UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS APLICADAS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Washington Leonardo Quirino dos Santos

Desenho Geométrico: a régua e o compasso como recurso didático na compreensão de propriedades de Polígonos Regulares

Rio Tinto – PB
2016

Washington Leonardo Quirino dos Santos

Desenho Geométrico: a régua e o compasso como recurso didático na compreensão de propriedades de Polígonos Regulares

Trabalho Monográfico apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Cristiane Fernandes de Souza

Rio Tinto – PB
2016

S237d Santos, Washington Leonardo Quirino dos.

Desenho geométrico: a régua e o compasso como recurso didático na compreensão de propriedades de polígonos regulares. / Washington Leonardo Quirino dos Santos. – Rio Tinto: [s.n.], 2016.

81 f. : il.-

Orientador (a): Profa. Dra. Cristiane Fernandes de Souza.

Monografia (Graduação) – UFPB/CCAE.

Washington Leonardo Quirino dos Santos

Desenho Geométrico: a régua e o compasso como recurso didático na compreensão de propriedades de Polígonos Regulares

Trabalho Monográfico apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador(a): Prof. Dr.Cristiane Fernandes de Souza

Aprovado em: 18/11/16

BANCA EXAMINADORA

Cristiane Fernandes de Souza
Prof.ª Dr.ª Cristiane Fernandes de Souza – UFPB/DCX

Rogéria Gaudêncio do Rêgo
Prof.ª Dr.ª Rogéria Gaudêncio do Rêgo – UFPB/DM

José Fabrício B. de Souza
Prof. Ms. José Fabrício de Lima – UFPB/DCX

Dedico este trabalho ao meu pai João Leonardo, minha mãe Dulcicleide Quirino e aos meus irmãos, por todo apoio e incentivo ao longo da minha vida acadêmica.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, fonte de toda Sabedoria, que iluminou o meu caminho durante esta caminhada.

Aos meus pais, João e Dulcicleide, que sempre estiveram me apoiando e motivando em todos os momentos de minha vida.

A minha orientadora, Cristiane Fernandes de Souza, que me orientou com grande maestria para a realização deste TCC.

Aos professores que contribuíram de forma direta ou indireta na minha formação.

A todos que direta e indiretamente fizeram parte da minha vida acadêmica.

Obrigado!

RESUMO

O presente trabalho apresenta o desenvolvimento de uma pesquisa realizada com Licenciandos do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Paraíba/UFPB/Campus IV/ Litoral Norte. O objetivo da pesquisa foi investigar e identificar as principais dificuldades dos Licenciandos da turma de Fundamentos da Geometria Euclidiana do Curso de Licenciatura em Matemática, na compreensão das propriedades dos polígonos regulares por meio da aplicação de sequências didáticas com a utilização da régua e compasso. Para investigar as principais dificuldades dos licenciandos, foram aplicadas duas sequencias didáticas que contemplavam as construções geométricas de polígonos regulares inscritos numa circunferência. Após a contemplação das sequencias didáticas, foi aplicado um questionário diagnóstico acerca das opiniões dos licenciandos, pertinente ao uso dos instrumentos de desenho. A partir do objetivo geral dessa pesquisa e por descrevermos nossa abordagem utilizada para a aprendizagem das propriedades dos polígonos regulares e investigação das possíveis dificuldades apresentadas, caracterizamos nossa pesquisa como uma investigação exploratório-descritiva. A pesquisa trata-se de um estudo de caso, pois buscou investigar as principais dificuldades de uma determinada turma da disciplina de Fundamentos da Geometria Euclidiana e analisar os dados obtidos nas Sequências didáticas detalhadamente. A partir dos dados coletados com as respostas das sequencias didáticas foi possível identificar que a turma de Fundamentos da Geometria Euclidiana do Curso de Licenciatura em Matemática demonstrou possuir pouco conhecimento matemático com relação às propriedades dos polígonos regulares (Triângulo Equilátero, Hexágono Regular, Quadrado e Octógono Regular), bem como pouca habilidade no manuseio dos instrumentos de desenho geométrico. Com os dados do questionário foi possível analisar quais as principais dificuldades apresentadas pelos licenciandos. Diante da análise das sequências didáticas e do questionário diagnóstico, as conclusões da pesquisa apontam que o uso dos instrumentos de desenho geométrico (régua, compasso e transferidor) inserido a um planejamento de atividades, desde que seja bem elaborado, pode contribuir positivamente na compreensão de conceitos e propriedades.

Palavras-chave: Geometria. Desenho Geométrico. Polígonos Regulares. Formação de Professores.

ABSTRACT

The present work presents the development of a research carried out with graduates of the Degree in Mathematics at Universidade Federal da Paraíba / UFPB / Campus IV / Litoral Norte. The aim of the research was to investigate and identify the main difficulties of the graduates of the Euclidian Geometry Fundamentals in the Degree in Mathematics, in the understanding of the regular polygons properties by application of didactic sequences with the use of a ruler and a compass. In order to investigate the main difficulties of the graduates, two didactic sequences were applied that contemplated the geometric constructions of regular polygons inscribed in a circumference. After observing the didactic sequences, a diagnostic questionnaire was applied on the opinions of the graduates, regarding the use of the drawing instruments. From the general objective of this research and by describing our approach used to learn the properties of regular polygons and investigation the possible presented difficulties, we characterize our research as an exploratory-descriptive investigation. The research is a case study, as it sought to investigate the main difficulties of a particular class of Euclidean Geometry Fundamentals and to analyze the obtained data in the didactic sequences in detail. From the data collected with the answers of the didactic sequences it was possible to identify that the Euclidean Geometry Fundamentals of the Degree in Mathematics showed little mathematical knowledge regarding the properties of regular polygons (Equilateral Triangle, Regular Hexagon, Square and Regular Octagon), as well as little ability to handle geometric drawing instruments. With the data of the questionnaire it was possible to analyze the main difficulties presented by the graduates. To the analysis of the didactic sequences and the diagnostic questionnaire, the conclusions of the research point out that the use of the geometric drawing instruments (ruler, compass and transferor) inserted in an activity planning, as long as it is well elaborated, can contribute positively to the understanding of concepts and properties.

Keywords: Geometry. Geometric Draw. Regular Polygons. Teacher Training.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 -	1º Passo Triângulo Equilátero..	30
Figura 2 -	2º Passo Triângulo Equilátero..	31
Figura 3 -	3º Passo Triângulo Equilátero..	31
Figura 4 -	4º Passo Triângulo Equilátero..	32
Figura 5 -	Mediatriz de um segmento..	33
Figura 6 -	Bissetriz de um ângulo	33
Figura 7 -	1º Passo Hexágono Regular..	35
Figura 8 -	2º Passo Hexágono Regular..	35
Figura 9 -	1º Passo Quadrado...	38
Figura 10 -	2º Passo Quadrado...	39
Figura 11 -	3º Passo Quadrado...	39
Figura 12 -	1º Passo Octógono Regular..	42
Figura 13 -	2º Passo Octógono Regular..	42
Figura 14 -	Construções do Triângulo Equilátero, Quadrado, Hexágono Regular e Octógono Regular...	46
Figura 15 -	Construção do Triângulo Equilátero do Licenciando L..............................	49

Figura 16 -	Construção do Hexágono Regular do Licenciando A.................................	52
Figura 17 -	Construção do Hexágono Regular do Licenciando L..................................	55

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 -	Quantidade de respostas (Construção do Triângulo Equilátero)...................	59
Tabela 2 -	Quantidade de respostas (Construção do Hexágono Regular)......................	59
Tabela 3 -	Quantidade de respostas (Construção do Quadrado)....................................	60
Tabela 4 -	Quantidade de respostas (Construção do Octógono Regular).......................	60

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.. 12

1.1 Apresentação do tema.. 13

1.2 Objetivos da Pesquisa.. 15

1.2.1 Objetivo Geral.. 15

1.2.2 Objetivos Específicos.. 15

1.3 Metodologia da Pesquisa.. 15

1.3.1 Caracterização da Pesquisa.. 15

1.3.2 Sujeitos da Pesquisa.. 16

1.3.3 Instrumentos de coletas dos dados.. 16

2 PRESSUPOSTOS TEÓRICOS.. 19

2.1 O Ensino de Geometria no Brasil: breve histórico.. 20

2.2 Desenho Geométrico: Régua e Compasso.. 23

2.2.1 Régua e Compasso: breve histórico.. 23

2.2.2 O Desenho Geométrico.. 25

2.3 Geometria na Formação de Professores... 27

3	**APRESENTAÇÃO E A ANÁLISE DOS DADOS**..	29
3.1	Possíveis soluções dos itens das Sequências Didáticas 1 e 2	30
3.1.1	Construções da Sequência 1 Didática 1 (Triângulo Equilátero e Hexágono Regular)...	30
3.1.2	Construções da Sequência 2 Didática 1 (Quadrado e Octógono Regular)...............	38
3.2	Relato do desenvolvimento da aplicação das Sequências Didáticas.........................	45
3.3	Descrição e Análises das Respostas dos alunos nas Sequências Didáticas...	48
3.4	Questionário Diagnóstico..	61

CONSIDERAÇÕES FINAIS... 63
REFERÊNCIAS... 65

APÊNDICES... 67
APÊNDICE A... 68
APÊNDICE B... 76
APÊNDICE C... 81

1 INTRODUÇÃO

1.1 Apresentação do tema

O ensino de Geometria no Brasil, conforme Pires, Curi e Campos (2000), teve uma influência bastante considerável do Movimento da Matemática Moderna no período de 1966 a 1975. Nesse período, os problemas relacionados aos aspectos métricos e as construções geométricas eram pouco enfatizados. Somente no período de 1976 a 1998, é que se buscou melhorar o ensino de Geometria seguindo teorias embasadas nos trabalhos dos Van Hiele e nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN).

A Geometria e o Desenho Geométrico estão intrinsecamente relacionados, pois o Desenho Geométrico é a representação das formas da Geometria. Segundo Putnoki (1988), construir depois de debater como construir, são momentos que se completam, onde construir é a própria incorporação das ideias do ato de debater como construir.

O Desenho Geométrico, por meio da utilização dos instrumentos régua e compasso, possibilita aos alunos a oportunidade de desenvolverem suas capacidades motoras e cognitivas, partindo do abstrato para a prática, e a partir disso descobrir ou aperfeiçoar novos conceitos. Também possibilita ao professor novas abordagens em suas metodologias e ainda poderá tornar suas aulas mais dinâmicas, conforme Zuin (2001).

Os motivos que nos levou a escolher esse tema de pesquisa que se trata da Geometria, especificamente o Desenho Geométrico, foram inquietações pessoais que surgiram desde a época do Ensino Fundamental e Médio até ingressar na Universidade, levando à necessidade de encontrar uma proposta de ensino que possibilitasse uma melhoria na aprendizagem das propriedades dos polígonos regulares.

Contudo, um dos primeiros motivos que nos levou a desenvolver essa pesquisa foi o fato de que desde o Ensino Básico, enquanto aluno dessa etapa, vários colegas tinham dificuldades em visualizar e identificar as figuras geométricas planas quanto aos conceitos e propriedades das mesmas, e também tinham dificuldades em construir as figuras de acordo com dados fornecidos em enunciados de questões problemas que evolviam figuras geométricas. Outro motivo que nos impulsionou a realizar esta pesquisa é o interesse pela Geometria, principalmente na parte de construções geométricas.

Antes do autor desta pesquisa ingressar na Universidade, trabalhou no Projeto Mais Educação do Governo Federal como monitor de Matemática nos 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental. Nas aulas o autor buscava sempre trabalhar com os alunos jogos ou atividades que estimulassem a visualização e o reconhecimento das formas geométricas, ao realizar indagações para os alunos, como: qual a diferença entre um quadrado e o retângulo? Qual a diferença entre o triângulo retângulo e o triangulo isósceles?

No segundo período do curso de Licenciatura em Matemática da UFPB/Campus IV no ano de 2013, ao ingressar no Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência – Pibid, o autor desta pesquisa exerceu o papel de monitor de Matemática em uma escola no município de Mamanguape/PB. Nos plantões de dúvidas, sempre que apareciam alunos para sanar as duvidas em questões de Geometria, mais precisamente Geometria Plana, os mesmos apresentavam dificuldades em visualizar e identificar as formas geométricas.

Pelo interesse nas construções geométricas com régua e compasso, pelas experiências vivenciadas no Ensino Fundamental e Médio, e na Graduação enquanto bolsista do Pibid, e com relação às dificuldades apresentadas pelos alunos no ensino básico ao identificar as propriedades geométricas presentes nas figuras, decidimos optar por analisar o potencial didático do Desenho Geométrico com o uso da régua e compasso na aprendizagem de Geometria no Ensino Superior, mais precisamente na aprendizagem de Geometria Plana na parte dos polígonos regulares e investigar as principais dificuldades com relação ao manuseio dos instrumentos geométricos e em relação as propriedades dos polígonos regulares.

Com relação ao conteúdo de Polígonos Regulares, optamos por esse conteúdo por causa da forte ligação que exerce com História da Geometria. Desde a Antiguidade as figuras planas vêm possibilitando grandes descobertas na Matemática e por muitas vezes contribuiu no cálculo de áreas e na visualização de problemas em papiros, conforme Eves (2004). Além disso, os estudos dos polígonos regulares remetem aos estudos de ponto, reta, construção de ângulos, perpendicularismo, casos de semelhança, proporção, entre outros.

Com base nessas afirmações, buscamos através desta pesquisa responder o seguinte questionamento: Quais as principais dificuldades apresentadas pelos futuros professores de Matemática em relação às propriedades dos polígonos regulares (Triângulo Equilátero, Quadrado, Hexágono Regular e Octógono Regular), a partir das construções desses polígonos com régua e compasso?

1.2 Objetivos da Pesquisa

1.2.1 Objetivo Geral

Investigar e identificar as principais dificuldades dos licenciandos da turma de Fundamentos da Geometria Euclidiana, do Curso de Licenciatura em Matemática da UFPB/Campus IV, na compreensão das propriedades dos polígonos regulares por meio da aplicação de sequências didáticas com a utilização da régua e compasso.

1.2.2 Objetivos específicos

- Elaborar uma proposta didática para estudar as propriedades dos polígonos regulares Triângulo Equilátero, Hexágono Regular, Quadrado e Octógono Regular, a partir das construções geométricas com régua e compasso;
- Aplicar sequências didáticas, com a utilização de régua e compasso, a licenciandos da turma de Fundamentos da Geometria Euclidiana do Curso de Licenciatura em Matemática da UFPB/Campus IV;
- Identificar as principais dificuldades apresentadas pelos licenciandos da turma Fundamentos da Geometria Euclidiana nas construções geométricas.

1.3 Metodologia da Pesquisa

1.3.1 Caracterização da Pesquisa

A presente pesquisa caracteriza-se como pesquisa exploratório-descritiva. É exploratória, pois visa “[...] proporcionar maior familiaridade com o problema, com vistas a torná-lo mais explícito” (GIL, 2002, p.41), é descritiva, pois se trata de um estudo que se “[...] deseja descrever ou caracterizar com detalhes uma situação, um fenômeno ou problema” (FIORENTINI; LORENZATO, 2006, p.70). Como o objetivo geral desta pesquisa é investigar as principais dificuldades apresentadas pelos licenciandos e aplicar sequências didáticas, a mesma se torna exploratória, e como iremos descrever toda a abordagem através das sequências didáticas, torna-se descritiva.

Segundo Gil (2002, p. 54), o estudo de caso “consiste no estudo profundo e exaustivo de um ou poucos objetos, de maneira que permita seu amplo e detalhado conhecimento”.

Portanto, como esta pesquisa busca investigar uma determinada turma da disciplina de Fundamentos da Geometria Euclidiana do curso de Licenciatura em Matemática da UFPB/Campus/IV do município de Rio Tinto e analisar os dados obtidos nas Sequências didáticas detalhadamente, podemos dizer que esta pesquisa se trata de estudo de caso.

Segundo Fiorentini e Lorenzato (2006), o estudo de caso busca representar a realidade de maneira mais detalhada, centrando-se na interpretação ou na análise do objeto de estudo, por isso o estudo de caso pode ter uma abordagem qualitativa. Portanto, podemos afirmar que esta pesquisa possui uma abordagem qualitativa.

Segundo Prodanov (2013), a pesquisa qualitativa tem como fonte para coleta de dados o ambiente natural e que o pesquisador é o instrumento chave para a realização da mesma, na qual, focaliza nos processos e nos significados dos dados obtidos. A abordagem qualitativa enquadra-se bem nesta pesquisa, pois tem o intuito de interpretar os acontecimentos e atribuir significados através da observação do ambiente e dos dados obtidos.

A análise dos dados obtidos desta pesquisa foi feita através das respostas dos itens contidos nas sequências didáticas, nas quais a cada item foi atribuído um grau de dificuldade do mais fácil ao mais difícil.

1.3.2 Sujeitos da Pesquisa

Os sujeitos investigados nesta pesquisa foram os alunos do terceiro período da disciplina de Fundamentos da Geometria Euclidiana do curso de Licenciatura em Matemática da UFPB/Campus IV/Rio Tinto/PB. A escolha desses alunos se deu por estarem cursando a disciplina de Fundamentos da Geometria Euclidiana cuja ementa engloba os conteúdos: Retas e Ângulos; Triângulos; Polígonos; Arcos e Cordas, Relações Métricas num Triangulo Retângulo; no Círculo e nos Polígonos Regulares; Planos. E também pelo fato de não incluir na ementa as construções geométricas dos Polígonos Regulares com a utilização dos instrumentos régua, compasso e transferidor.

1.3.3 Instrumentos de coletas dos dados

Os instrumentos de coleta dos dados utilizados nesta pesquisa foram às próprias atividades elaboradas nas sequências didáticas e um questionário diagnóstico a respeito das opiniões dos licenciandos sobre o uso dos instrumentos geométricos (régua, compasso e transferidor). As atividades são compostas por construções geométricas dos polígonos regulares com o uso da régua e compasso. No decorrer da construção foram feitas perguntas aos licenciandos referentes a algumas propriedades e conceitos de cada figura construída nas sequencias.

As sequências didáticas trabalhadas nesta pesquisa foram elaboradas com base nos livros: Geometria euclidiana plana e construções geométricas (REZENDE; QUEIROZ, 2008); Fundamentos de Matemática Elementar Geometria Plana (DOLCE; POMPEO, 1990) e o livro Desenho Geométrico: Linguagem Visual (LEONARDI; CANTELE, 1998). As sequências têm como objetivo geral proporcionar tanto a compreensão e construção dos polígonos regulares inscritos numa circunferência (Quadrado, Triângulo Equilátero, Hexágono Regular e Octógono Regular), quanto o aprendizado das propriedades, por intermédio dos instrumentos régua e compasso.

A Sequência 1 (Apêndice A) tem por objetivo construir os polígonos Triângulo Equilátero e o Hexágono Regular inscritos numa circunferência. A Sequência 2 (Apêndice B) tem por objetivo construir os polígonos Quadrado e o Octógono Regular inscritos numa circunferência e, durante as construções, explorar algumas propriedades dos mesmos.

A Sequência 1 (Apêndice A) é composta por três momentos: o primeiro momento aborda a construção da mediatriz e da bissetriz; o segundo memento aborda a construção do triangulo equilátero e o terceiro momento a construção do Hexágono Regular a partir do Triangulo Equilátero inscrito numa circunferência.

A Sequência 2 (Apêndice B) é composta por dois momentos, nos quais o primeiro momento aborda a construção do Quadrado e o segundo momento a construção do Octógono Regular a partir do Quadrado inscrito numa circunferência.

A construção do Triângulo Equilátero da Sequência 1, é composta por quatro passos, a construção do hexágono por dois. Na Sequência 2 a construção do Quadrado constitui-se por três passos e o Octógono por dois. Os passos de construção de cada polígono indicam as etapas que se deve seguir para a realização dos traçados com a utilização da régua e compasso que resulta em um polígono regular.

O Questionário Diagnóstico (Apêndice C) tem por objetivos verificar as opiniões dos licenciandos sobre a utilização dos instrumentos de desenho geométrico (régua, compasso e transferidor) e se utilizaram os instrumentos em algum momento de suas vidas antes de ingressarem na Universidade.

Na primeira pergunta do Questionário trata-se sobre a utilização dos instrumentos de desenho geométrico (régua, compasso e transferidor) antes dos Licenciandos ingressarem na universidade. Na segunda questão pergunta-se qual o nível de dificuldade que os Licenciandos tiveram com relação ao uso dos instrumentos de desenho geométrico (régua, compasso e transferidor). Na questão 3 (três) questiona-se quais as dificuldades que os Licenciandos encontraram durante as construções dos Polígonos Regulares inscritos numa circunferência. E na quarta e última pergunta, trata-se sobre as opiniões dos Licenciandos, se os mesmos consideram que as construções geométricas, com o uso da régua, compasso e transferidor ajudou na compreensão e visualização dos conceitos e propriedades dos polígonos regulares estudados nas Sequências 1 e 2.

2 PRESSUPOSTOS TEÓRICOS

2.1. O Ensino de Geometria no Brasil: breve histórico

O ensino de Geometria no Brasil no século XX, na década de 1930, teve grande influência tanto por parte da industrialização quanto pelos militares que necessitavam aprender a ler mapas, medir distâncias, entre outras. Mesmo pela necessidade de aprender Geometria, a mesma, era vista de forma muito abstrata, sem se preocupar com os aspectos didático-metodológicos, conforme expõe Pavanello (1989). Além disso, as aulas de Matemática eram ministradas separadamente, por professores diferentes, ou seja, eram divididas em três partes, a Aritmética, a Álgebra e a Geometria. Como afirma Pavanello (1989):

> Os conceitos de matemática (aritmética, álgebra, geometria etc.) são ensinados como disciplinas separadas e ministradas por professores diferentes, recebendo um tratamento puramente abstrato, sem qualquer preocupação com as aplicações práticas (PAVANELLO, 1989, p.150).

Essas divisões de conteúdos de Matemática e a não preocupação com os aspectos metodológicos, ocorreram como consequência à existência de autodidatas, engenheiros civis e militares lecionando a disciplina de Matemática, já que na época não existiam ainda instituições voltadas para a formação de professores. Somente, após a Revolução de 1930, que foram criadas instituições de ensino especializadas na formação de professores para o magistério secundário, conforme ressalta Pavanello (1989).

Referindo-se propriamente ao ensino de Geometria, décadas depois da criação das instituições de ensino especializadas na formação de professores, das leis de diretrizes e bases do ensino, o ensino de Geometria sofre um grande impasse com relação às grades curriculares das escolas, devido a "Lei de Diretrizes e Bases do Ensino de 1º e 2º Graus, a 5692/71, que facilita, por sua vez, esse procedimento ao permitir que cada professor monte seu programa de acordo com as necessidades da clientela" (PAVANELLO, 1993, p.13). Ou seja, ficava a critério do professor incluir o ensino de Geometria em seus conteúdos programáticos. Por sua vez, como decorrência desse fato, os alunos ao ingressarem no ensino médio apresentavam significativamente grandes dificuldades com relação à Geometria Plana, já que não aprenderam no ensino fundamental.

Após a Revolução de 1930 houve três períodos que marcaram a trajetória do ensino de Geometria no Brasil. Segundo Pires, Curi e Campos (2000), no período de 1955 a 1965, o ensino em Geometria era centrado na aprendizagem da nomenclatura de linhas e figuras, e na memorização das fórmulas dos cálculos de perímetros, área e volume, geralmente apresentados sem justificativas. Nesse período não eram apresentados os tipos de classes que uma figura poderia pertencer de acordo com suas características e o uso de instrumentos de construção geométrica era utilizado razoavelmente. O período de 1966 a 1975 teve influência do Movimento da Matemática Moderna. Com a influência desse movimento foi dada pouca ênfase aos aspectos métricos e as construções geométricas. Ainda nesse período, surgiram propostas de atividades experimentais feitas por alunos, que tinham como propósito explorar as figuras planas e espaciais como também a decomposição, a composição, as ampliações, as reduções e as simetrias de figuras. Por fim, o período de 1976 a 1998, ficou marcado pelo começo do ensino de Geometria nas escolas através de artigos e propostas curriculares embasadas na teoria dos Van Hiele.

No último ano do período compreendido entre 1976 a 1998, foi elaborado um documento oficial intitulado Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), referentes ao 3º e 4º ciclos com o intuito de orientar e explorar os conteúdos a serem abordados nas séries finais do Ensino Fundamental (6º ao 9º ano).

Segundo defendem os PCN (BRASIL, 1998), o ensino da Geometria favorece diversas situações-problema possíveis de serem trabalhadas, e ainda é uma área do conhecimento pela qual naturalmente os alunos tendem a se interessar. Além disso, o trabalho com as noções geométricas auxilia na aprendizagem de números e medidas, pois impulsiona o aluno a observar, notar semelhanças e diferenças, identificar padrões.

Nos PCN estão expostos os objetivos e os conteúdos conceituais e procedimentais que visam o desenvolvimento do pensamento geométrico nos 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental. É de suma importância destacar esses objetivos e procedimentos, pois os PCN apresentam abordagens pedagógicas que enfatizam a formação das capacidades intelectuais e situações-problema envolvendo o cotidiano juntamente com outras áreas do conhecimento.

Os objetivos do pensamento geométrico expostos nos PCN visam o desenvolvimento geométrico no 3º ciclo (atualmente 6º e 7º ano), como:

> * resolver situações-problema de localização e deslocamento de pontos no espaço, reconhecendo nas noções de direção e sentido, de ângulo, de paralelismo e de perpendicularismo elementos fundamentais para a constituição de sistemas de coordenadas cartesianas;
> * estabelecer relações entre figuras espaciais e suas representações planas, envolvendo a observação das figuras sob diferentes pontos de vista, construindo e interpretando suas representações;
> * resolver situações-problema que envolvam figuras geométricas planas, utilizando procedimentos de decomposição e composição, transformação, ampliação e redução (BRASIL, 1998, p. 64-65).

Para o 3º ciclo do Ensino Fundamental, na parte sobre Espaço e Forma, os PCN orientam conceitos e procedimentos a serem desenvolvidos, que são:

- Interpretação, a partir de situações-problema (leitura de plantas, croquis, mapas), da posição de pontos e de seus deslocamentos no plano, pelo estudo das representações em um sistema de coordenadas cartesianas;
- Distinção, em contextos variados, de figuras bidimensionais e tridimensionais, descrevendo algumas de suas características, estabelecendo relações entre elas e utilizando nomenclatura própria;
- Classificação de figuras tridimensionais e bidimensionais, segundo critérios diversos, como: corpos redondos e poliedros; poliedros regulares e não-regulares; prismas, pirâmides e outros poliedros; círculos, polígonos e outras figuras; número de lados dos polígonos; eixos de simetria de um polígono; paralelismo de lados, medidas de ângulos e de lados;
- Composição e decomposição de figuras planas;
- Identificação de diferentes planificações de alguns poliedros;
- Transformação de uma figura no plano por meio de reflexões, translações e rotações e identificação de medidas que permanecem invariantes nessas transformações (medidas dos lados, dos ângulos, da superfície);
- Ampliação e redução de figuras planas segundo uma razão e identificação dos elementos que não se alteram (medidas de ângulos) e dos que se modificam (medidas dos lados, do perímetro e da área);
- Quantificação e estabelecimento de relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e de pirâmides, da relação desse número com o polígono da base e identificação de algumas propriedades, que caracterizam cada um desses sólidos, em função desses números;
- Construção da noção de ângulo associada à idéia de mudança de direção e pelo seu reconhecimento em figuras planas;
- Verificação de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º. (BRASIL, 1998, p.72-73).

Os tópicos acima citados mostram o que deve ser abordado no 6º e 7º Ano do Ensino Fundamental no conteúdo de Geometria. Esses tópicos são de extrema importância para o desenvolvimento das capacidades cognitivas do aluno.

Os objetivos dos conceitos e procedimentos orientados pelos PCN visam o desenvolvimento do pensamento geométrico no 4º ciclo (atualmente 8º e 9º ano), como:

- interpretar e representar a localização e o deslocamento de uma figura no plano cartesiano;
- produzir e analisar transformações e ampliações/reduções de figuras geométricas planas, identificando seus elementos variantes e invariantes, desenvolvendo o conceito de congruência e semelhança;
- ampliar e aprofundar noções geométricas como incidência, paralelismo, perpendicularismo e ângulo para estabelecer relações, inclusive as métricas, em figuras bidimensionais e tridimensionais (BRASIL, 1998, p.81-82)

Para o 4º ciclo do Ensino Fundamental, na parte sobre Espaço e Forma os PCN orientam conceitos e procedimentos a serem desenvolvidos, que são:

- Representação e interpretação do deslocamento de um ponto num plano cartesiano por um segmento de reta orientado.
- Secções de figuras tridimensionais por um plano e análise das figuras obtidas.
- Análise em poliedros da posição relativa de duas arestas (paralelas, perpendiculares, reversas) e de duas faces (paralelas, perpendiculares).
- Representação de diferentes vistas (lateral, frontal e superior) de figuras tridimensionais e reconhecimento da figura representada por diferentes vistas.
- Divisão de segmentos em partes proporcionais e construção de retas paralelas e retas perpendiculares com régua e compasso.
- Identificação de ângulos congruentes, complementares e suplementares em feixes de retas paralelas cortadas por retas transversais.
- Estabelecimento da razão aproximada entre a medida do comprimento de uma circunferência e seu diâmetro.
- Determinação da soma dos ângulos internos de um polígono convexo qualquer.
- Verificação da validade da soma dos ângulos internos de um polígono convexo para os polígonos não-convexos.
- Resolução de situações-problema que envolvam a obtenção da mediatriz de um segmento, da bissetriz de um ângulo, de retas paralelas e perpendiculares e de alguns ângulos notáveis, fazendo uso de instrumentos como régua, compasso, esquadro e transferidor.
- Desenvolvimento do conceito de congruência de figuras planas a partir de transformações (reflexões em retas, translações, rotações e composições destas), identificando as medidas invariantes (dos lados, dos ângulos, da superfície).
- Verificar propriedades de triângulos e quadriláteros pelo reconhecimento dos casos de congruência de triângulos.
- Verificações experimentais e aplicações do teorema de Tales.
- Verificações experimentais, aplicações e demonstração do teorema de Pitágoras (BRASIL, 1998, p.88-89).

Como exposto acima, no 4º ciclo do Ensino Fundamental, os PCN mostram o que deve ser visto no ensino de Geometria, destacando todos os assuntos necessários para a aprendizagem dos conteúdos desse campo.

2.2 Desenho Geométrico: Régua e Compasso

2.2.1 Régua e Compasso: breve histórico

Segundo Zuin (2001), o Desenho Geométrico ou Construções Geométricas desde a Grécia Antiga, principalmente com Euclides em seu livro “Elementos”, trouxe grandes contribuições para a Matemática de diversos povos. Na idade Média as construções geométricas eram utilizadas pelo clero (religiosos) e por profissionais, como artesãos, mecânicos, carpinteiros, entre outros.

Na Grécia Antiga os instrumentos geométricos régua e compasso eram utilizados na maioria dos problemas que envolviam construções. Grandes filósofos como Euclides, Galileu Galilei e Arquimedes utilizavam os instrumentos de desenho para solucionar problemas de geometria, conforme Boyer (2003) e Eves (2004).

A régua e o compasso foram utilizados por muitas vezes por vários filósofos da Grécia Antiga na tentativa de solucionar problemas geométricos quase impossíveis de se chegar a um resultado concreto, problemas esses considerados clássicos por conta do alto nível de abstração, os mais conhecidos são: a trissecção de ângulos, a quadratura de círculos e a duplicação do cubo. Segundo Contador (2008), Boyer (2003) e Eves (2004), o problema da trissecção de ângulos consistia na tentativa de construir um polígono possuindo 9 (nove) lados, no qual tinha a necessidade de trisseccionar um ângulo de 60º de modo a obter um ângulo de 40º, que é exatamente o resultado da divisão de 360º por 9; a quadratura do círculo constituía-se na tentativa de obter um quadrado com mesma área de um círculo dado; e o problema da duplicação do cubo resumia-se em duplicar um cubo com volume igual 1 m^3 para 2 m^3.

Segundo Roque (2012) e Contador (2008) em relação á duplicação do cubo, existe uma lenda que se trata de uma peste que dizimou um quarto da população de Atenas. Os atenienses afligidos com o acontecimento consultaram o oráculo de Apolo, em Delos, para ver se encontrariam uma forma de acabar com a doença. O altar do oráculo tinha forma de um cubo, para que os atenienses se livrassem da peste os mesmos teriam que duplicar o formato do altar, exigência feita pelo oráculo. A peste não foi afastada, pois ao duplicar as dimensões do altar o volume havia sido multiplicado por 8 (oito) e não por 2 (dois). Em consequência dessa lenda criou-se um problema que dada a aresta de um cubo, construir apenas com régua e compasso a aresta de outro cubo tendo o seu volume duplicado com relação ao primeiro.

Segundo Roque (2012, p.161) “deve-se usar a régua e o compasso sempre que possível para simplificar a solução dos problemas de construção”. As construções com régua e compasso eram feitas não só para resolver problemas complexos, mas também para simplificar e demonstrar problemas de construção.

As construções geométricas Renascimento eram bastantes presentes nas artes, com a presença das proporções áureas nas obras de artistas como Leonardo da Vinci

> Em seus quadros as figuras se inscrevem em formas geométricas definidas. Maneira de apropriação do conhecimento científico. [...] Com êle e os demais artistas do Renascimento o desenho se impôs. Passou a ser linguagem da técnica e da arte. Lançaram as bases da técnica moderna. [...] No Renascimento o desenho ganha cidadania (ARTIGAS apud ZUIN, 2001, p.50).

No período do Renascimento Galileu Galilei construiu um compasso chamado *compasso geométrico e milimitar,* esse instrumento podia ser usado para realizar diversas operações matemáticas sem o uso de papel, pena ou ábaco. Algumas das operações seriam calcular quantias de dinheiro com juros compostos, dividir um segmento de reta em cinco partes iguais e mudar a escala de um desenho. O compasso de Galileu possuía dois braços unidos similar a de um compasso comum, mas cada braço marcado com diversos tipos de graduações. Pela eficiência que o compasso de Galileu atribuía em certas operações matemáticas, engenheiros militares o utilizavam, conforme Boyer (2003).

2.2.2 O Desenho Geométrico

Na Revolução Industrial, na década de 1760, as construções geométricas exerciam influências consideráveis no desenvolvimento do setor industrial, “o desenho passa a ser a base de todos os trabalhos mecânicos e se constitui um saber fundamental para o desenvolvimento da técnica” (ZUIN, 2001, p.52).

Como o Desenho Geométrico está presente na sociedade desde a Antiguidade, não podemos deixar de relacionar com o ensino de Geometria. Desta forma, “estudando o Desenho Geométrico, podemos desenvolver algumas habilidades, como a organização, o raciocínio lógico, a abstração e a criatividade” (LEONARDI; CANTELE, 1998, p.03), pois no momento em que se constrói uma figura geométrica é importante que se tenha organização nas etapas de construção, raciocínio lógico para acompanhar as etapas, abstração e criatividade para que possa relacionar o que está sendo construído com as propriedades existentes.

Após a promulgação da Lei 5692/71 (BRASIL, 1971), a disciplina de Desenho Geométrico tornou-se obrigatória no ensino de Educação Artística, no entanto, deixou de ser obrigatória nas grades curriculares das escolas (ZUIN, 2001). Entretanto, após a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) em 1998, o ensino das construções geométricas voltou com novas preocupações, buscando melhorias no ensino de Geometria. Como afirma Raymundo (2010):

> Nos PCN é salientada a grande importância do Desenho Geométrico no 1º e 2º ciclos do Ensino Fundamental, no qual se proporciona ao aluno condições de realizar atividades que priorizem o raciocínio, estabelecer relações, resolver situações problemas e construir conceitos geométricos. Com a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental (atuais 6º ao 9º ano), em 1998, demonstra-se novamente uma real preocupação com o ensino das construções geométricas neste nível de ensino. (RAYMUNDO, 2010, p.38)

Intrinsecamente, quando falamos sobre Desenho Geométrico, estamos nos remetendo também ao uso dos instrumentos régua e compasso, os quais desempenham uma considerável funcionalidade nas construções geométricas, e no desenvolvimento da coordenação motora.

De acordo com os PCN (BRASIL, 1998):

> [...] procedimentos de observação, representações e construções de figuras, bem como o manuseio de instrumentos de medidas que permitam aos alunos fazer conjecturas sobre algumas propriedades dessas figuras [...] Outro aspecto que merece atenção [...] é o ensino de procedimentos de construção com régua e compasso e o uso de outros instrumentos, como esquadro, transferidor, estabelecendo-se a relação entre tais procedimentos e as propriedades geométricas que neles estão presentes. (BRASIL, 1998, p.68-69)

Com relação aos instrumentos a serem utilizados nos 3º e 4º ciclos, os PCN na seção Espaço e Forma, enfatizam:

- Resolução de situações-problema que envolvam a obtenção da mediatriz de um segmento, da bissetriz de um ângulo, de retas paralelas e perpendiculares e de alguns ângulos notáveis, fazendo uso de instrumentos como régua, compasso, esquadro e transferidor.
- Divisão de segmentos em partes proporcionais e construção de retas paralelas e retas perpendiculares com régua e compasso.
- Identificação e construção das alturas, bissetrizes, medianas e mediatrizes de um triângulo utilizando régua e compasso (BRASIL, 1998, p.87-89).

Tratando-se da prática do professor de Matemática, os PCN no bloco de Espaço e Forma "pressupõe que o professor de Matemática explore situações em que sejam necessárias algumas construções geométricas com régua e compasso, como visualização e aplicação de propriedades das figuras, além da construção de outras relações" (BRASIL, 1998, p.51). Ou seja, o professor deve mostrar a utilidade dos instrumentos de desenho em sala de aula relacionando-os com as propriedades inerentes às figuras geométricas.

2.3 Geometria na Formação de Professores

No que se refere ao ensino de Geometria na formação de professores, grande parte dos mesmos apresentam dificuldades em abordar os conteúdos de Geometria por não terem adquirido o conhecimento necessário. Segundo Usiskin (apud CRESCENTI, 2005) isso ocorre pelo fato de os próprios departamentos de Matemática das instituições encurtarem seus cursos de Geometria. Ou seja, o professor em sua formação acaba não estudando o suficiente para que no futuro o mesmo possa ter segurança em lecionar. Diante disso, é "possível, portanto, que os professores, não tendo um bom conhecimento sobre Geometria, muitas vezes prefiram não ensiná-la em suas salas de aula" (CRESCENTI, 2005, p. 39).

É de extrema importância que o professor de Matemática adquira os conhecimentos em Geometria durante e após a graduação, pois "é uma área do conhecimento que reúne um vasto campo de relações, regras e coerências, despertando a curiosidade e estimulando o desenvolvimento de capacidades [...]" (CRESCENTI, 2005, p. 25). O professor que não gosta ou não teve a oportunidade de estudar Geometria acaba por optar dar ênfase ao ensino de Álgebra, dando prioridade ao ensino sistemático, privando, assim, os alunos de desenvolverem o pensamento geométrico. Conforme expõe Pavanello (1993),

> A ausência do ensino da geometria e a ênfase no da álgebra pode estar prejudicando a formação dos alunos por priva-los da possibilidade do desenvolvimento integral dos processos de pensamento necessários á resolução de problemas matemáticos (PAVANELLO, 1993, p. 16)

Segundo Atiyah (apud PAVANELLO, 1993) o ensino de Geometria deve ter a mesma atenção do ensino da Álgebra, pois as duas áreas possuem grande valor para os problemas matemáticos. Com isso, temos que o professor de Matemática deve trabalhar tanto com a Geometria quanto com a Álgebra com o mesmo peso.

Com o ensino de Geometria pode-se desenvolver o raciocínio logico-formal por abordar conceitos formais que necessitam de demonstrações. Campos (2013) destaca que,

> a demonstração envolve de modo intrínseco, a mobilização de um raciocínio logico-formal apoiado em influências lógicas (do tipo "se... então...") que evoluem na medida em que se empregam definições, propriedades e teoremas formais, obedecendo a um conjunto de regras bem determinada. Assim, na demonstração é o raciocínio dedutivo formal que prevalece (CAMPOS, 2013, p. 47).

Ou seja, a partir do momento em que se trabalha com problemas que envolvem demonstrações, paralelamente pode está desenvolvendo o raciocínio dedutivo formal.

Além do futuro professor de matemática ter a necessidade de desenvolver o raciocínio dedutivo formal, o mesmo também deve saber argumentar, pois ao surgir uma opinião, uma afirmação ou um questionamento que requerem uma justificação, é de grande importância ter a habilidade de argumentar, conforme (DUVAL apud CAMPOS, 2013).

Segundo Campos (2013), para que o futuro professor desenvolva o raciocínio argumentativo, é essencial que se crie circunstancias que favoreça nas aulas de Matemática o trabalho com atividade que envolva argumentações.

Autores como Jesus (2008) e Maziero (2011) também enfatizam a importância das demonstrações em Geometria para a formação de professores e destacam ainda a importância de trabalhar no ensino de Geometria com construções geométricas.

A Geometria no ensino exerce um papel muito importante, pois a mesma se relaciona intrinsecamente com o cotidiano, se relaciona com várias outras áreas do conhecimento e possibilita a compreensão do espaço em que vivemos PCN (BRASIL, 1998). Como expõe Crescenti (2005),

> A Geometria auxilia no desenvolvimento da pessoa, ajudando-a na resolução de problemas do dia-a-dia, na melhor visualização e aproveitamento do espaço tridimensional, melhorando a habilidade de percepção visual e auxiliando no estabelecimento de conexões entre a matemática e outras áreas do conhecimento (CRESCENTI, 2005, p. 36).

Diante disso, pode-se dizer que a Geometria é uma área da Matemática que está intrinsecamente envolvida não só com o ensino, mas também com o cotidiano das pessoas.

3 APRESENTAÇÃO E A ANÁLISE DOS DADOS

3.1 Possíveis soluções dos itens das Sequências Didáticas 1 e 2

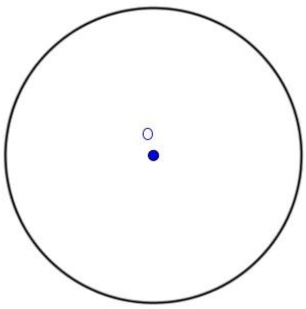
Neste subitem iremos apresentar as construções dos Polígonos Regulares (Triângulo Equilátero, Hexágono Regular, Quadrado e Octógono Regular) inscritos numa circunferência e também mostrar as possíveis soluções dos itens contidos na Sequência 1 (Apêndice A) e na Sequência 2 (Apêndice B).

3.1.1 Construções da Sequência Didática 1 (Triângulo Equilátero e Hexágono Regular)

A Sequência Didática1 tem por objetivo construir os polígonos Triangulo Equilátero e o Hexágono Regular inscritos numa circunferência. Essa sequência é composta por três momentos, nos quais o primeiro momento aborda as construções da Mediatriz de um segmento de reta e da Bissetriz de um ângulo dado, o segundo momento aborda a construção do Triângulo Equilátero, e o terceiro momento aborda a construção do Hexágono Regular a partir da construção do segundo momento.

Para a construção do Triângulo Equilátero inscrito numa circunferência devem-se seguir os passos:

Figura 1 – 1º Passo Triângulo Equilátero



Fonte: Produzido pelo autor

1º PASSO

Utilizando o compasso construa uma circunferência de centro O, com raio medindo 5 cm (Figura 1).

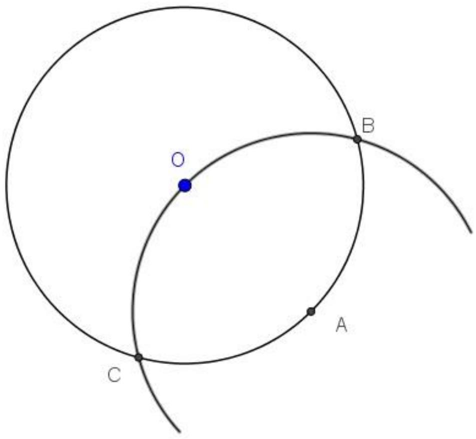
Definição: "*Circunferência* é um conjunto dos pontos de um plano cuja distância a um ponto dado desse plano é igual a uma distância (não nula) dada. O ponto dado é o centro e a distância dada é o raio da circunferência" (DOLCE; POMPEO, 1990, p. 147).

2º PASSO

Indique um ponto A na linha da circunferência, no local que desejar.

Faça uma abertura no compasso, com a medida igual à do raio da circunferência. Em seguida fixe a ponta seca do compasso no ponto A e trace uma semicircunferência passando pelo centro O e interceptando a circunferência já traçada em dois pontos.

Figura 2 – 2º Passo Triângulo Equilátero



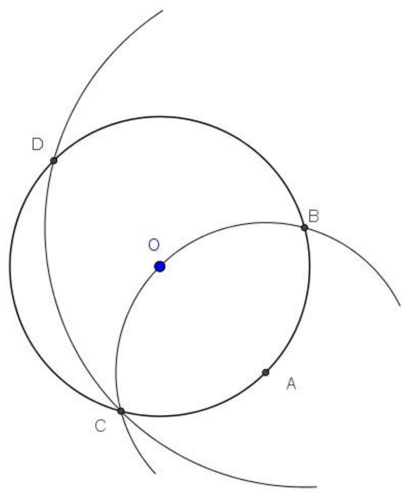
Fonte: Produzido pelo autor

Definição: "*Semicircunferência:* Sejam A e B pontos de uma circunferência de centro C. Se $\overline{AB}$ for um diâmetro, então o conjunto dos pontos A e B e dos pontos da circunferência situados num mesmo semipleno de origem $\overleftrightarrow{AB}$ é uma semicircunferência" (DOLCE; POMPEO, 1990, p. 149).

3º PASSO

Com a ponta seca do compasso fixada em B (ou C), trace um arco de circunferência com raio de mesma medida do segmento BC, interceptando a circunferência em apenas um ponto. Nomeie esse ponto de D (Figura 3).

Figura 3 – 3º Passo Triângulo Equilátero



Fonte: Produzido pelo autor

4º PASSO

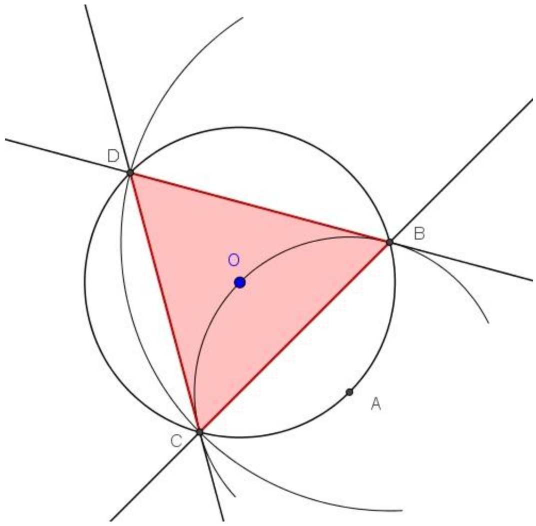
Trace os segmentos CD e BD.

A figura construída deve ser um Triângulo classificado como Equilátero (Figura 4).

Definição: "Dados três pontos A, B e C não colineares, à reunião dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ chama-se triângulo ABC" (DOLCE; POMPEO, 1990, p. 36).

Equilátero: É equilátero, pois possui três lados congruentes.

Figura 4 – 4º Passo Triângulo Equilátero



Fonte: Produzido pelo autor

Após a construção do Triângulo Equilátero as possíveis respostas corretas dos itens da Sequência Didática 1 – Polígono 1, seriam:

a) Ao traçar os segmentos CD e BD, juntamente com o segmento BC, que tipo de polígono foi construído?
De acordo com a construção realizada o polígono construído é um Triângulo, pois possuem três lados e três ângulos internos.

b) Com o auxilio da régua e transferidor, meça os lados do polígono e seus ângulos internos. Anote as medidas. Com base nas medidas obtidas, qual a classificação desse polígono? Esse polígono é regular? Justifique.
Após realizar as medições dos lados do triângulo com a régua e a medição de seus ângulos internos com o transferidor, deve resultar em medidas congruentes tanto para os lados quanto para os ângulos internos, logo com as devidas medições deve-se chegar à conclusão de que o Triângulo é Equilátero. Como o Triângulo Equilátero possui os três lados congruentes e os três ângulos internos também congruentes, podemos dizer que o mesmo é regular.

c) Podemos afirmar que esse polígono também pode ser classificado como isósceles? Justifique.
Sim. Pois, como o triangulo isósceles possui apenas dois lados congruentes podemos afirmar que o Triângulo Equilátero também pode ser classificado como isósceles por pelo ter menos dois lados congruentes.

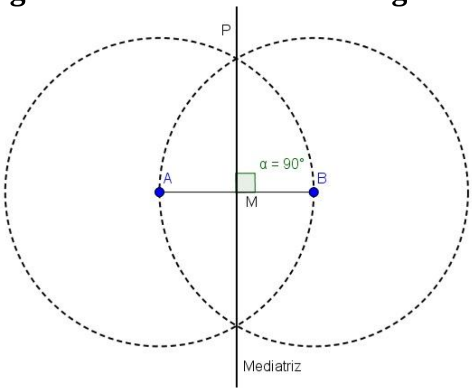
Definição: Um triângulo é "isósceles se, e somente se, tem dois lados congruentes" (DOLCE; POMPEO, 1990).

d) Trace a mediatriz relativa ao lado BC. Essa mediatriz dividiu o ângulo $C\hat{D}B$ em dois novos ângulos. Qual é a medida de cada um?

Ao traçar a mediatriz relativa ao lado BC, a mediatriz divide o ângulo $C\hat{D}B$ *em dois novos ângulos internos medindo exatamente 30º, pois cada ângulo interno do Triângulo equilátero mede 60º.*

Definição: "a mediatriz de um segmento é a reta perpendicular ao segmento e que contém seu ponto médio" (REZENDE; QUEIROZ, 2008, p. 37). Como mostra a (Figura 5).

Figura 5 – Mediatriz de um segmento



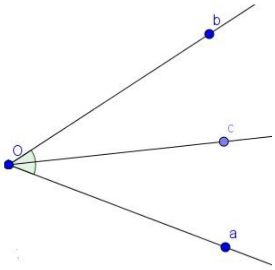
Fonte: Produzido pelo autor

e) Com base na resposta do item anterior, a mediatriz também representa qual segmento em relação ao ângulo $C\hat{D}B$? E em relação ao polígono construído? O mesmo ocorre com os outros dois ângulos $C\hat{B}D$ e $B\hat{C}D$?

Com base na resposta do item anterior a mediatriz representa bissetriz em relação ao ângulo $C\hat{D}B$ *e em ralação ao polígono construído representa a altura. O mesmo ocorre com os outros dois ângulos* $C\hat{B}D$ e $B\hat{C}D$.

Definição: "Uma semirreta *Oc* interna a um ângulo $a\hat{O}b$ é bissetriz do ângulo $a\hat{O}b$ se, e somente se, $a\hat{O}c \equiv b\hat{O}c$" (DOLCE; POMPEO, 1990, p. 25). Como mostra a (Figura 6)

Figura 6 – Bissetriz de um ângulo



Fonte: Produzido pelo autor

f) Deduza uma fórmula matemática que associe a altura h_3 do triângulo equilátero em função do seu lado l_3.

Para esta questão a resposta correta seria: aplicando o Teorema de Pitágoras, onde l_3 e $l_3/2$ seriam os catetos e hipotenusa h chegaríamos ao seguinte resultado,

$$l_3{}^2 = h^2 + \left(\frac{l_3}{2}\right)^2 \Rightarrow l_3{}^2 = h^2 + \frac{l_3{}^2}{4} \Rightarrow h^2 = l_3{}^2 - \frac{l_3{}^2}{4} \Rightarrow h^2 = \frac{3l_3{}^2}{4}$$

$$\Rightarrow h = \sqrt{\frac{3l_3{}^2}{4}} \Rightarrow h = \frac{l_3\sqrt{3}}{2}$$

g) Sabendo que o apótema *a* de um polígono é o segmento com uma extremidade no centro e a outra no ponto médio de um lado, identifique o apótema a_3 do polígono construído. Com a régua, meça o apótema a_3, o raio da circunferência *r* e a altura h_3 do polígono construído. A partir das medições, escreva as relações existentes entre: a medida do apótema a_3 em relação à medida da altura h_3 do polígono construído; e a medida do raio *r* da circunferência em relação à medida da altura h_3 do polígono construído.

Para responder esse quesito, deve-se medir o apótema, o raio e a altura. Após as medições, chegar à conclusão de que a medida do apótema é igual a um terço da medida da altura e o raio é igual a dois terços da medida da altura.

h) Com base nas respostas do item (f) e (g), escreva as fórmulas matemáticas que expressam: a medida do apótema a_3 em função da altura h_3 do triângulo equilátero; e a medida do raio *r* em função da altura h_3 do triângulo equilátero.

Para responder esse quesito devem-se tomar como base os itens (f) e (g) e chegar aos seguintes resultados:

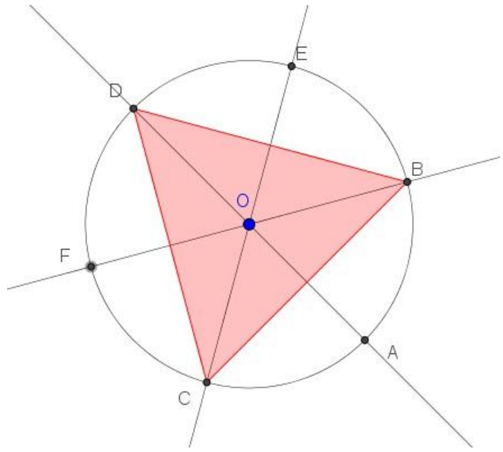
$$a = \frac{1}{3}h \ \ e \ \ r = \frac{2}{3}h.$$

Para a construção do Hexágono Regular inscrito numa circunferência devem-se seguir os passos:

1º PASSO

Traçar as bissetrizes dos ângulos $B\hat{C}D$ e $C\hat{D}B$, interceptando a circunferência em dois pontos: E e F (Figura 7).

Figura 7 – 1º Passo Hexágono Regular



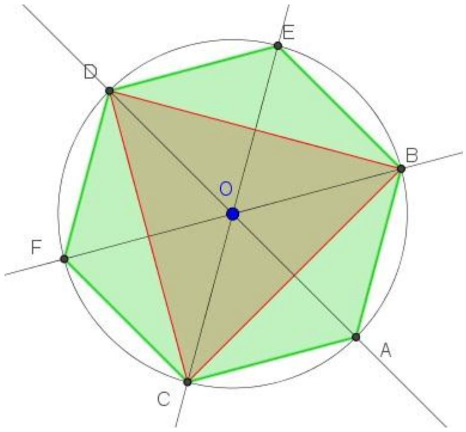
Fonte: Produzido pelo autor

2º PASSO

Trace os segmentos AB, BE, ED, DF, FC e CA.

A figura construída é um Hexágono Regular (figura geométrica que possui 6 (seis) lados e 6 (seis) ângulos, todos os lados são côngruos e os ângulos internos possuem a mesma medida) (Figura 8).

Figura 8 – 2º Passo Hexágono Regular



Fonte: Produzido pelo autor

Definição: "Um polígono convexo é regular se, e somente se, tem todos os seus lados e todos os seus ângulos internos congruentes" (DOLCE; POMPEO, 1990, p. 267).

Definição: "Um polígono simples é um polígono convexo se, e somente se, a reta determinada por dois vértices consecutivos quaisquer deixa todos os demais (n - 2) vértices num mesmo semipleno dos dois que ela determina" (DOLCE; POMPEO, 1990, p. 134).

Após a construção do Hexágono Regular as possíveis respostas corretas dos itens da Sequência Didática 1 – Polígono 2 seriam:

a) Ao traçar os segmentos de reta AB, BE, ED, DF, FC e CA, que polígono foi construído?
Ao traçar os segmentos de reta AB, BE, ED, DF, FC e CA o polígono construído foi o Hexágono.

b) Com o auxilio da régua e transferidor, meça os lados do polígono e seus ângulos internos. Anote as medidas. Com base nas medidas obtidas, qual a classificação desse polígono? Esse polígono é regular? Justifique.
Para responder essa pergunta deve-se utilizar a régua e o transferidor para medir os ângulos internos e os lados da figura construída, após as medições deve-se chegar à conclusão de que a figura é um Hexágono Regular.

c) As bissetrizes AD, CE e BF, dos ângulos internos do triângulo equilátero, também representam as bissetrizes dos ângulos internos do polígono construído? Que procedimento você fez para dar a sua resposta?
Sim, pois como a construção do Hexágono partiu do traçado das bissetrizes dos ângulos internos do Triangulo equilátero inscrito na circunferência, consequentemente as bissetrizes dos ângulos internos do triângulo também serão bissetrizes dos ângulos internos do Hexágono.

d) Ao traçar os segmentos AD, CE e BF (bissetrizes dos ângulos internos do triângulo equilátero), eles decompõem o polígono construído em quantas partes? Qual é o polígono que representa cada uma dessas partes?
Ao traçar os segmentos AD, CE e BF (bissetrizes dos ângulos internos do triângulo equilátero) o polígono construído foi decomposto por seis triângulos equiláteros.

e) Analise os segmentos OA, OB, OC, OD, OE e OF em relação à circunferência. Eles representam a medida de qual elemento da circunferência?
Após analisar os segmentos OA, OB, OC, OD, OE e OF de extremidades no centro do polígono construído e nos vértices do Hexágono Regular, deve-se chegar à conclusão de que esses segmentos representam a medida do raio da circunferência.

f) Agora, compare essas medidas (do item e) com as medidas do lado do polígono construído. A qual conclusão você chegou?

Depois de fazer as comparações, a resposta correta seria que a medida do raio da circunferência é igual à medida do lado do Hexágono Regular.

g) Os ângulos $C\hat{O}A$, $A\hat{O}B$, $B\hat{O}E$, $E\hat{O}D$, $D\hat{O}F$ e $F\hat{O}C$ são congruentes? Que procedimento você fez para dar a sua resposta?

Para responder este quesito deve-se utilizar o transferidor para chegar à conclusão de que os ângulos centrais são congruentes.

h) Com base na resposta do item anterior, qual expressão que determina a medida de cada um dos ângulos centrais do polígono construído?

Para determinar uma expressão para a medida dos ângulos centrais, é necessário lembrar que a circunferência possui uma volta de 360º e que o Hexágono Regular é decomposto por seis triângulos equiláteros, a partir disso, dividindo a volta completa pelos seis triângulos resultará em ângulos com vértice no centro da circunferência iguais a 60º.

Expressão:

Seja a_c o ângulo central do Hexágono Regular inscrito numa circunferência e n o número de vezes em que o ângulo central é divido. Logo, a expressão para esse item seria:

$$a_c = \frac{360°}{n}$$

i) Sabendo que o apótema *a* de um polígono é o segmento com uma extremidade no centro e a outra no ponto médio de um lado, identifique o apótema a_6 do polígono construído. Escreva uma fórmula matemática que expressa a medida do apótema a_6 em função da medida do lado l_6 do polígono construído.

Para se chegar a uma expressão, é necessário identificar o apótema a_6 e os lados do polígono, perceber que o apótema a_6 é a altura de cada triângulo equilátero que compõe o Hexágono e aplicar o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo decomposto pelo apótema a_6 em um dos triângulos equiláteros do polígono construído, no qual, os catetos são o apótema a_6 e a metade do lado do hexágono e a hipotenusa é o raio da circunferência (lado do triângulo equilátero).

Expressão:

Aplicando o Teorema de Pitágoras, onde a_6 e $l_6/2$ seriam os catetos e l_6 hipotenusa chegaríamos ao seguinte resultado,

$$l_6{}^2 = a_6{}^2 + \left(\frac{l_6}{2}\right)^2$$

$$l_6{}^2 = a_6{}^2 + \frac{l_6{}^2}{4}$$

$$a_6{}^2 = l_6{}^2 - \frac{l_6{}^2}{4}$$

$$a_6{}^2 = \frac{3l_6{}^2}{4}$$

$$a_6 = \sqrt{\frac{3l_6{}^2}{4}}$$

$$a_6 = \frac{l_6\sqrt{3}}{2}$$

3.1.2 Construções da Sequência Didática 2 (Quadrado e Octógono Regular)

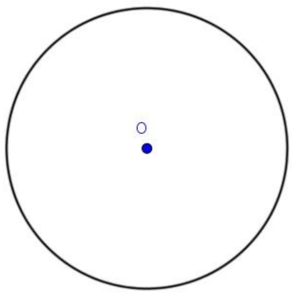
A Sequência Didática 2 tem por objetivo construir os polígonos: Quadrado e o Octógono Regular inscritos numa circunferência, a mesma é composta por dois momentos, nos quais o primeiro momento aborda as construção do Quadrado e o segundo memento aborda a construção do Octógono Regular a partir da construção do primeiro momento desta sequência.

Para a construção do Quadrado inscrito numa circunferência devem-se seguir os passos:

1º PASSO

Utilizando o compasso construa uma circunferência de centro em O, com raio medindo 5 cm (Figura 9).

Figura 9 – 1º Passo Quadrado



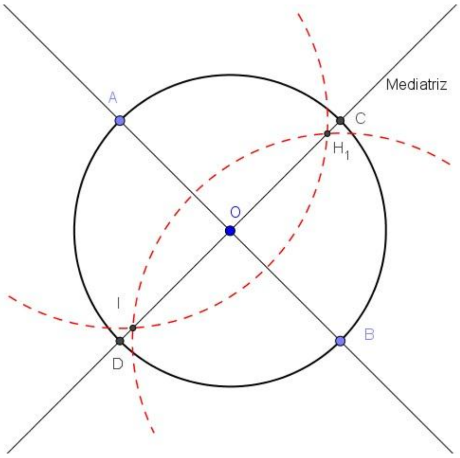
Fonte: Produzido pelo autor

2º PASSO

Trace um diâmetro, na posição que preferir, nomeando-o de AB.

Trace a mediatriz desse diâmetro interceptando a circunferência em dois pontos. Indique esses dois pontos por C e D (Figura 10).

Figura 10 – 2º Passo Quadrado

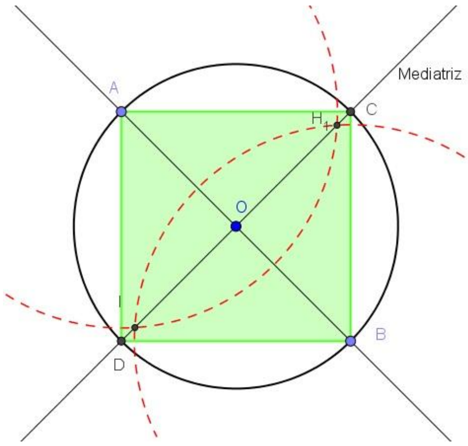


Fonte: Produzido pelo autor

3º PASSO

Trace os segmentos de reta AC, CB, BD e DA.

Figura 11 – 3º Passo Quadrado



Fonte: Produzido pelo autor

A figura construída é um quadrilátero classificado como Quadrado (Figura 11)

Definição: “Sejam A, B, C e D quatro pontos de um mesmo plano, todos distintos e três não colineares. Se os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$ interceptam-se apenas nas extremidades, a reunião desses quatro segmentos é um quadrilátero” (DOLCE; POMPEU, 1990, p. 99)

Definição: “Um quadrilátero plano convexo é um quadrado se, e somente se, possui os quatro ângulos congruentes e os quatro lados congruentes” (DOLCE; POMPEU, 1990, p. 101)

Após a construção do Quadrado as possíveis respostas corretas dos itens da Sequência Didática 2 – Polígono 1 seriam:

a) Ao traçar os segmentos AC, CB, BD e DA, que tipo de polígono foi construído?
Ao traçar os segmentos AC, CB, BD e DA foi construído um quadrilátero, pois possui quatro lados.
b) Com o auxilio da régua e transferidor, meça os lados do polígono e seus ângulos internos. Anote as medidas. Com base nas medidas obtidas, qual a classificação desse polígono?
Após realizar as medições dos lados do triângulo com a régua e a medição de seus ângulos internos com o transferidor, deve resultar em medidas congruentes tanto para os lados quanto para os ângulos internos, logo com as devidas medições deve-se chegar à conclusão de que o Triângulo é Equilátero.

c) Podemos afirmar que esse polígono também pode ser classificado como retângulo? E como losango? Justifique.
A justificativa correta para este item seria: o quadrado pode ser classificado como um retângulo pelo fato de possuir quatro ângulos internos congruentes medindo 90º.
Definição: *"Um quadrilátero plano convexo é um retângulo se, e somente se, possui os quatro ângulos congruentes" (DOLCE; POMPEU, 1990, p. 101).*
Definição: *"Um quadrilátero plano convexo é um losango se, e somente se, possui os quatro lados congruentes" (DOLCE; POMPEU, 1990, p. 101).*

d) Observando os segmentos de reta AB e CD, eles representam qual elemento geométrico em relação ao polígono? E em relação à circunferência, eles representam qual elemento geométrico?
A resposta correta seria: com relação ao quadrado representam as diagonais, e em relação à circunferência representam os diâmetros.

e) Indique por M o ponto de intersecção dos segmentos de reta AB e CD. Com o auxílio da régua, meça os segmentos AM e MB, CM e MD, e anote essas medidas. Observando as medidas encontradas, o que M representa em relação aos segmentos AB e CD?
Ao fazer as medições dos segmentos AM e MB, CM e MD, deve-se concluir que M representa o ponto médio dos segmentos de reta AB e CD, pois AM e MB, CM e MD possuem a mesma medida.

f) Utilizando o transferidor, qual é a medida dos ângulos formados pela intersecção dos segmentos de reta AB e CD?

Após utilizar o transferidor, deve-se chegar a conclusão de que os ângulos formados pela intersecção medem 90º, pois o segmento CD é a mediatriz do segmento AB.

g) Os segmentos de reta AB e CD dividem o polígono construído em quatro triângulos. Qual é a classificação desses triângulos? Justifique.

Para responder este quesito é necessário que se identifique as diagonais do Quadrado construído e analisar que a intersecção das diagonais formam ângulos de 90º no centro do polígono, ou seja, formam quatro ângulos retos. Dessa forma, os quatro triângulos são classificados como triângulo retângulo.

Definição: *Um triângulo é retângulo "se, e somente se, tem um ângulo reto"* (DOLCE; POMPEO, 1990, p. 38).

h) Escreva uma fórmula matemática que expresse a medida do lado l_4 do polígono construído em função do raio *r* da circunferência.

Para expressar a fórmula da medida do lado l_4 em função do raio r, é preciso observar que o raio r corresponde à metade das diagonais do Quadrado e que os lados do Quadrado correspondem à hipotenusa de cada triângulo retângulo formado pela intersecção das diagonais, a partir disso, sendo l_4 os catetos e d = 2r a hipotenusa, aplicando Teorema de Pitágoras teremos a seguinte relação:

$$d^2 = {l_4}^2 + {l_4}^2$$

$$(2r)^2 = {l_4}^2 + {l_4}^2$$

$$4r^2 = {l_4}^2 + {l_4}^2$$

$$4r^2 = 2{l_4}^2 \Longrightarrow \frac{4r^2}{2} = \frac{{l_4}^2}{2}$$

$$2r^2 = {l_4}^2 \Longrightarrow \sqrt{2r^2} = \sqrt{{l_4}^2}$$

$$l_4 = r\sqrt{2}$$

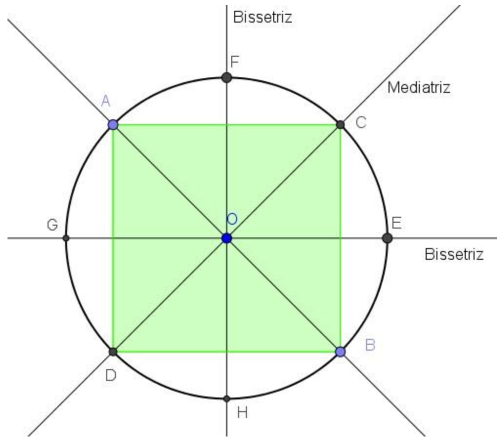
Para a construção do Octógono Regular inscrito numa circunferência devem-se seguir os passos:

1º PASSO

Utilizando a régua e o compasso, trace as bissetrizes dos ângulos $A\hat{O}C$, $B\hat{O}C$, $B\hat{O}D$ e $A\hat{O}D$, interceptando a circunferência em quatro pontos.

Indique as intersecções dessas bissetrizes com a circunferência por E, F G e H (o ponto E ficará entre os pontos B e C, o ponto F entre os pontos C e A, o ponto G entre os pontos A e D e o ponto H entre o ponto D e B) (Figura 12).

Figura 12 – 1º Passo Octógono Regular



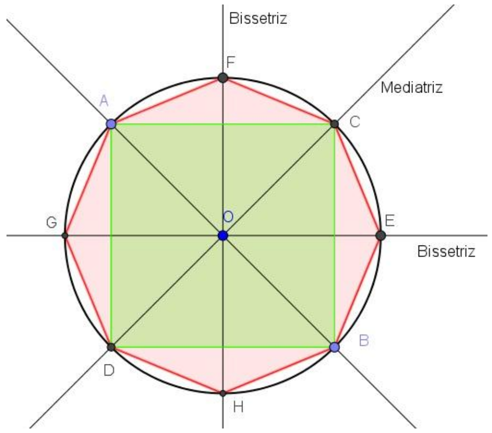
Fonte: Produzido pelo autor

2º PASSO

Trace os segmentos de reta AF, FC, CE, EB, BH, HD, DG e GA.

A figura construída é um Octógono Regular (figura geométrica que possui 8 (oito) lados e 8 (oito) ângulos, todos os lados são côngruos e os ângulos internos possuem a mesma medida) (Figura 13).

Figura 13 – 2º Passo Octógono Regular



Fonte: Produzido pelo autor

Definição: "Um polígono convexo é regular se, e somente se, tem todos os seus lados e todos os seus ângulos internos congruentes" (DOLCE; POMPEO, 1990, p. 267).

Após a construção do Octógono Regular as possíveis respostas corretas dos itens da Sequência Didática 2 – Polígono 2 seriam:

a) Ao traçar os segmentos AF, FC, CE, EB, BH, HD, DG e GA, qual polígono foi construído? Esse polígono é regular? Justifique.

Após traçar os segmentos AF, FC, CE, EB, BH, HD, DG e GA, medir os mesmos e medir os ângulos internos, deve-se chegar à conclusão de que o polígono construído foi o Octógono. Para se chegar à conclusão de que Octógono é regular, as medições dos lados devem ser congruentes e as medições dos ângulos também devem ser congruentes.

b) Os segmentos de reta AB, CD, EG e FH decompõem o polígono em quantos triângulos? Qual é a classificação desses triângulos? Justifique.

Os segmentos de reta AB, CD, EG e FH decompõem o polígono em oito triângulos isósceles, pois ao realizar as medições dos lados dos triângulos com a régua e dos ângulos internos com o transferidor deve-se concluir que cada triângulo possui apenas dois lados congruentes e apenas dois ângulos internos congruentes.

c) A intersecção dos segmentos de reta AB, CD, EG e FH determinaram quantos ângulos? Qual é a medida de cada um desses ângulos? Explique como você calculou essa medida.

A intersecção dos segmentos de reta AB com CD formam 4 (quatro) ângulos e a intersecção dos segmentos de reta EG com FH também formam 4 (quatro) ângulos, utilizando o transferidor para medir os ângulos formados entre as intersecções dos segmentos de reta AB com CD e EG com FH, deve-se chegar a conclusão de que os ângulos medem 90º.

d) Qual é a medida de cada ângulo interno $(A\hat{F}C, F\hat{C}E, C\hat{E}B, E\hat{B}H, B\hat{H}D, H\hat{D}G, D\hat{G}A, G\hat{A}F)$ do polígono construído? Explique que cálculos matemáticos você realizou para obter essas medidas (não é permitido utilizar o transferidor para realizar a medição desses ângulos).

Primeiramente para responder esse item deve-se calcular a mediada dos ângulos centrais (a_c) *do Octógono Regular, nos quais, correspondem a um ângulo interno de cada triângulo que compõem o polígono, logo para obter a medida dos ângulos centrais seria deduzir que a circunferência possui uma volta de 360º e observar que o Octógono Regular possui oito lados dividindo a circunferência em oito partes iguais, daí basta dividir 360º por 8 resultando em 45º. Após calcular a medida dos ângulos centrais devem-se calcular os ângulos da base de um dos triângulos isósceles que compõe o Octógono Regular usando o fato de que a soma dos ângulos internos do triângulo é igual a 180º, como um dos ângulos internos mede 45º então os* *ângulos adjacentes à base medem 67,5º. Como os ângulos internos do polígono são determinados pela junção dos ângulos internos adjacentes à base dos triângulos que o compõe, basta multiplicá-los por dois, e assim, determinaria cada ângulo interno do octógono, que resultaria em 135º.*

1º forma de cálcular:

Como o Octógono está inscrito numa circunferência e o mesmo é decomposto por 8 (oito) triângulos isósceles, para calcular a medida dos ângulos centrais basta deduzir que a circunferência possui uma volta de 360º e dividir 360º por 8, ou seja,

$$a_c = \frac{360°}{8} = 45°$$

Sabendo que no triângulo isósceles os ângulos de sua base possuem a mesma medida, então, com a_c *correspondendo a um dos ângulos internos de cada triângulo isósceles e* α *correspondendo aos ângulos internos adjacentes à base do mesmo, utilizando a propriedade de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º, temos,*

$$45° + \alpha + \alpha = 180°$$

$$45° + 2\alpha = 180°$$

$$2\alpha = 180° - 45°$$

$$2\alpha = 135°$$

$$\alpha = \frac{135º}{2} = 67,5$$

Multiplicando por α *por 2 temos,* $\alpha = 135º$

Outra forma de calcular os ângulos internos seria utilizando a fórmula da soma dos ângulos internos de um polígono: $S = (n-2)180°$*, no qual n é o numero total de lados e após calcular a soma dos ângulos internos, basta dividir o resultado por 8, já que o polígono é um Octógono.*

2º forma de cálcular:

Temos que, n= 8, logo,

$$S = (8-2) \times 180°$$

$$S = 6 \ \times 180°$$

$$S = 1080°$$

Dividindo 1080º por 8 resultará em 135º.

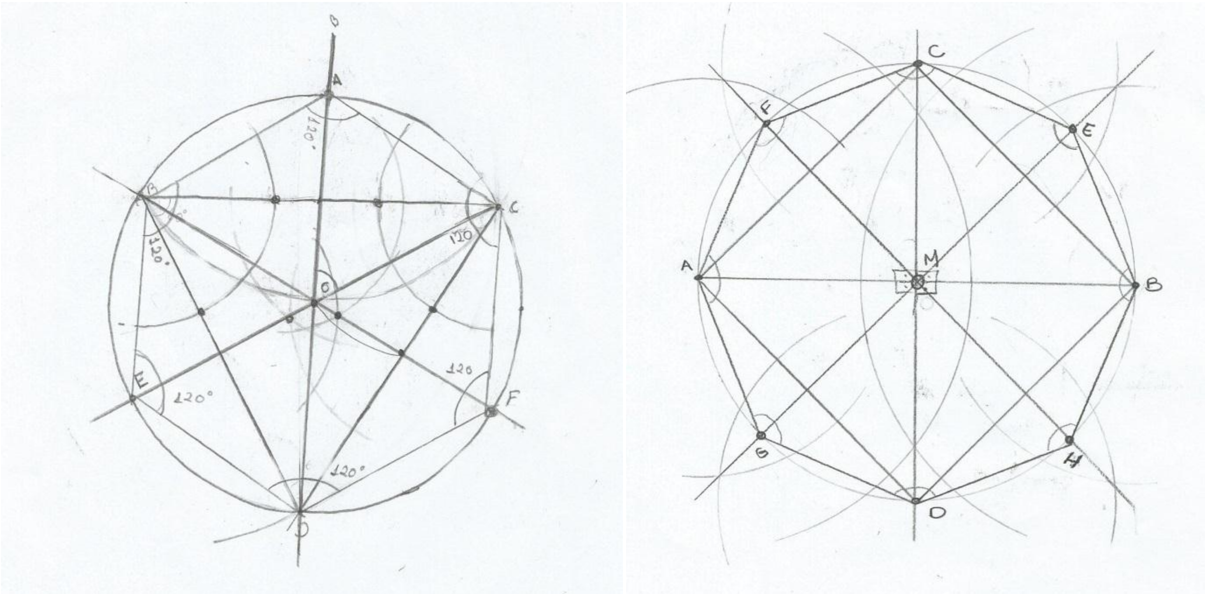
3.2 Relato do desenvolvimento da aplicação das Sequências Didáticas

Desenvolvemos duas sequências didáticas que foram aplicadas ao longo de seis aulas nos dias 13/10, 17/10 e 20/10, no turno da noite, na cadeira de Fundamentos da Geometria Euclidiana, terceiro período do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Paraíba/UFPB/Campus IV. Nesta disciplina estavam matriculados 23 Licenciandos.

No dia 13/10/2016, faltaram 6 alunos do total de 23 e alguns dos alunos que compareceram chegaram atrasados em razão dos ônibus escolares. No primeiro momento da Sequência Didática 1 (Apêndice A), realizamos a construção da Mediatriz de um segmento e a Bissetriz de um ângulo, juntamente com os licenciandos, utilizando os instrumentos de desenho régua, compasso e transferidor, para que os licenciandos utilizassem tanto os conceitos quanto a construção da Mediatriz e da Bissetriz durante as construções dos polígonos regulares: Triângulo Equilátero, Hexágono Regular, Quadrado e Octógono Regular, inscritos numa circunferência. As construções da Mediatriz e da Bissetriz foram feitas pelo autor desta pesquisa no quadro e os licenciandos realizaram as construções das mesmas em uma folha A4 de cor branca. A partir das construções realizadas mostramos a definição da Mediatriz de um segmento de reta e da Bissetriz de um ângulo.

No segundo momento, os licenciandos construíram o primeiro polígono, o Triângulo Equilátero inscrito numa circunferência, seguindo as instruções de construção contidas no material distribuído a cada licenciando. Durante a construção notamos que a maioria apresentou dificuldades em utilizar o compasso, mas conseguiram traçar os arcos e as circunferências. Outro fato que foi bastante notório foi que a maioria dos licenciandos não sabia medir ângulos com o transferidor, nem ao menos conheciam esse instrumento, mesmo que tenham visto a construção de um ângulo e de sua Bissetriz no primeiro momento da Sequência Didática 1. Em virtude desse fato, foi necessário abordar mais uma vez no quadro como medir ângulos com o transferidor para que os licenciandos pudessem avançar as etapas da construção do triangulo equilátero. Tratando-se da régua, todos souberam utiliza-la. A Figura 14 mostra algumas construções feitas pelos licenciandos.

Figura 14 – Construções do Triângulo Equilátero, Quadrado, Hexágono Regular e Octógono Regular.



Fonte: Produção dos Licenciandos C e P na Sequência 1 e Sequência 2

O terceiro momento da Sequência Didática 1 não foi possível concretizar no dia 13/10, pois alguns licenciandos chegaram atrasados por causa dos ônibus escolares que comumente chegam à universidade depois do inicio das aulas; e o outro fator foi por não saberem medir os ângulos utilizando o transferidor a maioria gastou muito tempo para medir os ângulos internos do triangulo equilátero. Ainda, além desses casos, o que interferiu no tempo de conclusão das construções foi à demora em responder os itens contidos nos passos de construção, ou seja, não conseguiam interpretar os itens de forma mais rápida.

No dia 17/10/2016, foi dada a continuação da Sequência Didática 1 referente ao terceiro momento. Nesse dia participaram 17 Licenciandos. Nesse momento foi realizada a construção do polígono regular Hexágono a partir do Triângulo Equilátero. Durante a construção do Hexágono foi notado que ainda existiam licenciandos com dificuldades em medir ângulos utilizando o transferidor e por várias vezes foi necessário explicar como se mede um ângulo com o transferidor. Como a construção do hexágono tinha que ser realizada a partir das bissetrizes dos ângulos internos do Triângulo Equilátero, foi necessário revisar os procedimentos de construção de uma Bissetriz, em razão de alguns licenciandos não lembrarem dos procedimentos.

No dia 20/10/2016, foram realizadas as construções do Quadrado e do Octógono Regular, referentes à Sequência Didática 2. Nesse dia estavam presentes 15 licenciandos. No primeiro momento foi construído o Quadrado. Os licenciandos apresentaram um pouco mais de habilidade para desenhar esse polígono, pois já possuíam um pouco de prática no manuseio dos instrumentos de desenho, devido a aplicação da Sequência Didática 1. Alguns alunos reclamaram da atividade por achar muito difícil, mas também alguns alunos relataram que a atividade foi muito interessante. No momento da construção do Quadrado, um licenciando vibrou por ter conseguido traçar a circunferência com o compasso sem tirar o mesmo da folha.

No primeiro momento da Sequência Didática 2 existe um item em que relaciona as diagonais do quadrado com o diâmetro da circunferência em que o quadrado esta inscrito, neste item muitos dos licenciandos não sabiam responder a qual segmento as diagonais representam em relação a circunferência, em razão de não saber ou lembrar o que é um diâmetro. Também no primeiro momento da Sequência Didática 2 existe outro item em que se pergunta qual a classificação do polígono construído. Nesse item um licenciando nos perguntou se era um quadrado ou retângulo, indagamos o seguinte – o que você acha? O licenciando pensou bastante e relatou: "*É um retângulo perfeito*". Outro licenciando ao terminar a construção do quadrado relatou que se colocasse um dos vértices para baixo o mesmo não conseguiria visualizar um quadrado e ainda não saberia dizer que outro tipo de figura seria.

No segundo momento Sequência Didática 2 foi construído o Octógono Regular a partir da construção das Bissetrizes dos ângulos centrais do Quadrado, formados pelo encontro das diagonais do mesmo. Na construção do Octógono Regular, alguns dos licenciandos não conseguiram construir corretamente o polígono por não seguirem adequadamente os passos de construção e também por não lembrarem como construir a bissetriz de um ângulo. Devido a este fato, foi necessário explicar mais uma vez como construir a bissetriz de um ângulo utilizando régua e compasso. Como os licenciandos já possuíam um pouco mais de prática, pelo que foi observado na construção do Octógono Regular inscrito na circunferência, eles sentiram mais dificuldades de interpretar os itens contidos nos passos da construção.

No que se diz respeito aos fatos ocorridos durante as construções dos polígonos regulares tanto na Sequência Didática 1 quanto na Sequência Didática 2, as maiores dificuldades apresentadas pelos licenciandos foi em aprender a manusear o compasso e o transferidor e, alguns deles, não sabiam classificar os polígonos construídos mesmo medindo os lados e os ângulos utilizando os instrumentos de desenho. Muitos dos licenciandos sentiram dificuldades em relacionar os elementos geométricos contidos nas próprias figuras com os elementos geométricos da circunferência.

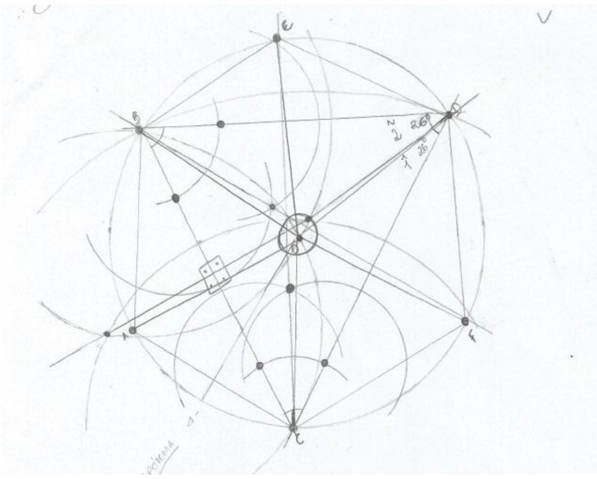
3.3 Descrição e Análises das Respostas dos alunos nas Sequências Didáticas

Antes da descrição e análises das respostas dos itens das Sequências Didáticas, é importante destacarmos que as construções com instrumentos geométricos podem produzir erros, mesmo que bem feitas, devido às imprecisões dos próprios instrumentos, portanto, consideramos certas as construções que apresentaram o menor índice de erro possível.

Na Sequência Didática 1 participaram 17 (dezessete) licenciandos. Tratando-se do item (a) do Polígono 1 (Triângulo Equilátero), que se refere a qual polígono foi construído após seguir os passos de construção, 16 (dezesseis) licenciandos acertaram e apenas 1 (um) errou. Dos 16 que acertaram, 8 (oito) responderam que o polígono construído era um "*triangulo equilátero*": 7 (sete) responderam que era um "*triângulo*" e 1 (um) respondeu "*triângulo isósceles*"; 1 (um) licenciando errou e 1 (um) respondeu apenas "*isósceles*".

No item (b) pergunta-se qual a classificação do polígono e se o mesmo é regular. Para que o licenciando respondesse este item o mesmo deveria utilizar a régua e o transferidor para analisar as medidas. A resposta correta para este item seria: o polígono é um triangulo equilátero e é regular, pois possui lados de medidas iguais e ângulos internos congruentes. Nesta questão, 9 (nove) licenciandos acertaram e 8 (oito) erraram. Os licenciandos que não classificaram o triângulo responderam: Licenciando O: "*Este polígono é regular, pois os seus lados correspondem a 9 cm e seus ângulos são iguais a 60º*"; Licenciando H: "*Sim. É regular, pois possuem lados e ângulos iguais*"; o Licenciando P não classificou o polígono e afirmou que era regular, porém na justificativa afirmou: "*Porque a soma dos ângulos é igual a 180º*"; o Licenciando L mediu os ângulos e todas as medidas deram diferentes, com isso, respondeu: "*Triângulo com todas as medidas e ângulos distintos*". Na Figura 15 nota-se o motivo desta resposta.

Figura 15 – Construção do Triângulo Equilátero do Licenciando L



Fonte: Produção do Licenciando L na Sequência 1

Podemos notar na Figura 15, que os traços realizados durante a construção não estão uniformes, ou seja, os polígonos inscritos na circunferência não estão com os lados possuindo a mesma medida.

No item (c) pergunta-se se o triangulo equilátero também pode ser classificado como isósceles. A resposta correta para este item seria: sim, com a justificativa de que o triângulo equilátero também possui dois lados congruentes e os ângulos pertencentes a uma das bases também são congruentes. Neste item, 9 (nove) licenciandos acertaram; 7 (sete) erraram e 1(um) não respondeu. Um dos que acertaram respondeu "*Sim*", mas não justificou porque o triangulo equilátero também pode ser classificado como isósceles. Dos 7 que erraram, 5 deram as seguintes respostas: "*Não, pois para ser isósceles ele teria apenas dois ângulos de sua base iguais*", ou seja, o Licenciando C quis afirmar que um triangulo só pode ser isósceles se, e somente se, o terceiro ângulo for distinto dos ângulos pertencentes a uma das bases; Licenciando Q respondeu: "*Não pois isósceles tem que ter apenas dois ângulos iguais na sua base. E a figura tem 3 ângulos, logo não pode ser isósceles*"; Licenciando L respondeu "*No meu caso não. Pois para ser caracterizado isósceles teria que ter dois lados iguais.(minhas medidas foram todas distintas)"*; O Licenciando L respondeu dessa forma devido a sua construção que resultou em um polígono irregular; Licenciando F respondeu: "*Não, pois todos os ângulos mede 60º e o triangulo isósceles tem apenas dois ângulos iguais*"; Licenciando D respondeu: *"Sim, pois a medida de seus ângulos adjacentes são iguais e seus lados adjacentes ao ângulo são iguais*". Com esta afirmação o Licenciando D quis expressar que um triângulo é classificado como isósceles se os ângulos internos são congruentes e os lados possuem mesma medida, dessa forma, a resposta está incorreta.

No item (d) pergunta-se qual a medida dos ângulos formados através do traçado da mediatriz do lado BC do triângulo BCD. Para responder esse item os licenciandos teriam que utilizar o transferidor para medir os ângulos formados pela mediatriz que dividiu o ângulo $C\hat{B}D$ em duas partes com medidas iguais a 30º. Neste item, 8 (oito) licenciandos acertaram; 8 (oito) erraram e 1 não respondeu. Alguns dos licenciandos erraram na resposta devido às construções não serem precisas, pois essas construções resultaram em triângulos com as medidas dos lados diferentes e, consequentemente, gerou ângulos internos distintos, e também houve Licenciandos que em vez de analisarem o ângulo $C\hat{B}D$, analisaram os ângulos formados pela intersecção da mediatriz com o lado BC.

No item (e) questiona-se qual segmento a mediatriz representa em ralação ao ângulo $C\hat{B}D$ do triângulo BCD e também em relação ao próprio polígono. A resposta correta para esse item seria, Bissetriz em relação ao ângulo $C\hat{B}D$ e também aos demais ângulos internos: $C\hat{B}D$ e $B\hat{C}D$, e em relação ao polígono representa o segmento da altura. Nesta pergunta, 9 (nove) licenciandos responderam apenas Bissetriz, 1 (um) licenciando altura; 3 (três) licenciandos erraram e 4 (quatro) Licenciandos não responderam. Dos 9 (nove) licenciandos que acertaram, apenas 1 respondeu: "*Segmento da bissetriz, representa a altura. O mesmo ocorre com os dois ângulos, pois quando divididos ao meio equivale a 30º*".

Tratando-se do item (f), nessa questão foi pedido que deduzisse uma fórmula matemática que associasse a altura h_3 do triangulo equilátero em função do seu lado l_3. Para esta questão a resposta correta seria: aplicando o Teorema de Pitágoras, onde *l* e *l/2* seriam os catetos e hipotenusa *h* chegaríamos ao seguinte resultado,

$$l_3{}^2 = h^2 + \left(\frac{l_3}{2}\right)^2 \Rightarrow l_3{}^2 = h^2 + \frac{l_3{}^2}{4} \Rightarrow h^2 = l_3{}^2 - \frac{l_3{}^2}{4} \Rightarrow h^2 = \frac{3l_3{}^2}{4}$$

$$\Rightarrow h = \sqrt{\frac{3l_3{}^2}{4}} \Rightarrow h = \frac{l_3\sqrt{3}}{2}$$

Nenhum licenciando conseguiu expressar uma fórmula que associasse a altura do triangulo equilátero em função do seu lado. Dos 17 licenciandos, 7 deixaram em branco e 10 tentaram responder, mas não conseguiram expressar uma fórmula, mesmo tendo a ideia de utilizar Teorema de Pitágoras. Os que tentaram expressar, apenas escreveram a fórmula, como: $h^2 = a^2 + b^2$.

Nos itens (g) e (h) nenhum licenciando conseguiu responder. O item (g) pede-se para escrever as relações existentes entre: a medida do apótema a_3 em ralação a medida da altura h_3 do polígono construído e a medida do raio *r* da circunferência em relação à medida da altura

h_3. Para responder esse quesito, os licenciandos deveriam medir com a régua o apótema, o raio e a altura, após as medições, os mesmos deveriam chegar à conclusão de que o apótema é igual a um terço da altura e o raio é igual a dois terços da altura.

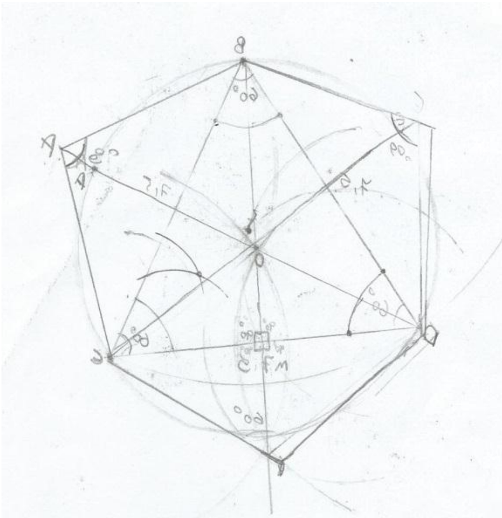
O item (h) baseia-se nas respostas dos itens (f) e (g) e pede-se para escrever as fórmulas matemáticas que expressam a medida do apótema a_3 em função da altura h_3 e medida do raio r em função da altura h_3 do triangulo equilátero. Para responder essa questão os licenciandos deveriam tomar como base os itens (f) e (g) e chegar aos seguintes resultados: $a_3 = \frac{1}{3}h_3$ e $r = \frac{2}{3}h_3$.

A construção do Polígono 2 da Sequencia Didática1 resultaria o Hexágono Regular. No item (a) da construção do Hexágono Regular, pergunta-se qual polígono foi construído. A resposta para este quesito seria Hexágono. Dos 17 licenciandos que responderam o item, 15 conseguiram visualizar o polígono e afirmar que é um Hexágono e 2 (dois) deixaram em branco.

No item (b) questiona-se se o polígono construído é regular. Para responder essa pergunta os licenciandos deveriam utilizar a régua e o transferidor para medir os ângulos internos e os lados da figura construída, após as medições, os mesmos deveriam chegar à conclusão de que a figura é um Hexágono Regular. Nesta questão, 8 (oito) licenciandos responderam certo, 8 erraram e 1 não respondeu. Dentre os 8 (oito) que responderam corretamente, 1 (um) afirmou que o polígono é regular pelo motivo dos ângulos serem iguais. Considerou-se certo esta afirmação, pois se um polígono possui todos os ângulos internos iguais, consequentemente os lados são iguais, sendo assim, regular.

Entre os 8 (oito) licenciandos que erraram, 4 (quatro) responderam "*Sim*", mas em suas justificativas demonstraram não saber o porque do Hexágono ser regular, como a seguir: Licenciando A, "*é um polígono regular, pois possui seis lados*". Apesar do Licenciando A afirmar que a figura é regular, em sua construção as medidas dos lados saíram diferentes. Isso ocorreu pelo fato do Licenciando A não ter seguido os passos de construção corretamente, ou seja, ao invés de traçar os lados do Hexágono ligando os pontos de intersecção da Bissetriz do triângulo equilátero com a circunferência, ligou os pontos nas extremidades das bissetrizes fora da circunferência, como mostra a Figura 16.

Figura 16 – Construção do Hexágono do Licenciando A



Fonte: Produção do licenciando A na Sequência 1

O Licenciando I afirmou: "*Não. Pois a medidas dos lados não são iguais*". O Licenciando I deve ter justificado desta forma, devido a sua construção, que resultou em um polígono irregular; o Licenciando L respondeu: "*Não é regular, porque as medidas dos lados são diferentes assim como seus ângulos*". Essa justificativa se deu também por causa da construção feita incorretamente, como exposto na Figura 15.

O Licenciando P afirmou: "*Sim. Porque a soma dos ângulos é igual a 180º*". Isto é, o Licenciando P não soube explicitar se o polígono é regular ou não, mesmo que tenha medido os lados e os ângulos internos do Hexágono.

No item (c) pergunta-se se as bissetrizes dos ângulos internos do triângulo equilátero também são bissetrizes do Hexágono. A resposta correta para este quesito é "sim", pois como a construção do hexágono partiu do traçado das bissetrizes dos ângulos internos do Triangulo equilátero inscrito na circunferência, consequentemente as bissetrizes dos ângulos internos do triângulo também serão bissetrizes do hexágono. Nesta questão, 14 (quatorze) licenciandos acertaram as respostas; 2 (dois) erraram e 1 (um) não respondeu. Dentre o 14 (quatorze), alguns declararam que o procedimento utilizado para dar a resposta foi apenas observando a construção do Hexágono e outros licenciandos o transferidor.

No item (d) questiona-se em quantas partes o polígono construído foi decomposto após traçar as bissetrizes dos ângulos internos do triângulo equilátero e qual o polígono que representa essas partes. A resposta correta para esta questão seria: o polígono construído foi decomposto em seis triângulos equiláteros. Apenas 5 (cinco) licenciandos responderam correto; 10 (dez) responderam errado e 2 (dois) deixaram em branco e cinco afirmaram "triângulo equilátero". Dos 10 (dez) que erraram, 4 (quatro) licenciandos escreveram "triângulo retângulo”, provavelmente porque não observaram bem suas construções e não sabiam que um triângulo para ser retângulo é necessário que o mesmo possua um ângulo reto e 6 (seis) licenciandos escreveram “triângulo”.

No item (e) pede-se para analisar os segmentos de extremidades no centro do polígono construído e nos vértices do Hexágono Regular em relação à circunferência. Após analisar os segmentos, escrever qual elemento geométrico da circunferência possui a mesma medida. Neste quesito, 15 licenciandos acertaram, pois afirmaram que esses segmentos representam a medida do “raio”, somente 2 (dois) licenciandos deixaram a questão em branco.

No item (f) pede-se para comparar os segmentos do item (e) com as medidas do lado do Hexágono Regular e pergunta-se a qual conclusão chegou após realizar as comparações. Depois de fazer as comparações, a resposta correta seria que a medida do raio da circunferência é igual à medida do lado do Hexágono Regular. Esta questão gerou as seguintes respostas: 3 (três) licenciandos chegaram à conclusão correta, com a afirmação de que a medida do raio é igual à medida do lado do Hexágono Regular; 4 (quatro) apenas escreveram apenas as medidas, como: “*todos as medidas são iguais a 5 cm*”; responderam que os lados tem a mesma medida; 2 não responderam; e 2 responderam que as medidas não são iguais. Os 2 (dois) licenciandos que afirmaram que as medidas dos lados são distintas, não construíram as bissetrizes adequadamente, ocasionando numa construção de uma figura irregular.

No item (g) é questionado se os ângulos centrais formados pelas diagonais do polígono são congruentes e pergunta-se qual procedimento foi utilizado para chegar à resposta. Para responder este quesito os licenciandos deveriam utilizar o transferidor para chegar à conclusão de que os ângulos centrais são congruentes. Apenas 12 licenciandos acertaram essa questão; 2 (dois) responderam incorretamente e 3 (três) não responderam. Entre os 12 (doze) licenciandos, 3 (três) chegaram à conclusão sem utilizar o transferidor. Aqueles que não utilizaram o transferidor observaram que só os ângulos centrais correspondiam pelo menos a um ângulo de cada um dos seis Triângulos equiláteros, a partir disso, concluíram que os ângulos centrais são congruentes.

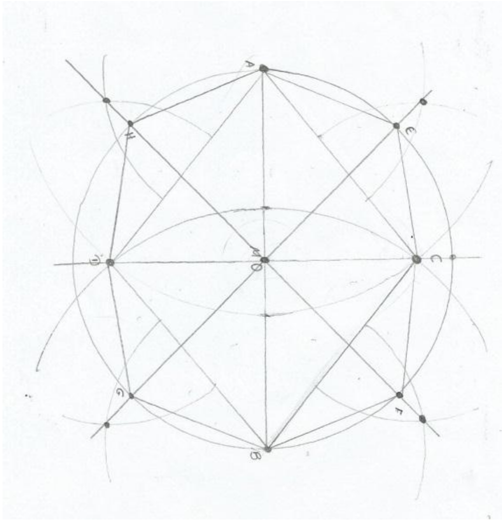
No item (h) pedia-se uma expressão que determinasse a medida de cada um dos ângulos centrais do Hexágono Regular. Para determinar uma expressão para a medida dos ângulos centrais, é necessário lembrar que a circunferência possui uma volta de 360º e que o Hexágono Regular é decomposto por seis triângulos equiláteros, a partir disso, dividindo a volta completa pelos seis triângulos resultará em ângulos com vértice no centro da circunferência iguais a 60º. Neste item, 6 (seis) licenciandos chegaram à conclusão da seguinte maneira: “*Como os ângulos são congruentes é formula é 360 dividido por 6”*. Os licenciandos que erraram apenas somaram os ângulos e igualavam a 360º. Sendo a_c o ângulo central do Hexágono Regular inscrito numa circunferência e n o número de vezes em que o ângulo central é divido. Logo, a expressão para esse item seria:

$$a_c = \frac{360°}{n}$$

No item (i) pede-se para expressar uma fórmula matemática que expressa à medida do apótema a_6 em função da medida do lado l_6 do hexágono. Para se chegar a uma expressão, é necessário identificar o apótema e os lados do polígono, e perceber que o apótema é a altura de cada triângulo equilátero que compõe o hexágono e aplicar Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo formado pela divisão do apótema do polígono construído. Neste item, nenhum licenciando acertou; 8 (oito) tentaram responder, mas não conseguiram e 9 (nove) deixaram em branco. Os que tentaram responder escreveram: Licenciando D, E e K, "*o apótema divide no meio o ângulo de 60º, logo a medida do ângulo pelo apótema será 30º*"; Licenciando M, Q e A, "*como o apótema divide ao meio, então será:* a_6 = 60/2"; Licenciando G, "*360/2=60º*"; e Licenciando O, "$a_6 = 360°/6 \div 2 \Rightarrow a_6 = 60°/2 \Rightarrow a_6 = 30°$ ". De acordo com as respostas dos licenciandos G e O, estes demonstraram não entender o significado do apótema e confundiram o mesmo com ângulo central, já os Licenciandos D, E e K não interpretaram de forma correta o enunciado e confundiram a medida do ângulo com a medida do apótema.

Na Sequência Didática 2 participaram 15 (quinze) Licenciandos. Nesta sequência são abordadas as construções do Quadrado e do Octógono Regular. Na construção do Polígono 1 da Sequência Didática 2 foi construído o Quadrado. No item (a) da construção do Quadrado, pergunta-se qual polígono foi construído. A resposta correta para este item seria apenas Quadrilátero, pois na questão não se pede para classificar o polígono construído. Entretanto, como o item (a) não pede para especificar as medidas dos ângulos internos e também as medidas dos lados do Quadrado, pode admitir-se as seguintes respostas: Quadrilátero; Quadrado; Retângulo; Losango ou Paralelogramo. Neste item, 7 (sete) licenciandos responderam: "Quadrado"; 3 (três) responderam: "Retângulo"; 2 (dois) responderam: "Quadrilátero"; 1 (um) respondeu: "Losango" e 2 (dois) deixaram em branco. O Licenciando L respondeu que a figura construída por ele é um Losango, isso ocorreu devido a um erro na construção do quadrado, como mostra a Figura 17.

Figura 17 – Construção do Hexágono do Licenciando L



Fonte: Produção do licenciando L (Construção do Quadrado e do Hexágono Regular)

Observando a Figura 17, podemos notar que o Licenciando L traçou os segmentos AB e CD (Mediatriz) corretamente, porém os pontos C e D não deveriam estar no encontro dos dois arcos pertencentes à mediatriz CD, consequentemente, o Licenciando L não seguiu os passos de construção corretamente. Os pontos C e D deveriam estar nas intersecções da mediatriz com a circunferência. Se o resultado da construção do Licenciando L fosse um Quadrado, ao responder que o polígono construído é um Losango, poderíamos admitir como uma resposta correta, mas como o mesmo não construiu corretamente, então a resposta está incorreta.

No item (b) pergunta-se qual a classificação do polígono construído. Para chegar à conclusão de que o polígono construído é um quadrado é necessário fazer a medição dos lados e dos ângulos internos para que se possa verificar que a figura realmente é um quadrado. Apenas 2 licenciandos responderam "Quadrado" e 13 não souberam responder. Entre esses 13 licenciandos, temos as seguintes respostas: o Licenciando A, "*Isósceles*"; o Licenciando B, "*Os lados do polígono medem 6 cm e os ângulos internos medem 60º. Classificação do polígono é um triângulo equilátero*"; o Licenciando L, "*Classificação Losango*". Os Licenciandos A e B, provavelmente confundiram a construção do quadrado com a do triangulo equilátero do polígono da Sequência 1, mesmo com as suas construções corretas. O licenciando L classificou como Losango pelo fato de sua construção ter resultado em um losango, como exposto na Figura 5 anteriormente.

No item (c) questiona-se se o quadrado pode ser classificado como um retângulo e losango. A justificativa correta para este item seria: o quadrado pode ser classificado como um retângulo pelo fato de possuir quatro lados congruentes dois a dois e quatro ângulos reto e como

Losango, devido a seus ângulos internos serem congruentes dois a dois e todos os lados iguais. Nenhum licenciando conseguiu responder essa questão; 13 (treze) erraram e 2 (dois) deixaram em branco. Entre os 13 (treze) que erraram, surgiram as seguintes respostas: os Licenciandos A e B afirmaram que o Quadrado pode ser classificado como Retângulo e como Losango, pois possuem quatro lados, a partir disso pode-se concluir que os licenciandos A e B não conhecem as condições necessárias para classificar os três polígonos, Quadrado, Retângulo e Losango; o Licenciando L, "*Não, pois um retângulo dividido ao meio terá dois triângulos retângulos. Algo que não acontece se dividirmos o losango ao meio*"; Licenciando K, "*Como losango não, pois as diagonais do losango são de triângulos diferentes e seus ângulos também*"; Licenciando I, "*Não. Pois pra ser losango teria que ter a medida dos lados diferentes*"; Licenciando F, "*Não, pois o retângulo tem as medidas diferentes, o losango tem ângulos diferentes, então não pode ser classificado como losango*"; e o Licenciando D, "*Como losango não, pois as diagonais dos losangos são de tamanhos diferentes e seus ângulos internos também*". Com as afirmações dos Licenciandos D, F, I, K e L, pode-se dizer que os mesmos não conhecem as condições necessárias para classificar o Quadrado como um Losango e um Retângulo, e também não conhecem os elementos geométricos que definem cada polígono.

No item (d) pergunta-se qual elemento geométrico os segmentos AB e CD representam em relação ao polígono e em relação à circunferência. A resposta correta seria: com relação ao quadrado representam as diagonais, e em relação à circunferência representam os diâmetros. Somente 3 (três) licenciandos acertaram o item por completo; 1 (um) respondeu diagonal; 5 (cinco) responderam diâmetro, 4 (quatro) erraram e 2 (dois) deixaram em branco.

No item (e) pede-se para indicar um ponto M na intersecção dos segmentos de reta AB e CD. Após a indicação do ponto M, pergunta-se o que M representa em relação aos segmentos AB e CD. Ao fazer as medições dos segmentos AM e MB, CM e MD, os licenciandos deveriam concluir que M representa o ponto médio dos segmentos de reta AB e CD. Para esta questão surgiram três respostas distintas: 5 (cinco) responderam "*raio*"; 9 afirmaram "ponto médio" e 1 (um) licenciando anotou as medidas. Os licenciandos que responderam "*raio*", provavelmente não prestaram atenção no enunciado da questão, e com isso, confundiram na resposta, em vez de responderem que o ponto M é o ponto médio, relacionaram os segmentos AM, MB MC e MD com o raio da circunferência.

No item (f) pergunta-se qual a medida dos ângulos formados pela intersecção dos segmentos de reta AB e CD. Para responder esse quesito é necessário utilizar o transferidor e medir os ângulos formados pela intersecção, que medem 90º. Neste item, 13 (treze) licenciandos responderam corretamente e 2 (dois) deixaram em branco.

No item (g) questiona-se qual a classificação dos quatro triângulos formados pela intersecção das diagonais AB e CD do quadrado. Para responder este quesito é necessário identificar as diagonais do Quadrado construído e analisar que a intersecção das diagonais formam ângulos de 90º no centro do polígono, ou seja, formam quatro ângulos retos. Nesta questão, 12 (doze) licenciandos responderam "*triângulo retângulo*" e 3 (três) afirmaram "*isósceles*". Entre os 12 (doze) licenciandos que acertaram a questão, alguns justificaram que os triângulos são retângulos por possuírem um ângulo de 90º; os 3 (três) que responderam isósceles, escreveram: Licenciando C, "*Isósceles, pois os ângulos de sua base formam um ângulo de 40º*"; Licenciando J, "*Esses triângulos possuem dois lados iguais, portanto é isósceles*"; e o Licenciando P, "*Ele é isósceles, pois tem os lados medindo 5 cm*". A partir dessas afirmações notamos que os 3 (três) licenciandos demonstrarem não reconhecerem o triângulo retângulo.

No item (h) pede-se para escrever uma fórmula matemática que expresse a medida do lado l_4 do polígono construído em função do raio r da circunferência. Para expressar a fórmula da medida do lado l_4 em função do raio r, é preciso observar que o raio r corresponde à metade das diagonais do quadrado e que os lados do Quadrado correspondem à hipotenusa de cada triângulo retângulo formado pela intersecção das diagonais. A partir disso, sendo l_4 os catetos e $d = (2r)$ a hipotenusa, aplicando Teorema de Pitágoras teremos a seguinte relação:

$$d^2 = {l_4}^2 + {l_4}^2 \Rightarrow (2r)^2 = {l_4}^2 + {l_4}^2 \Rightarrow 4r^2 = {l_4}^2 + {l_4}^2 \Rightarrow 4r^2 = 2{l_4}^2$$

$$\Rightarrow \frac{4r^2}{2} = {l_4}^2 \Rightarrow 2r^2 = {l_4}^2 \Rightarrow \sqrt{2r^2} = \sqrt{{l_4}^2} \Rightarrow l_4 = r\sqrt{2}.$$

Nenhum licenciando conseguiu expressar uma fórmula da medida do lado l_4 em função do raio r; 10 (dez) licenciandos escreveram somente a relação do Teorema de Pitágoras, sem colocar o lado em função do raio, e 5 (cinco) licenciandos não responderam a questão.

Na construção do Polígono 2 da Sequência Didática 2 foi obtido o Octógono Regular. No item (a) da construção do octógono regular, pergunta-se qual polígono foi construído. A resposta para esta questão seria Octógono. Dos 15 (quinze) licenciandos que responderam o item, 10 (dez) conseguiram visualizar o polígono e afirmar que é um octógono; 1 (um) afirmou que é um Hexágono Regular e outro licenciando, pentágono. Entre os 10 (dez) licenciandos que acertaram o item, apenas 6 (seis) licenciandos justificaram que o polígono é regular.

No item (b) questiona-se em quantos triângulos o octógono foi decomposto após traçar as bissetrizes dos ângulos centrais do quadrado e qual a classificação dos triângulos. A reposta correta para esta questão seria: o polígono construído foi decomposto em 8 triângulos isósceles.

Neste item, 9 (nove) licenciandos acertaram, mas 4 (quatro) não justificaram; 2 (dois) licenciandos erraram a questão com as seguintes respostas: o Licenciando A respondeu: *"Em oito triângulos equiláteros, pois todos os lados são iguais"*; o Licenciando L respondeu: *"16"*; 2 (dois) licenciandos escreveram apenas *"8 triângulos"* e 2 (dois) não responderam.

No item (c) pergunta-se quantos ângulos foram determinados com a intersecção das diagonais do octógono e qual a medida de cada ângulo. Para responder essa pergunta é preciso que se utilize o transferidor para medir os ângulos centrais formados pela intersecção das diagonais. Nesta questão, 7 (sete) licenciandos acertaram. Entre os 7 (sete), 4 (quatro) responderam dividindo 360º por 8 resultando em 8 ângulos centrais de 45º; 3 (três) concluíram que cada ângulo central mede 45º com a utilização do transferidor; 3 (três) Licenciandos erraram e 5 (cinco) não responderam.

No item (d) pergunta-se qual é a medida dos ângulos internos do polígono construído, e pede-se para escrever que cálculos matemáticos foram realizados para obter as medidas dos ângulos. Uma possível resposta para essa questão seria calcular os ângulos da base de um dos triângulos que compõem o octógono, usando o fato de que a soma dos ângulos internos do triangulo é igual a 180º. Após determinar os ângulos da base do triângulo, basta multiplicá-los por dois e, assim, determinar cada ângulo interno do octógono. Outra forma de calcular os ângulos internos seria utilizando a fórmula da soma dos ângulos internos de um polígono: $S = (n-2)180°$. Nesta questão, 10 (dez) licenciandos não responderam e 5 (cinco) licenciandos erraram, pois confundiram as medidas dos ângulos internos com as medidas dos ângulos centrais do Octógono Regular, ou seja, em vez de afirmarem que os ângulos internos do Octógono Regular mediam 135º afirmaram que mediam 45º. Neste quesito podemos notar que os licenciandos não conseguiram chegar à resposta correta a partir da construção do Octógono Regular observando os 8 (oito) triângulos isósceles.

De acordo com o que foi descrito anteriormente, vários licenciandos apresentaram dificuldades em manusear os instrumentos de desenho geométrico e também na compreensão das questões que envolviam certo nível de abstração.

Para que possamos analisar com mais precisão como os licenciandos se encontram com relação às suas dificuldades, observemos nas Tabelas 1, 2, 3 e 4 as quantidades de acertos, erros e de itens sem resposta das Sequências Didáticas 1 e 2.

Tabela 1 – Quantidade de respostas (Construção do Triângulo Equilátero)

ITENS	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)	(h)	Total

CORRETAS	16	9	9	8	10	0	0	0	52
INCORRETAS	1	8	7	8	3	0	0	0	27
NÃO RESPONDEU	0	0	1	1	4	17	17	17	57

Fonte: Elaboração do autor

Notemos que, na Tabela 1 o número de acertos é sempre maior do que o número de respostas incorretas, mas se somarmos o números de respostas incorretas com o número de itens não respondidos este resultado supera o número total de acertos, isso significa dizer que na Sequência Didática 1 os licenciandos apresentaram dificuldades em responder os itens contidos na sequência. Observe que os itens (f), (g) e (h) nenhum licenciando conseguiu responder.

Tabela 2 – Quantidade de respostas (Construção do Hexágono Regular)

ITENS	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)	(h)	(i)	Total
CORRETAS	15	8	14	5	15	3	12	6	0	78
INCORRETAS	0	8	2	10	0	0	2	0	0	22
NÃO RESPONDEU	2	1	1	2	2	14	3	11	17	53

Fonte: Elaboração do autor

Na Tabela 2 podemos notar que mesmo se somarmos o total de respostas incorretas com o total de itens não respondidos o resultado não supera o numero total de acertos, ou seja, na construção do Hexágono Regular os licenciandos demonstraram um pouco mais de entendimento nos itens, entretanto, no item (i) nenhum licenciando conseguiu responder.

Tabela 3 – Quantidade de respostas (Construção do Quadrado)

ITENS	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)	(h)	Total
CORRETAS	13	2	0	3	9	13	12	0	52
INCORRETAS	0	13	13	10	6	2	3	10	57
NÃO RESPONDEU	2	0	2	2	0	0	0	5	11

Fonte: Elaboração do autor

No que se refere à Tabela 3, notemos que o número total de acertos é inferior ao número total de respostas incorretas, isso significa dizer que os licenciandos sentiram um pouco mais de dificuldade em responder os itens, principalmente no item (h) onde nenhum licenciando conseguiu responder.

Tabela 4 – Quantidade de respostas (Construção do Octógono Regular)

ITENS	(a)	(b)	(c)	(d)	Total
CORRETAS	10	9	7	0	26
INCORRETAS	5	4	3	5	17
NÃO RESPONDEU	0	2	5	10	17

Fonte: Elaboração do autor

Já na Tabela 4 observamos que o número total de acertos é superior ao número total de respostas incorretas e de itens não respondidos, mas se somarmos o total de incorretas com o total de questões não respondidas o resultado supera o numero total de acertos, ou seja, os licenciandos na construção do Octógono Regular apresentaram também dificuldades em resolver os itens. Note que no item (d) nenhum licenciando respondeu.

Observando as Tabelas 1, 2, 3 e 4, podemos notar que existem itens que os licenciandos não conseguiram responder os itens: (f), (g) e (h) na construção do Triângulo Equilátero; item (i) na construção do Hexágono Regular; item (h) na construção do Quadrado e o item (d) na construção do Octógono Regular. Esses itens exigiam dos licenciandos um nível de dedução um pouco mais apurado, pois se tratam de que questões em que se pede para demonstrar e deduzir fórmulas matemáticas. Com isso, podemos dizer que os licenciandos possuem muitas dificuldades em argumentar e fazer demonstrações.

De acordo com as descrições e analises das respostas dos alunos nas sequências didáticas notamos outras dificuldades apresentadas pelos licenciandos. As dificuldades notadas foram na utilização e manuseio dos instrumentos de desenho (compasso e transferidor), na medição de ângulos, na visualização e identificação de alguns polígonos bem como na interpretação dos enunciados dos itens das sequências. Os licenciandos também apresentaram dificuldades em analisar e relacionar as propriedades existentes entre os elementos geométricos de um determinado polígono construído, por exemplo, saber argumentar qual segmento a mediatriz representa em relação a um ângulo de um determinado triângulo e também em relação ao próprio polígono, ou não saber argumentar por que um quadrado pode ser classificado como um retângulo ou como um losango.

Pelo o que observamos a maioria dos licenciandos demonstraram possuir pouco conhecimento matemático com relação às propriedades dos polígonos regulares (Triângulo Equilátero, Hexágono Regular, Quadrado e Octógono Regular), o que é um fator preocupante, pois estamos tratando de futuros professores que ao se formarem irão ensinar tudo aquilo que aprenderam na graduação para seus futuros alunos, então como esses licenciandos irão ensinar Geometria se nem ao menos possuem os conhecimentos básicos necessários, pois "ninguém promove a aprendizagem de conteúdos que não domina" (MELLO apud OLIVEIRA; GUIMARÂES, 2007, p. 02). Diante disso, é de extrema importância que os graduandos aprendam a argumentar e a demonstrar, conforme Campos (2013).

Para que isso ocorra é necessário que os próprios professores universitários também busquem melhorar suas metodologias de ensino, pois nas universidades o ensino da Geometria está na maioria das vezes voltado apenas a demonstrações puras sem a utilização de recursos didáticos que auxiliem no desenvolvimento cognitivo.

3.4 Questionário Diagnóstico

O Questionário Diagnóstico (Apêndice C) teve como objetivos verificar as principais dificuldades enfrentadas pelos licenciandos no momento das construções dos polígonos regulares inscritos numa circunferência; verificar se já utilizaram os instrumentos de desenho geométrico antes de ingressar na universidade e qual a opinião dos licenciandos sobre o uso da régua e compasso na compreensão das propriedades dos polígonos regulares.

No que se refere à utilização dos instrumentos de desenho geométrico (régua, compasso, transferidor) antes de ingressar na universidade (Questão 1), 7 (sete) licenciandos nunca utilizaram os instrumentos de desenho. Entre esses 7 (sete), dois afirmaram que nas escolas onde frequentaram não os utilizavam em sala de aula. Ainda neste quesito, 7 (sete) licenciandos afirmaram sim, alegando que já utilizaram para fazer gráficos e traçar segmentos, outros nas aulas de artes.

Em relação ao uso dos instrumentos de desenho geométrico se acharam fácil, médio, difícil e muito difícil (Questão 2), 3 (três) licenciandos consideraram fácil; 8 (oito) consideraram médio, 3 (três) consideraram difícil e 1 (um) considerou muito difícil.

Em relação às dificuldades encontradas durante as construções dos polígonos regulares (Questão 3), 8 (oito) licenciandos relataram ter dificuldades no manuseio do compasso, dificuldade em medir ângulos com transferidor.

No que se refere à opinião dos licenciandos sobre o uso dos instrumentos de desenho geométrico na compreensão e visualização dos conceitos e propriedades dos polígonos regulares (Questão 4), todos afirmaram que ajuda na compreensão dos conceitos e propriedades. Alguns afirmaram: Licenciando G: "*Sim. Pois facilitou a visualização e a compreensão dos desenhos geométricos e conheci alguns triângulos que não tinha visto ainda*"; Licenciando I: "*Sim. pois quando você ta construindo você tem que medir os lados, os ângulos, e é mais fácil de ser compreendido*"; Licenciando L: "*Sim, acho de extrema importância. Pois ajuda e muito o aluno entender e ter uma visão mais ampla dos conceitos relacionados a geometria*"; Licenciando A: "*Com certeza, eu entendi bem mais gostaria que houvesse mais aulas assim a visibilidade aumenta de mais*"; Licenciando H: "*Sim. Pois fica mais interessante e mais interpretativo, para a melhor compreensão*"; e Licenciando C: "*Sim, pois é mais fácil identificar as figuras e a compreensão do assunto*".

Pelo que podemos observar diante desse questionário, as maiores dificuldades apresentadas pelos licenciandos foram relativas ao manuseio tanto do compasso quanto do transferidor, sendo que o mais difícil para eles foi o manuseio do transferidor, como já foi citado no item 3.1. O Questionário ainda nos mostra o nível de satisfação dos licenciandos em aprender a construir os polígonos regulares com régua e compasso relacionado com o ensino-aprendizagem das propriedades e que o ensino de Geometria com o uso dos instrumentos de desenho geométrico não está sendo ensinado nas escolas e também na universidade.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Essa pesquisa buscou investigar e identificar as principais dificuldades dos licenciandos da turma de Fundamentos da Geometria Euclidiana do Curso de Licenciatura em Matemática na compreensão das propriedades dos polígonos regulares por meio da aplicação das sequências didáticas que comtemplam as construções dos Polígonos Regulares (Triângulo Equilátero, Hexágono Regular, Quadrado e Octógono Regular), com a utilização dos instrumentos de desenho geométrico.

Para esta pesquisa buscamos responder o seguinte questionamento: quais as principais dificuldades apresentadas pelos futuros professores de Matemática em relação às propriedades dos polígonos regulares (Triângulo Equilátero, Quadrado, Hexágono Regular e Octógono Regular), a partir das construções desses polígonos com régua e compasso?

Elaboramos e aplicamos as sequências didáticas para identificar as principais dificuldades dos licenciandos da disciplina de Fundamentos da Geometria Euclidiana. Os resultados mostraram um fator bastante preocupante em que grande parte dos licenciandos não se encontra num nível de abstração desejado para a universidade.

Durante a aplicação das sequencias didáticas percebemos que a maioria dos licenciandos apresentou dificuldades na interpretação dos itens e nas construções dos polígonos regulares durante o manuseio dos instrumentos de desenho geométrico. Ao finalizar as sequências didáticas das construções e analisar as respostas dos licenciandos chegamos à conclusão de que a maioria da turma se encontra em um grau de abstração abaixo do desejado e que os mesmos demonstraram possuir pouco conhecimento matemático com relação às propriedades dos polígonos regulares (Triângulo Equilátero, Hexágono Regular, Quadrado e Octógono Regular).

Após a aplicação das sequências foi distribuído um questionário diagnóstico que se tratava das principais dificuldades enfrentadas pelos licenciandos no momento das construções dos polígonos regulares inscritos numa circunferência. Diante das respostas dos licenciandos no questionário, chegamos à conclusão de que a maioria dos licenciandos não teve a oportunidade de aprender a manusear os instrumentos de desenho enquanto estavam na escola básica.

Como foi destacado nas análises das sequências, o ideal para o Ensino Superior seria que os licenciandos ingressassem na universidade com um grau de abstração em que fossem capazes de argumentar e fazer demonstrações, mas para que isso aconteça é necessário que o corpo docente universitário tenha a iniciativa de reestruturar as ementas das disciplinas de Fundamentos Geometria de modo que proporcione uma melhor aprendizagem e compreensão dos conteúdos, para que assim possam formar futuros professores aptos a ensinar Geometria e a manusear os instrumentos de desenho geométrico.

Com essa pesquisa esperamos contribuir para o ensino-aprendizagem de Geometria com o Desenho Geométrico, e através dos resultados e conclusões, mostrar tanto para o professor de Matemática quanto para o licenciando, a importância de aprender Geometria relacionando-a com as construções geométricas. Nossa intenção é que esse trabalho sirva como incentivo de aprendizagem para a área da Educação Matemática.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, M. S. **Elaboração de projeto, TCC, dissertação e tese:** uma abordagem simples, prática e objetiva. São Paulo: Atlas, 2011.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)**. Brasília: MEC, 2000.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais:** Matemática, 3º e 4º ciclos. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Congresso Nacional. LEI nº 5692 de 11/08/1971. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**. Brasília, DF, v. 5, p. 59, 11 de ago. de 1971.

CAMPOS, E. G. J. **Dificuldades de alunos do 1º ano de um curso de licenciatura em matemática na disciplina de construções geométricas**. Tese de Doutorado (Pós-Graduação em Educação), Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS, Campo Grande – MS, 2013.

CONTADOR, P. R. M. **Matemática, uma breve história**. 3. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2008.

CRESCENTI, E. P. **Os Professores de Matemática e a Geometria:** opiniões sobre a área e seu ensino. Dissertação: Mestrado em Educação Matemática. Universidade Federal de São Carlos. São Paulo, 2005. 252p.

DOLCE, O; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar.** Geometria Plana. v. 9. 7 ed. São Paulo: Atual, 1990.

EVES, H. **Introdução à História da matemática**. Tradução: Hyogino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

LEONARDI, A.C; CANTELE. B. R. **Desenho Geométrico:** linguagem visual. São Paulo: IBEP, 1998. (Edição de artes: Celso Vicente Silva, v.1)

MAZIERO, L. M. **Quadriláteros**: construções geométricas com o uso de régua e compasso. 2011. 88 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2011. Disponível em: < https://tede2.pucsp.br/handle/handle/10877> Acesso em: novembro de 2016.

JESUS, G. B. de. **Construções geométricas**: uma alternativa para desenvolver conhecimentos acerca da demonstração em uma formação continuada. 2008. 234 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008. Disponível em: < https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11316> Acesso em: novembro de 2016.

PAVANELLO, R. M. **O Abandono do Ensino de Geometria:** uma visão histórica. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campus Faculdade de Educação, 1989.

PAVANELLO, R. M. **O Abandono do Ensino de Geometria no Brasil**: causas e consequências. **Revista Zetetiké**. Ano I – nº 1/1993.
Disponível em: < http://ojs.fe.unicamp.br/ged/zetetike/article/view/2611/2353> Acesso em maio de 2016.

OLIVEIRA, A. E; GUIMARÃES, G. L. **Concepções de professores dos anos iniciais sobre o ensino de Geometria**, Recife – PE. Universidade Federal de Pernambuco – UFPE, 2007. Disponível em:
<https://www.ufpe.br/ce/index.php?option=com_content&view=article&id=375%3Atcc-20081&catid=33&Itemid=301> Acesso em: novembro de 2016.

PIRES, C. M. C; CURI, E; CAMPOS, T. M. M. (coords.) **Espaço e Forma**: a construção de noções geométricas pelas crianças das quatro séries iniciais do Ensino Fundamental. São Paulo: PROEM, 2000. p. 20-21.

PRODANOV, C. C. Freitas, E. C. **Metodologia do trabalho científico [recurso eletrônico]:** métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico. 2 ed. Novo Hamburgo: Feevale, 2013.

PUTNOKI, J. C. Que se devolvam a Euclides a régua e compasso. **Revista do Professor de Matemática**, nº13, p.13-17, 2º sem./1988. São Paulo.

RAYMUNDO, M. F. S. M. **Construção de conceitos geométricos:** investigando a importância do ensino de desenho geométrico nos anos finais do ensino fundamental, Vassouras-RJ. Universidade Severino Sombra, 2010. Disponível em:
<http://www.uss.br/arquivos%3Bjsessionid%3D878FE3484470177F9A43419B1A7EA8C0/posgraduacao/strictosensu/educacaoMatematica/dissertacoes/2010/dissertacao-marcia-vfinal.pdf > Acesso em: setembro de 2016.

REZENDE, E. Q. F; QUEIROZ, M. L. B. **Geometria euclidiana plana e construções geométricas**. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2008.

ROQUE, T. **História da Matemática:** uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

ZUIN, E. S. L. **Da Régua e do Compasso:** as construções geométricas como um saber escolar no Brasil. Dissertação (Mestrado em Educação)- Faculdade de Educação, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2001.
Disponível em: http://
http://www.bibliotecadigital.ufmg.br/dspace/bitstream/handle/1843/FAEC-85DGQB/zuin_elenice_disserta_nopw.pdf?sequence=1Acesso em maio de 2016.

APÊNDICES

APÊNDICE A

Sequência didática 1

OBJETIVOS:

- Construir a bissetriz de um ângulo, com régua e compasso;
- Construir a mediatriz de um segmento de reta;
- Construir, com régua e compasso, os polígonos regulares triângulo equilátero e o hexágono regular, inscritos numa circunferência;
- Explorar algumas propriedades dos dois polígonos construídos.

CONTEÚDOS:

- Bissetriz de um ângulo;
- Mediatriz de um segmento de reta;
- Polígonos regulares: triângulo equilátero e hexágono;
- Propriedades dos polígonos triângulo equilátero e hexágono regular, inscritos numa circunferência.

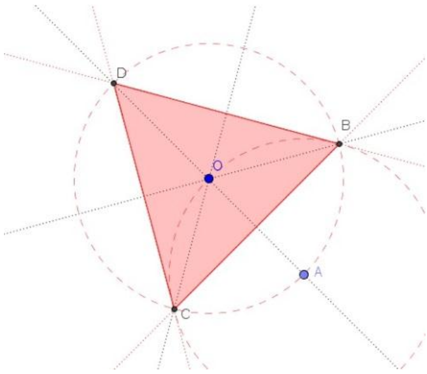
RECURSOS DIDÁTICOS:

- Papel, lápis, borracha, régua, compasso e transferidor. Atividade impressa.

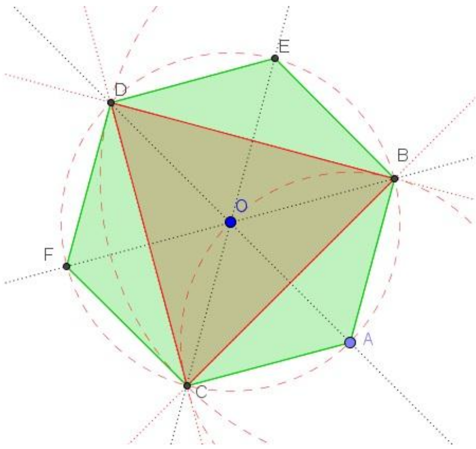
PROCEDIMENTOS DE ENSINO:

1º momento: No primeiro momento, abordaremos o conceito de mediatriz de um segmento de reta e da bissetriz de um ângulo por meio da construção com régua e compasso, sendo acompanhada simultaneamente pelos licenciandos. Primeiramente abordaremos a construção da mediatriz. Para a construção da mediatriz será traçado um segmento de reta de comprimento qualquer, indicando suas extremidades por A e B. Com o compasso, fixar a ponta seca no ponto A e traçar uma semicircunferência com raio maior que a metade do segmento de reta AB. Com a mesma abertura do compasso, fixar a ponta seca no ponto B e traçar outra semicircunferência. As duas intersecções das semicircunferências serão indicadas pelos pontos C e D. Com a régua, traçar uma reta passando pelos pontos C e D. A intersecção da reta traçada com o segmento de reta será indicada por M. Com o auxílio do transferidor, os alunos deverão medir o ângulo formado entre a reta traçada e o segmento de reta, e chegar à medida de 90°. Com a régua, os alunos medirão os segmentos AM e MB, e chegar à conclusão que possuem a mesma medida, logo M é o ponto médio do segmento AB, e a reta que passa pelos pontos CD é a mediatriz desse segmento. Assim, será formalizada a sua definição: “a mediatriz de um segmento é a reta perpendicular ao segmento e que contém seu ponto médio” (REZENDE; QUEIROZ, 2008, p. 37). Em seguida, abordaremos a construção da bissetriz de um ângulo nomeado por $A\widehat{O}C$ e medida igual a 60º. Para a construção da bissetriz, primeiramente será construído um ângulo de medida igual a 60º com o auxilio da régua e transferidor. Na construção da bissetriz do $A\widehat{O}C$ serão feitos os seguintes procedimentos: com o compasso, fixar a ponta seca no vértice do ângulo construído, em seguida traçar um arco de abertura qualquer, interceptando os dois lados do ângulo. Em seguida com a ponta seca do compasso sobre cada um dos pontos de intersecção

encontrados no passo anterior, traçar dois arcos de abertura qualquer interceptando em um ponto. Logo depois, traçar uma semirreta passando pelo vértice do ângulo e pelo ponto de intersecção dos arcos. Essa semirreta é a bissetriz do ângulo dado. Dessa forma, será formalizada a sua definição: "A bissetriz de ângulo é uma semi-reta interna ao ângulo, com origem no vértice do ângulo e que o divide em dois ângulos congruentes" (DOLCE, 1990, p.25).
2º momento: No segundo momento, será construído um triângulo equilátero, inscrito numa circunferência. A princípio os licenciandos não serão informados sobre que tipo de polígono será construído, pois os mesmos deverão chegar à conclusão ao final da construção. Durante a construção abordaremos algumas propriedades e conceitos pertinentes ao triângulo equilátero. Nesse momento, licenciandos irão realizar as construções por conta própria, seguindo as instruções em anexo (Construção do Polígono 1), utilizando a régua e o compasso. Na construção do triângulo equilátero inscrito numa circunferência serão feitos os seguintes procedimentos: traçar uma circunferência de centro em O e raio 5 cm; fixar um ponto A na linha da circunferência (o ponto A será fixado na posição que os alunos desejarem); traçar uma semicircunferência de raio 5 cm passando pelo centro e interseccionando a circunferência traçada anteriormente em dois pontos; nomear os dois pontos obtidos por B e C; com a ponta seca do compasso em B ou C, traçar um arco de circunferência de raio de mesma medida do segmento BC, interceptando a circunferência em apenas um ponto; em seguida nomear esse ponto de D; traçar os segmentos CD e BD. Dessa forma, seguindo todos os passos, obteremos o triângulo equilátero. Durante a construção serão feitas perguntas aos licenciandos referentes a algumas propriedades e conceitos presentes na figura construída: a) Ao traçar os segmentos CD e BD, juntamente com o segmento BC, que tipo de polígono foi construído? b) Com o auxilio da régua e transferidor, meça os lados do polígono e seus ângulos internos. Anote as medidas. Com base nas medidas obtidas, qual a classificação desse polígono? Esse polígono é regular? Justifique; c) Podemos afirmar que esse polígono também pode ser classificado como isósceles? Justifique; d) Trace a mediatriz relativa ao lado BC. Essa mediatriz dividiu o ângulo $C\hat{D}B$ em dois novos ângulos. Qual é a medida de cada um?; e) Com base na resposta do item anterior, a mediatriz também representa qual segmento em relação ao ângulo $C\hat{D}B$? E em relação ao polígono construído? O mesmo ocorre com os outros dois ângulos $C\hat{B}D$ e $B\hat{C}D$?; f) Deduza uma fórmula matemática que associe a altura h_3 do triângulo equilátero em função do seu lado l_3.; g) Sabendo que o apótema a de um polígono é o segmento com uma extremidade no centro e a outra no ponto médio de um lado, identifique o apótema a_3 do polígono construído. Com a régua, meça o apótema a_3, o raio da circunferência r e a altura h_3 do polígono construído. A partir das medições escreva as relações existentes entre: a medida do apótema em relação à medida da altura do polígono construído, e a medida do raio da circunferência em relação à medida da altura do polígono construído.; h) Com base nas respostas do item (f) e (g), escreva as fórmulas matemáticas que expressam: a medida do apótema em função da altura do triângulo equilátero, e a medida do raio em função da altura do triângulo equilátero.



3º momento: No terceiro momento, será construído um hexágono regular, inscrito numa circunferência. A princípio os licenciandos não serão informados sobre que tipo de polígono será construído, pois os mesmos deverão chegar à conclusão ao final da construção. Nesse momento, os licenciandos irão construir o hexágono regular a partir da construção do triângulo equilátero do segundo momento, seguindo as instruções em anexo (Construção do Polígono 2), utilizando a régua e o compasso. Durante a construção abordaremos algumas propriedades e conceitos pertinentes ao hexágono regular. Na construção do hexágono regular inscrito numa circunferência serão feitos os seguintes procedimentos: traçar as bissetrizes dos ângulos $B\hat{C}D$ e $C\hat{D}B$ interceptando a circunferência nos pontos E e F, respectivamente; traçar os segmentos AB, BE, ED, DF, FC e CA. Com os traçados desses segmentos obteremos o hexágono regular. Durante a construção serão feitas perguntas aos licenciandos referentes a algumas propriedades e conceitos da figura construída: a) Ao traçar os segmentos de reta AB, BE, ED, DF, FC e CA, que polígono foi construído?; b) Com o auxilio da régua e transferidor, meça os lados do polígono e seus ângulos internos. Anote as medidas. Com base nas medidas obtidas, esse polígono é um polígono regular? Justifique.; c) As bissetrizes AD, CE e BF, dos ângulos internos do triângulo equilátero, também representam as bissetrizes dos ângulos internos do polígono construído? Que procedimento você fez para dar a sua resposta?; d) Ao traçar os segmentos AD, CE e BF (bissetrizes dos ângulos internos do triângulo equilátero), eles decompõem o polígono construído em quantas partes? Qual é o polígono que representa cada uma dessas partes?; e) Analise os segmentos OA, OB, OC, OD, OE e OF em relação à circunferência. Eles representam a medida de qual elemento da circunferência?; f) Agora, compare essas medidas (do item e) com as medidas do lado do polígono construído. A qual conclusão você chegou?; g) Os ângulos $C\hat{O}A$, $A\hat{O}B$, $B\hat{O}E$, $E\hat{O}D$, $D\hat{O}F$ e $F\hat{O}C$ são congruentes? Que procedimento você fez para dar a sua resposta?; h) Com base na resposta do item anterior, qual expressão que determina a medida de cada um dos ângulos centrais do polígono construído?; i) Sabendo que o apótema a de um polígono é o segmento com uma extremidade no centro e a outra no ponto médio de um lado, identifique o apótema a_6 do polígono construído. Escreva uma fórmula matemática que expressa a medida do apótema a_6 em função da medida do lado l_6 do polígono construído.



AVALIAÇÃO:

Será realizada ao longo da aula, por meio da observação da mobilização dos conhecimentos feita pelos alunos nos momentos de construção dos polígonos, na análise das propriedades das figuras geométricas e na realização das atividades propostas.

REFERÊNCIAS:

DOLCE, Osvaldo. POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática Elementar.** Geometria Plana. v. 9. 7 ed. São Paulo: Atual, 1990.

REZENDE, Eliane Quelho Frota; QUEIROZ, Maria Lúcia Bontorim. **Geometria euclidiana plana e construções geométricas**. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2008.

Nome: ____
Matrícula: ___________

CONSTRUÇÃO DO POLIGONO 1

1º PASSO
Utilizando o compasso construa uma circunferência de centro O, com raio medindo 5 cm.

2º PASSO
Indique um ponto A na linha da circunferência, no local que desejar.
Faça uma abertura no compasso, com a medida igual à do raio da circunferência. Em seguida fixe a ponta seca do compasso no ponto A e trace uma semicircunferência passando pelo centro O e interceptando a circunferência já traçada em dois pontos.
Indique os pontos de intersecção da semicircunferência com a circunferência por B e C.

3º PASSO
Com a ponta seca do compasso fixada em B (ou C), trace um arco de circunferência com raio de mesma medida do segmento BC, interceptando a circunferência em apenas um ponto. Nomeie esse ponto de D.

4º PASSO
Trace os segmentos CD e BD. Responda:
a) a) Ao traçar os segmentos CD e BD, juntamente com o segmento BC, que tipo de polígono foi construído?

b) Com o auxilio da régua e transferidor, meça os lados do polígono e seus ângulos internos. Anote as medidas. Com base nas medidas obtidas, qual a classificação desse polígono? Esse polígono é regular? Justifique.

c) Podemos afirmar que esse polígono também pode ser classificado como isósceles? Justifique.

d) Trace a mediatriz relativa ao lado BC. Essa mediatriz dividiu o ângulo $C\hat{D}B$ em dois novos ângulos. Qual é a medida de cada um?

e) Com base na resposta do item anterior, a mediatriz também representa qual segmento em relação ao ângulo $C\hat{D}B$? E em relação ao polígono construído? O mesmo ocorre com os outros dois ângulos $C\hat{B}D$ e $B\hat{C}D$?

f) Deduza uma fórmula matemática que associe a altura h_3 do triângulo equilátero em função do seu lado l_3.

g) Sabendo que o apótema a de um polígono é o segmento com uma extremidade no centro e a outra no ponto médio de um lado, identifique o apótema a_3 do polígono construído. Com a régua, meça o apótema a_3, o raio da circunferência r e a altura h_3 do polígono construído. A partir das medições, escreva as relações existentes entre: a medida do apótema a_3 em relação à medida da altura h_3 do polígono construído; e a medida do raio r da circunferência em relação à medida da altura h_3 do polígono construído.

h) Com base nas respostas do item (f) e (g), escreva as fórmulas matemáticas que expressam: a medida do apótema a_3 em função da altura h_3 do triângulo equilátero; e a medida do raio r em função da altura h_3 do triângulo equilátero.

Nome: ____
Matrícula: ___________

CONSTRUÇÃO DO POLÍGONO 2

1º PASSO

Traçar as bissetrizes dos ângulos $B\hat{C}D$ e $C\hat{D}B$, interceptando a circunferência em dois pontos: E e F.

2º PASSO

Trace os segmentos AB, BE, ED, DF, FC e CA. Responda:

a) Ao traçar os segmentos de reta AB, BE, ED, DF, FC e CA, que polígono foi construído?

b) Com o auxilio da régua e transferidor, meça os lados do polígono e seus ângulos internos. Anote as medidas. Com base nas medidas obtidas, esse polígono é um polígono regular? Justifique.

c) As bissetrizes AD, CE e BF, dos ângulos internos do triângulo equilátero, também representam as bissetrizes dos ângulos internos do polígono construído? Que procedimento você fez para dar a sua resposta?

d) Ao traçar os segmentos AD, CE e BF (bissetrizes dos ângulos internos do triângulo equilátero), eles decompõem o polígono construído em quantas partes? Qual é o polígono que representa cada uma dessas partes?

e) Analise os segmentos OA, OB, OC, OD, OE e OF em relação à circunferência. Eles representam a medida de qual elemento da circunferência?

f) Agora, compare essas medidas (do item e) com as medidas do lado do polígono construído. A qual conclusão você chegou?

g) Os ângulos $C\widehat{O}A$, $A\widehat{O}B$, $B\widehat{O}E$, $E\widehat{O}D$, $D\widehat{O}F$ e $F\widehat{O}C$ são congruentes? Que procedimento você fez para dar a sua resposta?

h) Com base na resposta do item anterior, qual expressão que determina a medida de cada um dos ângulos centrais do polígono construído?

i) Sabendo que o apótema a de um polígono é o segmento com uma extremidade no centro e a outra no ponto médio de um lado, identifique o apótema a_6 do polígono construído. Escreva uma fórmula matemática que expressa a medida do apótema a_6 em função da medida do lado l_6 do polígono construído.

APÊNDICE B

Sequência didática 2

OBJETIVOS:

- Construir, com régua e compasso, os polígonos regulares quadrado e o octógono regular, inscritos numa circunferência;
- Explorar algumas propriedades dos dois polígonos construídos.

CONTEÚDOS:

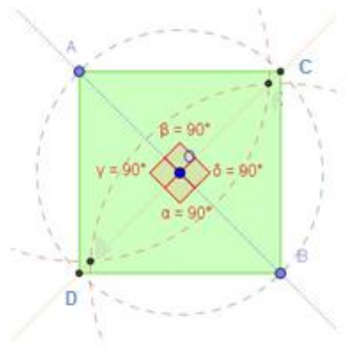
- Polígonos regulares: quadrado e o octógono regular;
- Propriedades dos polígonos quadrado e octógono regular, inscritos numa circunferência.

RECURSOS DIDÁTICOS:

- Papel, lápis, borracha, régua, compasso e transferidor. Atividade impressa.

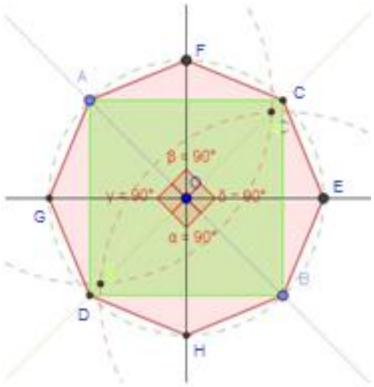
PROCEDIMENTOS DE ENSINO:

1º momento: No primeiro momento será construído um quadrado, inscrito numa circunferência. A princípio os licenciandos não serão informados que tipo de polígono será construído, pois os mesmos deverão chegar à conclusão ao final da construção. Durante a construção abordaremos propriedades e conceitos pertinentes ao quadrado. Nesse momento, os licenciandos irão realizar as construções por conta própria seguindo as instruções em anexo (Construção do Polígono 1), utilizando a régua e o compasso. Na construção do quadrado inscrito na numa circunferência serão feitos os seguintes procedimentos: traçar uma circunferência de centro em O e diâmetro AB = 10 cm; traçar a mediatriz do segmento de reta AB (diâmetro); indicar as intersecções da mediatriz com a circunferência pelos pontos C e D; traçar os segmentos de reta AC, CB, BD e DA. Dessa maneira, seguindo todos os passos, obteremos o quadrado. Durante a construção serão feitas perguntas aos licenciandos referentes a algumas propriedades e conceitos presentes na figura construída: a) Ao traçar os segmentos AC, CB, BD e DA, que tipo de polígono foi construído?; b) Com o auxilio da régua e transferidor, meça os lados do polígono e seus ângulos internos. Anote as medidas. Com base nas medidas obtidas, qual a classificação desse polígono?; c) Podemos afirmar que esse polígono também pode ser classificado como retângulo? E como Losango? Justifique.; d) Observando os segmentos de reta AB e CD, eles representam qual elemento geométrico em relação ao polígono? E em relação à circunferência, eles representam qual elemento geométrico?; e) Indique por M o ponto de intersecção dos segmentos de reta AB e CD. Com o auxílio da régua, meça os segmentos AM e MB, CM e MD, e anote essas medidas. Observando as medidas encontradas, o que M representa em relação aos segmentos AB e CD?; f) Utilizando o transferidor, qual é a medida dos ângulos formados pela



intersecção dos segmentos de reta AB e CD?; g) Os segmentos de reta AB e CD dividem o polígono construído em quatro triângulos. Qual é a classificação desses triângulos? Justifique.; h) Escreva uma fórmula matemática que expresse a medida do lado l_4 do polígono construído em função do raio r da circunferência.

2º momento: No segundo momento, será construído um octógono regular, inscrito numa circunferência. A princípio os licenciandos não serão informados que tipo de polígono será construído, pois os mesmos deverão chegar à conclusão ao final da construção. Nesse momento, os licenciandos irão construir o octógono regular a partir da construção do quadrado, construído no primeiro momento, seguindo as instruções em anexo (Construção do Polígono 2), utilizando a régua e o compasso. Na construção do octógono regular inscrito numa circunferência serão feios os seguintes procedimentos: traçar as bissetrizes dos ângulos $A\hat{O}C, B\hat{O}C, B\hat{O}D$ e $A\hat{O}D$; Indicar as intersecções dessas bissetrizes com a circunferência por E, F G e H (o ponto E ficará entre os pontos B e C, o ponto F entre os pontos C e A, o ponto G entre os pontos A e D e o ponto H entre o ponto D e B); traçar os segmentos de reta AF, FC, CE, EB, BH, HD, DG e GA. Com os traçados desses segmentos obteremos o octógono regular. No decorrer da construção serão feitas perguntas aos licenciandos referentes a algumas propriedades e conceitos da figura construída: a) Ao traçar os segmentos AF, FC, CE, EB, BH, HD, DG e GA, qual polígono foi construído? Esse polígono é regular? Justifique.; b) Os segmentos de reta AB, CD, EG e FH decompõem o polígono em quantos triângulos? Qual é a classificação desses triângulos? Justifique.; c) A intersecção dos segmentos de reta AB, CD, EG e FH determinou quantos ângulos? Qual é a medida de cada um desses ângulos? Explique como você calculou essa medida.; d) Qual é a medida de cada ângulo interno ($A\hat{F}C, F\hat{C}E, C\hat{E}B, E\hat{B}H, B\hat{H}D, H\hat{D}G, D\hat{G}A, G\hat{A}F$) do polígono construído? Explique que cálculos matemáticos você realizou para obter essas medidas (não é permitido utilizar o transferidor para realizar a medição desses ângulos).



AVALIAÇÃO:

Será realizada ao longo da aula, por meio da observação da mobilização dos conhecimentos feita pelos alunos nos momentos de construção dos polígonos, medição de lados e ângulos, nas propriedades das figuras geométricas e na realização das atividades propostas.

REFERÊNCIAS:

REZENDE, Eliane Quelho Frota; QUEIROZ, Maria Lúcia Bontorim. **Geometria euclidiana plana e construções geométricas**. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2008.

LEONARDI, A.C; CANTELE. B. R. Desenho Geométrico: linguagem visual. São Paulo: IBEP, 1998. (Edição de artes: Celso Vicente Silva, v.1)

Nome: ____
Matrícula: ___________

CONSTRUÇÃO DO POLIGONO 1

1º PASSO
Utilizando o compasso construa uma circunferência de centro em O, com raio medindo 5 cm.

2º PASSO
Trace um diâmetro, na posição que preferir, nomeando-o de AB.
Trace a mediatriz desse diâmetro interceptando a circunferência em dois pontos. Indique esses dois pontos por C e D.

3º PASSO
Trace os segmentos de reta AC, CB, BD e DA. Responda:
a) Ao traçar os segmentos AC, CB, BD e DA, que tipo de polígono foi construído?

b) Com o auxilio da régua e transferidor, meça os lados do polígono e seus ângulos internos. Anote as medidas. Com base nas medidas obtidas, qual a classificação desse polígono?

c) Podemos afirmar que esse polígono também pode ser classificado como retângulo? E como Losango? Justifique.

d) Observando os segmentos de reta AB e CD, eles representam qual elemento geométrico em relação ao polígono? E em relação à circunferência, eles representam qual elemento geométrico?

e) Indique por M o ponto de intersecção dos segmentos de reta AB e CD. Com o auxílio da régua, meça os segmentos AM e MB, CM e MD, e anote essas medidas. Observando as medidas encontradas, o que M representa em relação aos segmentos AB e CD?

f) Utilizando o transferidor, qual é a medida dos ângulos formados pela intersecção dos segmentos de reta AB e CD?

g) Os segmentos de reta AB e CD dividem o polígono construído em quatro triângulos. Qual é a classificação desses triângulos? Justifique.

h) Escreva uma fórmula matemática que expresse a medida do lado l_4 do polígono construído em função do raio r da circunferência.

Nome: ____
Matrícula: ___________

CONSTRUÇÃO DO POLÍGONO 2

1º PASSO
Utilizando a régua e o compasso, trace as bissetrizes dos ângulos $A\hat{O}C, B\hat{O}C, B\hat{O}D$ e $A\hat{O}D$, interceptando a circunferência em quatro pontos.
Indique as intersecções dessas bissetrizes com a circunferência por E, F G e H (o ponto E ficará entre os pontos B e C, o ponto F entre os pontos C e A, o ponto G entre os pontos A e D e o ponto H entre o ponto D e B).

2º PASSO
Trace os segmentos de reta AF, FC, CE, EB, BH, HD, DG e GA. Responda:
a) Ao traçar os segmentos AF, FC, CE, EB, BH, HD, DG e GA, qual polígono foi construído? Esse polígono é regular? Justifique.

b) Os segmentos de reta AB, CD, EG e FH decompõem o polígono em quantos triângulos? Qual é a classificação desses triângulos? Justifique.

c) A intersecção dos segmentos de reta AB, CD, EG e FH determinou quantos ângulos? Qual é a medida de cada um desses ângulos? Explique como você calculou essa medida.

d) Qual é a medida de cada ângulo interno $(A\hat{F}C, F\hat{C}E, C\hat{E}B, E\hat{B}H, B\hat{H}D, H\hat{D}G, D\hat{G}A, G\hat{A}F)$ do polígono construído? Explique que cálculos matemáticos você realizou para obter essas medidas (não é permitido utilizar o transferidor para realizar a medição desses ângulos).

APÊNDICE C

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA – CAMPUS IV
CENTRO DE CIÊNCIAS APLICADAS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Prezado(a) licenciando(a),
Pedimos que, por gentileza, você responda as perguntas do questionário abaixo. Este questionário servirá de base de dados para a pesquisa referente ao nosso Trabalho de Conclusão de Curso, e tem por objetivo a realização de um diagnóstico acerca das atividades desenvolvidas. Não é necessário identificar-se.

Agradecemos sua colaboração.

1) Você já havia utilizado algum dos instrumentos de desenho geométrico (régua, compasso, transferidor) em algum momento de sua vida escolar antes de ingressar na universidade? Quais instrumentos? Como foi essa utilização?

____
____
____
____

2) Com relação ao uso dos instrumentos de desenho geométrico (régua, compasso e transferidor), você considerou:

(a) Fácil (b) Médio (c) Difícil (d) Muito difícil

3) Quais dificuldades você encontrou durante as construções dos polígonos regulares?

____
____
____
____

4) Em sua opinião, você considera que as construções geométricas, com o uso dos instrumentos de desenho geométrico, ajudam na compreensão e visualização dos conceitos e propriedades dos polígonos regulares estudados? Justifique.

____
____
____