UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
CAMPUS I

VARIEDADES SECANTES E PROJEÇÕES LINEARES

MARISA DE SALES MONTEIRO

JOÃO PESSOA – PARAÍBA
1997

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

M775v Monteiro, Marisa de Sales.
Variedades secantes e projeções lineares/ Marisa de Sales Monteiro. - João Pessoa, 1997.
115 f. : il.

Orientação: Roberto Callejas Bedregal.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Geometria algébrica. 2. Variedades secantes. 3. Projeções lineares. I. Bedregal, Roberto Callejas. II. Título.

UFPB/BC CDU 512.718(043)

Elaborado por RUSTON SAMMEVILLE ALEXANDRE MARQUES DA SILVA - CRB- 15/0386

VARIEDADES SECANTES E PROJEÇÕES LINEARES

POR

Marisa de Sales Monteiro

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE.

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: ÁLGEBRA

APROVADA POR:

ROBERTO CALLEJAS BEDREGAL (PRESIDENTE)

JACQUELINE ROJAS ARANCÍBIA

antonio C. R. Monteiro

ANTÔNIO CARLOS RODRIGUES MONTEIRO

PEDRO GÓMEZ VENEGAS - SUPLENTE

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
DEZEMBRO/1997

Agradecimentos

Aos professores Marcondes Clark, Julio Correia, Abdoral, Marcelo Martins e Antonio Andrade agradeço com respeito o apôio e a compreensão recebidos.

Ao meu irmão José Sales e minha cunhada Maria que me acolheram em João Pessoa o tempo de que necessitei para realizar este curso, agradeço com saudades.

A Terezinha, minha amiga que guardou a minha casa na minha ausência, agradeço comovida.

Aos funcionários do Departamento de Matemática do CCEN que, num convivio de quase três anos, acompanharam-me no dia-a-dia, agradeço eternamente.

Aos professores do DM-CCEN, cada um à sua maneira me tratou com respeito extremo como aluna e como colega de trabalho, distinguindo muito bem uma coisa e outra, agradeço com o coração.

Aos meus colegas de mestrado, aqueles que ora eram alunos meus, ora meus professores, agradeço com o exemplo.

A professora Jaqueline, exigente, que me fez tomar inúmeras atitudes na confecção de minha dissertação de mestrado, agradeço solenemente.

Ao professor Roberto C. Bedregal, meu orientador que, estudando meu temperamento, escolheu o tema e o formato de minha dissertação adaptados ao meu jeito de ser, sentir e escrever, agradeço tremendamente reconhecida.

Aos meus pais 'seu' Henrique e 'dona' Estelita, agradeço a paciência em criar-me, dar-me o senso de dever e a coragem de enfrentar, agradeço como só filho agradece.

Aos irmãos Valdir e Celso Pereira, agradeço a digitação e a correção na linguagem, esperando nunca mais ficar junto a um computador e nem chegar nem perto de um professor de português.

Por fim, agradeço aos meus alunos, estes sim, que me obrigaram a voltar a estudar, convencendo-me de que eu estava viva e que era possível depois de meio século de vida recomeçar, agradeço prometendo a minha volta.

Oferecimento

Aos professores Átila Augusto F de Almeida e Jerko Miguel Valderrama, professores que conseguiam ler a alma dum aluno tendo extremo respeito por ela. Nunca feriram alguém na sua alma. Nunca distinguiram um aluno de outro por credo, cor ou outro esteriótipo social qualquer. Nunca comentaram com ninguém sobre a deficiência de um aluno, identificando-o. Cada pessoa, para eles era parte de uma grande obra, embora valorizassem mais o restante da natureza do que valorizavam o homem. Não distinguiam em termos de valor, um homem de uma arvore e eram humaníssimos! Nunca nos falaram de Deus, embora nos fizessem crer em sua existência com religiosidade máxima e sem igrejas. Os seus inimigos, os odiaram com amor, pois eles eram invejáveis realmente. Eu me sinto honrada em fazer-lhes este oferecimento e peço desculpas por não ter podido fazê-lo com estes grandes mestres ainda em vida. Mas peço humildemente que Deus os faça se possível conscientes deste oferecimento.

Cinzas

Como Fenix, podemos surgir das cinzas;
como indivíduo, procurar em cinzas;
como professor, plantar nas cinzas;
como orvalho, fazer brotar das cinzas;
como preconceito, ver nada ou tudo em cinzas;
como arrogância, subestimar as cinzas.
Como fogo, apagar-nos em cinzas.
Como vida, tornarmos nos cinzas

Àqueles que recomeçam
procuram,
ensinam,
plantam,
discriminam,
subestimam.
Aos vaidosos.
À vida e à morte...

Autor: [illegible]

Resumo

Este trabalho reune resultados básicos da Geometria Algébrica tais como: o teorema da dimensão da fibra (Teorema 2.28), o lema de A Teracini (Lema 4.28) e o teorema de F. L. Zak (Teorema 4.36) além de muitos outros, necessários para fornecermos a resposta que embora bem geral, é a que nos é possível dar no momento e no contexto à pergunta abaixo:

Que deve ocorrer à variedade secante $Sec(X)$ de uma variedade $X \subseteq \mathbb{P}^n$ não-singular e não degenerada sobre um corpo algebricamente fechado de modo a garantir que existe uma subvariedade $\overline{X}$ em $\mathbb{P}^{n-1}$ isomorfa a X onde o isomorfismo, em particular, é uma projeção linear?

Abstract

This work gathers together some basic results of Algebraic Geometry, such as the fiber dimension theorem (theorem 2.28), A. Terracini's lemma, (lemma 4.28) F. L. Zak theorem (Teo 4.36) in additions to necessary results in order to give the answer which, in spite of being more general, in the moment is the possible one for us to give for the question below:

What should happen to the secante variety $Sec(X)$ of a non-singular and non degenerate variety X in $\mathbb{P}^n$ on an algebraically closed field to guarantee the existence of a subvariety $\overline{X}$ in $\mathbb{P}^{n-1}$ isomorphic to X, where the isomorfism in particular, is a linear projection?

ÍNDICE

Introdução

Este trabalho é constituído de quatro capítulos que, resumidamente, apresentamos a seguir:

O primeiro capítulo apresenta o espaço afim $\mathbb{A}^n$ e o espaço projetivo $\mathbb{P}^n$ sobre um corpo K, na maioria das vezes, algebricamente fechado. Conceitua conjuntos algébricos afins e projetivos e conjuntos algébricos irredutíveis; as variedades algébricas. Este capítulo mostra também que os conjuntos algébricos afins e projetivos definem respectivamente em $\mathbb{A}^n$ e em $\mathbb{P}^n$, uma topologia. A topologia de Zariski.

Nele, também se encontram casos particulares de variedades especiais da Geometria Algébrica, como as variedades de Veronese $v_d(\mathbb{P}^n)$ e as variedades de Segre $\sigma(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m)$, e suas subvariedades.

Destacam-se a variedade de Veronese $v_2(\mathbb{P}^2) \subseteq \mathbb{P}^5$ e a variedade de Segre $\sigma(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2) \subseteq \mathbb{P}^8$. Ainda neste capítulo, encontra-se a construção das variedades Grassmanianas $\mathbb{G}(k, n)$ de k-planos em $\mathbb{P}^n$ embora utilizemos aqui apenas Grassmanianas $\mathbb{G}(1, n)$ de retas de $\mathbb{P}^n$.

O estudo das Grassmanianas, se inicia com a Grassmaniana $\mathbb{G}(1, 3)$ das retas de $\mathbb{P}^3$, onde se mostra que $\mathbb{G}(1, 3)$ é a quádrica $Z_0Z_5 - Z_1Z_4 + Z_2Z_3 = 0$ em $\mathbb{P}^5$.

O segundo capítulo contém estudos sobre aplicações regulares em variedades algébricas afins e projetivas, sobre anéis coordenados, sobre corpos de funções racionais e sobre anéis locais de variedades algébricas. Ainda se destacam lá o conceito de dimensão de uma variedade algébrica e o Teorema da Dimensão da Fibra (Teo 2.28) que desempenharão papéis relevantes nesta dissertação. Existem outros resultados importantes neste capítulo tais como o da proposição (2.22) que garante que um subconjunto fechado e próprio de uma variedade, não pode ter a mesma dimensão dela.

O terceiro capítulo, começa com as variedades de incidência $\sum = \{(l, p) \mid p \in l\} \subseteq \mathbb{G}(1, n) \times \mathbb{P}^n$ das quais se definem as projeções canônicas cujas fibras, desempenham um papel fundamental no cálculo de uma cota superior para a dimensão de variedades muito importantes para o trabalho, as variedades secantes.

O quarto capítulo tem início com o estudo de não-singularidade de uma variedade algébrica arbitrária $X \subseteq \mathbb{P}^n$, nele se garante que a dimensão $\dim X$ duma variedade $X \subseteq \mathbb{P}^n$ e o mínimo do conjunto $D = \{r \in \mathbb{N} \mid r = \dim T_P X$ com $p \in X\}$.

No quarto capítulo ainda se registra o fato que a dimensão da variedade das singularidades da interseção $X \cap H$, onde $H \subseteq \mathbb{P}^n$ é um hiperplano satisfaz a condição

$$2\dim X - n + 2 \leq \dim \mathrm{Si}ng(X \cap H) \leq n - \dim X - 2.$$

Por fim, trataremos do objetivo desta dissertação, que é estudar condições para que uma determinada variedade algébrica $X \subseteq \mathbb{P}^n$ seja isomorfa a uma subvariedade em $\mathbb{P}^{n-1}$.

A intensão fundamental deste trabalho é responder sob certas condições e a medida do possível a pergunta a seguir:

(*) Que condições são suficientes a uma variedade não-singular e não degenerada $X \subseteq \mathbb{P}^n$ sobre um corpo algebricamente fechado de característica nula para que se garanta a existência de um ponto $\theta \in \mathbb{P}^n - X$ tal que a projeção

$$\begin{aligned} \pi_\theta : X &\longrightarrow \overline{X} \subseteq \mathbb{P}^{n-1} \\ x &\longmapsto \overline{\theta x} \cap \mathbb{P}^{n-1} = z, \end{aligned}$$

onde $\overline{\theta x}$ denota a reta que passa por θ e por $x \in X$, seja bijetiva e que a inversa

$$\begin{aligned} \pi_\theta^{-1} : \overline{X} &\longrightarrow X \subseteq \mathbb{P}^{n-1} \\ z &\longmapsto x \end{aligned}$$

seja regular?

Ou seja, π_θ seja um isomorfismo entre X e $\overline{X}$.

Ou ainda, fornecer condições para que X seja projetável isomorficamente sobre sua imagem $\overline{X}$ em $\mathbb{P}^{n-1}$.

O lema, a seguir, caracteriza geometricamente um isomorfismo destes. A caracterização fornecida por ele nos dá o caminho básico para respondermos a pergunta acima.

Lema: Sejam $X \subseteq \mathbb{P}^n$ com variedade não-singular sobre o corpo K algebricamente fechado e,

$$\begin{array}{rlll} \pi_\theta: & X & \longrightarrow & \overline{X} \subseteq \mathbb{P}^{n-1} \\ & x & \longmapsto & \overline{\theta x} \cap \mathbb{P}^{n-1} \end{array}$$

a projeção desde o ponto θ. Então , π_θ é um isomorfismo se, e somente se, π_θ é injetiva e para cada $x \in X$, a diferencial $(d\pi_\theta)_x : T_xX \longrightarrow T_{\pi_\theta(x)}\overline{X}$, é injetiva (veja [JH] - 179).

Nas hipóteses deste lema, podemos dizer que

$$\begin{array}{rlll} \pi_\theta: & X & \longrightarrow & \overline{X} \subseteq \mathbb{P}^{n-1} \\ & x & \longmapsto & \overline{\theta x} \cap \mathbb{P}^{n-1} \end{array}$$

é um isomorfismo se $\theta \notin \overline{xy}$; $x \neq y$ em X e, nenhuma reta $\overline{\theta x}$ está contida no espaço tangente T_xX. Isto porque, se $\theta \in \overline{xy}$ para algum $x \neq y$ em X, temos $\pi_\theta(x) = \pi_\theta(y)$. E, se $\overline{\theta x} \subset T_xX$ para algum $x \in X$, então $(d\pi_\theta)_x(\{\overline{\theta x}\}) = \overline{\theta x} \cap \mathbb{P}^{n-1}$ é um ponto. Portanto, a pergunta $(*)$ estará respondida para uma certa variedade $X \subseteq \mathbb{P}^n$, conforme no lema, se pudermos garantir que o conjunto $\{z \in \mathbb{P}^n \mid z \in \overline{xy}$ para alguns $x \neq y$ em X, ou quando $z \in \overline{\theta x}$ para algum x, com $\overline{\theta x} \subset T_xX\}$, seja um subconjunto próprio de $\mathbb{P}^n$.

$(**)$ Afirmação: Se $X \subseteq \mathbb{P}^n$ é uma variedade não-singular e não degenerada, então o conjunto

$$D = \{z \in \mathbb{P}^n \mid z \in \overline{xy};\ \text{para algum } x \neq y \text{ em } X \text{ ou } z \in l \subset T_xX \text{ e algum } x \in X\},$$

é uma variedade.

De fato:

Consideremos

$$\begin{aligned} S^\circ(X) &= \{\overline{xy} \in \mathbb{G}(1,n) \mid x \neq y;\ x \in X\} \\ Sec^\circ(X) &= \{z \in \mathbb{P}^n \mid \exists\, x \in X \text{ e } \overline{zx} \in S^\circ(X)\} \\ S(X) &= fecho\,\{S^\circ(X)\} \subseteq \mathbb{G}(1,n) \end{aligned}$$

onde $\mathbb{G}(1,n)$ denota a Grassmaniana das retas de $\mathbb{P}^n$.

Pela proposição (3.1), temos que a união $\bigcup_{l\in S(X)} l \subseteq \mathbb{P}^n$, é uma variedade em $\mathbb{P}^n$. Por outro lado a proposição (4.24) nos garante que

$$S(X) = S^\circ(X) \cup \{l \in \mathbb{G}(1,n) \mid \exists\, x \in X, x \in l \subset T_xX\},$$

para o caso da variedade X ser não-singular.

Definição: A variedade secante denotada por $Sec(X)$, de uma variedade $X \subseteq \mathbb{P}^n$ não-singular, é definida por $Sec(X) = \bigcup_{l\in S(X)} l \subseteq \mathbb{P}^n$. Portanto, se X satisfaz as exigências do lema acima, tem-se que X é isomorfa a sua imagem $\overline{X} \subseteq \mathbb{P}^{n-1}$, se, e somente se, $Sec(X)$ é uma subvariedade própria de $\mathbb{P}^n$.

Mas como afirmar ou negar que a variedade $Sec(X)$ é uma subvariedade própria de $\mathbb{P}^n$?

A proposição (2.22) garante que se $Sec(X)$ for uma subvariedade própria de $\mathbb{P}^n$, a dimensão de $Sec(X)$ é menor que n. Por outro lado a proposição (3.7), nos garante que a dimensão da variedade $Sec(X)$ é limitada superiormente por $2\dim X + 1$. Este resultado, por si só, já garante que toda curva $X \subseteq \mathbb{P}^n$ com $n \geq 4$, X não-singular e não degenerada, é projetável isormoficamente em $\mathbb{P}^{n-1}$. Outro exemplo de uma variedade $X \subseteq \mathbb{P}^n$ dentro das hipóteses do lema acima, é a variedade de Segre $\sigma(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^7) \subseteq \mathbb{P}^{23}$, de dimensão igual a 9, e onde $\dim Sec(\sigma(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^7)) \leq 19 < 23$. Portanto $\sigma(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^7)$ é projetável isomorficamente em $\mathbb{P}^{22}$. Mas o que dizer a respeito da variedade secante da Grassmaniana $\mathbb{G}(1,5)$ onde $\mathbb{G}(1,5) \subseteq \mathbb{P}^{14}$, $\dim \mathbb{G}(1,5) = 8$ e $2\dim \mathbb{G}(1,5) + 1 = 17 > 14$? Neste caso, pelo menos para a variedade $\mathbb{G}(1,5)$, o resultado da proposição (3.7) não ajuda na resposta que procuramos para a pergunta $(*)$ acima.

Pensando bem, se quizermos responder a pergunta $(*)$ só teremos dois caminhos aparentemente distintos a seguir:

a) Ou mostramos que $\dim Sec(X) \leq n-1$

b) Ou exibimos um ponto $P \in \mathbb{P}^n$ tal que $P \notin \overline{xy}\ \forall\, x \neq y$ em X e que $\overline{PQ}$ não esteja contida em $T_QX\ \forall\, Q \in X$.

A seguir, exibiremos o teorema fundamental desta monografia, o teorema (4.36), acompanhado de um esboço de sua demonstração baseada no lema (4.28) devido a Terracini, na proposição (4.31) do próprio Zak e no corolário (4.35), todos contidos neste trabalho.

Teorema (4.36). Seja $X \subseteq \mathbb{P}^n$, variedade não-singular que gera $\mathbb{P}^n$ sobre um corpo K, algebricamente fechado de característica nula que, pode ser projetada sobre sua imagem $\overline{X} \subseteq \mathbb{P}^{n-1}$, então, a dimensão da variedade X, é no máximo igual a $\frac{2}{3}(n-2)$.

Esbocemos a demonstração deste teorema considerando; um ponto não-singular $z \in Sec(X)$, $\sum(z) = \{x \in \mathbb{P}^n \mid \overline{zx} \in S^\circ(X)\}$ e $Q_z = \{x \in X \mid x \in \sum(z)\}$.

Se $x \in Q_z$, e H é um hiperplano de $\mathbb{P}^n$ contendo o espaço tangente $T_zSec(X)$, temos $T_x(X \cap H) = T_x(X)$ pois se $x \in \sum(z)$ existe $y \neq x$ em X tal que $\overline{zx} = xy$ e, pelo lema de Teracini, o subespaço linear de $\mathbb{P}^n$ gerado por T_xX e T_yX esta contido em $T_zSec(X)$. Ou seja,

$$T_x(X \cap H) = T_x(X) \cap T_xH = T_xX \cap H = T_xX.$$

Portanto, $\dim T_x(X \cap H) > \dim(X \cap H)$. Ou seja, $x \in Sing(X \cap H)$. Mas $x \in Q_z$ e $\dim Q_z \geq 2\dim X - n + z$ (proposição 3.1) e $\dim Sing(X \cap H) \leq n - \dim X - 2$ para cada hiperplano $H \subseteq \mathbb{P}^n$ que não contenha X, corolário (4.35) portanto,

$$2\dim X - n + 2 \leq \dim Sing(X \cap H) \leq n - \dim X - 2.$$

E daí $\dim X < \frac{2}{3}(n-2)$.■

Neste caso, o teorema de Zak já nos garante que se $\dim X > \frac{2}{3}(n-2)$, X não é projetável isomorficamente em $\mathbb{P}^{n-1}$.

Restamos agora perguntar:

i) Que variedades $X \subseteq \mathbb{P}^n$ conforme no teorema (4.36) são tais que $\dim X < \frac{2}{3}(n-2)$ e que $\dim Sec(X) \leq n-1$?

ii) Que variedades $X \subseteq \mathbb{P}^n$ conforme no teorema (4.36) são tais que $\dim X = \frac{2}{3}(n-2)$ e que $\dim Sec(X) \leq n-1$?

A pergunta (i) continua em aberto. Com respeito a (ii), Zak mostrou que só existem quatro variedades $X \subseteq \mathbb{P}^n$ tais que X é não-singular e não degenerada em $\mathbb{P}^n$ sobre um corpo algebricamente fechado e tais que

$$\dim X = \frac{2}{3}(n-2) \quad \text{e} \quad \dim Sec(X) \leq n-1.$$

De três destas variedades, a saber: a variedade de Veronese $v_2(\mathbb{P}^2) \subseteq \mathbb{P}^5$ a variedade de Segre $\sigma(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2) \subseteq \mathbb{P}^8$ e a Grassmaniana $\mathbb{G}(1,5) \subseteq \mathbb{P}^{14}$ das retas de $\mathbb{P}^5$, encontramos para cada uma delas, um ponto $P \in \mathbb{P}^n$ tal que P não pertence à variedade secante de cada variedade em questão, conforme podemos ver nas proposições (3.38), (3.39) e (3.40) desta dissertação. A variedade $E^{16} \subseteq \mathbb{P}^{26}$, determinada por Zak, foge do contexto, em virtude disto, não é estudada aqui.

CAPÍTULO 1

§1) Preliminares

Iniciaremos este trabalho apresentando os conceitos básicos necessários à sua execução. São eles: Os corpos, na maioria das vezes, algebricamente fechados, mas indistintamente denotados pela letra K; o conjunto das n-uplas $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ de elementos do corpo K, denotado por $\mathbb{A}^n(K)$ ou por $\mathbb{A}^n$ e denominado de *espaço afim* sobre o corpo K; o anel de polinômios a n indeterminadas com coeficientes no corpo K, denotado por $K[X_1, X_2, ..., X_n]$; o conjunto de todos os zeros dum polinômio F em $K[X_1, X_2, ..., X_n]$ denotado por $Z(F)$; o conjunto de zeros comuns a uma família $F_1, F_2, ..., F_r$ de polinômios em $K[X_1, X_2, ..., X_n]$ denotado por $Z(F_1, F_2, ..., F_r)$, onde se tem $Z(F_1, ..., F_r) = \bigcap_{i=1}^{r} Z(F_i)$; o conjunto de zeros comuns a uma família S de polinômios em $K[X_1, X_2, ..., X_n]$ denotado por $Z(S)$; em particular, o conjunto de zeros de um polinômio em $K[X_1, X_2, ..., X_n]$ de grau um, chamado de hiperplano em $\mathbb{A}^n(K)$; conjunto de zeros de um polinômio F em $K[X_1, X_2]$, chamado de curva plana afim em $\mathbb{A}^2(K)$; conjunto de zeros de polinômios em $K[X_1, ..., X_n]$ de graus dois, três e quatro; as quádricas, as cúbicas e as quárticas em $\mathbb{A}^n(K)$. E por fim, os ideais do anel $K[X_1, X_2, ..., X_n]$.

Exemplos 1.1:

1) Se $S = K[X_1, X_2, ..., X_n]$ então $Z(S)$ é o conjunto vazio para cada corpo K.

2) Se $S = \{F_1, F_2, ..., F_r\}$ então $Z(S)$ é o conjunto de soluções de um sistema com r equações algébricas.

3) Se $X = Z(y^2 - x^3(x+1)) \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ então X é uma curva plana afim.

4) Embora a curva $y = \cos x$, seja uma curva plana em $\mathbb{R}^2$, não é uma curva plana afim em $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$.

Definição 1.2: Um subconjunto X de $\mathbb{A}^n(K)$ será denominado *conjunto algébrico afim*, quando X for um $Z(S)$ para algum $S \subset K[X_1, X_2, ..., X_n]$.

Exemplos 1.3

1) $\mathbb{A}^n(K) = Z(0)$

2) O conjunto $Y = \{(t, sen\, t), t \in \mathbb{R}\}$ não é um conjunto algébrico afim em $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$.

3) $Z(y^2 - x^4) = Z(y - x^2) \cup Z(y + x^2)$ é uma curva afim.

Proposição 1.4: Para cada subconjunto A do espaço afim $\mathbb{A}^n(K)$, temos que: $I(A) = \{F \in K[X_1, X_2, ..., X_n] \mid F(a) = 0 \ \forall a \in A\}$, é um ideal do anel $K[X_1, X_2, ..., X_n]$, denominado ideal do conjunto A.

Demonstração:

Se A é vazio, então $I(A) = K[X_1, X_2, ..., X_n]$ por vacuidade.

Se $A \neq \phi$, o polinômio nulo pertence a $I(A)$. Se F e G estão em $I(A)$, e H em $K[X_1, X_2, ..., X_n]$ temos $(F \pm G)(a) = F(a) \pm G(a) = 0 \quad \forall\, a \in A$ e $(H.F)(a) = H(a)\,.\,F(a) = 0 \quad \forall\, a \in A$.
Ou seja, $I(A)$ é um ideal de $K[X_1, X_2, ..., X_n]$.■

Propriedades de conjuntos algébricos afins e de ideais de conjuntos

Proposição - 1.5:

a_1) Se I é o ideal gerado por $S \subset K[X_1, X_2, ..., X_n]$, então, $Z(I) = Z(S)$.

a_2) Se $I \subset J$, então $Z(I) \supset Z(J)$.

a_3) $Z(F, G) = Z(F) \cap Z(G)$ para dois polinômios F e G quaisquer. Por outro lado, $Z(I) \cup Z(J) = Z(\{F.G \mid F \in I \text{ e } G \in J\})$. Ou seja, a união finita de conjuntos algébricos, em $\mathbb{A}^n(K)$, é um conjunto algébrico em $\mathbb{A}^n(K)$.

a_4) $Z(X_1 - a_1, X_2 - a_2, ..., X_n - a_n) = \{(a_1, a_2, ..., a_n)\}$. Daí se conclui que todo conjunto finito é algébrico.

i_1) Se $Y \subset X$, então $I(X) \subset I(Y)$

i_2) $I(\Phi) = K[X_1, X_2, ..., X_n]$

i_3) $I(\mathbb{A}^n(K)) = \langle 0 \rangle$ se K for infinito.

i_4) $I\{(a_1, a_2, ..., a_n)\} = (X_1 - a_1, X_2 - a_2, ..., X_n - a_n)$

Demonstração:

Demonstraremos, aqui, apenas as propriedades (i_3) e (i_4)

Provemos (i_3)

Em princípio, tem-se que o ideal nulo $\langle 0 \rangle \subset R$ está contido em qualquer ideal I num anel R.

Usaremos indução em n.

Tomemos pois $F \in I(\mathbb{A}^1(K))$. Ou seja, $F(x) = 0 \ \forall \ x \in \mathbb{A}^1(K)$. Como o corpo K é infinito, temos $F = 0$ em $K[X]$. Portanto $I(\mathbb{A}^n(K)) = \langle 0 \rangle$ para $n = 1$. Suponhamos que $I(\mathbb{A}^{n-1}(K)) = \langle 0 \rangle$, ou seja, se $F(a) = 0 \ \forall \ a \in \mathbb{A}^{n-1}(K)$

tenha-se $F = 0$ em $K[X_1, X_2, ..., X_{n-1}]$. Provemos que $I(\mathbb{A}^{n-1}(K)) = 0$ implica $I(\mathbb{A}^n(K)) = 0$. De fato, seja

$$G(X_1, X_2, ..., X_{n-1}, X_n) = \sum G_i(X_1, X_2, ..., X_{n-1})X_n^i$$

um elemento em $I(\mathbb{A}^n(K))$. Portanto $G(a_1, a_2, ..., a_{n-1}, b) = 0$ para cada

$$a = (a_1, a_2, ..., a_{n-1}) \in \mathbb{A}^{n-1}(K)$$

e cada b no corpo K. Sendo assim, cada polinômio

$$G_a(X_n) = \sum G_i(a_1, a_2, ..., a_{n-1})X_n^i$$

tem infinitos zeros em K, sendo portanto o polinômio nulo em $K[X_n]$. E daí se ter que cada G_i pertence ao ideal $I(\mathbb{A}^{n-1}(K))$. No que resulta, $G = 0$ em $K[X_1, X_2, ..., X_n]$.

Provemos agora (i_4)

O ideal I do ponto $(a_1, a_2, ..., a_n)$ contém o ideal $J = \langle X_1 - a_1, ..., X_n - a_n \rangle$, uma vez que cada polinômio F no ideal $J = \langle X_1 - a_1, ..., X_n - a_n \rangle$ é da forma:

$$F = F_1(X_1 - a_1) + \cdots + F_n(X - a_n), \quad F_i \in K[X_1, ..., X_n]$$

Por outro lado afirmamos: Se $F(X_1, X_2, ..., X_n)$ se anula em $(a_1, a_2, ..., a_n)$, existem $\lambda_i \in K$ tais que

$$F(X_1, X_2, ..., X_n) = \sum_{i=(i_1, i_2, ..., i_n)} \lambda_i (X_1 - a_1)^{i_1}.(X_2 - a_2)^{i_2} ... (X_n - a_n)^{i_n},$$

com $i_1 + i_2 + ... + i_n \geq 1$.

Uma vez que, se definirmos

$$\begin{aligned} \phi : \ & K[X_1, X_2, ..., X_n] \longrightarrow K[X_1, X_2, ..., X_n] \\ & p(X_1, X_2, ..., X_n) \longmapsto p(X_1 - a_1, X_2 - a_2, ..., X_n - a_n) \end{aligned}$$

temos que ϕ é um isomorfismo de anéis. Neste caso, existe $G \in K[X_1, X_2, ..., X_n]$ tal que $\phi(G) = F$. Ou seja,

$$G(X_1 - a_1, X_2 - a_2, ..., X_n - a_n) = F(X_1, X_2, ..., X_n).$$

Portanto, $F(X_1, X_2, ..., X_n) = \sum \lambda_i (X_1 - a_1)^{i_1}(X_2 - a_2)^{i_2}...(X_n - a_n)^{i_n}$. Como $F(a_1, a_2, ..., a_n) = 0$ tem-se que $i_1 + i_2 + ... + i_n \geq 1$. Mostrando-se que $F \in \langle X_1 - a_1, X_2 - a_2, ..., X_n - a_n \rangle$.■

Definição 1.6: Um subconjunto algébrico $X \subset \mathbb{A}^n(K)$ diz-se *redutível* quando existem subconjuntos não vazios próprios e algébricos X_1 e X_2 do conjunto X tais que $X = X_1 \cup X_2$. Caso contrário, X é dito *irredutível*.

Proposição 1.7: Um conjunto algébrico $X \subset \mathbb{A}^n(K)$ é irredutível se, e somente se, o ideal $I(X)$ do conjunto X é primo.

Demonstração:

Suponhamos que exista um subconjunto algébrico irredutível $X \subset \mathbb{A}^n(K)$, cujo ideal $I(X)$ não seja primo. Tomemos F_1 e F_2 polinômios em $K[X_1, X_2, ..., X_n]$ tais que F_1F_2 esteja em $I(X)$ e que $F_i \notin I(X)$ para $i = 1, 2$. Neste caso, $Z(F_1F_2) \supset Z(I(X)) = X$ e $Z(F_1) \cup Z(F_2) \supset X$. Mas, $X = (X \cap Z(F_1)) \cup (X \cap Z(F_2))$ e por hipótese, X é irredutível. Portanto, $X = (X \cap Z(F_1))$ ou $X = (X \cap Z(F_2))$. Ou seja, $Z(F_i) \supset X$, para $i = 1$ ou $i = 2$. Logo, ou $F_1 \in I(X)$ ou $F_2 \in I(X)$. Conseqüentemente, se X é irredutível então $I(X)$ é primo.

Reciprocamente, se $X = X_1 \cup X_2$; X_i algébricos próprios, temos $I(X_i) \supsetneq I(X)$ para $i = 1, 2$. Tomemos $F_i \in I(X_i)$, $i = 1, 2$ tais que $F_i \notin I(X)$, tendo-se $F_1F_2 \in I(X)$. Ou seja, se X é redutível, $I(X)$ não é primo.■

Exemplo 1.8:

1) $A = Z(y^4 - x^2, y^4 - x^2y^2 + xy^2 - x^3) \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ é um conjunto algébrico redutível, pois

$$\begin{aligned}
&Z(y^4 - x^2, y^4 - x^2y^2 + xy^2 - x^3) = \\
&= Z(y^2 + x) \cup Z(y^2 - x, y + x) \cup Z(y^2 - x, y - x) \text{ pois} \\
&y^4 - x^2y^2 + xy^2 - x^3 = (y^2 - x^2)(y^2 + x),\ y^4 - x^2 = (y^2 + x)(y^2 + x) \text{ e} \\
&Z(y^4 - x^2, y^4 - x^2y^2 + xy^2 - x^3) = Z[(y^2 + x)(y^2 - x), (y^2 - x^2)(y^2 + x)] = \\
&= Z(y^2 + x) \cup Z(y^2 - x, (x + y)(x - y)) = \\
&= Z(y^2 + x) \cup \{Z(y^2 + x) \cap [Z(x + y) \cup Z(x - y)]\} \\
&= Z(y^2 + x) \cup \{[Z(y^2 + x) \cap Z(x + y)] \cup [Z(x + y) \cap Z(x - y)]\}.
\end{aligned}$$

2) $Z(y - x^2) \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ é irredutível.

3) $Z(y^2 + x^2) \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ é redutível, pois $Z(x^2 + y^2) = Z(x + iy) \cup Z(x - iy)$.

4) O ideal gerado pelos polinômios

$$\begin{aligned}
F(x, y) &= y^4 - x^2, \text{ e} \\
G(x, y) &= y^4 - x^2y^2 + xy^2 - x^3
\end{aligned}$$

em $\mathbb{C}[X, Y]$, não é um ideal primo, pois $Z(F, G)$ é redutível em $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$.

A topologia de Zariski em $\mathbb{A}^n(K)$

Proposição 1.9: Seja $\mathcal{Z}$ a família de todos os subconjuntos algébricos de $\mathbb{A}^n(K)$. Então:

Z_1) $\mathbb{A}^n(K) \in \mathcal{Z}$.

Z_2) O conjunto vazio $\Phi \in \mathcal{Z}$

Z_3) Se $(A_\alpha)_\alpha$ é uma familia de elementos $\mathcal{Z}$ então $\bigcap_\alpha A_\alpha$ é um elemento de $\mathcal{Z}$

Z_4) Se $\underset{1\leq i\leq m}{(A_i)}$ é uma família finita de elementos de $\mathcal{Z}$, então, a união $\bigcup_{i=1}^{m} A_i$ é um elemento de $\mathcal{Z}$.

Demonstração:

Z_1) Veja 1.3 (1)

Z_2) $\Phi = Z(1)$ veja 1.3 (2)

Z_3) Afirmação: A interseção $\bigcap_{\alpha} A_\alpha = Z(\bigcup_{\alpha} S_\alpha)$, para certos S_α em $K[X_1, X_2, ..., X_n]$.

De fato, para cada conjunto algébrico A_α existe $S_\alpha \subset K[X_1, X_2, ..., X_n]$ tal que $A_\alpha = Z(S_\alpha)$. Assim, se $x \in \bigcap_{\alpha} A_\alpha$ então $x \in \bigcap_{\alpha} Z(S_\alpha)$ e $F(x) = 0$ para cada F em S_α e para todo α. Portanto, $F(x) = 0$ para todo $F \in \bigcup_{\alpha} S_\alpha$. Ou seja, $\bigcap_{\alpha} A_\alpha \subset Z(\bigcup_{\alpha} S_\alpha)$. Reciprocamente, se $y \in Z(\bigcup_{\alpha} S_\alpha)$, onde $Z(S_\alpha) = A_\alpha$, temos $H(y) = 0$ para cada HS_α. Ou seja, $H(y) = 0$ para cada $H \in S_\alpha$ para todo α. Portanto, $y \in \bigcap_{\alpha} A_\alpha = \bigcap_{\alpha} Z(S_\alpha) \in \mathcal{Z}$.

Z_4) Sejam A_1e A_2 na família $\underset{1\leq i\leq m}{(A_i)}$ e $I = I(A_1)$, $J = I(A_2)$ seus ideais.

Afirmação: $A_1 \cup A_2 = Z(\{F.G \mid F \in I \text{ e } G \in J\})$.

De fato, se $x \in A_1 \cup A_2 \Longrightarrow x \in A_1$ ou $x \in A_2 \Longrightarrow F(x) = 0 \ \forall \ F \in I$ ou $G(x) = 0 \ \forall \ G \in J \Longrightarrow x \in Z(\{F.G \mid F \in I \text{ e } G \in J\})$.

Reciprocamente, se $y \in Z(\{F.G \mid F \in I \text{ e } G \in J\})$, temos $(F.G)(y) = 0$ para $F \in I$ e $G \in J$. Suponhamos que $y \notin A_1 \Longrightarrow \exists \ F_0 \in I$ tal que $F_0(y) \neq 0$. Mas $F_0.G \in J \ \forall \ G \in J$, isso implica que $(F_0.G)(y) = 0$. Ou seja, $G(y) = 0 \Longrightarrow y \in A_2$. Assim, $A_1 \cup A_2 = Z(\{F.G \mid F \in I \text{ e } G \in J\})$ é fechado. Portanto $\bigcup_{1\leq i\leq m} A_i \in \mathcal{Z}$.■

Definição 1.10: Denominaremos de conjunto *aberto* em $\mathbb{A}^n(K)$ todo subconjunto $A \subset \mathbb{A}^n(K)$ tal que exista um subconjunto algébrico $B \in \mathcal{Z}$, e que $A = \mathbb{A}^n(K) - B$.

Observação 1.11: A família de todos os subconjuntos abertos de $\mathbb{A}^n(K)$, define em $\mathbb{A}^n(K)$ uma topologia, denominada *Topologia de Zariski* em $\mathbb{A}^n(K)$. (Veja proposição 1.9).

Espaços Projetivos

Consideremos x e y pontos do espaço afim $\mathbb{A}^{n+1}(K)$, $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Se definirmos $x \sim y$ quando $x = \lambda y$ para algum $\lambda \neq 0$ em K, estabelecemos uma relação de equivalência $\sim$ no conjunto $A^{n+1}(K) - \{\bar{0}\}$.

Definição 1.12: Denomina-se *Espaço Projetivo* n-dimensional sobre o corpo K, ao conjunto $\dfrac{A^{n+1}(K) - \{0\}}{\sim}$, denotado por $\mathbb{P}^n$ ou por $\mathbb{P}^n(K)$. Como um elemento P de $\mathbb{P}^n(K)$ é a classe de equivalência da $(n+1)$-upla $(x_0, x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{A}^{n+1}(K)$, denotamos o ponto P por $[x_0 : x_1 : ... : x_n]$. Cada $(n+1)$-upla representante de sua classe de equivalência, denomina-se um *sistema de coordenadas homogêneas* do ponto P.

Exemplos 1.13:

1) Consideremos o conjunto de todas as retas pela origem no espaço afim $\mathbb{A}^{n+1}(K)$. Como os elementos deste conjunto de retas, está em correspondência biunívoca com as classes de equivalência da relação definida anteriormente em $\mathbb{A}^{n+1}(K) - \{0\}$, podemos identificar este com o n-espaço projetivo $\mathbb{P}^n(K)$.

2) Seja V um espaço vetorial $(n+1)$-dimensional sobre o corpo K. Seja $f : V \to \mathbb{A}^{n+1}(K)$ um isomorfismo de espaços vetoriais. Se definirmos para cada par (v, w) em $V^2 - \{(0,0)\}$, a relação $v \bar{R} w$ quando existe $\lambda \neq 0$

em K tal que $v = \lambda w$, a relação $\bar{R}$ é de equivalência e, a aplicação

$$\begin{array}{rcl} \bar{f} : \dfrac{V - \{0\}}{\bar{R}} & \longrightarrow & \dfrac{\mathbb{A}^{n+1}(K) - \{0\}}{\sim} \\ \bar{v} & \longmapsto & \bar{f}(\bar{v}) = \overline{f(v)} \end{array}$$

estabelece uma correspondência biunívoca entre estes conjuntos. Portanto, $\dfrac{V - \{0\}}{\bar{R}}$ é identificado com o n-espaço projetivo sobre o corpo K, denotado por $\mathbb{P}^n(V)$ ou $\mathbb{P}^n V$.

Observação 1.14: Consideremos a família $\left\{ \bigcup_{1 \le i \le n+1} U_i \right\}$ de subconjuntos do espaço $\mathbb{P}^n(K)$ onde

$$U_i = \{[x_1 : x_2 : ... : x_{n+1}] \in \mathbb{P}^n(K) \mid x_i \neq 0\}, \ i \in \{1, 2, ..., n+1\}$$

Se definirmos as aplicações,

$$\begin{array}{rl} \Phi_i : & \mathbb{A}^n \longrightarrow U_i \\ & (a_1, ..., a_2) \longmapsto [a_1 : a_2 : ... : a_{i-1} : 1 : a_i : ... : a_n] \end{array}$$

estabelecemos uma correspondência biunívoca entre os pontos de $\mathbb{A}^n$ e os pontos de cada U_i. Além disto, $\mathbb{P}^n(K) = \bigcup_{i=1}^{n+1} U_i$, mostra que, $\mathbb{P}^n$ é coberto por $n+1$ conjuntos cada um dos quais podendo ser considerado como um n-espaço afim.

Consideremos $H_\infty = \mathbb{P}^n(K) - U_{n+1} = \{[x_1 : x_2 : ... : x_n : x_{n+1}] \mid x_{n+1} = 0\}$. H_∞ é denominado hiperplano no infinito. A correspondência $[x_1 : x_2 : ... : x_n : 0] \leftrightarrow [x_1 : x_2 : ... : x_n]$ mostra que H_∞ pode ser identificado com $\mathbb{P}^{n-1}$. A escolha de U_{n+1} na definição de H_∞, é irrelevante, ou seja, na realidade, podemos definir $(n+1)$ hiperplanos no infinito, um para cada U_i.

Definição 1.15: Um ponto $P = [a_0 : a_1 : ... : a_n] \in \mathbb{P}^n$ é dito um zero do polinômio $F(X_0, X_1, ..., X_n)$ em $K[X_0, X_1, ..., X_n]$ se $F(\lambda\ a_0, \lambda\ a_1, ..., \lambda\ a_n) = 0$

para todo $\lambda \neq 0$ no corpo K. Se P é um zero de F, dizemos que F se anula em P, denotando isto por $F(P) = 0$.

Observação 1.16: Se K é um corpo infinito e se P é um zero do polinômio $F = F_d + F_{d+1} + ... + F_r \in K[X_0, X_1, ..., X_n]$, onde cada F_i é um polinômio homogêneo de grau i, então P é também um zero de cada forma F_i. Daí se conclui que se F se anula em P, cada parcela homogênea de F também se anula em P.

Para cada subconjunto S de $K[X_0, X_1, ..., X_n]$, denota-se $Z(S)$ o conjunto dos pontos $P \in \mathbb{P}^n$ tais que $F(P) = 0$ para cada F em S.

Proposição 1.17:

1) Se $S \subset K[X_0, X_1, ..., X_n]$, e $I = \langle S \rangle$ é o ideal gerado por S temos: $Z(I) = Z(S)$.

2) Se I é o ideal gerado por $F_1, F_2, ..., F_r$, e $F_i = \Sigma F_{ij}$ com F_{ij} formas de grau j em $K[X_0, X_1, ..., X_n]$, (K-infinito) então:

$$Z(I) = Z(\{F_{ij}\}) \ ; \ 1 \leq i \leq r$$

Demonstração:

Provemos somente (2).

Seja $I = \langle F_1, F_2, ..., F_r \rangle$ com $F_i = \Sigma F_{ij}$ (F_{ij} formas de grau j). Se $P \in Z(I)$, $F_i\,(P) = 0 \ \forall \ i \in \{1, 2, ..., r\}$ e, portanto, $F_{ij}(P) = 0$, $1 \leq i \leq r$, e cada j. Ou seja, $P \in Z(F_{ij})$.

Reciprocamente, se $Q \in Z(\{F_{ij}\})$, temos que $F_{ij}(Q) = 0$; para todo $i \in \{1, 2, ..., r\}$ e para cada j. Daí se ter, $F_i(Q) = 0 \ \forall \ i \in \{1, 2, ..., r\}$. Assim, $Z(I) = Z\{F_{ij}\})$.■

Definição 1.18: Um subconjunto $X \subset \mathbb{P}^n$ é chamado *conjunto algébrico projetivo*, ou conjunto algébrico em $\mathbb{P}^n$ se X é o conjunto de zeros comuns a uma família de formas em $K[X_0, X_1, X_2, ..., X_n]$.

Exemplos 1.19:

1) $Z(1) = \Phi$ é um conjunto algébrico em $\mathbb{P}^n$.

2) $Z(0) = \mathbb{P}^n$ é algébrico em $\mathbb{P}^n$ por definição.

3) O conjunto de pontos da reta $L = \{[x_0 : x_1 : 0 : 0] \in \mathbb{P}^3\}$ é um conjunto algébrico em $\mathbb{P}^3$, onde $L = Z(X_2, X_3)$.

4) O conjunto $H = \{[x_0 : x_1 : x_2 : 0] \in \mathbb{P}^3\}$ é um conjunto algébrico em $\mathbb{P}^3$, pois $H = Z(X_3) \subsetneq \mathbb{P}^3$.

5) As imagens $\bigwedge$ das inclusões $\mathbb{P}^k \hookrightarrow \mathbb{P}^n$; $k \leq n$ são conjuntos algébricos em $\mathbb{P}^n$. Se $k = 1$, $\bigwedge$ é uma reta em $\mathbb{P}^n$; se $k = n - 1$, $\bigwedge$ é um hiperplano em $\mathbb{P}^n$. De modo geral, $\bigwedge$ é denominado de k-plano em $\mathbb{P}^n$, ou um k subespaço linear em $\mathbb{P}^n$.

Definição 1.20: Se K é um corpo infinito, um ideal I do anel $K[X_0, X_1, ..., X_n]$ é denominado *ideal homogêneo* se para cada $F = \Sigma F_i \in I$ com F_i formas de grau i, temos que $F_i \in I \ \forall \ i$. Para cada subconjunto X do espaço $\mathbb{P}^n$, temos que o conjunto que consiste dos polinômios no anel $K[X_0, X_1, ..., X_n]$ que se anulam em cada ponto de X, é um ideal do anel $K[X_0, X_1, ..., X_n]$. Este ideal, denotado por $I(X)$, é denominado o ideal de X. Neste caso, pela proposição 1.17, para cada $X \subset \mathbb{P}^n$, o ideal $I(X)$ do conjunto X, é homogêneo.

Definição 1.21: Um subconjunto $X \subset \mathbb{P}^n$ é redutível quando existem subconjuntos algébricos próprios, não vazios X_1 e X_2 de X tais que $X = X_1 \cup X_2$. Caso contrário, X é irredutível.

Observação 1.22: Pode-se mostrar que qualquer conjunto algébrico afim ou projetivo X, pode ser expresso como uma união finita de subconjuntos algébricos e irredutíveis, denominadas componentes irredutíveis X. Um subconjunto irredutível de $\mathbb{P}^n$ é denominado uma variedade projetiva.([W.F] - 16)

Proposição 1.23: Um subconjunto $X \subset \mathbb{P}^n$ é uma variedade projetiva se, e somente se, seu ideal $I(X)$, é um ideal primo.

Demonstração:

Análoga ao caso afim. (veja: 1.7)■

Proposição 1.24: Se $X \subset \mathbb{A}^n$ ou $X \subset \mathbb{P}^n$ é algébrico, então, X é solução de um sistema finito de equações algébricas.

Demonstração:

Se X é algébrico afim ou projetivo, existe $S \subset K[X_0, X_1, ..., X_n]$ tal que $X = Z(S)$. Seja I o ideal gerado por S. Como $Z(S) = Z(I)$ e I é finitamente gerado (teorema da base de Hilbert) e $K[X_0, X_1, ..., X_n]$, é um anel noetheriano temos:

$$Z(I) = Z(F_1, F_2, ..., F_r) = Z(S) = X$$

onde F_i são os geradores de I. Ou seja, $X = \bigcap_{i=1}^{r} Z(F_i)$.■

GRASSMANIANAS

Vimos, anteriormente, correspondências biunívocas entre a coleção de subespaços vetoriais de dimensão um e conjunto de pontos de espaços projetivos. Vimos $\mathbb{P}^n$ coberto pelos elementos da família $\{U_i\}_{1 \leq i \leq n+1}$ que são cópias exatas de espaços afins, $\mathbb{A}^n$.

Podemos indagar agora, se é possível estabelecer correspondências entre conjunto de retas de um $\mathbb{P}^n$ com subconjunto de algum $\mathbb{P}^m$. E, no caso afirmativo, se tal correspondência se dá em alguma variedade de $\mathbb{P}^m$.

Responderemos tal indagação afirmativamente, para um caso simples porém fecundo, onde mostraremos que o conjunto das retas de $\mathbb{P}^3$ (ou 2-planos de $\mathbb{A}^4$) está em correspondência biunívoca com um subconjunto de $\mathbb{P}^5$ e, que, tal subconjunto é um conjunto algébrico de $\mathbb{P}^5$.

Antes, porém, apresentaremos alguns resultados ligados à álgebra exterior, usados na definição de uma Grassmaniana qualquer. Muitos destes resultados, serão expostos sem uma demonstração, mas todos eles se encontram em (ELL).

Sejam E e F espaços vetoriais sobre um mesmo corpo K de caracteristica zero, com dimensões finitas e seja $n = \dim E$.

Suponhamos definida em $E^k = E \times E \times ... \times E$ uma aplicação f, k-linear e alternada, tomando valores no espaço F. A imagem $f(E^k)$, é um subespaço do espaço F de dimensão igual ao coeficiente binomial $\binom{n}{k}$.

Para cada aplicação $f : E^k \longrightarrow F$, k-linear e alternada, as condições abaixo são equivalentes:

a) Existe uma base ordenada $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ em E tal que os vetores $f(e_{j_1}, e_{j_2}, ..., e_{j_k})$; $1 \leq j_1 < j_2 < ... < j_k \leq n$, formam uma base de F.

b) $f(E^k)$ gera F e $\dim F = \binom{n}{k}$.

c) Para cada base do espaço E, vale a condição (a).

Uma aplicação $f : E^k \longrightarrow F$ k-linear e alternada que satisfaz uma (todas) as condições acima, se denomina k-produto exterior em E e, neste caso, denota-se F por $\bigwedge^k E$, $f(v_1, v_2, ..., v_k)$ por $v_1 \wedge v_2 \wedge ... \wedge v_k$, e se denomina $\bigwedge^k E$ de uma k-potência exterior do espaço E. Os vetores em $\bigwedge^k E$, se denominam k-vetores. Quando um k-vetor $w \in \bigwedge^k E$ é da forma $w = v_1 \wedge v_2 \wedge ... \wedge v_k$, onde cada v_i é um fator linear, dizemos que w é totalmente decomponível. Se $v_i = v_j$ para algum $i \neq j$, temos $v_1 \wedge v_2 \wedge ... \wedge v_k = 0$ pois f é alternada.

Mostra-se (ELL) que $v_1 \wedge v_2 \wedge ... \wedge v_k \neq 0$ em $\bigwedge^k E$ se, e somente se, $v_1, v_2, ..., v_k$ são vetores linearmente independentes em E. Mostra-se também, que se $R = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$ e $S = \{w_1, w_2, ..., w_k\}$ são subconjuntos linearmente independentes em E então R e S geram o mesmo subespaço W do espaço E se, e somente se, $v_1 \wedge v_2 \wedge ... \wedge v_k$ e $w_1 \wedge w_2 \wedge ... \wedge w_k$ são vetores linearmente dependentes em $\bigwedge^k E$. Equivalentemente, temos que dois vetores $v = v_1 \wedge v_2 \wedge ... \wedge v_k$ e $w = w_1 \wedge w_2 \wedge ... \wedge w_k$, totalmente decomponíveis são linearmente dependentes se, e somente se, $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ e $\{w_1, w_2, ..., w_k\}$ constituem bases de um mesmo subespaço W do espaço E. Usaremos estes resultados para estudar as Grassmanianas das retas de $\mathbb{P}^3$.

Proposição 1.25: O conjunto $\mathbb{G}(1,3)$ constituido das retas de $\mathbb{P}^3$ ou ($G(2,4)$ constituído dos subespaços vetoriais de dimensão igual a dois do espaço $\mathbb{A}^4$), é uma quádrica em $\mathbb{P}^5$.

Demonstração:

Consideremos o espaço vetorial $\bigwedge^2(\mathbb{A}^4)^* = \{f : \mathbb{A}^4 \times \mathbb{A}^4 \to K;\ f$ bilinear e alternada$\}$, $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ a base canônica de $\mathbb{A}^4$ e $\bar{B} = \{f_1, f_2, ..., f_6\}$, a base dual da base B em $\bigwedge^2(\mathbb{A})^*$, $x = \sum_{i=1}^{4} x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^{4} y_j e_j$ dois vetores em $\mathbb{A}^4$. Seja $x \wedge y = \sum_{i,j} x_i y_j f_i(e_j) = \sum_{i<j} (x_i y_i - x_j y_i) e_i \wedge e_j$. Portanto, a aplicação

$$\begin{array}{rll} \Phi: & \mathbb{A}^4 \times \mathbb{A}^4 & \longrightarrow \bigwedge^2(\mathbb{A}^4) \\ & (x,y) & \longmapsto \sum_{i<j} (x_i y_i - x_j y_i) e_i \wedge e_j \end{array}$$

é uma aplicação bilinear e alternada.

Por outro lado, se tomarmos a base canônica $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ de $\mathbb{A}^4$ e considerarmos as imagens $\Phi(e_i, e_j)$; $1 \leq i < j \leq 3$ temos:

$$\begin{array}{ll} \Phi(e_1, e_2) = (1,0,0,0,0,0) = \bar{e}_1 & \Phi(e_2, e_3) = \bar{e}_4 \\ \Phi(e_1, e_3) = \bar{e}_2 & \Phi(e_2, e_4) = \bar{e}_5 \\ \Phi(e_1, e_4) = \bar{e}_3 & \Phi(e_3, e_4) = \bar{e}_6 \end{array}$$

onde $\bar{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4, \bar{e}_5, \bar{e}_6\}$ é a base canônica de $\mathbb{A}^6$. Ou seja, a aplicação Φ, é um bi-produto exterior em $\mathbb{A}^4$ e, $\Phi(\mathbb{A}^4 \times \mathbb{A}^4) = \mathbb{A}^6$. Denotemos $\Phi(\mathbb{A}^4 \times \mathbb{A}^4)$ por $\bigwedge^2 \mathbb{A}^4$ e $\Phi(v, w)$ por $v \wedge w$.

Consideremos, em seguida, o espaço projetivo $\mathbb{P}(\bigwedge^2 \mathbb{A}^4) = \mathbb{P}^5$. Para cada sistema de coordenadas homogêneas $\{\lambda(v \wedge w),\ \lambda \neq 0$ no corpo $K\}$, denotemos por $[v \wedge w]$ o ponto de $\mathbb{P}^5$ associado a $\{\lambda(v \wedge w) \mid \lambda \neq 0,\ \lambda \in K\}$ na construção de $\mathbb{P}^5$.

Definamos em seguida a aplicação

$$\begin{array}{rlll} \Psi: & G(2,4) & \longrightarrow & \mathbb{P}(\bigwedge^2 \mathbb{A}^4) \\ & W & \longmapsto & [v \wedge w] \end{array}$$

onde $W = \langle v, w \rangle$ é o subespaço de $\mathbb{A}^4$ gerado pela base $\{v, w\}$. Observemos que se $W = \langle p, q \rangle = \langle p', q' \rangle$ em $\mathbb{A}^4$ então, $p = ap' + bq'$ e $q = a'p' + b'q'$ em $\mathbb{A}^4$ com a, a', b, b' no corpo K. E portanto,

$$p \wedge q = aa'(p' \wedge p') + ab'(p' \wedge q') + a'b(q' \wedge p') + bb'(q' \wedge q') = (ab' - a'b)(p' \wedge q')$$

pois $p' \wedge p' = q' \wedge q' = 0$ e $p' \wedge q' = -q' \wedge p'$ pois Φ é bilinear de alternada. Ou seja, $[p \wedge q] = [p' \wedge q']$ em $\mathbb{P}(\bigwedge^2 \mathbb{A}^4)$ já que $ab' - a'b \neq 0$. Isto mostra, que a aplicação Ψ está bem definida.

Fatos:

1) Dado o subespaço W de $\mathbb{A}^4$ temos $W = \langle p, q \rangle$ se, e somente se, $W = \{v \in \mathbb{A}^4 \mid v$ divide $p \wedge q\}$. Isto é, $W = \{v \in \mathbb{A}^4 \mid$ existe $\phi \in \mathbb{A}^4$ e que $p \wedge q = v \wedge \phi$ em $\bigwedge^2 \mathbb{A}^4\}$.

2) Suponha que $\Psi(W) = \Psi(W')$ com $W = \langle p, q\rangle$ e $W' = \langle p', q'\rangle$, tendo-se que $p \wedge q = \lambda(p' \wedge q')$ em $\bigwedge^2 \mathbb{A}^4$. Portanto, se v divide $p \wedge q$ então v divide $p' \wedge q'$. Conseqüentemente $W = W'$. Ou seja, Ψ é uma aplicação injetiva.

Portanto, o conjunto $G(2,4)$ ou $(\mathbb{G}(1,3))$ está em correspondência biunívoca com um subconjunto do espaço $\mathbb{P}^5$.

Consideremos, em seguida, $p = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ e $q = (b_0, b_1, b_2, b_3)$ em $\mathbb{A}^4$ vetores linearmente independentes e $\{p, q\}$ uma base do subespaço W de $\mathbb{A}^4$ tendo-se:

$\Psi(W) = [p \wedge q] =$

$[a_0b_1 - a_1b_0 : a_0b_2 - a_2b_0 : a_0b_3 - a_3b_0 : a_1b_2 - a_2b_1 : a_1b_3 - a_3b_1 : a_2b_3 - a_3b_2]$.

Denotemos $[p \wedge q]$ por $[Z_0 : Z_1 : Z_2 : Z_3 : Z_4 : Z_5]$ onde

$$Z_0 = a_0b_1 - a_1b_0, \ldots, Z_5 = a_2b_3 - a_3b_2 \text{ e daí, } Z_0Z_5 - Z_1Z_4 + Z_2Z_3 = 0.$$

Ou seja, $\Psi(G(2,4)) \subset Z(Z_0Z_5 - Z_1Z_4 + Z_2Z_3)$.

Reciprocamente, se o ponto

$$Z = [Z_0 : Z_1 : Z_2 : Z_3 : Z_4 : Z_5] \in Z(Z_0Z_5 - Z_1Z_4 + Z_2Z_3),$$

com $Z_0 \neq 0$, tomemos $R = \left(1, 0, \frac{-Z_3}{Z_0}, \frac{-Z_4}{Z_0}\right)$ e $S = \left(0, 1, \frac{Z_1}{Z_0}, \frac{Z_2}{Z_0}\right)$ linearmente independentes em $\mathbb{A}^4$. Portanto, existe $W \in G(2,4)$ tal que $W = \langle R, S\rangle$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} R \wedge S &= \left(1, \frac{Z_1}{Z_0}, \frac{Z_2}{Z_0}, \frac{Z_3}{Z_0}, \frac{Z_4}{Z_0}, \frac{Z_4Z_1 - Z_3Z_2}{Z_0^2}\right) \\ &= \left(1, \frac{Z_1}{Z_0}, \frac{Z_2}{Z_0}, \frac{Z_3}{Z_0}, \frac{Z_4}{Z_0}, \frac{Z_0Z_5}{Z_0^2}\right). \end{aligned}$$

Ou seja, $[R \wedge S] = [Z_0 : Z_1 : Z_2 : Z_3 : Z_4 : Z_5] = Z$. Conseqüentemente $\Psi(G(2,4)) = Z(Z_0Z_5 - Z_1Z_4 + Z_2Z_3)$.■

Este exemplo, apresentado desta forma, serviu-nos como introdução do conceito geral de Grassmaniana que se segue:

Grassmanianas (caso geral)

Denotemos por $G(k,n)$ o conjunto dos k-subespaços lineares do espaço vetorial $\mathbb{A}^n(K)$, e por $G(k,V)$ o conjunto dos k-subespaços vetoriais de um espaço n-dimensional V sobre um corpo K. Suporemos definido em V^k um k-produto exterior, denotado por $\bigwedge$ e, onde se denota o espaço imagem de $\bigwedge$ por $\bigwedge^k(V)$. Para cada k-subespaço W de V gerado pela base $v_1, v_2, ..., v_k$, denotaremos $\bigwedge(v_1, v_2, ..., v_k)$ em $\bigwedge^k(V)$ por $v_1 \wedge v_2 \wedge ... \wedge v_k$ e por $[w]$ o ponto de $\mathbb{P}(\bigwedge^k V)$ correspondente a $v_1 \wedge v_2 \wedge ... \wedge v_k$ na construção de $\mathbb{P}(\bigwedge^k V)$.

Consideremos agora a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \Psi: & G(k,V) & \longrightarrow & \mathbb{P}(\bigwedge^k V) \\ & W & \longmapsto & [w] \end{array}$$

onde $[w] = [v_1 \wedge v_2 \wedge ... \wedge v_n]$, e $W = \langle v_1, v_2, ..., v_k \rangle$.

Como cada k-produto exterior Λ, associa k-vetores linearmente independentes em V a um vetor não nulo em $\bigwedge^k V$, e as imagens de duas bases $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$, $\{w_1, w_2, ..., w_k\}$ de um mesmo subespaço W de V são mapeados em vetores linearmente dependentes em $\bigwedge^k V$, tem-se que a aplicação Ψ está bem definida.

Além disto, para cada $w = v_1 \wedge v_2 \wedge ... \wedge v_k$ em $\bigwedge^k V$, é possível determinar em V o subespaço $W = \langle v_1, v_2, ..., v_k \rangle$ tal que $\Psi(W) = [w]$; bastando para isto, determinar os vetores v em V tais que $w \wedge v = 0 \in \bigwedge^{k+1}(V)$. Ou seja, $W = \{v \in V \mid v \wedge w = 0\}$, onde $w = v_1 \wedge v_2 \wedge ... \wedge v_k$ e $\Psi(W) = [w]$. Portanto, a aplicação Ψ além de bem definida, é injetiva. Assim Ψ é uma inclusão de $G(k,V)$ na sua imagem $\Psi(G(k,V)) \subset \mathbb{P}(\bigwedge^k V)$, denominada *mergulho de Plucker.*

As coordenadas homogêneas no espaço $\mathbb{P}^N = \mathbb{P}(\bigwedge^k V)$, denominam-se *coordenadas de Plucker* em $G(k,V)$.

Sejam V espaço vetorial n-dimensional e $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ uma base de V. Se considerarmos os subespaços W de V gerado pela base $\{f_1, f_2, ..., f_k\}$ onde $f_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}u_j$ poderemos associar ao subespaço W, a matriz

$$M_W = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{kn} \end{vmatrix}.$$

Naturalmente, corremos o risco de mudando a base de W a matriz M_W mudar. Todavia, se mudarmos a base, a nova matriz obtida, difere da primeira por um fator (matriz) $k \times k$ inversível à esquerda. Os menores das duas matrizes em questão são a menos de fator constante os mesmos, coisa que nos interessa ao máximo. As coordenadas de Plucker são exatamente os menores maximais da matriz M_W. O fator correspondente ao determinante da matriz fator $k \times k$ tratada anteriormente, é completamente dispensável já que tal fator acompanha cada menor da matriz M_W e todos estes determinantes são coordenadas no espaço projetivo $\mathbb{P}(\bigwedge^k V)$.

Assim, descreve-se a Grassmaniana $G(k, V)$ como um subconjunto do espaço $\mathbb{P}(\bigwedge^k V)$.

Lema 1.26: Sejam V e W espaços vetoriais sobre o mesmo corpo K e $T : V \to W$ uma transformação linear. Definamos a transposta de T por $T^t : \begin{array}{ccc} W^* & \longrightarrow & V^* \\ g & \longmapsto & g \circ T \end{array}$.

Se $\dim V = n$ e $\dim W = m$, temos:

a) $N(T^t) = A_{nn}(\operatorname{Im} T)$.

b) O posto de T^t é igual ao posto de T.

c) A imagem de T^t é o anulador do núcleo de T.

Demonstração:

a) Seja $g \in N(T^t) \Longrightarrow T^t(g) = 0 \Longrightarrow 0 = T^t(g)(\alpha) = (g \circ T)(\alpha) = g(T(\alpha))\ \forall\ \alpha \in V \Longrightarrow g = 0$ em $Im(T) \Longrightarrow g \in A_{nn}(\mathrm{Im}(T))$.

Reciprocamente, se $g \in A_{nn}(\mathrm{Im}\, T)$, temos que $g(T(\alpha)) = 0\ \forall\ \alpha \in V \Longrightarrow T^t(g)(\alpha) = g(T(\alpha)) = 0\ \forall\ \alpha \in V$. Dai, $T^t(g) = 0 \Longrightarrow g \in N(T^t)$.

Portanto: $A_{nn}(\mathrm{Im}\, T) = N(T^t)$

b) Se $\dim V = n$, $\dim W = m$, e $\dim(\mathrm{Im}\, T) = r$, temos: $\dim A_{nn}(\mathrm{Im}\, T) + \dim(\mathrm{Im}\, T^t) = \dim W^*$. Ou $\dim A_{nn}(\mathrm{Im}\, T) = \dim W^* - \dim(\mathrm{Im}\, T) = m - r$.

Ou seja, $\dim(\mathrm{Im}\, T^t) = m - (m - r) = r = \dim W^* - \dim(\mathrm{Im}\, T)$

c) Sejam $N = N(T)$ e $f = T^t(g)$ para algum $g \in W^*$. Se $\alpha \in N$, $f(\alpha) = T^t(g)(\alpha) = gT(\alpha) = g(0) = 0$. Ou seja, $f \in A_{nn}(N) \supset \mathrm{Im}(T^t)$.

Por outro lado, $\dim A_{nn}(N) = n - \dim N = posto(T = posto(T^t)$. Portanto, $A_{nn}(N) \supset \mathrm{Im}(T^t)$ e $\dim A_{nn}(N) = \dim \mathrm{Im}(T^t)$. Ou seja, $A_{nn}(N) = \mathrm{Im}(T^t)$.■

A seguir, apresentamos o fato por demais importante que consiste em mostrar que a Grassmaniana é uma sub-variedade de $\mathbb{P}(\bigwedge^k V)$.

Pois bem, cada elemento de $\Psi(G(k, V))$ é o correspondente em $\mathbb{P}(\bigwedge^k V)$ ao vetor $v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_k$ de $\bigwedge^k V$ onde $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ é uma base de um certo subespaço V. Neste caso, somos obrigados a caracterizar em $\mathbb{P}(\bigwedge^k V)$ os pontos correspondentes a vetores de $\bigwedge^k V$ que são da forma $w = v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_k$ em $\bigwedge^k V$, uma vez que tais elementos em $\mathbb{P}(\bigwedge^k V)$, constituem a Grassmaniana $G(k, V)$ em si.

Da Álgebra exterior, temos que um elemento $w \in \bigwedge^k V$ totalmente decomponível é da forma $w = v \wedge \phi$ onde $v \in V$ e $\phi \in \bigwedge^{k-1} V$ se, e somente se, $w \wedge v = 0$

em $\bigwedge^{k+1} V$ e que o conjunto dos vetores $v \in V$ tais que $w = v \wedge \phi$ com $\phi \in \bigwedge^{k-1} V$ constitui um subespaço de V de dimensão k.

Neste caso, um elemento $[w] \in \Psi(G(k, V))$ se, e somente se, o posto da aplicação linear

$$\begin{aligned} \Phi(w): \ V &\longrightarrow \bigwedge^{k+1} V \\ v &\longmapsto v \wedge w \end{aligned}$$

for igual a $n - k$; ou seja se, e somente se, a dimensão do núcleo de $\Phi(w)$ for igual a k. Como o posto de $\Phi(w)$, nunca é menor que $n - k$, podemos dizer que $[w] \in G(k, V)$ se, e somente se, o posto de $\Phi(w)$ é menor ou igual a $n - k$. Por outro lado, se definirmos a aplicação linear

$$\begin{aligned} \Lambda^k V &\longrightarrow Hom(V, \bigwedge^{k+1} V) \\ w &\longmapsto \Phi(w) \end{aligned},$$

temos que as entradas da matriz $\Phi(w) \in Hom(V, \bigwedge^{k+1} V)$, são coordenadas homogêneas em $\mathbb{P}(\Lambda^k V)$.

Agora sim, podemos dizer que $G(k, V)$ é a subvariedade de $\mathbb{P}(\bigwedge^k V)$ definida pelos zeros comuns aos menores $(n + 1 - k) \times (n + 1 - k)$ desta matriz.

Depois de sentir uma Grassmaniana como variedade projetiva, espera-se de imediato, que cuidemos do seu ideal $I(G(k, V))$. Sabemos que dois espaços vetoriais da mesma dimensão são isomorfos, portanto V é isomorfo ao seu dual V^* e $\bigwedge^k(V)$ isomorfo a $\bigwedge^{n-k}(V^*)$. Sendo assim, o isomorfismo $\bigwedge^k(V) \cong \bigwedge^{n-k}(V^*)$ associa cada $w \in \bigwedge^k(V)$ a um único elemento $w^* \in \bigwedge^{n-k}(V^*)$. Deste modo, a aplicação

$$\begin{aligned} \Psi(w): \ V^* &\longrightarrow \bigwedge^{n+1-k}(V^*) \\ v^* &\longmapsto v^* \wedge w^* \end{aligned}$$

está bem definida.

Além disto, um elemento $w \in G(k, V)$, ou seja, w totalmente decomponível, ou ainda, $w = v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_k$, v_i fatores lineares se, e somente se, o posto de $\Psi(w)$ tem dimensão máxima igual a k.

Voltemos à aplicação $\Phi(w) : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \bigwedge^{k+1}(V) \\ v & \longmapsto & v \wedge w \end{array}$ e a sua transposta

$$\Phi^t(w) : \begin{array}{ccc} \bigwedge^{n+1-k}(V^*) & \longrightarrow & V^* \\ w^* & \longmapsto & w^* \wedge v^* \end{array}.$$

Pelo teorema anterior, cada $w^* \wedge v^*$ na imagem de $\Phi^t(w)$, anula-se no núcleo de $\Phi(w)$. (Veja: 1.26b)

Por outro lado, a transposta

$$\Psi^t(w) : (\bigwedge^{n+1-k} V^*)^* = \bigwedge^{n+1-k} V \to (V^*)^* = V$$

é dada por $h_o\Phi(w) \longmapsto \Psi^t(w)h = p$. Assim, $A_{nn}(N\Psi(w)) = \operatorname{Im}\Psi^t(w)$. Portanto, as imagens de $\Phi^t(w)$ e de $\Psi^t w)$ se anulam mutuamente.

Em resumo, $\Phi^t(w) \in G(k,V)$ se, e somente se, para cada par (α, β), $\alpha \in \bigwedge^{k+1}(V^*)$ e $\beta \in \bigwedge^{n-1+k}(V)$, a contração

$$\sum_{\alpha\beta} = \langle\ \Phi^t(w)\alpha,\ \Psi^t(w)\beta\ \rangle = 0.$$

Verifica-se que as contrações acima são polinômios quadráticos e homogêneos, cujos zeros constituem a Grassmaniana $G(k,V)$ em $\mathbb{P}(\bigwedge^k V)$. Estes polinômios, são denominados as *relações de Plucker*. Verifica-se também que tais polinômios geram $I(G(k,V))$. (Veja: JH-65)

Notações e exemplos - 1.27

1) $G(k,n)$ denota o cojunto dos k-subespaços lineares pela origem de $\mathbb{A}^n(K)$.

2) $G(k,V)$ denota o conjunto dos k-subespaços vetoriais do espaço V.

3) $\mathbb{G}(k,n)$ denota a Grassmaniana dos k-subespaços lineares de $\mathbb{P}^n$.

4) $G(1,n)$ denota Grassmaniana das retas pela origem em K^n.

5) $G(2,4) \simeq \mathbb{G}(1,3) \subsetneq \mathbb{P}^5$.

As Grassmanianas de k-espaços afins serão denotadas com a letra G simples e Grassmanianas de k-espaços lineares projetivos com a letra $\mathbb{G}$ (cheia ou cortada).

§2) Variedades de Veronese e Segre

Vamos agora estudar dois tipos de variedades projetivas especiais a saber: as Variedades de Veronese e as variedades de Segre.

Já tratamos neste trabalho inúmeras vezes do conceito de variedade. Estamos até agora, sentindo que uma variedade é o conjunto de soluções de um determinado sistema finito de equações algébricas. Este entender, talvez, deixe-nos desanimados para identificarmos de modo "palpável" uma variedade na geometria em questão, mas vamos agora mudar nossos sentimentos. Isto é, ao invés de irmos para o lado dos sistemas de equações algébricas, vamos construir variedades especiais que são de manejo relativamente simples, e ajudam-nos a estudar variedades mais sofisticadas.

Iniciemos com as variedades de Veronese. Antes, porém, necessitamos de fazer algumas observações técnicas: a primeira delas é que, a dimensão do espaço vetorial de todos os polinômios homogêneos de grau d nas $n+1$ variáveis $X_0, X_1, ..., X_n$ é igual ao coeficiente binomial $\binom{n+d}{d}$. Portanto, os polinômios homogêneos de grau d em $n+1$ variáveis, são parametrizados por um espaço projetivo de dimensão $v_{n,d} = \binom{n+d}{d} - 1$. Nos espaços projetivos de dimensão $v_{n,d}$, por necessidades futuras, vamos denotar as coordenadas homogêneas pelos símbolos $v_{i_0 i_1 ... i_n}$ onde $i_0 + i_1 + ... + i_n = d$.

Definição 1.28 - A aplicação de Veronese de grau d em $\mathbb{P}^n$, denotada por v_d, é a aplicação $v_d : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^{v_{n,d}}$ que associa a $(n+1) - upla$ $[u_0 : u_1 : ... : u_n]$

de $\mathbb{P}^n$ à $v_{n,d} - upla$, cujas coordenadas simbolizadas por $v_{i_0 i_1 \dots i_n}$ são definidas por $v_{i_0 i_1 \dots i_n} = u_0^{i_0} u_1^{i_1} \dots u_n^{i_n}$ com i_j inteiros não negativos e $i_0 + i_1 + \dots + i_n = d$.

A imagem $v_d(\mathbb{P}^n)$ é denominada Variedade de Veronese. Se vê logo abaixo que $v_d(\mathbb{P}^n)$ é de fato uma variedade em $\mathbb{P}^{v_{n,d}}$. Em primeiro lugar, garantimos a boa definição da aplicação $v_d : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^{v_{n,d}}$ já que cada produto $u_0^{i_0} u_1^{i_1} \dots u_n^{i_n}$ é um monômio de grau d nas variáveis $u_0, u_1, \dots, u_n$. Além disto, v_d é injetiva pois se $v_d[u_0 : u_1 : \dots : u_n] = v_d[w_0 : w_1 : \dots : w_n]$, temos:

$$(1) \qquad u_j^d = \lambda w_j^d \ \forall\, j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

$$(2) \qquad u_0^{i_0} u_1^{i_1} \dots u_n^{i_n} = \lambda w_0^{i_0} . w_1^{i_1} \dots w_n^{i_n},$$

onde $i_0 + i_1 + \dots + i_n = d$. Escolhamos $0 \neq w_r \in \{w_0, w_1, \dots, w_n\}$ em (2), consideramos $u_r^1 u_k^{d-1} = \lambda w_r^1 w_k^{d-1}; k \in \{0, 1, \dots, n\}$, tendo-se: $u_r^1 u_k^d = \lambda u_k w_r^1 w_k^{d-1}$. Assim, $\lambda u_r^1 w_k^d = \lambda u_k w_r^1 w_k^{d-1}$, no que resulta $u_r^1 w_k = u_k w_r$, quando $w_k^{d-1} \neq 0$. Portanto, $u_k = \dfrac{u_r}{w_r} w_k$, para cada $k \in \{0, 1, 2, 3, \dots, n\}$. Daí, se conclui, que $[u_0 : u_1 : \dots : u_n] = [w_0 : w_1 : \dots : w_n]$.

Observando também que

$$(*) \qquad v_{i_0 i_1 i_2 \dots i_n} . v_{j_0 j_1 \dots j_n} = v_{k_0 k_1 \dots k_n} . v_{l_0 l_1 \dots l_n} \text{ se}$$

$i_m + j_m = k_m + l_m$; $m \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ e denotando $v_{i_0 i_1 i_2 \dots i_n}$ por X^I, $v_{j_0 j_1 \dots i_n}$ por X^J, $v_{k_0 k_1 \dots k_n}$ por X^K e $v_{l_0 l_1 \dots l_n}$ por X^L, tem-se que $v_d(\mathbb{P}^n)$ é realizada pelos zeros dos polinômios quadráticos $X^I X^J - X^K X^L$ em $\mathbb{P}^{v_{n,d}}$. Observando também que a aplicação $u_0 = v_{d00\dots0}$, $u_1 = v_{(d-1)10\dots0}$, $u_2 = v_{(d-1)010\dots0}, \dots, u_n = v_{(d-1)00\dots01}$ inverte v_d no aberto $v_{m\,000\dots0} \neq 0$, concluímos que v_d é localmente inversível e por isto um mergulho de $\mathbb{P}^n$ em $\mathbb{P}^{v_{n,d}}$.

A imagem $v_d(\mathbb{P}^n) \subset \mathbb{P}^{v_{n,d}}$ é denominada variedade de Veronese em $\mathbb{P}^{v_{n,d}}$.

Exemplos 1.29:

1) Cada aplicação
$$\begin{aligned} v_d : \mathbb{P}^1 &\longrightarrow \mathbb{P}^d \\ [x_0 : x_1] &\longmapsto [x_0^d : x_0^{d-1}x_1 : x_0^{d-2}x_1^2 : \ldots : x_1^d] \end{aligned}$$

é uma aplicação de Veronese.

Cada variedade $v_d(\mathbb{P}^1) \subset \mathbb{P}^d$, denomina-se curva racional normal em $\mathbb{P}^d$. No caso $d = 3$, ainda denominamos $v_3(\mathbb{P}^1)$ de cúbica torcida em $\mathbb{P}^3$. Se denotarmos $v_d[x_0 : x_1]$ por $[Z_0 : Z_1 : \ldots : Z_n]$ temos que, para cada inteiro $1 \leq k \leq d-1$, a variedade Veronese $v_d(\mathbb{P}^1)$ é realizada pelos zeros comuns aos menores 2×2 da matriz:

$$M_{v_d(\mathbb{P}^1)} = \left| \begin{array}{llll} Z_0 & Z_1 & \ldots & Z_k \\ Z_1 & Z_2 & \ldots & Z_{k+1} \\ \vdots & & & \\ Z_{d-k} & Z_{d-k+1} & \ldots & Z_d \end{array} \right|_{(d-k+1)\times(k+1)} .$$

Isto em vista da relação $(*)$ anterior. Assim, como exemplo, temos que a imagem $v_3(\mathbb{P}^1)$ da aplicação de Veronese

$$\begin{aligned} v_3 : \quad \mathbb{P}^1 &\longrightarrow \mathbb{P}^3 \\ [x_0 : x_1] &\longmapsto [x_0^3 : x_1^3 : x_0^2 x_1 : x_0 x_1^2] = [Z_0 : Z_1 : Z_2 : Z_3] \end{aligned}$$

é realizada pelos zeros dos menores 2×2 da matriz

$$M_{v_{3(\mathbb{P}^1)}} = \left| \begin{array}{lll} Z_0 & Z_1 & Z_2 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{array} \right|_{2\times 3} .$$

Ou seja $v_3(\mathbb{P}^1) = Z(Z_0Z_2 - Z_1^2) \cap Z(Z_0Z_3 - Z_1Z_2) \cap Z(Z_1Z_3 - Z_2^2)$.

2) Se $v_d : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^{v_{n,d}}$ é a aplicação de Veronese, $F = \sum a_{i_0 i_1 \ldots i_n} u_0^{i_0} u_1^{i_1} \ldots u_n^{i_n}$ é uma forma de grau d em $\mathbb{P}^n$ e H é a hipersuperfície $Z(F)$, então, $v_d(H)$ é a interseção da Veronese $v_d(\mathbb{P}^n)$ com o hiperplano de equação $\sum a_{i_0 i_1 \ldots i_n} v_{i_0 i_1 \ldots i_n} = 0$ em $\mathbb{P}^{v_{n,d}}$.

De fato, consideremos uma Veronese

$$\begin{aligned} v_d : \quad & \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^{v_{n,d}} \\ & [u_0 : u_1 : ... : u_n] \longmapsto [... : v_{i_0 i_1 ... i_n} : ...] \end{aligned}$$

onde $v_{i_0 i_1 ... i_n} = u_0^{i_0} u_1^{i_1} ... u_n^{i_n}$ onde, $i_0 + i_1 + ... + i_n = d$; $F = \sum a_{i_0 i_1 .. i_n} X_0^{i_0} X_1^{i_1} ... X_n^{i_n}$ uma forma de grau d em $K[X_0, X_1, ..., X_n]$ e H a hipersuperfície $H = Z(F)$. Sejam então,

$$H = \{[u_0 : u_1 : ... u_n] \in \mathbb{P}^n \mid \sum a_{i_0 i_1 ... i_n} u_0^{i_0} u_1^{i_1} ... u_n^{i_n} = 0\}$$

$$v_d(H) = \{[... : v_{i_0 i_1 ... i_n} : ...] \in v_d(\mathbb{P}^n) \mid v_{i_0 i_1 ... i_n} =$$

$$= u_0^{i_0} u_1^{i_1} ... u_n^{i_n}, \sum a_{i_0 i_1 ... i_n} u_0^{i_0} u_1^{i_1} ... u_n^{i_n} = 0\}.$$

Seja $L = \{[... : v_{i_0 i_1 ... i_n} : ...] \in \mathbb{P}^{v_{n,d}} \mid \sum a_{i_0 i_1 ... i_n} v_{i_0 ... i_n} = 0\}$. Assim tem-se claramente que $v_d(H) = v_d(\mathbb{P}^n) \cap L$.

3) Consideremos a Veronese

$$\begin{aligned} v_2 : \quad & \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^5 \\ & [x_0 : x_1 : x_2] \longmapsto [x_0^2 : x_1^2 : x_2^2 : x_0 x_1 : x_0 x_2 : x_1 x_2]. \end{aligned}$$

Denotando-se $v_2[x_0 : x_1 : x_2]$ por $[Z_0 : Z_1 : \ldots : Z_5]$, garante-se que $v_2(\mathbb{P}^2)$ é realizável pelos zeros comuns aos menores 2×2 da matriz

$$M_{v_2(\mathbb{P}^2)} = \begin{vmatrix} Z_0 & Z_3 & Z_4 \\ Z_3 & Z_1 & Z_5 \\ Z_4 & Z_5 & Z_2 \end{vmatrix}_{3\times 3}.$$

Portanto, $v_2(\mathbb{P}^2)$ é a interseção das quádricas

$$\begin{aligned} & Z_1 Z_2 - Z_5^2 = 0,\ Z_0 Z_2 - Z_4^2 = 0,\ Z_3 Z_2 - Z_4 Z_5 = 0 \\ & Z_0 Z_1 - Z_3^2 = 0,\ Z_3 Z_5 - Z_1 Z_4 = 0, \text{ e } Z_0 Z_5 - Z_3 Z_4 = 0, \text{ em } \mathbb{P}^5 \end{aligned}$$

Sub-variedades de variedades de Veronese

Proposição 1.30: Se $v_d : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^{v_{n,d}}$ é a aplicação de Veronese, e Y é uma sub-variedade de $\mathbb{P}^n$, $v_d(Y)$ é uma sub-variedade de $v_d(\mathbb{P}^n)$ em $\mathbb{P}^{v_{n,d}}$.

Demonstração:

Cada polinômio homogêneo F de grau k nas coordenadas homogêneas Z_i de $\mathbb{P}^{v_{n,d}}$, pode ser visto de grau $d.k$ nas coordenadas homogêneas X_i de $\mathbb{P}^n$, bastando para isto substituirmos em $F(Z_0, Z_1, ..., Z_N)$, onde $N = v_{n,d}$, cada coordenada Z_i por $X_0^{i_0}X_1^{i_1}, \ldots, X_n^{i_n}$ onde $i_0 + i_1 + ... + i_n = d$. Como o lugar dos zeros de uma forma F de grau m é o lugar comum dos zeros das formas $\{X_iF\}$ de grau $m+1$, temos que se Y for realizada em $\mathbb{P}^n$ pelo lugar dos zeros de polinômios de graus m ou menor, também será realizada como o lugar dos zeros de polinômios de graus exatamente iguais a $d.k$ para algum $k > 0$. Daí, segue-se que $v_d(Y) \subset \mathbb{P}^N$ é a interseção de $v_d(\mathbb{P}^n)$ com o lugar dos zeros destes polinômios de grau k.■

Exemplos - 1.31:

1) Seja $Y \subset \mathbb{P}^2$ a curva $Z(x_0^3+x_1^3+x_2^3) \subset \mathbb{P}^2$ portanto, por 1.30, Y é a interseção das quárticas $Z(x_0^4 + x_0x_1^3 + x_0x_2^3)$, $Z(x_1x_0^3 + x_1^4 + x_1x_2^3)$ e $Z(x_2x_0^3 + x_2x_1^3 + x_2^4)$ em $\mathbb{P}^2$. Ainda por (1.30), a imagem $v_2(Y)$ em $\mathbb{P}^5$ é a interseção de $v_2(\mathbb{P}^2) \subset \mathbb{P}^5$ com as quádricas

$$\begin{array}{l} Z_0^2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_4 = 0 \\ Z_0Z_3 + Z_1^2 + Z_2Z_5 = 0 \quad \text{e} \\ Z_0Z_4 + Z_1Z_5 + Z_2^2 = 0 \end{array}$$

2) Consideremos $Y = Z(x_1^3 - x_2^2x_0) \subset \mathbb{P}^2$ e

$$\begin{array}{llll} v_3 : & \mathbb{P}^2 & \longrightarrow & \mathbb{P}^9 \\ & [x_0 : x_1 : x_2] & \longmapsto & [x_0^3 : x_1^3 : x_2^3 : x_0^2x_1 : x_0x_1^2 : x_0^2x_2 : x_0x_2^2 : x_1^2x_2 : \\ & & & x_1x_2^2] = [Z_0 : Z_1 : Z_2 : ... : Z_9]. \end{array}$$

Portanto $v_3(Y) = Z(Z_1 - Z_5) \cap v_3(\mathbb{P}^2) \subset \mathbb{P}^9$.

Variedades de Segre

A seguir vamos mergulhar $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ em algum $\mathbb{P}^N$ de modo que se possa definir o conceito de subvariedade de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$.

Recorramos então aos polinômios para ver como definir um fechado no produto $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$. Denotemos $K[X,Y]$ o anel $K[X_0, X_1, ..., X_n, Y_0, Y_1, ..., Y_m]$ e olhemos um polinômio F em $K[X_0, X_1, ..., X_n, Y_0, Y_1, ..., Y_m]$ no anel $K[X][Y]$ ou no anel $K[Y][X]$; isto é, considerando F a coeficientes no anel $K[X]$ ou a coeficientes no anel $K[Y]$. Em seguida, defininamos o conceito de polinômios bi-homogêneos em $K[X][Y]$ de bi-grau (t, d) quando F for um polinômio homogêneo de grau t nas variáveis $X_0, X_1, ..., X_n$ e homogêneo de grau d nas variáveis restantes $Y_0, Y_1, ..., Y_m$.

Se um polinômio F em $K[X][Y]$ satisfaz a definição acima, dizemos que F é bi-homogêneo de bi-grau (t, d). Neste caso, explicitamente temos:

$$\begin{aligned}
&F((\lambda X_0, \lambda X, ..., \lambda X_n); (\mu Y_0, \mu Y_1, ..., \mu Y_m)) \\
&= \lambda^t F(X_0, X, ..., X_n, \mu Y_0, \mu Y_1, ..., \mu Y_m) \\
&= \lambda^t \mu^d F(X_0, X_1, ..., X_n, Y_0, Y_1, ..., Y_m),
\end{aligned}$$

Agora sim, já dispomos de uma maneira de definir sub-variedades no produto $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$, bastando para isto, tomarmos as sub-variedades de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ como os sub-conjuntos $X \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ tais que existe $S \subset K[X,Y]$ constituido de polinômios bi-homogêneos em $K[X,Y]$ e que $X = \{([X_0 : X_1 : ... : X_n]; [Y_0 : Y_1 : ... : Y_m]) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \mid F([X_0 : X_1 : ... : X_n]; [Y_0 : Y_1 : ... : Y_m]) = 0$ para cada F em $S\}$. Neste sentido, podemos considerar o próprio $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ o fechado definido pelos zeros do polinômio nulo em $K[X,Y]$, e definirmos também as aplicações de Segre abaixo:

As aplicações denominadas de Segre são aplicações $\sigma : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \longrightarrow \mathbb{P}^{mn+m+n}$ dadas por:

$$\sigma([x_0 : x_1 : ... : x_n],\ [y_0 : y_1 : ... : y_m]) = [\ldots,\ x_i y_j,\ \ldots]$$

onde (i,j) percorre todos os pares com $0 \leq i \leq n$ e $0 \leq j \leq m$.

A imagem $\sigma(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m) \subset \mathbb{P}^{mn+m+n}$ é denominada variedade de Segre, em geral denotada aqui por $\sigma(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m)$.

Proposição - 1.32: Para cada aplicação de Segre $\sigma : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \to \mathbb{P}^{mn+m+n} = \mathbb{P}^N$, temos que:

1) σ é bem definida e injetiva

2) $\sigma(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m)$ é uma subvariedade de $\mathbb{P}^N = \mathbb{P}^{mn+m+n}$.

Demonstração:

Observando que

$$\begin{aligned}&\sigma([\lambda x_0 : \lambda x_1 : ... : \lambda x_n], [\mu y_0 : \mu y_1 : ... : \mu y_m]) = \\ &= [\lambda\mu x_0 y_0 : \lambda\mu x_0 y_1 : ... : \lambda\mu x_i y_1 : ... : \lambda\mu x_n y_m]\end{aligned}$$

vemos que a imagem de cada ponto de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ pela aplicação σ, é bem determinada em $\mathbb{P}^{mn+m+n}$, o que equivale à boa definição de σ.

Assim, se $P = [Z_{00} : Z_{01} : ... : Z_{nm}]$ está em $\sigma(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m)$, alguma coordenada $Z_{\alpha\beta} \neq 0$ para algum par (α, β). Assim $x_\alpha \neq 0$ e $y_\beta \neq 0$. Por outro lado, considerando $y_i = \dfrac{Z_{\alpha_i}}{x_\alpha}$ e $x_j = \dfrac{Z_{\beta j}}{y_\beta}$, determinamos $y_0, y_1, ..., y_m$ e $x_0, x_1, ..., x_n$. Concluindo-se que para cada $P = [Z_{00} : Z_{01} : ... : Z_{nm}] \in \sigma(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m)$, só existe uma pré-imagem em $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$. Portanto, σ é injetiva.

Por outro lado, se $P = [\ldots : X_i Y_j : \ldots] \in \sigma(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m)$, temos que P é zero do polinômio F, definido por:

$$F([Z_{00} : ... : Z_{nm}]) = Z_{ij}\, Z_{kl} - Z_{il}\, Z_{kj} \quad \text{em} \quad \mathbb{P}^{mn+m+n}.$$

Além disto, dada uma raiz $Q \in \mathbb{P}^N$ das equações

$$(*) \qquad Z_{ij} \,.\, Z_{kl} - Z_{il} \,.\, Z_{kj} = 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{P}^{mn+m+n}$$

podemos determinar $P \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ tal que $\sigma(P) = Q$. De fato, se $Q = [a_{00} : a_{01} : ... : a_{nm}] \in \mathbb{P}^{mn+m+n}$, é uma raiz das equações $(*)$ $\quad Z_{ij}Z_{kl} - Z_{il}Z_{kj} = 0$ e $a_{\alpha\beta}$ é uma coordenada não nula do ponto Q, temos

$$a_{kl} = \frac{a_{\alpha l}\, a_{k\beta}}{a_{\alpha\beta}},$$

para todo $0 \leq k \leq n$, $k \neq \beta$ e para todo $1 \leq l \leq m$.

Tomemos então $[x_0 : x_1 : ... : x_n]$ e $[y_0 : y_1 : ... : y_m]$ onde $x_k = \dfrac{a_{k\beta}}{a_{\alpha\beta}}$ e $y_l = \dfrac{a_{\alpha l}}{a_{\alpha\beta}}$ onde $0 \leq k \leq n$ e $0 \leq l \leq m$, tendo-se

$$\sigma([x_0 : x_1 : ... : x_n], [y_0 : y_1 : ... : y_m]) = [a_{00} : ... : a_{ij} : ... : a_{nm}] \equiv Q.$$

Portanto,

$$P = ([x_0 : x_1 : ... : x_n], [y : y_1 : ... : y_m]) \;\text{ e }\; \sigma(P) = Q.$$

Neste caso, concluimos que $\sigma(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m)$ é de fato uma sub-variedade de $\mathbb{P}^{mn+m+n} = \mathbb{P}^N$.■

Exemplos - 1.33:

1) Consideremos a Segre

$$\begin{array}{rrcl}
\sigma : & \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & \mathbb{P}^3 \\
& ([x_0 : x_1], [y_0 : y_1]) & \longmapsto & [x_0y_0 : x_0y_1 : x_1y_0 : x_1y_1] = \\
& & & = [w_{00} : w_{01} : w_{10} : w_{11}] = \\
& & & = [Z_0 : Z_1 : Z_2 : Z_3] \in \mathbb{P}^3
\end{array}$$

Tendo-se

$$\sigma(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) = Z(Z_0\, Z_3 - Z_1\, Z_2).$$

É bom lembrar que a veronese $v_3(\mathbb{P}^1)$ (cúbica torcida em $\mathbb{P}^3$) está contida em $Z(Z_0\, Z_3 - Z_1\, Z_2) = \sigma(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \subset \mathbb{P}^3$. (Exemplo 1.29 (1))

2) Consideremos $\sigma : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^5$ definida por

$$\begin{aligned}\sigma([x_0 : x_1], [y_0 : y_1 : y_2]) &= [x_0y_0 : x_0y_1 : x_0y_2 : x_1y_0 : x_1y_1 : x_1y_2] = \\ &= [w_{00} : w_{01} : w_{02} : w_{10} : w_{11} : w_{12}] = [Z_0 : Z_1 : Z_2 : Z_3 : Z_4 : Z_5] \in \mathbb{P}^5\end{aligned}.$$

Tendo-se

$$\sigma(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2) = Z(Z_0Z_4 - Z_1Z_3) \cap Z(Z_1Z_5 - Z_2Z_4) \cap Z(Z_0Z_5 - Z_2Z_3).$$

Notemos que $\sigma(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2)$ é realizada pelo lugar dos zeros dos menores 2×2 da matriz

$$M_{\sigma(\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2)} = \left| \begin{matrix} Z_0 & Z_1 & Z_2 \\ Z_3 & Z_4 & Z_5 \end{matrix} \right|_{2\times 3}, \text{ conforme a relação } (*) \text{ da proposição 1.32.}$$

3) Considerando a Segre $\sigma : \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^5$ definada por:

$$\begin{aligned}\sigma([x_0 : x_1 : x_2], [y_0 : y_1] &= [x_0y_0 : x_0y_1 : x_1y_0 : x_1y_1 : x_2y_0 : x_2y_1] = \\ &= [w_{00} : w_{01} : w_{10} : w_{11} : w_{20} : w_{21}] = [z_0 : z_1 : z_2 : z_3 : z_4 : z_5]\end{aligned}.$$

observamos que $\sigma(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1)$ é realizada pelo lugar dos zeros comuns aos menores 2×2 da matriz

$$M_{\sigma(\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^1)} = \left| \begin{matrix} Z_0 & Z_1 \\ Z_2 & Z_3 \\ Z_4 & Z_5 \end{matrix} \right|_{3\times 2}.$$

A variedade $\sigma(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1) \subset \mathbb{P}^5$ é chamada a Segre 3-dimensional.

Observando bem, temos que $\sigma(\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2)$ e $\sigma(\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^1)$ são variedades que, embora tenham em comum a dimensão e as variedades secantes (conceitos posteriores), são duas variedades distintas, pois,

$$\sigma([1 : 1], [1 : 0 : 0]) = [1 : 0 : 0 : 1 : 0 : 0];$$

e, não existe $([x_0 : x_1 : x_2], [y_0 : y_1]) \in \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$ tal que

$$\sigma([x_0 : x_1 : x_2], [y_0 : y_1]) = [1 : 0 : 0 : 1 : 0 : 0]$$

4) Considere a Segre

$$
\begin{array}{rlcl}
\sigma: & \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 & \longrightarrow & \mathbb{P}^8 \\
& ([x_0, x_1, x_2]; [y_0, y_1, y_3]) & \longmapsto & [x_0y_0 : x_0y_1 : x_0y_2 : x_1y_0 : x_1y_1 : \\
& & & x_1y_2 : x_2y_0 : x_2y_1 : x_2y_2].
\end{array}
$$

Verifica-se que $\sigma(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2)$ é realizável pelos zeros comuns aos menores 2×2 da matriz

$$M_{\sigma(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2)} = \begin{bmatrix} Z_0 & Z_1 & Z_2 \\ Z_3 & Z_4 & Z_5 \\ Z_6 & Z_7 & Z_8 \end{bmatrix}.$$

Subvariedades de Variedades Segre

Observe que se $F(Z_{00}, Z_{01}, ..., Z_{nm})$ for um polinômio homogêneo de grau d nas variáveis $Z_{00}, ..., Z_{nm}$ então, substituindo Z_{ij} por X_iX_j, F se transforma num polinômio bi-homogêneo de bigrau (d, d) em $X's$ e $Y's$.

Poderíamos então definir as subvariedades de $\mathbb{P}^n\times \mathbb{P}^m$ como sendo o lugar dos zeros de polinômios bi-homogêneos de bigrau (d, d). Porém, como cada lugar de zeros de um polinômio bi-homogêneo de bigrau (d, e), é também o lugar de zeros de outro polinômio bi-homogêneo de bigrau (d', e') com $d' \geq d$ e $e' \geq e$. Assim podemos dizer que as subvariedades de $\mathbb{P}^n\times \mathbb{P}^m$, é o lugar de zeros de polinômios de qualquer bigrau.

Como exemplo de uma sub-variedade de Segre, tomemos a cúbica torcida C em $\mathbb{P}^3$ dada por

$$C = Z(Z_0Z_2 - Z_1^2) \cap Z(Z_1Z_3 - Z_2^2) \cap Z(Z_0Z_3 - Z_1Z_2)$$

e a Segre $\sigma(\mathbb{P}^1\times \mathbb{P}^1) = Z(Z_0Z_3 - Z_1Z_2)$.

Denotemos $f_1 = Z_0Z_1 - Z_1^2$, $f_2 = Z_1Z_3 - Z_2^2$, $f = Z_0Z_3 - Z_1Z_2$, $Q_1 = Z(f_1)$, $Q_2 = Z(f_2)$, $Q = Z(f)$.

Tendo-se

$$C = Q_1 \cap Q_2 \cap Q \subset Q \text{ e } Q = \sigma(\mathbb{P}^1\times \mathbb{P}^1).$$

Obeservemos que:

$$Q \cap Q_2 = Z(f, f_2) = Z(f, f_2, Z_0 f_2 - Z_1 f) = Z(f, f_2, Z_2 f_1) =$$
$$= Z(f, f_2, Z_2) \cup Z(f, f_1, f_2) = Z(Z_2, Z_3) \cup C \text{ e que,}$$

$$Q \cap Q_1 = Z(f, f_1) = Z(f, f_1, Z_2 f - Z_3 f_1) = Z(f, f_1, Z_1 f_2) =$$
$$= Z(f, f_2, Z_1) \cup Z(f, f_1, f_2) = Z(f_{,1}, f_2, Z_1) \cup C = Z(Z_0, Z_1) \cup C.$$

Ou seja, a interseção das quádricas Q, Q_1, Q_2 cuja interseção realiza a cúbica C, intersepta a variedade $\sigma(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$ em C unida às retas transversas $Z(Z_2, Z_3)$ e $Z(Z_0, Z_1)$ em $\mathbb{P}^3$.

CAPÍTULO 2

TEOREMA DA DIMENSÃO DA FIBRA

§ 1) Morfismos:

Seja $X \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ um conjunto algébrico afim. Uma função f definida em X tomando valores no corpo K, é denominada *regular* no conjunto algébrico X, se existe um polinômio F em $K[X_1, X_2, ..., X_n]$ tal que $f(x) = F(x)$ para todo $x \in X$. Se f é regular em X, e $f(x) = F(x)$ para todo x em X e algum polinômio F em $K[X_1, X_2, ..., X_n]$, temos: $f(x) = (F + G)(x)$ $\forall$ $x \in X$ e $\forall$ $G \in I(X)$. Todavia, dado o polinômio $F \in K[X_1, X_2, ..., X_n]$ só existe uma função regular f tal que $f(x) = F(x)$ para cada $x \in X$. O conjunto constituido de todas as funções regulares no fechado $X \subset \mathbb{A}^n(K)$, denotado por $K[X]$, constitui uma álgebra sobre o corpo K com respeito, às operações de adição, multiplicação de funções tomando valores no corpo e a multiplicação de elementos do corpo por elementos de $K[X]$.

O anel desta álgebra, é denominado *anel coordenado* do conjunto X.

Denotemos por $K[T]$ o anel $K[T_1, T_2, ..., T_n]$ e definamos a aplicação $K[T] \to K[X]$ que associa um polinômio F a $f \in K[X]$ onde $f(x) = F(x)$ para cada $x \in X$. Esta aplicação é de modo natural, um homomorfismo de anéis, cujo núcleo consiste dos polinômios em $K[T]$, que se anulam em X. Isto é, o núcleo deste homomorfismo é o ideal $I(X)$ da variedade X. Daí, segue-se, que o anel $K[X]$ é isomorfo ao quociente $\dfrac{K[T]}{I(X)}$. Este anel $K[X]$ é, portanto, bem determinado pelo ideal $I(X)$.

Exemplo - 2.1

1) Se X é um ponto, então, $I(X)$ é maximal e, portanto, $K[X]$ um corpo.

2) Se $X = \mathbb{A}^n(K)$, então $I(X) = 0$ e daí $K[\mathbb{A}^n(K)] = K[T] = K[T_1, T_2, ..., T_n]$.

3) Se $X = Z(F)$, F irredutível em $K[T]$, então, $\dfrac{K[T]}{I(X)}$, é um domínio.

Definição - 2.2: Sejam $X \subset \mathbb{A}^n$ e $Y \subset \mathbb{A}^m$ fechados. Uma aplicação $f : X \to Y$ será denominada *regular*, se existem m-funções regulares $f_1, f_2, ...f_m$ em X tais que $f(x) = (f_1(x), ..., f_m(x))$ para cada $x \in X$.

Exemplo - 2.3

1) Todas as funções regulares e todas as transformações lineares são aplicações regulares.

2) a projeção $f(x, y) = x$ determina uma aplicação regular da curva plana X de equação $xy = 1$ em $\mathbb{A}^1(K)$.

Definição - 2.4: Uma aplicação regular $f : X \to Y$ de conjuntos fechados é denominada um *isomorfismo* entre as variedades afins X e Y, se existe uma aplicação regular $g : Y \to X$ tal que $f \circ g = 1_Y$ e $g \circ f = 1_X$. No caso, X e Y são ditos isomorfos, escrevendo-se $X \cong Y$.

Observação - 2.5: Dados $X \subset \mathbb{A}^n$ e $Y \subset \mathbb{A}^m$ fechados temos $X \cong Y$ se, e somente se, $K[X] \cong K[Y]$, como k-álgebras num mesmo corpo.

Exemplos - 2.6

1) Sejam X a curva plana $X = \{(x, y) \in \mathbb{A}^2(I\!R) \mid y = x^l\}$, l inteiro e Y o espaço $\mathbb{A}^1$. Consideremos também as aplicações $f : \begin{array}{l} X \longrightarrow Y \\ (x,y) \longmapsto x \end{array}$ e

$g : \begin{array}{l} Y \longrightarrow X \\ t \longmapsto (t, t^l) \end{array}$. Portanto $X \cong \mathbb{A}^1$.

2) A aplicação $f(t) = (t^2, t^3)$ da reta na curva $x^3 = y^2$ é regular e injetiva, embora não seja um isomorfismo.

Corpo de funções racionais. Anéis locais

(Caso afim)

Seja $X \subset \mathbb{A}^n(K)$ um conjunto algébrico irredutível e

$$K[X] = \frac{K[X_1, X_2, ..., X_n]}{I(X)},$$

o seu anel coordenado. O corpo de frações do domínio $K[X]$, denotado por $K(X)$, é denominado *corpo das funções racionais* no conjunto X. Cada elemento $f \in K(X)$, denomina-se uma função racional em X. Dizemos que $f \in K(X)$ está definida em um ponto $P \in X$, se existirem duas funções regulares a e b em $K[X]$ tais que $f = \frac{a}{b}$ e $b(P) \neq 0$. O conjunto das funções racionais definidas em um ponto $P \in X$, denotado por $O_P(X)$, é um sub-anel do corpo $K(X)$, denominado anel local de X em P.

Consideremos em seguida, o homomorfismo

$$\begin{aligned} h: \ O_P(X) &\longrightarrow K \\ f \ &\longmapsto f(P) \end{aligned}$$

sobrejetor onde $N(h) = \{f \in O_P(X) \mid f(P) = 0\}$. Portanto, $N(h)$ é constituido dos elementos em $O_P(X)$ não inversíveis. Denotemos $N(h)$ por $M_P(X)$. O adjetivo "local" usado para o anel $O_P(X)$, não é gratuíto pois em um anel R são equivalentes as afirmações:

a) O conjunto dos elementos não inversíveis em R, constitui um ideal de R.

b) O anel R tem um único ideal maximal.

Um anel que verifica as condições (a) e (b) acima, denomina-se *anel local*. Num anel local R, seu ideal maximal é exatamente constituidos dos elementos não inversíveis em R. ([WF] - 44). Sendo assim, o anel $O_P(X)$ é local e $M_P(X)$ é o seu ideal maximal.

Numa ilustração simples, podemos considerar a variedade $W = Z(X) \subset \mathbb{A}^2(K)$ onde $I(W) = \langle X \rangle$. Neste caso, um polinômio $F \in K[X,Y]$ na forma $F(X,Y) = \sum a_{ij}X^iY^j$ é tal que $F(X,Y) - a_{00} - a_{01}Y - a_{02}Y^2 - ... = XH(X,Y)$ para um certo polinômio $H \in K[X,Y]$. Portanto, a classe residual do polinômio F módulo o ideal $I(W)$, é dada por $G(Y) = a_{00} + a_{01}Y + a_{02}Y^2 + \dots$.

E daí, se ter que $K[X,Y] \,/\, I(W) \simeq K[T]$ e $K(W)$ corpo das funções racionais no conjunto W é igual ao corpo das funcões racionais na variável T. Se tomarmos $P = (0,1) \in Z(X)$ temos: $O_P(W) = \{F \in K(T) \mid F = \frac{f}{g};\ f,g \text{ em } K[T] \text{ e } g(0) \neq 0\}$ e $M_P(W) = \{F \in K[T] \mid F(P) = 0\} = \{\frac{f}{g} \in K[T] \mid f(T) = T\,h(T),\ h \in K[T]\}$.

Definição - 2.7: Uma função racional $\phi \in K(X)$ é denominado *regular em um ponto* $x \in X$, se existirem duas funções regulares f e g em $K[X]$ com $g(x) \neq 0$ tais que $\phi(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Proposição - 2.8: Uma função racional ϕ, que for regular em cada ponto x de um fechado do $X \subset \mathbb{A}^n$, é uma função regular em X (veja: I.R - 25).

Aplicações Racionais
(caso afim)

Seja $X \subset \mathbb{A}^n$ um conjunto fechado irredutível. Uma aplicação *racional* $X \to \mathbb{A}^m$ é dada por uma coleção de m funções $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_m \in K(X)$. Em particular, se Y é um subconjunto fechado em $\mathbb{A}^m$, uma *aplicação racional* $\phi : X \rightarrow Y$ é uma coleção de m funções $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_m \in K(X)$ tais que $(\phi_1(x), \phi_2(x), ..., \phi_m(x)) \in Y$ e que todas as funções $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_m$, sejam regulares em cada ponto $x \in X$. O subconjunto de pontos de Y da forma $\phi(x) = (\phi_1(x), ..., \phi_m(x))$, para algum $x \in X$, denomina-se *imagem de* X em Y pela aplicação ϕ, denotado por $\phi(X)$.

Definição - 2.9: Uma aplicação racional $\phi : X \rightarrow Y$ será denominada um *isomorfismo birracional,* se existe uma aplicação racional $\psi : Y \rightarrow X$ tais que $\phi(X)$ seja denso em Y, $\psi(Y)$ seja denso em X, $\phi_\circ\psi = 1_Y$ e $\psi_\circ\phi = 1_X$. Neste caso, diz-se que X e Y são birracionalmente isomorfos.

Por exemplo, sejam $X = Z(Y^2 - X^3) \subset \mathbb{A}^2(K)$, $Y = \mathbb{A}^1(K)$,

$$\begin{array}{rcl} f: \; X - \{(0,0)\} & \longrightarrow & Y \\ (x,y) & \longmapsto & \dfrac{y}{x} \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rcl} g: \; Y & \longrightarrow & X - \{(0,0)\} \\ t & \longmapsto & (t^2, t^3) \end{array}.$$

Tendo-se

$$g \circ f = 1_X, f \circ g = 1_Y, \; fecho\{f(X)\} = Y = \mathbb{A}^1, \; fecho\{g(Y)\} = X - \{(0,0)\} = X.$$

Funções Regulares.

(caso projetivo)

Se X é uma subvariedade de $\mathbb{P}^n$, $x \in X$, $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$; com P e Q polinômios homogêneos de mesmo grau em $K[X_0, X_1, ..., X_n]$ e $Q(x) \neq 0$, então, f determina em alguma vizinhança de $x \in X$ uma função com valores em K. Esta função se denomina *regular* em x. Uma função em X que é regular em cada ponto de $x \in X$, é dita *regular* em X. Com respeito à adição, multiplicação usuais de funções, o conjunto $K[X]$ das funções regulares em X é um anel.

Definição - 2.10: Seja $f : X \to Y$, $Y \subset \mathbb{P}^m$ uma aplicação de variedades quase-projetivas (abertos na topologia induzida). A aplicação f será denominada *regular* se para cada $x \in X$ e cada aberto afim U_i da observação (1.14), contendo $f(x)$, existe uma vizinhança U de x tal que $f(U) \subset U_i$ e que a aplicação $f : U \to U_i$ seja regular no sentido afim.

Corpo de funções racionais. Anéis locais.

(caso projetivo)

Para cada polinômio homogêneo F no anel $K[X_0, X_1, ..., X_n]$ definimos o polinômio $F_* \in K[X_0, X_1, ..., X_{n-1}]$ por

$$F_*(X_0, X_1, ..., X_{n-1}) = F(X_0, X_1, ..., X_{n-1}, 1)$$

e, para cada polinômio $F = F_0 + F_1 + ... + F_d$ (F_i - formas de grau i) em $F[X_0, X_1, ..., X_{n-1}]$ definimos a forma F^* em $F[X_0, X_1, ..., X_{n-1}, X_n]$ por

$$F^*\,(X_0, X_1, ..., X_{n-1}, X_n) = X_n^d F_0(X_0, ..., X_{n-1}) + ... + F_d(X_0, X_1, ..., X_{n-1}) =$$
$$= X_n^d F\left(\frac{X_0}{X_n}, \cdots, \frac{X_0}{X_n}\right).$$

Os processos para obtermos F_* e F^*, denominam-se desomogeneização e homogeneização com respeito à variável X_n.

Nós vimos na observação (1.14), que $\mathbb{P}^n = \bigcup_{1 \leq i \leq n+1} U_i$ onde cada U_i é isomorfo a $\mathbb{A}^n$. A nossa intenção agora, é estabelecer ligações entre conjuntos algébricos afins, conjuntos algébricos projetivos e definir o corpo de funções racionais de uma variedade projetiva e os seus anéis locais.

Consideremos pois, $X \subset \mathbb{A}^n$ um conjunto algébrico, $I = I(X)$ seu ideal no anel $K[X_0, X_1, ..., X_n]$. Seja I^* o ideal e definido como ideal gerado pelo conjunto $\{F^* \in K[X_0, X_1, ..., X_n] \mid F \in I(X)\}$, onde F^* é a forma obtida homogeneizando o polinômio F com respeito a X_n. Verifica-se que I^* é um ideal homogêneo. Denote-se $Z(I^*)$ por X^* em $\mathbb{P}^n$. Por outro lado, se $X \subset \mathbb{P}^n$ é um conjunto algébrico, define-se o ideal I_* como o idel de $K[X_0, X_1, ..., X_{n-1}]$ gerado pelo conjunto $\{F_* \in K[X_0, X_1, ..., X_n] \mid F \in I(X)\}$ onde F_* é o polinômio desomogeneizado da forma F com respeito a X_n.

Mostra-se que se $X \subset \mathbb{A}^n$ é algébrico, e ϕ_{n+1} é a $(n+1)$-ésima aplicação na observação (1.14), temos $\phi_{n+1}(X) = X^* \cap U_n$ e que $(X^*)_* = X$. (Ver WF - 96).

Para cada conjunto algébrico $X \subset \mathbb{A}^n$ denomina-se $X^* \subset \mathbb{P}^n$ de *fecho projetivo* de X em $\mathbb{P}^n$. Se $X \subset \mathbb{A}^n$ é a hipersuperfície $X = Z(F)$, tem-se que $I^* = \langle F^* \rangle$ e $X^* = Z(F^*)$. Porém, se $I = \langle F_1, F_2, ..., F_r \rangle$, não se tem em geral que $I^* = \langle F_1^*, F_2^*, ..., F_r^* \rangle$. ([WF] - 99).

Consideremos em seguida, uma variedade $X \subset \mathbb{P}^n$, $I(X)$ seu ideal e denotemos por $K_h[X]$ o domínio $K[X_0, X_1, ..., X_n] \;/\; I(X)$ denominado *anel coordenado* homogêneo da variedade X. O corpo de frações do domínio $K_h[X]$, denominado *corpo das funções homogêneas na variedade* X.

Observe que se f e g são formas do mesmo grau e se $g(x) \neq 0$ temos $\dfrac{f(\lambda x)}{g(\lambda x)} = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ $\forall\ \lambda \neq 0$ no corpo K. Denotemos por $K(X)$ o subcorpo de $K_h[X]$ constituido dos elementos f/g tais que f e g são formas do mesmo grau. Cada elemento de $K(X)$ se denomina uma função racional na variedade X.

Para cada $P \in X \subset \mathbb{P}^n$, consideremos $O_P(X) = \{Z \in K(X) \mid Z = f/g$ e $g(P) \neq 0\}$. Mostra-se que $O_P(X)$ é um anel local e que

$$M_P(X) = \{Z \in O_P(X) \mid Z = f/g,\ g(P) \neq 0 \text{ e } f(P) = 0\},$$

é seu ideal maximal.

Tomemos, então, $X \subset \mathbb{A}^n$ uma variedade e $X^* \subset \mathbb{P}^n$ seu fecho projetivo. Se $f \in K_h[X^*]$ é uma forma de grau d, podemos identificar f_* em $K[X]$ do seguinte modo: consideramos uma forma $F \in K[X_0, X_1, ..., X_n]$, cujo representante da classe de F módulo $I(X^*)$ seja f e que f_* seja um representante da classe residual de F_* módulo o ideal $I(X)$. Podemos também definir o isomorfismo

$$\begin{array}{rll} \alpha: & K(X^*) & \longrightarrow K[X] \\ & f/g & \longmapsto f_*/g_* \end{array}$$

onde f e g são formas do mesmo grau. Se $P \in X \subset \mathbb{A}^n$ podemos considerar $P \in X^*$ (via $\mathbb{A}^n \simeq U_n$) e tomar o isomorfismo induzido por α de $O_P(X^*)$ em $O_P(X)$. Usualmente, usa-se α para identificar $K(X)$ com $K(X^*)$ e $O_P(X)$ com $O_P(X^*)$.

Por outro lado, uma forma se anula numa variedade quasi-projetiva X, quando se anula precisamente em um aberto U da variedade quasi-projetiva X. Assim, $K(X) = K(U)$.

Aplicações Finitas

Definição - 2.11: Sejam A e B anéis, $A \subseteq B$. Um elemento $b \in B$ é dito inteiro sobre A se b satisfaz uma equação da forma

$$b^m + a_1 b^{m-1} + \ldots + a_m = 0$$

com $a_i \in A$. O anel B é dito inteiro sobre o anel A; se cada elemento $b \in B$, é inteiro sobre A.

Definição - 2.12: Uma aplicação regular $f : X \to Y$ é denominada *finita* ou *dominante*, quando o anel $K[X]$ for inteiro sobre o anel $K[Y]$.

Exemplo - 2.13: Se $f : X \to Y$ é finita então, cada ponto $y \in Y$ tem apenas um número finito de imagens inversas.

De fato, se $X \subset \mathbb{A}^n$ e $t_1, t_2, ..., t_n$ são as coordenadas em $\mathbb{A}^n$ vistas como funções regulares em X, cada t_j satisfaz uma equação do tipo

(1) $t_j^m + b_{1j} t_j^{m-1} + ... + b_{mj} = 0$ com $b_j \in K[Y]$ pois por hipótese, $K[X]$ é inteiro sobre $K[Y]$. Por outro lado, para $x \in f^{-1}(y)$ com y fixo em Y, temos

(2) $t_j^m(x) + b_{1j}(y)t_j^{m-1}(x) + ... + b_{mj}(y) = 0$. Como na equação (2) só temos um número finito de raizes, concluimos que $f^{-1}(y)$ é um conjunto finito em X.■

Lema - 2.14: Se um anel B é um módulo finito sobre um anel A, (com elemento unidade), então, $\alpha B \neq B$ para qualquer ideal próprio α do anel A. ([IR] - 48)

Teorema 2.15: Toda aplicação finita, é epimórfica.

Demonstração:

Seja $f : X \to Y$ uma aplicação finita, X e Y variedades afins e y um ponto de Y. Denotemos por m_y o ideal de $K[Y]$ que consiste das funções regulares que se anulam em $y \in Y$. Se $y = (a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ e $t_1, t_2, ..., t_n$ são as funções coordenadas em Y, temos $m_y = (t_1 - a_1,\ t_2 - a_2,\ ...,\ t_n - a_n)$.

Olhemos agora as funções coordenadas $t_1, t_2, ..., t_n$ como funções regulares em Y. Para cada $t_j \in K[Y]$, definamos $f^*(t_j) : X \to K$ por $f^*(t_j) = t_j \circ f$, tendo-se $f^*(t_j)(x) = (t_j \circ f)(x) = a_j\ \forall\ x \in f^{-1}(y)$.

As equações da variedade $f^{-1}(y)$ são portanto $f^*(t_1) = a_1$, $f^*(t_2) = a_2$, ..., $f^*(t_n) = a_n$. Por outro lado, o conjunto $f^{-1}(y)$ é vazio se, e somente se, o ideal $(f^*(t_1) - a_1,\ f^*(t_2) - a_2,\ ...,\ f^*(t_n) - a_n)$ for igual ao anel $K[X]$. Lembrando que o anel $K[Y]$ pode ser considerado um sub-anel de $K[X]$, não distinguiremos funções $u \in K[Y]$ de funções $f^*(u) \in K[X]$.

Neste caso, a condição

$$(f^*(t_1) - a_1,\ f^*(t_2) - a_2,\ ...,\ f^*(t_n) - a_n) = K[X],$$

e equivalente a

$$(t_1 - a_1,\ t_2 - a_2,\ ...,\ t_n - a_n) = K[X]$$

ou equivalentemente, $m_y.\ K[X] = K[X]$. Como $K[X]$ é finito sobre $K[Y]$, temos que $K[X]$ é um módulo finitamente gerado sobre $K[Y]$, (lema 2.14). Tomando no lema (2.14) $B = K[X]$ e $A = K[Y]$, temos que o ideal m_y, não é um ideal próprio. Ou seja, o conjunto $f^{-1}(y)$ não é vazio. Ou ainda, f é epimórfica.■

Corolário - 2.16: Toda aplicação finita mapeia conjuntos fechados em conjuntos fechados.

Demonstração:

Provemos o resultado para fechados e irredutíveis já que todo fechado é uma união de componentes irredutíveis.

Pois bem, se $f : X \to Y$ é uma aplicação finita, e $Z \subset X$ é um fechado irredutível, apliquemos o teorema (2.17) à aplicação $\bar{f} = f|Z : Z \to fecho\{f(Z)\}$. Mas $\bar{f}$ é finita, e, então, sobrejetiva. Daí $fecho\, f(Z) = \bar{f}(Z) = f(Z)$ é fechado.■

Teorema 2.17: Se $f : X \to Y$ é uma aplicação regular entre variedades afins, se cada ponto $y \in Y$ tem uma vizinhança V tal que $f^{-1}(V) = U$ é afim, e $f : U \to V$ é finita, temos que $f : X \to Y$ também é finita. ([IR] - 49).

Definição - 2.18: Uma aplicação regular $f : X \to Y$ entre variedades quasi-projetivas é dita *finita*, quando cada $y \in Y$ tem uma vizinhança $V \subset Y$ afim, tal que, $U = f^{-1}(V)$ é afim, e a aplicação $f : U \to V$ é finita. Se f é finita, cada conjunto $f^{-1}(y)$ é finito em X para cada y em Y e, pelo teorema (2.17), cada aplicação finita de variedades projetivas, é epimórfica.

O teorema (2.17) é a caracterização das aplicações finitas.

Teorema 2.19 - (Teorema da Normalização): Para cada variedade irredutível e projetiva X, existe uma aplicação finita ϕ de X sobre um espaço projetivo $\mathbb{P}^m$.

Demonstração:

Consideremos $X \subsetneq \mathbb{P}^n$, $\theta \in \mathbb{P}^n - X$ um ponto fixo e $\begin{array}{rl} \phi_1 : & X \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1} \\ & x \longmapsto \overline{x\theta} \cap \mathbb{P}^{n-1} \end{array}$

onde $\overline{x\theta}$ denota a reta por x e por θ. A aplicação ϕ_1 é regular, e daí, a imagem $\phi_1(X)$ ser um fechado em $\mathbb{P}^{n-1}$ ([IR] - 45).

Se $\phi_1(X) = \mathbb{P}^{n-1}$, o teorema está provado. Se $\phi_1(X) \subsetneq \mathbb{P}^{n-1}$, projetamos $\phi_1(X)$ em $\mathbb{P}^{n-2}$ via $\phi_2 : \phi_1(X) \to \mathbb{P}^{n-2}$. Se $\phi_2(\phi_1(X))$ for igual a um $\mathbb{P}^m$, tudo bem, pois $\phi_2 \circ \phi_1$ é regular. Se não, continuamos o processo com a certeza de que, em algum momento $\phi_m(\phi_{m-1}(X))$, é um $\mathbb{P}^m$ para algum $1 \leq m \leq n-1$ pois todas as imagens $\phi_1(X)$ são fechados, todas as projeções são finitas e portanto epimórficas.■

Este resultado também vale para aplicações finitas em variedades afins.

§3) Dimensão

Nosso objetivo agora, é definirmos um parâmetro ligado a uma variedade X em $\mathbb{P}^n$ que traduza por assim dizer um "tamanho" para a variedade X; a sua *dimensão*. Em primeiro lugar, exigiremos que o tal conceito apresente um comportamento razoável. Por exemplo, a dimensão de $X \subset \mathbb{P}^n$ deve ser menor ou igual a n; se X é levado sobre $\mathbb{A}^m$ por uma aplicação finita a dimensão de X deve ser igual a m. Mas será que para uma certa variedade X em $\mathbb{P}^n$ existem duas aplicações finitas uma de X em $\mathbb{A}^n$ e outra de X em $\mathbb{A}^m$ com $m \neq n$? O teorema de Normalização garante a existência, mas não garante a unicidade da aplicação finita de X em $\mathbb{A}^m$. Todavia, se X for irredutível e $f : X \to \mathbb{A}^n$ for uma aplicação finita, tem-se que o corpo das funções racionais $K(X)$ é uma extensão finita do corpo $f^*(K(\mathbb{A}^n))$ onde $\begin{array}{rl} f^* : & K(\mathbb{A}^n) \longrightarrow K(X) \\ & u \longmapsto u \circ f \end{array}$.

Como $f^*(K(\mathbb{A}^n))$ é isomorfo ao corpo $K(X_1, X_2, ..., X_n)$, o grau de transcendência de $K(X)$ sobre K é igual a n. Como o grau de transcendência de $K(X)$ sobre K independe da aplicação f, ele é um parâmetro que só depende da variedade X. Neste caso, somos motivados a definir:

Definição - 2.20: A *dimensão* de uma variedade quasi-projetiva $X \subset \mathbb{P}^n$ denotada por $\dim(X)$ é definida como o grau de transcendência do corpo das funções racionais $K(X)$ sobre o corpo K. Se Y é uma subvariedade de X, a diferença $\dim X - \dim Y$ denomina-se a co-dimensão de Y em X, denotada por $co\dim(Y, X)$.

Se X é uma variedade irredutível e $U \neq \phi$ é um aberto de X, então, $K(U) = K(X)$ e portanto, $\dim U = \dim X$.

Exemplos - 2.21

1) $\dim \mathbb{A}^n = \dim \mathbb{P}^n = n$ pois $K(\mathbb{A}^n) = K(X_1, ...X_n)$. além disto, se $U_i \cong \mathbb{A}^n$ é um aberto básico $(Z_i \neq 0)$ em $\mathbb{P}^n$, temos $n = \dim \mathbb{A}^n = \dim U_i = \dim \mathbb{P}^n$, pois $\mathbb{P}^n$ é irredutível.

2) Se $X = Z(F(X,Y))$ é uma curva plana irredutível em $\mathbb{A}^2(K)$, $\dim X = 1$.

3) Se X é finito, $\dim X = 0$. A recíproca, também é válida.

4) Se X e Y são variedades em $\mathbb{A}^n$ e $\mathbb{A}^m$, respectivamente, temos $\dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y$.

Proposição - 2.22: Se $Y \subset X$ então $\dim Y \leq \dim X$. Se X é irredutível e Y fechado em X com $\dim Y = \dim X$, então $X = Y$.

Demonstração:

Sejam $Y \subset X \subset \mathbb{A}^N$ com $\dim X = n$. Neste caso, qualquer subconjunto do conjunto das coordenadas $t_1, t_2, ..., t_N$ com $n + 1$ elementos, é algebricamente dependente como elementos de $K[X]$. Neste caso, existe um polinômio $F \neq 0$ tal que

$F(t_{i_1}, t_{i_2}, ..., t_{i_{n+1}}) = 0$ para cada subconjunto $\left\{t_{i_1}, t_{i_2}, ..., t_{i_{n+1}}\right\}$ de $\{t_1, t_2, ..., t_N\}$. Mas como

$$Y \subset X,\ F(t_{i_1}, t_{i_2}, ..., t_{i_{n+1}}) = 0$$

em Y. Portanto, o grau de transcendência de $K(Y)$ sobre K é menor ou igual ao grau de transcendência de $K(X)$ sobre K. Ou ainda, $\dim Y \leq \dim X$.

Por outro lado, se $\dim Y = \dim X$, tem-se que n das N coordenadas $t_1, t_2, ..., t_N$ são algebricamente independentes como elementos em $K[Y]$ e portanto, em $K[X]$. Tomemos $u \in K[X]$, u$\neq 0$ em X.

Como u depende algébricamente de n variáveis $t_1, t_2, ..., t_n$ em X, temos que u satisfaz uma relação do tipo

$$a_0(t_1, t_2, ..., t_n)u^l + a_1(t_1, t_2, ..., t_n)u^{l-1} + ... + a_l(t_1, ..., t_n) = 0 \quad (*)$$

em X. Podendo-se escolher os polinômios do lado esquerdo $(*)$ irredutíveis e termos $a_l \neq 0$. Se $u = 0$ em Y então $a_l = 0$ em Y. Como $t_1, t_2, ..., t_n$ são algebricamente independentes em Y, temos que $a_l(t_1, t_2, ..., t_n) = 0$ em $\mathbb{A}^n$, o que contradiz o fato de $a_l(t_1, t_2, ..., t_n) \neq 0$ em X. Portanto, se $u = 0$ em Y, $u = 0$ em X. Como X é fechado e irredutível, $X = Y$.■

Proposição - 2.23: As componentes irredutíveis de uma hipersuperfície em A^N ou em $\mathbb{P}^N$ têm cada uma delas, co-dimensão igual a um.

Demonstração:

Sejam $X = Z(F)$ uma hipersuperfície e $F = F_1F_2...F_n$ a decomposição do polinômio F em fatores irredutíveis.

Neste caso, $X = Z(F) = Z(F_1F_2...F_n) = \bigcup_{i=1}^{n} Z(F_i)$. Cada $Z(F_i)$ é uma componente irredutível da variedade X.

Suponhamos que t_N ocorra realmente em $F_i\,(t_1, t_2, ..., t_n) = 0$, então vamos mostrar que $t_1, t_2, ..., t_{N-1}$ são algebricamente dependentes em $K[Z(F_i)]$. De fato, seja G um polinômio tal que $G(t_1, t_2, ..., t_{N-1}) = 0$ em $Z(F_i)$; ou seja, $G \in I(Z(F_i))$. Pelo teorema dos zeros de Hilbert, existe um inteiro m tal que $G^m = HF_i$; o que não ocorre pois G não contém a variável t_N . E daí $\dim Z(F_i) \geq N - 1$. Como $X \subsetneq \mathbb{A}^N$, temos $\dim Z(F_i) = N - 1$. Ou seja, $co\dim\,(Z(F_i), \mathbb{A}^N) = 1$.■

Proposição - 2.24: Qualquer variedade $X \subset \mathbb{A}^n$ em que cada uma de suas componentes irredutíveis, tenha co-dimensão igual a um, é uma hipersuperfície. Além do mais, o ideal $I(X)$, é principal. ([IR] - 55).

Seguindo nosso caminho, é bom lembrar que cada variedade $X \subset \mathbb{P}^n$ é uma interseção finita de hipersuperfícies, uma vez que o ideal $I(X)$ é finitamente gerado em $K[X_0, X_1, ...X_n]$. Além disto, $I(X)$ é homogêneo.

Neste caso, podemos nos perguntar se é razoável avaliarmos dimensões de interseções de X com hipersuperfícies em $\mathbb{P}^n$. Isto porque, no nosso contexto atual, as variedades mais conhecidas, do ponto de vista dimensional, são as hipersuperfícies. A seguir, apresentaremos um teorema que trata destas questões acima.

Proposição - 2.25: Se uma forma F não se anula em uma variedade irredutível X, então, $\dim(X \cap Z(F)) = \dim X - 1$.

Demonstração:

Sejam, então, X um fechado em $\mathbb{P}^n$ e $F \neq 0$ uma forma em X. Denotemos por X_F a interseção $X_F = X \cap Z(F)$. Para cada componente X_i de X, escolhamos um ponto $x_i \in X$. A partir dai, construamos uma forma linear L que não se anule em nenhum destes pontos x_i de X. Tomando pontências convenientes da forma L, podemos construir uma forma F_0 que não se anula em nenhuma das componentes X_i de X. Assim, $\dim\,(X_{F_0}) = \dim\,(X \cap Z(F_0)) < \dim\, X$. Denotemos X_{F_0} por $X^{(1)}$ e X por $X^{(0)}$. Apliquemos o processo acima para o fechado $X^{(1)}$, determinando outra forma F_1 do mesmo grau de F_0. Seja $X^{(2)} = X^{(1)} \cap Z(F_1)$. Continuando com o processo, determinamos uma seqüência de variedades e outra de formas a saber:

$$X = X^{(0)} \supset X^{(1)} \supset ... \supset X^{i+1} \text{ onde } X^{(i+1)} = X^{(i)}_{F_i}.$$

Como $X^{(i+1)} \subset X^{(i)}$, $\dim X^{(i+1)} < \dim X^{(i)}$.. Portanto, se $\dim X = n$, temos que X^{n+1} é vazio. Em outras palavras, as formas $F_0, F_1, ..., F_n$, não se anulam simultaneamente em X.

Consideremos a aplicação

$$\Phi: \; X \longrightarrow \mathbb{P}^n$$
$$x \longmapsto [F_0(x) : F_1(x) : ... : F_n(x)].$$

Esta aplicação, induz a aplicação finita $X \to \Phi(X)$ ([IR] - 51, teorema 8) portanto, $K[X]$ é um anel inteiro sobre $K[\Phi(X)]$. E daí se ter, que o grau de transcendência de $K(X)$, é igual ao grau de transcedência de $K(\Phi(X))$ sobre K. Portanto, $\dim X = \dim \Phi(X) = n$. Como $\Phi(X)$ é fechado em $\mathbb{P}^n$, e X é irredutível, temos $\Phi(X)$ irredutível com a mesma dimensão de $\mathbb{P}^n$ e portanto, $\Phi(X) = \mathbb{P}^n$ (Proposição 2.24).

Suponhamos agora que $\dim X^{(1)} = \dim X_{F_0} < n-1$. Assim $X^{(n)}$ é vazio. Em outras palavras, as formas $F_0, F_1, ..., F_{n-1}$ não se anulam simultaneamente em X. Portanto $[0 : 0 : ... : 1] \notin \Phi(X) = \mathbb{P}^n$. Ou seja, $\dim X^{(1)} \geq n-1 = \dim X - 1$. ■

Corolário - 2.26: Se $X \subset \mathbb{P}^N$ é uma variedade quasi-projetiva irredutível n-dimensional e $Y \neq \Phi$ é o conjunto de zeros de m formas em X, então, cada uma das componentes de Y tem dimensão maior ou igual a $n-m$ ([IR] - 59).

Corolário - 2.27: Em $\mathbb{P}^2$, duas curvas quaisquer sempre se interseptam.

Demonstração:

Sejam $X = Z(F_1)$ e $Y = Z(F_2)$ duas curvas em $\mathbb{P}^2$. Suponhamos $X \cap Y = \Phi$. Neste caso, F_2 não se anula em X.

Mas pelo teorema (2.25),

$$\dim(X \cap Z(F_2)) = \dim X - 1 = 1 - 1 = 0.$$

Ou seja, $X \cap Z(F_2)$ é finito e não vazio.■

§3 - O teorema da dimensão da fibra

O teorema seguinte nos permite de forma indireta, calcular a dimensão de algumas variedades projetivas.

Teorema - 2.28 (Teorema da dimensão da fibra): Se $f : X \to Y$ é um aplicação regular de variedades irredutíveis tais que $f(X) = Y$, $\dim X = n$, $\dim Y = m$ então $m \leq n$ e;

1) $\dim f^{-1}(y) \geq n - m$ para cada $y \in Y$.

2) Existe um aberto não vazio $U \subset Y$ tal que $\dim f^{-1}(y) = n - m$ para todo $y \in U$.

Demonstração:

1) Este resultado é uma propriedade local, pois só depende da aplicação f e do ponto y em questão, de modo que, basta mostrá-lo em um aberto $U \subset Y$ com U contendo y. Pois bem, sejam V um aberto de Y contendo o ponto y e $U \subset X$ o aberto $f^{-1}(V)$ (f-regular). Este aberto V pode ser a interseção de Y com algum dos abertos básicos de $\mathbb{P}^n$ definido no exemplo (2.11). Podemos supor também que Y seja afim e contido em $\mathbb{A}^N$. Suponhamos construida para a variedade Y a sequência $Y^{(0)}, Y^{(1)}, ..., Y^{(m)}$ conforme a construida para X no teorema (2.27). Seja $Y^{(m)} = Y \cap Z$ onde Z é definida pelas m equações das formas obtidas na proposição (2.25) e $y \in Z$. Escolhamos

U de modo que $U \cap Z \cap Y = \{y\}$ logo podemos supor que $Z \cap Y = \{y\}$. Supondo Z definida pelo sistema $g_0 = g_1 = ... = g_m = 0$, tal sistema, define $y \in Y$. Deste modo, em X, o sistema $f^*(g_1) = f^*(g_2) = ... = f^*(g_m) = 0$ define $f^{-1}(y)$. Por outro lado, X irredutível e $f^{-1}(y) \neq \phi$ sendo o lugar dos zeros de m formas em X, temos que cada uma de suas componentes tem dimensão maior ou igual a $n - m$.

2) Vamos substituir Y por um aberto afim $W \subset Y$ e X pelo aberto afim $V \subset f^{-1}(W)$. Como V é aberto em X (variedade irredutível) V é denso em $f^{-1}(W)$ e $f(V)$ é denso em W. Portanto, f determina um mergulho $f^* : K[W] \to K[V]$.

Considerando $K[W] \subset K[V]$, temos $K(W) \subset K(V)$. Sejam $K[W] = K[w_1, w_2, ..., w_M]$ e $K[V] = K[v_1, v_2, ..., v_N]$. Como $\dim W = m$ e $\dim V = n$, o corpo $K(V)$ sobre $K(W)$ tem grau de transcendência $n-m$. Suponhamos agora que $v_1, v_2, ..., v_{n-m}$ sejam algebricamente independentes sobre $K(W)$ e que os v_i $(i = n - m + 1, ..., N)$ restantes, sejam conectados pelas relações

$$F_i(v_i, v_1, ..., v_{n-m}, w_1, ..., w_M) = 0 . \qquad (*)$$

Denotemos por $\overline{v_i}$ a restrição de v_i a $f^{-1}(y) \cap V$. Então

$$K(f^{-1}(y) \cap V) = K[\overline{v_1}, \overline{v_2}, ..., \overline{v_N}] \qquad (**)$$

Olhemos agora os F_i das relações (*), nas variáveis $v_i, v_2, ..., v_N$ com coeficientes nas variáveis $w_1, w_2, ..., w_M$ e denotemos por Y_i, as subvariedades de W definidas pelos zeros comuns aos coeficientes líderes dos polinômios $F_i \in K[W][V]$ tomados em $K[W] = K[w_1, w_2, ..., w_M]$. Façamos $Y_0 = \bigcup Y_i$, $U = W - Y_0 \neq \phi$ pois $W \subset Y$, W é aberto Y_0 fechado. Se $y \in U$ nenhum dos polinômios $F_i(T_i, T_1, T_2, ..., T_{n-m}, w_1(y), ...w_m(y))$ é nulo. Ou seja, todos os $\overline{v_i}$ são algebricamente dependentes em $\overline{v_1}, \overline{v_2}, ..., \overline{v}_{n-m}$. Ou seja, $\dim f^{-1}(y) \leq n-m$. Portanto, por (1) temos $\dim f^{-1}(y) = n-m$ para cada $y \in U$.■

Proposição - 2.29: Se $f : X \to Y$ é uma aplicação regular de variedades projetivas, $f(X) = Y$ e se Y e todas as fibras $f^{-1}(y)$ são irredutíveis e da mesma certa dimensão, então X é irredutível também. (veja: [IR] - 25).

CAPÍTULO 3

§-1) Variedades Secantes

Ao construirmos cada Grassmaniana $\mathbb{G}(1,n)$, obtemos subvariedades em $\mathbb{P}^N$ onde $N = \dfrac{n(n+1)}{2} - 1$. Cada elemento $l \in \mathbb{G}(1,n)$, na realidade é um subconjunto de $\mathbb{P}^n$. Logo abaixo, mostraremos um resultado estabelecendo ligações entre fechados de $\mathbb{G}(1,n)$ e fechados de $\mathbb{P}^n$. Antes, porém, vamos conceituar variedades de espaços produto, por exemplo, do tipo $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ necessárias a diversas conceituações futuras.

Consideremos o conjunto

$$\sum = \{(l,p) \mid p \in l\} \subset \mathbb{G}(1,n) \times \mathbb{P}^n \subset \mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^n.$$

Mostra-se que Σ é uma subvariedade de $\mathbb{G}(1,n) \times \mathbb{P}^n$. Esta variedade, denomina-se *variedade de incidência* ou simplesmente *incidência.*

Consideremos as aplicações

$$\begin{array}{rrcl} \pi_1 : & \sum & \longrightarrow & \mathbb{G}(1,n) \\ & (l,p) & \longmapsto & l \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rrcl} \pi_2 : & \sum & \longrightarrow & \mathbb{P}^n \\ & (l,p) & \longmapsto & p \end{array}$$

denominadas de primeira e segunda projeção da incidência. Estas aplicações são regulares, transformando portanto subvariedades da incidência em subvariedades de $\mathbb{G}(1,n)$ e $\mathbb{P}^n$ respectivamente. Usaremos em seguida as projeções da incidência para demonstrarmos a proposição abaixo, cujo resultado estabelece vínculos entre fechados de $\mathbb{G}(1,n)$ em $\mathbb{P}^N$ com fechado em $\mathbb{P}^n$.

Proposição 3.1: Se $\phi \subset \mathbb{G}(1,n)$ é uma subvariedade da Grassmaniana, temos que a união $\Psi = \bigcup_{l \in \phi} l$ é uma variedade de $\mathbb{P}^n$.

Demonstração:

Aproveitando-nos da regularidade das projeções π_1 e π_2 na incidência $\sum$, mostraremos este fato, verificando que $\Psi = \pi_2(\pi_1^{-1}(\Phi))$.

De fato, se $x \in \Psi$, existe $l \in \Phi$ tal que $x \in l$. Logo $(l, x) \in \sum$. Como $\pi_2(l, x) = x$ tem-se que $x \in \pi_2(\pi_1^{-1}(l))$. Daí, resulta que, $x \in \pi_2(\pi_1^{-1}(\Phi))$. Reciprocamente, se $y \in \pi_2(\pi_1^{-1}(\phi))$, então, existe $z \in \pi_1^{-1}(\phi)$ tal que $y \in \pi_2(z)$. Como $z \in \pi_1^{-1}(\phi)$, existe $l \in \phi$ tal que $z \in \pi_1^{-1}(l)$. Logo, $z = (l, x)$ para algum $x \in l$. Portanto, $y = \pi_2(z) = \pi_2(l, x) = x$. Ou seja, $y \in l$. Assim, $y \in \Psi$.■

É bom ficarmos atentos ao resultado da proposição anterior.

Continuemos nosso trabalho a procura de subvariedades da Grassmaniana $\mathbb{G}(1, n)$, ligando-as a fechados de $\mathbb{P}^n$ via proposição (3.1).

Seja, então, $X \subset \mathbb{P}^n$ uma variedade. O subconjunto da Grassmaniana $\mathbb{G}(1, n)$ definido por

$$\mathcal{C}_1(X) = \{l \in \mathbb{G}(1, n)) \mid l \cap X \neq \Phi\},$$

é uma subvariedade de $\mathbb{G}(1, n)$ pois $\mathcal{C}_1(X) = \pi_1(\pi_2^{-1}(X))$, onde π_1 e π_2 representam a primeira e a segunda projeções canônicas na variedade de incidência $\sum$. Denomina-se $\mathcal{C}_1(X)$ de variedade das retas incidentes a X. No caso de X e Y serem subvariedades próprias de $\mathbb{P}^n$, definamos $j(X, Y) = \{l \in \mathbb{G}(1, n) \mid l \cap X \neq \Phi$ e $l \cap Y \neq \Phi\} \subseteq \mathbb{G}(1, n)$. Observe que, no caso em que X e Y são disjuntas, $j(X, Y) = \mathcal{C}_1(X) \cap \mathcal{C}_1(Y) \subseteq \mathbb{G}(1, n)$

Proposição 3.2: A dimensão da variedade das retas incidentes $\mathcal{C}_1(X)$ de uma variedade $X \subsetneq \mathbb{P}^n$ é igual a $n - 1 + \dim X$.

Demonstração:

Consideremos $X \subset \mathbb{P}^n$ uma variedade irredutível,

$$\mathcal{C}_1(X) = \{l \in \mathbb{G}(1, n) \mid l \cap X \neq \phi\} \text{ e}$$
$$\Psi = \{(l, p) \mid p \in l\} \subset \mathcal{C}_1(X) \times X \subset \mathbb{G}(1, n) \times \mathbb{P}^n;$$

$$\begin{array}{rl} \bar{\pi}_1 : & \Psi \longrightarrow \mathcal{C}_1(X) \\ & (l,p) \longmapsto l \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rl} \bar{\pi}_2 : & \Psi \longrightarrow X \\ & (l,p) \longmapsto p \end{array}$$ as restrições das projeções canônicas em Ψ. Neste caso, $\bar{\pi}_2(\Psi) = X$ e, $\bar{\pi}_2^{-1}(p) = \{(l,p) \in \Psi \mid p \in l\}$. Sendo assim, para cada p fixo em X, a fibra $\bar{\pi}_2^{-1}(p)$ é isomorfa a $\mathbb{P}^{n-1}$ tendo portanto dimensão igual a $n-1$. Pelo teorema da dimensão da fibra, temos que $n - 1 = \dim \bar{\pi}_2^{-1}(p) = \dim \Psi - \dim X$. Ou seja, $\dim \Psi = n - 1 + \dim X$.

Por outro lado, para cada reta $l \in \mathcal{C}_1(X)$, temos que $\bar{\pi}_1^{-1}(l) = \{l\} \times \{l \cap X\}$. Como não pode acontecer $l \subset X$, acontece $l \cap X$ finito. Portanto, temos que $\dim \bar{\pi}_1^{-1}(l) = 0$. Portanto, $\bar{\pi}_1$ é um morfismo finito.
Logo $\dim \mathcal{C}_1(X) = \dim \Psi = n - 1 + \dim X$.■

Variedades de Ligamento

Sejam X e Y variedades irredutíveis e disjuntas em $\mathbb{P}^n$ e $j : X \times Y \to \mathbb{G}(1,n)$ a aplicação que mapeia cada ponto $(p,q) \in X \times Y$ na reta em $\mathbb{G}(1,n)$ que liga p a q. Ou seja $j([v],[w]) = [v \wedge w]$. Esta aplicação, além de bem definida, é regular. De modo geral, ainda que $X \cap Y \neq \Phi$ define-se a aplicação racional

$$j : X \times Y \dashrightarrow \mathbb{G}(1,n)$$

que associa $(p,q) \in X \times Y$ à reta $\overline{pq}$. A imagem desta aplicação na grassmaniana, é o fecho em $\mathbb{G}(1,n)$ do lugar das retas $\overline{xy}$ com $x \in X$ e $y \in Y$ e $x \neq y$. Num ponto $p \in X \cap Y$, não temos bem definida, uma reta l na variedade $j(X,Y)$, pois $j(p,p)$ não está definido. Neste caso, $j(X,Y) = fecho\,\mathrm{Im}(j) \subset \mathbb{G}(1,n)$.

Pela proposição (3.1) a união $\bigcup_{l \in j(X,Y)} l$ é uma variedade em $\mathbb{P}^n$, a qual se denomina "Variedade de Ligamento" das variedades X e Y em geral, denotada por $J(X,Y)$.

Exemplo 3.3: Consideremos as cônicas C_1 e C_2 no espaço $\mathbb{P}^4$ dadas por:

$$C_1 = \{[0:0:w_2:w_3:w_4] \mid w_2^2 = w_3w_4\}$$

contida no plano

$$\Lambda_1 : w_0 = w_1 = 0 e C_2 = \{[w_0:w_1:w_2:0:0] \mid w_2^2 = w_0w_1\}$$

contida no plano $\Lambda_2 : w_3 = w_4 = 0$. Mostraremos que a variedade de ligamento $J(C_1, C_2)$ das cônicas em questão, é uma hipersuperfície quártica em $\mathbb{P}^4$.

Demonstração:

Observe que $C_1 \cap C_2 = \Phi$, neste caso, $J(C_1, C_2) = \bigcup_{l \in \mathrm{Im}(j) = C_1(C_1) \cap C_1(C_2)} l$.

Seja $S = \{(v; [\lambda : \mu]; z) \in C_1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^4 \mid \lambda v + \mu z \in C_2\}$.

Se $v = [0:0:v_2:v_3:v_4]$ e $z = [z_0:z_1:z_2:z_3:z_4]$, as equações de S são:

$$\begin{aligned} \lambda v_3 + \mu z_3 &= 0 && (1) \\ \lambda v_4 + \mu z_4 &= 0 && (2) \\ (\lambda v_2 + \mu z_2)^2 &= \mu^2 z_0 z_1 && (3) \\ v_2^2 &= v_3 v_4 && (4) \end{aligned}$$

É claro que $p_3(S) = J(C_1, C_2)$ ond p_3 é terceira projeção.

Para determinarmos as equações de $J(C_1, C_2)$, temos que usar o processo de eliminação. Das equações (1), (2) e (4), temos:

$$\lambda^2 v_2^2 = \lambda^2 v_3 v_4 = \mu^2 z_3 z_4 \qquad (5)$$

Da equação (3) tem-se que $\lambda^2 v_2^2 + 2\lambda\mu v_2 z_2 + \mu^2 z_2^2 = \mu^2 z_0 z_1$. Ou ainda de (3) e (5),

$$\mu^2 z_3 z_4 + 2\lambda\mu v_2 z_2 + \mu^2 z_2^2 = \mu^2 z_0 z_1.$$

Logo

$$2\lambda\mu v_2 z_2 = \mu^2(z_0z_1 - z_2^2 - z_3z_4).$$

Portanto

$$4\lambda^2\mu^2 v_2^2 z_2^2 = \mu^4(z_0z_1 - z_2^2 - z_3z_4)^2.$$

Logo

$$4z_2^2 z_3 z_4 = (z_0z_1 - z_2^2 - z_3z_4)^2.$$

Ou seja,

$$J(C_1, C_2) = Z((z_0z_1 - z_2^2 - z_3z_4)^2 - 4z_2^2z_3z_4) \subseteq \mathbb{P}^4. \quad \blacksquare$$

Exemplo 3.4: Consideremos as cônicas

$$C_3 = \{[0 : 0 : w_2 : w_3 : w_4] \in \mathbb{P}^4 \mid w_4^2 = w_2w_3\}$$

e

$$C_4 = \{[w_0 : w_1 : w_2 : 0 : 0] \in \mathbb{P}^4 \mid w_0^2 = w_1w_2\}.$$

Usando um método análogo ao anterior, podemos provar que $J(C_3, C_4)$ é uma hipersuperfície cúbica em $\mathbb{P}^4$.

Os exemplos 3.3 e 3.4 nos mostram variedades de ligamento $J(C_1, C_2)$ e $J(C_3, C_4)$, bem distintas para conjuntos de quádricas contidas no mesmo par de planos. A diferença entre estas variedades de ligamento não se restringe apenas a diferença entre as quádricas, mas, ao fato do segundo par de quádricas ter interseção não vazia.

Um caso muito especial e importante de variedades de ligamento, é o caso em que $X = Y$, com X irredutível em $\mathbb{P}^n$. Neste caso, define-se a aplicação racional $s : X \times X - \Delta - - - \longrightarrow \mathbb{G}(1, n)$ que associa cada ponto (p, q) à reta $\overline{pq} \in \mathbb{G}(1, n)$ que liga p a q; $p \neq q$. A aplicação s é denominada "*aplicação das retas secantes*" da variedade $X \subset \mathbb{P}^n$. O símbolo Δ, denota a diagonal em $X \times X$.

O fecho de $s(X \times X - \Delta)$ na grassmaniana $\mathbb{G}(1, n)$, denotado por $\mathcal{S}(X)$, é a variedade denominada "*variedade das retas secantes*" da variedade X. Cada reta em $\mathcal{S}(X)$ é denominada de reta secante à variedade X. Devemos atentar para o fato que uma reta l pode estar na variedade $\mathcal{S}(X)$ das retas secantes à variedade X, sem que l seja gerada por sua interseção com X, pois quando se define $\mathcal{S}(X)$ como o fecho em $\mathbb{G}(1,n)$ da imagem $s(X \times X - \Delta)$, nela se incluem as retas que tocam a variedade X em apenas um ponto. As retas na variedade das retas secante $\mathcal{S}(X)$ que tocam X em pelo menos dois pontos, denominamos retas secantes honestas.

Como $\mathcal{S}(X) := fecho\{s(x,y) \in \mathbb{G}(1,n) | x \neq y\} = fecho\, s(X \times X - \Delta)$, $\mathcal{S}(X)$ é fechado em $\mathbb{G}(1,n)$. A proposição (3.1) garante que $Sec(X) = \bigcup_{l \in \mathcal{S}(X)} l$ é fechado em $\mathbb{P}^n$. A variedade $Sec(X)$, é denominada "*variedade secante*" ou variedade de cordas da variedade X.

Observação 3.5: A menos que a variedade X contenha retas, por exemplo X seja um subespaço linear de $\mathbb{P}^n$, cada fibra $s^{-1}(l)$ da aplicação "retas secantes" é finita, isto porque se l não está contida em X, então, $l \cap X$ é finito. As variedades de $\mathbb{P}^n$ que contêm todas suas retas secantes são os subespaços lineares de $\mathbb{P}^n$. Assim, $\dim(X \cap l) < \dim l = 1$ para cada $l \in \mathcal{S}(X)$. Portanto

$$0 = \dim s^{-1}(l) = \dim(X \times X - \Delta) - \dim \mathcal{S}(X).$$

Ou seja,

$$\dim \mathcal{S}(X) = \dim(X \times X - \Delta) = 2 \dim X.$$

Por outro lado, se X é irredutível, a variedade $\mathcal{S}(X)$ é irredutível pois $\mathcal{S}(X)$ é imagem de uma variedade irredutível pela aplicação $s : X \times X - \Delta \to \mathbb{G}(1,n)$ que é regular.

Observação 3.6: A variedade $\mathcal{C}_1(X)$ das retas incidentes à variedade X, contém propriamente a variedade das retas secantes $\mathcal{S}(X)$.

Proposição 3.7: Se X é uma subvariedade irredutível de $\mathbb{P}^n$ temos que:

a) A variedade $\mathcal{S}(X)$ é irredutível e $\dim \mathcal{S}(X) = 2 \dim X$.

b) A variedade secante $Sec(X)$, é irredutível e $\dim Sec(X)$ é no máximo igual a $2\dim X + 1$.

A igualdade ocorre se, somente se, cada ponto da variedade secante, pertence somente a um número finito de retas secantes a X.

Demonstração:

Consideremos em seguida, a variedade de incidência

$$\sum = \{(l,p) \mid p \in l\} \subset \mathcal{S}(X) \times \mathbb{P}^n \subset \mathbb{G}(1,n) \times \mathbb{P}^n$$

onde a imagem de $\sum$ pela segunda projeção π_2 é a variedade secante $Sec(X)$ da variedade X, enquanto que, a imagem $\pi_1(\sum)$ da primeira projeção é a variedade das retas secantes $\mathcal{S}(X)$ da variedade X (veja proposição 2.29). Assim, a fibra

$$\pi_1^{-1}(l) = \{(l,p) \mid p \in l\} = \{l\} \times l \subset \mathcal{S}(X) \times \mathbb{P}^n$$

tem dimensão $0 + 1 = 1$. Como π_1 é regular, e cada fibra $\pi_1^{-1}(l)$ é irredutível de mesma dimensão e $\mathcal{S}(X)$ irredutível, temos que a variedade de incidência $\sum$ também é irredutível. Além disso, pelo teorema da dimensão da fibra, tem-se que

$$\dim \sum = \dim \pi_1^{-1}(l) + \dim \mathcal{S}(X) = 1 + 2\dim X.$$

Pelo fato de $\sum \subset \mathcal{S}(X) \times \mathbb{P}^n$, temos que um ponto $p \in \pi_2(\sum)$ se, e somente se, p está em alguma reta secante a X. Ou seja, $\pi_2(\sum) = Sec(X)$. Além do mais, para cada $p \in Sec(X)$, temos $\dim \pi_2^{-1}(p) \geq 0$ pois $\pi_2^{-1}(p) \neq \phi$.

Pelo Teorema da dimensão da fibra, temos que, existe um aberto $U \neq \phi$ em $Sec(X)$ tal que $\dim \pi_2^{-1}(p) = \dim \sum - \dim Sec(X)\ \forall p \in U$. Ou seja,

$$\dim Sec(X) = \dim \sum - \dim \pi_2^{-1}(p) = 2\dim X + 1 - \dim \pi_2^{-1}(p)$$

para cada ponto p em U. E daí, a dimensão da variedade secante de uma variedade irredutível $X \subset \mathbb{P}^n$ pode ser no máximo igual a $2\dim X + 1$.

A variedade $Sec(X)$, por outro lado, é irredutível pois $\pi_2(\sum) = Sec(X)$, π_2 é regular e $\sum$ irredutível.

Além disto, se cada $P \in Sec(X)$ só pertence a um número finito de retas secantes, cada fibra $\pi_2^{-1}(P)$ é finita, e daí, pelo teorema da dimensão da fibra, existe um aberto $U \subset Sec(X)$ tal que $0 = \dim \sum - \dim Sec(X)$ ou $\dim Sec(X) = \dim \sum = 2\dim X + 1$. Como em geral, $\dim Sec(X) \geq 2\dim X + 1 - \dim \pi_2^{-1}(P)$, temos que $\dim \pi_2^{-1}(P) = 0$ quando $\dim Sec(X) = 2\dim X + 1$. Ou seja, $\dim Sec(X) = 2\dim X + 1$ se, somente se, P pertence a um número finito de retas secantes à variedade X.■

Exemplo 3.8: A variedade secante da cúbica torcida $v_3(\mathbb{P}^1)$ é todo $\mathbb{P}^3$ Em outras palavras, a cota superior da proposição 3.7 é a melhor possível.

O argumento para mostrarmos este fato, é baseado no seguinte: Para cada ponto $P \in \mathbb{P}^3 - v_3(\mathbb{P}^1)$, e cada ponto $Q \in v_3(\mathbb{P}^1)$ a reta $\overline{PQ}$ que liga o ponto P ao ponto Q intercepta $v_3(\mathbb{P}^1)$ em mais um ponto, $R \in v_3(\mathbb{P}^1)$, $R \neq Q$. Em outras palavras, cada reta $\overline{PQ}$ é uma reta secante a $v_3(\mathbb{P}^1)$, para cada $P \in \mathbb{P}^3$.

Consideremos um ponto arbitrário $P = [a_0 : a_1 : a_2 : a_3]$ em $\mathbb{P}^3$, $Q = [x_0^3 : x_0^2 x_1 : x_0 x_1^2 : x_1^3]$ um ponto de $v_3(\mathbb{P}^1)$ e $\lambda P + \mu Q$; $[\lambda : \mu] \in \mathbb{P}^1$ um ponto arbitrário da reta $\overline{PQ}$. Como o ideal da variedade $v_3(\mathbb{P}^1)$ é gerado pelos polinômios

$$\begin{aligned} F_1 &= Z_0Z_2 - Z_1^2, \\ F_2 &= Z_0Z_3 - Z_1Z_2, \\ F_3 &= Z_1Z_3 - Z_2^2 \end{aligned}$$

(veja exemplo 1.9), temos que $\lambda P + \mu Q \in v_3(\mathbb{P}^1)$ se, e somente se, $F_i(\lambda P + \mu Q) = 0$, para todo $[\lambda : \mu] \in \mathbb{P}^1$ tal que $\lambda P + \mu Q \in v_3(\mathbb{P}^1)$ e para todo $i \in \{1, 2, 3\}$. Ou seja,

$$F_1(\lambda P + \mu Q) = \lambda^2(a_0a_2 - a_1^2) + \lambda\mu(a_2x_0^3 - 2a_1x_0^2x_1 + a_0x_0x_1^2) = 0 \quad (1)$$

$$F_2(\lambda P + \mu Q) = \lambda^2(a_0a_3 - a_1a_2) + \lambda\mu(a_0x_1^3 + a_3x_0^3 - a_2x_0^2x_1 - a_1x_0x_1^2) = 0 \quad (2)$$

$$F_3(\lambda P + \mu Q) = \lambda^2(a_1a_3 - a_2^2) + \lambda\mu(a_3x_0^2 + a_1x_1^3 - 2a_2x_0^2x_1) = 0 \qquad (3)$$

Mas $\overline{PQ} \cap v_3(\mathbb{P}^1) = Q$ ou $\overline{PQ} \cap v_3(\mathbb{P}^1) = P$ conforme $\mu = 0$ ou $\lambda = 0$. Portanto, supondo $\lambda\mu \neq 0$ podemos ver as equações acima, assim:

$$\begin{aligned} \lambda(\lambda\alpha_1 + \mu\beta_1) &= 0 & (1) \\ \lambda(\lambda\alpha_2 + \mu\beta_2) &= 0 & (2) \\ \lambda(\lambda\alpha_3 + \mu\beta_3) &= 0 & (3) \end{aligned}$$

Mas $P \notin v_1(\mathbb{P}^1)$ donde se conclui que $\alpha_i \neq 0$ para algum $i \in \{1,2,3\}$. Ou seja, $\lambda = \dfrac{-\mu\beta_i}{\alpha_i}$ e $R = \lambda P + \mu Q = \dfrac{-\beta_i P}{\alpha_i} + Q$. Além do mais, $R \neq Q$ e $R \in v_3(\mathbb{P}^1)$, pois se $R = Q$, $\dfrac{\beta_i}{\alpha_i}$ seria nulo e, daí, a equação (i), forneceria $\lambda = 0$, contra a hipótese $\lambda\mu \neq 0$. Portanto a reta $\overline{PQ}$ intercepta $v_3(\mathbb{P}^1)$ em mais de um ponto, sendo, portanto, uma reta secante. E daí, $P \in Sec(v_3(\mathbb{P}^1)) = \mathbb{P}^3$.■

Exemplo 3.9: Seja $C \subset \mathbb{P}^3$ a cúbica torcida $v_3(\mathbb{P}^1)$. Mostremos que a imagem da aplicação retas secantes $s(C \times C)$ vista em $\mathbb{P}^5$ via mergulho de Plucker, é a veronese $v_2(\mathbb{P}^2)$.

Sejam

$$\begin{aligned} s: \ & C \times C - \Delta \longrightarrow \mathbb{G}(1,3) \\ & (p,q) \longmapsto \overline{pq} \end{aligned}$$

o morfismo retas secantes e

$$\begin{aligned} \psi: \ & G(2,4) \longrightarrow \mathbb{P}^5 \\ & W \longmapsto [w] \end{aligned}$$

o mergulho de Plucker. Consideremos

$$p = [x_0^3 : x_0^2x_1 : x_0x_3^2 : x_1^3]$$

e

$$q = [y_0^3 : y_0^2 y_1 : y_0 y_1^2 : y_1^3] \text{ em } v_3(\mathbb{P}^1),$$

daí,

$$(\psi \circ s)(p, q) = \psi(\overline{pq})$$
$$= [[x_0^3 : x_0^2 x_1 : x_0 x_1^2 : x_1^3] \wedge [y_0^3 : y_0^2 y_1 : y_0 y_1^2 : y_1^3]]$$
$$= [[x_0^3 y_0^2 y_1 - x_0^2 x_1 y_0^3 : x_0^3 y_0 y_1^2 - x_0 x_1^2 y_0^3 : x_0^3 y_1^3 - x_1^3 y_0^3 :$$
$$x_0^2 x_1 y_0 y_1^2 - x_0 x_1^2 y_0^2 y_1 : x_0^2 x_1 y_1^3 - x_1^3 y_0^2 y_1 : x_0 x_1^2 y_1^3 - x_1^3 y_0 y_1^2]$$
$$= [[x_0^2 y_0^2 (x_0 y_1 - x_1 y_0) : x_0 y_0 (x_0^2 y_1^2 - x_1^2 y_0^2) : (x_0^2 y_1^2 + x_0 x_1 y_0 y_1 + x_1^2 y_0^2)(x_0 y_1 - x_1 y_0) :$$
$$x_0 x_1 y_0 y_1 (x_0 y_1 - x_1 y_0) : x_1 y_1 (x_0^2 y_1^2 - x_1^2 y_0^2) : x_1^2 y_1^2 (x_0 y_1 - x_1 y_0)]]$$
$$= [[x_0^2 y_0^2 : x_0 y_0 (x_0 y_1 + x_1 y_0) : (x_0^2 y_1^2 + x_0 x_1 y_0 y_1 + x_1^2 y_0^2) : x_0 y_0 x_1 y_1 :$$
$$x_1 y_1 (x_0 y_1 + x_1 y_0) : x_1^2 y_1^2]] = [w_0^2 : w_0 w_1 : w_1^2 - w_0 w_2 : w_0 w_2 : w_1 w_2 : w_2^2]$$
$$= v_2([w_0 : w_1 : w_2])$$

a menos de uma mudança de base, onde

$$w_0 = x_0 y_0, \; w_1 = x_0 y_1 + x_1 y_0, \; w_2 = x_1 y_1. \quad \blacksquare$$

CAPÍTULO 4

§-1) Espaços tangentes afins

Este capítulo, encerra esta dissertação apresentando a ferramenta básica necessária para fornecermos condições suficientes a uma certa variedade $X \subset \mathbb{P}^n$ de modo a garantir que ela é isomórfica a uma outra $\bar{X}$ em $\mathbb{P}^{n-1}$ o que na realidade, constitui o objetivo básico deste trabalho. Este é o motivo de estudarmos os espaços tangentes a uma variedade, o conceito de variedade não-singular, a ligação entre a dimensão de uma variedade e o mínimo das dimensões de seus espaços tangentes. A variedade secante de uma variedade $X \subset \mathbb{P}^n$, não-singular, apresenta propriedades especiais para cada um dos seus pontos, ela é para este trabalho a variedade de mais destaque.

Consideremos então uma variedade afim e irredutível $X = Z(F)$ definida pelos zeros do polinômio $F \in K[X_1, X_2, ..., X_n]$. Seja $P = (a_1, a_2, ..., a_n)$ um ponto de X.

Definição 4.1: O subespaço linear afim denotado por T_PX e definido por

$$T_PX = \left\{ (x_1, x_2, ...x_n) \in \mathbb{A}^n \mid \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial X_i} F(P)(x_i - a_i) = 0 \right\} = \nabla F(P)(X - P) = 0$$

é denominado de *espaço tangente* à variedade X no ponto P.

Exemplo 4.2: Se $X = Z(z^2 - (x-1)(y-2)) \subset \mathbb{A}^3(\mathbb{C})$, temos que $T_{(1,2,0)}X = \mathbb{A}^3$ e $T_{(1,3,0)}X = \{(X, Y, Z) \in \mathbb{C}^3 \mid X = 1\}$.

Proposição 4.3:

Uma reta l passando por um ponto P de uma variedade irredutível $X = Z(F)$, está contida no espaço tangente $T_P X$ se, e somente se, o ponto P é raiz múltipla do polinômio F, restrito à reta l.

Demonstração:

Consideremos $P = (a_1, a_2, ..., a_n) \in X$, $b = (b_1, b_2, ..., b_n) \in \mathbb{A}^n(K)$ e l a reta por P e b parametrizada por $(a_1 + tb_1,\ a_2 + tb_2, ..., a_n + tb_n)$, $t \in K$. Seja $g(t) = F(a_1 + tb_1,\ a_2 + tb_2, ..., a_n + tb_n)$ o polinômio restrição de F à reta l. Neste caso, P é raiz múltipla de F restrito a l se, e somente se:

$$\frac{\partial}{\partial t} g(0) = 0 \leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial X_i}(a_1 + tb_1, ..., a_n + tb_n) b_i = 0.$$

Ou seja $\frac{\partial}{\partial t} g(0) = 0$ se, e somente se, a derivada direcional de F em P na direção de b é nula. Portanto, P é raiz múltipla de F restrito a l, se e somente se

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial X_i} F(P).b_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial X_i} F(P)(X_i - a_i) = 0$$

para todo $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ em l.∎

Definição 4.4: Um ponto P de uma hipersuperfície $X = Z(F)$ é não singular, se $\frac{\partial}{\partial X_i} F(P) \neq 0$ para algum $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Caso contrário, P é singular; se P é um ponto singular da variedade $X = Z(F)$, dizemos também que P é uma singularidade da variedade X. Denota-se por $X_{\text{não-sing}} = \{x \in X \mid x$ é não-singular$\}$ e por X_{sing} ou por $Sing(X)$ o conjunto dos pontos singulares da variedade X.

Exemplo 4.5: A variedade $X = Z(Z^2 - X^2 - Y^2) \subset \mathbb{A}^3(\mathbb{C})$ só tem um ponto singular que é a origem.

Observação 4.6: Se $P \in X = Z(F)$ é um ponto não-singular, o posto da matriz $\left(\frac{\partial}{\partial X_i} F(P)\right)_{1\times n}$, é igual a um, ou equivalentemente, o espaço tangente $T_P X$ é um subespaço afim do espaço $\mathbb{A}^n(K)$ de dimensão $n-1$. Se o ponto P for singular, $T_P X$ é n-dimensional e portanto, $T_P X \cong \mathbb{A}^n(K)$.

Proposição 4.7 (Lema de Sard): Seja $f : X \to Y$ uma aplicação regular sobrejetiva nas variedades X e Y definidas sobre um corpo K ($car(K) = 0$). Então, existe um aberto $U \subset Y$ tal que para cada ponto não-singular $P \in f^{-1}(U) \cap X_{\text{não-sing}}$, a diferencial $df_P : T_P X \to T_{f(P)} Y$ é sobrejetiva.

Assumiremos sem demonstração, a proposição anterior, pois, sua demonstração requer um conhecimento avançado de Geometria Algébrica (veja [RH]) no capítulo III.10.

Lema 4.8: Se $X = Z(F)$ é irredutível então o subconjunto de X constituido dos pontos não-singulares de X, é aberto e denso em X.

Demonstração:

Seja $X_{\text{sing}} = \{P \in X \mid P \text{ é singular}\} = Z\left(F, \frac{\partial F}{\partial X_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial X_n}\right)$; portanto, X_{sing} é fechado e $X_{\text{não-sing}}$ é aberto em $\mathbb{A}^n$. Além disto, $X_{\text{não-sing}}$ é não vazio pois se $X_{\text{não-sing}}$ for vazio, temos $X = Z(F) = X_{\text{sing}}$. Já que cada derivada $\frac{\partial F}{\partial X_i}$ é nula em X temos que $\frac{\partial F}{\partial X_i} \in I(X) = \langle F \rangle$. E dai, $\frac{\partial F}{\partial X_i} = H_i F$ para alguns polinômios H_i. Mas isto, não pode ocorrer, pois os polinômios $\frac{\partial F}{\partial X_i} \neq 0$ têm graus menores que o grau de F. Daí, se segue, que $X_{\text{não-sing}} \neq \Phi$. Como X é irredutível, $X_{\text{não-sing}}$ é aberto e denso em X. ■

Passaremos agora ao conceito de espaço tangente a uma variedade afim arbitrária.

Para cada polinômio $F \in K[X_1, X_2, ..., X_n]$, cada ponto $P = (a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{A}^n$ denotemos por $F_P^{(1)}$ a soma $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial X_i} F(P)(X_i - a_i)$, denominada de parte de primeira ordem do polinômio F no ponto P.

Definição 4.9: Sejam $X \subset \mathbb{A}^n(K)$ uma variedade e $P = (a_1, a_2, ..., a_n)$ um de seus pontos. Denominamos de espaço tangente a X em P, denotado por $T_P X$ a interseção

$$T_P X := \bigcap_{F \in I(X)} \left\{ (x_1, x_2, ...x_n) \mid \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial X_i} F(P)(x_i - a_i) = 0 \right\} = \bigcap_{F \in I(X)} T_P Z(F).$$

Observemos o seguinte: Se F é um elemento do ideal $I(X)$ da variedade X e $I(X)$ é gerado pelos polinômios $F_1, F_2, ..., F_l$, temos:

$$F = \sum_{i=1}^{l} G_i F_i \ , \quad \frac{\partial}{\partial X_j} F = \sum_{i=1}^{l} \left(G_i \frac{\partial}{\partial X_j} F_i + F_i \frac{\partial G_i}{\partial X_j} \right).$$

Logo $\frac{\partial F(P)}{\partial X_j} = \sum_{i=1}^{l} G_i(P) \frac{\partial F_i(P)}{\partial X_j}$ para cada $P \in X$, para certos $G_i^{'s}$ no anel $K[X_1, X_2, ..., X_n]$. Ou seja, $F_P^{(1)} = \sum_{i=1}^{l} G_i(P) F_{iP}^{(1)}(X_i - a_i)$. Assim,

$$T_P X = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial X_i} F_j(P)(x_i - a_i) = 0, \ j = 1, 2, ..., l\}.$$

Proposição 4.10: Para cada variedade irredutível $X \subset \mathbb{A}^n(K)$, temos que a aplicação de X em $\mathbb{N}$ que associa cada ponto $P \in X$ ao inteiro $\dim T_P X$ em $\mathbb{N}$, é semi-contínua superiormente. Isto é, para cada natural $r \in \mathbb{N}$, o conjunto $S(r) = \{P \in X \mid \dim T_P X \geq r\}$, é fechado na variedade X.

Demonstração:

Suponhamos que o ideal $I(X)$ da variedade X seja gerado pelos polinômios $F_1, F_2, ..., F_m$. Denotemos por $J(P)$ a matriz Jacobiana $\left[\frac{\partial F_j(P)}{\partial X_i}\right]$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$.

Consideremos a aplicação $\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m) \\ P & \longmapsto & \Phi(P) \end{array}$ onde $\Phi(P) : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ é definida em $v \in \mathbb{K}^n$ por $J(P).v$. Neste caso, temos que $\Phi(P)$ é linear, $N(\Phi(P)) = T_PX$ e $\dim T_PX + \dim \mathrm{Im}(\Phi(P)) = n$. Portanto, $\dim T_PX \geq r$ se, e somente se, $n - r \geq \dim \mathrm{Im}(\Phi(P))$. Neste caso, temos que $P \in S(r)$ se, e somente se, a matriz $J(P) = \left(\frac{\partial F_j(P)}{\partial X_i}\right)$; $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, tem posto $n - r$. Ou seja, $P \in S(r)$ se e somente se os menores de ordem $(n - r + 1)$ da matriz jacobiana de F, $\left(\frac{\partial F_j(P)}{\partial X_i}\right)$, anulam-se. Portanto, como cada entrada da matriz em questão, é uma função polinomial em P, cada um destes menores tammbém é uma função polinomial em P. Daí, resulta, que $S(r) \subset X$ é de fato um fechado em X.■

Corolário 4.11: Para cada variedade afim X, existem um inteiro $r \in \mathbb{N}$ e um subconjunto $X_0 \subset X$ aberto e denso em X tais que $\dim T_PX = r$ para cada $P \in X_0$ e $\dim T_PX \geq r$ para todo $P \in X$. O inteiro r é denominado "dimensão" da variedade X e denotado por $r = \dim(X)$.

Demonstração: Seja $r = \min\{\dim T_PX;\ P \in X\}$. Consideremos os conjuntos $S(r)$ e $S(r+1)$ tendo-se $S(r) = \{P \in X \mid \dim T_PX \geq r\} = X$ e $S(r+1) = \{P \in X \mid \dim T_PX \geq r+1\} \subsetneqq X$ e $X_0 = S(r) \mid S(r+1) = \{P \in X \mid \dim T_PX = r\}$. Como $X_0 = X \mid S(r+1)$ e $S(r+1)$ é fechado e próprio em X, tem-se que X_0 é aberto e não vazio em X. Como X é irredutível, X_0 é aberto e denso em X. ■

Em geral , seja ou não X não-singular em P, temos sempre $T_PX \subset T_P\mathbb{A}^n = K^n$. O espaço T_PX assim considerado, denomina-se espaço tangente de Zariski à variedade X no ponto P. É bom observar também que a definição de T_PX garante que $T_PX = \{v \in T_P\mathbb{A}^n \mid df(v) = 0 \; \forall \, f \in I(X)\}$.

Observação 4.12: Para cada variedade afim e irredutível X, a dimensão de X definida neste capítulo, coincide com o conceito de dimensão dado no capítulo 2. Ou seja, tanto lá como aqui, $\dim X = tr\deg_K (K(X))$ (veja [MR] - 99).

Definição 4.13: Um ponto P de uma variedade $X \subset \mathbb{A}^n$ é um ponto singular, se a dimensão do espaço tangente T_PX é estritamente maior que a dimensão da variedade X.

De acordo com esta definição, um ponto P na hipersuperfície $X = Z(F)$ é singular se $\dim T_PZ(F) > \dim Z(F) = n - 1$. Portanto, $T_PZ(F) = \mathbb{A}^n$. Ou seja, $\dfrac{\partial F(P)}{\partial X_i} = 0$ para todo $1 \leq i \leq n$. Ou seja, a definição (4.13) coincide com a definição (4.4) para hipersuperfícies.

Estudaremos, agora, a natureza intrínseca do espaço tangente T_PX a uma variedade X no ponto P.

Suponhamos que $P = (a_1, a_2, ..., a_n) \in X \subset \mathbb{A}^n$ e que as coordenadas euclidianas de cada ponto de X, sejam denotadas por $X_1, X_2, ..., X_n$. A mudança de coordenadas afim $X_1 - a_1$, $X_2 - a_2, ..., X_n - a_n$, transforma o ponto P na origem do novo sistema de coordenadas. Neste ponto de vista temos que $T_PX \subset \mathbb{A}^n$ é um subespaço vetorial do espaço K^n. Denotemos por m_P o ideal do ponto $P = (0, 0, ..., 0)$ no anel coordenado $K[X]$.

Ou seja, m_P é o ideal maximal de $K[X]$ constituido das funções que se anulam em $P = (0, 0, ..., 0)$. Se denotarmos por M_P o ideal $< X_1, X_3, ..., X_n >$ no anel $K[X_1, X_2, ..., X_n]$, temos que $m_P = \dfrac{M_P}{I(X)} \subset K[X]$.

Proposição 4.14: Nas notações acima, temos que, o espaço dual $(T_P X)^*$ do espaço $\underset{P}{T} X$, é o espaço vetorial $\frac{m_P}{m_P^2}$.

Demonstração:

Sejam $(K^n)^*$ o dual do espaço K^n e $X_1, X_2, ..., X_n$ sua base natural. Como $P = (0, 0, ..., 0)$ temos que, para cada $f \in K[X_1, X_2, ..., X_n]$, a parte de primeira ordem $f_P^{(1)}$, é um elemento de $(K^n)^*$. Consideremos em seguida, a aplicação $\mathbf{d} : M_P \longrightarrow (K^n)^*$ que associa cada $f \in M_P$, a $df = f_P^{(1)}$, tendo-se portanto que a aplicação $\mathbf{d}$ é sobrejetora uma vez que, cada $X_i \in M_P$ e $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ é base de $(K^n)^*$. Por outro lado, $N(\mathbf{d}) = M_P^2$ já que $f_P^{(1)} = 0$ se, e somente se, $\frac{\partial}{\partial X_i} f(P) = 0 \ \forall \ i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Equivalentemente, $f \in N(\mathbf{d})$ se, e somente se, $f \in M_P^2$. Portanto $\frac{M_P}{M_P^2} \cong (K^n)^*$. Ou seja, $\frac{M_P}{M_P^2} = (\underset{P}{T} \mathbb{A}^n(K))^*$, portanto, a proposição é válida para $X = \mathbb{A}^n$. Para cada inclusão $T_P X \hookrightarrow K^n$, existe a restrição $R : (K^n)^* \longrightarrow (T_P X)^*$ que asssocia uma forma linear λ em sua restrição a $T_P X$.

Consideremos a aplicação $D : M_P \xrightarrow{d} (K^n)^* \xrightarrow{r} (T_P X)^*$, tendo-se D sobrejetora pois r e d são sobrejetoras cujo núcleo $N(D) = M_P^2 + I(X)$. Assim temos,

$$\frac{m_P}{m_{P^2}} \cong \frac{M_P}{M_P^2 + I(X)} \cong (T_P X)^*. \blacksquare$$

O fato $N(D) = M_P^2 + I(X)$ decorre de:

$$f \in N(D) \Longleftrightarrow f_P^{(1)} \text{ restrita a } T_P X \text{ é nula} \Longleftrightarrow f_P^{(1)} = \sum_j a_j g_{jP}^{(1)}$$

para alguns $g_j \in I(X) \Longleftrightarrow f - \sum_j a_j g_j \in M_P^2$ para alguns

$g_j \in I(X) \Longleftrightarrow f \in M_P^2 + I(X)$.

Neste caso, temos $T_PX = \left(\dfrac{m_P}{m_P^2}\right)^*$.

Espaços tangentes projetivos

Consideremos uma variedade irredutível e projetiva $X \subset \mathbb{P}^n$ e $P = [a_0 : a_1 : a_2 : ... : a_n]$ um de seus pontos. O espaço tangente (projetivo) denotado por $\mathbb{T}_PX$ é o subespaço linear de $\mathbb{P}^n$ construido da seguinte forma:
Considera-se um aberto $U \simeq \mathbb{A}^n$, com $P \in U \subset \mathbb{P}^n$, em seguida, define-se o espaço tangente afim $T_P(X \cap U)$. O espaço tangente projetivo, $\mathbb{T}_PX$, é definido como o fecho em $\mathbb{P}^n$ do espaço $T_P(X \cap U)$.

Exemplo 4.15: Determinemos o espaço projetivo tangente a uma hipersuperfície irredutível $X = Z(F) \subset \mathbb{P}^n$ num ponto $P = [a_0 : a_1 : ... : a_n]$ da variedade X.

Em primeiro lugar, lembremos-nos que se F é um polinômio homogêneo (forma) temos $\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial}{Z_i} F \,.\, Z_i = (grF)F$. Suponhamos agora que o ponto P esteja no aberto $U : Z_0 \neq 0$, $U \simeq \mathbb{A}^n \subset \mathbb{P}^n$. Ao denotarmos por $Z_0, Z_1, ..., Z_n$, as coordenadas homogêneas e por $w_i = \frac{Z_i}{Z_0}$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$ as coordenadas euclidianas no aberto U, temos que $X \cap U = Z(f)$ onde $f(w_1, w_2, ..., w_n) = F(1, w_1, w_2, ..., w_n)$. Daí, se $P = (\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, ..., \frac{a_n}{a_0}) \in X \cap U$, temos que o espaço tangente afim

$T_P(X \cap U) = \{(w_1, w_2, ..., w_n) \mid \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(P)}{\partial w_i}(w_i - \frac{a_i}{a_0}) = 0\}$ e

$\mathbb{T}_P(X) = fecho T_P(X \cap U) =$

$$= fecho\left\{ \left(\frac{Z_1}{Z_0}, \frac{Z_2}{Z_0}, ..., \frac{Z_n}{Z_0}\right) \mid \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F(1, \frac{a_1}{a_0}, ..., \frac{a_n}{a_0})}{\partial Z_i} \frac{\partial Z_i(P)}{\partial w_i} \left(\frac{Z_1}{Z_0} - \frac{a_i}{a_0}\right) = 0 \right\} =$$

$$= \left\{ [Z_0 : Z_1 : ... : Z_n] \mid \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F\left(1, \frac{a_1}{a_0}, ..., \frac{a_n}{a_0}\right)}{\partial Z_i} Z_0 \left(\frac{Z_i}{Z_0} - \frac{a_i}{a_0}\right) = 0 \right\} =$$

$$= \left\{ [Z_0 : Z_1 : ... : Z_n] \mid \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F\left(1, \frac{a_1}{a_0}, ..., \frac{a_n}{a_0}\right)}{\partial Z_i} \left(Z_i - \frac{a_i}{a_0} Z_0\right) = 0 \right\}.$$

Por outro lado, o polinômio F é homogêneo e por isto, temos

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial}{\partial Z_i} F.Z_i = (grF).F.$$

Mas $F \in I(X)$, portanto temos

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial}{\partial Z_i} F(P) \frac{a_i}{a_0} Z_0 = (grF)F(P) = 0.$$

Consequentemente,

$$\mathbb{T}_P(X) = \left\{ [Z_0 : Z_1 : ... : Z_n] \mid \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F\left(1, \frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, ..., \frac{a_n}{a_0}\right)}{\partial Z_i} \left(Z_i - \frac{a_i}{a_0} Z_0\right) = 0 \right\} =$$

$$= \left\{ [Z_0 : Z_1 : ... : Z_n] \mid \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial F\left(1, \frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, ..., \frac{a_n}{a_0}\right)}{\partial Z_i} Z_i = 0 \right\}.$$

Sendo assim, se todas as derivadas parciais do polinômio F, se anulam em P, o espaço projetivo tangente à variedade X no ponto P igual ao espaço $\mathbb{P}^n$; se não, o espaço tangente a X correspondente a P, é o hiperplano no espaço dual $(\mathbb{P}^n)^*$ com coordenadas correspondentes às derivadas parciais de F em P.

Exemplo 4.16: Tomemos por exemplo a variedade $X = Z(z^2 - x^2 - y^2, xz - x^2 + y^2) \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ e P o ponto $[1 : 0 : 1] \in X$. Determinemos $\mathbb{T}_{(1:0:1)}X$.

Denotemos $F_1(x, y, z) = z^2 - x^2 - y^2$ e $F_2(x, y, z) = xz - x^2 + y^2$ em $\mathbb{C}[X, Y, Z]$.

Consideremos em seguida, o aberto $U_0 \subset \mathbb{P}^2$ com $U_0 : (Z_0 \neq 0)$, $U_0 \simeq \mathbb{C}^2$ tendo-se

$$X \cap U_0 = \{(1, y, z) \mid z^2 = 1 + y^2 \text{ e } z = 1 - y^2\} =$$
$$= Z(z^2 - 1 - y^2, z - 1 + y^2) = Z(z^2 - 1 - y^2) \cap Z(z - 1 + y^2) = X_1 \cap X_2.$$

Daí, segue-se que o espaço tangente afim

$$T_{(0,1)}(X \cap U_0) = T_{(0,1)}X_1 \cap T_{(0,1)}X_2 =$$
$$= \{(Y, Z) \mid Z = 1\} \cap \{(Y, Z) \mid Z = 1\} = \{(Y, Z) \mid Z = 1\}$$

Portanto, o espaço tangente projetivo

$$\mathbb{T}_{(1:0:1)}X = fecho(T_{(0,1)}(X \cap U_0)) = \{[X : Y : Z] \mid Z = X\}. \quad \blacksquare$$

Projeções

Consideremos um hiperplano $\mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^n$ e θ um ponto de $\mathbb{P}^n - \mathbb{P}^{n-1}$. Uma aplicação

$$\begin{array}{rccc} \pi_\theta : & \mathbb{P}^n - \mathbb{P}^{n-1} & \longrightarrow & \mathbb{P}^{n-1} \\ & q & \longmapsto & \overline{\theta q} \cap \mathbb{P}^{n-1} \end{array}$$

onde $\overline{\theta q}$ denota a reta por θ e por q, denomina-se projeção desde o ponto θ no hiperplano $\mathbb{P}^{n-1}$. Em termos das coordenadas $Z_0, Z_1, ..., Z_n$, tem-se formalmente que $\pi_\theta([Z_0 : Z_1 : ... : Z_n]) = [Z_0 : Z_1 : ... : Z_{n-1}]$, se $\theta = [0 : 0 : ... : 0 : 1]$ e $\mathbb{P}^{n-1}$ é o hiperplano $Z_n = 0$. Se $X \subset \mathbb{P}^n$ é uma variedade e $\theta \in \mathbb{P}^n - X$, consideremos a restrição de π_θ a X e denotamos $\pi_\theta(X)$ por $\bar{X}$ chamando $\bar{X}$ de projeção desde o ponto θ da variedade X no hiperplano $\mathbb{P}^{n-1}$

Vamos verificar logo adiante que $\overline{X}$ é uma subvariedade em $\mathbb{P}^{n-1}$ para cada variedade $X \subset \mathbb{P}^n$. Antes, porém, necessitamos do instrumento denominado resultante de dois polinômios, o qual, responde a questão de sabermos quando dois polinômios na variável Z têm um fator em comum, no anel $K[Z]$. Sejam $f(Z) = a_0 + a_1 Z + ... + a_m Z^m$ e $g(Z) = b_0 + b_1 Z + ... + b_n Z^n$ polinômios em Z de graus m e n respectivamente.

Exigir que f e g tenham um fator em comum equivale a exigir que exista o polinômio h de grau $m + n - 1$ divisível por f e por g. Ou ainda, que os espaços de polinômios de grau $m + n - 1$ divisíveis simultaneamente por f e g, tenham interseção não trivial. Mas isto, equivale a se ter que os subespaços $W = \langle f, Zf, ..., Z^{n-1}f \rangle$, $V = \langle g, Zg, ..., Z^{m-1}g \rangle$ sejam tais que $W \cap V \neq \{0\}$; ou $W + V$ não é soma direta em $K(Z)$; ou $f, Zf, Z^2 f, ..., Z^{n-1}f$, $g, Zg, Z^2 g, ..., Z^{m-1}g$ são vetores linearmente dependentes. Ou seja, o determinante $(m+n) \times (m+n)$, denotado por $R(f,g)$ e chamado de *resultante* de f e g definido por:

$$R(f,g)(Z) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_m & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & a_{m-n} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 & \dots & a_m \\ b_0 & b_1 & \dots & b_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_0 & \dots & \dots & b_n & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & b_0 & \dots & b_n \end{vmatrix}$$

seja nulo.

Lema 4.17: Dois polinômios f e g em $K[Z]$ têm um fator comum se, e somente se a resultante $R(f,g)$ é nula. (Veja [JH] - 36).

Se f e g são polinômios em $K[X_1, X_2, ..., X_{n-1}][X_n]$ ainda se forma a matriz dos coeficientes com entradas em $K[X_1, X_2, ..., X_{n-1}]$, cujo determinante é um polinômio em $K[X_1, X_2, ..., X_{n-1}]$ denotado por $R(f,g)$ chamado de resultante de f e g com respeito a X_n.

Este determinante, tem a propriedade de que, para toda $(n-1)$-upla $y = (y_1, y_2, ..., y_{n-1})$ de elementos de K, $R(f,g)(y) = 0$ se, somente se, $f(y, X_n)$ e $g(y, X_n)$ tem uma raíz comum como polinômio em X_n ou os coeficientes líderes $a_m(X_n)$ e $b_m(X_m)$ são nulos.

Teorema 4.18: A projeção $\overline{X}$ da variedade X desde o ponto θ em $\mathbb{P}^{n-1}$ é uma variedade projetiva.

Demonstração:

Suponhamos que $\theta = [0 : 0 : ... : 1]$. Nesse caso, π_θ é dado por

$$\pi_\theta : [Z_0 : Z_1 : ... : Z_n] \to [Z_0 : Z_1 : ... : Z_{n-1}].$$

Afirmação: Dado o ponto $q = [Z_0 : Z_1 : ... : Z_{n-1}]$ em $\mathbb{P}^{n-1}$, a reta $\overline{\theta q}$ intercepta a variedade X se, e somente se, cada par de polinômios F e G no ideal $I(X)$, tem um zero comum na reta $l = \overline{\theta q} = \{[\alpha Z_0 : \alpha Z_1 : ... : \alpha Z_n : \beta]\}$.

Com efeito, é claro que se $l = \overline{\theta q}$ intercepta X no ponto P, $F(P) = 0\ \forall\ F \in I(X)$. Portanto, qualquer par de polinômios F e G em $I(X)$, tem um zero comum em l.

Reciprocamente, suponhamos que $l \cap X = \Phi$. Seja $F \in I(X)$ tal que F se anule num número finito de pontos de l. Como $l \cap X = \Phi$, tem-se que para cada um destes pontos existe um polinômio em $I(X)$ que não se anula. Assim, podemos construir um polinômio $G \in I(X)$ tal que não se anule em todos eles. Portanto, F e G, não possuem um zero comum em l, o que demonstra a afirmação:

Para cada par de polinômios F e G em $I(X)$, consideremos a resultante $R(F, G)$ com respeito a Z_n.

Neste caso, para cada $q = [Z_0 : Z_1 : ... : Z_{n-1}] \in \mathbb{P}^{n-1}$, a seguinte sequência de implicações:

$q \in X \iff \overline{\theta q} \cap X \neq \Phi \iff$ todo par de polinômios F e G em $I(X)$ possuem uma raiz comum em $l \iff R(F,G)$ se anula em q para todo par de polinômios F e G em $I(X)$.

Em outras palavras, $\overline{X} = Z(\{R(F,G) \mid F, G \in I(X)\})$. ∎

Observação 4.19: O fato de $\pi_\theta(X) = \overline{X}$ ser uma variedade em $\mathbb{P}^{n-1}$ nos leva a indagar sobre as condições necessárias para que uma variedade X seja isomorficamente projetada em $\mathbb{P}^{n-1}$. Ou seja, quando $\pi_\theta : X \to \overline{X}$ é bijetiva, e quando $(d\pi_\theta)_P : T_P X \to T_{\pi_\theta(P)}\bar{X}$ é injetiva (veja [H]-179).

Talvez, seja melhor questionarmos quando é que π_θ não é injetiva; ou seja, quando que existem $p \neq q$ na variedade X tais que $\theta \in \overline{pq}$. Portanto, θ não pode estar na variedade secante $Sec(X)$ quando quisermos que π_θ seja injetiva. Em outras palavras, se $Sec(X) = \mathbb{P}^n$, $X \subset \mathbb{P}^n$, não pode ser projetada isomorficamente em $\mathbb{P}^{n-1}$. Provaremos mais adiante que se $\dim Sec(X) < n$ então $\dim X \leq \frac{2}{3}(n-2)$. Podemos também, agora, perguntar, que variedades $X \subset \mathbb{P}^n$, têm variedades secantes $Sec(X) \subsetneqq \mathbb{P}^n$? Ou seja, que variedades $X \subset \mathbb{P}^n$ satisfazem a relação $\dim(Sec(X)) < \dim \mathbb{P}^n = n$?

Mostraremos que as variedades $v_2(\mathbb{P}^2) \subset \mathbb{P}^5$, $\sigma(\mathbb{P}^{2'} \times \mathbb{P}^2) \subseteq \mathbb{P}^8$ e $\mathbb{G}(1,5) \subseteq \mathbb{P}^{14}$ são tais que $\dim X = \frac{2}{3}(n-2)$, e $\dim Sec(X) < n$. De fato, F.L.Zak provou que essencialmente, essas são as únicas variedades $X \subseteq \mathbb{P}^n$ com $\dim X = \frac{2}{3}(n-2)$ e que podem ser projetadas isomorficamente em $\mathbb{P}^{n-1}$, (i.e, $\dim Sec(X) < n$) mas, a demonstração disto requer um vasto conhecimento de Teoria de Interseção.

§-2) Variedades das retas tangentes

Definição 4.20: Dizemos que uma reta l é tangente a uma variedade projetiva não-singular X no ponto $P \in X$ se $P \in l$ e $l \subset \mathbb{T}_P X$. Se a variedade X é singular, embora não definamos em um ponto de X o conceito de reta tangente, chamamos de variedade das retas tangentes, denotando por $\mathcal{T}_1(X)$, o fecho na Grassmaniana $\mathbb{G}(1,n)$ do conjunto de retas em que cada uma delas contém o ponto P não-singular de X e está contida no espaço tangente correspondente $\mathbb{T}_P X$.

Exemplo 4.21: No exemplo 4.17, cada reta no hiperplano $H = Z(Z - X)$, contendo o ponto $[1 : 0 : 1]$, é um elemento de $\mathcal{T}_1(X)$ onde X é variedade $Z(z^2 - x^2 - y^2, xz - x^2 + y^2) \subset \mathbb{A}^3(\mathbb{C})$.

Proposição 4.22: Se $X \subset \mathbb{P}^n$ é uma variedade k-dimensional, irredutível e não-singular, $\mathcal{T}_1(X)$ é de fato uma variedade e $\dim \mathcal{T}_1(X) = 2\dim X - 1$

Demonstração:

Consideremos a incidência

$$\sum = \{(L,P) : P \in L \subset T_P X\} \subset \mathbb{G}(1,n) \times X.$$

A projeção $\pi_2 : \sum \longrightarrow X$ é sobrejetiva (X é não-singular), e para cada $P \in X$, $\pi_2^{-1}(P) = \{(L,P) : P \in L\} \cong \mathbb{P}^{k-1}$. Portanto, $\dim \pi_2^{-1}(P) = k - 1 = \dim \sum - \dim X$. Assim, $\dim \sum = k - 1 + k = 2k - 1$. Na hipótese de X não ser um subespaço linear de $\mathbb{P}^n$, cada fibra $\pi_1^{-1}(L) = \{(L,P) : P \in L\}$ definida pela primeira projeção $\pi_1 : \underset{(L,P) \rightsquigarrow L}{\sum \longrightarrow \mathbb{G}(1,n)}$ sobre a incidência $\sum$ é finita uma vez que

X não contém L e $L \cap X$ é finita. Neste caso, a projeção π_1, além de finita, é tal que $\pi_1(\sum) \subset \mathcal{T}_1(X)$ uma vez que cada reta $L = \pi_1(L, P)$ está contida no espaço tangente $\underset{P}{T} X$ e X é não-singular. Pelo teorema da dimensão da fibra, temos $0 = \dim \pi_1^{-1}(L) = \dim \sum - \dim \pi_1(\sum)$, para uma reta L genérica. Portanto, $\dim \pi_1(\sum) = \dim \sum = 2k - 1$.■

Observação 4.23: Se $X \subset \mathbb{P}^n$ é uma variedade, cada reta tangente a X, é uma reta secante, no sentido de que pertence a $\mathcal{S}(X)$.

Proposição 4.24: Se $X \subset \mathbb{P}^n$ é uma variedade não-singular, temos que cada ponto da variedade $\mathcal{S}(X)$ das retas secantes, é uma reta secante honesta $\overline{pq}$; $p \neq q \in X$ ou é uma reta tangente. Isto é,

$$\mathcal{S}(X) = s(X \times X - \Delta) \cup \mathcal{T}_1(X).$$

Demonstração:

Vamos exibir um conjunto de equações para a variedade $\mathcal{S}(X)$ das retas secantes da variedade X, e mostrarmos que de fato, em $\mathcal{S}(X)$ existem dois tipos de retas secantes aquelas que são "honestas" isto é, retas $\overline{pq}$ com $p \neq q \in X$ e outras que se encaixam devidamente na concepção de retas tangentes.

Consideremos, pois, o ideal $I(X)$ da variedade X. Suponhamos X gerado por $F_1, F_2, .., F_l$ escolhidos de modo que cada F_α seja uma forma de grau igual a d. Cada reta L de $\mathbb{P}^n$, em um aberto U da Grassmaniana $\mathbb{G}(1, n)$ pode ser representada pela matriz

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & a_2 & a_3 \ldots a_n \\ 0 & 1 & b_2 & b_3 \ldots b_n \end{vmatrix}$$

Ou também parametrizada por:

$$L_{a,b} : [s : t : a_2 s + b_2 t : \ldots : a_n s + b_n t]; \; [s : t] \in \mathbb{P}^1.$$

Assim, a restrição de cada gerador F_α do ideal $I(X)$, à reta L, é dada por:

$$F_{\alpha/L} = p_{\alpha d}\, s^d + p_{\alpha(d-1)} s^{d-1} t^1 + \ldots + p_{\alpha 0}\, t^d$$

onde cada p_{a_i}, é um polinômio em $a's$ e $b's$..

Seja m um inteiro convenientemente grande e $S_{m,d}$ o conjunto dos polinômios homogêneos de grau $m-d$ nas variáveis $Z_0, Z_1, \ldots, Z_n$ e V_0 o conjunto dos polinômios homogêneos de grau m nas variáveis s e t. Consideremos a aplicação

$$\begin{aligned} \phi_{a,b} :\ & (S_{m-d})^l \longrightarrow V_0 \\ & (G_1, G_2, \ldots, G_l) \longmapsto \sum_{\alpha=1}^{l} G_\alpha\, F_\alpha \,/\, L_{a,b} \end{aligned}$$

tendo-se $\phi_{a,b}$ linear e que as entradas da matriz $|\phi_{a,b}|$ são polinômios em a e b sobre um aberto $U \subset \mathbb{G}(1,n)$. Neste caso, se $L_{a,b}$ é uma secante "honesta", $\overline{pq}$ $p \neq q \in X$, todos os F_α tem dois zeros distintos em comum sobre $L = L_{a,b}$. Neste caso, a imagem de $\phi_{a,b}$ está no subespaço de V_0 que consiste dos polinômios que se anulam em tais pontos.

Em particular, segue-se que para cada (a,b) tal que $L_{a,b} \in \mathcal{S}(X)$, a aplicação $\phi_{a,b}$ tem posto no máximo $m-1$, pois $\dim V_0 = m+1$. Ou seja, os menores $m \times m$ da matriz $\phi_{a,b}$ vistos como funções regulares em $U \subset \mathbb{G}(1,n)$, se anulam em $\mathcal{S}(X)$. Ou seja, $\mathcal{S}(X)$ está contida no conjunto de zeros comuns a estes menores. Reciprocamente, seja S' o lugar das retas L tais que a imagem de $\phi_{a,b}$ tenha co-dimensão igual a dois para cada m. Assim, a imagem de $\phi_{a,b}$ ou consiste de todos os polinômios que se anulam nos pontos p e q $(p \neq q)$ ou de polinômios que se anulam em apenas um ponto de $L_{a,b}$ com a ordem deste zero igual a dois. No primeiro caso, $L_{a,b}$ é uma reta secante "honesta" e no segundo, é uma reta tangente isto é, $L_{a,b} \in \mathcal{T}_1(X)$. Portanto, $S' = s(X \times X - \Delta) \cup \mathcal{T}_1(X)$. Como $\mathcal{S}(X)$ é um fechado em S' e, $\mathcal{S}(X)$ e S' são irredutíveis com dimensão $\dim \mathcal{S}(X) = 2 \dim X$. Comparando as dimensões de S' e $\mathcal{S}(X)$ temos $S = \mathcal{S}(X) = s(X \times X - \Delta) \cup \mathcal{T}_1(X)$.■

Proposição 4.25: Se $X \subset \mathbb{P}^n$ é uma variedade não-singular que gera $\mathbb{P}^n$ e θ é um ponto de $\mathbb{P}^n - X$, a projeção

$$\begin{aligned} \pi_\theta : \; X &\longrightarrow \mathbb{P}^{n-1} \\ x &\longmapsto \overline{\theta x} \cap \mathbb{P}^{n-1} \end{aligned}$$

desde o ponto é um mergulho se, e somente se, $\theta \notin Sec(X)$.

Demonstração:

Podemos supor que $\theta = [0 : 0 : ... : 0 : 1]$. Assim

$$\begin{aligned} \pi_\theta : \; X &\longrightarrow \overline{X} \subset \mathbb{P}^{n-1} \\ [x_0 : ... : x_n] &\longmapsto [x_0 : ... : x_{n-1}] \end{aligned}$$

e portanto

$$(d\pi_\theta)_x : \mathbb{T}_x X \longrightarrow \mathbb{T}_{\pi_\theta(x)}\overline{X}$$

$$[z_0 : ... : z_n] \longmapsto [z_0 : ... : z_{n-1}]$$

Observe que π_θ é injetiva se, e somente se, não existem $x, y \in X$ tais que $\overline{\theta x} \cap \mathbb{P}^{n-1} = \overline{\theta y} \cap \mathbb{P}^{n-1}$. Ou seja se, e somente se, $\theta \notin \overline{xy}$ $\forall x, y \in X$

Por outro lado, se $(d\pi_\theta)_x$ é injetiva, então, $\overline{\theta x} \notin \mathcal{T}_1 X$ pois, caso contrário, teriamos que $\overline{\theta x} \subseteq \mathbb{T}_x X$ e, nesse caso, $(d\pi_\theta)_x(\overline{\theta x}) = \overline{\theta x} \cap \mathbb{P}^{n-1}$. Ou seja $(d\pi_\theta)_x$ enviaria a reta $\overline{\theta x}$ num ponto, contradizendo a injetividade de $(d\pi_\theta)_x$.

Reciprocamente, se $\overline{\theta x} \notin \mathcal{T}_1 X$, $x \in X$, então $(d\pi_\theta)_x$ é injetiva , pois se $(d\pi_\theta)_x(y) = (d\pi_\theta)_x(z)$ então θ, z e y são colineais. Portanto $\theta \in \overline{yz}$. Mas se $y, z \in \mathbb{T}_x X$ então $\overline{yz} \subseteq \mathbb{T}_x X$. Assim, $\theta \in \mathbb{T}_x X$ contradizendo o fato que $\overline{\theta x} \notin \mathcal{T}_1 X$.

Em resumo, temos as seguintes equivalências:

π_θ é um mergulho $\Leftrightarrow$ π_θ é injetiva e $(d\pi_\theta)_x$ é injetiva $\forall x \in X$ (veja [JH]-14.9)

$\Leftrightarrow \theta \notin \overline{xy}$ $\forall x, y \in X, x \neq y$, e $\overline{\theta x} \notin \mathcal{T}_1 X$ $\forall x \in X$

$\Leftrightarrow \theta \notin Sec(X)$ (proposição 4.25)

Corolário 4.26: Se $C \subseteq \mathbb{P}^n$ é uma curva não-singular ($n \geq 4$) então existe $\theta \notin C$ tal que a projeção π_θ desde θ, dá um mergulho de C em $\mathbb{P}^{n-1}$.

Demonstração: Sabemos que $\dim Sec(C) \leq 2 \cdot \dim(C) + 1 = 3$. Logo se $n \geq 4$ então $Sec(C) \neq \mathbb{P}^n$. Portanto, existe $\theta \in \mathbb{P}^n$ tal que $\theta \notin Sec(C)$. Pela proposição (4.25), tem-se que π_θ é um mergulho de C em $\mathbb{P}^{n-1}$.

Corolário 4.27: Toda curva $C \subseteq \mathbb{P}^n$ não-singular, pode ser mergulhada em $\mathbb{P}^3$.

Demonstração: Se $n \leq 3$ podemos considerar $\mathbb{P}^n$ como subespaço de $\mathbb{P}^3$, portanto não há nada a se demonstrar.

Se $n \geq 4$, usamos o corolário 4.26 repetidamente e projetamos desde um ponto até mergulhar C em $\mathbb{P}^3$

Lema 4.28 (A. Terracini): Consideremos uma variedade $X \subset \mathbb{P}^n$ r-dimensional, não-singular sobre um corpo K, x e y dois pontos distintos de X e $\overline{xy}$ a reta que liga x a y. Então:

a) $\dim(\mathbb{T}_x X \cap \mathbb{T}_y X) \geq 2 \dim X - \dim Sec(X)$

b) Se $z \in \overline{xy}$, $z \neq x$, $z \neq y$, então $< \mathbb{T}_x X, \mathbb{T}_y X > \subseteq \mathbb{T}_z Sec(X)$, onde $< \mathbb{T}_x X, \mathbb{T}_y X >$ denota o menor subespaço de $\mathbb{P}^n$ contendo $\mathbb{T}_x X$ e $\mathbb{T}_y X$.

Se $car\,(K) = 0$, então existe um aberto denso de $X \times X - \Delta$ onde a igualdade se verifica em (a) e um aberto denso na variedade secante $Sec(X)$ onde a igualdade se verifica em (b).

Demonstração:

Consideremos o conjunto

$$S_0 = \{(x, y, z) \in (X \times X - \Delta) \times \mathbb{P}^n \mid z \in \overline{xy}\},$$

$$\begin{array}{rl} p: & S_0 \longrightarrow X \times X - \Delta \\ & (x,y,z) \longmapsto (x,y) \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rl} \tau: & S_0 \longrightarrow \mathbb{P}^n \\ & (x,y,z) \longmapsto z \end{array}$$

as projeções induzidas pelas primeira e segunda projeções canônicas em $(X \times X - \Delta) \times \mathbb{P}^n$, respectivamente. Observemos que a projeção p é sobrejetiva e que cada fibra $p^{-1}(x, y)$ é a reta $\overline{xy}$. Pelo teorema da dimensão da fibra temos $1 = \dim p^{-1}(x, y) = \dim S_0 - \dim(X \times X - \Delta)$ e que dai decorre, $\dim S_0 = \dim(X \times X - \Delta) + 1 = 2 \dim X + 1$. Por outro lado, $X \times X - \Delta$ é irredutível em $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ e p regular com fibras irredutíveis, de dimensão comum. Portanto, S_0 é também irredutível.

Por outro lado, a imagem $\tau(S_0)$ é um aberto denso em $Sec(X)$ pois a variedade $Sec(X)$ é irredutível e $\tau(S_0)$ é um aberto não vazio em $Sec(X)$.

Suponhamos que o ideal $I(X)$ da variedade X seja gerado pela família de formas $F_1, F_2, ..., F_n$ no anel $K[X_0, X_1, ..., X_n]$ e que $X \subset U_n \simeq \mathbb{A}^n \subset \mathbb{P}^n$. Ou seja, nenhum ponto de X está no hiperplano do infinito. Consideremos:

$$\begin{aligned} S_0^{\circ} = \{&(x, y, z) \in (X \times X - \Delta) \times \mathbb{P}^n \mid F_\alpha(x) = F_\alpha(y) = 0, \\ &(y_1 - x_1)(z_i - x_i) = (z_1 - x_1)(y_i - x_i); \\ &i \in \{1, 2, ..., n\} \text{ e } \alpha \in \{1, 2, ..., m\}\} \subset S_0 \end{aligned}$$

e onde se denota $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ e $z = (z_1, z_2, ..., z_n)$, com $x_1 \neq y_1$.

É bom lembrar que o aberto $U_n \simeq \mathbb{A}^n \subset \mathbb{P}^n$ é tomado de modo a pudermos denotar x, y e z desta forma.

Consideremos em seguida, a família de polinômios $G_i(X, Y, Z) \in K[X, Y, Z]$ onde $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$, $Y = (Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ e $Z = (Z_1, Z_2, ..., Z_n)$ definidos por $G_i(X,Y,Z) = (Y_1 - X_1)(Z_i - X_i) - (Z_1 - X_1)(Y_i - X_i)$. Neste caso, para cada (x,y,z) arbitrariamente fixo em S_0° temos:

$$T_{(x,y,z)}S_0^\circ = \left\{(\epsilon,\eta,\rho) \in \mathbb{A}^{3n} \mid \sum_1^n \frac{\partial F_\alpha(x)}{\partial X_i}(\epsilon_i - x_i) = 0,\right.$$

$$\sum_1^n \frac{\partial F\alpha(y)}{\partial Y_i}(\eta_i - y_i) = 0 \text{ e}$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial G_j(x,y,z)}{\partial X_i}(\epsilon_i - x_i) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial G_j(x,y,z)}{\partial Y_i}(\eta_i - y_i)$$

$$\left. + \sum_{i=1}^n \frac{\partial G_j(x,y,z)}{\partial Z_i}(\rho_i - z_i) = 0,\ j \in \{1,2,...,n\}\right\}$$

Ou seja,

$$T_{(x,y,z)}S_0^\circ = \{(\epsilon,\eta,\rho) \in \mathbb{A}^{3n} \mid \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_\alpha(x)}{\partial X_i}(\epsilon_i - x_i) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial F_\alpha(y)}{\partial Y_i}(\eta_i - y_i) = 0 \text{ e } (z_i - y_i)(z_i - x_i)$$

$$+(z_1 - y_1)(\epsilon_i - x_i) + (z_i - x_i)(\eta_1 - x_1) - (z_1 - x_1)(\eta_i - y_i) -$$

$$(y_i - x_i)(\rho_1 - z_1) + (y_1 - x_1)(\rho_i - z_i) = 0,\ i \in \{1,2,...,n\}\}.$$

Assim, se $(\epsilon,\eta,\rho) \in T_{(x,y,z)}S_0^\circ$, temos: $\epsilon \in T_xX$, $\eta \in T_yX$ e

$$(-z_i - x_i)(\epsilon_1 - x_1) + (z_1 - x_1)(\epsilon_i - x_i) + (z_i - x_i)(\eta_1 - x_1) -$$

$$(z_1 - x_1)(\eta_i - y_i) - (y_i - x_i)(\rho_1 - z_1) + (y_1 - x_1)(\rho_i - x_i) = 0\}$$

$$i \in \{1,2,...,n\}$$

Mas x, y e z são colineares, nos permitindo então tomarmos o sistema de coordenadas tais que $x_i = y_i = z_i = 0$ para $i \in \{2,3,...,n\}$. Neste sistema, as equações de $T_{(x,y,z)}S_0^\circ$, se tornam

$$(*)\qquad (y_1 - x_1)\rho_i = (z_1 - x_1)\eta_i - (z_1 - y_1)\epsilon_i;\ i \in \{2, 3, ..., n\},$$

junto com as equações de T_xX que são expressas nas coordenadas $\epsilon_1, \epsilon_2, ..., \epsilon_n$, e as equações de T_yX que são expressas nas coordenadas $\eta_1, \eta_2, .., \eta_n$. Na hipótese $x_1 \neq y_1$, temos que, $(\epsilon, \eta, \rho) \in T_{(x,y,z)}S_0^\circ \subset \mathbb{A}^3$ implica:

$$\rho_i = \frac{z_1 - x_1}{y_1 - x_1}\eta_i - \frac{z_1 - x_1}{y_1 - x_1}\epsilon_i \ \ i \in \{2, 3, ..., n\}$$

Afirmação: Se o ponto (ϵ, η, ρ) está em $T_{(x,y,z)}S_0^\circ$, temos $\rho \in < T_xX,\ T_yX >$.

De fato, se tomarmos $\rho'_1 = \dfrac{z_1 - x_1}{y_1 - x_1}\eta_i - \dfrac{z_1 - x_1}{y_1 - x_1}\epsilon_i$ temos $\alpha = (\rho'_1, \rho_2, ..., \rho_n) \in < T_xX,\ T_yX >$. Por outro lado, a reta $\overline{xy} \subset < T_xX,\ T_yX >$. Como a reta $\overline{xy}$ é a reta $\{(a, 0, 0, ..., 0)\}$, temos $\alpha + \overline{xy} \in < T_xX,\ T_yX >$, de modo que a primeira coordenada pode ser modificada arbitrariamente. Daí, $(\rho'_1, \rho_2, ..., \rho_n) + (a, 0, ..., 0) \in < T_xX,\ T_yX > \ \forall\, a \in K$.

Se tomarmos $a = \rho_1 - \rho'_1$, temos de fato, $\rho = (\rho_1, \rho_2, ..., \rho_n) \in < T_xX,\ T_yX >$. O que prova a afirmação. Consideremos agora a hipótese adicional que $z \neq x$ e $z \neq y$. Vamos provar a recíproca da afirmação. Ou seja, se $P \in < T_xX,\ T_yX >$, então existem $\varepsilon \in T_xX$ e $\eta \in T_yX$ tais que $(\varepsilon, \eta, \rho) \in T_{(x,y,z)}S_0^\circ$. Para verificar isto, observamos primeiro que se $\rho \in < T_xX,\ T_yX >$ então existem $\varepsilon' \in T_xX$ e $\eta' \in T_yX$ tais que $\rho_i = \lambda\varepsilon'_i + \mu\eta'_i$ para cada $\lambda, \mu \in K$ e $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Se $\lambda = \dfrac{-(z_1 - y_1)}{y_1 - x_1}$ e $\mu = \dfrac{z_1 - y_1}{y_1 - x_1}$ então, tem-se que $(\varepsilon', \eta', \rho) \in T_{(x,y,z)}S_0^\circ$ por $(*)$.

Se λ e μ não forem assim, tomemos (ϵ, η, ρ) em $< T_xX,\ T_yX >$ satisfazendo:

$$\epsilon_1 - x_1 = -\frac{\lambda(y_1 - x_1)}{z_1 - x_1}(\epsilon'_1 - x_1)$$
$$\epsilon_i = -\frac{\lambda(y_1 - x_1)}{z_1 - x_1}\epsilon'_i\ ;\ i \in \{2, 3, ..., n\}$$
$$\eta_1 - y_1 = \frac{\mu(y_1 - x_1)}{z_1 - x_1}\epsilon'_i\ ;\ i \in \{2, 3, ..., n\}$$

e

$$\eta_i = \frac{\mu(y_1 - x_1)}{z_1 - x_1}\eta_i' \ ; \ i \in \{2, 3, ..., n\}.$$

Como $x = (x_1, 0, ..., 0)$ e $y = (y_1, 0, ..., 0)$ temos que $\epsilon \in T_xX$ e $\eta \in T_yX$ e de $\rho_i = \lambda\epsilon_i' + \mu\eta_i'$, decorre então que

$$\rho_i = \frac{-\lambda}{\lambda}\left(\frac{z_1 - y_1}{y_1 - x_1}\right)\epsilon_i + \frac{\mu}{\mu}\left(\frac{z_1 - y_1}{y_1 - x_1}\right)\eta_i = -\frac{z_1 - y_1}{y_1 - x_1}\epsilon_i + \frac{z_1 - x_1}{y_1 - x_1}\eta_i.$$

Ou seja,

$$(y_1 - x_1)\rho_i = -(z_1 - y_1)\epsilon_i + (z_1 - x_1)\eta_i.$$

Portanto $(\epsilon, \eta, \rho) \in T_{(x,y,z)}(S_0^\circ)$, como afirmado.

Como $S_0^\circ \subset X \times X \times \mathbb{A}^n$ tem-se que $T_{(x,y,z)}S_0^\circ \subset T_xX \times T_yX \times \mathbb{A}^n$. Mas $S_0^\circ \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n \times Sec(X)$ e portanto, $T_{(x,y,z)}S_0^\circ \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n \times T_zSec(X)$. Contudo, para cada $\rho \in < T_xX,\ T_yX >$ existem $\epsilon \in T_xX$ e $\eta \in T_yX$ tais que $(\epsilon, \eta, \rho) \in T_{(x,y,z)}S_0^\circ$; daí, se ter $< T_xX,\ T_yX > \subset T_zSec(X)$ o que prova (b).

E mais, se z é um ponto não-singular da variedade $Sec(X)$, temos:

$$\begin{aligned} \dim(SecX) &= \dim T_zSec(X) \geq \dim < T_xX, T_yX > \\ &= \dim T_xX + \dim T_yX - \dim(T_xX \cap T_yX) \qquad (*) \\ &= 2\dim X - \dim(T_xX \cap T_yX). \end{aligned}$$

Portanto, $\dim(T_xX \cap T_yX) \geq 2\dim X - \dim(SecX)$

Suponhamos que $car(K) = 0$, para cada $(x, y, z) \in S_0^\circ$, consideremos a diferencial $d\tau_{(x,y,z)} : T_{(x,y,z)}S_0^\circ \to T_zSec(X)$. Como $car(K) = 0$, o teorema de Sard garante a existência de um aberto e denso $U \subset Sec(X)$ tal que para cada ponto z não-singular a diferencial $d\tau_{(x,y,z)}$, é sobrejetiva, para cada $(x, y, z) \in \tau^{-1}z$. No caso afim, temos $(\epsilon, \eta, \rho) \in T_{(x,y,z)}S_0^\circ$ se, e somente se, $\rho \in < T_xX,\ T_yX >$.

Portanto, $d\tau_{(x,y,z)}$ é sobrejetiva se, e somente se, $< T_xX,\ T_yX >= T_z(SecX)$. Mas isto ocorre se, e somente se,

$$\dim(T_xX \cap T_yX) = 2\dim X - \dim(Sec(X)),$$

como se deduz de $(*)$.■

A seguir definiremos duas variedades especiais associadas a uma variedade $X \subset \mathbb{P}^n$ e demonstraremos o lema 4.30 como uma aplicação do lema de Terracini.

Definição 4.29: Sejam $X \subset \mathbb{P}^n$ uma variedade e $Sec(X)$ a sua variedade secante. Dado um ponto $z \in Sec(X) - X$, define-se o *cone secante* $\sum(z)$ como o fecho em $\mathbb{P}^n$ da união de todas as retas secantes a X passando por z.

Definimos também o *lugar secante* denotado por Q_z como o fecho do conjunto de todos os pontos de X que estão em algumas secante a X passando por z. Assim $Q_z \subseteq \sum(z) \cap X$, e $Q_z = \sum(z) \cap X$ para todo z em um aberto denso de $Sec(X) - X$.

Lema 4.30: Seja $X \subset \mathbb{P}^n$ uma variedade não-singular. Então, $\dim Q_z \geq 2\dim X + 1 - \dim Sec(X)$, $\dim \sum(z) \geq 2\dim X + 2 - \dim Sec(X)$ para cada $z \in Sec(X)$ tal que $Q_z \neq \Phi$. A igualdade se verifica em um aberto denso de $Sec(X)$. Em particular, se $\dim Sec(X) = n - 1$ então $\dim Q_z = 2\dim X - n + 2$ e $\dim \sum(z) = 2\dim X - n + 3$ para cada z em um aberto denso em $SecX - X$.

Demonstração:

Seja S_0 conforme lema de Terracini. De lá temos: S_0 irredutível e, $\dim S_0 = 2\dim X + 1$. Seja $\tau : S_0 \to Sec(X)$, a aplicação induzida pela projeção $X \times X - \Delta \to \mathbb{P}^n$. Neste caso, τ é dominante e $\dim \tau^{-1}(z) \geq \dim S_0 - \dim Sec(X) = 2\dim X + 1 - \dim Sec(X)$ para cada $z \in \mathrm{Im}(\tau)$.

Observemos que para $x \in X$, as fibras $p^{-1}(x) = \{(x, y, z) \in S_0 \mid z \in \overline{xy}\}$ onde $p : S_0 \to X$ é induzida pela primeira projeção e $\tau^{-1}(z) = \{(x, y, z) \in S_0 \mid z \in \overline{xy}\}$. Se denotamos por p_1 a restrição de p à fibra $\tau^{-1}(z)$, sendo z fixo e arbitrário em $Sec(X)$, temos $p_1 : \tau^{-1}(z) \to X$, e p_1 finita. Portanto, $\dim \tau^{-1}(z) = \dim \mathrm{Im}(p_1) =$

$\dim Q_z$ e $p_1^{-1}(x) = p^{-1}(x) \cap \tau^{-1}(z) = \{(x,y,z) \in S_0 \mid z \in \overline{xy}\} = \{y \in X \mid z \in \overline{xy}\}$.
Assim,

$$\dim Q_z = \dim \tau^{-1}(z) \geq 2\dim X + 1 - \dim Sec(X) \text{ e}$$

$$\dim Q_z = 2\dim X + 1 - \dim Sec(X)$$

para cada z em um aberto e denso em $Sec(X)$, e tal que $Q_z \neq \Phi$. Se $\dim Sec(X) = n-1$, $\dim Q_z = 2\dim X - n + 2$, para todo z em um aberto e denso em $Sec(X)$. Por outro lado, $\tau^{-1}(z) = \{(x,y,z) \in S_0 \mid z \in \overline{xy}\}$.

Definamos a aplicação

$$\begin{aligned} f: \tau^{-1}(z) \times \mathbb{P}^1 &\longrightarrow \mathbb{P}^n \\ ((x,y,z);[\lambda:\mu]) &\longmapsto \lambda x + \mu y \end{aligned}$$

Seja $w \in \mathrm{Im}(f)$. Como $f^{-1}(w) = \{((x,y,z);[\lambda,\mu]) \in \tau^{-1}(z) \times \mathbb{P}^1 \mid \lambda x + \mu y = w\}$ tem-se que f é finita. Por outro lado, temos que $\mathrm{Img}(f) = \{w \in \mathbb{P}^n \mid \exists\ (x,y) \in X \times X$ tal que $\overline{wz} = \overline{xy}\} = \sum(z)$. Portanto,
$\dim \sum(z) = \dim \mathrm{Im}(f) = \dim(\tau^{-1}(z) \times \mathbb{P}^1) =$
$= \dim \tau^{-1}(z) + 1 \geq 2\dim X + 1 + 1 - \dim Sec(X) = 2\dim X + 2 - \dim Sec(X)$.
Se $\dim Sec(X) = n-1$ então $\dim \sum(z) = 2\dim X + 2 - n + 1 = 2\dim X + 3 - n$. ■

Proposição 4.31 (F. L. Zak): Seja $X \subset \mathbb{P}^n$ é uma sub-variedade fechada r-dimensional, e não-singular. Supondo que $\dim Sec(X) \leq n-1$, e X não contida em hiperplano algum. Se z é um ponto de $Sec(X) - X$, e H é um hiperplano tal que $H \supset T_z Sec(X)$, então $Q_z \subset Sing(X \cap H)$. Em particular, $Sing(X \cap H)$, tem dimensão maior ou igual a $2\dim X - n + 2$.

Demonstração:

Vimos, no lema 4.30 que existe um aberto em $Sec(X) - X$ consistindo dos pontos não-singulares, z tais que $\dim Q_z \geq 2\dim X - n + 2$. Seja z um ponto desses e H um hiperplano tal que $H \supset T_z Sec(X)$. Pelo lema de Terracini, $T_x X \subset H$ para cada $x \in X$ tal que x pertença a uma secante de X passando por z.

Afirmação: Se $x \in Q_z$, $x \in Sing(H \cap X)$. Bem, se $x \in Q_z = fecho\{a \in X \mid \overline{az} \in fecho\mathcal{S}(X)\}$ existe $y \in X$ tal que $z \in \overline{xy} \in \mathcal{S}(X)$. Como $T_x(X \cap H) = T_x X \cap T_x H = T_x X \cap H = T_x X$, implica $\dim T_x(X \cap H) = \dim T_x X$. Por outro lado, $\dim(X \cap H) = \dim(X) - 1$ pois $X \subsetneq H$. Logo $\dim T_x(X \cap H) = \dim T_x X = \dim X \gneq \dim(X \cap H)$. Neste caso, x é um ponto singular da variedade $X \cap H$. Ou seja, $Q_z \subset Sing(X \cap H)$, e daí, $\dim Sing(X \cap H) \geq \dim Q_z \geq 2\dim X - n + 2$.■

Teorema 4.32 (Conexidade): Seja $P = \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \times ... \times \mathbb{P}^n$ o produto de r cópias do espaço projetivo $\mathbb{P}^n$ e seja Δ a imagem da diagonal definida por um mergulho de $\mathbb{P}^n$ em P. Se X é uma variedade irredutível, $f : X \to P$ um morfismo, com $\dim f(X) > (r-1)n$, então $f^{-1}(\Delta)$ é conexo. (veja [W.J] - 160).

A demonstração deste teorema foge do objetivo desta monografia. Por isto, não será incluida aqui.

Lema 4.33: Sejam X uma subvariedade fechada de $\mathbb{P}^n$ sobre o corpo K algebricamente fechado, de característica arbitrária e Y uma subvariedade irredutível de X. Seja y_0 um ponto de Y e x_0 um ponto de X tal que a reta $L = \overline{x_0 y_0}$ não esteja contida em X e θ um ponto de $L - X$.

Se $\dim X + \dim Y \geq n$, então existe $y \in Y$ tal que $\theta \in T_y X$.

Demonstração:

Consideremos as projeções

$$\begin{array}{rcl} \pi : X & \longrightarrow & \mathbb{P}^{n-1} \\ x & \longmapsto & \overline{\theta x} \cap \mathbb{P}^{n-1} \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rcl} g : X \times Y & \longrightarrow & \mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{n-1} \\ (x,y) & \longmapsto & (\overline{\theta x} \cap \mathbb{P}^{n-1}, \overline{\theta y} \cap \mathbb{P}^{n-1}) \end{array}.$$

Fixemos (z,w) em $g(X \times Y)$ tendo-se $g^{-1}(z,w) = \{(x,y) \in X \times Y \mid x \in \overline{\theta z}$ e $y \in \overline{\theta w}\}$. Portanto, $g^{-1}(z,w)$ tem dimensão igual a zero, pois as retas $\overline{\theta z}$ e

$\overline{\theta w}$ não estão contidas em X, interseptando X portanto num conjunto finito de pontos. Daí, se ter que cada fibra de g é finita e (Teo 2.30) a existência de um aberto $V \subset g(X, Y)$ tal que $\dim g^{-1}(z, w) = 0 \ \forall \ (z, w) \in V$. Portanto, $\dim g(X \times Y) = \dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y \geq n$. Assim, pelo teorema da conexidade (4.32), temos que $g^{-1}(\Delta_{\mathbb{P}^{n-1}})$ é conexa em $X \times Y$. Por outro lado, se definirmos

$$U = \{(x, y) \in X \times Y \mid x \neq y \text{ e } \pi(x) = \pi(y)\}$$

$$= \{(x, y) \in X \times Y - \Delta \mid g(x, y) \in \Delta_{\mathbb{P}^{n-1}}\},$$

temos que $U \neq \phi$ pois $(x_0, y_0) \in U$ já que $\overline{\theta x_0} = \overline{\theta y_0}$. E como, $U = g^{-1}(g(X \times Y) \cap \Delta_{\mathbb{P}^{n-1}})$ temos que U é fechado em $X \times Y - \Delta$. Além disso, $g^{-1}(\Delta_{\mathbb{P}^{n-1}}) = \Delta_Y \cup \overline{U}$. Como $g^{-1}(\Delta_{\mathbb{P}^{n-1}})$ é conexo temos que $\Delta_Y \cap \overline{U} \neq \Phi$.

Como $(y, y) \in \overline{U}$, provemos que $\theta \in T_y X$. Com efeito, seja

$$S_0 = \{(x, y, z) \in (X \times X - \Delta\} \times \mathbb{P}^n \mid z \in \overline{xy}\}$$

então $(y, y, z) \in \overline{S}_0$ se, e somente se, $z \in T_y X$ (veja [RJ] - 197).

Como $(y, y, \theta) \in fecho\{(x, y, \theta) \mid x \neq y, \ \theta \in \overline{xy}\} \subseteq \overline{S}_0$ então $\theta \in T_y X$. ∎

Teorema 4.34: Sejam $X \subset \mathbb{P}^n$ uma variedade não-singular sobre o corpo K (alg. fechado, de característica arbitrária) e H um hiperplano de $\mathbb{P}^n$. Então, $Sing(X \cap H)$ tem dimensão menor ou igual a $n - \dim X - 1$.

Demonstração:

Seja Y um componente irredutível da variedade $Sing(X \cap H)$ tal que $T_y X \subset H \ \forall \ y \in Y$. Suponhamos $\dim Sing(X \cap H) > n - \dim X$. Consideremos $x_0 \in X - H$, $y_0 \in Y$ tal que a reta $L = \overline{x_0 y_0}$ não esteja contida em X. Seja $\theta \in L - X$. Como por hipótese $Sing(X \cap H) \neq \phi$, afirma-se: $L \cap H = \{y_0\}$.

De fato, L não está contido em H pois $x_0 \notin H$. Então, $L \cap H \neq \phi$ pois $y_0 \in L \cap H$ já que $y_0 \in T_{y_0}X \subset H$. Neste caso, $L \cap H$ só tem um ponto. Ou seja, $\{y_0\} = L \cap H$. Por outro lado, pelo lema (4.30), $\theta \in T_yX \subset H$ para algum $y \in Y$, o que contradiz a hipótese de θ não pertencer a H. Daí, $\dim Sing(X \cap H) \leq n - \dim X - 1$.■

Corolário 4.35 (F. L. Zak): Sejam $X \subset \mathbb{P}^n$ uma variedade não-singular e H um hiperplano de $\mathbb{P}^n$ que não contém X. Se X puder ser projetada isomorficamente sobre sua imagem $X' \subset \mathbb{P}^{n-1}$, temos:

$$\dim Sing(X \cap H) \leq n - 2 - \dim X$$

Demonstração:

Consideremos $\theta \in H - Sec(X)$, $\pi : \begin{array}{l} \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1} \\ x \longmapsto \overline{\theta x} \cap \mathbb{P}^{n-1} \end{array}$ e $X' = \pi(X)$.

Observemos que se $x, y \in X$ e $\pi(x) = \pi(y)$ então $\overline{\theta x} \cap \mathbb{P}^{n-1} = \overline{\theta y} \cap \mathbb{P}^{n-1}$ e daí $x = y$ pois $\theta \notin Sec(X)$. Portanto, π restrito a X é injetiva.

Como $\pi/_X$ é finita temos $\dim \pi(X) = \dim X' = \dim X$. Observemos também que $\pi(H)$ é um hiperplano em $\mathbb{P}^{n-1}$, uma vez que,

$$\begin{aligned} \pi(H) &= \{y \in \mathbb{P}^{n-1} \mid \exists\, x \in H \text{ com } \pi(x) = y\} \\ &= \{y \in \mathbb{P}^{n-1} \mid \exists\, x \in H \text{ tal que } \overline{\theta x} \cap \mathbb{P}^{n-1} = \{y\}\}. \end{aligned}$$

Ou seja, $\pi(H) = \mathbb{P}^{n-1} \cap H := H'$.

Por outro lado, X é mapeado em $\overline{X}$ e $X \cap H$ é mapeado em $\overline{X} \cap H'$ através de $\pi/_X$. Daí,

$$\begin{aligned} &\dim(X \cap H) = \dim(\overline{X} \cap H') \text{ e} \\ &\dim Sing(\overline{X} \cap H') \leq n - 1 - \dim(\overline{X}) - 1 \\ &= n - 2 - \dim X. \end{aligned}$$

obtida aplicando (Teo 4.34) à variedade $\overline{X} \cap H' \subset \mathbb{P}^{n-1}$.■

Teorema 4.36 (F.L. Zak): Seja $X \subset \mathbb{P}^n$ uma sub-variedade não-singular e fechada. Se X gera $\mathbb{P}^n$, e pode ser projetada isomorficamente sobre $\mathbb{P}^{n-1}$, então, $\dim X \leq \frac{2}{3}(n-2)$.

Demonstração:

Pelo corolário 4.35, temos que $\dim(Sing(X \cap H)) \leq n - \dim X - 2$ para cada hiperplano H de $\mathbb{P}^n$. Por outro lado, já vimos que existe um hiperplano H de $\mathbb{P}^n$ tal que $\dim Sing(X \cap H) \geq 2\dim X - n + 2$.

Portanto, $2\dim X - n + 2 \leq \dim Sing(X \cap H) \leq n - \dim X - 2$. E disso, $2\dim X - n + 2 \leq n - \dim X - 2$. Logo $3\dim X \leq 2n - 4$. Portanto, $\dim X \leq \frac{2}{3}(n-2)$.■

Colorário 4.37: Seja X uma variedade não-singular e não contida em nenhum hiperplano de $\mathbb{P}^n$, com $\dim X = \frac{2}{3}(n-2)$ e $\dim Sec(X) \leq n-1$. Então $\dim Sec(X) = n - 1$. Em particular, $\dim \sum(z) = 2\dim X - n + 3$ e $\dim Q_z = 2\dim X - n + 2$.

Demonstração:

Seja θ um ponto em $\mathbb{P}^n - Sec(X)$.

Consideremos a projeção,

$$\begin{array}{rccc} \pi_\theta : & X & \longrightarrow & \mathbb{P}^{n-1} \\ & x & \longmapsto & \overline{\theta x} \cap \mathbb{P}^{n-1} \end{array}$$

desde o ponto $\theta \in \mathbb{P}^n - Sec(X)$. Como $\theta \notin Sec(X)$, π_θ projeta X isomorficamente na sua imagem $\overline{X} \subseteq \mathbb{P}^{n-1}$. Portanto,

$$\dim \overline{X} = \dim X = \frac{2}{3}(n-2) > \frac{2}{3}(n-1-2).$$

Logo, pelo teorema (4.36), $\overline{X}$ não pode ser mapeada isomorficamente sobre sua imagem em $\mathbb{P}^{n-1}$. Ou seja, $Sec(\overline{X}) = \mathbb{P}^{n-1}$. Portanto,

$$\dim Sec(X) = \dim Sec(\overline{X}) = \dim \mathbb{P}^{n-1} = n - 1.$$

Por outro lado, pelo lema (4.30), temos que $\dim \sum(z) = 2\dim X - n + 3$ e que $\dim Q_z = 2\dim X - n + 2$ para todo z num aberto e denso U da variedade $Sec(X)$.■

Proposição 4.38: A dimensão da variedade secante da variedade de Veronese $v_2(\mathbb{P}^2)$, é igual a 4.

Demonstração:

Consideremos a Veronese

$$\begin{array}{rccc} v_2 : & \mathbb{P}^2 & \longrightarrow & \mathbb{P}^5 \\ & [x_0 : x_1 : x_2] & \longmapsto & [x_0^2 : x_1^2 : x_2^2 : x_0x_1 : x_0x_2 : x_1x_2] \end{array}.$$

Tomemos o ponto $P = [0 : 1 : 0 : 0 : 1 : 0] \in \mathbb{P}^5$.

Afirmamos que $P \notin Sec(v_2(\mathbb{P}^2))$. De fato seja

$$Q = [x_0^2 : x_1^2 : x_2^2 : x_0x_1 : x_0x_2 : x_1x_2]$$

um ponto arbitrário de $v_2(\mathbb{P}^2)$. Vamos verificar portanto que a reta $\overline{PQ}$ não é uma secante honesta e tão pouco uma reta tangente.

Seja então

$$L = \overline{PQ} = \{[\mu x_0^2 : \lambda + \mu x_1^2 : \mu x_2^2 : \mu x_0x_1 : \lambda + \mu x_0x_2 : \mu x_1x_2] \mid [\lambda : \mu] \in \mathbb{P}^1\},$$

a reta que liga o ponto P ao ponto Q em $\mathbb{P}^5$. Consideremos os polinômios

$$\begin{array}{l} F_1 = Z_0Z_1 - Z_3^2,\ F_2 = Z_0Z_2 - Z_4^2,\ F_3 = Z_1Z_2 - Z_5^2 \\ F_4 = Z_0Z_5 - Z_3Z_4,\ F_5 = Z_3Z_2 - Z_4Z_5,\ F_6 = Z_3Z_5 - Z_1Z_4 \end{array}$$

geradores do ideal $I(v_2(\mathbb{P}^2))$. Portanto, um ponto

$$R = [\mu x_0^2 : \lambda + \mu x_1^2 : \mu x_2^2 : \mu x_0x_1 : \lambda + \mu x_0x_2 : \mu x_1x_2] \in \bigcap_{i=1}^{6} Z(F_i)$$

se, e somente se,

$$\begin{cases} \mu x_0^2(\lambda+\mu x_1^2) - \mu^2 x_0^2 x_1^2 = \lambda\mu x_0^2 = 0 & (1)\\ \mu^2 x_0^2 x_2^2 - (\lambda^2 + 2\lambda\mu x_0 x_2 + \mu^2 x_0^2 x_2^2) = -\lambda^2 - 2\lambda\mu x_0 x_2 = 0 & (2)\\ (\lambda+\mu x_1^2)\mu x_2^2 - \mu^2 x_1^2 x_2^2 = \lambda\mu x_2^2 = 0 & (3)\\ \mu^2 x_0^2 x_1 x_2 - \mu x_0 x_1(\lambda + \mu x_0 x_2) = \lambda\mu x_0 x_2 = 0 & (4)\\ \mu^2 x_0 x_1 x_2^2 - (\lambda+\mu x_0 x_2)\mu x_1 x_2 = -\lambda\mu x_1 x_2 = 0 & (5)\\ \mu^2 x_0 x_1^2 x_2 - (\lambda+\mu x_1^2)(\lambda+\mu x_0 x_2) = \lambda^2 + \lambda\mu x_0 x_2 = 0 & (6) \end{cases}$$

Portanto de (4) decorre (7) $\lambda\mu x_0 x_2 = 0$. Assim, se $x_0 x_2 = 0$ tem-se $\lambda = 0$ em (2). Por outro lado, se $x_0 x_2 \neq 0$, tem-se $\lambda\mu = 0$ em (7). Se $\mu = 0$, teríamos $P = [0:1:0:0:1:0]$ que não está em $v_2(\mathbb{P}^2)$. Portanto, $\mu \neq 0$ e daí $\lambda = 0$. Consequentemente, $L \cap v_2(\mathbb{P}^2) = \{Q\}$. Restando apenas monstrar que L não é uma reta tangente a $v_2(\mathbb{P}^2)$ no ponto Q.

Suponhamos então que para algum

$$Q = [x_0^2 : x_1^2 : x_2^2 : x_0x_1 : x_0x_2 : x_1x_2],$$

a reta $L = \overline{PQ}$ seja tangente a $v_2(\mathbb{P}^2)$. Neste caso,

$$L \subset \mathbb{T}_Q(v_2(\mathbb{P}^2)) = \bigcap_{i=1}^{6} T_Q(Z(F_i)).$$

Mas,

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_Q X_1 &= Z(x_0^2 Z_1 + x_1^2 Z_0 - 2x_0x_1Z_3) & \text{(I)}\\ \mathbb{T}_Q X_2 &= Z(x_0^2 Z_2 + x_2^2 Z_0 - 2x_0x_1Z_4) & \text{(II)}\\ \mathbb{T}_Q X_3 &= Z(x_1^2 Z_2 + x_2^2 Z_1 - 2x_1x_2Z_5) & \text{(III)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{T}_Q X_4 &= Z(x_0^2 Z_5 - x_0 x_1 Z_4 - x_0 x_2 Z_5 - x_1 x_2 Z_4) && \text{(IV)}\\
\mathbb{T}_Q X_5 &= Z(x_2^2 Z_3 + x_0 x_1 Z_2 - x_0 x_2 Z_5 - x_1 x_2 Z_4) && \text{(V)}\\
\mathbb{T}_Q X_6 &= Z(-x_1^2 Z_4 + x_0 x_1 Z_5 - x_0 x_2 Z_1 + x_1 x_2 Z_3) && \text{(VI)}
\end{aligned}
$$

Mas se $R \in \overline{PQ}$,

$$R = [\mu x_0^2 : \lambda + \mu x_1^2 : \mu x_2^2 : \mu x_0 x_1 : \lambda + \mu x_0 x_2 : \mu x_1 x_2]$$

para algum $[\lambda : \mu] \in \mathbb{P}^1$ e algum $[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2$.

Assim temos:

i) $L \subset \mathbb{T}_Q X_1 \iff x_0^2(\lambda + \mu x_1^2 + \mu x_0^2 x_1^2 - 2\mu x_0^2 x_1^2 = 0$
$\iff \lambda x_0^2 = 0 \ \forall\ \lambda \in K \iff x_0 = 0$

ii) $L \subset \mathbb{T}_Q X_3$ com $x_0 = 0 \iff \mu x_1^2 x_2^2 + x_2^2(\lambda + \mu x_1^2) - 2\mu x_1^2 x_2^2 =$
$= \mu x_1^2 x_2^2 + \lambda x_2^2 + \mu x_1^2 x_2^2 - 2\mu x_1^2 x_2^2 = \lambda x_2^2 = 0 \ \forall\ \lambda \in K \iff x_2 = 0.$

iii) $L \subset \mathbb{T}_Q X_6$ com $x_0 = x_2 = 0 \iff -x_1^2 Z_4 = 0$

$\iff -x_1^2 \lambda = 0 \ \forall\ \lambda \in K \iff x_1 = 0$. Portanto, nenhuma reta $L = \overline{PQ}$ com $Q \in v_2(\mathbb{P}^2)$ está contida no espaço $\mathbb{T}_Q(v_2(\mathbb{P}^2))$. Ou ainda, $\overline{PQ} \notin Sec(v_2(\mathbb{P}^2)) \ \forall\ Q \in v_2(\mathbb{P}^2)$. Daí, $Sec(v_2(\mathbb{P}^2)) \subsetneq \mathbb{P}^5$. Além disto, a variedade $v_2(\mathbb{P}^2)$ apresenta dimensão igual a $2 = \frac{2}{3}(5-2)$ e não está contida em hiperplano algum de $\mathbb{P}^5$. Neste caso,, o colorário (4.37), garante $\dim Sec(v_2(\mathbb{P}^2) = 4.$ ■

Proposição 4.39: A dimensão da variedade secante da variedade de Segre $\sigma(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2)$ é igual a 7.

Demonstração:

Sabe-se que $\sigma(\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^2)$ é realizada em $\mathbb{P}^8$ pelos zeros comuns aos menores 2×2 da matriz

$$M_{\sigma(\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^2)} = \begin{bmatrix} Z_0 & Z_1 & Z_2 \\ Z_3 & Z_4 & Z_5 \\ Z_6 & Z_7 & Z_8 \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$\sigma(\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^2) = Z(F_1, F_2, ..., F_9) = \bigcap_{i=1}^{9} Z(F_i)$$

onde

$$\begin{aligned}
X_1 &= Z(F_1) = Z(Z_4Z_8 - Z_5Z_7) \\
X_2 &= Z(F_2) = Z(Z_1Z_8 - Z_2Z_7) \\
X_3 &= Z(F_3) = Z(Z_1Z_5 - Z_2Z_4) \\
X_4 &= Z(F_4) = Z(Z_3Z_8 - Z_5Z_6) \\
X_5 &= Z(F_5) = Z(Z_0Z_8 - Z_2Z_6) \\
X_6 &= Z(F_6) = Z(Z_0Z_5 - Z_2Z_3) \\
X_7 &= Z(F_7) = Z(Z_3Z_7 - Z_4Z_6) \\
X_8 &= Z(F_8) = Z(Z_1Z_6 - Z_0Z_7) \\
X_9 &= Z(F_9) = Z(Z_0Z_4 - Z_1Z_3)
\end{aligned}$$

Afirmação: Se $P = [0:1:0:0:0:1:1:0:0] \in \mathbb{P}^8$ então, $P \notin Sec(\sigma(\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^2))$.

Provaremos este fato mostrando que para cada $Q \in \sigma(\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^2)$, cada reta $\overline{PQ}$ intercepta $\sigma(\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^2)$ apenas no ponto Q, e nenhuma desta retas, é uma reta tangente a $\sigma(\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^2)$ em Q.

Consideremos arbitrariamente os pontos

$Q = [x_0y_0 : x_0y_1 : x_0y_2 : x_1y_0 : x_1y_1 : x_1y_2 : x_2y_0 : x_2y_1 : x_2y_2]$ em $\sigma(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2)$
e $\lambda P + \mu Q = [\mu x_0y_0 : \lambda + \mu x_0y_1 : \mu x_0y_2 : \mu x_1y_0 : \mu x_1y_1 : \lambda + \mu x_1y_2 : \lambda + \mu x_2y_0 :$
$: \mu x_2y_1 : \mu x_0x_2]$

com $[\lambda : \mu]$ em $\mathbb{P}^1$ e $\lambda P + \mu Q$ na reta $\overline{PQ}$ que liga o ponto P ao ponto Q.

Portanto, $\lambda P + \mu Q \in \bigcap_{i=1}^{n} X_i = \sigma(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2)$ se, e somente se,

$$\begin{aligned}
\lambda\mu x_2y_1 &= 0 && (1)\\
\lambda\mu x_2y_2 &= 0 && (2)\\
\lambda^2 + \lambda\mu x_1y_2 + \lambda\mu x_0y_1 &= 0 && (3)\\
\lambda^2 + \lambda\mu x_2y_0 + \lambda\mu x_1y_2 &= 0 && (4)\\
\lambda\mu x_0y_2 &= 0 && (5)\\
\lambda\mu x_0y_0 &= 0 && (6)\\
\lambda\mu x_1y_1 &= 0 && (7)\\
\lambda^2 + \lambda\mu x_2y_0 + \lambda\mu x_0y_1 &= 0 && (8)\\
-\lambda\mu x_1y_0 &= 0 && (9)
\end{aligned}$$

Na hipótese $\lambda\mu \neq 0$, as equações (1), (2), (5), (6), (7) e (9), garantem que

$$\begin{aligned}
x_2y_1 &= 0\\
x_2y_2 &= 0\\
x_0y_2 &= 0\\
x_0y_0 &= 0\\
x_1y_1 &= 0\\
x_1y_0 &= 0.
\end{aligned}$$

Das equações (3) e (4) decorre que:

$$\lambda\mu x_1y_2 + \lambda\mu x_0y_1 = \lambda\mu x_2y_0 + \lambda\mu x_1y_2.$$

Portanto, $x_0y_1 = x_2y_0$. E das equações (2) e (8) decorre $x_1y_2 = x_2y_1$.

Neste caso,

$$\begin{aligned} Q &= [0 : x_0y_1 : 0 : 0 : 0 : x_1y_2 : x_2y_0 : 0 : 0] = \\ &= [0 : x_2y_0 : 0 : 0 : 0 : x_2y_0 : x_2y_0 : 0 : 0] = \\ &= [0 : 1 : 0 : 0 : 0 : 1 : 1 : 0 : 0] = P \notin \sigma(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2). \end{aligned}$$

Na hipótese $\lambda\mu = 0$ decorre $\lambda = 0$ e $\overline{PQ} \cap \sigma(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2) = \{Q\}$. Além disto, $\overline{PQ}$ não é reta tangente a $\sigma(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2)$ em Q, porque se $\overline{\mathbb{P}Q}$ for tangente a $\sigma(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2)$ em Q temos

$$\overline{\mathbb{P}Q} \subset \mathbb{T}_Q(\sigma(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2)) = \bigcap_{i=1}^{9} \mathbb{T}_Q X_i \Longrightarrow \overline{\mathbb{P}Q} \subset \mathbb{T}_Q X_i \; \forall\, i \in \{1, 2, ..., 9\}.$$

Mas,

$$\begin{aligned} &\mathbb{T}_Q X_1 = Z(x_2y_2Z_4 - x_2y_1Z_5 - x_1y_2Z_7 + x_1y_1Z_8) \\ &\Longrightarrow \overline{PQ} \subset \mathbb{T}_Q X_1 \Longleftrightarrow \lambda x_2y_1 = 0 \;\forall\, \lambda \in K \end{aligned} \tag{i}$$

$$\begin{aligned} &\mathbb{T}_Q X_2 = Z(x_2y_2Z_1 - x_2y_1Z_2 - x_0y_2Z_7 + x_0y_1Z_8) \\ &\Longrightarrow \overline{PQ} \subset \mathbb{T}_Q X_2 \Longleftrightarrow \lambda x_2y_2 = 0 \;\forall\, \lambda \in K \end{aligned} \tag{ii}$$

$$\begin{aligned} &\mathbb{T}_Q X_3 = Z(x_1y_2Z_1 - x_1y_1Z_2 - x_0y_2Z_4 + x_0y_1Z_5) \\ &\Longrightarrow \overline{PQ} \subset \mathbb{T}_Q X_3 \Longleftrightarrow \lambda(x_1y_2 + x_0y_1) = 0 \;\forall\, \lambda \in K \end{aligned} \tag{iii}$$

$$\begin{aligned} &\mathbb{T}_Q X_4 = Z(x_2y_2Z_3 - x_2y_0Z_5 - x_1y_2Z_6 + x_1y_0Z_8) \\ &\Longrightarrow \overline{PQ} \subset \mathbb{T}_Q X_4 \Longleftrightarrow \lambda(x_2y_0 + x_1y_2) = 0 \;\forall\, \lambda \in K \end{aligned} \tag{iv}$$

$$\begin{aligned} &\mathbb{T}_Q X_5 = Z(x_2y_2Z_0 - x_2y_0Z_2 - x_0y_2Z_6 + x_0y_0Z_8) \\ &\Longrightarrow \overline{PQ} \subset \mathbb{T}_Q X_5 \Longleftrightarrow \lambda x_0y_2 = 0 \;\forall\, \lambda \in K \end{aligned} \tag{v}$$

$$\begin{aligned} &\mathbb{T}_Q X_6 = Z(x_1y_2Z_0 - x_1y_0Z_2 - x_0y_2Z_3 + x_0y_0Z_5) \\ &\Longrightarrow \overline{PQ} \subset \mathbb{T}_Q X_6 \Longleftrightarrow \lambda x_0y_0 = 0 \;\forall\, \lambda \in K \end{aligned} \tag{vi}$$

$$\mathbb{T}_Q X_7 = Z(x_2y_1Z_3 - x_2y_0Z_4 - x_1y_1Z_6 + x_1y_0Z_7)$$
$$\Longrightarrow \overline{PQ} \subset \mathbb{T}_Q X_7 \Longleftrightarrow \lambda x_1 y_1 = 0 \; \forall \; \lambda \in K \quad \text{(vii)}$$

$$\mathbb{T}_Q X_8 = Z(-x_2y_1Z_0 + x_2y_0Z_1 + x_0y_1Z_6 - x_0y_0Z_7)$$
$$\Longrightarrow \overline{PQ} \subset \mathbb{T}_Q X_8 \Longleftrightarrow \lambda(x_2y_0 + x_0y_1) = 0 \; \forall \; \lambda \in K \quad \text{(viii)}$$

$$\mathbb{T}_Q X_9 = Z(x_1y_1Z_0 - x_1y_0Z_1 - x_0y_1Z_3 + x_0y_0Z_4)$$
$$\Longrightarrow \overline{PQ} \subset \mathbb{T}_Q X_9 \Longleftrightarrow \lambda x_1 y_0 = 0 \; \forall \; \lambda \in K \quad \text{(ix)}$$

Neste caso, $\overline{PQ} \subset \mathbb{T}_Q\sigma(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2) = \bigcap_{i=1}^{9} \mathbb{T}_Q X_i$ se, e somente se,

$$\begin{aligned}
\lambda x_2 y_1 &= 0 && \text{(i)}\\
\lambda x_2 y_2 &= 0 && \text{(ii)}\\
\lambda x_1 y_2 + \lambda x_0 y_1 &= 0 && \text{(iii)}\\
\lambda x_2 y_2 + \lambda x_1 y_2 &= 0 && \text{(iv)}\\
\lambda x_0 y_2 &= 0 && \text{(v)}\\
\lambda x_0 y_0 &= 0 && \text{(vi)}\\
\lambda x_1 y_1 &= 0 && \text{(vii)}\\
\lambda x_2 y_0 + \lambda x_0 y_1 &= 0 && \text{(viii)}\\
\lambda x_1 y_0 &= 0 \; \forall \lambda k && \text{(ix)}
\end{aligned}$$

Das equações (iii), (iv), (viii) decorre:

$\lambda x_1 y_2 = 0$

$\lambda x_0 y_1 = 0$

$\lambda x_2 y_0 = 0$

Neste caso, o ponto Q teria todas coordenas nulas. O que não pode ocorrer. Ou seja, a reta $\overline{PQ}$ não está contida em $\mathbb{T}_Q(\sigma(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2))$. Daí se ter $\dim Sec(\sigma(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2)) \leq 7$. Como $\dim \sigma(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2) = 4 = \frac{2}{3}(8-2)$ e $\sigma(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2)$ não se encontra imersa em hiperplano algum em $\mathbb{P}^8$, temos pelo corolário (4.37) que $\dim Sec(\sigma(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2)) = 7$.■

Proposição 4.40: A dimensão da variedade secante da variedade Grassmaniana $\mathbb{G}(1,5)$, é igual 13.

Demonstração:

Consideremos o ponto $P = [1:0:0:0:0:0:0:0:0:0:0:1:1:0:0]$ em $\mathbb{P}^{14}$. Vamos mostrar que nenhuma reta incidente a $\mathbb{G}(1,5)$ passando por P, está na variedade das retas secantes $S(\mathbb{G}(1,5))$. Mostrando-se assim, que $P \notin Sec(\mathbb{G}(1,5))$; isto é, $dimSec(\mathbb{G}(1,5)) \leq 13$.

Pois bem, das relações de Plucker, decorre que o ideal $I(\mathbb{G}(1,5))$ é gerado pela família $\{F_i\}_{1\leq i\leq 15}$ de polinômios a seguir, e que $\mathbb{G}(1,5) = \bigcap_{i=1}^{15} X_i$ onde:

$$\begin{aligned}
X_1 &= Z(Z_0Z_9 + Z_5Z_2 - Z_1Z_6) = Z(F_1)\\
X_2 &= Z(Z_0Z_{10} + Z_5Z_3 - Z_1Z_7) = Z(F_2)\\
X_3 &= Z(Z_0Z_{11} + Z_5Z_4 - Z_1Z_8) = Z(F_3)\\
X_4 &= Z(Z_1Z_{12} + Z_9Z_3 - Z_2Z_{10}) = Z(F_4)\\
X_5 &= Z(Z_1Z_{13} + Z_9Z_4 - Z_2Z_{11}) = Z(F_5)\\
X_6 &= Z(Z_0Z_{12} + Z_6Z_3 - Z_2Z_7) = Z(F_6)\\
X_7 &= Z(Z_0Z_{13} + Z_6Z_4 - Z_2Z_8) = Z(F_7)\\
X_8 &= Z(Z_0Z_{14} + Z_7Z_4 - Z_3Z_8) = Z(F_8)\\
X_9 &= Z(Z_1Z_{14} + Z_{10}Z_4 - Z_3Z_{11}) = Z(F_9)\\
X_{10} &= Z(Z_2Z_{14} + Z_{12}Z_4 - Z_3Z_{13}) = Z(F_{10})\\
X_{11} &= Z(Z_5Z_{12} + Z_9Z_7 - Z_6Z_{10}) = Z(F_{11})\\
X_{12} &= Z(Z_5Z_{13} + Z_9Z_8 - Z_6Z_{11}) = Z(F_{12})\\
X_{13} &= Z(Z_5Z_{14} + Z_{10}Z_8 - Z_7Z_{11}) = Z(F_{13})\\
X_{14} &= Z(Z_6Z_{14} + Z_{12}Z_8 - Z_7Z_{13}) = Z(F_{14}).\\
X_{15} &= Z(Z_9Z_{14} + Z_{12}Z_{11} - Z_{10}Z_{13}) = Z(F_{15})
\end{aligned}$$

Seja então $Q = [w_0 : w_1 : w_2 : w_3 : w_4 : w_5 : w_6 : w_7 : w_8 : w_9 : w_{10} : w_{11} : w_{12} : w_{13} : w_{14}]$ um ponto arbitrário de $\mathbb{G}(1,5)$ e $R = \lambda P + \mu Q$, $[\lambda : \mu] \in \mathbb{P}^1$, um ponto da reta $\overline{PQ}$ que liga o ponto P ao ponto Q.

Assim, $R = \lambda P + \mu Q \in \mathbb{G}(1,5)$ se, e somente se:

$$\lambda\mu w_9 = 0 \tag{1}$$
$$\lambda\mu w_{10} = 0 \tag{2}$$
$$\lambda^2 + \lambda\mu(w_0 + w_{11}) = 0 \tag{3}$$
$$\lambda\mu w_1 = 0 \tag{4}$$
$$\lambda\mu w_2 = 0 \tag{5}$$
$$\lambda^2 + \lambda\mu(w_0 + w_{12}) = 0 \tag{6}$$
$$\lambda\mu w_{13} = 0 \tag{7}$$
$$\lambda\mu w_{14} = 0 \tag{8}$$
$$\lambda\mu w_3 = 0 \tag{9}$$
$$\lambda\mu w_4 = 0 \tag{10}$$
$$\lambda\mu w_5 = 0 \tag{11}$$
$$\lambda\mu w_6 = 0 \tag{12}$$
$$\lambda\mu w_7 = 0 \tag{13}$$
$$\lambda\mu w_8 = 0 \tag{14}$$
$$\lambda^2 + \lambda\mu(w_{11} + w_{12}) = 0 \tag{15}$$

Neste caso, basta considerarmos o caso $\lambda\mu \neq 0$ pois se $\lambda = 0$, $R = P$. E, se $\mu = 0$, $R = Q$. Por outro lado,as equações (3), (6), e (15), nos fornece $w_0 = w_{11} = w_{12}$ na hipótese $\lambda\mu \neq 0$. E, neste caso,

$$Q = [w_0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : w_0 : w_0 : 0 : 0] = P.$$

contradizendo a escolha de $P \notin \mathbb{G}(1,5)$

Portanto P não pertence a nenhuma reta "secante honesta " de $\mathbb{G}(1,5)$. Provemos agora que P não pertence a nenhuma reta tangente a $\mathbb{G}(1,5)$.

Como $\mathbb{T}_Q\mathbb{G}(1,5) = \bigcap_{i=1}^{15} \mathbb{T}_Q X_i$ e $\mathbb{T}_Q X_i$ é dado por:

$$\begin{aligned}
\mathbb{T}_Q X_1 &= Z(w_0Z_9 + w_9Z_0 + w_5Z_2 + w_2Z_5 - w_1Z_6 - w_6Z_1)\\
\mathbb{T}_Q X_2 &= Z(w_0Z_{10} + w_{10}Z_0 + w_5Z_3 + w_3Z_5 - w_1Z_7 - w_7Z_1)\\
\mathbb{T}_Q X_3 &= Z(w_0Z_{11} + w_{11}Z_0 + w_5Z_4 + w_4Z_5 - w_1Z_8 - w_8Z_1)\\
\mathbb{T}_Q X_4 &= Z(w_1Z_{12} + w_{12}Z_1 + w_9Z_3 + w_3Z_9 - w_2Z_{10} - w_{10}Z_2)\\
\mathbb{T}_Q X_5 &= Z(w_1Z_{13} + w_{13}Z_1 + w_9Z_4 + w_4Z_9 - w_2Z_{11} - w_{11}Z_2)\\
\mathbb{T}_Q X_6 &= Z(w_0Z_{12} + w_{12}Z_0 + w_6Z_3 + w_3Z_6 - w_2Z_7 - w_7Z_2)\\
\mathbb{T}_Q X_7 &= Z(w_0Z_{13} + w_{13}Z_0 + w_6Z_4 + w_4Z_6 - w_2Z_8 - w_8Z_2)\\
\mathbb{T}_Q X_8 &= Z(w_0Z_{14} + w_{14}Z_0 + w_7Z_4 + w_4Z_7 - w_3Z_8 - w_8Z_3)\\
\mathbb{T}_Q X_9 &= Z(w_1Z_{14} + w_{14}Z_1 + w_{10}Z_4 + w_4Z_{10} - w_3Z_{11} - w_{11}Z_3)\\
\mathbb{T}_Q X_{10} &= Z(w_2Z_{14} + w_{14}Z_2 + w_{12}Z_4 + w_4Z_{12} - w_3Z_{13} - w_{13}Z_3)\\
\mathbb{T}_Q X_{11} &= Z(w_5Z_{12} + w_{12}Z_5 + w_9Z_7 + w_7Z_9 - w_6Z_{10} - w_{10}Z_6)\\
\mathbb{T}_Q X_{12} &= Z(w_5Z_{13} + w_{13}Z_5 + w_9Z_8 + w_8Z_9 - w_6Z_{11} - w_{11}Z_6)\\
\mathbb{T}_Q X_{13} &= Z(w_5Z_{14} + w_{14}Z_5 + w_{10}Z_8 + w_8Z_{10} - w_7Z_{11} - w_{11}Z_7)\\
\mathbb{T}_Q X_{14} &= Z(w_6Z_{14} + w_{14}Z_6 + w_{12}Z_8 + w_8Z_{12} - w_7Z_{13} - w_{13}Z_7)\\
\mathbb{T}_Q X_{15} &= Z(w_9Z_{14} + w_{14}Z_9 + w_{12}Z_{11} + w_{11}Z_{12} - w_{10}Z_{13} - w_{13}Z_{10})
\end{aligned}$$

temos que $\lambda P + \mu Q \in \mathbb{T}_Q\mathbb{G}(1,5)$ $\forall[\lambda:\mu] \in \mathbb{P}^1$ se, e somente se,

$$\lambda w_9 = 0 \tag{1}$$

$$\lambda w_{10} = 0 \tag{2}$$

$$\lambda(w_0 + w_{11}) = 0 \tag{3}$$

$$\lambda w_1 = 0 \tag{4}$$

$$\lambda w_2 = 0 \tag{5}$$

$$\lambda(w_0 + w_{12}) = 0 \tag{6}$$

$$\lambda w_{13} = 0 \tag{7}$$

$$\lambda w_{14} = 0 \tag{8}$$

$$\lambda w_3 = 0 \tag{9}$$

$$\lambda w_4 = 0 \tag{10}$$

$$
\begin{aligned}
\lambda w_5 &= 0 && (11)\\
\lambda w_6 &= 0 && (12)\\
\lambda w_7 &= 0 && (13)\\
\lambda w_8 &= 0 && (14)\\
\lambda(w_{11}+w_{12}) &= 0 && (15)
\end{aligned}
$$

Das equações $(3), (6)$ e (15) tem-se que $w_0 = w_{11} = w_{12}$. Portanto

$$Q = [w_0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : w_0 : w_0 : 0 : 0] = P$$

Como $P \notin \mathbb{G}(1,5)$, tem-se que $\lambda P + \mu Q \in \mathbb{T}_Q\mathbb{G}(1,5)$ se, e somente se, $\lambda = 0$. Ou seja, P não pertence a nenhuma reta tangente a $\mathbb{G}(1,5)$.

Portanto, $P \notin Sec(\mathbb{G}(1,5))$. Logo, $dimSec(\mathbb{G}(1,5) \leq 13$. Como $\mathbb{G}(1,5)$ é não degenerada em $\mathbb{P}^{14}$ e $dim\mathbb{G}(1,5) = \frac{2}{3}(14-2)$, tem-se, pelo corolário 4.37, que $dimSec(\mathbb{G}(1,5)) = 13$.■

BIBLIOGRAFIA

1) [ELL] - Lages Lima, E. - *Álgebra Exterior*, 9º COLÓQUIO BRASILEIRO DE MATEMÁTICA - 1970.

2) [IJ] - Robert, J. - *Generic Projections of algebraic Geometry* - 1970.

3) [IR] - Shafarevich, I.R. - *Basic Algebraic Geometry* - SPRINGER - VERLAG.

4) [JH] - Harris, J. - *"Algebraic Geometry", (*A first Course) SPRINGER - VERLAG, NY - GRAD. TEXT. IN MOTH 133.

5) [MR] - Reid, M. - *Undergraduate Algebraic Geometry* - CAMBRIDGE UNIVERSITY - PRESS.

6) [RH] - Hartshorne, R.- *Varieties of low Condimension in Projective Space* - BULL - AMER. MATH - SOC (1947).

7) [WF] - Fulton, W. - *Algebraic Curves* - W.A. BEBJAMIN - INC - NEW YORK (1996)

8) [WJ] - Fulton, W. and Hansen, J. - *A Connectedness Theorem for Projective Varieties with Applications to Intersections and Singularities of Mappings* - PRINCETON UNIVERSITY MATHEMATIES DEPARTAMENT - 1979.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
SISTEMA INTEGRADO DE PATRIMÔNIO, ADMINISTRAÇÃO E CONTRATOS

FOLHA DE ASSINATURAS

Emitido em 18/09/2025

DISSERTAÇÃO Nº 1/2025 - PPGMAT (11.01.14.53)
(Nº do Documento: 1)

(Nº do Protocolo: NÃO PROTOCOLADO)

(Assinado digitalmente em 19/09/2025 08:45)
ROSELI AGAPITO DA SILVA GUEDES
SECRETARIO(A)
2329682

Para verificar a autenticidade deste documento entre em https://sipac.ufpb.br/documentos/ informando seu número: **1**, ano: **2025**, documento (espécie): **DISSERTAÇÃO**, data de emissão: **19/09/2025** e o código de verificação: **1506e3cc3e**