

Bruno Cartaxo Brunet Vilar

O Princípio de Fermat e a Geometria da Luz

João Pessoa - PB

2024

Bruno Cartaxo Brunet Vilar

O Princípio de Fermat e a Geometria da Luz

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Física da Universidade Federal da Paraíba, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física, na área de Gravitacão e Cosmologia.

Universidade Federal da Paraíba – UFPB

Centro de Ciências Exatas e da Natureza – CCEN

Departamento de Física – DF

Orientador: Prof. Dr. Carlos Augusto Romero Filho

João Pessoa - PB

2024

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

V697p Vilar, Bruno Cartaxo Brunet.
O Princípio de Fermat e a Geometria da Luz / Bruno
Cartaxo Brunet Vilar. - João Pessoa, 2024.
74 f. : il.

Orientação: Carlos Augusto Romero filho.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Geometria da luz. 2. Princípio de Fermat. 3.
Analogia óptico-mecânica. I. Romero filho, Carlos
Augusto. II. Título.

UFPB/BC

CDU 514.8(043)



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Física

Ata da Sessão Pública da Defesa de dissertação de **Mestrado** do aluno **Bruno Cartaxo Brunet Vilar**, candidato ao Título de Mestre em Física na Área de Concentração Gravitação e Cosmologia.

Aos vinte e cinco dias do mês de julho do ano de dois mil e vinte e quatro, às 16h00, na sala 201, reuniram-se os membros da Banca Examinadora constituída para avaliar a dissertação de Mestrado, na área de Gravitação e Cosmologia, de **Bruno Cartaxo Brunet Vilar**. A Banca Examinadora foi composta pelos(as) professores(as) doutores(as): Carlos Augusto Romero Filho (UFPB), orientador e presidente da banca examinadora, Valdir Barbosa Bezerra (UFPB) e Henrique Pereira de Oliveira (UERJ). Dando início aos trabalhos, o Prof. Carlos Augusto Romero Filho comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a palavra para o candidato para que o mesmo fizesse, oralmente, a exposição da pesquisa de dissertação intitulada “*O princípio de Fermat e a Geometria da Luz*”. Concluída a exposição, o candidato foi arguido pela Banca Examinadora, que emitiu o parecer “**aprovado**”. Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba expedir o respectivo diploma de Mestre em Física na forma da lei. E para constar, Ana Beatriz Cândido Vieira, Assistente em Administração, redigiu a presente ata que vai assinada pelos membros da Banca Examinadora. João Pessoa, Paraíba, **25 de julho de 2024**.

Prof. Dr. Carlos Augusto Romero Filho
Orientador - PPGF/UFPB

Prof. Dr. Valdir Barbosa Bezerra
PPGF/UFPB
Prof. Dr. Henrique Pereira de Oliveira
UERJ

Bruno Cartaxo Brunet Vilar

O Princípio de Fermat e a Geometria da Luz

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Física da Universidade Federal da Paraíba, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física, na área de Gravitacão e Cosmologia.

Dedico esse trabalho ao meu avô Brunet Crisanto(in memoriam).

Agradecimentos

Agradeço a Deus por sua presença na minha vida.

Agradeço aos meus pais (Flávia Cartaxo e Antonio Vilar) e minha irmã (Bárbara T. Brunet) por todo carinho e dedicação.

A minha mãe minha eterna gratidão, minha amiga, minha companheira nessa jornada. "Te amo mais que o infinito".

Minha avó (Honorina Maria Cartaxo) por esses anos de dedicação, cuidado e carinho, gratidão eterna.

Ao meu orientador Dr. Carlos Augusto Romero Filho, pelos ensinamentos, dedicação e oportunidade para participar da sua equipe. Grato por tudo grande professor.

A CAPES e ao programa de pós-graduação em Física por me motivarem a seguir a carreira acadêmica.

Menção honrosa aos meus amigos João Marcos, que me ajudou em parte da correção; Pedro Martins, que me deu a receita para meus remédios; e José Hugo Mascena, que me ajudou a abrir equações dos artigos.

*Nobody ever figures out what life is all about,
and it doesn't matter. Explore the world.
Nearly everything is really interesting
if you go into it deeply enough.
(Richard P. Feynman)*

Resumo

Nesta dissertação, consideramos inicialmente o princípio de Fermat, o qual descreve com simplicidade e precisão alguns processos ópticos, tais como a reflexão e refração da luz. Mostramos como o princípio de Fermat, que é válido no limite em que a óptica física pode ser aproximada pela óptica geométrica, é o ponto de partida para estabelecer uma analogia entre a óptica e a mecânica. Consideramos esta analogia em dois regimes: newtoniano e relativístico. Revisitamos, também, alguns dos mais importantes princípios variacionais da mecânica. Destacamos, por fim, como a presença de um meio refrativo conduz, através do princípio de Fermat, a uma “geometria da luz”.

Palavras-chave: Princípio de Fermat, Geometria da luz, Analogia óptico-mecânica.

Abstract

In this dissertation, we initially consider Fermat's principle, which describes some optical processes such as the reflection and refraction of light with simplicity and precision. We show how Fermat's principle, valid in the limit where physical optics can be approximated by geometrical optics, is the starting point for establishing an analogy between optics and mechanics. We consider this analogy in two regimes: Newtonian and relativistic. We also revisit some of the most important variational principles in mechanics. Finally, we highlight how the presence of a refractive medium leads, through Fermat's principle, to a "geometry of light."

Keywords: Fermat's principle, Geometry of light, Optical-mechanical analogy.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Segmento de corda sujeito às tensões T .	18
Figura 2 – Representação de uma onda senoidal e seus respectivos parâmetros.	19
Figura 3 – Onda longitudinal: a onda se propaga no mesmo sentido do deslocamento.	20
Figura 4 – Representação de ondas planas: seus campos são uniformes em todo plano perpendicular à direção de propagação.	23
Figura 5 – Interface separando dois meios distintos, 1 e 2, caracterizados pelas grandezas μ e ϵ . O campo eletromagnético está incidindo com um ângulo normal.	23
Figura 6 – A interface está separando dois meios distintos, 1 e 2, caracterizados pelas grandezas μ e ϵ ; logo cada meio tem seu respectivo número de onda. O campo eletromagnético está incidindo com um ângulo oblíquo.	27
Figura 7 – Campo elétrico paralelo ao plano de incidência.	29
Figura 8 – Campo elétrico perpendicular ao plano de incidência.	32
Figura 9 – Modelo primitivo de um átomo neutro. Quando um campo elétrico externo é aplicado, a distribuição das cargas é alterada, criando um momento de dipolo induzido. As moléculas apresentam um momento de dipolo. Nesse caso, o campo faz a molécula sofrer um torque.	33
Figura 10 – Graças às diferentes temperaturas entre a estrada e o ar acima dela, o índice de refração acaba por ficar não-homogêneo. Desta forma a luz se curva, formando o que chamamos de miragem.	36
Figura 11 – A frente de onda, ao se aproximar da abertura, sofre o fenômeno de difração. Na primeira situação o comprimento de onda e a largura da fenda não são tão diferentes. No segundo caso, o comprimento de onda é maior, fazendo com que a difração seja mais perceptível, já que houve uma maior alteração na forma da frente de onda.	38
Figura 12 – Cada ponto da frente de onda funciona como uma fonte. Após ter percorrido uma distância $v\Delta t$, uma nova frente de onda é gerada devido às contribuições das ondas esféricas.	39
Figura 13 – O raio incidente forma um ângulo θ_i , tendo valor igual ao refletido, θ_r . Parte do raio é refratada por um ângulo θ_t , ao passar para um meio com índice de refração diferente.	40
Figura 14 – Nessa configuração, observamos que, pelos ângulos formados com a normal, $n_2 > n_1$. Dentre os vários trajetos possíveis entre os dois meios refrativos (linhas tracejadas), a luz segue aquele que leva o menor tempo, representado pela linha vermelha.	42

Figura 15 – A luz passa por diferentes camadas de materiais,i.e diferentes índices de refração. Em cada interface pode-se aplicar a lei de Snell, obtendo-se a trajetória da luz.	43
Figura 16 – A variação no Princípio de Maupertuis é feita em relação ao tempo, deslocando a curva por uma quantidade Δt	49
Figura 17 – Representação da Lei de Snell na analogia newtoniana. O índice de refração, para os dois meios, não varia na direção x	56
Figura 18 – As elipses representam a trajetória percorrida pela luz, com um índice de refração que corresponde ao potencial de Hooke, na mecânica clássica. Elas se encontram na circunferência de raio unitária, onde tem-se $n = 1$.	58
Figura 19 – Representação da lente de Lunenburg.	59

Sumário

1	INTRODUÇÃO	14
2	A TEORIA DAS ONDAS E SUA APLICAÇÃO AO ELETROMAGNETISMO.	17
2.1	Ondas mecânicas.	17
2.2	Ondas eletromagnéticas	20
2.3	Reflexão e transmissão	22
2.4	Absorção	33
3	TRANSIÇÃO DA ÓPTICA FÍSICA PARA A GEOMÉTRICA.	36
3.1	Equação da eikonal	36
3.2	Óptica geométrica	38
3.3	Princípio de Fermat	41
4	FUNDAMENTOS E FORMALISMO DO CÁLCULO VARIACIONAL	44
4.1	Equação de Euler	44
4.2	Equações de Euler-Lagrange	46
4.3	Equações canônicas de Hamilton.	47
4.4	O Princípio de Maupertuis.	48
4.5	O Princípio de Jacobi	52
5	O PRINCÍPIO DE FERMAT NA MECÂNICA NEWTONIANA.	53
5.1	Analogia Newtoniana	53
5.2	A Lei de Snell	56
5.3	O Oscilador harmônico	57
5.4	Órbitas circulares.	60
6	O PRINCÍPIO DE FERMAT NA RELATIVIDADE GERAL	63
6.1	O índice de refração na relatividade	63
6.2	A métrica de Schwarzschild	65
6.3	Equações de movimento para partículas.	69
6.4	Equações de movimento generalizadas.	71
7	CONCLUSÃO E CONSIDERAÇÕES FINAIS	73

REFERÊNCIAS	74
-----------------------	----

1 Introdução

Esta dissertação versa sobre o princípio de Fermat, considerado o primeiro princípio variacional a ser aplicado à física, dando também origem a um novo ramo da matemática: o cálculo das variações. Embora tenha sido formulado no contexto da óptica geométrica em 1662, quando ainda se desconhecia por completo a natureza eletromagnética da luz, o princípio de Fermat inspirou diretamente Johann Bernoulli, em 1696 a propor e resolver o famoso problema da braquistócrona. (LEMOS, 2013) Dessa maneira, podemos dizer que as ideias de Fermat foram precursores dos vários princípios variacionais da mecânica clássica a partir dos trabalhos de Maupertuis (1744), Euler (1750), Lagrange (1760), Hamilton (1833), Jacobi (1884), sem mencionar a importante influência desses desenvolvimentos que inspiraram Dirac (1933) e Feynman (1984), na formulação da mecânica quântica em termos de integrais de trajetória.

Sabemos que a partir do princípio de Fermat podemos deduzir as conhecidas leis da reflexão e refração da luz, leis empíricas conhecidas muito antes do advento da óptica física, fundamentada inteiramente nas equações de Maxwell do eletromagnetismo.

O princípio de Fermat conduz, talvez um tanto surpreendentemente, ao estabelecimento de uma analogia fascinante entre a óptica e a mecânica clássica, mais especificamente a um certo tipo de equivalência formal entre raios ópticos e a trajetória de partículas (EVANS; ROSENQUIST, 1986).

Um outro tipo de analogia entre a óptica e a mecânica reapareceu surpreendentemente na formulação de Hamilton-Jacobi da mecânica, em que o movimento de uma partícula pode ser representado como uma onda. A equação da onda que está associada ao movimento da partícula é muito similar, embora não seja idêntica, à equação de Schrödinger, que foi bastante inspirada pela conjectura de Hamilton da existência de uma onda associada a uma partícula (LEMOS, 2013)(SPIVAK, 2010).

O elemento fundamental de ligação entre as descrições do movimento de partículas e raios de luz está no fato de que nos meios mais refrativos considerados o índice de refração n é variável, sendo representado por uma função escalar $n = n(x, y, z)$. É esta característica do meio que nos permite interpretar n , ou, mais precisamente, n^2 , como definindo uma “energia potencial óptica”, à qual está associada uma “força” responsável por curvar os raios luminosos no meio.

Uma interpretação geométrica do princípio de Fermat está no fato de que n pode ser visto formalmente como definindo uma transformação conforme da métrica euclidiana, que descreve o espaço físico, levando a uma geometria espacial riemanniana. As trajetórias dos raios luminosos correspondem, então, às geodésicas desse novo espaço, cujas propriedades

geométricas são dadas por esta “métrica de Fermat”, constituindo, assim uma “geometria da luz”(LEONHARDT; PHILBIN, 2010).

O princípio de Fermat, como é formulado usualmente, tem sua validade limitada a uma aproximação, a saber, o limite em que a óptica física pode ser modelada pela óptica geométrica. Sabemos que isto acontece apenas para os casos em que o comprimento da onda eletromagnética é muito menor do que o comprimento característico do aparato considerado, como, por exemplo, quando consideramos fendas no caso da difração. Sendo assim, podemos indagar como seria a forma do princípio de Fermat em contextos mais gerais, como na teoria da relatividade, em que a geometria do espaço-tempo é descrita por uma métrica pseudo-riemanniana. Ora, como estamos considerando a propagação da luz num meio material, e não no vácuo, então devemos usar os métodos da relatividade geral, ou seja, temos que adotar o formalismo geométrico adaptado para o espaço-tempo curvo (LEONHARDT; PHILBIN, 2010)(LANDAU; LIFSHITZ, 1975). Nesse caso, o índice de refração aparece como parte do tensor métrico[(LANDAU; LIFSHITZ, 1975)(FELICE, 1971)]. A demonstração de que o princípio de Fermat é válido num espaço-tempo curvo foi feita pela primeira vez por Weyl em 1917 e considera apenas um espaço tempo estático, isto é, que possui um vetor de Killing do tipo tempo $\frac{\partial}{\partial t}$. O fato de que a trajetória da luz segue uma curva, que minimiza o tempo de chegada medido pelos relógios de um referencial cujas linhas de universo de seus observadores são as curvas integrais de $\frac{\partial}{\partial t}$, é obtido simplesmente a partir do postulado da relatividade, que afirma que, no espaço-tempo, a luz segue geodésicas nulas(WEYL, 1917)(NITYANANDA; SAMUEL, 1992)(ADLER et al., 1965)(LEVI-CIVITA, 1918)].

Embora a generalização completa do princípio de Fermat não tenha sido possível para um espaço-tempo qualquer, independentemente da existência de um vetor de Killing do tipo-tempo. De qualquer maneira, nos casos possíveis temos uma belíssima conexão entre a óptica geométrica, a mecânica clássica e o movimento geodésico da luz num espaço-tempo curvo.

Finalmente, podemos dizer que o estabelecimento dessa conexão entre três áreas aparentemente independentes da física só foi possível após um importante resultado obtido por Plebanski (PLEBANSKI, 1960). De fato, em 1960 este físico polonês mostrou que num espaço-tempo dotado de um tensor métrico $g_{\alpha\beta}$, as equações de Maxwell podem ser reescritas como se o espaço-tempo fosse o espaço-tempo de Minkowski e houvesse um meio óptico com certas equações constitutivas, de maneira que o campo gravitacional se comportasse como um meio óptico.

Esta dissertação está organizada como se segue. No capítulo 2, revisitamos alguns tópicos do eletromagnetismo incluindo a propagação de ondas eletromagnéticas na presença de um meio, examinando com certo detalhe o fenômeno de reflexão e transmissão. No capítulo seguinte, deduzimos a equação da eikonal e obtemos, como limite da óptica

ondulatória a óptica geométrica. O princípio de Fermat é discutido no final do capítulo 3. No capítulo 4, fazemos uma revisão dos principais princípios variacionais da mecânica, tendo em vista uma aplicação destes princípios à analogia entre a óptica geométrica e a mecânica clássica. Os capítulos 5 e 6 constituem o cerne desta dissertação. No primeiro, desenvolvemos o arcabouço teórico que permite traçar uma analogia da trajetória da luz num meio refrativo com o movimento de partículas na mecânica clássica. No capítulo 6, mostramos como é possível estender o princípio de Fermat para o espaço-tempo curvo, no contexto da teoria da relatividade geral. Concluimos, no capítulo 7, com algumas considerações finais e perspectivas de uma futura pesquisa neste tema.

2 A teoria das ondas e sua aplicação ao eletromagnetismo.

Para compreender o comportamento da luz, é essencial considerá-la como uma onda, em conformidade com as equações de Maxwell. Estas equações descrevem a dinâmica dos campos elétricos e magnéticos e são fundamentais para a teoria do eletromagnetismo. Nesse caso, a luz é abordada no contexto da óptica física. Através dessa abordagem, explicaremos alguns dos diversos fenômenos ópticos, nesse capítulo usaremos bastante as referências (GRIFFITHS, 2021) e (MACHADO, 2014).

2.1 Ondas mecânicas.

Na óptica física, o comportamento da luz é explicado por meio da teoria ondulatória e do eletromagnetismo, permitindo-nos descrever a luz em termos das equações de onda do campo elétrico e do campo magnético. Começemos por definir o que é uma onda mecânica.

Uma onda mecânica é um distúrbio em um meio contínuo que se propaga com uma forma e uma velocidade constante ¹. Um exemplo é uma corda sujeita a um pulso em uma de suas extremidades. Para representar o deslocamento desta onda num ponto z , em um tempo t usaremos a função $f(z, t)$. Após um deslocamento vt para a direita, temos

$$f(z, t) = f(z - vt, 0) = g(z - vt), \quad (2.1)$$

onde $f(z, 0)$ é o formato inicial da onda. A função $f(z, t)$, deve satisfazer a equação

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}, \quad (2.2)$$

Esta equação pode ser obtida por meio da segunda lei de Newton. De acordo com a figura abaixo (1), vemos que a componente z da força em um segmento de corda é:

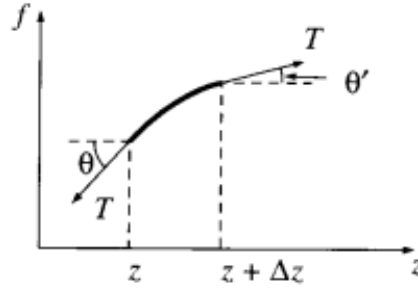
$$\Delta F = T \sin \theta' - T \sin \theta. \quad (2.3)$$

Com os ângulos sendo pequenos o suficiente, podemos fazer a seguinte aproximação

$$\sin \theta \cong \tan \theta. \quad (2.4)$$

Substituindo (2.4) em (2.1), obtemos

¹ Estamos aqui, desconsiderando os meios em que ocorrem absorção e dispersão.

Figura 1 – Segmento de corda sujeito às tensões T .

Fonte: (GRIFFITHS, 2021)

$$\Delta F \cong T(\tan\theta' - \tan\theta) \cong T\left(\frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{z+\Delta z} - \frac{\partial f}{\partial z}\Big|_z\right) \cong T\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\Delta z. \quad (2.5)$$

De acordo com a segunda Lei de Newton

$$\Delta F = \mu(\Delta z)\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}, \quad (2.6)$$

onde μ é a densidade de massa por unidade de comprimento da corda, obtemos uma equação da forma de (2.2)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\mu}{T}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}, \quad (2.7)$$

em que o fator μ/T se relaciona com a velocidade da onda v por meio de

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}. \quad (2.8)$$

Uma solução que satisfaz essa equação de onda é a função

$$f(z, t) = A\cos[k(z - vt) + \delta] \quad (2.9)$$

onde, A é a amplitude; o argumento do $\cos^2$ é a fase, que é zero em $z = vt - \frac{\delta}{k}$. Logo δ/k é o desvio da origem até o máximo central; δ a constante de fase (com valores entre $0 \leq \delta < 2\pi$); e, por fim, k o número de onda. O cosseno completa um ciclo quando z avança $2\pi/k$, de onde segue a definição do comprimento de onda

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}. \quad (2.10)$$

Portanto a velocidade da onda é dada por

² A função também pode ser o *sen*, levando-se em conta que o *cos* está defasado $\frac{\pi}{2}rad$ em relação a ele.

Figura 2 – Representação de uma onda senoidal e seus respectivos parâmetros.

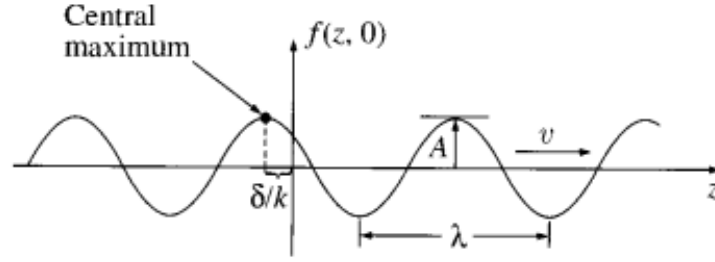


Figure 9.3

Fote: (GRIFFITHS, 2021)

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{2\pi}{kT}. \quad (2.11)$$

onde T , nesse caso, é o período da onda. Desse modo, como a frequência ν é o inverso do período, temos

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{kv}{2\pi} = \frac{v}{\lambda}. \quad (2.12)$$

Uma outra forma de escrever (2.9) é:

$$f(z, t) = A \cos(kz - \omega t + \delta), \quad (2.13)$$

onde

$$\omega = 2\pi\nu = kv, \quad (2.14)$$

é a frequência angular da onda. Em (2.13) a onda está se movendo para a direita. Se a onda estivesse indo para a esquerda, ocorreria uma mudança nos sinais de ωt e δ . Nesse caso, como o cosseno é uma função par, a diferença entre uma onda se propagando para a direita ou para a esquerda está no sinal de k .

Para facilitar os cálculos da seção seguinte, referente às ondas eletromagnéticas, é conveniente introduzir a notação complexa. Utilizando a fórmula de Euler, a função $f(z, t)$ pode ser escrita como

$$f(z, t) = \text{Re}[Ae^{i(kz - \omega t + \delta)}], \quad (2.15)$$

com Re representando a parte real da função complexa

$$\tilde{f}(z, t) = \tilde{A}e^{i(kz - \omega t)}. \quad (2.16)$$

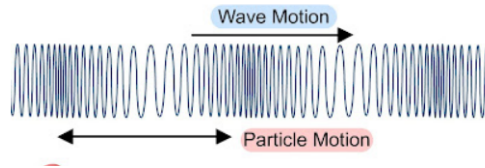
Basta se extrair a parte real dessa equação para se obter a expressão física da função de onda. Vale mencionar que a solução geral da equação (2.2) pode ser expressa como uma superposição de Fourier,

$$\tilde{f}(z, t) = \int \tilde{A}e^{i(kz - \omega t)} dk, \quad (2.17)$$

onde $\tilde{A}$ e ω são funções de k .

Uma onda se propagando em uma corda é o que chamamos de onda transversal, ou seja, o deslocamento na corda é perpendicular a direção de propagação, figura (2). Já a propagação do som no ar é uma onda longitudinal, o deslocamento é paralelo a direção de propagação com as partículas de ar oscilando para trás e para frente, um movimento de compressão e descompressão.

Figura 3 – Onda longitudinal: a onda se propaga no mesmo sentido do deslocamento.



Fonte: <https://frazerphysics.blogspot.com/2011/03/32-longitudinal-and-transverse-waves.html>

Levando-se em conta a polarização, o sentido de vibração da onda descrita pela equação (2.16), propagando-se ao longo de z com deslocamento em x toma a forma

$$\tilde{\mathbf{f}}(z, t) = \tilde{A}e^{i(kz - \omega t)} \hat{\mathbf{x}}, \quad (2.18)$$

Para generalizar, introduzimos o vetor propagação $\mathbf{k}$, logo

$$\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{r}, t) = \tilde{A}e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \hat{\mathbf{n}} \quad (2.19)$$

representa uma onda se propagando em $\mathbf{r}$ com uma polarização em $\hat{\mathbf{n}}$. Para o caso de ondas transversais, o produto interno $\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ é nulo, indicando que a direção de polarização é perpendicular à direção de propagação da onda.

2.2 Ondas eletromagnéticas

Durante muito tempo a eletricidade e o magnetismo eram vistos como tópicos separados, até que James Clerk Maxwell conseguiu unificá-los a partir de quatro equações

diferenciais, criando então a teoria do eletromagnetismo. Como veremos, essas equações admitem ondas como soluções. Maxwell acreditava que os campos elétricos e magnéticos se propagavam através de um éter, ideia essa abandonada depois do advento da teoria da relatividade em 1905.

As equações de Maxwell para regiões sem carga ou corrente são:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (2.20)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.21)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.22)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (2.23)$$

Ao aplicarmos o operador rotacional na última equação, temos

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B} = \nabla \times \left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right), \quad (2.24)$$

usando (2.21) e (2.22), obtemos uma equação que não depende do campo elétrico:

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}. \quad (2.25)$$

De maneira análoga, para o campo elétrico

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = \nabla \times \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right), \quad (2.26)$$

o que nos leva a

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (2.27)$$

Essas são as equações de onda do campo magnético e do campo elétrico. Além disso, por (2.8), identificamos a velocidade da onda eletromagnética no vácuo como sendo dada por

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = c, \quad (2.28)$$

onde c é a velocidade da luz no vácuo, lembrando que ϵ_0 e μ_0 são as constantes de permissividade elétrica e permissividade magnética no vácuo, respectivamente. Isso implica que a luz é uma onda eletromagnética, estabelecendo as equações de Maxwell como o

fundamento teórico da óptica. Porém no caso da propagação de ondas na presença da matéria,

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}. \quad (2.29)$$

Isto nos leva a escrever

$$v = \frac{c}{n}, \quad (2.30)$$

em que n é o índice de refração do meio, a razão entre a velocidade da luz no vácuo e sua velocidade em determinado meio material, ou seja,

$$n \equiv \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}}. \quad (2.31)$$

Como $n \geq 1$ vemos que a luz viaja com velocidade menor em meios que não são o vácuo.

2.3 Reflexão e transmissão

Usando a notação dada por (2.16), os campos elétrico e magnético se propagando ao longo do eixo z , são:

$$\tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{i(kz - \omega t)}, \quad (2.32)$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \tilde{\mathbf{B}}_0 e^{i(kz - \omega t)}, \quad (2.33)$$

por simplicidade, estamos considerando ondas monocromáticas, isto é, de mesma frequência. Além disso, as ondas acima são ondas planas, pois seus campos são uniformes em qualquer plano perpendicular a z .

Pelas equações de Maxwell (2.20) e (2.21), podemos mostrar facilmente que as ondas eletromagnéticas (2.32) e (2.33) são transversais. Por outro lado de (2.22) ou (2.23), podemos mostrar que

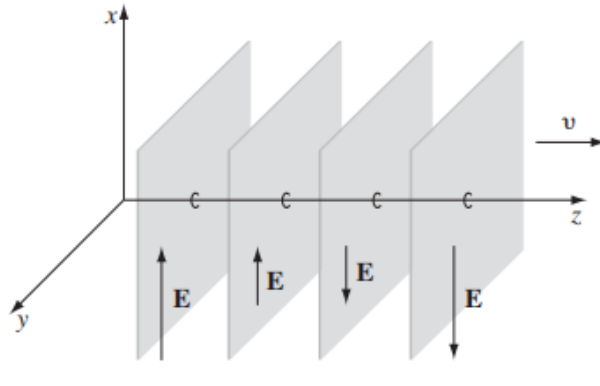
$$\tilde{\mathbf{B}}_0 = \frac{k}{\omega} (\hat{\mathbf{z}} \times \tilde{\mathbf{E}}_0). \quad (2.34)$$

Assim, a parte real da amplitude de $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ nos dá

$$B_0 = \frac{k}{\omega} E_0 = \frac{1}{c} E_0, \quad (2.35)$$

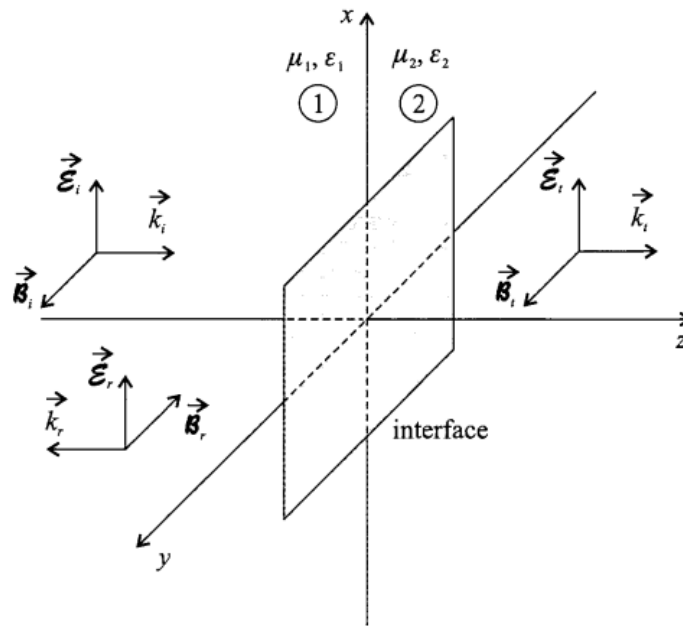
Para o fenômeno de reflexão e transmissão, consideramos que a separação entre dois meios diferentes se dá no plano xy , e que a onda incidente é normal a este plano, conforme representado na figura abaixo.

Figura 4 – Representação de ondas planas: seus campos são uniformes em todo plano perpendicular à direção de propagação.



Fonte: (GRIFFITHS, 2021)

Figura 5 – Interface separando dois meios distintos, 1 e 2, caracterizados pelas grandezas μ e ϵ . O campo eletromagnético está incidindo com um ângulo normal.



Fonte: (MACHADO, 2014)

Consideremos o aqui o campo elétrico incidente dado por

$$\tilde{\mathbf{E}}_i(z, t) = \tilde{E}_{0i} e^{i(k_1 z - \omega t)} \hat{\mathbf{x}}. \quad (2.36)$$

Logo, neste caso a onda está indo da esquerda para a direita. Usando a relação (2.35), o campo magnético incidente fica³

³ Aqui c é substituído pela velocidade do meio, já que não estamos no vácuo.

$$\tilde{\mathbf{B}}_i(z, t) = \frac{1}{v_1} \tilde{E}_{0i} e^{i(k_1 z - wt)} \hat{\mathbf{y}}. \quad (2.37)$$

Na interface uma parte da onda será refletida, dada pelas equações

$$\tilde{\mathbf{E}}_r = \tilde{E}_{0r} e^{(-k_1 z - wt)} \hat{\mathbf{x}}, \quad (2.38)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_r = -\frac{1}{v_1} \tilde{E}_{0r} e^{(-k_1 z - wt)} \hat{\mathbf{y}}, \quad (2.39)$$

em que o sinal de menos se deve ao fato da onda refletida estar se propagando para a esquerda. Já a parte transmitida será descrita pelas equações

$$\tilde{\mathbf{E}}_t = \tilde{E}_{0t} e^{i(k_2 z - wt)} \hat{\mathbf{x}}, \quad (2.40)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_t = \frac{1}{v_2} \tilde{E}_{0t} e^{i(k_2 z - wt)} \hat{\mathbf{y}}. \quad (2.41)$$

Admitimos que as condições de contorno na interface, são

$$\epsilon_1 E_1^\perp = \epsilon_2 E_2^\perp, \quad (2.42)$$

$$B_1^\perp = B_2^\perp, \quad (2.43)$$

$$\vec{E}_1^\parallel = \vec{E}_2^\parallel, \quad (2.44)$$

$$\frac{1}{\mu_1} \vec{B}_1^\parallel = \frac{1}{\mu_2} \vec{B}_2^\parallel, \quad (2.45)$$

em $z = 0$. Como a incidência é normal ao plano, não há componentes perpendiculares, só sendo necessário usar (2.44) e (2.45), o que leva respectivamente às equações,

$$\tilde{E}_{0i} + \tilde{E}_{0r} = \tilde{E}_{0t}, \quad (2.46)$$

e

$$\frac{1}{\mu_1} \left(\frac{1}{v_1} \tilde{E}_{0i} - \frac{1}{v_1} \tilde{E}_{0r} \right) = \frac{1}{\mu_2} \frac{1}{v_2} \tilde{E}_{0t}. \quad (2.47)$$

Definindo

$$\alpha = \frac{v_1 \mu_1}{v_2 \mu_2}, \quad (2.48)$$

e com o uso de (2.30) temos:

$$\alpha = \frac{n_2 \mu_1}{n_1 \mu_2}. \quad (2.49)$$

Assim, (2.47) pode ser expressa na forma

$$\tilde{E}_{0i} - \tilde{E}_{0r} = \alpha \tilde{E}_{0t}. \quad (2.50)$$

Basta agora resolver o sistema dado pelas equações (2.46) e (2.50). É plausível escrever a onda refletida e transmitida em função da onda incidente, lembrando que queremos saber o comportamento destas e também pelo fato de em uma medição laboratorial o valor da onda incidente já ser conhecido. A solução do sistema é

$$\tilde{E}_{0r} = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \tilde{E}_{0i} \quad (2.51)$$

e

$$\tilde{E}_{0t} = \frac{2}{1 + \alpha} \tilde{E}_{0i} \quad (2.52)$$

Para a situação em que a permeabilidade magnética é próxima ao seu valor no vácuo

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_0, \quad (2.53)$$

o valor de α , dado por (2.48), fica

$$\alpha = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (2.54)$$

Deste modo, as ondas refletida e transmitida são dadas por

$$\tilde{E}_{0r} = \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} \tilde{E}_{0i} \quad (2.55)$$

e

$$\tilde{E}_{0t} = \frac{2v_2}{v_2 + v_1} \tilde{E}_{0i}. \quad (2.56)$$

Com a velocidade de propagação do meio 2 sendo menor que aquela no meio 1, ocorre uma inversão de fase na onda refletida, já que teremos um sinal negativo na expressão, (2.55). As equações (2.55) e (2.56) também descrevem o comportamento de ondas em uma corda, podendo se chegar a elas usando (2.16) e as condições de contorno.

A energia total armazenada em um campo eletromagnético tem duas contribuições: uma devida ao trabalho necessário para montar um sistema de cargas estáticas

$$W_E = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 dV, \quad (2.57)$$

e outra, devida ao trabalho necessário para manter uma corrente contrária à força eletromotriz

$$W_B = \frac{1}{2\mu} \int B^2 dV, \quad (2.58)$$

sendo estas integrações efetuadas em todo o volume V . Então a energia total, por unidade de volume, é

$$u = \frac{1}{2}(\epsilon E^2 + \frac{1}{\mu} B^2). \quad (2.59)$$

Usando (2.35) e lembrando que agora estamos lidando com a função de onda real, a energia corresponde a⁴

$$u = \epsilon E^2 = \epsilon E_0^2 \cos^2(kz - wt + \delta). \quad (2.60)$$

O fluxo da densidade de energia por unidade de tempo e de área transportada pelo campo é determinado pelo vetor de Poynting

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu} (E \times \vec{B}). \quad (2.61)$$

A luz apresenta um grande período de oscilações, sendo então mais interessante saber o valor médio do vetor de Poynting,

$$I = \langle S \rangle = \frac{1}{2} \epsilon v E_0^2, \quad (2.62)$$

onde I representa a intensidade. Para saber o quanto da onda sofre reflexão e transmissão, tem-se que calcular os coeficientes de reflexão e transmissão

$$R = \frac{I_r}{I_i} = \left(\frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} \right)^2, \quad T = \frac{I_t}{I_i} = \frac{4v_2^3 \epsilon_2}{\epsilon_1 v_1 (v_2 + v_1)^2}. \quad (2.63)$$

Uma forma mais conveniente de escrever estes coeficientes é expressá-los em função de n . Usando a definição de α , (2.54) e lembrando da aproximação considerada, $n = \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}}$, estes ficam

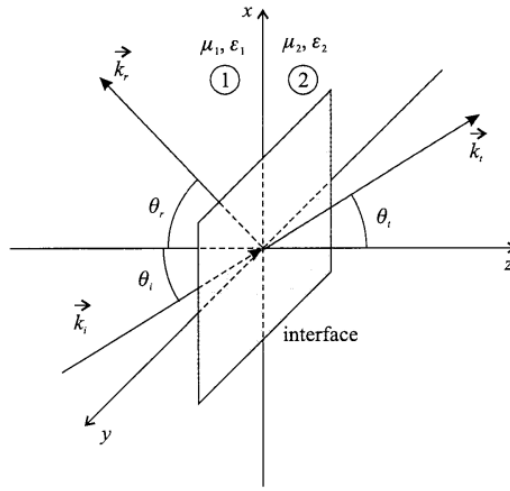
⁴ Como a propagação das ondas que estamos lidando não se dá no vácuo, os coeficientes não tem o índice zero.

$$R = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2 \quad T = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}. \quad (2.64)$$

Estes coeficientes representam frações relacionadas a onda incidente; portanto $R + T = 1$.

Caso a onda esteja incidindo no plano, com um ângulo θ diferente de zero, teremos uma incidência oblíqua (6).

Figura 6 – A interface está separando dois meios distintos, 1 e 2, caracterizados pelas grandezas μ e ϵ ; logo cada meio tem seu respectivo número de onda. O campo eletromagnético está incidindo com um ângulo oblíquo.



Fonte: (MACHADO, 2014)

Nessa situação, usaremos o vetor propagação, as equações do campo elétrico e campo magnético incidentes, que, com essa notação são dadas por

$$\tilde{\mathbf{E}}_i(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}_{0i} e^{i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad \tilde{\mathbf{B}}_i(z, t) = \frac{1}{v_1} (\mathbf{k}_i \times \tilde{\mathbf{E}}_i), \quad (2.65)$$

dando origem, respectivamente, às ondas refletidas e transmitidas

$$\tilde{\mathbf{E}}_r(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}_{0r} e^{i(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad \tilde{\mathbf{B}}_r(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{v_1} (\mathbf{k}_r \times \tilde{\mathbf{E}}_r), \quad (2.66)$$

$$\tilde{\mathbf{E}}_t(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}_{0t} e^{i(\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad \tilde{\mathbf{B}}_t(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{v_2} (\mathbf{k}_t \times \tilde{\mathbf{E}}_t). \quad (2.67)$$

As equações (2.42) a (2.45), podem ser escritas na forma simplificada

$$()e^{i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - wt)} + ()e^{i(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - wt)} = ()e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - wt)}, \quad (2.68)$$

onde os termos em parênteses devem ser preenchidos por cada condição de contorno adequada.

As condições de contorno devem ser válidas para todo x, y e t ; logo as exponenciais devem ser iguais, quando $z = 0$. Os expoentes de (2.68) já são iguais em relação ao tempo. Para serem iguais em relação às coordenadas espaciais, em $z = 0$, deve-se ter

$$\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}. \quad (2.69)$$

Em $x = 0$, temos

$$yk_{i_y} = yk_{r_y} = ykt_y, \quad (2.70)$$

ou seja,

$$k_{i_y} = k_{r_y} = kt_y. \quad (2.71)$$

Analogamente, em $y = 0$, teremos

$$k_{i_x} = k_{r_x} = kt_x. \quad (2.72)$$

Portanto, fica nítido que os vetores $\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_r$ e $\mathbf{k}_t$ estão contidos no mesmo plano, o plano de incidência, que também contém o vetor normal ao plano, sendo θ o ângulo entre os vetores de $\mathbf{k}$ e o vetor normal ao plano. Assim,

$$k_i \text{sen} \theta_i = k_r \text{sen} \theta_r = k_t \text{sen} \theta_t. \quad (2.73)$$

Agora usaremos o fato de que a frequência da onda não muda ao sofrer reflexão ou transmissão. Por meio de (2.14), obtemos

$$w = k_i v_1 = k_r v_1 = k_t v_2. \quad (2.74)$$

Isolando k , segue

$$k_i = k_r = \frac{v_2}{v_1} k_t = \frac{n_1}{n_2} k_t. \quad (2.75)$$

Substituindo esses valores em (2.73), obtemos a lei de Snell

$$n_1 \text{sen} \theta_i = n_2 \text{sen} \theta_t. \quad (2.76)$$

Já para a onda refletida, teremos

$$\text{sen} \theta_i = \text{sen} \theta_r, \quad (2.77)$$

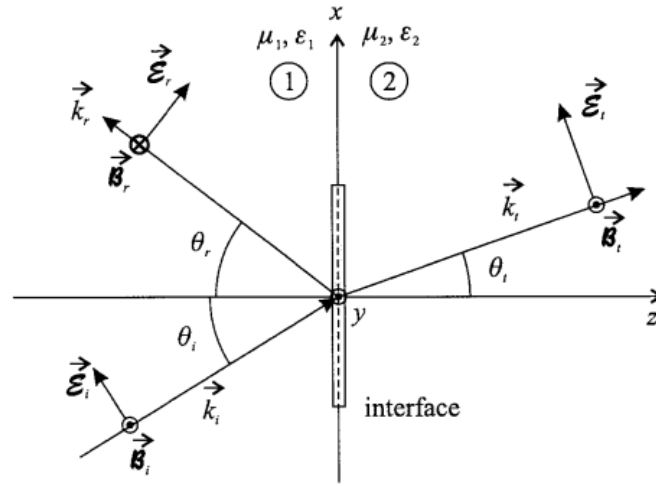
implicando

$$\theta_i = \theta_r, \quad (2.78)$$

sendo está a lei da reflexão. Essas leis voltarão a serem discutidas na seção de óptica geométrica.

Duas situações de grande importância correspondem ao campo elétrico paralelo ao plano de incidência ou perpendicular, figuras (7) e (8); pois uma onda polarizada em uma direção, pode ser decomposta em ondas polarizadas em x e em y . Para o primeiro caso,

Figura 7 – Campo elétrico paralelo ao plano de incidência.



Fonte: (MACHADO, 2014)

De forma análoga ao caso anterior, usaremos as condições contorno para obter as expressões das ondas refletida e transmitida. Como foi discutido em (2.68) as exponenciais se cancelam, e pela primeira condição (2.42), temos

$$\epsilon_1(-\tilde{E}_{0i}\sin\theta_i + \tilde{E}_r\sin\theta_r) = -\epsilon_2\tilde{E}_{0t}\sin\theta_t. \quad (2.79)$$

Vale lembrar que o versor normal ao plano, aponta para fora dele. Usando a lei da reflexão e a lei de Snell, reescrevemos a equação acima como

$$\epsilon_1(-\tilde{E}_{0i}\sin\theta_i + \tilde{E}_{0r}\sin\theta_i) = \frac{n_1}{n_2}\tilde{E}_{0t}\sin\theta_i. \quad (2.80)$$

Logo

$$\tilde{E}_{0i} - \tilde{E}_{0r} = \frac{\epsilon_2 n_1}{\epsilon_1 n_2} \tilde{E}_{0i}. \quad (2.81)$$

Assim, eliminamos os ϵ 's e dos n 's, por meio de (2.29) e (2.30). Dessa forma

$$\tilde{E}_{0_i} - \tilde{E}_{0_r} = \frac{v_1\mu_1}{v_2\mu_2} \tilde{E}_{0_t}. \quad (2.82)$$

Novamente, definimos α como

$$\alpha = \frac{v_1\mu_1}{v_2\mu_2}, \quad (2.83)$$

de onde obtém-se

$$\tilde{E}_{0_i} - \tilde{E}_{0_r} = \alpha \tilde{E}_{0_t}. \quad (2.84)$$

A segunda condição de contorno, (2.43), resulta em zero, pois o campo magnético não é paralelo ao plano. Já para (2.44), teremos, temos

$$\tilde{E}_{0_i} \cos\theta_i + \tilde{E}_{0_r} \cos\theta_r = \tilde{E}_{0_t} \cos\theta_t. \quad (2.85)$$

Novamente, usando a lei da reflexão ($\theta_i = \theta_r$)

$$\tilde{E}_{0_i} + \tilde{E}_{0_r} = \frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i} \tilde{E}_{0_t}. \quad (2.86)$$

Definindo

$$\beta = \frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i}, \quad (2.87)$$

ficamos com

$$\tilde{E}_{0_i} + \tilde{E}_{0_r} = \beta \tilde{E}_{0_t}. \quad (2.88)$$

A última condição de contorno resultaria na equação (2.84), com procedimento análogo ao que foi feito para o caso da incidência normal. Então, é suficiente resolver o sistema de equações dadas por (2.84) e (2.88), cujas soluções são

$$\tilde{E}_{0_r} = \frac{\beta - \alpha}{\beta + \alpha} \tilde{E}_{0_i} \quad (2.89)$$

e

$$\tilde{E}_{0_t} = \frac{2}{\beta + \alpha} \tilde{E}_{0_i}. \quad (2.90)$$

Essas duas soluções são as equações de Fresnel. Outro par de equações é obtido para o caso, em que $\mathbf{E}$ é perpendicular ao plano de incidência, esta situação será examinada mais adiante. Analisando essas duas equações, vê-se que para $\beta < \alpha$ a onda refletida é defasada em 180° em relação à onda incidente. Já a onda transmitida, esta se encontra sempre em

fase. A partir da definição (2.87), fica clara a dependência entre θ_i e as amplitudes das ondas transmitidas e refletidas. Usando a lei de Snell, (2.76), β torna-se

$$\beta = \frac{\sqrt{1 - \text{sen}^2 \theta_t}}{\cos \theta_i} = \frac{\sqrt{1 - (\frac{n_1}{n_2})^2 \text{sen}^2 \theta_i}}{\cos \theta_i}. \quad (2.91)$$

Para recuperar o resultado da incidência normal, basta tomar $\theta_i = 0$. Outro caso limite é quando $\theta_i = 90^\circ$; nesse caso, a onda sofrerá apenas reflexão total, sem transmissão. Da mesma forma, assim como podemos ter apenas reflexão, também podemos somente ter o fenômeno de transmissão. Isso ocorre quando $\beta = \alpha$, conforme (2.89). Logo, através de (2.91)

$$\alpha^2 = \frac{1 - (\frac{n_1}{n_2})^2 \text{sen}^2 \theta_B}{\cos^2 \theta_B} = \frac{1 - (\frac{n_1}{n_2})^2 \text{sen}^2 \theta_B}{1 - \text{sen}^2 \theta_B}, \quad (2.92)$$

onde θ_B é o ângulo de Brewster. Resolvendo-se para $\text{sen} \theta$, achamos

$$\text{sen}^2 \theta_B = \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2 - (\frac{n_1}{n_2})^2}. \quad (2.93)$$

Define-se o ângulo de Brewster como sendo o valor de θ no qual toda a onda é transmitida, o que ocorre quando o campo é paralelo ao plano de incidência.

Destes resultados, pode-se calcular o valor da intensidade. Como o vetor de onda nesse caso tem duas componentes, o vetor de Poynting será dado por

$$S = \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{z}}, \quad (2.94)$$

com as intensidades sendo

$$I_i = \frac{1}{2} \epsilon_1 v_1 E_{0i}^2 \cos \theta_i, \quad (2.95)$$

$$I_r = \frac{1}{2} \epsilon_1 v_1 E_{0r}^2 \cos \theta_r, \quad (2.96)$$

e

$$I_t = \frac{1}{2} \epsilon_1 v_2 E_{0t}^2 \cos \theta_t. \quad (2.97)$$

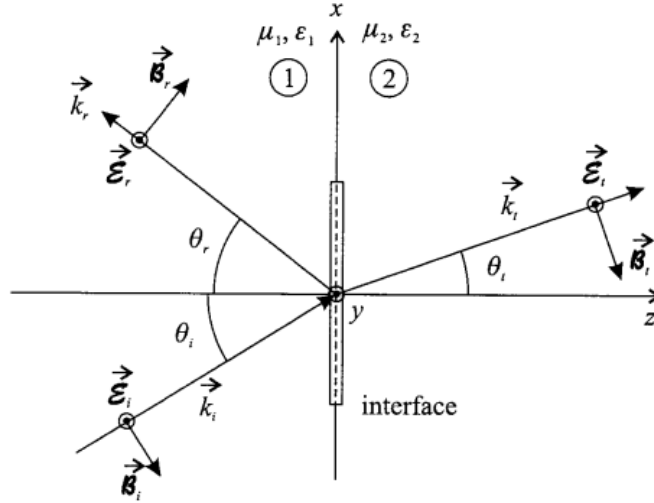
Por fim, basta calcular os coeficientes de reflexão e transmissão. Com o auxílio das equações (2.89) e (2.90), segue que

$$R = \left(\frac{\beta - \alpha}{\beta + \alpha} \right)^2, \quad (2.98)$$

$$T = \frac{4\beta\alpha}{(\beta + \alpha)^2}, \quad (2.99)$$

onde novamente, $R + T = 1$. Resta agora tratar do caso do campo elétrico perpendicular ao plano.

Figura 8 – Campo elétrico perpendicular ao plano de incidência.



Fonte: (MACHADO, 2014)

O campo $\mathbf{E}$ não tem nenhuma componente em $\mathbf{z}$, e assim (2.42) não fornece nenhuma informação. Já de (2.43), temos

$$\frac{1}{v_1}(\sin\theta_i \tilde{E}_{0i} + \sin\theta_r \tilde{E}_{0r}) = \frac{1}{v_2} \sin\theta_t \tilde{E}_{0t}. \quad (2.100)$$

Usando a lei da reflexão e a lei de Snell, a equação é reescrita como

$$\tilde{E}_{0i} + \tilde{E}_{0r} = \frac{v_1 n_1}{v_2 n_2} \tilde{E}_{0t}. \quad (2.101)$$

Para simplificar, da equação (2.30), segue

$$\tilde{E}_{0i} + \tilde{E}_{0r} = \tilde{E}_{0t}, \quad (2.102)$$

que pode também ser obtida pela condição de contorno (2.44). Por fim, resta a condição (2.45), que nos fornece,

$$\frac{1}{v_1 \mu_1}(-\cos\theta_i \tilde{E}_{0i} + \cos\theta_r \tilde{E}_{0r}) = -\frac{1}{v_2 \mu_2} \cos\theta_t \tilde{E}_{0t}. \quad (2.103)$$

Usando as definições (2.48) e (2.87), juntamente com (2.78); obtém-se

$$\tilde{E}_{0i} = \tilde{E}_{0r} \alpha \beta \tilde{E}_{0t}. \quad (2.104)$$

Resolvendo o sistema de equações (2.102) e (2.104), obtemos as outras duas equações de Fresnel:

$$\tilde{E}_{0r} = \frac{1 - \alpha\beta}{1 + \alpha\beta} \tilde{E}_{0i}, \quad \tilde{E}_{0t} = \frac{2}{1 + \alpha\beta} \tilde{E}_{0i}. \quad (2.105)$$

A resolução das equações para os vetores de Poynting são análogas às anteriores, sendo seus coeficientes dados por

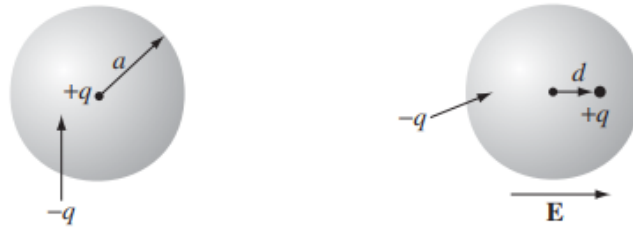
$$R = \left(\frac{1 - \alpha\beta}{1 + \alpha\beta} \right)^2, \quad T = \frac{4\alpha\beta}{(1 + \alpha\beta)^2}. \quad (2.106)$$

Ao contrário do caso anterior, quando $\theta_i = \theta_B$ aqui existe uma onda refletida.

2.4 Absorção

Na obtenção dos coeficientes de reflexão e transmissão não precisamos nos preocupar com a polarização do dielétrico, nem, do meio I nem do meio II. No entanto, ao buscarmos determinar a absorção do meio, devemos levá-la em conta. A polarização é o fenômeno que ocorre quando um material dielétrico sofre a influência de um campo eletromagnético. Nesse processo, os átomos ou moléculas do material adquirem um momento de dipolo induzido. Um dipolo consiste em um par de cargas iguais e opostas separadas por uma distância.

Figura 9 – Modelo primitivo de um átomo neutro. Quando um campo elétrico externo é aplicado, a distribuição das cargas é alterada, criando um momento de dipolo induzido. As moléculas apresentam um momento de dipolo. Nesse caso, o campo faz a molécula sofrer um torque.



Fonte: (GRIFFITHS, 2021)

A polarização será denotada por $\mathbf{P}$, que representa o momento de dipolo por unidade de volume. O material polarizado terá uma densidade de carga ρ no seu interior e uma densidade σ na sua superfície. Assim, percebemos que as equações de Maxwell na matéria são alteradas, pois precisam levar em consideração essas densidades de carga. Nesse caso, consideraremos a equação de onda do campo elétrico sendo dado por.

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{E}}}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{P}}}{\partial t^2}, \quad (2.107)$$

cujas soluções são

$$\tilde{\mathbf{P}} = \tilde{\mathbf{P}}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (2.108)$$

$$\tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (2.109)$$

Como não vamos lidar com campos elétricos de alta intensidade, é plausível considerar que as frequências de $\mathbf{P}$ e $\mathbf{E}$ são iguais (WARE; PEATROSS, 2015). No entanto, isso não implica necessariamente que estejam sempre em fase entre si. Nesse limite, boa parte dos dielétricos tem a sua polarização descrita por

$$\mathbf{P}(w) = \epsilon_0 \chi(w) \mathbf{E}(w). \quad (2.110)$$

onde χ representa a susceptibilidade elétrica do meio, a qual depende das características microscópicas deste. Ele é o responsável pela possibilidade de $\mathbf{E}$ e $\mathbf{P}$ estarem fora de fase, razão pela qual χ deve ser complexo. O campo $\mathbf{E}$ é o campo total, ou seja, tanto o campo gerado por cargas livres quanto pelos dipolos do dielétrico devem ser levados em conta. No nosso caso, só temos a contribuição dos dipolos.

Substituindo (2.108) e (2.109) em (2.107), obtemos:

$$k^2 \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + \epsilon_0 \mu_0 \omega^2 \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + \mu_0 \omega^2 \tilde{\mathbf{P}}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = 0. \quad (2.111)$$

Essa equação, juntamente com (2.110), fornece a relação de dispersão de um dielétrico

$$k^2 = \epsilon_0 \mu_0 [1 + \chi(w)] \omega^2. \quad (2.112)$$

Extraindo a raiz e lembrando de (2.28), ela se torna

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 + \chi(w)}. \quad (2.113)$$

Devido ao fato de χ ser complexo, definimos o índice de refração complexo:

$$\tilde{N}(w) = n(w) + i\kappa(w) = \sqrt{1 + \chi(w)}. \quad (2.114)$$

Logo, o vetor de onda pode ser expresso como:

$$\tilde{k} = \frac{\tilde{N} \omega}{c}. \quad (2.115)$$

Substituindo em (2.109), obtém-se uma nova equação para o campo elétrico:

$$\tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{\frac{-\kappa \cdot \mathbf{r} w}{c}} e^{i\left(\frac{\mathbf{n} w}{c} \cdot \mathbf{r} - wt\right)} \quad (2.116)$$

A parte real do índice de refração está relacionada com as oscilações da onda, enquanto a parte imaginária está relacionada com a absorção, o que faz sentido devido à presença da exponencial $e^{\frac{-\kappa w}{c}}$. Comparando com o formato geral da função de onda, recuperamos o resultado

$$v = \frac{c}{n}. \quad (2.117)$$

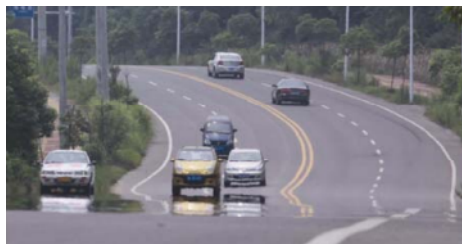
3 Transição da óptica física para a geométrica.

Em certas situações, especialmente quando lidamos com fenômenos em escalas macroscópicas, é razoável descrever o comportamento da luz através da óptica geométrica. Essa abordagem simplifica a análise ao considerar a luz como raios que seguem trajetórias definidas, em vez de tratar suas propriedades ondulatórias. Nesse caso, a equação da eikonal, responsável por descrever o trajeto luminoso, toma uma forma bastante simplificada, de onde é possível deduzir o princípio de Fermat, que é a base dessa dissertação.

3.1 Equação da eikonal

Para traçarmos o caminho percorrido por um raio de luz, podemos usar a Lei de Snell (2.76), embora isto constitua uma simplificação. Em situações em que a luz se curva, como por exemplo, formações de miragens nas estradas, onde, devido às diferentes temperaturas entre as regiões por onde a luz passa, tem-se um índice de refração não-homogêneo.

Figura 10 – Graças às diferentes temperaturas entre a estrada e o ar acima dela, o índice de refração acaba por ficar não-homogêneo. Desta forma a luz se curva, formando o que chamamos de miragem.



Fonte: (ZHOU et al., 2011)

Em situações como essa, recorreremos à equação de eikonal, uma equação diferencial parcial não linear de primeira ordem. Para obtê-la partimos da equação de onda

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \quad (3.1)$$

admitindo que o fenômeno da absorção seja desprezível; portando, desconsideramos o termo com P de (2.107). Substituindo a expressão do campo elétrico (2.116)⁵ e efetuando as derivadas temporais, a equação é expressa como:

⁵ Lembrando de desconsiderar a exponencial devido à absorção

$$\nabla^2 \tilde{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{(n(\mathbf{r})w)^2}{c^2} \tilde{E}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (3.2)$$

Nessa situação o material é não-homogêneo, e por isso há uma dependência de n em função da posição. Como uma solução tentativa, consideramos (WARE; PEATROSS, 2015)

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r}) e^{i[k_0 R(\mathbf{r}) - wt]}, \quad (3.3)$$

onde a constante k_0 se refere ao número de onda no vácuo

$$k_0 = \frac{w}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0}. \quad (3.4)$$

Embora (3.3) se assemelhe com uma onda plana, na verdade não o é, devido a função escalar $R(\mathbf{r})$, que considera frentes de ondas curvas ou distorcidas. Logo, substituindo essa solução na equação de onda, temos

$$\frac{1}{k_0^2} \nabla^2 [\tilde{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r}) e^{i[k_0 R(\mathbf{r}) - wt]}] + [n^2(\mathbf{r})] \tilde{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r}) e^{ik_0 R(\mathbf{r})} = 0 \quad (3.5)$$

Ao calcularmos o laplaciano desta equação para a componente x , obtemos a seguinte equação para o gradiente:

$$\nabla[\tilde{E}_{0x}(\mathbf{r}) e^{ik_0 R(\mathbf{r})}] = [\nabla \tilde{E}_{0x}(\mathbf{r})] e^{ik_0 R(\mathbf{r})} + ik_0 \tilde{E}_{0x}(\mathbf{r}) [\nabla R(\mathbf{r})] e^{ik_0 R(\mathbf{r})}. \quad (3.6)$$

Tomando a divergência da expressão acima, temos

$$\begin{aligned} \nabla^2 [\tilde{E}_{0x}(\mathbf{r}) e^{ik_0 R(\mathbf{r})}] &= e^{ik_0 R(\mathbf{r})} \{ \nabla^2 \tilde{E}_{0x}(\mathbf{r}) - k_0^2 \tilde{E}_{0x}(\mathbf{r}) [\nabla R(\mathbf{r})] \cdot [\nabla R(\mathbf{r})] \\ &\quad + ik_0 \tilde{E}_{0x}(\mathbf{r}) [\nabla^2 R(\mathbf{r})] + 2ik_0 [\nabla \tilde{E}_{0x}] \cdot [\nabla R(\mathbf{r})] \}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Para as demais componentes, o laplaciano torna-se

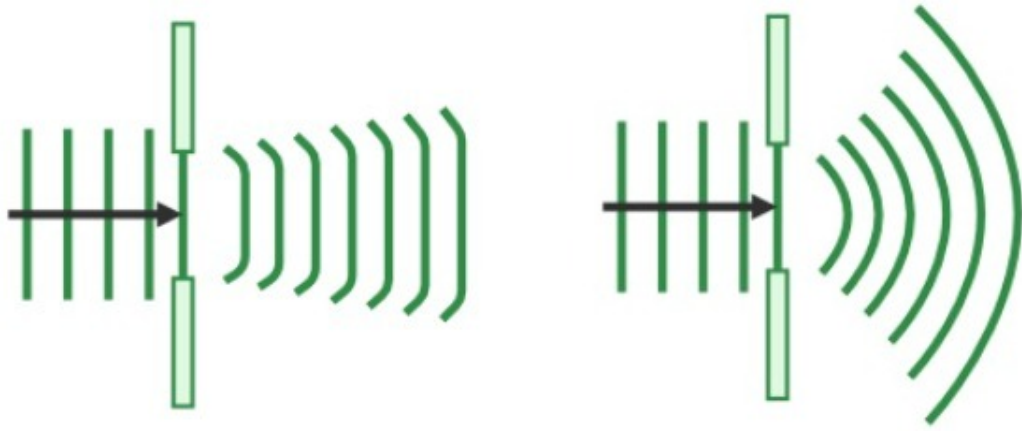
$$\begin{aligned} [\nabla R(\mathbf{r}) \cdot \nabla R(\mathbf{r}) - [n(\mathbf{r})]^2] \tilde{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r}) &= \frac{\nabla^2 \tilde{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r})}{k_{\text{vac}}^2} + \frac{i}{k_{\text{vac}}} \nabla^2 R(\mathbf{r}) + \frac{2i}{k_{\text{vac}}} \hat{\mathbf{x}} \nabla E_{0x}(\mathbf{r}) \cdot \nabla R(\mathbf{r}) \\ &\quad + \frac{2i}{k_{\text{vac}}} \hat{\mathbf{y}} \nabla E_{0y}(\mathbf{r}) \cdot \nabla R(\mathbf{r}) + \frac{2i}{k_{\text{vac}}} \hat{\mathbf{z}} \nabla E_{0z}(\mathbf{r}) \cdot \nabla R(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Essa equação aparenta ser bem intimidadora, mas o que queremos extrair dela é uma aproximação que nós leve ao princípio de Fermat. Todos os cálculos anteriores foram realizadas no contexto da óptica física; agora estamos interessados na óptica geométrica. Para isso, fazemos a aproximação eikonal, que consiste em tomar pequenos comprimentos de onda, isto é

$$\frac{1}{k_0} = \frac{\lambda_0}{2\pi} \rightarrow 0. \quad (3.9)$$

Por conta disto, a difração, um fenômeno, representado pela figura (11) que ocorre quando a luz atravessa algum obstáculo, é desprezível

Figura 11 – A frente de onda, ao se aproximar da abertura, sofre o fenômeno de difração. Na primeira situação o comprimento de onda e a largura da fenda não são tão diferentes. No segundo caso, o comprimento de onda é maior, fazendo com que a difração seja mais perceptível, já que houve uma maior alteração na forma da frente de onda.



Fonte:(GEEKSFORGEES, 2024)

Nesse caso, todos os termos do lado direito da equação (3.8), vão para zero. Logo,

$$\left[\nabla R(\mathbf{r}) \cdot \nabla R(\mathbf{r}) - [n(\mathbf{r})]^2 \right] = 0, \quad (3.10)$$

o que também pode ser escrito da seguinte forma:

$$\nabla R(\vec{r}) = n(\mathbf{r})\hat{\mathbf{s}}(\mathbf{r}), \quad (3.11)$$

que representa a equação da eikonal, onde $\hat{\mathbf{s}}$ é o vetor unitário que aponta na direção ∇R , a direção normal a frente de onda.

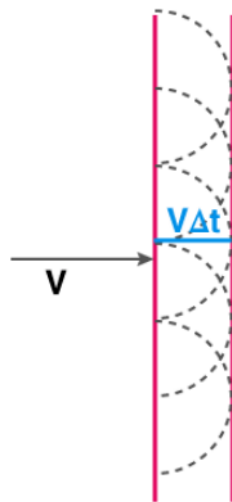
3.2 Óptica geométrica

Fenômenos ópticos também podem ser estudados por meio de conceitos geométricos. Nessa abordagem, a luz é tratada como um raio luminoso. Na visão de Newton os raios luminosos consistem em porções mínimas da luz, que acabam por formar o feixe luminoso, levando a acreditar que a luz é uma partícula. Mas, é bem difícil dar uma explicação satisfatória dos fenômenos da reflexão e da refração nesta interpretação. Como pode parte

das partículas sofrerem reflexão e outras refração?. O que acontece com a luz ao entrar em um outro meio?. Seguindo esta linha de raciocínio de Newton, chega-se ao resultado errôneo de que a velocidade da luz é maior na água do que no ar (NUSSENZVEIG, 2014).

Não há dificuldades e nem resultados errados para essas perguntas ao considerar-se a luz como uma onda. Uma interpretação rival à de Newton foi proposta por Huygens em 1678, que consiste em tomar todo ponto de uma frente de onda como uma fonte para ondas secundárias, esfericamente simétricas; assim a soma de todas as ondas esféricas resulta em uma nova frente de onda.

Figura 12 – Cada ponto da frente de onda funciona como uma fonte. Após ter percorrido uma distância $v\Delta t$, uma nova frente de onda é gerada devido às contribuições das ondas esféricas.



Fonte: (FRAZER, 2014)

Foi só em 1801 que a teoria ondulatória ganhou mais reconhecimento, graças aos experimentos de interferência e difração realizados por Thomas Young e Augustin Fresnel. A conciliação do caráter corpuscular e ondulatório da luz, ou a dualidade da luz, só ocorreu em 1905 com a explicação do efeito fotoelétrico, quando Einstein estendeu a hipótese dos quanta de Max Planck para incluir os fótons nela (NUSSENZVEIG, 2014).

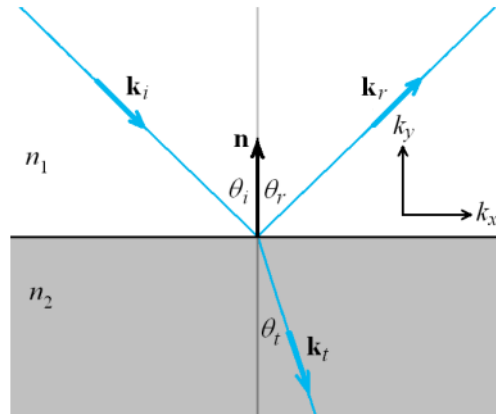
Os princípios da óptica geométrica dizem respeito à trajetória retilínea da luz (no vácuo), a reflexão e a refração. Da propagação retilínea, temos as propriedades de reversibilidade dos raios luminosos, isto é, a trajetória da luz é a mesma ao se inverter o sentido de sua propagação, e a independência dos raios, ou seja, raios luminosos mantêm sua trajetória mesmo quando se cruzam.

As leis da reflexão e refração, figura (13), são descritas respectivamente, pelas

equações já obtidas, (2.78) e (2.76). A lei da reflexão é mais simples e facilmente aceitável, tanto que era conhecida desde a Grécia antiga: o raio refletido permanece no plano de incidência, e os ângulos θ_i e θ_r são iguais. A lei da refração só foi descoberta em 1621 por Willebrord Snell, afirmando que o raio refratado também permanece no plano de incidência. Relembremos que as equações que descrevem a reflexão e refração são, respectivamente

$$\theta_i = \theta_r, \quad n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t. \quad (3.12)$$

Figura 13 – O raio incidente forma um ângulo θ_i , tendo valor igual ao refletido, θ_r . Parte do raio é refratada por um ângulo θ_t , ao passar para um meio com índice de refração diferente.



Fonte: (VAUGHAN, 2014)

Quando $n_2 > n_1$, o raio transmitido se afasta da normal; logo, para $n_1 < n_2$ ele se aproxima. Assim como na figura (10), também temos uma “miragem” criada, por um objeto dentro da água: um observador, fora dela, irá ver uma imagem deslocada em relação à real posição do objeto, sendo este o fenômeno óptico mais simples.⁶

⁶ Por estarmos considerando um meio homogêneo, não temos a distorção do objeto.

3.3 Princípio de Fermat

Em janeiro de 1662, Pierre de Fermat, cientista amador, enviou uma carta ao médico e filósofo, Marin Cureau de la Chamber. Nessa carta, ele estabeleceu o que ficaria conhecido como o Princípio de Fermat, o qual afirma que o caminho percorrido pela luz entre os pontos A e B é aquele que leva menos tempo⁷ (LEONHARDT; PHILBIN, 2010). Para obter este resultado, aplicamos o rotacional em ambos os membros da equação da eikonal

$$\nabla \times [n(\mathbf{r})\hat{\mathbf{s}}(\mathbf{r})] = \nabla \times [\nabla R(\mathbf{r})] = 0. \quad (3.13)$$

Em seguida, integramos esta equação sobre uma superfície aberta de área A e aplicamos o Teorema de Stokes (STEWART, 2013):

$$\int_A \nabla \times [n(\mathbf{r})\hat{\mathbf{s}}(\mathbf{r})] da = \oint_C n(\mathbf{r})\hat{\mathbf{s}}(\mathbf{r}) \cdot d\boldsymbol{\ell} = 0 \quad (3.14)$$

Como a integração ao longo dessa curva fechada é sempre zero, podemos fazê-la do ponto A até B ao longo de um caminho e de B a A ao longo de outro, chegando à integral

$$\int_A^B n\hat{\mathbf{s}} \cdot d\boldsymbol{\ell}. \quad (3.15)$$

O fator cosseno, do ângulo θ entre $\hat{\mathbf{s}}$ e $d\boldsymbol{\ell}$, pode ser desprezado, se tomarmos um caminho de A para B paralelo a $\hat{\mathbf{s}}$, ou seja $\cos(\theta) = 1$, já que se trata do caminho percorrido pela luz.

Definindo s como o comprimento do caminho óptico, o Princípio de Fermat, toma a forma

$$s = \int n dl, \quad (3.16)$$

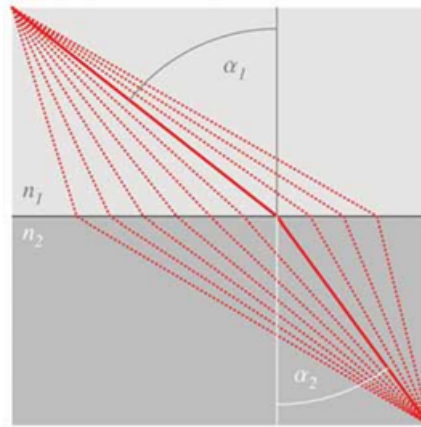
onde dl é o comprimento infinitesimal ao longo do caminho geométrico, isto é

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}. \quad (3.17)$$

O caminho seguido pela luz é tal que a equação 3.16 é extremizada; dessa forma, obtém-se o caminho que leva menos tempo para ser percorrido. Para maior clareza, consideremos a seguinte imagem

⁷ O que é equivalente ao caminho de menor comprimento.

Figura 14 – Nessa configuração, observamos que, pelos ângulos formados com a normal, $n_2 > n_1$. Dentre os vários trajetos possíveis entre os dois meios refrativos (linhas tracejadas), a luz segue aquele que leva o menor tempo, representado pela linha vermelha



Fonte: (LEONHARDT; PHILBIN, 2010)

Nela, temos dois meios ópticos, um com índice de refração n_1 e outro com n_2 , sendo $n_2 > n_1$. Há uma infinidade de caminhos que a luz pode seguir, estando representados pelas linhas tracejadas. O caminho percorrido pela luz, mostrado pela linha vermelha, é aquele em que estabelece um equilíbrio entre as distâncias percorridas pela luz nesses diferentes meios. Por exemplo, na trajetória à direita da linha vermelha, vemos que o raio luminoso percorre uma distância menor em n_2 , onde a velocidade da luz é menor, resultando em uma diminuição no tempo de percurso. Contudo, neste caso, a luz tem que percorrer uma distância maior em n_1 . Uma situação análoga ocorre com os caminhos à esquerda: neles, o intervalo de tempo na região n_1 será menor, mas na região de n_2 a luz percorrerá uma distância maior, onde a velocidade de propagação é mais lenta.

A grande diferença entre o trabalho de Fermat e os demais é a introdução do índice de refração no comprimento do caminho óptico, já que tanto Cureau, como o matemático grego Heron, tinham como o caminho percorrido pela luz o caminho geométrico. Vale mencionar que o matemático árabe Ibn al-Haytam havia antecipado o Princípio de Fermat em seu livro de óptica, escrito de 1011 a 1021, sendo ele um dos grandes responsáveis por explicar o funcionamento da visão, em termos matemáticos (LEONHARDT; PHILBIN, 2010).

A equação da eikonal e o princípio de Fermat são uma generalização da lei de Snell, já que a trajetória curva seguida pela luz pode ser vista como sucessivas aplicações de (2.76).

Para recuperarmos (2.76) a partir de (3.16) é suficiente considerarmos algum trajeto entre dois meios, da figura acima, que é equivalente à imagem (13). Adotando as

Figura 15 – A luz passa por diferentes camadas de materiais, i.e diferentes índices de refração. Em cada interface pode-se aplicar a lei de Snell, obtendo-se a trajetória da luz.



Fonte: (ZILIO, 2009)

coordenadas $(x_0, 0)$ para a interface, o comprimento óptico obtido é

$$s = n_1 \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + y_1^2} + n_2 \sqrt{(x_2 - x_0)^2 + y_2^2}. \quad (3.18)$$

Para extremizar esta função derivamos s em relação a x_0 e igualamos a zero:

$$\frac{\partial s}{\partial x_0} = 0. \quad (3.19)$$

Ou seja, dado os pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) e os respectivos índices de refração, queremos saber em qual ponto da interface o comprimento óptico é mínimo, resultando em

$$\frac{n_1(x_0 - x_1)}{\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + y_1^2}} = \frac{n_2(x_2 - x_0)}{\sqrt{(x_2 - x_0)^2 + y_2^2}}, \quad (3.20)$$

Da figura (13), vemos que

$$\frac{(x_0 - x_1)}{\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + y_1^2}} = \text{sen}\theta_i, \quad (3.21)$$

enquanto que

$$\frac{(x_2 - x_0)}{\sqrt{(x_2 - x_0)^2 + y_2^2}} = \text{sen}\theta_r. \quad (3.22)$$

Assim, obtemos a lei de Snell. Antes de procedermos com demais cálculos em relação ao princípio de Fermat, uma breve explicação do formalismo matemático necessário será apresentado.

4 Fundamentos e formalismo do cálculo variacional

Os princípios da mínima ação remontam à antiguidade. Por exemplo, os egípcios, usavam cordas para medir a distância entre dois pontos, resultando no caminho que minimiza a distância entre esses pontos. Há “princípios” que não têm uma fundamentação analítica, como a análise de Galileu para o problema da braquistócrona. Por conta disso, não focaremos nessas abordagens.

O primeiro princípio do cálculo das variações foi o de Fermat (1657). Foi através deste que John Bernoulli encontrou uma solução para o problema da braquistócrona. Posteriormente, Maupertuis (1744) desenvolveu um princípio que, diferentemente dos demais que serão abordados, exige uma variação com relação ao tempo.

Foi só com o aperfeiçoamento das técnicas de Newton que surgiram os princípios que formam um dos pilares da mecânica clássica, sendo estes desenvolvidos por Euler e Lagrange, respectivamente, nos anos 1744 e 1760, e posteriormente por Hamilton e Jacobi em 1835 e 1837 (GOLDSTINE, 2012). A seguir, abordaremos alguns princípios variacionais, baseando-nos em (LE MOS, 2013), e optaremos por uma ordem diferente da histórica, para melhor clareza e fluidez das ideias desenvolvidas.

4.1 Equação de Euler

O cálculo das variações objetiva determinar os extremos de um funcional. Este associa um número real a cada função de uma certa classe de funções. Podemos então dizer que temos uma função de funções.

Para ficar mais claro, tomemos dois pontos distintos no plano (x_1, y_1) e (x_2, y_2) , com $x_2 > x_1$ e $y(x)$ uma curva que liga esses pontos. No plano, o comprimento de arco infinitesimal é

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}. \quad (4.1)$$

Como y pode ser escrito como uma função de x essa parametrização leva a

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx. \quad (4.2)$$

Integrando ds ao longo da curva o comprimento de arco entre esses pontos será dado por

$$S = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'(x)^2} dx. \quad (4.3)$$

Vemos assim que S é um funcional de y , pois para cada função continuamente diferenciável $y(x)$ corresponde um número real, que é o comprimento de arco.

De forma mais geral, um funcional é representado por

$$S = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x), y', x) dx, \quad (4.4)$$

sendo f uma função conhecida. Desejamos encontrar, entre todas as curvas contínuas e diferenciáveis $y(x)$ que passam pelos pontos fixos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) , aquela que extremiza S . No caso, do Princípio de Fermat, o funcional a ser minimizado, será aquele definido pela equação (3.16).

Supondo $y(x)$ como a curva que extremiza S , definimos todas as curvas vizinhas $\bar{y}$ como

$$\bar{y}(x) = y(x) + \epsilon \eta(x), \quad (4.5)$$

onde ϵ é um parâmetro real arbitrário e η é uma função contínua, responsável pelas variações na curva $y(x)$. Para a curva $\bar{y}$ também passar pelos pontos extremos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) , $\eta(x)$ deve se anular em $x = x_1$ e $x = x_2$, isto é,

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0. \quad (4.6)$$

O funcional para $\bar{y}$ será uma função de ϵ , $\Phi(\epsilon)$,

$$\Phi(\epsilon) = S = \int_{x_1}^{x_2} f(\bar{y}(x), \bar{y}'(x), x) dx. \quad (4.7)$$

Quando $\epsilon = 0$ teremos UM extremo da curva. Logo, uma condição necessária para a extremização de S é

$$\left(\frac{d\Phi}{d\epsilon} \right)_{\epsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial \epsilon} + \frac{\partial f}{\partial \bar{y}'} \frac{\partial \bar{y}'}{\partial \epsilon} \right) dx = 0. \quad (4.8)$$

Como

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial \epsilon} = \eta, \quad \frac{\partial \bar{y}'}{\partial \epsilon} = \eta', \quad (4.9)$$

temos

$$\left(\frac{d\Phi}{d\epsilon} \right)_{\epsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \eta + \frac{\partial f}{\partial y'} \eta' \right) dx = 0. \quad (4.10)$$

Seria interessante ter uma equação sem a dependência de η , pois ela é uma função arbitrária. Isso pode ser obtido através de uma integração por partes:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'} \eta' dx = \frac{\partial f}{\partial y'} \eta \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \eta \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx = - \int_{x_1}^{x_2} \eta \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx, \quad (4.11)$$

já que o primeiro termo se anula devido à condição (4.6). Consequentemente (4.10) torna-se

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \eta dx = 0. \quad (4.12)$$

Usando o Lema Fundamental do Cálculo das variações , (STEWART, 2013), obtemos a Equação de Euler

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0, \quad (4.13)$$

permitindo calcular os extremos de uma curvar a partir de uma equação diferencial de segunda ordem. Uma condição necessária para a extremização de um funcional, $\Phi(\epsilon)$ é que sua variação $\frac{d\Phi}{d\epsilon}$ seja nula para um η arbitrário.

Uma outra forma de representar a variação é pela notação $\delta y = \epsilon \eta$. Decorrendo de (4.5)

$$\bar{y} = y + \delta y, \quad (4.14)$$

substituindo em (4.10)

$$\delta S = \left(\frac{d\Phi}{d\epsilon} \right)_{\epsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y' \right) dx = 0. \quad (4.15)$$

em $\delta y'$ usamos a propriedade de que a $\delta y' = \frac{d}{dx}(\delta y)$. Analogamente, efetuando uma integração por partes, conseguimos-nos livrar da derivada y'

$$\delta S = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \delta y dx = 0. \quad (4.16)$$

.

4.2 Equações de Euler-Lagrange

A obtenção das equações de Euler-Lagrange, também podem ser feitas por meio do Princípio de D'Alembert (GOLDSTEIN; TWERSKY, 1952), mas esta dedução envolve mais sutilezas e é consideravelmente mais extensa. O resultado que iremos utilizar, deste princípio, é a expressão da langrangiana $L = K - V$, sendo K a energia cinética e V a potencial. Partindo da equação (4.13), basta uma mudança de variáveis para obtermos as equações de Euler-Langrange. As mudanças são

$$x \rightarrow t, \quad y \rightarrow q \quad y' \rightarrow \dot{q} \quad f \rightarrow L, \quad (4.17)$$

onde t se refere ao tempo e q são as coordenadas generalizadas. E assim podemos escrever

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0. \quad (4.18)$$

Caso estejamos lidando com n graus liberdade, as equações se tornam

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.19)$$

valendo lembrar que os q_i 's são independentes entre si.

Desta maneira, obtemos as equações de Euler-Lagrange, as quais constituem um formalismo bastante poderoso para a descrição de sistemas mecânicos. Portanto, para achar as equações de movimento, basta obter a lagrangiane e substituí-la em (4.18). Em sistemas mais complexos, como o pêndulo duplo, por exemplo, este método é muito mais acessível do que a obtenção através da segunda Lei de Newton, que envolve equações vetoriais.

4.3 Equações canônicas de Hamilton.

Uma alternativa para encontrar as equações de movimento é dada pela formulação hamiltoniana. Nela, ao invés de trabalhar com $\dot{q}_i$ trabalharemos com o momento canônico conjugado p_i , definindo como sendo

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (4.20)$$

Note que para que possamos resolver a equação de Euler para as velocidades generalizadas, a matriz hessiana (LEMOS, 2013)

$$W_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}, \quad (4.21)$$

deve ser não-singular. A obtenção de uma função cujas variáveis dependentes sejam q_i e p_i , é feita por intermédio da transformada de Legendre (GOLDSTEIN; TWERSKY, 1952). Assim, definimos a função hamiltoniana como

$$H(q, p, t) = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i p_i - L(q, \dot{q}, t), \quad (4.22)$$

onde as velocidades generalizadas devem estar escritas na forma $\dot{q}_i = f_i(q, p, t)$ para que H esteja na forma desejada.

A diferenciação da hamiltoniana nos dará as equações de movimento. Diferenciando $H(q, p, t)$, temos

$$dH = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt. \quad (4.23)$$

Fazendo o mesmo procedimento em (4.22), temos

$$dH = \sum_{i=1}^n (\dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i) - \left\{ \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt \right\} \quad (4.24)$$

Comparando estas duas equações, juntamente com (4.20), chegamos às equações canônicas de Hamilton,

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (4.25)$$

e

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (4.26)$$

Comparando com o formalismo lagrangiano, agora precisamos resolver duas equações, mas, em contrapartida elas são de primeira ordem. Outra diferença é que o par (q, p) é independente, já que não existe uma conexão entre eles, diferentemente de $(q, \dot{q})$. Na comparação entre as equações (4.23) e (4.24) também obtemos

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (4.27)$$

Voltando para (4.22), caso a langrangiana tenha a energia cinética K como quadrática nas velocidades e V independente do tempo, o segundo termo pode ser escrito como

$$\sum_{i=1}^n \dot{q}_i \partial L / \partial \dot{q}_i = \sum_i \dot{q}_i \partial K / \partial \dot{q}_i = 2K. \quad (4.28)$$

Substituindo esse resultado em (4.22), chegamos a

$$H = K + V. \quad (4.29)$$

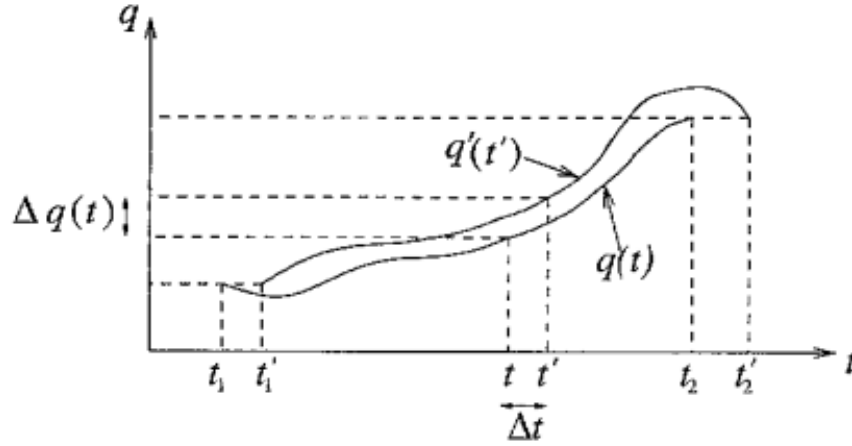
Logo, nesses casos a hamiltoniana é interpretada como a energia total do sistema mecânico.

4.4 O Princípio de Maupertuis.

Diferentemente da mecânica lagrangiana, aqui a variação considerada é feita em relação ao tempo. Ela será denotada por Δ , e pode ser ilustrada pela imagem abaixo:

Essa variação é definida como

Figura 16 – A variação no Princípio de Maupertuis é feita em relação ao tempo, deslocando a curva por uma quantidade Δt .



Fonte: (LEMOS, 2013)

$$t' = t + \Delta t = t + \epsilon X(t)^8 \quad (4.30)$$

e

$$q'_i(t') = q_i(t) + \Delta q_i(t) = q_i(t) + \epsilon \eta_i(t). \quad (4.31)$$

onde X e η são funções arbitrárias. Desse modo,

$$\Delta t = t' - t = \epsilon X(t), \quad (4.32)$$

$$\Delta q_i(t) = q'_i(t') - q_i(t) = \epsilon \eta_i(t), \quad (4.33)$$

com ϵ um parâmetro infinitesimal. Este princípio determina o caminho da trajetória, mas sua solução não é representada em função do tempo, a hamiltoniana é conservada e não depende explicitamente do tempo, e por fim, suas configurações iniciais e finais são fixas:

$$\Delta q_i(t_1) = \Delta q_i(t_2). \quad (4.34)$$

Outra diferença está na chamada ação reduzida.

$$I = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_i p_i \dot{q}_i. \quad (4.35)$$

⁸ Com $X(t) = 0$ retornamos a Equação de Euler.

O termo dentro do somatório vem da transformação de Legendre na lagrangiana. Assim podemos reescrever I na forma

$$I = \int_{t_1}^{t_2} (L + H) dt = \int_{t_1}^{t_2} L dt + H(t_2 - t_1). \quad (4.36)$$

Efetuada a variação Δ , temos

$$\Delta I = \Delta \int_{t_1}^{t_2} L dt + H(\Delta t_2 - \Delta t_1). \quad (4.37)$$

A integral vai permanecer invariante sob essas transformações de coordenadas (4.30) e (4.31), se

$$\Delta I = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ L \left(q'(t'), \frac{dq'(t')}{dt'}, t' \right) dt' - L \left(q(t), \frac{dq(t)}{dt}, t \right) \right\} dt = 0. \quad (4.38)$$

Para os termos de primeira ordem em ϵ , temos o seguinte

$$\frac{dt'}{dt} = 1 + \epsilon \dot{X}, \quad (4.39)$$

$$\frac{dt}{dt'} = (1 + \epsilon \dot{X})^{-1} = 1 - \epsilon \dot{X}, \quad (4.40)$$

e

$$\frac{dq'_i}{dt} \frac{dt}{dt'} = (1 - \epsilon \dot{X})(\dot{q}_i + \epsilon \dot{\eta}) = \dot{q}_i + \epsilon \zeta_i \quad (4.41)$$

com $\zeta_i = \dot{\eta} - \dot{q}_i \dot{X}$.

Substituindo os resultados acima em ΔI (4.38)

$$\begin{aligned} \Delta I &= \int_{t_1}^{t_2} L(q + \epsilon \eta, \dot{q} + \epsilon \zeta, t + \epsilon X)(1 + \epsilon \dot{X}) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ L(q, \dot{q}, t) + \sum \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \epsilon \eta_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \epsilon \zeta_i \right] + \frac{\partial L}{\partial t} \epsilon X \right\} (1 + \epsilon \dot{X}) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (4.42) \\ &= \epsilon \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \eta_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \zeta_i \right] + \frac{\partial L}{\partial t} X + L \dot{X} \right\} dt = 0, \end{aligned}$$

conduzindo à uma condição dada pelo teorema de Noether (LEMOS, 2013)

$$\sum \left[\eta_i \frac{\partial L}{\partial q_i} + (\dot{\eta}_i - \dot{q}_i \dot{X}) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] + \frac{\partial L}{\partial t} X = 0, \quad (4.43)$$

forneendo assim, numa condição necessária e suficiente para que a ação seja invariante pelas transformações. Reescrevendo abaixo as equações, (4.22) e (4.27), do formalismo hamiltoniano, temos

$$H = \sum \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \quad (4.44)$$

e

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (4.45)$$

Substituindo em (4.43), obtemos

$$\sum \left[\eta_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \dot{\eta}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - H \dot{X} - \frac{dH}{dt} X \right] = \frac{d}{dt} \left\{ \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - H X \right\} = 0. \quad (4.46)$$

Este resultado nos permite calcular variação de L:

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left\{ \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \Delta q_i - H \Delta t \right\} dt = (\sum p_i \Delta q_i - H \Delta t), \quad (4.47)$$

e, portanto,

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = -H(\Delta t_2 - \Delta t_1). \quad (4.48)$$

Levando em conta a (4.37) chegamos ao Princípio de Maupertuis:

$$\Delta I = \Delta \int_{t_1}^{t_2} dt \sum p_i \dot{q}_i = 0 \quad (4.49)$$

Dentre todos os caminhos possíveis entre duas configurações fixas, o “escolhido” será aquele que minimiza a ação reduzida. Quando as equações que definem as coordenadas generalizadas não dependem explicitamente do tempo, ou seja,

$$x_a = f_a(q_1, q_2, \dots, q_n), \quad (4.50)$$

então,

$$\dot{x}_a = \sum \frac{\partial f_a}{\partial q_k} \dot{q}_k, \quad (4.51)$$

e assim a energia cinética

$$K = \frac{1}{2} \sum m_a (\dot{x}_a^2 + \dot{y}_a^2 + \dot{z}_a^2). \quad (4.52)$$

pode ser escrita da seguinte maneira:

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i,k} a_{ik}(q) \dot{q}_i \dot{q}_k, \quad (4.53)$$

onde os termos a_{ik} são funções das coordenadas. Para uma energia potencial V independente da velocidade, as equações de Euler-Lagrange, nos fornecem

$$\sum_i \dot{q}_i p_i = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} = 2K, \quad (4.54)$$

resultando em

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} K dt = 0. \quad (4.55)$$

Se K for uma constante, o caminho percorrido é aquele que leva o menor tempo, sendo justamente esta a ideia central do princípio de Fermat, que inspirou Maupertuis.

4.5 O Princípio de Jacobi

Nessa seção iremos discutir o chamado Princípio de Jacobi. Revendo a seção anterior vemos que o termo a_{ik} de (4.53), lembra bastante uma métrica. Podemos, então, definir a distância infinitesimal entre dois pontos neste espaço das configurações por:

$$d\rho^2 = \sum_{i,k} a_{ik}(q) dq_i dq_k. \quad (4.56)$$

Agora, substituindo (4.56) em (4.53), obtemos

$$dt = \frac{d\rho}{\sqrt{2K}}, \quad (4.57)$$

fazendo que o Princípio de Maupertuis assuma a seguinte forma:

$$\Delta \int_{\rho_1}^{\rho_2} \sqrt{E - V} d\rho = 0. \quad (4.58)$$

Sendo este o princípio de Jacobi, é nítida a semelhança com o Princípio de Fermat. No caso da partícula livre, $V = 0$, obtemos a equação da reta. Se considerarmos apenas uma partícula, $d\rho$ acaba por ser proporcional à distância em três dimensões.

5 O princípio de Fermat na mecânica newtoniana.

Como vimos, o princípio de Fermat afirma que o caminho percorrido pela luz é aquele com menor comprimento. Utilizando os cálculos variacionais descritos no capítulo anterior, podemos deduzir uma equação de movimento para o raio luminoso. Este método revela uma profunda analogia entre a óptica e a mecânica clássica, permitindo que problemas mecânicos sejam tratados utilizando um formalismo óptico, reforçando a interconectividade das diversas áreas da física.

5.1 Analogia Newtoniana

No Princípio de Fermat, se parametrizarmos a curva seguida pelo raio luminoso por um parâmetro λ , então escrevemos

$$s = \int n \sqrt{\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\lambda}\right)^2} d\lambda, \quad (5.1)$$

isto é,

$$s = \int n \left| \frac{d\mathbf{r}}{d\lambda} \right| d\lambda. \quad (5.2)$$

Com o intuito de achar uma equação diferencial para a trajetória da luz, faremos uso do cálculo variacional apresentado no capítulo anterior. Optando pelo uso da notação presente em (4.15), a variação do funcional acima resulta em

$$\delta \int n \left| \frac{d\mathbf{r}}{d\lambda} \right| d\lambda = \left[\delta n \left| \frac{d\mathbf{r}}{d\lambda} \right| + n \left(\delta \left| \frac{d\mathbf{r}}{d\lambda} \right| \right) \right] d\lambda = 0. \quad (5.3)$$

A expressão da variação infinitesimal em $\mathbf{r}$ é dada por

$$\bar{\mathbf{r}} = \mathbf{r} + \delta\mathbf{r}, \quad (5.4)$$

onde novamente estamos tomando $\delta\mathbf{r} = 0$ para os extremos da curva. Feitas essas considerações, calculamos agora cada variação de (5.3), obtendo para o primeiro termo

$$\delta n(\mathbf{r}) = n(\bar{\mathbf{r}}) - n(\mathbf{r}) \approx (n(\mathbf{r}) + \nabla n \cdot \delta\mathbf{r}) - n(\mathbf{r}) \approx \nabla n(\mathbf{r}) \cdot \delta\mathbf{r}, \quad (5.5)$$

no qual fizemos uma expansão de Taylor em $\delta\mathbf{r}$ até a primeira ordem.

Já para o segundo termo, temos

$$\delta \left| \frac{d\mathbf{r}}{d\lambda} \right| = \left| \frac{d(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r})}{d\lambda} \right| - \left| \frac{d\mathbf{r}}{d\lambda} \right|. \quad (5.6)$$

Fazendo a substituição $\frac{d\mathbf{r}}{d\lambda} = \mathbf{u}$ e $\frac{d(\delta\mathbf{r})}{d\lambda} = \mathbf{v}$, então o primeiro termo de (5.6) fica

$$|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = \sqrt{u^2 + 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + v^2}. \quad (5.7)$$

Como a expansão é em $\mathbf{v}$, podemos desprezar o termo v^2 . Efetuando a expansão de Taylor em torno de $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, encontramos

$$|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \approx \sqrt{u^2 + 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}} \approx |\mathbf{u}| + \frac{1}{2} \left[\frac{2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\sqrt{u^2 + 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}} \right]_{v=0} \cdot \mathbf{v} \approx |\mathbf{u}| + \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}|}. \quad (5.8)$$

Com esse resultado, a equação (5.6) torna-se

$$\delta \left| \frac{d\mathbf{r}}{d\lambda} \right| \approx \frac{\left(\frac{d\mathbf{r}}{d\lambda} \cdot \frac{d\delta\mathbf{r}}{d\lambda} \right)}{\left| \frac{d\mathbf{r}}{d\lambda} \right|}, \quad (5.9)$$

onde representamos a derivada em λ por $'$. A substituição de (5.5) e (5.9) em (5.3) nos dá finalmente

$$\int \left(\nabla n \cdot \delta\mathbf{r} |\mathbf{r}'| + \frac{n\mathbf{r}' \cdot \delta\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|} \right) d\lambda = 0. \quad (5.10)$$

Assim como no caso em que obtivemos a Equação de Euler, vamos efetuar uma integral por partes no segundo termo e como o termo de fronteira é zero, obtemos

$$\int \left[(\nabla n) |\mathbf{r}'| - \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{n\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|} \right) \right] \cdot \delta\mathbf{r}' d\lambda = 0. \quad (5.11)$$

E assim encontramos a equação diferencial da trajetória que extremiza a ação:

$$(\nabla n) |\mathbf{r}'| = \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{n\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|} \right). \quad (5.12)$$

Podemos simplificar a equação acima tomando a parametrização $d\lambda = \frac{ds}{n}$, onde n é o índice de refração no meio e s o comprimento de arco da trajetória; como, por definição, temos $\left| \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right| = 1$, então podemos escrever que

$$\left| \frac{d\mathbf{r}}{d\lambda} \right| = n \left| \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right| = n. \quad (5.13)$$

Logo a equação da trajetória do raio nessa parametrização é

$$\mathbf{r}'' = \nabla \left(\frac{n^2}{2} \right), \quad (5.14)$$

equação que apresenta uma forma bastante similar à segunda Lei de Newton

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\nabla U. \quad (5.15)$$

Dessa forma estabelecemos uma analogia entre a óptica e a mecânica clássica. Para ficar mais clara a analogia, construiremos uma tabela que relaciona as grandezas da mecânica com as da óptica, ao comparar (5.14) e (5.15).

Quantidade	Mecânica	Óptica
Posição	$\mathbf{r}(t)$	$\mathbf{r}(\lambda)$
“Tempo”	t	λ
“Velocidade”	$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \equiv \dot{\mathbf{r}}$	$\frac{d\mathbf{r}}{d\lambda} \equiv \mathbf{r}'$
“Energia potencial”	$U(\mathbf{r})$	$\frac{-n^2(\mathbf{r})}{2}$
“Massa”	m	1
“Energia cinética”	$T = \frac{m}{2} \left \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right ^2$	$\frac{1}{2} \left \frac{d\mathbf{r}}{d\lambda} \right ^2$
“Energia Total”	$\frac{m}{2} \left \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right ^2 + U$	$\frac{1}{2} \left \frac{d\mathbf{r}}{d\lambda} \right ^2 - \frac{n^2(\mathbf{r})}{2} = 0$

Tabela 1 – Correspondência entre quantidades da mecânica com as da óptica.

Enquanto que as grandezas mecânicas estão associadas ao movimento de uma partícula, no caso óptico elas podem ser interpretadas como descrevendo um pulso de luz. A grande diferença entre as grandezas da tabela, se dá por conta das diferentes parametrizações, numa é o parâmetro tempo t e na outra λ , um parâmetro que tem dimensão de comprimento. Por conta disso, boa parte das grandezas ópticas são adimensionais.

Vamos agora relacionar t com λ

$$n = \left| \frac{d\mathbf{r}}{d\lambda} \right| = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| \frac{dt}{d\lambda} = \frac{c}{n} \frac{dt}{d\lambda}. \quad (5.16)$$

Portanto temos a relação

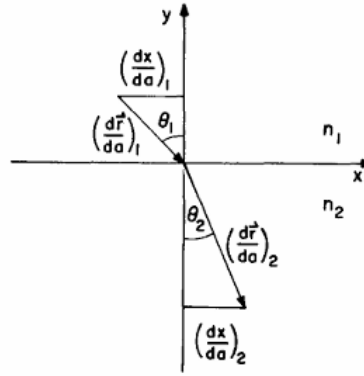
$$d\lambda = \frac{c}{n^2} dt. \quad (5.17)$$

Ao tomar a constante aditiva “da energia potencial óptica” como sendo nula, a energia total sempre será zero. Isso ocorre porque a “velocidade”, r' , é determinada pelo índice de refração do material. Assim vemos que há um grau de liberdade a menos, em comparação com o caso clássico, em que se pode escolher tanto a posição como a velocidade inicial para uma partícula.

5.2 A Lei de Snell

Aqui iremos reobter a lei de Snell por meio da analogia newtoniana acima. Consideramos duas regiões, região 1 e região 2, conforme apresentado na figura (17), que apresentam respectivamente índices de refração n_1 e n_2 . A escolha do sistema de coordenadas é feita de modo que o eixo coordenado x se encontre na interface.

Figura 17 – Representação da Lei de Snell na analogia newtoniana. O índice de refração, para os dois meios, não varia na direção x .



Fonte: (EVANS; ROSENQUIST, 1986)

Esses índices de refração não variam na direção x , variam apenas na direção y . A componente x de acordo com (5.14), fornece a seguinte equação

$$\frac{d^2x}{d\lambda^2} = 0. \quad (5.18)$$

Por conta disso, $dx/d\lambda$ é uma constante de movimento e apresenta o mesmo valor para os dois meios, diferentemente da componente y , já que sua “velocidade” varia. Assim, temos um caso bastante parecido com o movimento em queda livre na mecânica clássica. Igualando as “velocidades” em x , devido à constância dessas componentes, obtemos

$$\left| \frac{d\mathbf{r}}{d\lambda} \right|_1 \sin\theta_1 = \left| \frac{d\mathbf{r}}{d\lambda} \right|_2 \sin\theta_2. \quad (5.19)$$

Já da parametrização (5.13), chegamos a

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2, \quad (5.20)$$

que é exatamente o que expressa a lei de Snell

5.3 O Oscilador harmônico

O potencial do oscilador harmônico é um dos potenciais mais importantes da mecânica clássica. Buscaremos a trajetória da luz associada a este potencial. Pela Lei de Hooke

$$U = k \frac{r^2}{2}. \quad (5.21)$$

Para a “energia potencial” óptica, conforme a tabela (1), representar este potencial mecânico, devemos ter

$$n = \sqrt{2 - r^2}, \quad (5.22)$$

com $k = 1$. Aqui fazemos uso da notação complexa, $z = x + iy$. Devido ao fato de o movimento se dar no plano, por causa da conservação de momento angular, podemos descrevê-lo com as coordenadas x e y . (A vantagem dos números complexos é que eles possuem interpretação geométrica; o módulo dele nos fornece o raio, e o ângulo do ponto em z , na coordenada x , é dado por $\arg(z)$.) Substituindo (5.22) em (5.14), temos a equação

$$\frac{d^2 z}{d\lambda^2} + z = 0, \quad (5.23)$$

cujas soluções gerais são

$$z = e^{i\alpha}(A \cos \lambda + iB \sin \lambda). \quad (5.24)$$

As constantes de (5.24) têm um significado geométrico, α descrevendo rotações da trajetória, enquanto que A e B estão relacionadas com a amplitude do movimento.

Com $\alpha = 0$, ou seja, sem rotações, obtemos a equação da elipse,

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1, \quad (5.25)$$

ao fazermos uso da definição de z em (5.24). As constantes, A e B , representam o semi-eixo maior e menor da elipse, levando à distância focal $f = \sqrt{A^2 - B^2}$.

No caso em que $\alpha \neq 0$, essas constantes não são totalmente independentes. Usando a parametrização (5.13) em (5.22), obtemos a relação:

$$v^2 = 2 - r^2 \quad (5.26)$$

Da solução (5.24), temos tanto o comprimento da elipse, como a velocidade associada a ela:

$$r^2 = A^2 \cos^2 \lambda + B^2 \sin^2 \lambda, \quad v^2 = \left| \frac{dz}{d\lambda} \right|^2 = A^2 \sin^2 \lambda + B^2 \cos^2 \lambda. \quad (5.27)$$

Substituindo essas expressões em (5.24), temos a condição

$$A^2 + B^2 = 2. \quad (5.28)$$

que também pode ser escrita da seguinte forma:

$$A + iB = \sqrt{2}e^{i\gamma} \quad (5.29)$$

com γ sendo um número real. Desta condição, (5.27) fica

$$r^2 = |z|^2 = 1 + (A^2 - 1)\cos(2\lambda). \quad (5.30)$$

Quando $\cos(2\lambda) = 0$, a elipse irá interceptar o círculo unitário. Os zeros da função $\cos(2\lambda)$ ocorrem em

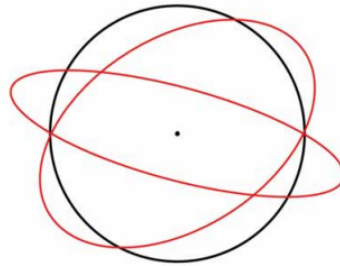
$$\lambda_m = \left(m - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}, \quad (5.31)$$

onde m é um número inteiro. Para $m = 1$, em (5.24), temos

$$z|_{\lambda=\lambda_1} = e^{i(\alpha+\gamma)} = \frac{dz}{d\lambda}|_{\lambda=\lambda_0}. \quad (5.32)$$

.

Figura 18 – As elipses representam a trajetória percorrida pela luz, com um índice de refração que corresponde ao potencial de Hooke, na mecânica clássica. Elas se encontram na circunferência de raio unitária, onde tem-se $n = 1$.



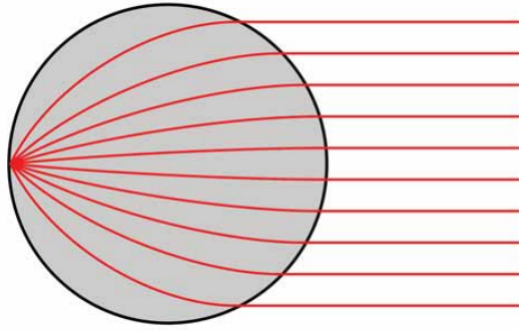
Fonte: (LEONHARDT; PHILBIN, 2010)

Um fato bastante importante sobre (5.22) é a sua aplicação. As lentes de Lunenburg são lentes esféricas que apresentam um índice de refração igual a 1 na borda; já no seu interior, n varia de acordo com a equação

$$n = \sqrt{2 - r^2/r_0^2}, \quad (5.33)$$

onde aqui r_0 indica o raio da lente. Logo (5.22) representa uma lente com raio unitário. Esse instrumento óptico foca todos os raios de luz, paralelos, em um mesmo ponto.

Figura 19 – Representação da lente de Lunenburg.



Fonte: (LEONHARDT; PHILBIN, 2010)

Por concisão, manteremos a notação complexa. Um raio paralelo é descrito por

$$z = e^{i\theta_0}(\lambda - \lambda_0) + z_0, \quad (5.34)$$

sendo θ_0 , λ_0 e z_0 constantes. Para ver que realmente se trata da equação de uma reta, basta fazer a sua derivada em relação ao parâmetro λ :

$$\frac{dz}{d\lambda} = e^{i\theta_0} = \text{constante}. \quad (5.35)$$

Como mencionado, a borda da lente apresenta um índice de refração igual ao do vácuo; desta forma o raio de luz não é refratado. Ao entrar na lente, os raios têm suas trajetórias dadas por segmentos de elipses, como discutido anteriormente. Para a trajetória ser contínua, basta igualar as equações (5.24) e (5.34), sendo, então, necessário um ajuste em z_0 e λ_0 para que essas equações se interceptem para um mesmo parâmetro λ . Por fim, a equação (5.32) retrata o fato de que todos esses raios vão ser focados em um único ponto.

5.4 Órbitas circulares.

Nessa seção usaremos a analogia newtoniana para analisar a possibilidade do aparecimento de órbitas circulares (EVANS; ROSENQUIST, 1986). Naturalmente, estamos supondo que n é radialmente simétrico, $n = n(r)$. Nesse contexto, é importante definir o “momento angular óptico”,

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{d\lambda}. \quad (5.36)$$

Assim como na mecânica clássica, é fácil ver que $\mathbf{L}$ é uma quantidade conservada. Nesse caso, o movimento se dará num plano, o que sugere trabalhar com coordenadas polares. Nessas coordenadas, então, podemos escrever

$$L = r^2 \frac{d\theta}{d\lambda} = r^2 \theta'. \quad (5.37)$$

Para obter um movimento circular, cuja força centrípeta é dada por $-mv^2/r$, a “segunda lei de Newton”, (5.14), nos dá

$$\frac{-1}{r} \left| \frac{d\mathbf{r}}{d\lambda} \right|^2 = \frac{1}{2} \frac{dn^2}{dr}, \quad (5.38)$$

que podemos simplificar com o auxílio da parametrização (5.13), fornecendo

$$\frac{-dr}{r} = \frac{dn}{n}. \quad (5.39)$$

Integrando a equação acima, chegamos a

$$n = \frac{k}{r}, \quad (5.40)$$

sendo k uma constante de integração. Logo, a “energia potencial” é $U = -k^2/2r^2$, originando uma “força” $F = -\nabla U/dr = -k^2/r^3$.

No caso óptico, as orbitas circulares só serão possíveis para uma força proporcional a r^{-3} , diferentemente da mecânica clássica, onde qualquer força central, sendo ela estável ou não, permite orbitas circulares. Essa diferença se deve ao fato da “velocidade” ser determinada pelo índice de refração, como discutido anteriormente.

A velocidade da luz no meio em que $n = k/r$, é

$$v = \frac{c}{n} = \frac{cr}{k} \quad (5.41)$$

e, como são órbitas circulares, o seu comprimento é igual a $2\pi r$. Desta forma, o período será:

$$\tau = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi k}{c}, \quad (5.42)$$

sendo independente do raio da órbita.

Consideremos agora casos mais gerais do movimento, para quando $n = \frac{k}{r}$. Os cálculos são bem parecidos com o movimento de partículas sob ação de um campo central. Nesse caso o análogo da equação da energia é

$$E = \frac{1}{2}r'^2 - \frac{1}{2}n^2 = 0, \quad (5.43)$$

a transformação em coordenadas polares faz-se mediante a substituição

$$\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{r}} + r\frac{d\theta}{d\lambda}\hat{\theta}. \quad (5.44)$$

A equação da energia passa a ser

$$r'^2 + r^2\theta'^2 - n^2 = 0. \quad (5.45)$$

Expressando esta equação em termos do “momento angular” (5.37), achamos

$$r' = \left(n^2 - \frac{L^2}{r^2}\right)^{1/2}, \quad (5.46)$$

e, usando a regra da cadeia,

$$r' = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{d\lambda} = \theta' \frac{dr}{d\theta}, \quad (5.47)$$

obtemos a integral

$$\int d\theta = \int \frac{Ldr}{r^2 \left(n^2 - \frac{L^2}{r^2}\right)^{1/2}}, \quad (5.48)$$

faltando apenas escrever a dependência de n com r , conforme (5.40). Logo,

$$\theta = \int_{r_0}^r \frac{Ldr}{r(k^2 - L^2)^{1/2}} + \theta_0. \quad (5.49)$$

Escolhendo a constante θ , θ_0 , de tal maneira que $\theta = 0$ quando $r = r_0$, temos

$$r = r_0 \exp\left(\frac{(k^2 - L^2)^{1/2}}{L}\theta\right). \quad (5.50)$$

A equação acima pode ser simplificada, utilizando a fórmula de Bouguer, que consistem em tomar a forma escalar de (5.36). Assim,

$$L = r \frac{dr}{d\lambda} \operatorname{sen} \alpha = r n \operatorname{sen} \alpha. \quad (5.51)$$

No caso abordado, $n = \frac{k}{r}$, ou seja,

$$L = r_0 n_0 \operatorname{sen} \alpha = k \operatorname{sen} \alpha. \quad (5.52)$$

Substituindo em (5.50), chegamos a

$$r = r_0 \exp\left(\frac{(k^2(1 - \operatorname{sen}^2 \alpha))^{1/2} \theta}{k \operatorname{sen} \alpha}\right) = r_0 \exp\left(\frac{(k^2 \cos^2 \alpha)^{1/2} \theta}{k \operatorname{sen} \alpha}\right) = r_0 \exp(\theta \cot \alpha). \quad (5.53)$$

Sendo β o ângulo complementar de α , a equação pode ser escrita em termos da tangente de β , isto é,

$$r = r_0 \exp(\theta \tan \beta). \quad (5.54)$$

No intervalo $0 < \beta < \pi/2$ a tangente é positiva, e o movimento descreve uma espiral em expansão; o intervalo negativo, $-\pi/2 < \beta < 0$, resulta num colapso em espiral. Já para recuperar o resultado anterior, basta tomar $\beta = 0$ levando em $r = r_0$.

Um outro caso bastante importante é o da gravitação universal. Como a força tem a forma r^{-2} , o potencial é $U = \frac{k}{r}$. Logo,

$$n = \left(\frac{2k}{r}\right)^{1/2}. \quad (5.55)$$

Do resultado anterior, (5.48), segue-se que

$$\theta = \int_{r_0}^r \frac{L dr}{r^2 \left(\frac{2k}{r} - \frac{L^2}{r^2}\right)^{1/2}}, \quad (5.56)$$

e pela mudança de variável $u = \frac{1}{r}$, temos

$$\theta = \int \frac{L du}{(L^2 u^2 - 2ku)^{1/2}}. \quad (5.57)$$

Finalmente o resultado obtido é

$$r = \frac{L^2}{k(1 + \cos \theta)}. \quad (5.58)$$

Na mecânica clássica tem-se três tipos de órbitas, a hiperbólica, a parabólica e a elíptica. Da equação (5.58), vemos que o caso óptico só é possível a trajetória parabólica.

6 O princípio de Fermat na relatividade geral

Na relatividade geral, a trajetória da luz é regida pela curvatura do espaço-tempo. No entanto, por conta do índice de refração e sua relação com a mecânica clássica, veremos que é possível fazer uma função escalar $n(r)$ descrever a propagação da luz, levando a uma generalização dos princípios mencionados anteriormente.

6.1 O índice de refração na relatividade

Da mesma forma que um índice de refração pode ser identificado como um potencial, também pode ser visto como desempenhando a função de uma métrica, sendo o caminho percorrido pela luz determinado pela curvatura do espaço-tempo. Nesse caso é natural ver a equação da geodésica como um equivalente à eikonal.

Na dedução da equação da eikonal, no capítulo 3, partimos de resultados obtidos pelas equações de Maxwell. Podemos reproduzir esse resultado usando a notação covariante, como mostrado por (FEDOROV et al., 2023), chegando-se ao resultado

$$g^{ij}\partial_i u \partial_j u = \epsilon^{ij}\mu_{ij} = n^2, \quad (6.1)$$

sendo g^{ij} a métrica do espaço. Já u , ϵ^{ij} e μ_{ij} são respectivamente os análogos a $R(\mathbf{r})$, ϵ e μ , usados anteriormente. Fica assim evidente a semelhança, entre as equações da eikonal, nesses dois casos.

Como mostrado por (XUE-JUN; CHONG-MING, 1988) a equação clássica da eikonal pode ser usada no problema de geodésicas nulas. Há três tipos de intervalos para um elemento de linha: o intervalo de tipo tempo ocorre quando a variação do tempo domina sobre as variações espaciais, sendo descrito por $ds^2 < 0$ ⁹. De forma análoga, o intervalo de tipo espaço é caracterizado por $ds^2 > 0$, e o intervalo de tipo luz, onde o deslocamento no espaço-tempo ocorre à velocidade da luz, é $ds^2 = 0$, sendo esta a geodésica nula.

No entanto, existe uma forma mais sutil de demonstrar a equivalência entre a eikonal e a geodésica nula. Seguindo os passos de (ADLER et al., 1965), começamos com um elemento de linha que é independente do tempo, e parametrizado por λ . Logo, a variação da lagrangiana tem a forma

$$\delta \int L(x_i, \dot{x}_i, t) d\lambda = 0. \quad (6.2)$$

Iremos, agora, considerar o seguinte elemento de linha:

⁹ Nesta dissertação, estamos usando a assinatura $(-+++)$ para o espaço-tempo

$$ds^2 = A^2 c^2 dt^2 + g_{ik} dx^i dx^k. \quad (6.3)$$

Parametrizando a curva por λ , temos que

$$ds^2 = A^2 c^2 \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 + g_{ik} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^k}{d\lambda} = 0. \quad (6.4)$$

Definindo a lagrangiana

$$L = A^2 c^2 \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 + g_{ik} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^k}{d\lambda}, \quad (6.5)$$

considere a ação

$$S = \int L(x^i, \dot{x}^i, t) d\lambda, \quad (6.6)$$

ao longo de um caminho arbitrário no espaço-tempo infinitesimalmente, próximo a uma curva nula, passando pelos mesmos pontos P_1 e P_2 no espaço tridimensional. A condição de curva nula, é dada por $L(x^i, \dot{x}^i, t) = 0$. Existem muitas curvas não-estacionárias (não-extremizantes) entre P_1 e P_2 onde as condições (6.4) são válidas. Por outro lado, elas podem começar em diferentes momentos t_1 em P_1 e terminar em diferentes momentos t_2 em P_2 . A possibilidade de considerar diferentes instantes t_1 e t_2 está presente no princípio de Maupertuis.

É evidente que a ação (6.6) é zero para todas as trajetórias, já que em se tratando de curvas nulas o integrando é zero. No estando, isso não nos impede de calcular a integral próxima a geodésica em primeira ordem, que não vai ser necessariamente zero, já que (6.6) se refere apenas às trajetórias que têm pontos em comum no espaço e no tempo. Variando (6.6), obtemos

$$\delta S(x^i, \dot{x}^i, t) = \int \left[\frac{\partial L}{\partial x^i} \delta x^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \delta \dot{x}^i + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t \right] d\lambda. \quad (6.7)$$

Integrando por partes o segundo e terceiro termo do integrando, obtemos

$$\delta \int L d\lambda = \left[\frac{\partial L}{\partial t} \delta t \right]_{t_1, P_1}^{t_2, P_2} + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \delta x^i \right]_{x_1, P_1}^{x_2, P_2} + \left\{ \int \left[\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) \right] \delta x^i - \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{t}} \right) \delta t \right\} d\lambda, \quad (6.8)$$

Os termos de fronteira de x^i são zero, uma vez que x^i está fixado nas extremidades. Já o primeiro termo da integral é zero por causa das equações de Euler-Lagrange na geodésica nula. Pelo fato de t ser uma coordenada cíclica, temos uma lei de conservação. De fato, segue

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0, \quad (6.9)$$

então

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{t}} = K, \quad (6.10)$$

sendo K uma constante. Levando tudo isso em conta, a equação (6.8) resulta em

$$\delta \int L d\lambda = K[\delta t]_{t_1}^{t_2} = K\delta T, \quad (6.11)$$

uma equação idêntica à de Maupertuis (4.55), que relaciona o princípio de Fermat e a equação da geodésica da luz no espaço-tempo.

Por conta disso, é possível identificar formalmente o espaço-tempo curvo como equivalente a um meio óptico e encontrar a trajetória da luz por (5.14); como apresentado em (NANDI; ISLAM, 2009) e (EVANS; NANDI; ISLAM, 1996). Em um espaço isotrópico (um espaço no qual as coordenadas espaciais tem a forma mais próxima possível da métrica euclidiana) sem dependência temporal explícita, definimos o elemento de linha

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dX^\mu dX^\nu = -\Omega^2(X^1, X^2, X^3)(dX^0)^2 + \Phi^{-2}(X^1, X^2, X^3)[(dX^1)^2 + (dX^2)^2 + (dX^3)^2], \quad (6.12)$$

sendo Ω e Φ funções isotrópicas. Optaremos por adotar coordenadas esféricas para evitar a notação de coordenadas X^μ , o que será bastante útil, especialmente considerando que trabalharemos com métricas de simetria esférica. Com essa ressalva, escrevemos

$$ds^2 = -\Omega^2(\mathbf{r})c_0^2 dt^2 + \Phi^{-2}(\mathbf{r})[dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2] = -\Omega^2(\mathbf{r})c_0^2 dt^2 + \Phi^{-2}(\mathbf{r})|d\mathbf{r}|^2, \quad (6.13)$$

c_0 representa a velocidade da luz no vácuo, enquanto $\mathbf{r}$ denota as coordenadas espaciais.

Para curvas do tipo luz, $ds^2 = 0$, a equação (6.13), nos dá

$$\Omega^2(\mathbf{r})c_0^2 dt^2 = \Phi^{-2}(\mathbf{r})|d\mathbf{r}|^2. \quad (6.14)$$

Ao extrair a raiz quadrada e isolar as diferenciais, obtemos a velocidade da luz em um sistema de coordenadas isotrópicas:

$$c(\mathbf{r}) = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = c_0 \Phi(\mathbf{r}) \Omega(\mathbf{r}). \quad (6.15)$$

Consequentemente, o índice de refração efetivo é dado por

$$n = \frac{c_0}{c} = [\Omega(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r})]^{-1}. \quad (6.16)$$

6.2 A métrica de Schwarzschild

Devido ao grande sucesso da métrica de Schwarzschild em descrever buracos negros, o avanço do periélio de Mercúrio, o desvio gravitacional da luz, entre outros fenômenos,

buscaremos encontrar o índice de refração associado a esse espaço-tempo, usando (6.16), e também as suas órbitas. Nas coordenadas $(\bar{r}, \theta, \varphi, t)$, a métrica tem a forma

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m}{\bar{r}}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{\bar{r}}\right)^{-1} d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (6.17)$$

Por outro lado, em coordenadas isotrópicas o elemento de linha deve ficar na forma (D'INVEMO, 1992)

$$ds^2 = -A^2(\mathbf{r})dt^2 + B(\mathbf{r})d\Sigma^2, \quad (6.18)$$

em que $d\Sigma^2$ é dado por

$$d\Sigma^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (6.19)$$

representando a métrica euclidiana da seção espacial $t = \text{constante}$.

Comparando (6.17) e (6.18), a parte temporal leva em

$$A^2 = \left(1 - \frac{2m}{\bar{r}}\right), \quad (6.20)$$

já o termo radial e angular são, respectivamente,

$$B^2 r^2 = \bar{r}^2 \quad \text{e} \quad B^2 dr^2 = \frac{d\bar{r}^2}{1 - \frac{2m}{\bar{r}}}, \quad (6.21)$$

dividindo essas duas últimas equações, chegamos em

$$\frac{dr}{r} = \frac{d\bar{r}}{\sqrt{\bar{r}^2 - 2m\bar{r}}}. \quad (6.22)$$

Integrando, tem-se

$$\ln r = \ln \left(\frac{\bar{r} - m + \sqrt{\bar{r}(\bar{r} - 2m)}}{m} \right) + \ln C, \quad (6.23)$$

sendo C uma constante de integração. Tomando $C = m/2$, obtemos

$$r = \left(\frac{\bar{r} - m + \sqrt{\bar{r}(\bar{r} - 2m)}}{2} \right), \quad (6.24)$$

levando em

$$\bar{r} = r \left(1 + \frac{m}{2r} \right)^2. \quad (6.25)$$

Com esse resultado, podemos escrever a métrica de Schwarzschild nas variáveis de (6.13), identificando

$$\bar{r} = r\phi^{-1} = r \left(1 + \frac{m}{2r} \right)^2, \quad (6.26)$$

e assim,

$$\phi = \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^{-2}. \quad (6.27)$$

Para a parte temporal basta substituir (6.25), obtendo-se

$$A = \Omega = \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^{-1} \left(1 - \frac{m}{2r}\right). \quad (6.28)$$

Com todas essas substituições em mãos, o elemento de linha isotrópico fica na forma (6.13). Agora é possível achar a expressão para o comportamento óptico associado a esse elemento de linha, através de (6.16):

$$n = \frac{c_0}{c} = \Omega^{-1} \Phi^{-1} \quad (6.29)$$

$$= \left(1 + \frac{m}{2r}\right) \left(1 - \frac{m}{2r}\right)^{-1} \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^2 \quad (6.30)$$

$$= \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^3 \left(1 - \frac{m}{2r}\right)^{-1}. \quad (6.31)$$

Como mencionado na seção anterior, a órbita que a luz segue no espaço-tempo é também dada pela analogia newtoniana, isto é,

$$\mathbf{r}'' = \nabla \left(\frac{n^2}{2} \right). \quad (6.32)$$

Para a métrica de Schwarzschild, que possui simetria esférica, podemos escrever (6.32) em coordenadas polares ao escolher θ fixo, $\theta = \pi/2$, sem perda de generalidade. Portanto a integral de (6.32) no plano, é

$$r'^2 + r^2 \varphi'^2 - n^2(r) = 0. \quad (6.33)$$

Como n não é função de φ , a quantidade $r^2 \varphi'$ (momento angular) é conservada. Como mostrado por (5.37), deste modo

$$h = \text{constante} = r^2 \varphi'. \quad (6.34)$$

Podemos simplificar (6.33), tomando $r = u^{-1}$. Assim derivando essa substituição por u , achamos

$$\frac{dr}{du} = \frac{du^{-1}}{du} = -u^{-2}. \quad (6.35)$$

Escrevendo a derivada $'$ como $d/d\lambda$, conforme definido no capítulo 5, e usando as nova variável u , (6.33) fica

$$u^{-4} \frac{du}{d\lambda} \frac{du}{d\lambda} + h \frac{d\varphi}{d\lambda} - n^2 = 0 \quad (6.36)$$

dividindo a equação por $h^{-2} = u^4(d\lambda/d\varphi)^2$, chegamos à

$$u^2 + \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 - n^2 h^{-2} = 0. \quad (6.37)$$

Com a nova variável u , $r = u^{-1}$, as equações (6.26), (6.27) e (6.28) ficam respectivamente

$$\bar{u} = u\phi(u), \quad (6.38)$$

$$\phi(u) = \left(1 + \frac{mu}{2} \right)^{-2}, \quad (6.39)$$

e

$$\Omega(u) = \left(1 + \frac{mu}{r} \right)^{-1} \left(1 - \frac{mu}{2} \right). \quad (6.40)$$

Fazendo a substituição para $\bar{u}$, as duas últimas equações, levam em

$$\phi^2(\bar{u}) = \left[\frac{1 + (1 - 2m\bar{u})^{1/2}}{2} \right]^4, \quad (6.41)$$

$$\Omega^2(\bar{u}) = 1 - 2m\bar{u}. \quad (6.42)$$

Derivando (6.38), achamos a diferencial

$$d\bar{u} = \phi(u)du + \frac{d\phi(u)}{du}du \quad (6.43)$$

$$= \left[\left(1 + \frac{mu}{2} \right)^{-2} - mu \left(1 + \frac{mu}{2} \right)^{-3} \right] du \quad (6.44)$$

$$= \left[1 - \frac{mu}{\left(1 + \frac{mu}{2} \right)} \right] \left(1 + \frac{mu}{2} \right)^{-2} du \quad (6.45)$$

$$= \left[\frac{1 + \frac{mu}{2} - mu}{\left(1 + \frac{mu}{2} \right)} \right] \phi(u)du \quad (6.46)$$

$$= \left(1 - \frac{mu}{2} \right) \left(1 + \frac{mu}{2} \right)^{-1} \phi(u)du \quad (6.47)$$

$$= \Omega(u)\phi(u)du. \quad (6.48)$$

Com o intuito de obter a equação (6.37) nas coordenadas antigas, $\bar{u}$, vamos usar equações (6.38) e (6.48). Desse modo, temos

$$\bar{u}\phi^{-2} + \phi^{-2}\Omega^{-2} \left(\frac{d\bar{u}}{d\varphi} \right)^{-2} - n^2 h^{-2} = 0. \quad (6.49)$$

Dividindo por $n^2 = \Omega^{-2}(u)\phi(u)^{-2}$, e levando em conta (6.31), achamos

$$\bar{u}\Omega^2(u) + \left(\frac{d\bar{u}}{d\varphi}\right)^2 - h^2 = 0. \quad (6.50)$$

A partir de (6.42), obtemos uma equação apenas na coordenada $\bar{u}$:

$$\bar{u}^2 + \left(\frac{d\bar{u}}{d\varphi}\right)^2 - 2m\bar{u}^3 - h^{-2} = 0. \quad (6.51)$$

Finalmente, derivando em respeito a φ , obtemos

$$2\bar{u}\frac{d\bar{u}}{d\varphi} + 2\left(\frac{d\bar{u}}{d\varphi}\right)\left(\frac{d^2\bar{u}}{d\varphi^2}\right) - 6m\bar{u}^2\frac{d\bar{u}}{d\varphi} = 0, \quad (6.52)$$

que, simplificando, nos dá uma equação idêntica à equação da órbita da luz no espaço-tempo de Schwarzschild:

$$\bar{u} + \frac{d^2\bar{u}}{d\varphi^2} - 3m\bar{u}^2 = 0. \quad (6.53)$$

Concluimos, então, que é possível descrever a trajetória da geodésica nula através de uma função escalar $n(r)$. Dessa forma, a curvatura do espaço-tempo e a curvatura de um raio luminoso devido à presença de um meio com índice de refração variável, apresentam um interessante analogia.

6.3 Equações de movimento para partículas.

No capítulo 5, apresentamos a equivalência entre problemas da mecânica clássica e a óptica. Pela seção anterior, vemos que essa equivalência também é válida para o espaço-tempo. No entanto isso foi feito para a trajetória da luz. Agora queremos saber se existe uma analogia entre o princípio de Fermat e o movimento de partículas no espaço-tempo.

Fazendo a variação no elemento de linha (6.13), com as coordenadas (x_2, t_2) e (x_1, t_1) fixadas, chegamos a

$$\delta \int_{x_1, t_1}^{x_2, t_2} ds = \delta \int_{x_1, t_1}^{x_2, t_2} [\Omega^2 c_0^2 dt^2 - \Phi^{-2} dr^2]^{1/2} = 0. \quad (6.54)$$

Escrevendo Φ como função de n e Ω , por meio de (6.16), temos

$$\delta \int_{x_1, t_1}^{x_2, t_2} [\Omega^2 c_0^2 dt^2 - n^2 \Omega^2 |d\mathbf{r}|^2]^{1/2} = \delta \int_{x_1, t_1}^{x_2, t_2} \Omega c_0 [dt^2 - \frac{n^2 |d\mathbf{r}|^2}{c_0^2}]^{1/2} = \delta \int_{x_1, t_1}^{x_2, t_2} \Omega c_0 \left[1 - \frac{n^2 v^2}{c_0^2}\right]^{1/2} dt \quad (6.55)$$

Como apresentando anteriormente no capítulo 4, o termo do integrando pode ser visto formalmente como a lagrangiana (ADLER et al., 1965),

$$L = -c_0^2 \Omega \left[1 - \frac{n^2 v^2}{c_0^2} \right]^{-1/2}, \quad (6.56)$$

onde o fator $-c_0$ foi colocado por conveniência. Calculando o momento canônico, tem-se

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \Omega n^2 \left[1 - \frac{n^2 v^2}{c_0^2} \right]^{-1/2} \dot{q}_i, \quad (6.57)$$

onde, q_i representa as coordenadas espaciais. A hamiltoniana, é, portanto,

$$\begin{aligned} H &= \sum_{i=0}^3 p_i \dot{q}_i - L \\ &= \sum_{i=0}^3 \Omega n^2 \dot{q}_i^2 \left[1 - \frac{v^2 n^2}{c_0^2} \right]^{-1/2} + c_0^2 \Omega \left[1 - \frac{v^2 n^2}{c_0^2} \right]^{1/2} \\ &= \Omega n^2 v^2 \left[1 - \frac{v^2 n^2}{c_0^2} \right]^{-1/2} + c_0^2 \Omega \left[1 - \frac{v^2 n^2}{c_0^2} \right]^{1/2} \\ &= \Omega c_0^2 \left[1 - \frac{v^2 n^2}{c_0^2} \right]^{-1/2}. \end{aligned} \quad (6.58)$$

Expressando em termos dos momentos canônicos, a equação acima se torna,

$$H = c_0^2 \left[\Omega^2 + \frac{p^2}{n^2 c_0^2} \right]^{1/2}. \quad (6.59)$$

Com essas equações obtidas, (6.56) e (6.59), conseguimos encontrar as equações de movimento. Devido às semelhanças entre o princípio de Fermat e o de Maupertuis, podemos usar a ação reduzida para generalizar a ideia de Fermat. Da ação reduzida e (6.57), segue-se¹⁰.

$$\delta \int \left(\sum_{i=1}^3 p_i \dot{x}_i \right) dt = \delta \int n^2 v^2 \Omega \left[1 - \frac{v^2 n^2}{c_0^2} \right]^{-1/2} dt = 0. \quad (6.60)$$

Por estarmos usando a ação reduzida, a Hamiltoniana é constante em todas as trajetórias. Com isso em mente, a equação acima pode ser escrita em termos de (6.58). Desse modo

$$\delta \int n^2 v^2 dt = \delta \int n^2 v dl. \quad (6.61)$$

Temos o princípio de Maupertuis para a mecânica clássica, o de Fermat para a óptica e, agora o princípio variacional (6.61), obtido por (EVANS; NANDI; ISLAM, 1996). Tanto o princípio de Fermat como o princípio de Maupertuis são casos particulares de (6.61). De fato, a velocidade da luz é $v = \frac{c_0}{n}$; substituindo esse valor em (6.61) chegamos ao princípio de Fermat. Agora, para obter o princípio de Maupertuis, notamos que n está relacionada com a curvatura do espaço-tempo. Para um espaço plano, a curvatura é zero, o que equivale a $n = 1$, reobtemos o princípio de Maupertuis.

¹⁰ Optaremos por manter a noção δ , mas é importante lembrar que, nesse caso, estamos lidando com uma variação em t

6.4 Equações de movimento generalizadas.

Da mesma maneira que efetuamos uma variação no princípio de Fermat para achar uma equação de movimento, faremos o mesmo para (6.61). Parametrizando por λ , temos

$$\delta \int n^2 v \left| \frac{d\mathbf{r}}{d\lambda} \right| d\lambda = 0. \quad (6.62)$$

onde $|d\mathbf{r}/d\lambda| = [\sum_{i=1}^3 (dx_i/d\lambda)^2]^{1/2}$.

Escrevendo a variação para cada termo, a equação fica

$$\delta \int n^2 v \left| \frac{d\mathbf{r}}{d\lambda} \right| d\lambda = \int [\delta(n^2 v)] \left| \frac{d\mathbf{r}}{d\lambda} \right| d\lambda + \int (n^2 v) (\delta \left| \frac{d\mathbf{r}}{d\lambda} \right|) d\lambda + \int n^2 v \left| \frac{d\mathbf{r}}{d\lambda} \right| \delta d\lambda. \quad (6.63)$$

De maneira análoga a feita no capítulo 5, vamos levar o caminho real, $\mathbf{r}$, em $\bar{\mathbf{r}}$. Com isso para o primeiro termo de (6.63), obtemos

$$\delta(n^2 v) = \nabla(n^2 v) \cdot \delta\mathbf{r}. \quad (6.64)$$

Agora, para o segundo termo

$$\delta \left| \frac{d\mathbf{r}}{d\lambda} \right| = \frac{d\mathbf{r}}{d\lambda} \cdot \frac{d\delta\mathbf{r}}{d\lambda} \left| \frac{d\mathbf{r}}{d\lambda} \right|^{-1} - \left| \frac{d\mathbf{r}}{d\lambda} \right| \frac{\delta d\lambda}{d\lambda}. \quad (6.65)$$

Com essas equações, (6.63) toma a forma

$$\delta \int n^2 v \left| \frac{d\mathbf{r}}{d\lambda} \right| d\lambda = \int \left[\left| \frac{d\mathbf{r}}{d\lambda} \right| \nabla(n^2 v) \cdot \delta\mathbf{r} + n^2 v \left| \frac{d\mathbf{r}}{d\lambda} \right|^{-1} \frac{d\mathbf{r}}{d\lambda} \cdot \frac{d\delta\mathbf{r}}{d\lambda} \right] d\lambda. \quad (6.66)$$

Procedendo com uma integração por partes e usando a condição que $\delta\mathbf{r}$ é zero nas extremidades da curva, obtemos

$$\left| \frac{d\mathbf{r}}{d\lambda} \right| \nabla(n^2 v) - \frac{d}{d\lambda} \left(n^2 v \left| \frac{d\mathbf{r}}{d\lambda} \right|^{-1} \frac{d\mathbf{r}}{d\lambda} \right) = 0, \quad (6.67)$$

uma equação diferencial que descreve a equação de movimento para uma partícula. Para deixá-la de uma forma compacta precisamos definir a parametrização, da mesma forma que fizemos para a analogia newtoniana com (5.13). Definindo

$$\left| \frac{d\mathbf{r}}{d\lambda} \right| = n^2 v, \quad (6.68)$$

Com esse resultado, a equação (6.67) passa a ser

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{d\lambda^2} = \nabla \left(\frac{1}{2} n^4 v^2 \right). \quad (6.69)$$

O lado esquerdo representa uma “força”, com $m = 1$ e o lado direito uma “energia potencial” $-\frac{1}{2}n^4v^2$. Assim como mostrado na tabela (1), a energia total também é zero nessa situação. Essa equação pode ser tanto usada para a luz como para partículas, a diferença está na velocidade, para a luz sabemos que

$$v = \frac{c_0}{n}, \quad (6.70)$$

já para partículas temos pela equação (6.58)

$$v = c_0 \frac{[1 - c_0^4 \Omega^2 / H^2]^{1/2}}{n}. \quad (6.71)$$

Em suma, para uma dada métrica expressa em coordenadas isotrópicas, podemos associar um índice de refração e, com isso, achar as equações de movimento, tanto para a luz quanto para as partículas, através de uma generalização da interconectividade entre a mecânica clássica e a óptica geométrica.

7 Conclusão e considerações finais

Nesta dissertação abordamos um princípio fundamental da óptica geométrica, o princípio de Fermat, reconhecidamente conhecido como o primeiro de todos os princípios variacionais da física, e considerado como sendo o primeiro passo para o desenvolvimento do cálculo variacional. Depois de fazer uma revisão de alguns tópicos que fundamentam o princípio de Fermat, nos debruçamos sobre a fascinante analogia que, via este princípio, é possível estabelecer entre a óptica, a mecânica e a relatividade geral.

A elaboração desta dissertação nos despertou o interesse em prosseguir com novos desenvolvimentos sobre esse tema. Podemos resumir essas novas ideias nos seguintes itens:

I) Examinar os casos bem mais complexos em que o meio refrativo é anisotrópico. Nossa primeira conjectura aqui é que a geometria riemanniana não contém os graus de liberdade extras que a anisotropia exige. Assim, uma primeira tentativa seria examinar a possibilidade de formular o princípio de Fermat numa geometria mais geral, sendo a geometria de Finsler.

II) Examinar, usando as equações de Einstein, qual deve ser a natureza da fonte da gravitação e sua identificação com possíveis meios refrativos.

III) Examinar o princípio de Fermat no contexto cosmológico e seu papel na descrição o fenômeno das lentes gravitacionais.

Referências

- ADLER, R. et al. *Introduction to general relativity*. [S.l.]: American Institute of Physics, 1965.
- D'INVEMO, R. *Introducing Einstein's relativity*. [S.l.]: Oxford University Press, 1992.
- EVANS, J.; NANDI, K. K.; ISLAM, A. The optical-mechanical analogy in general relativity: exact newtonian forms for the equations of motion of particles and photons. *General relativity and gravitation*, Springer, v. 28, p. 413–439, 1996.
- EVANS, J.; ROSENQUIST, M. F= ma optics. *Am. J. Phys*, v. 54, n. 10, p. 876–883, 1986.
- FEDOROV, A. V. et al. Methodological derivation of the eikonal equation. *Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science*, ..., v. 31, n. 4, p. 399–418, 2023.
- FELICE, F. de. On the gravitational field acting as an optical medium. *General Relativity and Gravitation*, Springer, v. 2, p. 347–357, 1971.
- FRAZER, B. P. S. *Longitudinal and Transverse Waves*. 2014. Acesso em: 10 jul. 2024. Disponível em: <<https://frazerphysics.blogspot.com/2011/03/32-longitudinal-and-transverse-waves.html>>.
- GEEKSFORGEES, S. e. *Diffraction of light*. 2024. Acesso em: 10 jul. 2024. Disponível em: <<https://www.geeksforgeeks.org/diffraction-of-light/>>.
- GOLDSTEIN, H.; TWERSKY, V. Classical mechanics. *Physics Today*, American Institute of Physics, v. 5, n. 9, p. 19–20, 1952.
- GOLDSTINE, H. H. *A History of the Calculus of Variations from the 17th through the 19th Century*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. v. 5.
- GRIFFITHS, D. J. *Introduction to Electrodynamics Fourth Edition*. [S.l.: s.n.], 2021.
- LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. Classical field theory. *Course of Theoretical Physics*, v. 2, 1975.
- LEMOES, N. A. *Mecânica analítica*. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2013.
- LEONHARDT, U.; PHILBIN, T. *Geometry and light: the science of invisibility*. [S.l.]: Courier Corporation, 2010.
- LEVI-CIVITA, T. La teoria di einstein e il principio di fermat. *Il Nuovo Cimento (1911-1923)*, Springer, v. 16, n. 1, p. 105–114, 1918.
- MACHADO, K. D. *Teoria do eletromagnetismo: volume 3*. [S.l.]: Ponta Grossa:- Todapalavra,, 2014.
- NANDI, K. K.; ISLAM, A. On the optical-mechanical analogy in general relativity. *arXiv preprint arXiv:0905.4479*, 2009.

- NITYANANDA, R.; SAMUEL, J. Fermat's principle in general relativity. *Physical Review D*, APS, v. 45, n. 10, p. 3862, 1992.
- NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de física básica: Ótica, relatividade, física quântica (vol. 4)*. [S.l.]: Editora Blucher, 2014.
- PLEBANSKI, J. Electromagnetic waves in gravitational fields. *Physical Review*, APS, v. 118, n. 5, p. 1396, 1960.
- SPIVAK, M. Physics for mathematicians, mechanics i, publish or perish. *Inc.: Houston, TX, isbn*, p. 978–0, 2010.
- STEWART, J. *Cálculo volume 2*. [S.l.]: 2013, 2013.
- VAUGHAN, M. *Optics PY3101*. [S.l.]: University College Cork, 2014.
- WARE, M.; PEATROSS, J. *Physics of Light and Optics (Black & White)*. [S.l.]: Lulu.com, 2015.
- WEYL, H. The theory of gravitation. *Annalen Phys*, v. 54, p. 117, 1917.
- XUE-JUN, W.; CHONG-MING, X. Null geodesic equation equivalent to the geometric optics equation. *Communications in Theoretical Physics*, IOP Publishing, v. 9, n. 1, p. 119, 1988.
- ZHOU, H. et al. Road surface mirage: a bunch of hot air? *Chinese science bulletin*, Springer, v. 56, p. 962–968, 2011.
- ZILIO, S. C. Óptica moderna. *Instituto de Física de São Carlos. Universidade de São Paulo*, 2009.