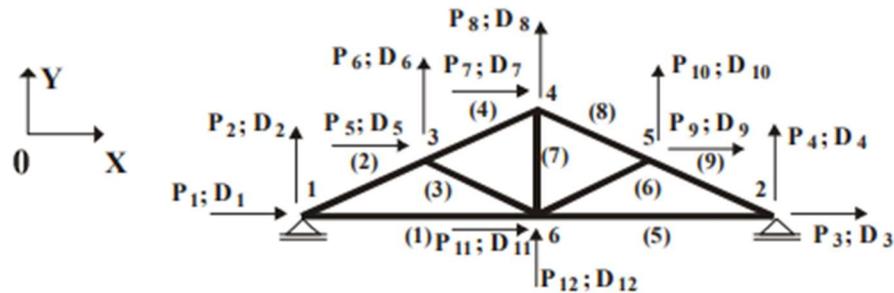
Já o segundo (S.G.R.), ou sistema de referência da estrutura, é que permite escrever as equações de compatibilidade e equilíbrio dos nós da estrutura a um mesmo referencial. Para isso, há premissas a serem garantidas na maior quantidade possível, são elas (CRUZ e CRUZ, 2023):

- A estrutura deve se situar no primeiro quadrante;
- Os eixos do sistema devem ser situados para permitir a maior quantidade de apoios com pelo menos uma das coordenadas nulas;
- A direção dos eixos do sistema deve fazer com que a soma das barras paralelas a um e ao outro eixo seja a maior possível.

Cruz e Cruz (2023) ressalta que os nós são representados por números inteiros, as barras por números entre parênteses e, pelo fato dos nós pertencerem à estrutura, suas coordenadas devem sempre ser referenciadas pelo S.G.R.

Visto que as treliças planas lineares possuem, em cada nó, a possibilidade de até quatro componentes totais, sendo, deles duas cargas nodais $\{P\}$ e dois deslocamentos $\{D\}$, com as informações dadas, é possível visualizar em resumo a Figura 8. Sobre as coordenadas nodais e incidência das barras dessa treliça, foi obtido o Quadro 2.

Figura 8 – Exemplo de enumeração de nós, barras, esforços nodais e deslocamentos em uma treliça plana, segundo o S.G.R adotado.



Fonte: Cruz e Cruz (2023).

Quadro 2 – Coordenadas nodais no S.G.R. e incidência das barras da treliça plana da Figura 8.

COORDENADAS NODAIS			INCIDÊNCIA DAS BARRAS		
NÓS	EIXO "X"	EIXO "Y"	BARRAS	1 OU I	2 OU II
1	0	0	(1)	Nó 1	Nó 6
2	$L(1) + L(5)$	0	(2)	Nó 1	Nó 3
3	$L(2) * \cos\alpha$	$L(2) * \text{sen}\alpha$	(3)	Nó 3	Nó 6
4	$L(1)$	$[L(2) + L(4)] * \text{sen}\alpha$	(4)	Nó 3	Nó 4
5	$L(1) + [L(6) * \cos\alpha]$	$L(6) * \text{sen}\alpha$	(5)	Nó 6	Nó 2
6	$L(1)$	0	(6)	Nó 6	Nó 5
			(7)	Nó 6	Nó 4
			(8)	Nó 4	Nó 5

Fonte: Elaborado pela autora (2023).

5.3. O MÉTODO MATRICIAL DOS DESLOCAMENTOS – ANÁLISE DE 1ª ORDEM

A análise de primeira ordem considera a geometria indeformada da estrutura para aplicação das condições de equilíbrio, tendo como base a hipótese de pequenos deslocamentos em relação às dimensões do elemento (WHITE *et al.*, 1976; WEST & GESCHWINDNER, 2002 *apud* MARTHA, 2010).

Ainda inerente à definição, White *et al.* (1976) *apud* Martha (2010) pontuam que a hipótese de pequenos deslocamentos, conjuntamente à linearidade dos materiais (obediência à lei de Hooke), são características primordiais para utilização do princípio da superposição dos efeitos, o qual, por conseguinte, é aplicado para nos métodos básicos (lê-se lineares) da análise de estruturas.

A fundamentação do método matricial dos deslocamentos – MMD se dá pela compatibilização entre os deslocamentos nodais e o equilíbrio estático dos nós de uma estrutura por meio da sua matriz de rigidez inicial – $[K]$, tal que $\{P\}=[K]\{D\}$. Onde $\{P\}$ é o vetor das cargas nodais da estrutura e $\{D\}$ é o vetor dos deslocamentos nodais (CRUZ, 1985).

Como introdução geral ao resultado desse capítulo, é possível afirmar que a determinação de $[K]$ se dá pela união de cada matriz de rigidez de barra $[k]'$ (matriz de rigidez inicial das barras referenciada à estrutura, ou seja, ao S.G.R.) e que essa, por sua vez, é obtida pela transformação da matriz de rigidez inicial de barra $[k]$ referenciada à barra (lê-se S.L.R.) para ela agora referenciada à estrutura (S.G.R.). Contudo, esse raciocínio é desenvolvido ao longo dos parágrafos seguintes de modo mais minucioso, detalhista e claro.

Para as estruturas em que é possível considerar pequenos deslocamentos, a análise de primeira ordem já sana o problema. Porém, as estruturas em que essa hipótese não se aplica, a determinação da matriz de rigidez inicial $[K]$ também se faz necessária, porque ela entra na resolução não linear (análise de segunda ordem) como a componentes $[K_0]$ da matriz de rigidez tangente da estrutura (ênfase da seção 5.4.).

Descrita sua importância, são expostos nessa seção 5.3 as observações e estudos necessários para a compreensão e definição da matriz de rigidez inicial $[K]$ de uma treliça plana.

De início, são válidos os seguintes lembretes guiados por Cruz (1985):

- A análise estrutural de primeira ordem admite que os deslocamentos e deformações são muito pequenos, sendo desconsiderados o deslocamento longitudinal das barras devido aos momentos fletores e esforços cortantes e o deslocamento lateral devido às cargas axiais;
- A análise estrutural de primeira ordem desconsidera a influência da não-linearidade geométrica e/ou da reologia do material durante seu estudo;
- A avaliação de primeira ordem considera o carregamento, esforços e deslocamentos sempre aplicado aos nós e, em casos opostos, se aplica o carregamento equivalente;
- Estabelecido o sistema global de referência, translações e cargas concentradas são positivas quando seguirem a orientação dos eixos de referência e a rotação e momento quando o sentido de giro for anti-horário.

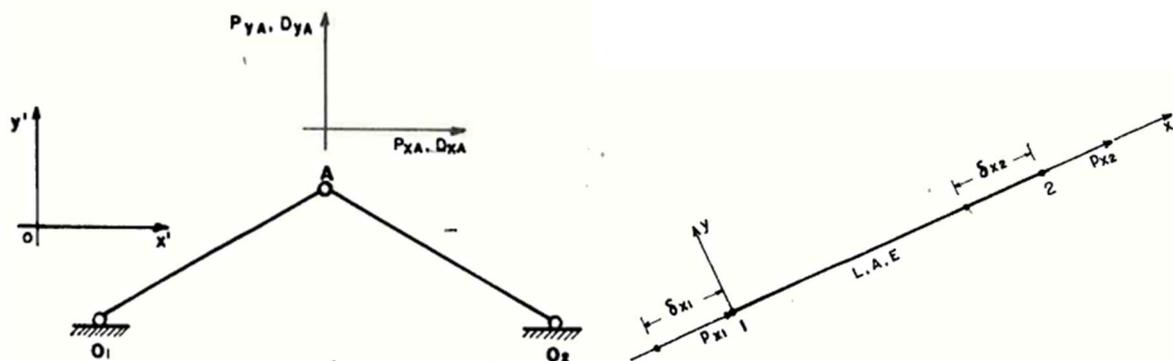
Como desenvolvido ao longo desse trabalho, a matriz coluna $\{P\}$ corresponde ao conjunto do carregamento da estrutura e a matriz coluna $\{D\}$ ao conjunto deslocamento. Por outro lado, mas de igual linha de pensamento, $\{p\}$ e $\{d\}$ tem mesma descrição, porém

referenciadas às barras. Logo, os dois primeiros e maiúsculos seguem o sistema global de referência (S.G.R) e os dois últimos e minúsculos seguem o sistema local de referência (S.L.R).

Adiciona-se aos dois casos principais acima citados, $\{p\}'$ e $\{d\}'$ que representam, respectivamente, os esforços e os deslocamentos de extremidades de barras, porém referenciados ao sistema global de referência. Os quais entrarão no processo de superposição dos efeitos durante a resolução do método matricial dos deslocamentos.

Por Cruz (1985), é sabido que as treliças planas são estruturas reticuladas formadas por barras biarticuladas que possuem carregamento nodal e, por conseguinte, transmitem apenas forças axiais, ou seja, há dois graus de liberdade máximos por nó e por meio disso – tendo como exemplo básico a treliça da Figura 9 - é possível conhecer a notação matricial de seus vetores carregamento e deslocamentos.

Figura 9 – Treliça plana, seu S.G.R. e detalhamento de sua barra (a), esforços e deslocamentos de extremidades quanto ao S.L.R.



Fonte: Adaptado de Cruz (1985).

Para nós da estrutura no sistema global de referência – S.G.R da treliça:

$$\{P\} = \{P_{xA}, P_{yA}, P_{xB}, P_{yB} \dots\}$$

$$\{D\} = \{\delta_{xA}, \delta_{yA}, \delta_{xB}, \delta_{yB} \dots\}$$

Para barras no sistema global de referência – S.G.R da treliça:

$$\{p_a\}' = \{p_{1a}, p_{2a} \dots\}' = \{p_{x1}, p_{y1}, p_{x2}, p_{y2} \dots\}'$$

$$\{d_a\}' = \{\delta_{1a}, \delta_{2a} \dots\}' = \{\delta_{x1}, \delta_{y1}, \delta_{x2}, \delta_{y2} \dots\}'$$

Para barras no sistema local de referência – S.L.R da treliça:

$$\{p_a\} = \{p_{1a}, p_{2a} \dots\} = \{p_{x1}, p_{y1}, p_{x2}, p_{y2} \dots\}$$

$$\{d_a\} = \{\delta_{1a}, \delta_{2a} \dots\} = \{\delta_{x1}, \delta_{y1}, \delta_{x2}, \delta_{y2} \dots\}$$

Onde os índices em letra minúscula indicam as barras, em letra maiúscula os nós, em números indicam os as extremidades das barras e x e y indicam o eixo associado ao elemento

– como introduzido na seção 5.2.2. Com isso, temos base para compreender e aplicar o mesmo esquema matricial em outros modelos de treliças também, assim como outras estruturas.

Ao se decidir criar a linha do tempo do método dos deslocamentos para estruturas com comportamento linear, têm-se: $[k] \rightarrow [k]' \rightarrow [K]$. De modo que inicialmente é obtida a matriz de rigidez inicial das barras no S.L.R, posteriormente ela no S.G.R. e, por fim, a matriz de rigidez da estrutura no S.G.R (CRUZ, 1985).

Cruz e Cruz (2023) elenca a marcha de cálculo para resolução do método matricial dos deslocamentos (MMD) em 7 etapas. Porém, tendo posse conjunta o estudo da sua dissertação (CRUZ, 1985) e aplicação a diferentes situações problemas, é possível elencar seis (06) passos que direcionam igualmente bem a solução de estruturas perante sua análise de primeira ordem. A essas etapas, dá-se os nomes listados abaixo, os quais são percorridos ao longo do presente trabalho.

Segue a marcha:

- 1º) Desmembrando a estrutura no sistema global de referência (S.G.R.);
- 2º) Destrinchando a composição do sistema local de referência (S.L.R.) de cada barra, coordenadas nodais e respectivas incidências;
- 3º) Definição do sistema matricial de cada barra referenciado ao S.L.R, ou seja, $\{p\}=[k]\{d\}$ de cada barra;
- 4º) Definição do sistema matricial de cada barra referenciado ao S.G.R, ou seja, $\{p\}'=[k]'\{d\}'$ de cada barra;
- 5º) Definição do sistema matricial da estrutura referenciado ao S.G.R. pela compatibilidade de deslocamentos, ou seja, $\{P\}=[K]\{D\}$;
- 6º) Resolução do sistema, encontro dos deslocamentos e, conseqüentemente, das reações de apoio.

Lembra-se que toda dedução do método matricial dos deslocamentos abordada nesse estudo de primeira ordem se dá com base no exemplo de treliça plana utilizado por Cruz (1985) ilustrado pela Figura 8.

5.3.1. A matriz de rigidez $[k]$ de uma barra de treliça plana (S.L.R.)

Martha (2010) explica que a matriz de rigidez inicial ou matriz de rigidez local $[k]$ tem como integrantes os coeficientes de rigidez locais k_{ij} , os quais são soluções fundamentais para

a análise pelo método dos deslocamentos e o caminho para obtenção dos coeficientes da matriz [K]. Segundo Cruz (1985) [k] é quadrada, simétrica e de dimensão 4 (quatro).

É possível obter a matriz de rigidez inicial [k] de uma barra de treliça plana referenciada ao sistema local de referência por dois caminhos: pelas equações força-deslocamento ou pela equação da energia de deformação (CRUZ, 1985). Todavia, independentemente do caminho escolhido, a solução de cada problema é dada ao encontrar os valores das deslocabilidades existentes para que cada nó fique em equilíbrio completo com a resolução do sistema final $\{P\}=[K]\{D\}$.

Assim sendo, as seções 5.3.1.1 e 5.3.1.2 abaixo apresentam o caminho de obtenção da matriz [k] de barra de treliça plana, respectivamente, através das equações força-deslocamento e por meio da equação da energia de deformação.

Adianta-se que, como será visto a seguir, os coeficientes de rigidez associados aos graus de liberdade transversais são nulos, pois a barra de treliça só tem rigidez na direção axial (MARTHA, 2010).

5.3.1.1. Equações força-deslocamento como pontos de partida

O caminho detalhado a seguir tem como referência a autoria de Cruz (1985).

Tomando-se a Figura 9 como exemplo fundamental e abraçando a lei de Hooke (seção 2.1.4.) é fácil notar que:

$$p_{x_1} = -p_{x_2}$$

Igualmente ao baseado em Timoshenko na seção 2.1.4.:

$$P = \frac{EA\delta}{L}$$

Portanto e pela continuidade do nó A:

$$p_{x_1} = -p_{x_2} = \frac{EA(\delta_{x_1} - \delta_{x_2})}{L}$$

Matricialmente falando, sabido que $\{p\}=[k]\{d\}$:

$$\begin{bmatrix} p_{x_1} \\ p_{y_1} \\ p_{x_2} \\ p_{y_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & -EA/L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -EA/L & 0 & EA/L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{x_1} \\ \delta_{y_1} \\ \delta_{x_2} \\ \delta_{y_2} \end{bmatrix}$$

Então:

$$[k] = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & -EA/L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -EA/L & 0 & EA/L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5.3.1.2. Equação da energia de deformação como ponto de partida

É sabido dos estudos da física que o conceito de energia diz respeito a capacidade de um corpo produzir trabalho. Para a mecânica e resistência dos materiais, a energia de deformação representa a capacidade dos esforços internos realizarem trabalho em virtude do estado de deformação da estrutura, atingido por conta das solicitações externas. Beer e Johnston (1995) igualam essa energia ao trabalho realizado pelo aumento gradual de carga ao corpo. Em um corpo elástico isso fornece a capacidade da estrutura retornar à sua configuração indeformada inicial.

Segundo Beer e Johnston (1995), o trabalho de deformação de uma barra, realizado pela força P gradualmente aplicada gerando deformação é dado pela área do diagrama força-deslocamento entre $x = 0$ e $x = x_1$, (vide gráfico à esquerda na Figura 10) representado por:

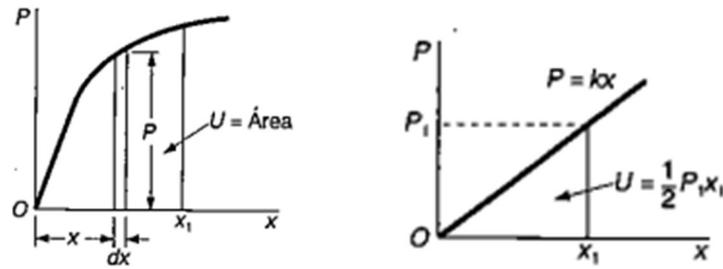
$$\text{Energia de deformação da barra} = U = \int_0^{x_1} P \cdot dx$$

Onde P é a força aplicada dada em Newtons e x representa o deslocamento em metros. Logo, a unidade de medida da energia de deformação, para o Sistema Internacional de Unidades (SI) é $\text{Nm} = \text{J}$ (joule).

É possível prolongar a situação lembrando que no caso da deformação ser linear e elástica (como de fato é no caso de análise de primeira ordem), o diagrama força-deslocamento para a situação arbitrária para uma linha reta de equação $P=kx$, tal que k é uma constante envolvida na linearização da questão (vide gráfico à direita na Figura 10).

Como exposto na seção 5.1.4 balizada por Timoshenko (1969) $P = \frac{EA\delta}{L}$. Visto que x em $P=kx$ e δ em $P = \frac{EA\delta}{L}$ tem mesmo significado, ou seja, contabilizam o deslocamento do nó da barra estudada, fica claro que a constante $k = \frac{EA}{L}$.

Figura 10 – Diagramas força-deslocamento de uma barra entre $x = 0$ e $x = x_1$ (à esquerda o caso arbitrário e à direita o caso de um corpo conduzido pela lei de Hooke).



Fonte: Adaptado de Beer e Johnston (1995).

Com isso, é possível continuar:

$$U = \int_0^{x_1} kx \cdot dx$$

$$U = \frac{kx_1^2}{2}$$

$$U = \frac{EA}{2L} x_1^2$$

Relembrando a treliça da Figura 9, como ambos os apoios são engastados, temos como necessidade de continuidade o nó A, extremidade comum a ambas as barras. Portanto:

$$x_1 = (\delta_{x_1} - \delta_{x_2})$$

$$x_1^2 = (\delta_{x_1} - \delta_{x_2})^2$$

$$x_1^2 = (\delta_{x_1}^2 - 2\delta_{x_1}\delta_{x_2} + \delta_{x_2}^2)$$

$$U = \frac{EA}{2L} (\delta_{x_1}^2 - 2\delta_{x_1}\delta_{x_2} + \delta_{x_2}^2)$$

Para a análise estrutural k corresponde ao coeficiente de rigidez da barra e, matricialmente falando, é a matriz de rigidez inicial $[k]$. Assim, passando $U = \frac{EA}{2L} (\delta_{x_1}^2 - 2\delta_{x_1}\delta_{x_2} + \delta_{x_2}^2)$ para a forma matricial, igualmente ao declarado por Cruz (1985):

$$U = 1/2 \{ \delta_{x_1}, \delta_{y_1}, \delta_{x_2}, \delta_{y_2} \} \begin{bmatrix} EA/L & 0 & -EA/L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -EA/L & 0 & EA/L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{x_1} \\ \delta_{y_1} \\ \delta_{x_2} \\ \delta_{y_2} \end{bmatrix}$$

$$U = 1/2 \{d\} * [k] \{d\}$$

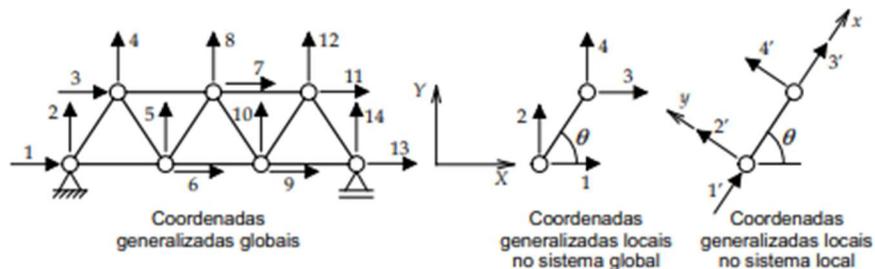
Logo, $[k]$ é deduzida como:

$$[k] = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & -EA/L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -EA/L & 0 & EA/L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5.3.2. A matriz de rotação [T] de uma barra de treliça plana

A matriz de rotação [T] tem o papel de transcrever a matriz de rigidez da barra do sistema local para o sistema global de referência – ou vice-versa - e leva esse nome por, justamente, fazer a rotação de um sistema para o outro. A Figura 11 proporciona a visualização dessa teoria.

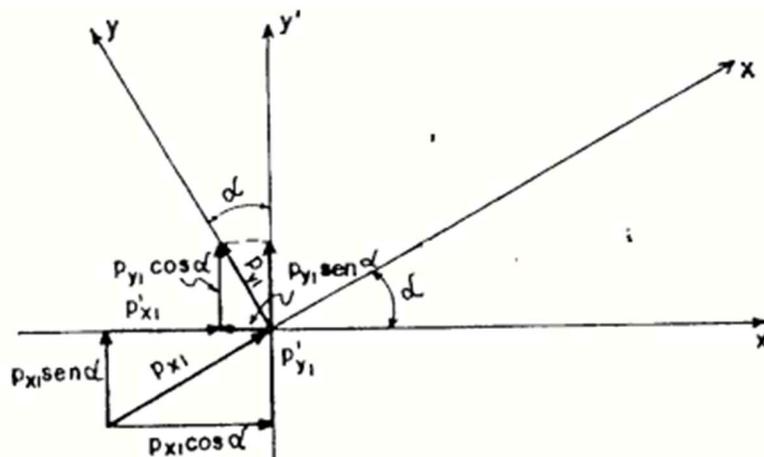
Figura 11 – Coordenadas generalizadas globais e locais de um modelo de treliça plana.



Fonte: Martha (2010).

Mais especificamente para a treliça plana da Figura 9, chamando de α (alfa) o ângulo entre o eixo x do sistema global e a barra, é viável decompor os vetores força e deslocamento das extremidades de seus nós, tanto quanto ao sistema local de referência (S.L.R.), quanto ao sistema global de referência (S.G.R.). A Figura 12 proporciona a visualização dessa teoria para a extremidade 1 (um). Logo abaixo e analogamente também para a extremidade 2 (dois) da mesma barra (a), são descritas as notações algébricas e matriciais do caso.

Figura 12 – Decomposição dos esforços da extremidade 1 da barra da treliça da Figura 9, partindo do seu S.L.R. ao S.G.R. da estrutura.



Fonte: Cruz (1985).

Para a finalidade desejada, sendo Cruz (1985) a referência, escreve-se:

$$p'_{x1} = p_{x1} \cos\alpha - p_{y1} \operatorname{sen}\alpha$$

$$p'_{y1} = p_{x1} \operatorname{sen}\alpha - p_{y1} \cos\alpha$$

$$p'_{x2} = p_{x2} \cos\alpha - p_{y2} \operatorname{sen}\alpha$$

$$p'_{y2} = p_{x2} \operatorname{sen}\alpha - p_{y2} \cos\alpha$$

Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} p'_{x1} \\ p'_{y1} \\ p'_{x2} \\ p'_{y2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{x1} \\ p_{y1} \\ p_{x2} \\ p_{y2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \delta'_{x1} \\ \delta'_{y1} \\ \delta'_{x2} \\ \delta'_{y2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{x1} \\ \delta_{y1} \\ \delta_{x2} \\ \delta_{y2} \end{bmatrix}$$

Chamando de [T] a matriz que viabiliza essas igualdades, então:

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Memorando-se o aprendido na seção 5.2.2, fica clara a bonança de anteriormente compreender corretamente acerca do conteúdo coordenadas nodais e incidência de barras, visto que é diretamente relacionado ao procedimento de obtenção da matriz de rotação de estruturas, apresentada nessa seção para o caso das treliças planas.

5.3.3. A matriz de rigidez [k]' de uma barra de treliça plana (S.G.R.)

De posse da matriz de rigidez das barras segundo o sistema local de referência e a matriz de rotação de treliças planas, é conveniente agora a escrita da matriz de rigidez das barras pelo sistema global de referência da estrutura. A marcha aqui descrita tem como luz o estudo de Cruz (1985).

Sabe-se que $\{p\} = [k]\{d\}$, portanto, em conformidade, $\{p\}' = [k]'\{d\}'$. Além disso, na seção anterior (5.3.2.) ficou claro que $\{p\}' = [T]\{p\}$ e $\{d\}' = [T]\{d\}$, similarmemente $\{p\} = [T]^{-1}\{p\}'$ e $\{d\} = [T]^{-1}\{d\}'$. Assim sendo, faz-se as substituições plausíveis:

$$\{p\} = [k]\{d\}$$

$$[T]^* \{p\}' = [k][T]^* \{d\}'$$

Portanto:

$$\{p\}' = [T] [k][T]^* \{d\}'$$

Visto novamente que $\{p\}' = [k]' \{d\}'$:

$$[k]' = [T] [k][T]^*$$

$$[k]' = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\alpha & 0 & 0 \\ \text{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & -\text{sen}\alpha \\ 0 & 0 & \text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} EA/L & 0 & -EA/L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -EA/L & 0 & EA/L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \cos\alpha & \text{sen}\alpha & 0 & 0 \\ -\text{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \text{sen}\alpha \\ 0 & 0 & -\text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Onde $[T]^*$ é a matriz transposta de $[T]$, que é igual a $[T]^{-1}$.

Então:

$$[k]' = \begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \text{sen}\alpha\cos\alpha & -\cos^2\alpha & -\text{sen}\alpha\cos\alpha \\ \text{sen}\alpha\cos\alpha & \text{sen}^2\alpha & -\text{sen}\alpha\cos\alpha & -\text{sen}^2\alpha \\ -\cos^2\alpha & -\text{sen}\alpha\cos\alpha & \cos^2\alpha & \text{sen}\alpha\cos\alpha \\ -\text{sen}\alpha\cos\alpha & -\text{sen}^2\alpha & \text{sen}\alpha\cos\alpha & \text{sen}^2\alpha \end{bmatrix}$$

5.3.4. A matriz de rigidez $[K]$ de uma treliça plana (S.G.R.)

Segundo Martha (2010), os itens K_{ij} componentes da matriz de rigidez $[K]$ são definidos como coeficientes de rigidez global, ou seja, corresponde à força ou momento que deve atuar na direção da deslocabilidade D_i para manter a estrutura do sistema hipergeométrico (SH) em equilíbrio quando é imposta uma configuração deformada onde $D_j = 1$ e as demais deslocabilidades são nulas. Sua unidade de medida é a unidade de força ou momento (a depender de sua característica) dividida pela unidade da deslocabilidade em questão.

Contudo, de acordo com o material das seções 5.3.1. à 5.3.3. é nítido que quando abordada a notação matricial para resolução de problemas estruturais – metodologia de programação e resolução dos softwares de cálculo – a definição detalhada do sistema hipergeométrico da estrutura é dispensável, primeiramente, porque muitas vezes a deformação não é fielmente conhecida, secundamente, pois o primordial é conhecer os graus de liberdade dos nós a serem avaliados.

Cruz (1985) define a rigidez da estrutura corresponde ao encontro do centro do método dos deslocamentos. Descrita a matriz de rigidez de cada uma das barras da estrutura no S.G.R.,

usando as condições de equilíbrio dos nós e compatibilidade de deslocamentos entre nós e extremidades das barras, Cruz e Cruz (2023) declara a matriz de rigidez da estrutura de treliças planas por dois modos: o procedimento formal e o procedimento prático. Nesse trabalho será detalhado o segundo.

$[k]'_{(i)}$ é a matriz de rigidez de cada barra referida ao S.G.R., com i variando de 1 ao número total de barras da estrutura. Essa, pode ser representada com notação ao nível das extremidades das barras (CRUZ e CRUZ, 2023).

Para simplificar o entendimento, primeiramente será apresentada tal passagem de representação para a matriz $[k]$ de uma barra no S.L.R. Relembra-se que a nível de nó:

$$[k] = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & -EA/L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -EA/L & 0 & EA/L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De acordo com Cruz e Cruz (2023), com notação ao nível das extremidades da barra fica:

$$[k]_{(i)} = \begin{bmatrix} [k]_{I,I} & [k]_{I,II} \\ [k]_{II,I} & [k]_{II,II} \end{bmatrix}$$

Onde:

$$[k]_{I,I} = [k]_{II,II} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[k]_{I,II} = [k]_{II,I} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, do mesmo raciocínio, a nível de extremidade de barra:

$$[k]'_{(i)} = \begin{bmatrix} [k]'_{I,I} & [k]'_{I,II} \\ [k]'_{II,I} & [k]'_{II,II} \end{bmatrix}$$

Onde:

$$[k]'_{I,I} = [k]'_{II,II} = \begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \text{sen}\alpha\cos\alpha \\ \text{sen}\alpha\cos\alpha & \text{sen}^2\alpha \end{bmatrix}$$

$$[k]'_{I,II} = [k]'_{II,I} = \begin{bmatrix} -\cos^2\alpha & -\text{sen}\alpha\cos\alpha \\ -\text{sen}\alpha\cos\alpha & -\text{sen}^2\alpha \end{bmatrix}$$

Como já discutido, para os nós de treliças planas existem dois graus de liberdade, portanto, a esse nível, a matriz de rigidez $[K]$ da estrutura segundo o S.G.R. é composta de submatrizes 2×2 e contém tantas linhas e colunas quantos forem os nós da treliça, com cada componente $[K]_{ij}$, 2×2 , associando deslocamentos do nó j aos esforços do nó i (CRUZ e CRUZ, 2023). Sendo m o número de linha, n o número de colunas e $m = n =$ número de nós:

$$[K] = \begin{bmatrix} [K]_{11} & \cdots & [K]_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [K]_{m1} & \cdots & [K]_{mn} \end{bmatrix}$$

Cada submatriz que compõem $[K]$ pode ser facilmente determinada por se conhecer a numeração dos nós das barras e suas respectivas incidências, tal que:

$[K]_{ij}$ associa os deslocamentos do nó j e os esforços do nó i ;

$[K]_{ij}$ (com $i = j$) = $\Sigma[k]'$ das barras que se ligam ao nó i , com respectivas incidências no nó i e no nó j ;

$[K]_{ij}$ (com $i \neq j$) = $\Sigma[k]'$ das barras que ligam o nó i ao j , com respectivas incidências no nó i e no nó j ;

$[K]_{ij}$ (com $i \neq j$) = 0, se não houver barras ligando o nó i ao j ;

$[K]_{ij}$ (com $i \neq j$) = $[k]_{ji}^*$ (lê-se transposta de $[K]_{ij}$), pois a matriz $[K]$ é simétrica.

Esclarece-se a demonstração tomando como exemplo a treliça plana da Figura 8 e suas respectivas coordenadas dos nós e incidências presentes na Quadro 2. Fica claro que os componentes da matriz de rigidez $[K]$ da estrutura em questão são:

$$[K] = \begin{bmatrix} [K]_{11} & [K]_{12} & [K]_{13} & [K]_{14} & [K]_{15} & [K]_{16} \\ [K]_{21} & [K]_{22} & [K]_{23} & [K]_{24} & [K]_{25} & [K]_{26} \\ [K]_{31} & [K]_{32} & [K]_{33} & [K]_{34} & [K]_{35} & [K]_{36} \\ [K]_{41} & [K]_{42} & [K]_{43} & [K]_{44} & [K]_{45} & [K]_{46} \\ [K]_{51} & [K]_{52} & [K]_{53} & [K]_{54} & [K]_{55} & [K]_{56} \\ [K]_{61} & [K]_{62} & [K]_{63} & [K]_{64} & [K]_{65} & [K]_{66} \end{bmatrix}$$

Onde, por exemplo:

$$[K]_{11} = [k]_{I,I(1)}' + [k]_{I,I(2)}'$$

$$[K]_{12} = 0 = [K]_{21}^*$$

$$[K]_{13} = [k]_{I,II(2)}' = [K]_{31}^*$$

E assim sucessivamente para os demais componentes.

Vale ressaltar que Martha (2010) também chega a mesma conclusão da composição da matriz de rigidez da estrutura, porém, a marcha elencada se distinta de Cruz (1985) e Cruz e Cruz (2023), pois o passo a passo tem como foco a demonstração do raciocínio lógico e leitura específica dos programas de computadores, já as outras duas referências passam o conteúdo de forma mais clara e de fácil alusão, sendo esse, por isso, aqui destrinchado.

Frisa-se que se porventura a matriz de rotação $[T]$ e, conseqüentemente, a matriz de rigidez $[k]'$ das barras no sistema local, não venham facilmente à mente, é possível passarmos da matriz $[k]$ de maneira mais direta para a matriz $[K]$. Isso desde que se conheça as

coordenadas dos nós das barras em relação ao sistema global de referência S.G.R. e a incidência de cada extremidade de barra (como configurado no exemplo do Quadro 2).

5.4. O MÉTODO MATRICIAL DOS DESLOCAMENTOS – ANÁLISE DE 2ª ORDEM

A análise estrutural de segunda ordem tem como diferença expressa em comparação com a de primeira ordem o fato de que considera a não-linearidade do comportamento da estrutural, seja em termos do material constituinte não obedecer a lei de Hooke (não-linearidade reológica), seja a impossibilidade de desprezar os deslocamentos da estrutura (não-linearidade geométrica).

Aqui é abordado que quanto ao material constituinte da estrutura há linearidade, já quanto a geometria existe a não linearidade, ou seja, o material é elástico, porém não linear (2ª ordem elástico). Ressalta-se que em uma análise de segunda ordem sob efeito da não linearidade geométrica os deslocamentos não são considerados pequenos e a condição de equilíbrio entre a força aplicada e os esforços das barras se dá na configuração deformada da estrutura (MARTHA, 2010).

Por outro lado, o presente trabalho é fundamentado em simplificações da teoria da elasticidade linear que conduzem à teoria da segunda ordem simplificada, na qual os deslocamentos, mais especificamente as rotações, são considerados pequenos – como já revelado na seção 5.1.4 – tendo em vista que a intenção principal é realçar o interesse em soluções práticas, porém significativamente mais complexas do que as que se encaixam na abordagem apenas no tocante às condições de equilíbrio do corpo.

Para tal, Cruz (1985) elenca aproximações por intermédio das seguintes igualdades:

$$\begin{aligned}\cos\theta &= 1 \\ \operatorname{sen}\theta &= \operatorname{tg}\theta = \theta \\ \cos\theta &= 1 - (\theta^2/2)\end{aligned}$$

Sendo as duas primeiras comuns à análise de primeira ordem (teoria linear), já a terceira equação considerada para evitar $\varepsilon = \varepsilon'$ quando se trata de rotações pequenas, cuja ordem de grandeza é $\sqrt{|\varepsilon|}$ (teoria de segunda ordem simplificada).

Assim sendo, nas seções abaixo será apresentada a forma de avaliação das estruturas que se equilibram na posição indeformada, mais especificamente quanto a rigidez tangente, a

qual direciona o método matricial dos deslocamentos aplicado a análises estruturais de segunda ordem.

Lembra-se que toda dedução do método matricial dos deslocamentos abordada nesse estudo de segunda ordem se dá com base no exemplo de treliça plana utilizado por Cruz (1985) ilustrado pela Figura 8.

5.4.1. Apresentação da rigidez tangente K_T e suas componentes

Segundo Cruz (1985), um dos pontos-chaves da influência da consideração não linear no processo de resolução, é o fato de que a relação $\{P\} = [K] \cdot \{D\}$ não é mais linear, conseqüentemente, a rigidez da estrutura deixa de ser constante, pois as solicitações e a geometria impõem variações.

Nesse momento então se insere o conceito de matriz de rigidez instantânea ou tangente da estrutura, nome tal, pois ela é igual ao ângulo formado pela tangente à curva P-D, cuja determinação exata é complexa, contudo, são utilizados processos iterativos para alcance de resultados aproximados. Essa nova rigidez K_T governará as respostas do elemento, considerando no processo de análise a rigidez instantânea da estrutura a mudança de comportamento ao passo que se incrementam as deformações com a crescente relação força-deslocamento.

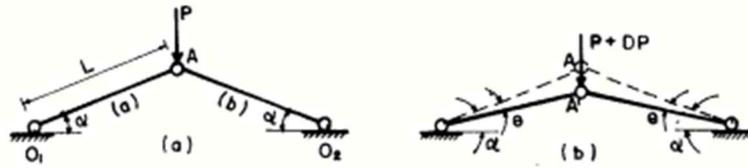
K_T é composta de três parcelas, são elas: K_0 , ΔK_0 e K_G . Desses integrantes, o primeiro corresponde à rigidez inicial ou linear – definida na seção 5.3. como K -; ΔK_0 é o termo de correção das coordenadas nodais devido aos deslocamentos e K_G é a rigidez geométrica, função do carregamento da estrutura.

Logo, a rigidez tangente de uma estrutura – igualmente para treliças planas - no sistema global de referência (S.G.R.) é dada por:

$$K_T = K_0 + \Delta K_0 + K_G$$

Cruz (1985) ilustra a igualdade acima por meio da análise de uma treliça plana de ângulo α pequeno (abatida) com a horizontal submetida a um carregamento P e configuração deformada que induz deslocamentos e modificações em α , como exposto na Figura 14.

Figura 13 – Carregamento de treliça plana abatida (a), sua deformação e deslocamento devido a incrementos $P+dP$ (b).



Fonte: Cruz (1985).

Com o aumento de P por incrementos dP a treliça plana vai mudando a sua configuração de inicial (indeformada) para deformada. Como a força P direciona o nó A para baixo (deslocamento), a inclinação α da estrutura com a horizontal vai diminuindo e θ passa a ser o indicador da rotação das barras, de modo que $(\alpha - \theta)$ quantifica essa mudança.

Ao se relacionar os acréscimos $\theta, d\theta$ provocados por P, dP , é obtida a expressão $K_T = K_0 + \Delta K_0 + K_G$ e comprovada sua variação em função do carregamento da estrutura (TUNNER *et al*, 1960, *apud* CRUZ, 1985). Baseado nesses estudos, somados às considerações do comportamento elástico, mas geometricamente não linear, e à teoria de segunda ordem simplificada, abaixo serão deduzidos cada componente.

Ao se querer conectar a força aplicada com o indicador de rotação de barras, se tem:

$$P = 2N \text{sen}(\alpha - \theta)$$

A respeito da deformação:

$$\varepsilon_x = \frac{L - L'}{L} = \frac{L - \frac{L \cos \alpha}{\cos(\alpha - \theta)}}{L}$$

Onde L é o comprimento da barra na posição inicial, ou seja, indeformada, e L' é seu comprimento após deformação.

Já que é considerada a linearidade reológica da estrutura, então:

$$\varepsilon_x = \frac{N}{EA}$$

Tomando as duas igualdades referentes à deformação e isolando N :

$$N = EA \frac{1}{\cos(\alpha - \theta)} [\cos(\alpha - \theta) - \cos \alpha]$$

Substituindo na expressão de P :

$$P = 2 EA \frac{1}{\cos(\alpha - \theta)} [\cos(\alpha - \theta) - \cos \alpha] [\text{sen}(\alpha - \theta)]$$

A treliça em questão tem comportamento não linear geométrico, porém são adotadas as simplificações propiciadas pela teoria de segunda ordem simplificada, listadas na seção 5.4. e

base para as abaixo descritas (esse momento é o marco da passagem da análise linear exata para a não linear geométrica):

$$\begin{aligned}\alpha \text{ pequeno} &\rightarrow \theta \text{ pequeno} \\ \operatorname{tg}\theta &= \theta \rightarrow \operatorname{tg}(\alpha - \theta) \\ \cos\theta &= \frac{\theta^2}{2} \rightarrow \cos(\alpha - \theta) = \frac{(\alpha - \theta)^2}{2}\end{aligned}$$

Com isso, fazendo as adaptações algébricas viáveis, é encontrado:

$$P = 2EA\alpha^2\theta - EA\theta^2(3\alpha - \theta)$$

Lembra-se que K_T é o coeficiente angular da tangente à curva não linear P-D, portanto, corresponde à primeira derivada de $P = f(D)$. Logo:

$$\begin{aligned}K_T &= \frac{dP}{dD} = \frac{dP}{d\theta} \\ K_T &= 2EA\alpha^2 - 3EA\theta(2\alpha - \theta)\end{aligned}$$

K_0 é a rigidez da estrutura para a posição indeformada, ou seja, obtida fazendo $\theta = 0$:

$$K_0 = 2EA\alpha^2$$

Substituindo α por $(\alpha - \theta)$ na expressão de K_0 , é obtida a rigidez da estrutura deformada:

$$K_0 + \Delta K_0 = 2EA(\alpha - \theta)^2$$

Como $K_T = K_0 + \Delta K_0 + K_G$ e N , ao se aplicar relações trigonométricas pode ser definido como $N = EA\theta\alpha - EA\theta^2/2$:

$$K_G = -2N$$

5.4.2. A matriz de rigidez tangente $[k_t]$ de uma barra de treliça plana (S.L.R.)

Quanto ao sistema local de referência, para Cruz (1985) é fácil expor e reafirmar que os componentes da matriz de rigidez tangente das barras de uma treliça plana, similarmente ao raciocínio para a estrutura, são: a matriz de rigidez $[k_0]$ das barras, a matriz das mudanças de coordenadas nodais $[\Delta k_0]$ das barras e a matriz relacionada ao nível de solicitação das barras $[k_g]$.

Logo, a matriz de rigidez tangente das barras de uma treliça plana no sistema local de referência (S.L.R.) é dada por:

$$[k_t] = [k_0] + [\Delta k_0] + [k_g].$$

Da mesma maneira como listada a dedução da matriz de rigidez inicial [k] na seção 5.3.1.2., se pode obter [kt] também através da energia de deformação. Entretanto, ao serem considerados os efeitos de segunda ordem, a relação tensão-deformação não é mais linear.

Assim sendo, Mallet e Marçal (1968) e Martin (1971) (*apud* CRUZ, 1985) expõe as relações matemáticas e físicas até a obtenção da matriz de rigidez tangente de uma barra no S.L.R. da forma abaixo detalhada.

Primeiramente é passado de $\varepsilon = \frac{\delta}{L} \rightarrow \varepsilon_x = \partial u / \partial x$ para o modelo não linear $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2$, com ε_x é positivo para tração e negativo para compressão, onde a parcela $\frac{\partial u}{\partial x}$ diz respeito à contribuição linear e a parcela $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2$ relativa à contribuição não linear decorrente da flecha obtida pela deformação da estrutura.

Com essa equação, se aplica a substituição de ε_x não linear na formulação da energia de deformação dada por $U = \frac{EA}{2} \int_0^L \varepsilon_x^2 dx$, tal que:

$$U = EA \int_0^L \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^4 \right] dx$$

Matricialmente:

$$U = EA \int_0^L \left[\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} \right] \times \left(\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{bmatrix} + \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \end{bmatrix} \right) \times \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Avaliando-se os itens $\frac{\partial u}{\partial x}$ e $\frac{\partial v}{\partial x}$, são feitas as seguintes observações:

$$u = \Gamma_1 + \Gamma_2 x \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \Gamma_2$$

$$v = \Gamma_3 + \Gamma_4 x \rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = \Gamma_4$$

Sendo as condições de contorno:

$$\text{Para } x = 0, \begin{cases} u = \delta_{x1} \\ v = \delta_{y1} \end{cases}$$

$$\text{Para } x = L, \begin{cases} u = \delta_{x2} \\ v = \delta_{y2} \end{cases}$$

Então:

$$\delta_{x1} = \Gamma_1$$

$$\delta_{y1} = \Gamma_3$$

$$\delta_{x2} = \Gamma_1 + \Gamma_2/L$$

$$\delta_{y2} = \Gamma_3 + \Gamma_4/L$$

O relacionamento dessas avaliações é resumido e dado matricialmente por:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/L & 0 & 1/L & 0 \\ 0 & -1/L & 0 & 1/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{x1} \\ \delta_{y1} \\ \delta_{x2} \\ \delta_{y2} \end{bmatrix}$$

Realizando as multiplicações cabíveis entre matrizes, abordando a teoria de segunda ordem simplificada, para a qual $v' = \theta$, $u' = \varepsilon_x - \frac{\theta^2}{2} = \frac{N}{EA} - \frac{\theta^2}{2}$, e substituindo na equação da energia de deformação, se encontra a definição da matriz tangente de uma barra de treliça plana no S.G.R. da seguinte forma:

$$[k_t] = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & -EA/L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -EA/L & 0 & EA/L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{EA\theta}{L} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & \theta & -1 & -\theta \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -\theta & 1 & \theta \end{bmatrix} + \frac{N}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ou sucintamente: $[k_t] = [k_0] + [\Delta k_0] + [k_g]$, onde a primeira parcela é constante e diz respeito à matriz de rigidez inicial da barra, definida por sua análise de primeira ordem, já os outros dois termos são função da posição deformada da barra e do esforço aplicado, respectivamente (CRUZ, 1985).

5.4.3. A matriz de rigidez tangente $[k_t]'$ de uma barra de treliça plana (S.G.R.)

Ao desenrolar dos capítulos anteriores, é evidente a necessidade de, após obtida a matriz de rigidez tangente das barras da estrutura $[k_t]$ no S.L.R., escrever a matriz de $[k_t]'$ ou seja, a reconfiguração para a referência não mais no sistema local, mas sim no sistema global de referência, viabilizando, a posteriori, o encontro de $[K_T]$.

Isso é possibilitado pelo uso da matriz de rotação $[T]$, a mesma da análise de primeira ordem explicitada na seção 5.3.2. Inclusive, os passos são iguais aos lá executados. Portanto, ao se decidir criar a linha do tempo dessa marcha de cálculo, mui idêntico ao elencado para o encontro de $[K]$, têm-se:

$$[k_t] \rightarrow [k_t]' \rightarrow [K_T]$$

Relembra-se os passos elencados por Cruz (1985):

$$[k_t]' = [T] [k_t] [T]^*$$

$$[k_t]' = [T] ([k_0] + [\Delta k_0] + [k_g]) [T]^*$$

$$[k_t]' = [k_o]' + [\Delta k_o]' + [k_g]'$$

Por fim:

$$[k_t]' = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & -1 & -\alpha \\ \alpha & \alpha^2 & -\alpha & -\alpha^2 \\ -1 & -\alpha & 1 & \alpha \\ -\alpha & -\alpha^2 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} + \frac{EA\theta}{L} \begin{bmatrix} (-2\alpha + \alpha^2\theta) & (-\alpha^2 - \alpha\theta + 1) & (2\alpha - \alpha^2\theta) & (\alpha^2 + \alpha\theta - 1) \\ (-\alpha^2 - \alpha\theta + 1) & (2\alpha + \theta) & (\alpha^2 + \alpha\theta - 1) & (-2\alpha + \theta) \\ (2\alpha - \alpha^2\theta) & (\alpha^2 + \alpha\theta - 1) & (-2\alpha + \alpha^2\theta) & (-\alpha^2 - \alpha\theta + 1) \\ (\alpha^2 + \alpha\theta - 1) & (-2\alpha - \theta) & (-\alpha^2 - \alpha\theta + 1) & (2\alpha - \theta) \end{bmatrix} + \frac{N}{L} \begin{bmatrix} \alpha^2 & -\alpha & -\alpha^2 & \alpha \\ -\alpha & 1 & \alpha & -1 \\ -\alpha^2 & \alpha & \alpha^2 & -\alpha \\ \alpha & -1 & -\alpha & 1 \end{bmatrix}$$

5.4.4. A matriz de rigidez tangente $[K_T]$ de uma treliça plana (S.G.R.)

Obtida a matriz de rigidez tangente de cada uma das barras da estrutura referidas ao sistema global, da igual forma que o processo de definição da matriz de rigidez inicial $[K]$ da estrutura foi detalhada, é traçado o caminho para encontro da matriz de rigidez tangente da estrutura $[K_T]$.

Entretanto os componentes $[K_T]_{ij}$ que associam os deslocamentos do nó j e os esforços do nó i , são função das matrizes $[k_t]'$ das barras que chegam no nó i (se $i = j$) ou das barras que ligam o nó i ao nó j (se $i \neq j$), sendo $[K_T]_{ij} = 0$ (com $i \neq j$), se não houver barras ligando o nó i ao j .

Para a devida clareza, segue o exemplo para a treliça da Figura 8. Sabendo-se que suas coordenadas nodais em função do S.G.R. e as incidências das extremidades correspondem ao mesmo descrito no Quadro 2, resulta:

$$[K_T] = \begin{bmatrix} [K_T]_{11} & [K_T]_{12} & [K_T]_{13} & [K_T]_{14} & [K_T]_{15} & [K_T]_{16} \\ [K_T]_{21} & [K_T]_{22} & [K_T]_{23} & [K_T]_{24} & [K_T]_{25} & [K_T]_{26} \\ [K_T]_{31} & [K_T]_{32} & [K_T]_{33} & [K_T]_{34} & [K_T]_{35} & [K_T]_{36} \\ [K_T]_{41} & [K_T]_{42} & [K_T]_{43} & [K_T]_{44} & [K_T]_{45} & [K_T]_{46} \\ [K_T]_{51} & [K_T]_{52} & [K_T]_{53} & [K_T]_{54} & [K_T]_{55} & [K_T]_{56} \\ [K_T]_{61} & [K_T]_{62} & [K_T]_{63} & [K_T]_{64} & [K_T]_{65} & [K_T]_{66} \end{bmatrix}$$

Onde, por exemplo:

$$[K_T]_{11} = [k]_{I,I(1)}' + [k]_{I,I(2)}'$$

$$[K_T]_{12} = 0 = [K_T]_{21}^*$$

$$[K_T]_{13} = [k]_{I,II(2)}' = [K_T]_{31}^*$$

E assim sucessivamente para os demais componentes.

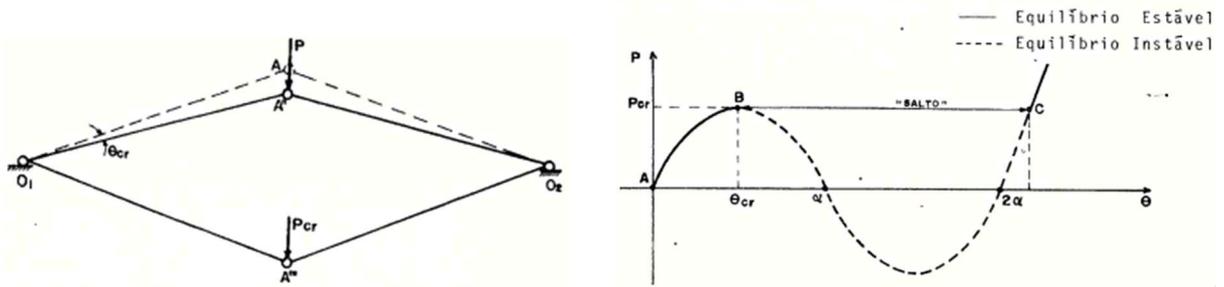
5.5. ANÁLISE DE ESTABILIDADE ESTÁTICA DE ESTRUTURAS

Além da hipótese de não-linearidade geométrica das estruturas, para encerrar a verificação do estado de equilíbrio de uma estrutura, se faz importante o estudo dos fenômenos condicionantes que dividem a linha tênue entre estabilidade e instabilidade de um sistema da engenharia civil, são eles: ponto limite e flambagem. Os quais são trechos específicos do caminho de equilíbrio, ou seja, a curva em que cada ponto pertence a uma configuração de equilíbrio estático da estrutura (dos Santos, 2022).

Segundo Cruz (1985), ponto limite é o estado de equilíbrio que interrompe configurações de características de equilíbrio estável, sem bifurcação na trajetória de equilíbrio da estrutura. Já na flambagem tal interrupção advém da existência dessa bifurcação. Para simulação da influência do exposto, avalia-se as estruturas considerando-se a possibilidade de grandes deslocamentos e rotações – diferentemente do abordado para a segunda ordem simplificada.

Para o caso da treliça abatida da Figura 14, incrementos de $P, \Delta P$ ao nó inicial A aumenta o ângulo θ , influenciador direto na quantificação da rotação da estrutura – dada por $(\alpha - \theta)$ como abordado na seção 5.4.1. Ao atingir P, P_{cr} e θ_{cr} (ponto B, nó A''), a estrutura passa bruscamente para o ponto C, nó A''', posição invertida e instável devido a ter sido atingido o ponto limite de estabilidade. De acordo com dos Santos (2022), os saltos relacionados à instabilidade por ponto limite podem ser: de deslocamento, levando o nome de *snap-through* (ponto crítico com relação a carga), ou de força, eis o fenômeno *snap-back* (ponto crítico relacionado ao deslocamento). Essas nomenclaturas também são utilizadas no desenvolvimento dos textos de Magalhães e Avancini, de Souza (2015) e de Paula e Proença (2015).

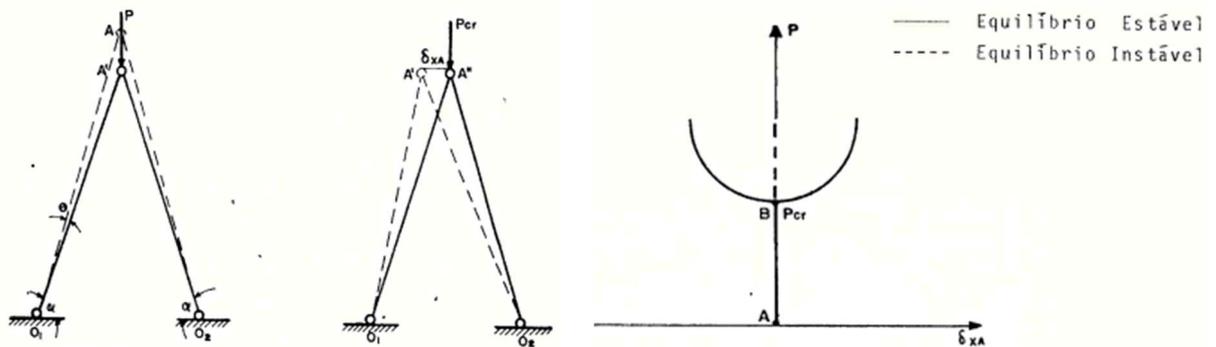
Figura 14 – Instabilidade por ponto limite em treliça plana abatida devido ao salto na trajetória P- θ .



Fonte: Adaptado de Cruz (1985).

Já no caso da treliça não abatida da Figura 15 os acréscimos deslocam o nó A para baixo (nó A'), mas com quantificação desconsiderável, pois a rotação provocada é praticamente nula. Entretanto, ao se atingir P_{cr} , a estrutura se deforma provocando um deslocamento δ_{xA} , estabilizando no nó A'' e caracterizando assim a bifurcação na trajetória de equilíbrio, a qual pode ocorrer tanto para a direita, quanto para a esquerda, como indicado no gráfico.

Figura 15 – Instabilidade por flambagem em treliça plana não abatida devido à bifurcação na trajetória P- δ_{xA} .



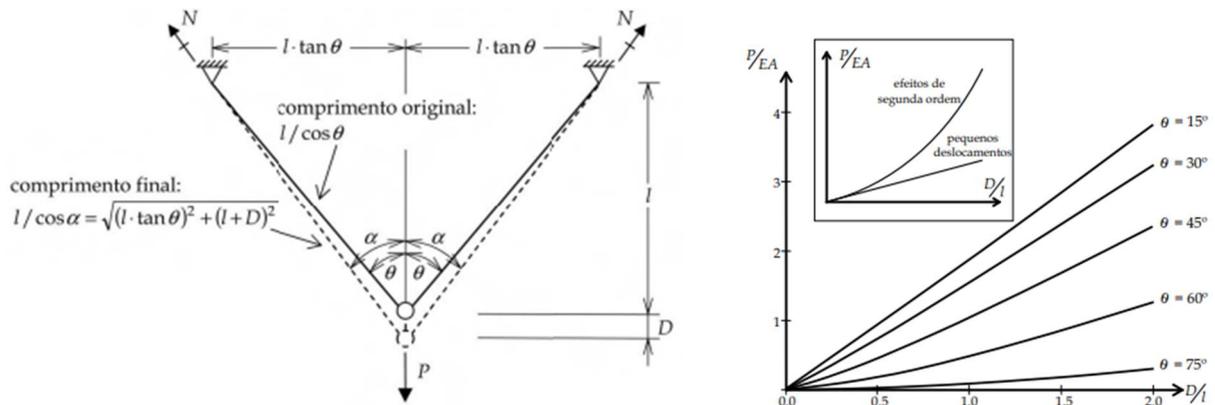
Fonte: Adaptado de Cruz (1985).

Martha (2010, p. 99), apesar de não ter como enfoque os estudos de primeira ordem, comenta a respeito da demonstração da resposta da análise de segunda ordem com efeito da não linearidade geométrica em uma treliça isostática composta de duas barras articuladas (vide Figura 16) e chega a mesma conclusão do trazido ao longo dessa seção 5.5 e das aplicações de verificação de estabilidade direta de treliças abatidas e não abatidas executadas por Cruz (1985):

“A curva carga-deslocamento para o caso da estrutura achatada (ângulo θ grande) é a que apresenta maior grau de não linearidade, enquanto a curva para o caso da estrutura

alongada (ângulo θ pequeno) é praticamente linear. [...] a estrutura mais alongada é a mais rígida (valor de carga mais alto para um dado valor de deslocamento.)”

Figura 16 – Treliça isostática com grandes deslocamentos e respectiva curva P-D (normalizada pelas razões P/EA e D/L).

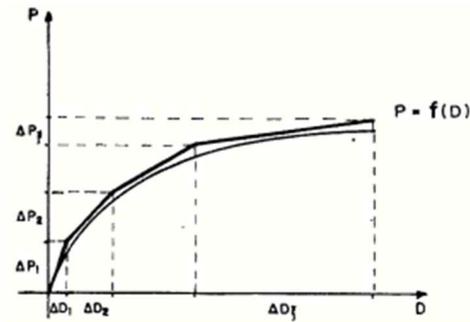


Fonte: Adaptado de White *et al.* (1976 *apud* Martha, 2010).

Por isso e para isso, são aplicados dois tipos de verificação de estabilidade: a direta e a indireta. A primeira requer a determinação do carregamento crítico para compará-lo com o carregamento aplicado à estrutura e se destina mais aos problemas com tendência a flambagem, pois no processo – de linearização incremental - é dispensável a avaliação das solicitações nas barras. A segunda analisa as funções não lineares $\{P\}=f\{D\}$ para o carregamento $\{\bar{P}\}$ pretendido, observando a variação das rigidezes ao longo da ocorrência dos deslocamentos por um processo de iteração que corresponde ao Método de Newton-Raphson (CRUZ, 1985).

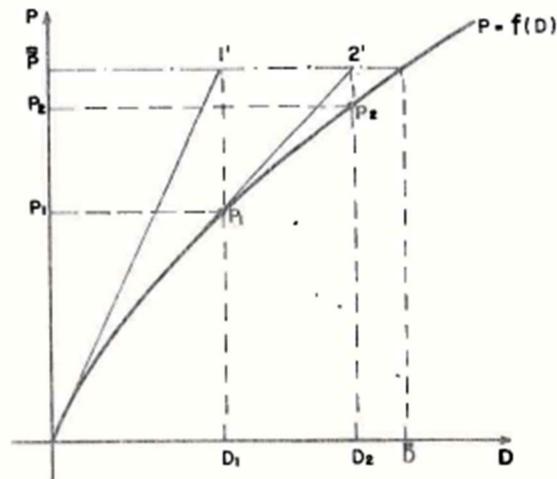
O presente trabalho não visa detalhar os procedimentos de cálculo de verificação de estabilidade, todavia, é objetivo frisar que para os cálculos diretos se $\{\bar{P}\} < \{P_{cr}\}$, o estado de equilíbrio da estrutura é estável, mas se $\{\bar{P}\} > \{P_{cr}\}$, é instável. Similarmente, se nas formulações indiretas o processo for convergente, então a estrutura é estável, caso divergente, é instável. A Figura 17 e a Figura 18 ilustram, respectivamente, a aplicação do processo de linearização incremental e do processo iterativo para a obtenção da curva P-D.

Figura 17 – Exemplo de gráfico P-D e obtenção da curva P-D por procedimento iterativo de verificação de estabilidade direta.



Fonte: Cruz (1985).

Figura 18 – Exemplo de gráfico P-D e obtenção da curva P-D pelas aproximações 1' e 2' viabilizada por iterações do Método de Newton-Raphson aplicado à verificação de estabilidade indireta.



Fonte: Cruz (1985).

Via de regra, é possível concluir que, como a tangente de rigidez é a relação entre carga ou força e deslocamento ou deflexão, a partir do momento que o caminho atinge o primeiro ponto limite e a tangente da trajetória de equilíbrio passa a ser negativa, a estrutura é considerada instável (dos Santos, 2022).

5.6. POSSIBILIDADE E INFLUÊNCIA DA DESCONSIDERAÇÃO DE $[\Delta K_0]$ NA COMPOSIÇÃO DA MATRIZ TANGENTE DE TRELIÇAS PLANAS $[K_T]$

Visando validar ainda mais a aplicabilidade do estudo até aqui desenvolvido, se faz interessante aprofundar tais conhecimentos criticamente através de exemplos práticos que contemplem a análise de segunda ordem simplificada de treliças planas com utilização da

matriz de rigidez tangente de sua estrutura. A busca específica é de legitimar a composição da formulação de $[K_T]$ e argumentar se em algum caso é possível facilitar ainda mais os cálculos estruturais não lineares.

Nesse sentido, o primeiro exemplo é dado por Cruz (1985) ao comentar sobre detalhes de situações nas quais se observa a possibilidade de ocorrência de flambagem em treliças planas. Segundo ele a matriz de rigidez tangente considerada nesse processo de resolução pode ser calculada em cada posição deformada de interesse e, devido a isso, o que antes teria o a marcha dada por $[K_T] = [K_0] + [\Delta K_0] + [K_G]$ agora pode ser dada por $[K_T] = [K_0] + [K_G]$.

Assim, para estruturas sujeitas à flambagem, o que se faz é escrever a matriz de rigidez tangente da estrutura como soma da sua matriz de rigidez inicial e da matriz de rigidez geométrica. Tal afirmativa é legitimada também pelo caminho abordado por Venâncio Filho (1975) para a dedução da matriz de rigidez tangente em função da energia.

Em contrapartida, poderá ser necessário traçar mais passos de resolução já que cada posição deslocada com viés de análise precisa ser avaliada cuidadosamente. Mas, encontrada e resolvida a situação mais desfavorável, solucionará o problema com mesma medida de coerência em comparação à formulação completa de três componentes.

O segundo exemplo é o trabalho de Magalhães e Avancini, no qual é tratada a análise elástica de uma treliça plana e estudado o efeito da não linearidade geométrica para um carregamento normal, aplicando o método de Newton-Raphson para encontro da solução da configuração deformada. A dupla utiliza a álgebra matricial do método dos deslocamentos para avaliação de segunda ordem da treliça exemplo, abraçando a configuração da matriz de rigidez tangente global do elemento como a soma da matriz de rigidez global do elemento referente ao material (aqui denominada como K_0 , mas para eles como K_m) com a matriz de rigidez global do elemento referente a geometria (K_g), tal que $K_T = K_m + K_g$.

O terceiro exemplo é o artigo “Análise não linear geométrica de treliças planas por meio do método dos elementos finitos” elaborado por de Souza (2015). Pontua-se que a análise estrutural de segunda ordem pode ser desenvolvida por diferentes métodos além do MMD e o dos elementos finitos é um deles. Entretanto, seja qual for o procedimento de cálculo, haverá o destriço da composição da parte da fórmula que estabelece a relação entre P e D.

Em suma, o autor de Souza (2015) utiliza o método dos elementos finitos e soluciona as equações não lineares com o método incremental e iterativo de Newton-Paphson para determinação do carregamento último de colapso e sua resposta deslocamento versus força aplicada em três simulações: o problema de treliça com uma barra e mola elástica, o problema de treliça com duas barras e o de treliça tipo grua. Contudo, para isso, em todos os casos, a

estruturaco da matriz de rigidez  de duas parcelas, excluindo mais uma vez o termo de correo da rigidez da estrutura, devido às mudanças nas coordenadas nodais.

O quarto exemplo  o estudo desenvolvido por de Paula e Proença (2015) da não linearidade geométrica em treliças planas utilizando a formulao lagrangiana total, o conceito de matriz de rigidez tangente e o procedimento incremental iterativo de Newton-Raphson para o cálculo numérico. De acordo com os escritores, para as coordenadas nodais i , cujo deslocamento  prescrito por \bar{d}_i impostos  estrutura como incrementos, a variao de deslocamento nessa coordenada  nulo para todas as iteraes, ignorando então mais uma vez $[K_0]$.

Pelo fato de os resultados dos métodos seguidos pelos autores dos três diferentes artigos científicos explicados nos parágrafos acima apresentarem concordância muito boa e erros (comparao com resolues literárias pela formulao de K_T por três componentes) desprezveis, valida-se ainda mais que  possível a desconsiderao de ΔK_0 . Assim sendo,  coerente adotar a seguinte formulao matricial $[K_T] = K_0 + K_G$.

De modo geral, lembrando que $[\Delta K_0]$  a matriz que considera as mudanças nas coordenadas nodais ao longo do processo de deformao de uma estrutura e que em treliças e pórticos planos o caso crítico tende a ocorrer muito próximo da posio indeformada, esse termo pode ser desconsiderado sem prejudicar significativamente a precisão da soluço a ser encontrada (CRUZ, 1985).

6. CONSIDERAES FINAIS

De acordo com o exposto, as análises não lineares, devido  complexidade das resolues para diferentes tipos estruturais, são executadas computacionalmente. Contudo, a clareza e compreensão das etapas envolvidas e teoria do processo  de sumo crédito para que os resultados dados via métodos de linearizao sejam avaliados de modo crítico pelos engenheiros calculistas, tendo a sensibilidade de verificar os detalhes dos materiais e comportamentos envolvidos na estruturaco dos modelos da construo civil.

Partindo do pressuposto acima,  evidente que o trabalho apresentado colaborou positivamente na fidelizao da importância da complementao dos estudos de primeira ordem exata com os de segunda ordem. Tal afirmao se deve aos comentários desenvolvidos sobre a influência da não-linearidade geométrica em treliças planas elásticas (respeito  lei de Hooke), por meio do método matricial dos deslocamentos e da teoria de segunda ordem simplificada,

como também da dedução da composição da matriz de rigidez tangente da estrutura $[K_T]$ no S.G.R. com verificação da possibilidade de desconsideração do componente $[\Delta K_o]$.

Concomitantemente, as situações problemas apresentadas envolvendo treliças planas que necessitam de avaliação de segunda ordem e fidelizam a viabilidade de exclusão da matriz de correção de rigidez da estrutura $[\Delta K_o]$, exemplificam ainda mais a aplicabilidade do estudo aqui apresentado, tanto em termos de conhecimento, quanto em termos práticos.

Ademais, por ter sido traçado um caminho detalhado, desde a caracterização de treliças planas à verificação de sua instabilidade quanto a ponto limite e flambagem, é evidente que o conteúdo abordado torna mais acessível, desperta curiosidade e contribui com o entendimento simplificado dos conhecimentos desenvolvidos ao longo do curso e da importância da análise estrutural para futuros engenheiros(as) calculistas projetistas.

Assim, se espera que ao longo do tempo haja mais estudos e artigos contendo a teoria da análise matricial de segunda ordem e sejam desenvolvidos novos programas de cálculo computacional aplicados a esse conteúdo da engenharia estrutural. De igual forma, incentiva-se a implementação desses aprendizados desde a graduação, vista sua coerência com a realidade do comportamento de estruturas, sejam elas treliças ou demais modelos.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BEER, F. P.; JOHNSTON JR, E. R. **Resistência dos materiais**. 3^a ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1995.

BOLDRINI, J. L.; COSTA, S. I. R.; RIBEIRO, V. L.; WETZLER, H. G. **Álgebra linear**. 3^a ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980.

CRUZ, J. M. F. **Contribuição à análise estática e dinâmica de pórticos pelo método dos elementos de contorno**. Tese de doutorado. Universidade Federal da Paraíba. João Pessoa, 2012.

CRUZ, J. M. F. **Sobre a não-linearidade geométrica em treliças e pórticos planos**. Dissertação de mestrado. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. São Paulo, 1985.

CRUZ, J. M. F.; CRUZ, L. C. **Análise matricial de estruturas – método dos deslocamentos (estruturas planas)**. Vol. I – Teoria e Aplicação. João Pessoa: Leia Livros, 2023.

CRUZ, J. M. F.; CRUZ, L. C. **Análise matricial de estruturas – método dos deslocamentos (estruturas planas)**. Vol. II – Exercícios resolvidos. João Pessoa: Leia Livros, 2023.

de PAULA, C. F.; PROENÇA, S. P. B. **Análise não-linear geométrica de treliças planas**. Universidade de São Paulo. São Paulo, 2015.

de SOUZA, L. A. F. **Análise não linear geométrica de treliças planas por meio dos elementos finitos**. IX EPCC - Encontro Internacional de Produção Científica UniCesumar. Anais Eletrônico (ISBN 978-85-8084-996-7), 2015.

dos SANTOS, F. B. **Análise não linear geométrica de treliça**. Monografia. Universidade Federal de Goiás. Goiânia, 2022.

FILHO, P. F. **Mecânica geral para engenharia civil (teoria e prática)**. Notas de aula. Universidade Federal da Paraíba. João Pessoa, 2014.

GOMES, M. I. da S. **Estudo e análise de treliças**. Notas de aula. Instituto Politécnico de Lisboa. Lisboa, 2016.

MAGALHÃES, M. G.; AVANCINI, V. H. M. **Análise não linear geométrica de treliça plana pelo método de Newton-Raphson**. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. São Paulo.

MARTHA, L. F. **Análise de estruturas – conceitos e métodos básicos**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2010.

TIMOSHENKO, S. **Resistência dos materiais**. Vol 1. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico S.A, 1969.

VENÂNCIO FILHO, F. **Análise matricial de estruturas – estática, estabilidade, dinâmica**. Rio de Janeiro: Almeida Neves Editores Ltda, 1975.