

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

**Estabilidade e controlabilidade
exata para um sistema de
Timoshenko com apenas um
controle na fronteira**

por

Matheus Evangelista Vieira

sob a orientação de

Prof. Dr. Fágnar Dias Araruna

João Pessoa – PB
Abril de 2022

**Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação**

V658e Vieira, Matheus Evangelista.

Estabilidade e controlabilidade exata para um sistema de Timoshenko com apenas um controle na fronteira / Matheus Evangelista Vieira. - João Pessoa, 2022.

83 f. : il.

Orientação: Fágnner Dias Araruna.

Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Modelos matemáticos. 2. Sistema de Timoshenko. 3. Controlabilidade. 4. Observabilidade. 5. HUM. I. Araruna, Fágnner Dias. II. Título.

UFPB/BC

CDU 519.87(043)

**Estabilidade e controlabilidade exata para um sistema
de Timoshenko com apenas um controle na fronteira**

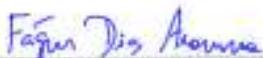
por

Matheus Evangelista Vieira

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

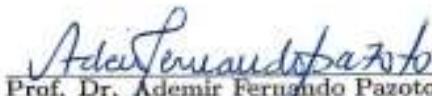
Aprovada por:



Prof. Dr. Fágnor Dias Araruna (Presidente)
(Universidade Federal da Paraíba - UFPB)



Prof. Dr. Felipe Wallison Chaves Silva
(Universidade Federal da Paraíba - UFPB)



Prof. Dr. Ademir Fernando Pazoto
(Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ)

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

A minha família...

Agradecimentos

A Deus por me abençoar e proteger em toda essa jornada.

Ao Prof. Dr. Fágner Dias Araruna, por toda ajuda, esforço, conselhos e paciência durante esse período de orientação, e o mais importante, sua compreensão quando estive doente.

A todos os professores e colegas do nosso grupo de Teoria do controle, pois sempre estavam dispostos a ajudar quando eu precisasse.

À minha namorada Rayla Calisto e toda sua família, por todo apoio e amor que tiveram comigo nessa longa caminhada. Serei eternamente grato por ter vocês em minha vida.

À minha mãe e minha irmã, por todo esforço que fizeram para tornar isto possível, todo carinho que tiveram comigo e todo o amor que sempre será retribuído, sem vocês nada disso seria possível.

Ao meu pai, que infelizmente não se encontra entre nós, mas durante sua vida sempre me incentivou e apoiou nos meus estudos. Serei eternamente grato.

Aos meus colegas e amigos Lucas Machado e Luiz Felipe, por estarem desde o início juntos comigo nessa luta nos momentos bons e ruins.

Resumo

Nesta dissertação, estudamos a estabilidade e a controlabilidade exata de um sistema Timoshenko. Na primeira parte do trabalho, consideramos o sistema Timoshenko com apenas um amortecimento fracionário de contorno. Primeiro mostramos que o sistema é fortemente estável, mas não uniformemente estável. Na segunda parte, estudamos a controlabilidade exata do sistema Timoshenko com apenas um controle na fronteira. Usando argumentos de análise não-harmônica e o Método da Unicidade Hilbertiana (HUM), provamos que o sistema é exatamente controlável em espaços apropriados.

Palavras-chave: ?

Abstract

In this dissertation, we study the stability and exact controllability of a Timoshenko system. In the first part of the work, we consider the Timoshenko system with only one boundary fractional damping. We first show that the system is strongly stable, but not uniformly stable. In the second part, we study the boundary exact controllability of the Timoshenko system with only one control. Using non-harmonic analysis arguments and the Hilbert Uniqueness Method (HUM), we prove that the system is exactly controllable in appropriate spaces.

Keywords: ?

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	5
1.1 Semigrupos	5
1.2 Expansão assintótica	7
1.3 Resultados complementares	8
2 Estabilidade do sistema de Timoshenko com derivada fracionária	13
2.1 Modelo estendido e boa colocação	13
2.2 Falta de estabilidade exponencial	26
2.3 Estabilidade polinomial	29
3 Controlabilidade exata do sistema de Timoshenko	42
3.1 Análise espectral para o sistema Timoshenko homogêneo	42
3.2 Observabilidade e controlabilidade exata com condições de ondas de velocidades iguais	45
3.2.1 Desigualdade de observabilidade em espaços usuais	54
3.3 Observabilidade e controlabilidade exata quando as velocidades de propagação são diferentes	60
Referências Bibliográficas	70

Introdução

Em 1921, o engenheiro mecânico ucraniano Stephen Prokofievich Timoshenko desenvolveu em [26] um modelo para a vibrações transversais em vigas planas sem a presença de mecanismos dissipativos de acordo com o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \rho\varphi_{tt} = (K(\varphi_t - \psi))_x & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}_+, \\ I_\rho\psi_{tt} = (EI\psi_x)_x - K(\varphi_x - \psi), & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}_+, \end{cases} \quad (1)$$

em que φ é o deslocamento transversal do feixe e ψ é o ângulo de rotação do filamento do feixe. Os coeficientes ρ , I_ρ , E , I e K são, respectivamente, a densidade (a massa por unidade de comprimento), o momento polar de inércia de uma de uma seção transversal, módulo de elasticidade de Young, momento de inércia de uma seção transversal e o módulo de cisalhamento.

Esta dissertação está baseada no trabalho de Akil et al. [1], no qual foi provado que o sistema de Timoshenko tem uma taxa de decaimento polinomial e que é exatamente controlável em espaços apropriados. Para mantermos a mesma estrutura de [1], vamos reescrever o sistema de Timoshenko como

$$\begin{cases} au_{tt} - (u_x + y)_x = 0, & (x, t) \in (0, 1) \times \mathbb{R}_+ \\ by_{tt} - y_{xx} + c(u_x + y) = 0. & (x, t) \in (0, 1) \times \mathbb{R}_+ \end{cases} \quad (2)$$

com as seguintes condições iniciais

$$(u(x, 0), u_t(x, 0), y(x, 0), y_t(x, 0)) = (u_0(x), u_t(x), y_0(x), y_t(x)), \quad x \in (0, 1). \quad (3)$$

Notemos que, por (1.1) os coeficientes a , b e c são constantes positivas e, mais precisamente, $a = \frac{\rho}{K}$, $b = \frac{I_\rho}{EI}$ e $c = \frac{K}{EI}$. Gostaríamos de entender, qual é a influência destes coeficientes sobre a estabilidade e controlabilidade para o sistema mencionado.

Na primeira parte deste trabalho, estudaremos a estabilidade do sistema (2)-(3) com apenas um amortecimento fronteira, ou seja, sujeito às seguintes condições:

$$u(0, t) = y_x(0, t) = y_x(1, t) = 0 \quad \text{e} \quad u_x(1, t) + y(1, t) + \gamma d_t^{\alpha\eta} u(1, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Aqui, os coeficientes η, γ, α são estritamente positivos em $(0, 1)$. O cálculo fracionário inclui várias extensões da definição usual de derivadas de inteiros para ordem real, incluindo a derivada de Caputo, a derivada de Riemann-Liouville, a derivada de Riesz e a derivada de Weyl. Nesta dissertação, consideramos a derivada fracionária de Caputo

$$[D^{\alpha, \eta} \omega] = d_t^{\alpha, \eta} \omega(t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^1 (t - s)^{-\alpha} e^{-\eta(t-s)} \frac{d\omega}{ds}(s) ds. \quad (5)$$

Na segunda parte desta dissertação, estudaremos a controlabilidade exata na fronteira do sistema de Timoshenko (2)-(3) com apenas um controle de associado à primeira equação, isto é, sujeito às seguintes condições de fronteira

$$u(0, t) = y_x(0, t) = y_x(0, t) = 0 \quad e \quad u(1, t) = v(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (6)$$

Em (6), a função $v = v(t)$ é o controle. Em [24] podemos ser encontrávárias referências para a descrição matemática das derivadas fracionárias. A ordem fracionária ou, em geral, do tipo de convolução não é apenas importante do ponto de vista teórico, mas também para aplicações que surgem naturalmente na física, química, fenômenos biológicos, ecológicos, ver, por exemplo, [19]. Eles são usados para descrever propriedades hereditárias de vários materiais e processos, por exemplo, na viscoelasticidade, devido à natureza da microestrutura do material, tanto o sólido elástico quanto o fluido viscoso como qualidades de resposta estão envolvidos. A resposta viscoelástica ocorre em uma variedade de materiais, como solos, concretos, borrachas, cartilagem, tecido biológico, vidros e polímeros (ver [7]). No nosso caso, a dissipação fracionárias descreve um amortecimento viscoelástico de limite ativo projetado com a finalidade de reduzir as vibrações (ver [18]).

Agora iremos mencionar alguns resultados relacionados com a estabilidade do sistema de Timoshenko. Kim e Renardy em [13] consideraram o sistema (1) com dois controles de fronteira e estabeleceram um resultado de decaimento exponencial para o sistema (1) com condições de Dirichlet homogênea e duas dissipações distribuídas internamente. Soufyane e Wehb, em [25], mostraram que o sistema de Timoshenko (1) com uma lei de dissipação distribuída internamente é exponencialmente estável se, e somente se, as velocidades de propagação das ondas são iguais. Muñoz-Rivera e Rack, em [20], estudaram um sistema não linear de Timoshenko com condições de contorno homogêneas. Eles mostraram que a solução do sistema decai exponencialmente se, e somente se, as velocidades de propagação da onda são iguais. Caso contrário, apenas a estabilidade polinomial é válida. Alabau-Boussoira [4] estendeu os resultados de [20] considerando dissipação não linear. Ammar-Khodja et al., em [5], consideram o sistema linear de Timoshenko com um termo de memória sob condições de contorno

homogêneas. Foi estabelecido a estabilidade uniforme se, e somente se, as velocidades das ondas forem iguais. Em [9] Benaissa e Benazzouz consideraram o sistema (2)-(3) com duas condições de contorno de controle dinâmico do tipo derivada fracionária.

$$\begin{cases} u(0, t) = y(0, t) = 0 & t \in \mathbb{R}_+, \\ m_1 u_{tt}(L, t) + (u_x + y)(L, t) = -d_t^{\alpha, \eta} u(L, t) & t \in \mathbb{R}_+, \\ m_2 y_{tt}(L, t) + y_x(L, t) = -d_t^{\alpha, \eta} y(L, t) & t \in \mathbb{R}_+, \end{cases} \quad (7)$$

em que m_1 e m_2 são constantes positivas. Eles mostraram que o sistema (2)-(3),(7) não é uniformemente estável por análise espectral. Assim, usando a teoria de *semigrupos* de operadores lineares e um resultado obtido por Borichev e Tomilov, eles estabeleceram uma taxa de decaimento de energia polinomial do tipo $t^{-\frac{1}{2-\alpha}}$.

Na primeira parte desta dissertação, estudamos a estabilidade do sistema Timoshenko (2)-(3) com uma derivada fracionária (4). Mostramos que a energia do sistema (2)-(4) tem uma taxa de decaimento polinomial. Além disso, em alguns casos, obtemos um polinômio de ótima ordem de estabilidade.

Passamos agora ao segundo conjunto de resultados do artigo, que aborda as questões de controlabilidade do sistema de Timoshenko com controle na fronteira, Zhang e Hu, em [27], estudaram, usando o método da unicidade Hilbertiana (HUM), introduzido por J-L. Lions (ver [15]) a controlabilidade exata de um sistema de Timoshenko com controles dinâmicos. Em [6], Araruna e Zuazua analisaram como as propriedades de controlabilidade para (1) dependem do módulo K . Em particular, sob algumas suposições sobre as condições iniciais, eles provaram que a propriedade de controlabilidade exata do sistema Kirchhoff é obtida como um limite quando $K \rightarrow \infty$.

Na segunda parte desta dissertação, estudaremos a controlabilidade exata na fronteira do sistema de Timoshenko (2)-(3) com condições de contorno (6), enquanto as ondas se propagam com velocidades iguais ou diferentes. Para este fim, usaremos o HUM, que transforma o problema de controlabilidade para o sistema em encontrar uma *desigualdade de observabilidade* para um sistema adjunto. Esta desigualdade, por sua vez, será obtida por meio de uma análise espectral e teoremas do tipo Ingham.

Esta dissertação está organizada da seguinte forma: Na Seção 2, estudamos a boa colocação e a estabilidade sistema de Timoshenko (2)-(3). Mais precisamente, provamos a estabilidade do sistema na falta de compacidade do resolvente do gerador, mostramos que o sistema Timoshenko (2)-(3) com condições de contorno (4), é não uniformemente estável quando as velocidades de propagação das ondas são iguais ou diferentes. Provamos ainda a estabilidade polinomial do sistema, com uma rápida taxa de decaimento polinomial quando as ondas se propagam com velocidades iguais. Na Seção 3, estudamos a controlabilidade exata do sistema de Timoshenko (2)-(3) com

condições de contorno (6). Por meio de uma análise espectral do sistema, provamos sua controlabilidade exata quando as ondas se propagam com a mesma velocidade e com diferentes velocidades.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo enunciaremos algumas definições e resultados, que serão usados ao decorrer deste trabalho.

1.1 Semigrupos

Definição 1.1.1. Uma família $T(t)$ de operadores lineares limitados no espaço de Banach X , é chamado semigrupo fortemente contínuo ou C_0 -semigrupo se

- (a) $T(0) = I$, (I é o operador identidade);
- (b) $T(s+t) = T(s)T(t)$, $\forall t, s \geq 0$;
- (c) Para todo $x \in X$, $T(t)x$ é contínua em t sobre $[0, \infty]$.

Definição 1.1.2. Seja $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo de X . O gerador infinitesimal do semigrupo é um operador linear $A : D(A) \rightarrow X$ em que

$$D(A) = \left\{ u \in X; \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t)u - u}{t} \text{ existe} \right\}$$

e

$$Au = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t)u - u}{t}, \quad u \in D(A)$$

Teorema 1.1.3. Assumiremos que A_1 é o gerador do C_0 -semigrupo de contração $(e^{tA_1})_{t \geq 0}$ no espaço de Hilbert H_1 se

- (a) A_1 não possui autovalores imaginários puros;
- (b) $\sigma(A_1) \cap i\mathbb{R}$ é enumerável, onde $\sigma(A_1)$, denota o espectro de A_1 , então o C_0 -semigrupo $(e^{tA_1})_{t \geq 0}$ é fortemente estável.

Demonstração. Ver [8]. □

Definição 1.1.4. Considere o operador $A_1 : D(A) \rightarrow H_1$, em que H_1 é um espaço de Banach. O C_0 -semigrupo $(e^{tA_1})_{t \geq 0}$ é dito

(a) Fortemente estável se

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|e^{tA_1}x_0\|_{H_1} = 0, \quad \forall x_0 \in H_1.$$

(b) Exponencialmente (ou uniformemente) estável se houver duas constantes positivas M e ϵ tais que

$$\|e^{tA_1}x_0\|_{H_1} \leq M e^{-\epsilon t} \|x_0\|_{H_1}, \quad \forall t > 0, \quad \forall x_0 \in H_1.$$

(c) Polinomialmente estável se houver duas constantes positivas c e α tais que

$$\|e^{tA_1}x_0\|_{H_1} \leq c t^{-\alpha} \|A_1 x_0\|_{H_1}, \quad \forall t > 0, \quad \forall x_0 \in D(A_1).$$

Teorema 1.1.5. Sejam $\{T_1(t)\}_{t \geq 0}$ e $\{T_2(t)\}_{t \geq 0}$ dois C_0 -semigrupos, com o mesmo gerador infinitesimal A . Então $\{T_1(t)\}_{t \geq 0}$ e $\{T_2(t)\}_{t \geq 0}$ são idênticos.

Demonstração. Ver [12]. □

Corolário 1.1.6. Se $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo cujo gerador infinitesimal A é limitado, então $T(t) = e^{tA_1}$.

Demonstração. Ver [12]. □

Definição 1.1.7. Seja X um espaço de Banach. Um operador $A : D(A) \rightarrow X$ diz-se dissipativo se

$$\|u - \lambda A u\| \geq \|u\|, \quad \forall u \in D(A), \quad \forall \lambda > 0.$$

Definição 1.1.8. Seja X um espaço de Banach. Um operador A em X diz-se m-dissipativo se

(a) A é dissipativo;

(b) para todo $\lambda > 0$ e $f \in X$, existe $u \in D(A)$ tal que $u - \lambda A u = f$.

Teorema 1.1.9. Seja X um espaço de Hilbert, então A é dissipativo em X se, e somente se, $\langle A u, u \rangle \leq 0$ para todo $u \in D(A)$.

Demonstração. Ver [12]. □

Definição 1.1.10. Um operador densamente definido entre os espaços de Banach X e Y é uma transformação linear $T : D \rightarrow Y$, onde D é um subespaço denso de X . Em particular, quando $X = Y$, diz-se que T é um operador densamente definido em X .

Teorema 1.1.11. (Lumer-Phillips) Um operador densamente definido $A : D(A) \subset E \rightarrow F$ é o gerador de um C_0 -semigrupo de contração se, e somente se, A é m -dissipativo.

Demonstração. Ver [12]. □

Proposição 1.1.12. Seja $T(t)$ um C_0 -semigrupo, com gerador infinitesimal A . Se $Re(\lambda) > \omega(A)$, então λ está no conjunto resolvente $\rho(A)$, com

$$\omega(A) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \|e^{tA}\|_{L(H_1)}}{t}.$$

Demonstração. Ver [12]. □

Teorema 1.1.13. (Hille-Yosida) Um operador linear não limitado A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contração $T(t)$, com $t \geq 0$ se, e somente se,

- (a) A é um operador fechado e $\overline{D(A)} = X$;
- (b) Para cada $\lambda > 0$, a aplicação $(\lambda I - A)^{-1}$ existe e é um operador linear limitado, com

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Demonstração. Ver [12]. □

1.2 Expansão assintótica

Definição 1.2.1. Considere as seguintes convenções:

- (a) Escrevemos $f = \mathcal{O}(g)$, com $x \rightarrow x_0$, desde que exista uma constante c tal que

$$|f(x)| \leq c|g(x)|$$

para todo x suficientemente próximo de x_0 .

- (b) Escrevemos $f = o(g)$, com $x \rightarrow x_0$, desde que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

(c) Escrevemos $f(x) \sim g(x)$, com $x \rightarrow x_0$, quando

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Definição 1.2.2. Uma sequência de funções $\varphi_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita assintótica, com $x \rightarrow x_0$, quando

$$\varphi_{n+1} = o(\varphi_n),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, considere

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x). \quad (1.1)$$

Se, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$f(x) - \sum_{n=1}^N a_n \phi_n(x) = o(\phi_N),$$

então (1.1) é a expansão assintótica de f com respeito a (ϕ_n) , com $x \rightarrow x_0$.

1.3 Resultados complementares

Teorema 1.3.1. Suponha que A_1 é o gerador de um semigrupo fortemente contínuo de contrações $(e^{tA_1})_{t \geq 0}$ em H_1 . Se $\sigma(A_1) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$, então para $l > 0$ fixado, as condições seguintes são equivalentes:

- (a) $\sup \|(i\lambda I - A_1)^{-1}\|_{L(H_1)} = O(|\lambda|^l)$
- (b) $\|e^{tA_1} U_0\|_{H_1} \leq \frac{C}{t^l} \|U_0\|_{D(A_1)}^2, \quad \forall t > 0, \quad U_0 \in D(A_1), \quad c > 0.$

Demonstração. Ver [8]. □

Teorema 1.3.2. (Khintchine) Seja $\Psi : \mathbb{R}_{\geq 1} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ um funcional contínuo tal que $x \mapsto x^2 \Psi(x)$ é não crescente. Então, o conjunto

$$k_1^* = \left\{ \xi \in \mathbb{R}; \left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \Psi(q), \text{ para infinitos racionais } \frac{p}{q} \right\}$$

tem medida de Lebesgue nula se a soma $\sum_{q=1}^{\infty} q \Psi(q)$ converge e tem medida de Lebesgue completa.

Demonstração. Ver [11]. □

Teorema 1.3.3. Seja T um operador fechado em um conjunto X tal que o resolvente $R(\lambda)$ existe e é compacto. Então, o espectro de T consiste inteiramente de autovalores isolados com multiplicidade finita.

Demonstração. Ver [10]. □

Definição 1.3.4. Uma sequência de vetores $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em um espaço de Hilbert H , é chamado sequência de Riesz se houver constantes $0 < c_1 \leq c_2$ tais que

$$c_1 \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 \right) \leq \left\| \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x_n \right\|^2 \leq c_2 \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 \right). \quad (1.2)$$

Uma sequência de Riesz (x_n) é chamada base de Riesz se $\overline{\text{Span}(x_n)} = H$.

Definição 1.3.5. Denotamos por D^+ a densidade superior da sequência $(\lambda_n)_n$, que será definido pela fórmula

$$D^+ = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n^+(r)}{r},$$

em que $N^+(r)$ denota o maior número de termos da sequência λ_n contida em um intervalo de comprimento r .

Teorema 1.3.6. Seja uma sequência crescente $(\lambda_n)_n$ de números reais satisfazendo

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq \gamma, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

com $\gamma > 0$. Então, as estimativas

$$\int_I |f(t)|^2 \asymp \sum_n |b_n|^2$$

em que,

$$f(t) = \sum_n b_n e^{i\lambda_n t}, \quad b_n \in \mathbb{C}$$

são válidas se $|I| > 2\pi D^+$ e não são válidas se $|I| < 2\pi D^+$.

Demonstração. Ver [14]. □

Teorema 1.3.7. Dada uma sequência crescente $(\lambda_n)_n$ de números reais satisfazendo

$$\lambda_{n+M} - \lambda_n \geq M\gamma, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Fixando $0 < \gamma' \leq \gamma$ arbitrariamente e introduzindo a sequência (e_n) como descrito acima. Se

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n e_n(t), \quad a_n \in \mathbb{C},$$

em que,

$$e_n(t) = \sum_{p=m}^n \left[\prod_{q=m}^n (\lambda_p - \lambda_q)' \right]^{-1} f_p(t) \quad e \quad f_p(t) = e^{i\lambda_p t},$$

então

$$\int_I |f(t)| dt \asymp \sum_n |a_n|^2,$$

para cada intervalo I de comprimento $|I| > 2\pi\gamma$. As constantes correspondentes c_1 e c_2 de (1.2) dependem M, γ, γ' e do intervalo I .

Demonstração. Ver [14]. □

Teorema 1.3.8. Sejam $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ bases de Riesz dos espaços de Hilbert X e Y , respectivamente, e $(f_n)_n$ e $(g_n)_n$ sequências de Bessel dos conjuntos X e Y , respectivamente. Defina

$$D = \left\{ (x, y) = \alpha_n(x_n, g_n) + \beta_n(f_n, y_n); \quad \sum_n (|\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2) < \infty \right\}.$$

Então, $D = X \times Y$.

Demonstração. Ver [17]. □

Teorema 1.3.9. (Liouville) Seja ξ uma raiz real de um polinômio inteiro irreduzível $P(x)$ de grau $n \geq 2$. Então, existe uma constante positiva $c_1(\xi)$ tal que

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{c_1(\xi)}{q^n},$$

para todo número racional $\frac{p}{q}$.

Demonstração. Ver [11]. □

Teorema 1.3.10. (Dirichlet) Sejam ξ e Q números reais, com $Q \geq 1$. Então, existe um número racional $\frac{p}{q}$, com $1 \leq q \leq Q$, tal que

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{qQ}.$$

Além disso, se ξ é irracional, então existe uma infinidade de racionais $\frac{p}{q}$ tais que

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}.$$

Demonstração. Ver [11]. □

Teorema 1.3.11. Seja $\alpha \in (0, 1)$ e $\mu(\xi) = |\xi|^{\frac{2\alpha-1}{2}}$ uma função definida em quase todos os números reais. A relação entre o domínio V e o contradomínio O do seguinte sistema

$$\omega(\xi, t) + (\xi^2 + \eta)\omega(\xi, t) - V(t)\mu(\xi) = 0, \quad (\xi, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+,$$

$$\omega(\xi, 0) = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}$$

$$O(t) - K(\alpha) \int_{\mathbb{R}} \mu(\xi) \omega(\xi, t) d\xi = 0, \quad t \in \mathbb{R}$$

é dado por $O = I^{1-\alpha, \eta}V$, em que

$$[I^{1-\alpha, \eta}V](t) = \int_0^1 \frac{(t-\tau)e^{-\eta(t-\tau)}}{\Gamma(\alpha)} V(\tau) d\tau, \quad k(\alpha) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha\pi)}{\pi}$$

Além disso, a partir das equações acima, tem-se claramente

$$D^{\alpha, \eta}V = I^{1-\alpha, \eta}DV.$$

Demonstração. Ver [18]. □

Teorema 1.3.12. (Teorema da Aplicação Aberta) Sejam E e F dois espaços de Banach e $T : E \rightarrow F$ um operador linear contínuo e bijetivo. Então, existe uma constante $c > 0$ tal que

$$B_F(0, c) \subset T(B_E(0, 1)).$$

Demonstração. Ver [10]. □

Definição 1.3.13. Uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no espaço normado X é chamada de Cauchy quando para cada $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ para todo $n, m > N$

Definição 1.3.14. O espaço X é dito de Banach se é completo, isto é, se toda sequência de Cauchy em X é convergente em X . Além disso, X é dito espaço de Hilbert quando é um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e completo com respeito à norma $\|\cdot\| = \langle \cdot, \cdot \rangle^{\frac{1}{2}}$.

Teorema 1.3.15. (Lax-Milgram) Seja H um espaço de Banach e $a(u, v)$ uma forma bilinear, contínua e coerciva. Para toda $\varphi \in H'$ existe um único $u \in H$ tal que

$$a(u, v) = \langle \varphi, v \rangle, \quad \forall v \in H.$$

Além disso, se a é simétrica, então u é caracterizada pela propriedade

$$u \in H \quad \text{e} \quad \frac{1}{2}a(u, u) - \langle \varphi, u \rangle = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}(v, v) - \langle \varphi, v \rangle \right\}.$$

Demonstração. Ver [10]. □

Corolário 1.3.16. Sejam E e F espaços de Banach e seja $T : E \rightarrow F$ um operador linear contínuo e bijetivo. Então, $T^{-1} : F \rightarrow E$ é contínuo.

Demonstração. Ver [10]. □

Teorema 1.3.17. (Desigualdade de Hölder) Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$ com p e q satisfazendo $1 \leq p, q \leq \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então, $fg \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Demonstração. Ver [10]. □

Teorema 1.3.18. (Desigualdade de Young) Se $a \geq 0$, $b \geq 0$ e $1 < p, q < \infty$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então

$$ab < \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

Demonstração. ? □

Definição 1.3.19. Sejam E , F espaços vetoriais normados. Dizemos que uma aplicação linear $T : E \rightarrow F$ é fechada se seu gráfico

$$G(T) = \{(x, Tx); x \in E\}$$

é fechado em $E \times F$.

Teorema 1.3.20. (Teorema do Gráfico Fechado) Sejam E e F espaços de Banach e $T : E \rightarrow F$ uma aplicação linear fechada. Então, T é limitado.

Demonstração. Ver [10]. □

Capítulo 2

Estabilidade do sistema de Timoshenko com derivada fracionária

2.1 Modelo estendido e boa colocação

Inicialmente, por meio do Teorema 1.3.11, iremos reescrever o nosso sistema de Timoshenko (2)-(3) com condições de fronteira (4) da seguinte forma

$$\begin{cases} au_{tt} - (u_x + y)_x = 0, & (x, t) \in (0, 1) \times \mathbb{R}_+, \\ by_{tt} - y_{xx} + c(u_x + y) = 0, & (x, t) \in (0, 1) \times \mathbb{R}_+, \\ \omega_t(\xi, t) + (\xi^2 + \eta) \omega(\xi, t) - u_t(1, t) \mu(\xi) = 0, & (\xi, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \end{cases} \quad (2.1)$$

com as seguintes condições de fronteira:

$$\begin{cases} u(0, t) = y_x(0, t) = y_x(1, t) = 0, & t \in \mathbb{R}_+, \\ u_x(1, t) + y(1, t) + \gamma k(\alpha) \int_{\mathbb{R}} \mu(\xi) \omega(\xi, t) d\xi = 0, & t \in \mathbb{R}_+, \end{cases} \quad (2.2)$$

e as seguintes condições iniciais:

$$(u(x, 0), u_t(x, 0), y(x, 0), y_t(x, 0), \omega(x, 0)) = (u_0(x), u_1(x), y_0(x), y_1(x), 0), \quad (2.3)$$

em que $k(\alpha) = \pi^{-1} \operatorname{sen}(\alpha\pi)$ e $\mu(\xi) = |\xi|^{\frac{2\alpha-1}{2}}$, com $\alpha \in (0, 1)$.

A energia do sistema, dada por

$$E_1(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 (a |u_t|^2 + bc^{-1} |y_t|^2 + |u_x + y|^2 + c^{-1} |y_x|^2) dx + \frac{\gamma k(\alpha)}{2} \int_{\mathbb{R}} |\omega(\xi, t)|^2 d\xi.$$

satisfaz

$$E'_1(t) = -\gamma k(\alpha) \int_{\mathbb{R}} (\xi^2 + \eta) \omega^2 d\xi \leq 0.$$

ou seja, ele é não crescente em relação ao tempo t .

Seja H_1 o espaço de energia finito dado por

$$H_1 = H_L^1(0, 1) \times L^2(0, 1) \times H_*^1(0, 1) \times L^2(\mathbb{R}),$$

em que $H_L^1(0, 1) = \{u \in H^1(0, 1), u(0) = 0\}$ e $H_*^1(0, 1) = \left\{u \in H^1(0, 1), \int_0^1 u dx = 0\right\}$.

Definiremos o produto interno de H_1 por

$$\langle U, \Phi \rangle_{H_1} = \int_0^1 \left(av\bar{\varphi} + bc^{-1}z\bar{\chi} + (u_x + y)\bar{(\phi + \psi)} + c^{-1}y_x\bar{\psi}_x \right) dx + \gamma k(\alpha) \int_{\mathbb{R}} \omega(\xi) \bar{\omega}_1(\xi) d\xi$$

para todo $U = (u, v, y, z, \omega)$ e $\Phi = (\phi, \varphi, \psi, \chi, \omega_1)$ em H_1 , e usaremos $\|\cdot\|_{H_1}$ para denotar a norma em H_1 .

Agora definiremos o operador A_1 em H_1 por:

$$A_1 U = (v, a^{-1}(u_x + y)_x, z, b^{-1}y_{xx} - b^{-1}c(u_x + y), -(\xi^2 + \eta)\omega(\xi) + v(1)\mu(\xi))$$

com domínio

$$\left\{ \begin{array}{l} D(A_1) = \{U = (u, v, y, z, \omega)\} \\ u, y \in H^2(0, 1), v \in H_L^1(0, 1), z \in H^1(0, 1), y_x \in H_0^1(0, 1), \\ -(\xi^2 + \eta)\omega + v(1)\mu(\xi), |\xi|\omega(\xi) \in L^2(\mathbb{R}), \\ u_x(1) + y(1)\gamma k(\alpha) \int_{\mathbb{R}} \mu(\xi) \omega(\xi) d\xi = 0 \end{array} \right.$$

Se $U = (u, u_t, y, y_t, \omega)$ satisfaz as condições (2.1)-(2.5), então o sistema de Timoshenko pode ser escrito da seguinte forma

$$\left\{ \begin{array}{l} U_t(x, t) = A_1 U(x, t), \\ U(x, 0) = U_0(x) = (u_0(x), u_1(x), y_0(x), y_1(x), 0) \end{array} \right. \quad (2.4)$$

Sabendo disso, temos o seguinte resultado

Teorema 2.1.1. Para cada $U_0 \in H_1$, o problema (2.1)-(2.3) admite uma única solução $U \in C(\mathbb{R}_+; H_1)$. Além disso, se $U_0 \in D(A_1)$, então $U \in C(\mathbb{R}_+; D(A_1)) \cap C^1(\mathbb{R}_+; H_1)$.

Demonstração. Primeiramente devemos mostrar que o operador ilimitado A_1 é m-dissipativo no espaço de energia H_1 . De fato, para $U = (u, v, y, z, \omega) \in D(A_1)$, temos que a parte real do produto $\langle A_1 U, U \rangle_{H_1}$ é dada por:

$$\begin{aligned} Re \langle A_1 U, U \rangle_{H_1} &= \int_0^1 v (u_x + y)_x + bc^{-1} z (b^{-1} y_{xx} - b^{-1} c (u_x + y)) + (u_x + y) (v_x + z) + c^{-1} y_x z_x dx \\ &\quad + \gamma k(\alpha) \int_{\mathbb{R}} -(\xi^2 + \eta) \omega^2 + v(1) \mu(\xi) \omega d\xi \end{aligned}$$

Analizando a primeira integral do lado direito da igualdade anterior

$$\int_0^1 (v u_{xx} + v y_x + c^{-1} z y_{xx} - z u_x - z y + u_x v_x + u_x z + y v_x + y z + c^{-1} y_x z_x) dx$$

Observemos que

$$\begin{aligned} \int_0^1 (v u_{xx}) dx &= v u_x(1) - (v u_x)(0) - \int_0^1 v_x u_x dx, \\ \int_0^1 v y_x dx &= v y(1) - v y(0) - \int_0^1 v_x y dx \\ \text{e} \quad \int_0^1 c^{-1} z y_{xx} dx &= c^{-1} (z y_x(1, t) - z y_x(0, t)) - c^{-1} \int_0^1 z_x y_x. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_0^1 (v u_{xx} + v y_x + c^{-1} z y_{xx} - z u_x - z y + u_x v_x + u_x z + y v_x + y z + c^{-1} y_x z_x) &= \\ = v u_x(1) - v u_x(0) + v y(1) - v y(0) & \end{aligned}$$

e,

$$Re \langle A_1 U, U \rangle_{H_1} = v(1) \left(u_x(1) + y(1) + \gamma k(\alpha) \int_{\mathbb{R}} \mu \omega d\xi \right) - \gamma k(\alpha) \int_{\mathbb{R}} (\xi^2 + \eta) \omega^2 d\xi \leq 0,$$

implicando que A_1 é m-dissipativo.

Para $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5) \in H_1$, vamos mostrar que existe $U = (u, v, y, z, \omega) \in D(A_1)$, tal que

$$U - A_1 U = F.$$

Isto equivale a mostrar que

$$v = u - f_1, \quad z = y - f_3, \quad \omega(\xi) = \frac{f_5(\xi)}{1 + \xi^2 + \eta} + \frac{u(1) \mu(\xi)}{1 + \xi^2 + \eta} + \frac{f_1(1) \mu(\xi)}{1 + \xi^2 + \eta}, \quad (2.5)$$

$$au - (u_x + y)_x = a(f_1 + f_2) \quad (2.6)$$

e

$$by - y_{xx} + c(u_x + y) = b(f_3 + f_4), \quad (2.7)$$

com as seguintes condições de fronteira:

$$u(0) = 0, \quad u_x(1) + y(1) = -\gamma k(\alpha) \int_{\mathbb{R}} \mu \omega d\xi, \quad y_x(0) = y_x(1) = 0. \quad (2.8)$$

Seja $(\varphi, \psi) \in H_L^1(0, 1) \times H_*^1(0, 1)$. Multiplicando (2.6) e (2.7) por $\bar{\varphi}$ e $c^{-1}\bar{\psi}$, respectivamente, integrando em $(0, 1)$, usando integração por partes e as condições de contorno em (2.8), nós obtemos

$$\int_0^1 (au\bar{\varphi} - \bar{\varphi}u_{xx} - \bar{\varphi}y_x) dx = a \int_0^1 (f_1 + f_2) \bar{\varphi} dx$$

e

$$\int_0^1 (bc^{-1}y\bar{\psi} - c^{-1}y_{xx}\bar{\psi} + u_x\bar{\psi} + y\bar{\psi}) dx = \int_0^1 bc^{-1}(f_3 + f_4) \bar{\psi} dx$$

Observe que

$$\int_0^1 \bar{\varphi}u_{xx} dx = \bar{\varphi}u_x(1) - \bar{\varphi}u_x(0) - \int_0^1 \bar{\varphi}_x u_x dx,$$

$$\int_0^1 \bar{\psi}y_{xx} dx = \bar{\psi}y_x(1) - \bar{\psi}y_x(0) - \int_0^1 \bar{\psi}_x y_x dx,$$

$$\int_0^1 \bar{\psi}y_{xx} dx = \bar{\psi}y_x(1) - \bar{\psi}y_x(0) - \int_0^1 \bar{\psi}_x y_x dx,$$

e

$$\int_0^1 u_x \bar{\psi} dx = \bar{\psi}u(1) - \bar{\psi}u(0) - \int_0^1 u \bar{\psi}_x dx.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (au\bar{\varphi} + bc^{-1}y\bar{\psi} + (u_x + y)(\bar{\varphi}_x + \bar{\psi}) + c^{-1}y_x\bar{\psi}_x) dx - (\bar{\varphi}u_x)(1) - (\bar{\psi}y)(1) \\ &= \int_0^1 a(f_1 + f_2)\bar{\varphi} + bc^{-1}(f_3 + f_4)\bar{\psi} dx. \end{aligned}$$

Temos também a seguinte igualdade:

$$\begin{aligned} -(\bar{\varphi}u_x)(1) - (\bar{\varphi}y)(1) &= \bar{\varphi}(1)\gamma k(\alpha) \int_{\mathbb{R}} \mu \omega d\xi \\ &= \bar{\varphi}(1)\gamma k(\alpha) \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{f_5(\xi)}{1+\xi^2+\eta} + \frac{u(1)\mu(\xi)}{1+\xi^2+\eta} + \frac{f_1(1)\mu(\xi)}{1+\xi^2+\eta} \right) d\xi \end{aligned}$$

Logo,

$$a((u, y), (\varphi, \psi)) = L(\varphi, \psi), \quad (2.9)$$

em que,

$$a((u, y), (\varphi, \psi)) = \int_0^1 (au\bar{\varphi} + bc^{-1}y\bar{\psi} + (u_x + y)(\bar{\varphi}_x + \bar{\psi}) + c^{-1}y_x\bar{\psi}_x) dx + \quad (2.10)$$

$$+ u(1)\bar{\varphi}(1)M_2(\eta, \alpha)$$

e

$$L(\varphi, \psi) = \int_0^1 a(f_1 + f_2)\bar{\varphi} + bc^{-1}(f_3 + f_4)\bar{\psi} dx - \bar{\varphi}(1)f_1(1)M_2(\eta, \alpha) \quad (2.11)$$

com,

$$M_1(\eta, \alpha) = \gamma k(\alpha) \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu f_5}{1+\eta+\xi^2} d\xi$$

e

$$M_2(\eta, \alpha) = \gamma k(\alpha) \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu^2}{1+\eta+\xi^2} d\xi$$

Devido a (2.10) e (2.11) e usando o fato de que $M_2(\eta, \lambda) > 0$, temos que a é bilinear, contínua e coerciva em $(H_L^1(0, 1) \times H_*^1(0, 1))^2$, e L é linear em $(H_L^1(0, 1) \times H_*^1(0, 1))$. Então usando o Teorema 1.16 de Lax-Milgram, deduzimos que existe $(u, y) \in (H_L^1(0, 1) \times H_*^1(0, 1))$ solução única do problema (2.9). Portanto, por (2.5), $U = (u, v, y, z, \omega)$ satisfaz $(I - A_1)U = F$. \square

Nosso principal resultado nesta parte é o seguinte teorema.

Teorema 2.1.2. Assuma que $\eta \geq 0$, então o semigrupo de contração $(e^{tA_1})_{t \geq 0}$ é fortemente estável em H_1 , no sentido que $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{tA_1}U_0\|_{H_1} = 0$ para todo $U_0 \in H_1$ se

$$c \neq \frac{(am_1^2 - bm_2^2)(bm_1^2 - m_2^2)\pi}{a(a+b)(m_1^2 + m_2^2)}, \quad \forall m_1, m_2 \in \mathbb{Z} \quad (2.12)$$

Para a prova do Teorema 2.2 utilizaremos os Lemas a seguir.

Lema 2.1.3. Assuma que $\eta \geq 0$ e 2.12 seja satisfeita, então

$$Ker(i\lambda I - A_1) = \{0\}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Demonstração. Sejam $U \in D(A_1)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que

$$A_1 U = i\lambda U.$$

Isto é equivalente a

$$v = i\lambda u, \quad z = i\lambda y, \quad (2.13)$$

$$i\lambda u (1) \mu(\xi) - (\xi^2 + \eta + i\lambda) \omega(\xi) = 0, \quad (2.14)$$

$$a\lambda^2 u + (u_x + y)_x = 0, \quad (2.15)$$

$$b\lambda^2 y + y_{xx} - c(u_x + y) = 0. \quad (2.16)$$

Note que $Re\langle i\lambda u, u \rangle = 0$, pois dado $u \in \mathbb{C}$ com $u = a + bi$, teremos

$$\begin{aligned} \bar{u}(i\lambda u) &= (a - bi)(-\lambda b + \lambda ai) \\ &= -a\lambda b + \lambda a^2 i + \lambda^2 i + b\lambda a \\ &= \lambda(a^2 + b^2)i. \end{aligned}$$

Portanto,

$$0 = Re\langle U, i\lambda U \rangle = Re\langle u, A_1 u \rangle = -\gamma k(\alpha) \int_{\mathbb{R}} (\xi^2 + \eta) |\omega|^2 d\xi.$$

Podemos, então, deduzir que $\omega = 0$.

Usando (2.14) e o fato que $U \in D(A_1)$, segue que

$$u(0) = \lambda u(1) = u_x(1) + y(1) = y_x(0) = y_x(1) = 0. \quad (2.17)$$

Se $\lambda = 0$, então, por (2.15),

$$(u_x + y) = K, \quad \text{com } K \in \mathbb{R}.$$

Mas $u_x(1) + y(1) = 0$, logo $(u_x + y) = 0$. Temos também por (2.16) que $y_{xx} = 0$, implicando em y_x ser constante. Porém $y_x(0) = y_x(1) = 0$, assim, y será constante. Pelo fato que $y \in H_*^1(0, 1)$, então $y = 0$. Daí, $u_x = 0$ decorrendo em $u = 0$.

Se $\lambda \neq 0$, então

$$y_x = -a\lambda^2 u - u_{xx}$$

e

$$(b\lambda^2 - c) y = -y_{xx} + cu_x = a\lambda^2 u_x + u_{xxx} + cu_x$$

$$\Rightarrow u_{xxxx} + (a + b)\lambda^2 u_{xx} + a\lambda^2(b\lambda^2 - c)u = 0$$

como $y_x = -a\lambda^2 u - u_{xx}$, e por (2.17)

$$u(0) = u(1) = u_{xx}(0) = u_{xx}(1) = 0$$

sabemos também por calculos anteriores que

$$(b\lambda^2 - c) y = a\lambda^2 u_x + u_{xxx} + cu_x$$

$$\Rightarrow (b\lambda^2 - c) y - cu_x + b\lambda^2 u_x = a\lambda^2 u_x + u_{xxx} + b\lambda^2 u_x$$

$$\Rightarrow (a\lambda^2 + b\lambda^2) u_x(1) + u_{xxx}(1) = 0.$$

Portanto,

$$u_{xxxx} + (a + b)\lambda^2 u_{xx} + a\lambda^2(b\lambda^2 - c)u = 0 \quad (2.18)$$

$$u(0) = u(1) = u_{xx}(0) = u_{xx}(1) = 0, \Rightarrow (a\lambda^2 + b\lambda^2) u_x(1) + u_{xxx}(1) = 0. \quad (2.19)$$

Se (2.12) for satisfeita, então usando as condições de fronteira (2.19), é fácil concluir que $u = 0$ é a única solução de (2.18), consequentemente $U = 0$.

De fato, o polinômio característico do sistema (2.20) é

$$P(r) = r^4 + (a + b)\lambda^2 r^2 + a\lambda^2(b\lambda^2 - c).$$

Daí, fazendo $\chi = \lambda^2$, temos

$$P_0(x) = \chi^2 + (a + b)\lambda^2 \chi + a\lambda^2(b\lambda^2 - c)$$

e as duas raízes χ_1 e χ_2 distintas de P_0 , são dadas por

$$\chi_1 = \frac{-(a + b)\lambda^2 - \sqrt{(a - b)^2\lambda^4 + 4ac\lambda^2}}{2}, \quad \chi_2 = \frac{-(a + b)\lambda^2 + \sqrt{(a - b)^2\lambda^4 + 4ac\lambda^2}}{2}.$$

Observe que $\chi_1 < 0$, e o sinal de χ_2 depende do valor de λ^2 em relação cb^{-1} Caso 1.

$\lambda < cb^{-1}$. Então $\chi_2 > 0$, definimos

$$r_1 = \sqrt{-\chi_1} \quad e \quad r_2 = \sqrt{\chi_2}.$$

Então o polinômio P tem as seguintes raízes $ir_1, -ir_1, r_2, -r_2$ e a solução do sistema (2.20) é dada por:

$$u(x) = c_1 \operatorname{sen}(r_1 x) + c_2 \operatorname{cos}(r_1 x) + c_3 \operatorname{senh}(r_2 x) + c_4 \operatorname{cosh}(r_2 x)$$

onde, $c_j \in \mathbb{C}, \forall j = 1, \dots, 4$. Observe que

$$u_{xx}(x) = -r_1^2 c_1 \operatorname{sen}(r_1 x) - r_1^2 c_2 \operatorname{cos}(r_1 x) + r_2^2 c_3 \operatorname{senh}(r_2 x) + r_2^2 c_4 \operatorname{cosh}(r_2 x).$$

Fazendo $x = 0$ em $u(x)$ e $u_{xx}(x)$, usando a condição de fronteira (2.19), obtemos

$$-r_1^2 c_2 + r_1^2 c_4 = c_2 + c_4 = 0.$$

Mas $r_1^2 + r_2^2 \neq 0$, logo $c_2 = c_4 = 0$. Além disso, de (2.19) fazendo $x = 1$ e usando o fato que $\operatorname{senh}(r_2) \neq 0$, temos

$$c_3 = 0, \quad c_1 \operatorname{sen}(r_1) = 0, \quad c_1 \operatorname{cos}(r_1) = 0.$$

Portanto, $c_1 = 0$ e o sistema (2.18)-(2.19) admite somente a solução solução nula.

Caso 2. $\lambda^2 cb^{-1}$. Neste caso, $\chi_2 = 0$. Com isso

$$r_1 = \sqrt{-\chi_1} = \sqrt{cb^{-1}(a+b)}$$

e, então, P tem duas raízes $ir_1, -ir_1$. Portanto, a solução geral de (2.18) é dada por

$$u(x) = c_1 \operatorname{sen}(r_1 x) + c_2 \operatorname{cos}(r_1 x) + c_3 x + c_4,$$

o que implica

$$u_{xx}(x) = -r_1^2 c_1 \operatorname{sen}(r_1 x) - r_1^2 c_2 \operatorname{cos}(r_1 x).$$

Fazendo $x = 0$ e aplicando (2.19), temos que $c_2 = c_4 = 0$. Além disso, da condição de fronteira (2.19), ao fazer $x = 1$, temos

$$c_3 = 0, \quad c_1 \operatorname{sen}(r_1) = 0.$$

Assuma que $\operatorname{sen}(r_1) = 0$. Segue-se que

$$\sqrt{cb^{-1}(a+b)} = r_1 = m_1\pi, \quad \text{com } m_1 \in \mathbb{N}^*.$$

Portanto, considerando $m_2 = 0$, tem-se

$$c = \frac{bm_1^2\pi}{a+b},$$

o que contradiz a condição (2.12). Com isso, $\operatorname{sen}(r_1) \neq 0$, o que implica $c_1 = 0$ e $u = 0$.

Caso 3. $\lambda^2 > cb^{-1}$: Então $\chi_2 < 0$ e temos

$$r_1 = \sqrt{-\chi_1} \quad \text{e} \quad r_2 = \sqrt{-\chi_2}.$$

Então o polinômio P possui as seguintes raízes distintas $ir_1, -ir_1, ir_2, -ir_2$. A solução de (2.18) é dada por

$$u(x) = c_1 \operatorname{sen}(r_1 x) + c_2 \cos(r_1 x) + c_3 \operatorname{sen}(r_2 x) + c_4 \cos(r_2 x).$$

Da mesma forma feita nos casos anteriores, consideraremos $x = 0$ e usaremos a condição (2.19). com isso, $c_2 = c_4 = 0$. Assuma agora que $\operatorname{sen}(r_1) = 0$ e $\operatorname{sen}(r_2) = 0$. Segue-se que

$$r_1 = m_1\pi \quad \text{e} \quad r_2 = m_2\pi, \quad m_1, m_2 \in \mathbb{N}^*.$$

Das igualdades acima temos

$$r_1^2 + r_2^2 = (m_1^2 + m_2^2)\pi^2 = (a+b)\lambda^2 \quad \text{e} \quad r_1^2 r_2^2 = m_1^2 m_2^2 \pi^4 = a\lambda^2(b\lambda^2 - c).$$

Portanto,

$$\lambda^2 = \frac{(m_1^2 + m_2^2)\pi^2}{a+b} \quad \text{e} \quad c = \frac{(am_1^2 - bm_2^2)(bm_1^2 - am_2^2)\pi^2}{a(a+b)(m_1^2 + m_2^2)},$$

o que contradiz (2.12). Portanto, $\operatorname{sen}(r_1) \neq 0$ e $\operatorname{sen}(r_2) \neq 0$. Usando (2.19) com $x = 1$ concluimos que $u = 0$, logo $U = 0$ \square

Lema 2.1.4. Assuma que $\eta = 0$, então o operador $-A_1$ não é inversível, e consequentemente $0 \in \sigma(A_1)$

Demonstração. Seja $F = (\operatorname{sen}(x), 0, 0, 0, 0) \in H_1$, e assuma que existe um $U = (u, v, y, z, \omega) \in D(A_1)$ tal que $-A_1 U = F$. segue-se que $v = -\operatorname{sen}(x)$ em $(0, 1)$ e $\xi^2 \omega(\xi) + \operatorname{sen}(1) \mu(\xi) = 0$. Assim

$$\begin{aligned} \mu(\xi) &= \frac{\operatorname{sen}(1) \mu(\xi)}{\xi^2} \\ &= \operatorname{sen}(1) |\xi|^{\frac{2\alpha-1}{2}}. \end{aligned}$$

Podemos, então, deduzir que $\omega(\xi)$ não está em $L^2(\mathbb{R})$, contradizendo a hipótese de $U \in D(A_1)$. Logo $-A_1$ não é inversível. \square

Lema 2.1.5. Assuma que (2.12) seja satisfeita e que qualquer $(\eta, \lambda) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ ou $(\eta, \lambda) \in \{0\} \times \mathbb{R}^*$, então para cada $F = (F_1, F_2) \in (L^2(0, 1))^2$, sistema

$$\begin{cases} \lambda^2 u + a^{-1} (u_x + y)_x = F_1 \\ \lambda^2 y + b^{-1} y_{xx} - cb^{-1} (u_x + y) = F_2 \\ u(0) = y_x(0) = y_x(1) = 0, -(u(1) + y(1)) = I_1(\lambda, \eta, \alpha) u(1) \end{cases} \quad (2.20)$$

onde

$$I_1(\lambda, \eta, \alpha) = i\lambda\gamma k(\alpha) \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu^2(\xi)}{i\lambda + \xi^2 + \eta} d\xi$$

Admite uma única solução forte $(u, y) \in (H^2(0, 1) \cap H_L^1(0, 1)) \times (H^2(0, 1) \cap H_*^1(0, 1))$,

Demonstração. Note que $\alpha \in (0, 1)$, com as condições do lema acima, é fácil verificar que

$$|I_1| < \infty \quad \text{e} \quad \operatorname{Re}(I_1) > 0$$

De fato, observe que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\xi^{2\alpha-1}}{\sqrt{(\xi^2 + \eta^2) + \lambda^2}} d\xi \leq \int_0^1 \frac{\xi^{2\alpha-1}}{\sqrt{(\xi^2 + \eta^2) + \lambda^2}} d\xi + \int_1^{+\infty} \frac{\xi^{2\alpha-1}}{\sqrt{(\xi^2 + \eta^2) + \lambda^2}} d\xi$$

notemos que

$$\int_0^1 \frac{\xi^{2\alpha-1}}{\sqrt{(\xi^2 + \eta^2) + \lambda^2}} d\xi \leq \frac{1}{\sqrt{\eta^2 + \lambda^2}} \int_0^1 \xi^{2\alpha-1} d\xi < +\infty.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{\xi^{2\alpha-1}}{\sqrt{(\xi^2 + \eta^2) + \lambda^2}} d\xi &\leq \int_1^{+\infty} \frac{\xi^{2\alpha-1}}{\xi^2} d\xi \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{\xi^{2\alpha-1}}{\xi^2} d\xi \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2(\alpha-1)} (R^{2(\alpha-1)} - 1) \end{aligned}$$

Como $\alpha \in (0, 1)$, então

$$\int_1^{+\infty} \frac{\xi^{2\alpha-1}}{\sqrt{(\xi^2 + \eta^2) + \lambda^2}} d\xi < \infty,$$

e, portanto, $|I_1| < \infty$

Faremos a demonstração em dois casos

Caso 1: $\eta > 0$ e $\lambda = 0$. O sistema (2.16) tem a seguinte maneira:

$$\begin{cases} -(u_x + y)_x = -aF_1 \\ -c^{-1}y_{xx} + (u_x + y) = -bc^{-1}F_2 \\ u(0) = y_x(0) = y_x(1) = u_x(1) + y(1) = 0 \end{cases} \quad (2.21)$$

Seja $(\varphi, \psi) \in H_L^1(0, 1) \times H_*^1(0, 1)$. Multiplicando a primeira e a segunda equação de (2.21) por $\bar{\varphi}$ e $\bar{\psi}$ respectivamente, e integrando por partes em $(0, 1)$, temos

$$\int_0^1 (u_x + y) \bar{(\varphi + \psi)} dx + c^{-1} \int_0^1 y_x \bar{\psi} dx = -a \int_0^1 F_1 \bar{\varphi} dx - bc^{-1} \int_0^1 F_2 \bar{\psi} dx \quad (2.22)$$

Usando o teorema de Lax-Milgram, deduzimos que existe uma única solução para o problema (2.22). Portanto aplicando a regularidade elíptica clássica, deduzimos que o sistema (2.21) tem uma solução forte única.

Caso 2: $\eta \geq 0$ e $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Primeiramente vamos definir o operador ilimitado \mathcal{L} por

$$D(\mathcal{L}) = \{(u, v) \in \nu(0, 1), y_x(0) = y_x(1) = 0, -(u_x(1) + y(1)) = I_1(\lambda, \eta, \alpha)u(1)\}$$

$$\mathcal{L}(U) = (-a^{-1}(u_x + y)_x, -b^{-1}y_{xx} + cb^{-1}(u_x + y)), \quad \forall U = (u, y) \in D(\mathcal{L}).$$

Para cada $G = (G_1, G_2) \in (L^2(0, 1))^2$, considere o seguinte sistema:

$$\begin{cases} -a^{-1}(u_x + y)_x = G_1 \\ -b^{-1}y_{xx} + cb^{-1}(u_x + y) = G_2 \\ u(0) = y_x(0) = y_x(1) = -(u_x(1) + y(1)) = I_1(\lambda, \eta, \alpha)u(1) \end{cases} \quad (2.23)$$

Seja $(\varphi, \psi) \in H_L^1(0, 1) \times H_*^1(0, 1)$. Multiplicando a primeira e a segunda equação de (2.23) por $a\bar{\varphi}$ e $bc^{-1}\bar{\psi}$ respectivamente, e integrando em $(0, 1)$, obtemos

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (u_x + y) \overline{(\varphi + \psi)} dx + c^{-1} \int_0^1 y_x \overline{\psi_x} dx + I_1(\lambda, \eta, \alpha) u(1) \overline{\varphi}(1) \\ &= a \int_0^1 G_1 \overline{\varphi} dx + bc^{-1} \int_0^1 G_2 \overline{\psi} dx \end{aligned} \quad (2.24)$$

Da mesma forma feita anteriormente, a parte esquerda da equação (2.24) é uma forma bilinear, contínua e coerciva em $(H_L^1(0, 1) \times H_*^1(0, 1))^2$ e o lado direito é uma forma linear contínua em $(H_L^1(0, 1) \times H_*^1(0, 1))^2$. Então, usando o teorema de Lax-milgram, deduzimos que existe $(u, y) \in H_L^1 \times H_*^1(0, 1)$ solução única do problema (2.24), e que o sistema (2.23) tem uma única solução forte $(u, y) \in D(\mathcal{L})$. Além disso, temos

$$\| (u, y) \|_{H_L^1(0, 1) \times H_*^1(0, 1)} \leq c \| (G_1, G_2) \|_{L^2(0, 1) \times L^2(0, 1)}$$

Segue-se da desigualdade acima, que $H_L^1(0, 1) \times H_*^1(0, 1)$ é compacto em $L^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$, e que o operador \mathcal{L}^{-1} será compacto em $L^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$. Logo aplicando \mathcal{L}^{-1} em (2.20) obtemos

$$(\lambda^2 \mathcal{L}^{-1} - I) U = \mathcal{L} F \quad (2.25)$$

em que $u = (u, y)$ e $F = (F_1, F_2)$. Consequentemente, pela desigualdade de Frendholm, provar a existencia da solução (2.25), se reduz a provar que $\ker(\lambda^2 \mathcal{L}^{-1} - I) = \{0\}$. De fato, se $(\phi, \chi) \in \ker(\lambda^2 \mathcal{L}^{-1} - I)$, então $\lambda^2(\phi, \chi) - \mathcal{L}(\phi, \chi) = 0$, segue-se

$$\begin{cases} a\lambda^2\phi + (\phi_x + \chi) = 0, \\ bc^{-1}\lambda^2\chi + c^{-1}\chi_{xx} - (\phi_x + \chi) = 0, \\ \phi(0) = \chi_x(0) = \chi_x(1) = 0, -(\phi_x(1) + \chi(1)) = I_1(\lambda, \eta, \alpha)\phi(1). \end{cases} \quad (2.26)$$

Multiplicando a primeira e segunda equação por $-\bar{\phi}$ e $-\bar{\chi}$, respectivamente, e integrando em $(0, 1)$, segue que

$$-a\lambda^2 \int_0^1 |\phi|^2 dx - bc^{-1}\lambda^2 \int_0^1 |\chi|^2 dx + \int_0^1 |\phi_x + \chi|^2 dx + c - 1 \int_0^1 |\chi_x|^2 dx + I_1(\lambda, \eta, \alpha) |\phi(1)|^2 = 0.$$

Tomando a parte imaginária da igualdade acima

$$0 = \operatorname{Im}(I_1(\lambda, \eta, \alpha) |\phi(1)|^2) = \lambda \gamma k(\alpha) \int_{\mathbb{R}} \frac{(\xi^2 + \eta) \mu^2(\xi)}{(\xi^2 + \eta)^2 + \lambda} d\xi,$$

Mas $\int_{\mathbb{R}} \frac{(\xi^2 + \eta) \mu^2(\xi)}{(\xi^2 + \eta)^2 + \lambda} d\xi \neq 0$, logo $\phi(1) = 0$. Então o sistema tem a seguinte forma.

$$\begin{cases} a\lambda^2\phi + (\phi_x + \chi) = 0 \\ bc^{-1}\lambda^2\chi + c^{-1}\chi_{xx} - (\phi_x + \chi) = 0 \\ \phi(0) = \chi_x(0) = \chi_x(1) = -(\phi_x(1) + \chi(1)) = 0 \end{cases} \quad (2.27)$$

É fácil ver que, se (ϕ, χ) é uma solução para (2.27), então o vetor $V = (\phi, i\lambda\phi, \chi, i\lambda\chi, 0)$ pertence $D(A_1)$, e $i\lambda V - A_1 V = 0$. Portanto $V \in \ker\{i\lambda I - A_1\}$. Usando o lema 2.1, $V = 0$, ou seja, a igualdade (2.25) tem solução única, devido a alternativa de Fredholm, e com isso, o sistema (2.20) possui solução única. \square

Lema 2.1.6. Considere $(\eta, \lambda) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ ou $(\eta, \lambda) \in \{0\} \times \mathbb{R}^*$ então $i\lambda I - A_1$ é sobrejetivo.

Demonastração. Seja $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5) \in H_1$. Iremos procurar um $U = (u, v, y, z, \omega) \in D(A_1)$ solução de

$$(i\lambda U - A_1) U = F.$$

Esta igualdade é equivalente ao seguinte sistema.

$$v = i\lambda u - f_1, z = i\lambda y - f_3, \quad (2.28)$$

$$\omega(\xi) = i\lambda u(1) \frac{\mu(\xi)}{i\lambda + \xi^2 + \eta} + \frac{f_5(\xi)}{i\lambda + \xi^2 - \eta} + \frac{f_1(1)\mu(\xi)}{i\lambda + \xi^2 + \eta}, \quad (2.29)$$

$$\lambda^2 + a^{-1}(u_x + y)_x = -f_2 - i\lambda f_1, \quad (2.30)$$

$$\lambda^2 y + b^{-1}y_{xx} + cb^{-1}(u_x + y) = -f - 4 - i\lambda f_3, \quad (2.31)$$

com as seguintes condições de fronteira:

$$\begin{aligned} -(u_x(1) + y(1)) &= I_1(\lambda, \eta, \alpha) u(1) + I_2(\lambda, \eta, \alpha) f_1(1) + I_3(f_5, \lambda, \eta, \alpha), u(0) = (2.32) \\ &= y_x(0) = y_x(1) = 0. \end{aligned}$$

em que I_1 foi definido anteriormente,

$$I_2(\lambda, \eta, \alpha) = -\gamma k(\alpha) \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu^2(\xi)}{(i\lambda + \xi^2 + \eta)} d\xi,$$

e

$$I_3(\lambda, \eta, \alpha, f_5) = \gamma k(\alpha) \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu(\xi) f_5(\xi)}{(i\lambda + \xi^2 + \eta)} d\xi.$$

Seja $(\varphi, \psi) \in (H^2(0, 1) \cap H_L^1(0, 1)) \times (H^2(0, 1) \cap H_*^1(0, 1))$ tal que,

$$\varphi(0) = \varphi(1) = \psi_x(0) = \psi_x(1) = 0$$

e

$$-(\varphi_x(1) + \psi(1)) = I_2(\lambda, \eta, \alpha) f_1(1) + I_3(\lambda, \eta, \alpha, f_5).$$

Considere $\chi = u - \varphi$ e $\zeta = y - \psi$. Substituindo em (2.30), 2.30 e (2.32), obtemos

$$\begin{cases} \lambda^2 \chi + a^{-1} (\chi_x + \zeta)_x = -\lambda^2 \varphi - a^{-1} (\varphi_x + \psi)_x - f_2 - i\lambda f_1 \in L^2(0, 1), \\ \lambda^2 \zeta + b^{-1} \zeta_{xx} - b^{-1} c (\chi_x + \zeta), \\ = -\lambda^2 \psi - b^{-1} \psi_{xx} + b^{-1} c (\varphi_x + \psi) - f_4 - i\lambda f_3 \in L^2(0, 1), \\ \chi(0) = \zeta_x(0) = \zeta_x(1) = 0, \quad -(\chi_x(1) + \zeta(1)) = I_1 \chi(1). \end{cases} \quad (2.33)$$

Usando o Lema 2.3, o sistema (2.33) possui uma unica solução $(\chi, \zeta) \in (H^2(0, 1) \cap H_L^1(0, 1)) \times (H^2(0, 1) \cap H_*^1(0, 1))$. Portanto, o sistema (2.28) - (2.31) admite solução $(u, v) = (\chi + \varphi, \zeta + \psi) \in (H^2(0, 1) \cap H_L^1(0, 1)) \times (H^2(0, 1) \cap H_*^1(0, 1))$. \square

Voltemos, agora, para à prova do Teorema 2.2: Usando o Lema 2.1.3, concluimos que A_1 não possui autovalores imaginários puros. De acordo com os lemas 2.1.3, 2.1.4, 2.1.6, e com ajuda do Teorema do Gráfico Fechado (Teorema 1.3.20), deduzimos que $\sigma(A_1) \cap i\mathbb{R} = \{\emptyset\}$ se $\eta > 0$ e $\sigma(A_1) \cap i\mathbb{R} \{0\}$ se $\eta = 0$. Aplicando o teorema 1.1.3 chegamos na conclusão da nossa demonstração.

2.2 Falta de estabilidade exponencial

Teorema 2.2.1. O semigrupo semigrupo gerado por A_1 não é exponencialmente estável no espaço de energia H_1

Primeiramente lembremos as seguintes definições da ordem de crecimiento $\omega(A_1)$ e do limite espectral $s(A_1)$ de A_1 :

$$\omega(A_1) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \|e^{tA_1}\|}{t} \quad e \quad s(A_1) = \sup \{Re(\lambda); \lambda \in \sigma(A_1)\}.$$

Pelo Teorema de Hille-Yosida (Teorema 1.1.13), vemos que $s(A_1) \leq \omega(A_1)$. Pelos resultados anteriores, mostramos que $Re\langle A_1 U, U \rangle \leq 0$. Logo, $s(A_1) \leq 0$ e o teorema seguiria se a desiguldade anterior se manter. Portanto equivale a mostrar a existência

de uma sequência de autovalores de A_1 cujas as partes reais tendem a zero. Para isso, precisamos estudar o comportamento assintótico do espectro de A_1 .

Proposição 2.2.2. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande e duas sequências $(\lambda_{1,n})_{n \geq n_0}$ e $(\lambda_{2,n})_{n \geq n_0}$ de autovalores de A_1 satisfazendo o seguinte comportamento assintótico:

Caso 1 Se $a \neq b$, então

$$\lambda_{1,n} = \frac{i(2n+1)\pi}{2\sqrt{a}} + o(1) \quad \text{e} \quad \lambda_{2,n} = \frac{in\pi}{\sqrt{b}} + o(1), \quad \forall |n| \geq n_0. \quad (2.34)$$

Caso 2 Se $a = b$ e $\sqrt{c} \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}^*$, então

$$\lambda_{1,n} = \frac{in\pi}{\sqrt{a}} + \frac{\gamma(1 - \cos(\sqrt{c})(-\sin(\frac{\pi\alpha}{2})) + i\cos(\frac{\pi\alpha}{2}))}{2\sqrt{a^{1+\alpha}(n\pi)^{1-\alpha}}} + o(n^{-1+\alpha}), \quad \forall |n| \geq n_0, \quad (2.35)$$

$$\lambda_{2,n} = \frac{i(2n+1)\pi}{2\sqrt{2}} + \frac{in\pi}{\sqrt{a}} + \frac{\gamma(1 - \cos(\sqrt{c})(-\sin(\frac{\pi\alpha}{2})) + i\cos(\frac{\pi\alpha}{2}))}{2\sqrt{a^{1+\alpha}(n\pi)^{1-\alpha}}} + o(n^{-1+\alpha}), \quad \forall |n| \geq n_0. \quad (2.36)$$

Caso 3 se $a = b$ e $\sqrt{c} = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, então

$$\lambda_{1,n} = \frac{in\pi}{\sqrt{a}} + \frac{ic}{8\sqrt{a}\pi n} - \frac{ic^2}{128\sqrt{a}\pi^3 n^3} + \frac{\gamma c^3(i\cos(\frac{\pi\alpha}{2}) - \sin(\frac{\pi\alpha}{2}))}{256\sqrt{a^{1+\alpha}(n\pi)^{5-\alpha}}} + O(n^{-5}), \quad \forall |n| \geq n_0, \quad (2.37)$$

$$\lambda_{2,n} = \frac{i(2n+1)\pi}{2\sqrt{a}} + \frac{\alpha(-\sin(\frac{\pi\alpha}{2})) - i\cos(\frac{\pi\alpha}{2})}{\sqrt{a^{1+\alpha}(n\pi)^{1-\alpha}}}. \quad (2.38)$$

Caso 3 se $a = b$ e $\sqrt{c} = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}^*$, então

$$\lambda_{1,n} = \frac{in\pi}{\sqrt{a}} + \frac{\alpha(-\sin(\frac{\pi\alpha}{2})) - i\cos(\frac{\pi\alpha}{2})}{\sqrt{a^{1+\alpha}(n\pi)^{1-\alpha}}} \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{2,n} = & \frac{i(2n+1)\pi}{\sqrt{a}} + \frac{ic}{8\sqrt{a}\pi n} - \frac{ic}{16\sqrt{a}\pi n^2} + \frac{ic(4\pi^2 - c)}{128\sqrt{a}\pi^3 n^3} - \frac{ic(4\pi^2 - 3)}{256\sqrt{a}\pi^3 n^4} + \\ & \frac{\gamma c^3(i\cos(\frac{\pi\alpha}{2}) - \sin(\frac{\pi\alpha}{2}))}{256\sqrt{a^{1+\alpha}(n\pi)^{5-\alpha}}} + O(n^{-5}). \end{aligned} \quad (2.40)$$

Demonstração. Como A_1 é dissipativo, fixemos $\alpha_0 > 0$ pequeno o suficiente e estudaremos o comportamento assintótico dos autovalores λ de A_1 na faixa $s = \{\lambda \in \mathbb{C}; -\alpha_0 < \operatorname{Re}(\lambda) \leq 0\}$. Primeiro, vamos determinar a função característica satisfeita pelos autovalores próprios de A_1 . Para isto, seja $\lambda \in \mathbb{C}^*$ um autovalor de A_1 e seja $U = (u, \lambda u, y, u, \omega) \in D(A_1)$ um autovetor tal que $\|U\|_{H_1} = 1$. Então o problema do autovalor correspondente é

dado por

$$\begin{cases} \omega(\xi) = \frac{\lambda u(1)|\xi|^{\frac{2\alpha-1}{2}}}{\xi^2 + \eta + \lambda}, u_{xx} - a\lambda^2 u + y_x = 0, -cu_x + y_{xx} - (b\lambda^2 + c)y = 0 \\ u(0) = y_x(0) = y_x(1) = 0, u_x(1) + y(1) + \lambda\gamma k(\alpha)u(1) \int_{\mathbb{R}} \frac{|\xi|^{2\alpha-1}}{\xi^2 + \eta + \lambda} d\xi = 0 \end{cases}$$

Isto equivale

$$\begin{cases} u_{xxxx} - (a+b)\lambda^2 u_{xx} + a\lambda^2(b\lambda^2 + c)u = 0, \\ u(0) = u_{xx}(0) = 0, u_{xx}(1) - a\lambda^2 u(1) = 0, \\ u_{xxx}(1) - (a+b)\lambda^2 u_x(1) - (b\lambda^2 + c) - (b\lambda^2 + c)\lambda\gamma k(\alpha)u(1) \int_{\mathbb{R}} \frac{|\xi|^{2\alpha-1}}{\xi^2 + \eta + \lambda} d\xi = 0. \end{cases} \quad (2.41)$$

O polinômio característico

$$Q(r) = r^4 - (a+b)\lambda^2 r^2 + a\lambda^2(b\lambda + c).$$

Note que, se $(a-b)^2\lambda^2 \neq 4ac$ Q admite quatro raízes distintas. Em caso de velocidade da propagação da onda igual ou seja, $a = b$ isso é automaticamente verdadeiro. No caso de diferentes velocidades de propagação da onda, isso novamente é válido considerando λ grande o suficiente. Portanto, as quatro raízes distintas de Q são dadas por $r_1(\lambda)$, $r_2(\lambda)$, $r_3(\lambda) = -r_1(\lambda)$ e $r_4(\lambda) = -r_1(\lambda)$, em que

$$\begin{aligned} r_1(\lambda) &= \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \sqrt{(a+b) + \sqrt{(a+b)^2 - 4ac\lambda^2}}, \\ r_2(\lambda) &= \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \sqrt{(a+b) - \sqrt{(a+b)^2 - 4ac\lambda^2}}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

A solução geral de (2.43) é dada por:

$$u(x) = c_1 \operatorname{senh}(r_1 x) + c_2 \operatorname{senh}(r_2 x) + c_3 \cosh(r_1 x) + c_4 \cosh(r_2 x).$$

Usando a condição de fronteira em (2.41) e fazendo $x = 0$, então $c_3 = c_4 = 0$ para um λ suficientemente grande. Além disso, fazendo $x = 1$ as condições de fronteira em (2.41) podem ser expressas por:

$$Mc = 0$$

em que,

$$M = \begin{pmatrix} f(r_1) \operatorname{senh}(r_1) & f(r_2) \cosh(r_2) \\ g(r_1) \cosh(r_1) + R_\lambda \operatorname{senh}(r_1) & g(r_2) \cosh(r_2) + R_\lambda \operatorname{senh}(r_2) \end{pmatrix}$$

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

com

$$\begin{aligned} f(r) &= r^2 - a\lambda, \quad g(r) = (r^2 - (a+b)\lambda^2)r, \\ R_\lambda &= -(b\lambda^2 + c)\lambda\gamma k(\alpha)u(1) \int_{\mathbb{R}} \frac{|\xi|^{2\alpha-1}}{\xi^2 + \eta + \lambda} d\xi. \end{aligned} \quad (2.43)$$

O determinante $\det(M)$ é dado por

$$\begin{aligned} \det(M) &= (f(r_1) - f(r_2))R_\lambda \operatorname{senh}(r_1)\operatorname{senh}(r_2) \\ &+ f(r_1)g(r_2)R_\lambda \operatorname{senh}(r_1)\operatorname{cosh}(r_2) - f(r_2)g(r_1)\operatorname{senh}(r_2)\operatorname{cosh}(r_1). \end{aligned}$$

Dessa forma, o sistema (2.41) admite uma solução não trivial se, e somente se, $\det(M) = 0$. Em seguida, usando a expansão assintótica no $\det(M)$, obtemos que as raízes do $\det(M)$ são dadas como em (2.34), se $a \neq b$, e dadas como em (2.35)-(2.40), se $a = b$. \square

Prova do Teorema 2.2.1: Usando a proposição anterior, A_1 tem dois ramos de autovalores, com esses autovalores admitindo parte real tendendo a zero. Portanto, a energia correspondente ao primeiro e ao segundo ramo de autovalores não tem decaimento exponencial. Logo, a energia do sistema (2.1) - (2.3) não tem decaimento exponencial, tanto no caso de $a = b$, quanto no caso de $a \neq b$.

2.3 Estabilidade polinomial

No caso em que $(e^{tA_1})_{t \geq 0}$ não é exponencialmente estável, procuramos uma taxa de decaimento polinomial. Os resultados são reunidos nos dois teoremas a seguir.

Teorema 2.3.1. Assuma que $\eta > 0$, $a = b$ e que a condição (2.12) seja válida, então existe $c > 0$ tal que, para cada $U_0 \in D(A_1)$, a energia do sistema (2.1) - (2.3) tem uma taxa de decaimento polinomial ideal do tipo $t^{-\tau(\alpha)}$, i.e,

$$E_1(t) \leq \frac{C}{t^{\tau(\alpha)}} \|U_0\|_{D(A_1)}^2 \quad (2.44)$$

em que,

$$\tau(\alpha) = \begin{cases} \frac{2}{1 - \frac{2}{5}\alpha}, & \text{se } \sqrt{2}c \neq k\pi, \forall k \in \mathbb{N} \\ \frac{2}{5 - \alpha}, & \text{se } \sqrt{2}c = k_0\pi, k_0 \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Teorema 2.3.2. Assuma que $\eta > 0$, $a \neq b$ e a condição (2.12) seja válida. então para quase todos os números reais $\sqrt{2}ba^{-1}$, existe $c > 0$ tal que, para cada $U_0 \in D(A_1)$,

teremos

$$E_1(t) \leq \frac{C}{t^{\frac{2}{5-\alpha}}} \|U_0\|_{D(A_1)}^2.$$

Como $\sigma(A_1) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$, para provar os teoremas 2.3.1 - 2.3.2, usaremos o Teorema 1.3.1. Para isto, precisamos mostrar que

$$\sup\|(i\lambda I - A_1)^{-1}\|_{L(H_1)} = O(|\lambda|^l) \quad (2.45)$$

em que, $l = \frac{2}{\tau(\alpha)}$, se $a = b$, e $l = 5 - \alpha$ se $a \neq b$.

Para isto, vamos provar por absurdo. Supondo que exista

$$\{(\lambda_n, U_n) = (\lambda_n, u_n, y_n, z_n, \omega_n)\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R} \times D(A_1),$$

com $\lambda > \sqrt[2]{bc^{-1}}$ e

$$\lambda_n \rightarrow +\infty, \quad \|U_n\|_{H_1} = 1, \quad (2.46)$$

tal que

$$\lambda_n^l (i\lambda_n U_n - A_1 U_n) = (f_{1,n}, f_{2,n}, f_{3,n}, f_{4,n}, f_{5,n}) \rightarrow 0. \quad (2.47)$$

Isto equivale a

$$i\lambda_n u_n - v_n = h_{1,n} \quad (2.48)$$

$$a\lambda_n^2 u_n + [(u_n)_x + y_n]_x = h_{2,n} \quad (2.49)$$

$$i\lambda_n y_n - z_n = h_{3,n} \quad (2.50)$$

$$b\lambda_n^2 y_n - (y_n)_{xx} = h_{4,n} \quad (2.51)$$

$$(i\lambda_n + \xi^2 + \eta)\omega(\xi) - i\lambda_n u_n(1)\mu(\xi) = h_{5,n} \quad (2.52)$$

tal que,

$$\begin{cases} \lambda_n^l h_{1,n} = f_{1,n}, & \lambda_n^l h_{2,n} = -a(f_{2,n} + i\lambda_n f_{1,n}), & \lambda_n^l h_{3,n} = f_{3,n} \\ \lambda_n^l h_{4,n} = -b(f_{4,n} + i\lambda_n f_{3,n}), & \lambda_n^l h_{5,n} = f_{5,n}(\xi) - f_{1,n}\mu(\xi) \end{cases}$$

A seguir, vamos provar que na condição (2.45) e (2.46), obtem-se também que $\|U_n\|_{H_1} = o(1)$, alcançando assim a contradição desejada. Para melhor entendimento, dividimos a prova em vários lemas. Primeiramente de (2.48) e (2.50) observamos que

$$\begin{aligned}
 \lambda u &= h_1 + v \\
 u &= \lambda^{-1}h_1 + \lambda^{-1}v \\
 \|u\| &\leq (\|h_1\| + \|v\|)|\lambda^{-1}|.
 \end{aligned}$$

Assim existe uma constante c positiva tal que

$$\|u\| \leq c|\lambda^{-1}|,$$

de forma análoga, existe uma constante c_0 tal que

$$\|y\| \leq c_0|\lambda^{-1}|.$$

Portanto,

$$\|u\| = O(\lambda^{-1}) \quad e \quad \|y\| = O(\lambda^{-1}). \quad (2.53)$$

Por outro lado, para todo $l > 0$, tomando o produto interno de (2.47) com $U \in H_1$, e então usando o fato de que U é uniformemente limitado em H_1 , obtemos

$$\int_{\mathbb{R}} (\xi^2 + \eta) |\omega(\xi)|^2 d\xi = o(\lambda^{-l}) \quad (2.54)$$

Lema 2.3.3. Seja $l > 0$. Temos

$$|u_x(1) + y(1)| = o(\lambda^{\frac{l}{2}}) \quad e \quad |\lambda u(1)| = o(\lambda^{-\frac{l+\alpha-1}{2}}) \quad (2.55)$$

Demonstração. Pela condição de fronteira (2.2), segue que

$$u_x(1) + y(1) = -\gamma k(\alpha) \int_{\mathbb{R}} \mu(\xi) \omega \xi d\xi.$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Shariwz, obtemos

$$|u_x(1) + y(1)| \leq \gamma k(\alpha) \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\mu^2(\xi)}{\xi^2 + \eta} d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} (\xi^2 + \eta) |\omega(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Como $\mu^2(\xi)(\xi^2 + \eta)^{-1} \in L^1(\mathbb{R})$, então usando (2.54) e a desigualdade acima, temos

$$0 \leq \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{|u_x(1) + y(1)|}{\lambda^{-\frac{l}{2}}} \leq \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{c_0 \int_{\mathbb{R}} (\xi^2 + \eta) |\omega(\xi)|^2 d\xi}{\lambda^{-\frac{l}{2}}} = 0,$$

e, portanto

$$|u_x(1) + y(1)| = o\left(\lambda^{-\frac{l}{2}}\right).$$

De (2.52)

$$|\lambda u(1)| |\xi|^{\alpha-\frac{1}{2}} \leq (\lambda + \xi^2 + \eta) |\omega(\xi)| + \lambda^{-l} |f_5(\xi)| + \lambda^{-l} |f_1(1)| |\xi|^{\alpha-\frac{1}{2}}.$$

Multiplicando a desigualdade acima por $(\lambda + \xi^2 + \eta) |\xi|$, integrando em \mathbb{R} em relação a ξ e aplicando a desigualdade de cauchy-swarz, obtemos

$$|\lambda u(1)| I_1 \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |\xi \omega(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} I_2 + \lambda^{-l} \left(\int_{\mathbb{R}} |f_5(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} I_3 + \lambda^{-l} |f_1(1)| I_1 \quad (2.56)$$

em que,

$$I_1 = \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{|\xi|^{\alpha+\frac{1}{2}}}{(\lambda + \xi^2 + \eta)^2} d\xi \right), \quad I_2 = \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(\lambda + \xi^2 + \eta)^2} d\xi \right)^{\frac{1}{2}}, \quad I_3 = \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{|\xi|^2}{(\lambda + \xi^2 + \eta)^4} d\xi \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Não é difícil ver que

$$I_1 = \frac{2}{(\lambda + \eta)^2} \int_0^\infty \frac{\xi^{\alpha+\frac{1}{2}}}{(1 + \frac{\xi^2}{(\lambda+\eta)})^2} d\xi, \quad I_2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(\lambda + \eta)^{\frac{3}{4}}}, \quad I_3 = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{1}{(\lambda + \eta)^{\frac{5}{4}}}. \quad (2.57)$$

Além disso, I_1 pode ser simplificado pela definição de uma nova forma variável $y = 1 + \frac{\xi}{\lambda + \eta}$. Substituindo ξ por $(y-1)^{\frac{1}{2}}(\eta+\lambda)^{\frac{1}{2}}$ em (2.57) e usando o fato $y^{-2}(y-1)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \in L^1(1, +\infty)$, temos

$$I_1 = (\eta + \lambda)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{5}{4}} \int_1^\infty \frac{(y-1)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}}{y^2} dy = c_1 (\lambda + \eta)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{5}{4}} \quad (2.58)$$

com c_1 sendo uma constante positiva. Usando (2.57) e (2.58) em (2.56) e, em seguida, usando (2.47), (2.54) e o fato de que $|f_1(1)| \leq \|f_1\|_{H_L^1(0,1)} = o(1)$ deduzimos que

$$|\lambda u(1)| \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{c_1 (\lambda + \eta)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}}} o\left(\lambda^{-\frac{l}{2}}\right) + \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{1}{c_1 (\lambda + \eta)^{\frac{\alpha}{2}}} o\left(\lambda^{-l}\right) + o\left(\lambda^{-l}\right).$$

Como $\alpha \in (0, 1)$ e $l > 0$, temos $\min\left(\frac{l+\alpha-1}{2}, l + \frac{\alpha}{2}, l\right) = \frac{l+\alpha-1}{2}$. Consequentemente, da desigualdade anterior, obtemos a segunda estimativa assintótica de (2.55). Assim, a prova do lema está completa. \square

Lema 2.3.4. Seja $l > 0$. Temos

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (a|\lambda u|^2 + bc^{-1} + |\lambda u|^2 + |u_x|^2 + c^{-1}|y_x|^2) dx \\ &= a|\lambda u(1)|^2 + bc^{-1}|u_x(1)|^2 + bc^{-1}|\lambda y(1)|^2 \\ & \quad + o(1) + o(\lambda^{-l}) \operatorname{Re}\{\lambda \bar{u}(1)\} + o(\lambda^{-l}) \operatorname{Re}\{\lambda \bar{y}(1)\} \end{aligned} \quad (2.59)$$

Demonstração. Multiplicando (2.49) por $2x\bar{u}_x$, temos

$$2xa\lambda^2 u\bar{u}_x + 2x\bar{u}_{xx}u_x + 2xy_x\bar{u}_x = -\lambda^{-l}a(2xf_2\bar{u}_x + i\lambda f_1xu_x),$$

o que implica,

$$xa\lambda^2 \frac{d|u|^2}{dx} + x \frac{d|u_x|^2}{dx} + 2xy_xu_x = -\lambda^{-l}a(2xf_2\bar{u}_x + i\lambda f_1xu_x).$$

Integrando a expressão acima em $(0,1)$ e observando que

$$a\lambda^2 \int_0^1 x \frac{d|u|^2}{dx} dx = \left(xu^2 \Big|_0^1 - \int_0^1 |u|^2 dx \right) a\lambda^2 = a|\lambda^2 u(1)|^2 - a \int_0^1 |u|^2 dx,$$

segue que,

$$\begin{aligned} & -a \int_0^1 |\lambda u|^2 dx - \bar{u}_x^2 dx + 2\operatorname{Re} \left\{ \int_0^1 xy_x\bar{u}_x dx \right\} + a|\lambda u(1)|^2 + |u_x(1)|^2 \\ &= -2\lambda^{-l} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^1 xf_2\bar{u}_x dx - i \int_0^1 [f_1 + x(f_1)_x]\lambda \bar{u} dx + i f_1(1)\lambda \bar{u}(1) \right\}. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Agora usando o fato que $f_1 \rightarrow 0$ em $H_L^1(0,1)$ e $f_2 \rightarrow 0$ em $L^2(0,1)$, temos

$$\int_0^1 |xf_2\bar{u}_x| dx = o(1), \quad \int_0^1 [(f_1 + x(f_1)_x)\lambda \bar{u}] dx = o(1), \quad |f_1(1)| \leq \|f_1\|_{H_L^1(0,1)} = o(1). \quad (2.61)$$

substituindo (2.61) em (2.60), obtemos

$$\begin{aligned} & -a \int_0^1 |\lambda u|^2 dx - \int_0^1 |u_x|^2 dx + 2\operatorname{Re} \left\{ \int_0^1 xy_x\bar{u}_x dx \right\} + a|\lambda u(1)|^2 + |u_x(1)|^2 \quad (2.62) \\ &= o(\lambda^{-l})(1 + \operatorname{Re}\{\bar{u}(1)\lambda\}). \end{aligned}$$

Da mesma forma, multiplicando a igualdade(2.51) por $2c^{-1}x\bar{y}_x$,

$$2bc^{-1}\lambda xy\bar{y}_x + 2c^{-1}y_{xx}\bar{y}_x - 2u_xy_x - 2y\bar{y}_x = -2\lambda^{-l}bc^{-1}(xf_4\bar{y}_x + i\lambda x f_3\bar{y}_x)$$

Integrando a igualdade acima em $(0,1)$ e usando o fato $y_x(0) = y_x(1) = 0$

$$\begin{aligned} bc^{-1} \int_0^1 |\lambda y|^2 dx - c^{-1} \int_0^1 |y_x|^2 dx - 2\operatorname{Re} \left\{ \int_0^1 xu_x \bar{y}_x dx \right\} - \int_0^1 |y|^2 dx = \\ = -2\lambda^{-l} bc^{-1} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^1 xf_4 \bar{y}_x dx + i \int_0^1 (f_3 + x(f_3)_x) \lambda \bar{y} dx + i f_3(1) \lambda \bar{y}(1) \right\}. \end{aligned}$$

Usando o fato de $f_3 \rightarrow 0$ em $H_*^1(0,1)$, $f_4 \rightarrow 0$ em $L^2(0,1)$, $\lambda y, y_x$ são limitados em $L^1(0,1)$ e $\|y\| = O(\lambda^{-1})$, segue que

$$\begin{aligned} -bc^{-1} \int_0^1 |\lambda y|^2 dx - c^{-1} \int_0^1 |y_x|^2 dx - 2\operatorname{Re} \left\{ \int_0^1 xu_x \bar{y}_x dx \right\} + bc^{-1} |\lambda y(1)|^2 (2.63) \\ = o(1) + o(\lambda^{-l}) \operatorname{Re} \{ \lambda \bar{y}(1) \}, \end{aligned}$$

o que prova o resultado. \square

Lema 2.3.5. Seja $l > 0$. Temos os dois seguintes casos:

Caso 1: Se $a = b$, então

$$|y(1)| = \begin{cases} o\left(\lambda^{-\frac{l+\alpha+1}{2}}\right), & \text{se } \sqrt{c} \neq k\pi, \forall k \in \mathbb{N} \\ o\left(\lambda^{-\frac{l+\alpha-3}{2}}\right), & \text{se existir } k_0 \in \mathbb{N}; \sqrt{c} = k_0\pi \end{cases} \quad (2.64)$$

Caso 2: Se $a \neq b$, e $l = 5 - \alpha$, então para quase todos os números reais $\sqrt{ba^{-1}} \neq 1$, temos

$$|\lambda y(1)| = o(1) \quad (2.65)$$

Demonstração. Seja $Y = (u, u_x, y, y_x)^T$ então por (2.50) e (2.52) podemos escrever

$$Y_x = BY + G \quad (2.66)$$

em que,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -a\lambda^2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & c & c - b\lambda^2 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ -a\lambda^{-l}(f_2 + i\lambda_n f_1) \\ 0 \\ -b\lambda^{-l}(f_4 + i\lambda_n f_3) \end{pmatrix}$$

Pelas fórmulas da variações das constantes, a solução de (2.66) é

$$Y(x) = e^{Bx} y(0) + \int_0^\infty e^{B(x-z)} g(z) dz.$$

Portanto

$$e^{-B}Y(1) - \int_0^1 e^{-Bz}G(z)dz = Y(0). \quad (2.67)$$

Por outro lado, de (2.55)

$$Y(1) = \begin{pmatrix} o(\lambda^{-\frac{l+\alpha+1}{2}}) & -y(1) + o(\lambda^{-\frac{l}{2}}) y(1)0 \end{pmatrix}^T \quad (2.68)$$

$$Y(0) = (0 \ u_x(0) \ y(0) \ 0)^T.$$

Os valores próprios μ da matriz B são as raízes do seguinte polinômio característico:

$$P(\mu) = \mu^4 + (a+b)\lambda^2\mu^2 + a\lambda^2(b\lambda^2 - c),$$

com $\lambda > \sqrt{bc^{-1}}$. Este polinômio, tem quatro raízes imaginárias puras e distintas: $i\mu_1, -i\mu_1, i\mu_2, -i\mu_2$, em que μ_1 e μ_2 são dadas por

$$\mu_1 = \frac{\lambda}{2} \sqrt{a+b - \sqrt{(a-b)^2 + 4ac\lambda^{-2}}} \quad e \quad \mu_2 = \frac{\lambda}{2} \sqrt{a+b + \sqrt{(a-b)^2 + 4ac\lambda^{-2}}}. \quad (2.69)$$

Uma vez que os valores próprios de B são simples, então B é uma matriz diagonalizável e para todo $z \in \mathbb{R}$, temos

$$\left\{ \begin{array}{l} e^{Bz} = (e_{ij}(z))_{1 \leq i \leq 4, 1 \leq j \leq 4} \\ e_{11}(z) = \frac{(u\lambda^2 - \mu_2^2)\cos(\mu_1 z) - (a\lambda^2 - \mu_2^2)\cos(\mu_2 z)}{\mu_1^2 - \mu_2^2} \\ e_{22}(z) = \frac{\mu_1^2(a\lambda^2 - \mu_2^2)\cos(\mu_1 z) - \mu_2^2(a\lambda^2 - \mu_1^2)\cos(\mu_2 z)}{a\lambda^2(\mu_1^2\mu_2^2)} \\ e_{33}(z) = \frac{\mu_1^2(a\lambda^2 - \mu_2^2)\cos(\mu_2 z) - \mu_2^2(a\lambda^2 - \mu_1^2)\cos(\mu_1 z)}{a\lambda^2(\mu_1^2\mu_2^2)}, \quad e_{44}(z)e_{22}(z) + e_{33}(z) - e_{11}(z) \end{array} \right. \quad (2.70)$$

e

$$\left\{ \begin{array}{l} e_{14}(z) = \frac{\cos(\mu_2 z) - \cos(\mu_2 z)}{\mu_1^2 - \mu_2^2}, \quad e_{23}(z) = \frac{\mu_1^2 \mu_2^2 e_{14}(z)}{a \lambda^2}, \quad e_{32} = \frac{(a \lambda^2 - \mu_1^2)(a \lambda^2 - \mu_2^2) e_{14}(z)}{a \lambda^2} \\ e_{41}(z) = -a \lambda^2 e_{32}(z), \quad e_{24}(z) = \frac{\mu_2 \operatorname{sen}(\mu_2 z) - \mu_1 \operatorname{sen}(\mu_1 z)}{\mu_1^2 - \mu_2^2}, \quad e_{42} = \frac{(a \lambda^2 - \mu_1^2)(a \lambda^2 - \mu_2^2) e_{24}}{a \lambda^2} \\ e_{12}(z) = \frac{\mu_1(a \lambda^2 - \mu_2^2) \operatorname{sen}(\mu_1 z) - \mu_2(a \lambda^2 - \mu_1^2) \operatorname{sen}(\mu_2 z)}{a \lambda^2(\mu_1^2 - \mu_2^2)}, \quad e_{21}(z) = -a \lambda e_{12} \\ e_{13}(z) = \frac{\mu_1 \mu_2 (\mu_1 \operatorname{sen}(\mu_2 z) - \mu_2 \operatorname{sen}(\mu_1 z))}{a \lambda^2(\mu_1^2 - \mu_2^2)}, \quad e_{31}(z) = \frac{a \lambda^2(a \lambda^2 - \mu_1^2)(a \lambda^2 - \mu_2^2) e_{13}(z)}{\mu_1^2 \mu_2^2} \\ e_{34}(z) = \frac{\mu_1(a \lambda^2 - \mu_2^2) \operatorname{sen}(\mu_2 z) - \mu_2(a \lambda^2 - \mu_1^2) \operatorname{sen}(\mu_1 z)}{\mu_1 \mu_2(\mu_1^2 - \mu_2^2)}, \quad e_{43}(z) = \frac{\mu_1^2 \mu_2^2 e_{34}(z)}{a \lambda^2} \end{array} \right.$$

Agora, usando (2.47), (2.70), expansão assintótica e integração por partes, verificar que

$$-\int_0^1 e^{-Bz} G(z) dz = (o(\lambda^{-l-1}), o(\lambda^{-l}), o(\lambda^{-l-1}), o(\lambda - l))^T. \quad (2.71)$$

A seguir, substituindo (2.68), (2.70) e (2.71) em (2.67), e usando o fato de que $\min\left(\frac{l+\alpha+1}{2}, l + \frac{1}{2}, l + 1\right) = \frac{l+\alpha+1}{2}$, temos

$$\frac{\operatorname{sen}(\mu_1) \mu_1 - \operatorname{sen}(\mu_2) \mu_2}{\mu_1^2 - \mu_2^2} y(1) = o(\lambda^{-\frac{l+\alpha+1}{2}}) \quad (2.72)$$

e

$$\frac{\mu_2(a \lambda^2 - \mu_2^2) \operatorname{sen}(\mu_2) - \mu_1(a \lambda^2 - \mu_1^2) \operatorname{sen}(\mu_1)}{\lambda(\mu_1^2 - \mu_2^2)}. \quad (2.73)$$

Vamos, agora, distinguir dois casos.

Caso 1: Assuma que $a = b$. Usando a expansão assintótica em (2.69) temos

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \sqrt{b} \lambda - \frac{\sqrt{c}}{2} - \frac{c}{8\sqrt{b}\lambda} - \frac{c\sqrt{c}}{16b\lambda^2} + O(\lambda^{-3}) \\ \mu_1 &= \sqrt{b} \lambda + \frac{\sqrt{c}}{2} - \frac{c}{8\sqrt{b}\lambda} - \frac{c\sqrt{c}}{16b\lambda^2} + O(\lambda^{-3}). \end{aligned} \quad (2.74)$$

Substituindo a expressão acima em (2.72) e (2.73)

$$y(1) J_1 = o(\lambda^{-\frac{l+\alpha+1}{2}}) \quad e \quad y(1) J_2 = o(\lambda^{-\frac{l+\alpha+1}{2}}) \quad (2.75)$$

em que,

$$J_1 = \left(1 - \frac{(c+16)c}{128b\lambda^2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{c}}{2}\right) \operatorname{cos}(\sqrt{b}\lambda) + \frac{\sqrt{c}(4\operatorname{cos}(\frac{\sqrt{c}}{2}) + \sqrt{c}\operatorname{sen}(\frac{\sqrt{c}}{2}))\operatorname{sen}(\sqrt{b}\lambda)}{8\sqrt{b}\lambda}$$

$$J_2 = \left(1 - \frac{(c+16)c}{128b\lambda^2}\right) \operatorname{cos}\left(\frac{\sqrt{c}}{2}\right) \operatorname{sen}(\sqrt{b}\lambda) + \frac{\sqrt{c}(4\operatorname{sen}(\frac{\sqrt{c}}{2}) + \sqrt{c}\operatorname{cos}(\frac{\sqrt{c}}{2}))\operatorname{cos}(\sqrt{b}\lambda)}{8\sqrt{b}\lambda}$$

Caso 1.1: Se não existir $k \in \mathbb{N}$ tal que $\sqrt{c} = k\pi$, então $|\operatorname{sen}(\frac{\sqrt{c}}{2})| \geq \beta_1 > 0$ e $|\operatorname{cos}(\frac{\sqrt{c}}{2})| \geq \beta_2 > 0$, assim, por (2.75) temos

$$\begin{aligned} (\operatorname{cos}(\sqrt{b}\lambda) + O(\lambda^{-1}))y(1) &= o(\lambda^{-\frac{l+\alpha+1}{2}}) \\ (\operatorname{sen}(\sqrt{b}\lambda) + O(\lambda^{-1}))y(1) &= o(\lambda^{-\frac{l+\alpha+1}{2}}). \end{aligned} \tag{2.76}$$

De fato, primeiramente observe que

$$O(\lambda_n^{-3}) = f_n, \quad \text{com } n \rightarrow \infty$$

Então existe $c > 0$ tal que $f_n \leq \frac{c}{\lambda_n^3}$. Mas,

$\frac{c}{\lambda_n^3} < \frac{c}{\lambda_n}$. Então $f_n < \frac{c}{\lambda_n}$ e, portanto, $f_n = O(\lambda^{-1})$. Sabemos também que existe $c_0 > 0$ tal que

$$\frac{\sqrt{c}(4\operatorname{cos}(\frac{\sqrt{c}}{2}) + \sqrt{c}\operatorname{sen}(\frac{\sqrt{c}}{2}))\operatorname{sen}(\sqrt{b}\lambda)}{8\sqrt{b}} < c_0.$$

Logo,

$$\frac{\sqrt{c}(4\operatorname{cos}(\frac{\sqrt{c}}{2}) + \sqrt{c}\operatorname{sen}(\frac{\sqrt{c}}{2}))\operatorname{sen}(\sqrt{b}\lambda)}{8\sqrt{b}\lambda} = O(\lambda^{-1}).$$

Portanto, de (2.75), temos

$$\left(\left(1 - \frac{(c+16)c}{128b\lambda^2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{c}}{2}\right) \operatorname{cos}(\sqrt{b}\lambda) + O(\lambda^{-1})\right) y(1) = o\left(\lambda^{-\frac{l+\alpha+1}{2}}\right).$$

Como $\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{c}}{2}\right) \neq 0$, então

$$(\operatorname{cos}(\sqrt{b}\lambda) + O(\lambda^{-1}))y(1) = o\left(\lambda^{-\frac{l+\alpha+1}{2}}\right).$$

De maneira análoga,

$$(\operatorname{sen}(\sqrt{b}\lambda) + O(\lambda^{-1}))y(1) = o\left(\lambda^{-\frac{l+\alpha+1}{2}}\right)$$

Assim decorre de (2.76), que (2.64) é satisfeita.

Caso 1.2: Assuma que $\sqrt{c} = k_0\pi$. Temos assim, dois casos: quando $\sqrt{c} = 2k_0\pi$ e quando $\sqrt{c} = (2k_0+1)\pi$. Uma vez que o argumento dos casos é totalmente semelhante, mostraremos apenas um deles.

Assuma que $\sqrt{c} = 2k_0\pi$, então $\sin\left(\frac{\sqrt{c}}{2}\right) = 0$ e $\cos\left(\frac{\sqrt{c}}{2}\right) = 1$. Segue de (2.75) que

$$(-\sin(\sqrt{b}\lambda) + O(\lambda^{-2}))y(1) = o\left(\lambda^{-\frac{l+\alpha-1}{2}}\right) \quad (2.77)$$

e

$$\left(\sin(\sqrt{b}\lambda) - \frac{c}{8\sqrt{b}\lambda}\cos(\sqrt{b}\lambda) + O(\lambda^{-2})\right)y(1) = o\left(\lambda^{-\frac{l+\alpha-1}{2}}\right). \quad (2.78)$$

Somando as duas igualdades acima, temos

$$(\cos(\sqrt{b}\lambda) + O(\lambda^{-1}))y(1) = o\left(\lambda^{-\frac{l+\alpha-1}{2}}\right). \quad (2.79)$$

Assim, de (2.78) e (2.79), temos (2.64).

Caso 2: Assuma que $a \neq b$. Usando a expansão assintótica em (2.69), temos

$$\mu_1 = \sqrt{a}\lambda + \frac{\sqrt{ac}}{2(a-b)\lambda} + O(\lambda^{-3}) \quad e \quad \mu_2 = \sqrt{b}\lambda + \frac{ac}{2\sqrt{b}(a-b)\lambda} + O(\lambda^{-3}). \quad (2.80)$$

Usando (2.80) em (2.72) e (2.73), obtemos

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt{ab^{-1}}\sin\left(\sqrt{a}\lambda + \frac{\sqrt{ac}}{2(a-b)\lambda}\right)\sin\left(\sqrt{b}\lambda - \frac{ac}{2\sqrt{b}(a-b)\lambda}\right) + O(\lambda^{-2})\right)\lambda y(1) \\ &= o\left(\lambda^{-\frac{l+\alpha-3}{2}}\right) \end{aligned} \quad (2.81)$$

e

$$\left(\sin\left(\sqrt{b}\lambda - \frac{ac}{2\sqrt{b}(a-b)\lambda}\right) + O(\lambda^{-2})\right)\lambda y(1) = o\left(\lambda^{-\frac{l+\alpha-1}{2}}\right). \quad (2.82)$$

Somando (2.81) e (2.82), encontramos

$$\left(\sin\left(\sqrt{a}\lambda + \frac{\sqrt{ac}}{2(a-b)\lambda}\right)\right)\lambda y(1) = o\left(\lambda^{-\frac{l+\alpha-3}{2}}\right). \quad (2.83)$$

Seja $l = 5 - \alpha$. De (2.46), (2.55) e (2.59), temos $|\lambda y(1)| = O(1)$. Nossa objetivo é mostrar que $|\lambda y(1)| = o(1)$. Suponha que exista duas constantes $c_2 \geq c_1 > 0$ tais que $c_1 \leq |\lambda y(1)| \leq c_2$. Então de (2.82) e (2.83), segue que

$$\operatorname{sen} \left(\sqrt{b}\lambda - \frac{ac}{a\sqrt{b}(a-b)\lambda} \right) = o(\lambda^{-1}) \quad e \quad \operatorname{sen} \left(\sqrt{a}\lambda + \frac{\sqrt{ac}}{2(a-b)\lambda} \right) = o(\lambda^{-1}). \quad (2.84)$$

Da equação (2.84), existem $n, m \in \mathbb{Z}$ tais que

$$\lambda = \frac{n\pi}{\sqrt{b}} + \frac{ac}{2b(a-b)\lambda} + o(\lambda^{-1}) \quad e \quad \lambda = \frac{m\pi}{\sqrt{a}} - \frac{c}{2(a-b)\lambda} + o(\lambda^{-1}) \quad (2.85)$$

Subtraindo a segunda equação da primeira de (2.85) e usando o fato de que $\frac{1}{\lambda} = \frac{\sqrt{a}}{m\pi} + \frac{o(1)}{m^2}$, temos

$$\frac{n}{m} - \sqrt{ba^{-1}} = \frac{c(ba^{-1} + 1)}{2\sqrt{ba^{-1}}(ba^{-1} - 1)\pi^2 m^2} + \frac{o(1)}{m^2} \quad (2.86)$$

Do Teorema 1.4, temos que para quase todos os números reais ζ , existem infinitos inteiros n, m tais que

$$\left| \zeta - \frac{n}{m} \right| < \frac{1}{m^2 \ln|m|}. \quad (2.87)$$

Considere $\zeta = \sqrt{ba^{-1}}$, então

$$\left| \frac{c(\zeta^2 + 1)}{2\zeta(\zeta^2 - 1)\pi^2 m^2} + \frac{o(1)}{m^2} \right| = \left| \frac{n}{m} - \zeta \right| < \frac{1}{m^2 \ln|m|}. \quad (2.88)$$

Como $m \sim C_0 |\lambda|$ para uma constante C_0 , então por (2.88)

$$\left| \frac{c(\zeta^2 + 1)}{2\zeta(\zeta^2 - 1)\pi^2} + o(1) \right| < \frac{1}{\ln|m|} = o(1)$$

e

$$\left| \frac{(\zeta^2 + 1)}{\zeta(\zeta^2 - 1)} \right| = o(1),$$

o que é um absurdo. Portanto $|\lambda y(1)| = o(1)$. \square

Vamos agora estabelecer as provas dos principais teoremas desta seção, teoremas 2.4 e 2.5

Etapa 1. A estimativa do decaimento de energia: Nós distiguimos dois casos.

Caso 1: Não existe $k \in \mathbb{N}$, tal que $\sqrt{c} = k\pi$. Seja $l = 1 - \alpha$, então de (2.55) e (2.64) obtemos que

$$|u_x(1)| = o(1), \quad |\lambda u(1)| = o(1), \quad |\lambda y(1)| = o(1) \quad (2.89)$$

De fato, de (2.55)

$$|\lambda u(1)| = o\left(\lambda^{-\frac{l+\alpha-1}{2}}\right) = o(\lambda^0) = o(1).$$

Agora, de (2.64), $|y(1)| = o(\lambda^{-\frac{l+\alpha+1}{2}}) = o(\lambda^{-1})$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda y(1) = 0$$

$$\Rightarrow |\lambda y(1)| = o(1).$$

Usando (2.55) novamente, temos

$$|u_x(1) + y(1)| = o\left(\lambda^{-\frac{1-\alpha}{2}}\right)$$

o que implica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_x(1) + y(1)| = 0.$$

Como $|\lambda y(1)| = o(1)$, então $\lim |u_x(1)| = 0$. Assim, $|u_x(1)| = o(1)$.

Inserindo (2.89) em (2.59), temos que $\|U\|_{H_1} = o(1)$ o que contradiz (2.46). Assim (2.45) é satisfeita com $l = 1 - \alpha$. Logo, a prova é concluída aplicando o teorema 1.6

Caso 2: Existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sqrt{c} = k_0\pi$. Seja $l = 5 - \alpha$, então de (2.55) e (2.64) temos

$$|u_x(1)| = o(1), \quad |\lambda u(1)| = o(1), \quad |\lambda y(1)| = o(1) \quad (2.90)$$

Utilizando (2.90) em (2.59), temos $\|U\|_{H_1} = o(1)$ o que contradiz (2.46).

Etapa 2: A otimalidade: Para a otimalidade de (2.44), considere $\epsilon > 0$ e, para $n_0 \leq n$, definamos

$$S = \begin{cases} 1 - \alpha - \epsilon, & \text{se } \sqrt{c} \notin \pi\mathbb{N}, \\ 5 - \alpha - \epsilon, & \text{se } \sqrt{c} \in 2\pi\mathbb{N}, \\ 5 - \alpha - \epsilon, & \text{se } \sqrt{c} \in (2\mathbb{N} + 1)\pi \end{cases}$$

e

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda_{1,n}, & \text{se } \sqrt{c} \notin \pi\mathbb{N}, \\ \lambda_{1,n}, & \text{se } \sqrt{c} \in 2\pi\mathbb{N}, \\ \lambda_{2,n}, & \text{se } \sqrt{c} \in (2\mathbb{N} + 1)\pi. \end{cases}$$

Em que $(\lambda_{1,n})$ e $(\lambda_{2,n})$ são autovalores de A_1 . Além disso, seja $U_n \in D(A_1)$ a autofunção normalizada correspondente a λ_n . Apresentamos a seguinte sequência:

$$\beta_n = im(\lambda_n), \quad |n| \geq n_0$$

Portanto, $(iI\beta_n + A_1)U_n = (iI\beta_n + \lambda_n)U_n = Re(\lambda_n)U_n$, $\forall |n| \geq n_0$. Consequentemente, da Proposição 2.1 (caso 2,3 e 4) obtemos

$$(iI\beta_n + A_1)U_n = \begin{cases} C_1 n^{-1+\alpha} + o(n^{-1+\alpha}), & \text{se } \sqrt{c} \notin \pi\mathbb{N}, \\ C_2 n^{-5+\alpha} + o(n^{-5+\alpha}), & \text{se } \sqrt{c} \in 2\pi\mathbb{N}, \\ C_3 n^{-5+\alpha} + o(n^{-5+\alpha}), & \text{se } \sqrt{c} \in (2\mathbb{N} + 1)\pi, \end{cases}$$

Em que C_1, C_2, C_3 são números reais diferentes de zero. Portanto, para todo $|n| \geq n_0$ existe $c > 0$ tal que

$$\beta_n^s \|(iI\beta_n + A_1)U_n\|_{H_1} \sim \frac{C}{n^\epsilon}.$$

Assim, deduzimos que $\lim \beta_n^s \|(iI\beta_n + A_1)U_n\|_{H_1} = 0$. Finalmente graças ao Teorema 1.6, a taxa de decaimento de energia não pode ter $t^{\frac{-2}{s}}$, portanto a estimativa (2.44) é ótima.

Prova do teorema 2.5: Para quase todo número real $\sqrt{ba^{-1}}$, seja $l = 5 - \alpha$, então de (2.55) e (2.65) obtemos

$$|u_x(1)| = o(1), \quad |\lambda u(1)| = o(1), \quad |\lambda y(1)| = o(1). \quad (2.91)$$

Substituindo (2.91) em (2.59), teremos $\|U\|_{H_1} = o(1)$, o que contradiz (2.46). o resultado segue do Teorema 1.6

Capítulo 3

Controlabilidade exata do sistema de Timoshenko

Nesta seção estudaremos a controlabilidade exata na fronteira para o sistema de Timoshenko (2) - (3) com as condições de contorno (6). Para um dado $T > 0$ e dado iniciais (u_0, u_1, y_0, y_1) pertencentes a um espaço adequado, o objetivo desta seção é encontrar um controle adequado v tal que a solução do nosso sistema de Timoshenko (2)-(3) com as condições de contorno (6) é conduzidas a zero no nosso tempo T , i.e.,

$$u(x, T) = u_x(x, T) = y(x, T) = y_x(x, T) = 0$$

3.1 Análise espectral para o sistema Timoshenko homogêneo

O objetivo desta seção é calcular os autovalores e os autovetores associados ao seguinte sistema de Timoshenko homogêneo:

$$\begin{cases} a\varphi_{tt} - (\varphi_x + \psi)_x = 0(x, t) \in (0, 1) \times \mathbb{R}_+, \\ b\psi_{tt} - \varphi_{xx} + c(\varphi_x + \psi) = 0(x, t) \in (0, 1) \times \mathbb{R}_+, \\ \varphi(0, t) = \varphi(1, t) = \psi_x(0, t) = \psi_x(1, t) = 0, t \in \mathbb{R}_+ \\ (\varphi(x, 0), \varphi_t(x, 0), \psi(x, 0), \psi_t(x, 0)) = (\varphi_0(x), \varphi_1(x), \psi_0(x), \psi_1(x)), x \in (0, 1) \end{cases} \quad (3.1)$$

A energia do sistema (3.1) é dada por

$$E_2(t) = a \int_0^1 |\varphi_t|^2 dx + bc^{-1} \int_0^1 |\psi_t|^2 dx + \int_0^1 |\varphi_x + \psi|^2 dx + c^{-1} \int_0^1 |\psi_x|^2 dx$$

e satisfaz

$$E'_2(t) = 0$$

o que implica $E_2(t) = E_2(0)$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, isto é, ela é conservada. Vamos agora definir o espaço de energia H_2 por:

$$H_2 = H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1) \times H_*^1(0, 1) \times L^2(0, 1)$$

Com o produto interno definido por

$$\langle \Phi, \Phi_1 \rangle_{H_2} = a \int_0^1 \varphi_1 \overline{\widehat{\varphi}_1} dx + bc^{-1} \int_0^1 \psi_1 \overline{\widehat{\psi}_1} dx + \int_0^1 (\varphi_x + \psi) \overline{(\varphi_x + \widehat{\psi})} dx + c^{-1} \int_0^1 1 \psi_x \overline{\widehat{\psi}_x} dx$$

Para todo $\Phi = (\varphi, \varphi_1, \psi, \psi_1), \Phi_1 = (\widehat{\varphi}, \widehat{\varphi}_1, \widehat{\psi}, \widehat{\psi}_1) \in H_2$, usamos $\|U\|_{H_2}$ para denotar a norma correspondente ao produto interno.

Definamos o operador linear ilimitado A_2 em H_2 por

$$A_2(\varphi, \varphi_1, \psi, \psi_1) = (\varphi_1, a^{-1}(\varphi_x + \psi)_x, \psi_1, b^{-1}\psi_{xx} - b^{-1}c(\varphi_x + \psi))$$

e

$$D(A_2) = \{ \Phi = (\varphi, \varphi_1, \psi, \psi_1) \in H_2; \varphi, \psi \in H^2(0, 1); \varphi_1, \psi_x \in H_0^1; \psi_1 \in H_*^1(0, 1) \}$$

O sistema (3.1) pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\begin{cases} \Phi_t(x, t) = A_2\Phi(x, t), \\ \Phi(x, 0) = \Phi_0, \end{cases} \quad (3.2)$$

em que $\Phi_0 = (\varphi_0(x), \varphi_1(x), \psi_0(x), \psi_1(x))$. Com cálculos semelhantes aos feitos no segundo capítulo desta dissertação, temos que A_2 é um operador $m - dissipativo$ em H_2 , então pelo teorema de Lumer Philips's, A_2 é o gerador infinitesimal de um $C_0 - semigrupo$ de contrações e^{tA_2} em H_2 . Portanto o problema (3.1) está bem posto e temos o seguinte resultado.

Teorema 3.1.1. Para cada $\Phi_0 \in H_2$, o sistema (3.2) admite uma única solução fraca $\Phi \in C^0(\mathbb{R}_+, H_2)$ tal que

$$\|\Phi(t)\|_{H_2} = \|\Phi_0\|_{H_2}, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Além disso, se $\Phi_0 \in D(A_2)$, então o problema (3.2) admite uma única solução forte $\Phi \in C^0(\mathbb{R}_+; D(A_2)) \cap C^1(\mathbb{R}_+; H_2)$

Uma vez que A_2 é um operador fechado com um resolvente compacto, seu espectro $\sigma(A_2)$ consiste inteiramente de autovalores com multiplicidade finitas (ver Teorema 1.3.3) além disso, não é difícil verificar que $0 \in \sigma(A_2)$

Vamos agora estudar o espectro do sistema (3.2). Seja $\lambda \in \mathbb{C}$ um autovalor do operador A_2 e $E = (\varphi, \lambda\varphi, \psi, \lambda\psi) \in D(A_2)$ um autovetor correspondente. Usando o fato que $Re(\lambda)\|E\|_{H_2}^2 = \langle A_2 E, E \rangle_{H_2} = 0$ e considerando $\lambda = i\mu$, com $\mu \in \mathbb{R}^*$, então o problema de autovalor correspondente é dado por

$$\begin{cases} \varphi_{xx} + a\mu^2\varphi + \psi_x = 0, & -c\varphi_x + \psi_{xx} + (b\mu^2 - c)\psi = 0, \\ \varphi(0) = \varphi(1) = \psi_x(0) = \psi_x(1) = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Para algumas constantes $\beta, \delta \in \mathbb{C}^*$, seja

$$\varphi(x) = \beta \operatorname{sen}(n\pi x) \quad e \quad \psi(x) = \delta \operatorname{cos}(n\pi x) \quad (3.4)$$

uma solução de (3.3). Segue que

$$\begin{cases} (a\mu^2 - (n\pi))\beta - (n\pi)\delta = 0 \\ -c(n\pi)\beta + (b\mu^2) - (n\pi)^2 - c)\delta = 0, \end{cases} \quad (3.5)$$

que é equivalente a

$$\begin{pmatrix} a - \mu^2 - (n\pi)^2 & -n\pi \\ -c(n\pi) & b\mu^2 - (n\pi)^2 - c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, o sistema (3.5) tem solução não trivial se, e somente se,

$$ab\mu^4 - ((a+b)(n\pi)^2 + ac)\mu^2 + (n\pi)^4 = 0 \quad (3.6)$$

Observação 1. Se a solução (φ, ψ) de (3.4) é dada por $e^{rx}(\alpha_1, \alpha_2)$, então

$$\begin{pmatrix} r^2 + a\mu^2 & r \\ -cr & r^2 + b\mu^2 - c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Temos que o sistema (3.7) admite uma solução diferente de zero se, e somente se,

$$r^4 + (a+b)\mu^2r^2 + a\mu^2(b\mu - c) = 0.$$

Resolvendo a equação acima, obtemos

$$r_1^2 = |\chi_1| \quad e \quad r_2^2 = |\chi_2|$$

em que,

$$\chi_1 = \frac{-(a+b)\mu^2 - \sqrt{(a-b)^2\mu^4 + 4ac\mu^2}}{2} \quad e \quad \chi_2 = \frac{-(a+b)\mu^2 + \sqrt{(a-b)^2\mu^4 + 4ac\mu^2}}{2}.$$

Observe que, de (3.3), temos $\psi_x = -\varphi_{xx} - a\mu^2\varphi$ e

$$(b\mu^2 - c)\psi = c\varphi_x - \psi_{xx} = c\varphi_x + \varphi_{xxx} + a\mu^2\varphi_x.$$

Logo,

$$\varphi_{xxxx} + (a+b)\mu 2\varphi_{xx} + a\mu^2(b\mu^2 - c)\varphi = 0$$

e, pelas condições de fronteira, temos também

$$\varphi(0) = \varphi(1) = \varphi_{xx}(0) = \varphi_{xx}(1) = 0.$$

Portanto, da mesma forma de como foi feito no capítulo 2, temos o seguinte sistema.

$$\begin{cases} \varphi_{xxxx} + (a+b)\mu 2\varphi_{xx} + a\mu^2(b\mu^2 - c)\varphi = 0 \\ (a\lambda^2 + b\lambda^2)\varphi(1) + \varphi_{xx}(1) = 0 \\ \varphi(0) = \varphi(1) = \varphi_{xx}(0) = \varphi_{xx}(1) = 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

Tomando,

$$c \neq \frac{(am_1^2 - bm_2^2)(bm_1^2 - bm_2^2)\pi^2}{a(a+b)(m_1^2 + m_2^2)}, \quad \forall m_1, m_2 \in \mathbb{Z}. \quad (3.9)$$

Então como foi feito no capítulo 2. Se a condição (3.9) for satisfeita, então o sistema (3.8) só possui solução trivial, logo, a solução do sistema (3.3), é exclusivamente escrita conforme definida em (3.4).

3.2 Observabilidade e controlabilidade exata com condições de ondas de velocidades iguais

Nesta parte, iremos assumir que as ondas se propagam com a mesma velocidade, ou seja, estudaremos a controlabilidade exata para o sistema de Timoshenko (2)-(3) com condições de contorno (6), considerando $a = b$. Para este objetivo, primeiro provaremos o seguinte resultado:

Teorema 3.2.1. Assumamos que $T > 4\sqrt{a}$, $a = b$, e que a condição (3.9) seja verdadeira, então para toda solução $\Phi = (\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t)$ que resolvem o problema (3.1), existe uma constante positiva l_0 , dependendo apenas, de a, b, c de modo que a seguinte

desigualdade direta seja válida:

$$\int_0^T |\varphi_x(1, t) + \psi(1, t)|^2 dt \leq l_0 \|(\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1)\|_{H_1}^2. \quad (3.10)$$

Além disso, existe uma constante positiva $l_1 < l_0$, dependendo apenas a, b, c , tal que segue as seguintes desigualdades de observabilidade:

Caso 1: Se não existir $k \in \mathbb{N}^*$ tal que $\sqrt{c} = k\pi$, então

$$l_1 \|(\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1)\|_{H_1}^2 \leq \int_0^T |\varphi_x(1, t) + \psi(1, t)|^2 dt \quad (3.11)$$

Caso 2: Se existir $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $\sqrt{c} = k_0\pi$, então existe um espaço de Hilbert D , definido por

$$D = \left\{ \Phi_0 = \sum_{n \neq 0} (\alpha_{1,n} E_{1,n} + \alpha_{2,n} E_{2,n}) n^2; \quad \alpha_{1,n} \alpha_{2,n} \in \mathbb{C}, \quad \sum_{n \neq 0} (|\alpha_{1,n}|^2 + |\alpha_{2,n}|^2) < \infty \right\}, \quad (3.12)$$

equipado com a norma $\|\Phi_0\|_D = \sqrt{\sum_{n \neq 0} (|\alpha_{1,n}|^2 + |\alpha_{2,n}|^2)}$, tal que a seguinte desigualdade seja válida

$$l_1 \|(\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1)\|_D^2 \leq \int_0^T |\varphi_x(1, t) + \psi(1, t)|^2 dt \quad (3.13)$$

Em que $E_{1,n}$ e $E_{2,n}$ são as auto funções do operador A_2 .

Para a prova do Teorema 3.2.1 usaremos os resultados subsequentes.

Proposição 3.2.2. Assuma que $a = b$ e a condição (3.9) seja válida. Então os autovalores de A_2 tem o seguinte comportamento assintótico.

$$\lambda_{1,n} = \frac{in\pi}{\sqrt{a}} + \frac{i\sqrt{c}}{2\sqrt{a}} + \frac{ic}{8\sqrt{an}\pi} + O(n^{-3}) \quad e \quad \lambda_{2,n} = \frac{in\pi}{\sqrt{a}} - \frac{i\sqrt{c}}{2\sqrt{a}} + \frac{ic}{8\sqrt{an}\pi} + O(n^{-3}), \quad (3.14)$$

com as seguintes autofunções correspondentes.

$$\varphi_{1,n}(x) = \frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}, \quad \psi_{1,n} = \frac{\cos(n\pi x)\sqrt{c}}{n\pi} + O(n^{-2})\cos(n\pi x), \quad (3.15)$$

$$\varphi_{2,n}(x) = -\frac{\sin(n\pi x)}{\sqrt{cn}\pi} + O(n^{-2})\sin(n\pi x), \quad \psi_{2,n}(x) = \frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}. \quad (3.16)$$

Demonstração. Assuma que $a = b$. Resolvendo (3.6), obtemos

$$\mu_{1,n}^2 = \frac{2(n\pi)^2 + c + \sqrt{4c(n\pi)^2 + c^2}}{2a} \quad e \quad \mu_{2,n}^2 = \frac{2(n\pi)^2 + c - \sqrt{4c(n\pi)^2 + c^2}}{2a} \quad (3.17)$$

Usando a expansão assintótica em (3.17), obtemos (3.14). Agora, para $\lambda = \lambda_{1,n}$ temos

$$\beta_{1,n} = \frac{1}{n\pi}.$$

Assim, de (3.5)

$$\delta_{1,n} = \frac{\beta_{1,n}(a\mu_{1,n}^2) - (n\pi)^2}{n\pi},$$

mas note que

$$\mu_{1,n}^2 = \left(\frac{n\pi}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{c}}{2\sqrt{a}} + \frac{c}{8\sqrt{a}\pi n} + O(n^{-3}) \right)^2$$

Portanto,

$$\delta_{1,n} = \frac{\sqrt{c}}{n\pi} + O(n^{-3}),$$

obtemos assim as autofunções correspondentes (3.15). De forma similar, para $\lambda_{2,n}$ temos

$$\delta_{2,n} = \frac{1}{n\pi}, \quad \beta_{2,n} = \frac{(n\pi)\delta_{2,n}}{a\mu_{2,n} - (n\pi)^2} = \frac{-1}{\sqrt{c}n\pi} + O(n^{-3})$$

em (3.5), obtendo assim as autofunções de (3.16) □

Observação 2. Se $a = b$, então da equação (3.17) podemos facilmente verificar que os autovalores $\lambda_{1,n}$ e $\lambda_{2,n}$ são simples e diferentes de zero. Em seguida, definimos as funções próprias do operador A_2 como

$$E_{1,n} = (\varphi_{1,n}, \lambda_{1,n}\varphi_{1,n}, \psi_{1,n}, \lambda_{1,n}\psi_{1,n}), \quad E_{2,n} = (\varphi_{2,n}, \lambda_{2,n}\varphi_{2,n}, \psi_{2,n}, \lambda_{2,n}\psi_{2,n}).$$

A partir das expansões assintóticas (3.14)-(3.16), podemos facilmente provar que $\{E_{1,n}, E_{2,n}\}_{n \in \mathbb{Z}^*}$ forma uma base de Riesz no espaço de energia finita H_2 . Nós distinguimos diferentes tipos de desigualdades de observabilidade dependendo das constantes a, b, c . Na verdade, veremos na proposição seguinte que, se não houver inteiros $k \in \mathbb{N}$ tais que $\sqrt{c} = k\pi$, então os autovalores satisfazem uma condição de gap uniforme. Nesse caso, vamos aplicar o teorema de ingham usual, a fim de obter a observabilidade. No caso em que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sqrt{c} = k_0\pi$, então os autovalores do mesmo ramo satisfazem uma condição de intervalos uniformes, enquanto em ramos diferentes eles podem

ser assintoticamente próximos a uma taxa de ordem n^{-2} . Assim, o teorema usual de Ingham usado no caso que $\sqrt{c} \neq k\pi$, não é mais válido e, portanto, usaremos um teorema tipo Igham mais geral, que admite autovalores assintoticamente próximos.

Proposição 3.2.3. Assuma que $a = b$ e (3.9) seja válida, então existem duas constantes $\gamma > 0, n_0 > 0$, dependendo apenas de a, b, c tal que

$$\begin{cases} |\lambda_{1,m} - \lambda_{1,n}| \geq 2\gamma, & |\lambda_{2,m} - \lambda_{2,n}| \geq 2\gamma, \forall |n| \neq |m| \\ |\lambda_{1,m} - \lambda_{2,n}| \geq 2\gamma, & \forall |n|, |m| \leq n_0 \end{cases} \quad (3.18)$$

Além disso, temos os seguintes casos:

Caso 1: Se não existirem inteiros $k \in \mathbb{N}$ tal que $\sqrt{c} = k\pi$, então existe uma constante $\hat{\gamma} > 0$, dependendo de a, b e c , tal que, os dois ramos de autovalores de A_2 satisfazem uma condição uniforme de gap

$$\hat{\gamma} = \inf |\lambda_{1,m} - \lambda_{2,n}| \geq 0 \quad (3.19)$$

Caso 2: Se existe $k_0 \in \mathbb{N}^+$ tal que $\sqrt{c} = k_0\pi$, então existe constantes $\alpha_2 > \alpha_1 > 0$, dependendo de a, b e c , tais que para todo $|m|, |n| \geq n_0$, com n_0 grande o suficiente, temos

$$|\lambda_{1,m} - \lambda_{2,n}| \geq \alpha_1 m^{-2} \quad e \quad |\lambda_{1,m} - \lambda_{2,n}| \geq \alpha_1 n^{-2} \quad (3.20)$$

e existem uma infinidade de inteiros m, n tais que

$$|\lambda_{1,m} - \lambda_{2,n}| \leq \alpha_2 m^{-2} \quad e \quad |\lambda_{1,m} - \lambda_{2,n}| \leq \alpha_2 n^{-2}. \quad (3.21)$$

Demonstração. Primeiramente que de (3.17) e do fato que todos os autovalores $\lambda_{1,n}, \lambda_{2,n}$ serem simples, temos (3.18).

Caso 1: Se não existir um $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\sqrt{c} = k\pi$. de (3.14), temos

$$|\lambda_{1,n} - \lambda_{2,m}| = \left| \frac{(n-m)\pi}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}} + \frac{cm - cn}{8\sqrt{a}nm\pi} + O(n^{-3}) + O(m^{-3}) \right| \quad (3.22)$$

Vale lembrar que se $f = O(n^{-3})$ então $f = O(n^{-1})$, portanto

$$|\lambda_{1,n} - \lambda_{2,m}| = \sqrt{a} \left| (\pi(n-m) + \sqrt{c}) + O(n^{-1} + O(m^{-1})) \right|$$

como $|\pi(m-n) + \sqrt{c}| \geq 0$, $\forall n, m \in \mathbb{N}^*$. Então $|\pi(m-n) + \sqrt{c}| \neq O(n^{-1})$ e $|\pi(m-n) + \sqrt{c}| \neq O(m^{-1})$ assim,

$$|\lambda_{1,n} - \lambda_{2,m}| = \sqrt{a} \left| (\pi(n-m) + \sqrt{c}) + O(n^{-1} + O(m^{-1})) \right| \quad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Portanto (3.19) é satisfeita.

Caso 2: Existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sqrt{c} = k_0\pi$. Logo,

$$|\lambda_{1,m} - \lambda_{2,n}| = \sqrt{a^{-1}\pi} \left| m - n + k_0 + \frac{k_0}{8} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right) + O(n^{-3}) + O(m^{-3}) \right| \quad (3.23)$$

Vamos separar em dois casos.

1. Se $m - n + k_0 \neq 0$, então existe $\alpha'_1 > 0$ tal que $|m - n + k_0| \geq \alpha'_1 > 0$, portanto de (3.23)

$$|\lambda_{1,m} - \lambda_{2,n}| \geq \alpha_1 \geq \alpha_1 n^{-2}$$

o que prova (3.20)

2. Se $m - n + k_0 \neq 0$, então de (3.23) obtemos

$$|\lambda_{1,m} - \lambda_{2,n}| = \sqrt{a^{-1}\pi} \left| \frac{k_0^3}{8} \frac{1}{n(n - k_0)} + O(n^{-3}) \right| \geq \alpha_1 n^{-2}.$$

Além disso, se $m - n + k_0 = 0$, então

$$\begin{aligned} |\lambda_{1,m} - \lambda_{2,n}| &= \sqrt{a^{-1}\pi} \left| \frac{k_0^3}{8} \frac{1}{m(m + k_0)} + O(m^{-3}) \right| \\ &= \sqrt{a^{-1}\pi} \left| O(m^{-2}) + O(m^{-3}) \right| \\ &= O(m^{-2}) \end{aligned}$$

Daí, para um $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, vai existir um $\alpha_2 > 0$ tal que

$$|\lambda_{1,m} - \lambda_{2,n}| \leq \alpha_2 m^{-2}$$

assim, provando (3.20).

Além disso, se $m - n + k_0 = 0$, então por (3.23), não é difícil ver que (3.21) é satisfeita, o que prova nossa proposição. \square

Proposição 3.2.4. Assuma $a = b$ e a condição (3.9) seja válida, se existir $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sqrt{k_0} = k_0\pi$, então podemos ajustar os autovalores em uma sequência $(\lambda_n)_n$ tal que $(Im\lambda_n)_n$ é estritamente crescente. Se

$$0 < Im\lambda_{n+1} - Im\lambda_n \leq \gamma, \quad (3.24)$$

Então,

$$Im\lambda_n - Im\lambda_{n-1} > \gamma \quad e \quad Im\lambda_{n+2} - Im\lambda_{n+1} > \gamma \quad (3.25)$$

Dizemos que $Im\lambda_n, Im\lambda_{n+1}$ é uma cadeia de expoentes próximos em relação a γ de comprimento 2.

Demonstração. Como existe um $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sqrt{c} = k_0\pi$, uma vez que os autovalores do mesmo ramo satisfazem uma condição de gap uniforme, então de (3.24) deduzimos que λ_n, λ_{n+1} pertencem a ramos diferentes. Se λ_n e λ_{n-1} pertencem ao mesmo ramo de autovalores, então de (3.18), temos que $Im\lambda_n - im\lambda_{n-1} > 2\gamma$. Assim, obtemos a primeira afirmação de (3.25). Se λ_{n-1} e λ_{n+1} são do mesmo ramo, neste caso, de (3.18), temos o seguinte

$$Im\lambda_{n+1} - \lambda_{n-1} > 2\gamma.$$

Da desigualdade acima e (3.24), temos

$$Im\lambda_n - \lambda_{n-1} = (Im\lambda_{n+1} - \lambda_{n-1}) - (Im\lambda_{n+1} - \lambda_n) > 2\gamma - \gamma = \gamma,$$

provando a primeira parte de (3.25). Para segunda parte usamos os mesmos argumentos. \square

Observação 3. Na sequência, escrevemos $A \asymp B$, ou $A \sim B$ em vez de $c_1A \leq B \leq c_2A$ para brevidade, se não precisarmos usar explicitamente as constantes c_1, c_2 .

Ainda antes da demonstração do principal teorema desta seção, observemos que, sendo

$$(\varphi_{1,n})_x(1) + \psi_{1,n}(1) = \cos(n\pi) \frac{\cos(n\pi)\sqrt{c}}{n\pi} + O(n^{-2})\cos(n\pi)$$

temos

$$|(\varphi_{1,n})_x(1) + \psi_{1,n}(1)| = \left| 1 + \frac{\sqrt{c}}{n\pi} + O(n^{-2}) \right| \leq \left| 1 + \frac{\sqrt{c}}{n\pi} + \frac{k}{n^2} \right| \leq |1 + \sqrt{c} + k|$$

De maneira semelhante, obtemos

$$|(\varphi_{2,n})_x(1) + \psi_{2,n}(1)| = \leq |1 + \sqrt{c} + k|.$$

Portanto,

$$\Rightarrow |(\varphi_{1,n})_x(1) + \psi_{1,n}(1)| = O(1) \quad e \quad |(\varphi_{2,n})_x(1) + \psi_{2,n}(1)| = O(1) \quad (3.26)$$

Demonstração. Estamos, agora, a voltar à prova do Teorema 3.2.1. Dados quaisquer valores iniciais $\Phi_0 \in H_2$, tal como $\Phi_0 = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (\alpha_{1,n} E_{1,n} + \alpha_{2,n} E_{2,n})$,

então a solução do nosso problema (3.2) pode ser escrita como

$$\Phi(t) = (\varphi(t), \varphi_t(t), \psi(t), \psi_t(t)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (\alpha_{1,n} E_{1,n} e^{i\mu_{1,n} t} + \alpha_{2,n} E_{2,n} e^{i\mu_{2,n} t})$$

Portanto

$$\varphi_x(1, t) + \psi(1, t) = f_1(t) + f_2(t) \quad (3.27)$$

em que,

$$f_1(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_{1,n} ((\varphi_{1,n})_x(1) + \psi_{1,n}(1)) e^{i\mu_{1,n} t}$$

e

$$f_2(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_{2,n} ((\varphi_{2,n})_x(1) + \psi_{2,n}(1)) e^{i\mu_{2,n} t}.$$

As igualdades acima são válidas, pois

$$E_{1,n} = (\varphi_{1,n}, \lambda_{1,n} \varphi_{1,n}, \psi_{1,n}, \lambda_{1,n} \psi_{1,n})$$

e

$$E_{2,n} = (\varphi_{2,n}, \lambda_{2,n} \varphi_{2,n}, \psi_{2,n}, \lambda_{2,n} \psi_{2,n}).$$

Uma vez que os autovalores satisfazem uma condição de intervalos uniformes, aplicando o teorema usual de Ingham (Teorema 1.3.6), obtemos

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^T |f_1(t)|^2 dt \sim \sum_{n \in \mathbb{N}} |\alpha_{1,n} ((\varphi_{1,n})_x(1) + \psi_{1,n}(1))|^2, \\ \int_0^T |f_2(t)|^2 dt \sim \sum_{n \in \mathbb{N}} |\alpha_{2,n} ((\varphi_{2,n})_x(1) + \psi_{2,n}(1))|^2 \end{array} \right. \quad (3.28)$$

A desigualdade de Young e (3.27) nos fornece a desigualdade

$$\int_0^T |\varphi_x(1, t) + \psi(1, t)|^2 dt \leq 2 \int_0^T |f_1(t)|^2 dt + 2 \int_0^T |f_2(t)|^2 dt, \quad (3.29)$$

a qual combinada com (3.28) implica em

$$\int_0^T |\varphi_x(1, t) + \psi(1, t)|^2 dt \sim \sum_{n \in \mathbb{N}} (|\alpha_{1,n} ((\varphi_{1,n})_x(1) + \psi_{1,n}(1))|^2 + |\alpha_{2,n} ((\varphi_{2,n})_x(1) + \psi_{2,n}(1))|^2) \quad (3.30)$$

Logo, por (3.26) e 3.30, podemos deduzir que

$$\int_0^T |\varphi_x(1, t) + \psi(1, t)|^2 dt \sim \sum_{n \in \mathbb{N}} (|\alpha_{1,n}|^2 + |\alpha_{2,n}|^2) = \|\Phi_0\|_{H_2}^2$$

Caso 1: Não existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\sqrt{c} = k\pi$. Consideremos dados iniciais $\Phi_0 \in H_2$, tais que

$$\Phi_0 = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (\alpha_{1,n} E_{1,n} + \alpha_{2,n} E_{2,n})$$

Então a solução do sistema (3.2) pode ser escrita como

$$\Phi(t) = (\varphi(t), \varphi_t(t), \psi(t), \psi_t(t)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (\alpha_{1,n} E_{1,n} e^{\lambda_{1,n} t} + \alpha_{2,n} E_{2,n} e^{\lambda_{2,n} t}).$$

Portanto,

$$\varphi_x(1, t) + \psi(1, t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (\alpha_{1,n} ((\varphi_{1,n})_x(1) + \psi_{1,n}(1)) e^{\lambda_{1,n} t} + (\alpha_{1,n} ((\varphi_{2,n})_x(1) + \psi_{2,n}(1)) e^{\lambda_{2,n} t}).$$

e assim,

$$\varphi_x(1, t) + \psi(1, t) \sim \sum_n (\alpha_{1,n} e^{\lambda_{1,n} t} + \alpha_{1,n} e^{\lambda_{2,n} t}).$$

Dessa forma, segue do Teorema de Ingham (Teorema 1.3.6) que as sequências formam uma base de Riesz em $L^2(0, 1)$ sempre que $T > 2\pi D^+$, em que D^+ é a densidade superior da sequência $(\lambda_n)_n$. Para ser mais preciso, $D^+ = \frac{2}{\pi} \sqrt{a}$. Portanto,

$$\int_0^T |\varphi_x(1, t) + \psi(1, t)|^2 dt \sim \sum_{n \in \mathbb{N}} (\alpha_{1,n} (|\alpha_{1,n}|^2 + |\alpha_{2,n}|^2)) \sim \|\Phi_0\|_{H_2}^2$$

Caso 2: Existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sqrt{c} = k_0 \pi$. Dado quaisquer valores iniciais $\Phi_0 \in H_2$, tais que $\Phi_0 = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1) = \sum_n (\alpha_{1,n} E_{1,n} + \alpha_{2,n} E_{2,n}) n^2$, consequentemente a solução de (3.2) é dada por

$$\Phi(t) = (\varphi(t), \varphi_t(t), \psi(t), \psi_t(t)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (\alpha_{1,n} E_{1,n} e^{\lambda_{1,n} t} + \alpha_{2,n} E_{2,n} e^{\lambda_{2,n} t}) n^2.$$

Portanto,

$$\varphi_x(1, t) + \psi(1, t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (\alpha_{1,n} ((\varphi_{1,n})_x(1) + \psi_{1,n}(1)) e^{\lambda_{1,n} t} + (\alpha_{1,n} ((\varphi_{2,n})_x(1) + \psi_{2,n}(1)) e^{\lambda_{2,n} t}) n^2 \quad (3.31)$$

Agora, organizamos os dois ramos dos autovalores $(\lambda_{1,n})_n, (\lambda_{2,n})_n$ em uma sequência $(\lambda_n)_n$, tal que a sequência $(Im\lambda_n)_n$ é estritamente crescente. Da proposição (3.2.4), toda a cadeia $Im\lambda_n, Im\lambda_{n+1}$ de expoentes próximos em relação a γ e de comprimento 2. Além disso, denotaremos por a_n , os coeficientes de $e^{\lambda_{1,n}t}$ ou $e^{\lambda_{2,n}t}$ em (3.31). Considere A e B definidos como

$$A = \{n \in \mathbb{Z}^*; \quad (3.24) \text{ é válido}\}$$

e

$$B = \mathbb{Z} \setminus \{n, n+1 \text{ tal que } n \in A\}.$$

Então podemos rescrever (3.31) como

$$\begin{aligned} \varphi_x(1, t) + \psi(1, t) &= \sum_{n \in B} a_n e^{\lambda_n t} + \sum_{n \in A} (a_n e^{\lambda_n t} + a_{n+1} e^{\lambda_{n+1} t}) \\ &= \sum_{n \in B} a_n e^{\lambda_n t} + \sum_{n \in A} \left((a_n + a_{n+1}) e^{\lambda_n t} + (\lambda_{n+1} - \lambda_n) a_{n+1} \frac{e^{\lambda_{n+1} t} - e^{\lambda_n t}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \right) \end{aligned}$$

Assim,

$$\varphi_x(1, t) + \psi(1, t) = \sum_{n \in B} a_n e^{\lambda_n t} + \sum_{n \in A} ((a_n + a_{n+1}) e^{\lambda_n t} + (\lambda_{n+1} - \lambda_n) a_{n+1} e_{n+1}(t))$$

em que,

$$e_{n+1} = \frac{e^{\lambda_{n+1} t} - e^{\lambda_n t}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}$$

Segue do teorema (1.3.6), que as sequências $(e^{\lambda_n t})_{n \in B}, (e^{\lambda_n t}, e_{n+1}(t))_{n \in A}$ formam uma base de Riesz em $L^2(0, T)$, sempre que $T > 2\pi D^+ = 4\sqrt{a}$. Logo,

$$\int_0^T |\varphi_x(1, t) + \psi(1, t)|^2 dt \sim \sum_{n \in B} a_n^2 + \sum_{n \in A} |a_n + a_{n+1}|^2 + |\lambda_{n+1} - \lambda_n|^2 |a_{n+1}|^2 \quad (3.32)$$

Por outro lado, de (3.21), obtemos

$$|a_n + a_{n+1}|^2 + |\lambda_{n+1} - \lambda_n|^2 |a_{n+1}|^2 \geq \left(\frac{|a_n|^2}{|n|^4} + \frac{|a_{n+1}|^2}{|n+1|^4} \right).$$

Inserindo a desigualdade acima em (3.32) obtemos

$$\int_0^T |\varphi_x(1, t) + \psi(1, t)|^2 dt \sim \sum_{n \in B} \frac{|a_n|^2}{|n|^4} + l_0 \sum_{n \in A} \left(\frac{|a_n|^2}{|n|^4} + \frac{|a_{n+1}|^2}{|n+1|^4} \right) \geq l_1 \sum \frac{|a_n|^2}{n^4}.$$

Voltando às notações anteriores, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^T |\varphi_x(1, t) + \psi(1, t)|^2 dt &\geq l_1 \sum_{n \in \mathbb{N}} (|\alpha_{1,n}(\varphi_{1,n})_x(1) + \psi_{1,n}(1)|^2 + |\alpha_{2,n}(\varphi_{2,n})_x(1) + \psi_{2,n}(1)|^2) \\ &\geq l_1 \sum_{n \in \mathbb{N}} (|\alpha_{1,n}|^2 + |\alpha_{2,n}|^2) = l_1 \|\Phi_0\|_D^2 \end{aligned}$$

□

No caso em que não existe um inteiro k tal que $\sqrt{c} = k\pi$, a desigualdade de observabilidade é verdadeira no espaço de energia H_2 . Caso contrário, no caso em que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sqrt{c} = k_0\pi$, a desigualdade se mantém no espaço D .

O objetivo da próxima parte é obter a observabilidade ou controlabilidade exata em espaços funcionais usuais.

3.2.1 Desigualdade de observabilidade em espaços usuais

Usando as expansões assintóticas (3.15) e (3.16), obtemos

$$E_{1,n} = (x_n, g_n) = \left(\left(\frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}, \frac{i\sin(n\pi x)}{\sqrt{a}} \right), \left(\frac{\sqrt{c}\cos(n\pi x)}{n\pi}, \frac{i\sqrt{c}\cos(n\pi x)}{\sqrt{a}} \right) \right)$$

e

$$E_{2,n} = (f_n, g_n) = \left(\left(\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}, \frac{i\cos(n\pi x)}{\sqrt{a}} \right), \left(-\frac{\sin(n\pi x)}{\sqrt{c}n\pi}, \frac{i\sin(n\pi x)}{\sqrt{ac}} \right) \right).$$

Para cada $s \geq 0$, definimos 0 espaço

$$X_s = \left\{ (\widehat{\Phi}, \widehat{\Psi}) = \sum_{n \neq 0} \beta_n n^s x_n \right\}, \quad \|(\widehat{\Phi}, \widehat{\Psi})\|_{X_s}^2 = \sum_{n \neq 0} |\beta_n|^2$$

Corolário 3.2.5. Assuma que $a = b$, $\sqrt{c} = k_0\pi$ e a condição (3.9) seja válida. Então, temos

$$D = X_2 \times X_2$$

Demonstração. Temos, claramente, que $(n^2 x_n)_n$ e $(n^2 y_n)_n$ são base de Riesz em $X_2 \times X_2$. Por outro lado, temos que $(n^2 f_n)_n$ e $(n^2 g_n)_n$ são sequência de Bessel em $X_2 \times X_2$. Então o resultado segue do Teorema 1.8 □

Agora, para qualquer $s \geq 0$, definimos

$$V_s = \left\{ f = \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n \frac{\sin(n\pi x)}{n^s} \right\}, \quad \|f\|_{V_s}^2 = \sum_n |\alpha_n|^2.$$

Assim, com o espaço pivô $L^2(0, 1)$, temos $X_2 = V'_1 \times V'_2$, então, segue-se que

$$D = V'_1 \times V'_2 \times V'_1 \times V'_2.$$

De fato, **Afirmção:** $V_1 = H_0^1$

Para provar esta afirmação, devemos lembrar que H_0^1 pode ser dado da seguinte maneira

$$H_0^1 = \left\{ f = \sum_n a_n \operatorname{sen}(n\pi x); \sum_n |a_n|^2 n^2 < \infty \right\}$$

em que, $\|f\|_{H_0^1}^2 = \sum_n |a_n|^2 n^2$. Agora vamos considerar $f \in V_1$, assim,

$$f = \sum_n \frac{\alpha_n}{n} \operatorname{sen}(n\pi x)$$

$$\Rightarrow \|f\|_{H_0^1} = \sum_n \left| \frac{\alpha_n}{n} \right|^2 n^2 = \sum_n \alpha_n^2 < \infty$$

$$\Rightarrow f \in H_0^1.$$

Agora, dado $f \in H_0^1$; então

$$f = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \operatorname{sen}(n\pi x).$$

Fazendo $a_n = \frac{\alpha_n}{n}$, teremos

$$\|f\|_{V_1} = \sum_{n \in \mathbb{N}} |\alpha_n|^2 = \sum_n n^2 a_n^2 n^2 < \infty$$

$$\Rightarrow f \in V_1.$$

De maneira análoga temos $V_2 = H_0^2$. Portanto,

$$V'_1 = H^{-1} \quad e \quad V'_2 = H^{-2}$$

E como sabemos,

$$V'_1 = H^{-1} = \left\{ f = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \operatorname{sen}(n\pi x); \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{|a_n|^2}{n^2} < \infty \right\}$$

e

$$V'_2 = H^{-2} = \left\{ f = \sum_n b_n \operatorname{sen}(n\pi x); \sum_n \frac{|b_n|^2}{n^4} < \infty \right\}$$

Assim, é fácil ver $X_2 = V'_1 \times V'_2$

Temos o seguinte resultado de observabilidade.

Teorema 3.2.6. Assuma que $a = b, \sqrt{c} = k_0\pi$ e a condição (3.9) seja válida. Se $T > 4\sqrt{a}$, então existe uma constante $c_3 > 0$ tal que a seguinte desigualdade de verdadeira.

$$\int_0^T |\varphi_x(1, t) + \psi(1, t)|^2 dt \leq c_3 \|(\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1)\|_{H_2}^2,$$

Para toda solução $\Phi = (\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t)$ que resolve o problema de Cauchy homogêneo (3.1). Além disso, existe uma constante $0 < c_4 < c_3$, tal que

$$c_4 \|(\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1)\|_{V'_1 \times V'_2 \times V'_1 \times V'_2}^2$$

Antes de enunciar o próximo resultado, faremos algumas considerações. Seja $(\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t)$ solução de (3.1) e $v \in L^2(0, T)$. Depois de multiplicar a primeira e segunda equação de (1.1) por $\bar{\varphi}$ e $c^{-1}\bar{\psi}$ respectivamente, e usando integração por partes na sua soma sobre $(0, 1) \times (0, t)$, obtemos

$$\begin{aligned} & a \int_0^1 u_t(x, t) \bar{\varphi}(x, t) dx + bc^{-1} \int_0^1 y_t(x, t) \bar{\psi}(x, t) dx \\ & - a \int_0^1 u(x, t) \bar{\varphi}_t(x, t) dx - bc^{-1} \int_0^1 y(x, t) \bar{\varphi}_t dx \\ & = a \int_0^1 u_t(x, 0) \bar{\varphi}(x, 0) dx + bc^{-1} \int_0^1 y_t(x, 0) \bar{\psi}(x, 0) dx \\ & - a \int_0^1 u(x, 0) \bar{\varphi}_t(x, 0) dx - bc^{-1} \int_0^1 y(x, 0) \bar{\psi}_t(x, 0) dx \\ & - \int_0^1 \overline{(\varphi_x(1, t) + \psi(1, t))} v(t) dt \end{aligned} \tag{3.33}$$

Apresentamos a forma linear L_t por

$$L_t(\Phi_0) = \langle (au_1, -au_0, bc^{-1}y_1, -bc^{-1}y_0), \Phi_0 \rangle_{H'_2, H_2} - \int_0^1 \overline{(\varphi_x(1, t) + \psi(1, t))} v(t) dt$$

De (3.33) obtemos uma formulação fraca do sistema de Timoshenko (2)-(3) com a fronteira (6)

$$\langle (au_t(x, t), -au(x, t), bc^{-1}y_t(x, t), -bc^{-1}y(x, t)) \Phi(t) \rangle_{H'_2, H_2} = L_t(\Phi_0), \quad \forall \Phi_0 \in H_2 \tag{3.34}$$

Teorema 3.2.7. Assuma que $a = b$, $\sqrt{c} = k_0\pi$, $T > 4\sqrt{a}$ e a condição (H) seja válida, então para todo valor inicial $U_0 = (u_0, u_1, y_0, y_1) \in X = L^2(0, 1) \times H^{-1}(0, 1) \times L^2(0, 1) \times (H_*^1(0, 1))'$ e para todo $v \in L^2(0, T)$, o sistema de Timoshenko (2) - (3) com condição de fronteira (6) admite uma única solução fraca

$$U(x, t) = (u, u_t, y, y_t) \in C^0([0, T]; X),$$

no sentido de que a equação variacional (3.34) é satisfeita para todo $\Phi \in H_2$. Além disso, a aplicação linear $(U_0, v) \rightarrow U$ é contínuo de $X \times L^2(0, T)$ em X

Demonstração. Para cada $T > 4\sqrt{a}$ fixado, usando a desigualdade de observabilidade direta (3.9), deduzimos que

$$\|L_t\|_{\mathcal{L}(H_2, \mathbb{R})} \leq c(\|v\|_{L^2(0, T)} + \|U_0\|_X) \quad \forall t \in [0, T],$$

em que $c > 0$. Assim, a forma linear L_t é limitada em H_2 . Além disso, segue do teorema 3.1 que o operador linear

$$\Phi(t) \longrightarrow \Phi_0$$

é um isomorfismo de H_2 sobre si mesmo. Portanto, a forma linear

$$\Phi(t) \longrightarrow L_t(\Phi_0)$$

também é limitado em H_2 . Usando o Teorema da Representação de Riesz, para cada $0 \leq t \leq T$, existe um único elemento $(au_t(t), -au(t), bc^{-1}y_t(t), bc^{-1}y(t)) \in H'_2$ com condição

$$L_t(\Phi_0) = \langle (au_t(t), -au(t), bc^{-1}y_t(t), bc^{-1}y(t)), \Phi(t) \rangle_{H'_2, H_2}. \quad (3.35)$$

Fazendo

$$U(t) = (u(t), u_t(t), y(t), y_t(t)),$$

de (3.35), deduzimos que $U(t)$ satisfaz o problema (3.34) para todo $t \in [0, T]$. Além disso,

$$\begin{aligned} \|U(t)\|_X &\simeq \|(au_t(t), -au(t), bc^{-1}y_t(t), bc^{-1}y(t))\|_{H'_2} \\ &= \|L_t\|_{\mathcal{L}(H_2, \mathbb{R})} \leq c(\|v\|_{L^2(0, T)} + \|U_0\|_X), \quad \forall t \in [0, T], \end{aligned}$$

o que implica na continuidade da aplicações linear $(U_0, v) \rightarrow U$. □

Agora iremos usar o HUM para estabelecer a controlabilidade exata para o sistema de Timoshenko (2) com condições de fronteiras (6). É interessante notar que a observabilidade do sistema (3.1) sugere a observabilidade do sistema (2) com as condições de contorno (6). Temos o seguinte resultado.

Teorema 3.2.8. Assuma que $a = b, T > 4\sqrt{a}$ e a condição (3.9) seja válida

(1) Se não existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\sqrt{c} = k\pi$, seja

$$(u_0, u_1, y_0, y_1) \in X = L^2(0, 1) \times H^{-1}(0, 1) \times L^2(0, 1) \times (H_*^1(0, 1)').$$

(2) Se existir $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sqrt{c} = k_0\pi$, seja $(u_0, u_1, y_0, y_1) \in V_2 \times V_1 \times V_2 \times V_1$, então existe $v \in L^2(0, T)$ tal que a solução do sistema de Timoshenko (2) com as condições de contorno (6) satisfaz

$$u(x, T) = u_t(x, T) = y(x, T) = y_t(x, T) = 0, \quad \forall x \in (0, 1)$$

Demonstração. Assuma que $a = b, T > 4\sqrt{a}$ e a condição (3.9) seja válida. Podemos dividir a prova em dois casos: Quando $\sqrt{c} \neq k\pi, \forall k \in \mathbb{N}$ e quando $\sqrt{c} = k_0\pi (k_0 \in \mathbb{N})$. Sendo a prova em ambos os casos semelhantes, faremos apenas um deles.

Suponha que $\sqrt{c} = k_0\pi, k \in \mathbb{N}$. Seja $\Phi_0 = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1) \in H_2$ e considerando $\Phi = (\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t) \in H_2$ a solução associada do sistema (3.1). Devido a desigualdade (3.13), podemos definir uma norma em H_2 por

$$\|\Phi_0\|_F = \left(\int_0^T |\varphi_x(1, t) + \psi(1, t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

Denotemos por F o complemento de H_2 por esta norma. Devido a desigualdade de observabilidade F é um espaço de Hilbert. Logo, temos as seguintes imersões contínuas.

$$H_2 \subset F \subset D = V'_1 \times V'_2 \times V'_1 \times V'_2.$$

Ao escolher o controle $V(t) = \varphi_x(1, t) + \psi(1, t)$, resolveremos o seguinte problema

$$\begin{cases} a\chi_{tt} - (\chi_x + \zeta)_x = 0, & (x, t) \in (0, 1) \times \mathbb{R}_+, \\ b\zeta_{tt} - \zeta_{xx} + c(\chi_x + \zeta) = 0, & (x, t) \in (0, 1) \times \mathbb{R}_+, \\ \chi(0, t) = \zeta_x(0, t) = \zeta_x(1, t) = 0, & t \in \mathbb{R}_+, \\ \chi(1, t) = -\varphi_x(1, t) - \psi(1, t), & t \in \mathbb{R}_+, \\ \chi(x, T) = \chi_t(x, T) = \zeta(x, T) = \zeta_t(x, T) = 0, & x \in (0, 1). \end{cases}$$

Pelo Teorema 3.2.7, o problema acima admite uma única solução por transposição na classe .

$$(\chi, \chi_t, \zeta, \zeta_t) \in C^0 \left([0, T]; (L^2(0, 1) \times H^{-1}(0, 1))^2 \right).$$

Definamos o operador $\Lambda : H_2 \longrightarrow H'_2$ por

$$\Lambda(\varphi_0, \psi_0, \chi_0, \zeta_0) = (\rho_1 \chi_t(0), -\rho \chi(0), \rho_2 \zeta_t(0), -\rho_2 \zeta(0))$$

Da equação (3.35) do Teorema 3.2.7, teremos

$$\begin{aligned} \langle \Lambda \Phi_0, \widehat{\Phi}_0 \rangle_{H'_2, H_2} &= \int_0^T (\varphi_x(1, t) + \psi(1, t))(\widehat{\varphi}_x(1, t) + \widehat{\psi}(1, t)) dt \\ &= \langle \Phi_0, \overline{\Phi}_0 \rangle_F \end{aligned}$$

$\Phi_0, \overline{\Phi}_0 \in H_2$, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$ será o produto escalar associado a norma $\|\cdot\|_F$. Portanto,

$$|\langle \Lambda \Phi_0, \widehat{\Phi}_0 \rangle| \leq \|\Phi_0\|_F \|\widehat{\Phi}_0\|_F, \quad \forall \Phi_0, \widehat{\Phi}_0 \in H_2$$

Como H_2 é denso em F , o operador Λ pode ser estendido para um operador contínuo de F para F' . Em particular, temos

$$|\langle \Lambda \Phi_0, \widehat{\Phi}_0 \rangle_{F', F}| \leq \|\Phi_0\|_F \|\widehat{\Phi}_0\|_F, \quad \forall \Phi_0, \widehat{\Phi}_0 \in F$$

e

$$\langle \Lambda \Phi_0, \widehat{\Phi}_0 \rangle_{F', F} = \|\Phi_0\|_F^2, \quad \forall \Phi_0 \in F$$

Portanto,

$$(\Lambda \Phi_0, \widehat{\Phi}_0) \longrightarrow \langle \Lambda \Phi_0, \widehat{\Phi}_0 \rangle_{F', F}$$

é contínua e coerciva. Assim, pelo Teorema de Lax-Milgram (Teorema 1.3.15, para cada

$\Phi'_0 \in F'$, existe um único $\Phi_0 \in F$, tal que

$$\langle \Lambda \Phi_0, \widehat{\Phi}_0 \rangle_F = \langle \Lambda \Phi'_0, \widehat{\Phi} \rangle_{F',F},$$

para todo $\widehat{\Phi} \in F$. Portanto, para cada $\Phi'_0 \in F'$, existe uma única $\Phi_0 \in F$, tal que $\Lambda \Phi_0 = \Phi'_0$. Como Λ é bijetiva e contínua, pelo teorema da aplicação aberta, temos que $\Lambda : F' \rightarrow F$ é um isomorfismo. Em particular, para todo $(u_1, u_0, y_1, y_0) \in V_1 \times V_2 \times V_1 \times V_2 \subset F'$, existe um único elemneto $(\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1) \in F$, tal que,

$$\begin{aligned} \Lambda(\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1) &= (a\chi(0), -ax(0), bc^{-1}\zeta_t(0), -bc^{-1}\zeta(0)) \\ &= (u_1, u_0, y_1, y_0) \end{aligned}$$

De acordo com a unicidade do nosso problema, temos

$$u(x, T) = u_t(x, T) = y(x, T) = y_t(x, T) = 0$$

□

3.3 Observabilidade e controlabilidade exata quando as velocidades de propagação são diferentes

Proposição 3.3.1. Assuma que $a \neq b$ e a condição (H) seja válida. Então os autova- lores de A_2 tem o seguinte comportamento assintótico:

$$\lambda_{1,n} = \frac{in\pi}{\sqrt{a}} - \frac{i\sqrt{ac}}{2(a-b)\pi n} + O(n^{-3}) \quad e \quad \lambda_{2,n} = \frac{in\pi}{\sqrt{b}} - \frac{i\sqrt{ac}}{2\sqrt{b}(a-b)\pi n} + O(n^{-3}), \quad (3.36)$$

com as respectivas autofunções correspondentes:

$$\varphi_{2,n}(x) = \frac{\operatorname{sen}(n\pi x)}{n\pi}, \quad \psi_{1,n}(x) = -\frac{ac \cos(n\pi x)}{(a+b)n^2\pi^2} + O(n^{-4})\cos(n\pi x), \quad (3.37)$$

$$\varphi_{2,n}(x) = \frac{b\operatorname{sen}(n\pi x)}{(a-b)n^2\pi^2} + O(n^{-4})\operatorname{sen}(n\pi x), \quad \psi_{2,n}(x) = \frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}. \quad (3.38)$$

Demonstração. Por (3.6) e usando o fato que $a \neq b$, temos

$$\begin{aligned}\mu_{1,n}^2 &= \frac{(a+b)(n\pi)^2}{2ab} + \frac{c}{2b} - \frac{(a-b)(n\pi)^2}{2ab} \sqrt{1 \frac{2ac(a+b)}{(a-b)^2(n\pi)^2} + \frac{(ac)^2}{(a-b)^2}}, \\ \mu_{2,n}^2 &= \frac{(a+b)(n\pi)^2}{2ab} + \frac{c}{2b} + \frac{(a-b)(n\pi)^2}{2ab} \sqrt{1 \frac{2ac(a+b)}{(a-b)^2(n\pi)^2} + \frac{(ac)^2}{(a-b)^2}}.\end{aligned}\quad (3.39)$$

Usando a expansão assintótica em (3.39), obtemos (3.36). Fazendo $\lambda = \lambda_{1,n}$, temos

$$\beta_{1,n} = \frac{1}{n\pi}, \quad \delta_{1,n} = \frac{\beta_{1,n}(a\mu_{1,n} - (n\pi)^2)}{n\pi} = \frac{-ac}{(a-b)n^2\pi^2} + O(n^{-4}).$$

Em (3.5), obtendo as autofunções correspondentes (3.37). Da mesma maneira, para $\lambda = \lambda_{2,n}$, temos

$$\delta_{2,n} = \frac{1}{n\pi}, \quad \beta_{2,n} = \frac{(n\pi)\delta_{2,n}}{a\mu_{2,n}^2 - n^2\pi^2} = \frac{b}{(a-b)n^2\pi^2} + O(n^{-4})$$

Em (3.5), obtendo as autofunções correspondentes (3.38) \square

Proposição 3.3.2. Assuma que $a \neq b$ e a condição (3.9) seja válida. Então existe uma constante $\gamma > 0$, dependendo de a, b e c , tal que

$$|\lambda_{j,m} - \lambda_{l,n}| \leq 2\gamma \Rightarrow j \neq l \quad (3.40)$$

Além disso, existem constantes $\alpha_2 > \alpha_1 > 0$ dependendo de a, b, c tal que

1) Se $a^{-1}b$ é um número racional diferente de $\frac{p^2}{q^2}$ para todo inteiro p, q , então para todo $|m|, |n| \geq N_0$, temos

$$|\lambda_{1,m} - \lambda_{2,n}| \geq \alpha_1|m|^{-1} \quad e \quad |\lambda_{1,m} - \lambda_{2,n}| \geq \alpha_1|n|^{-1}. \quad (3.41)$$

Além disso, existem infinitos inteiros m, n tais que

$$|\lambda_{1,m} - \lambda_{2,n}| \leq \alpha_2|m|^{-1} \quad e \quad |\lambda_{1,m} - \lambda_{2,n}| \leq \alpha_2|n|^{-1}. \quad (3.42)$$

2) Se $a^{-1}b = \frac{p_0^2}{q_0^2} \neq 1$, para alguns inteiros p_0, q_0 , então para todo $|m|, |n| \geq N_0$, temos

$$|\lambda_{1,m} - \lambda_{2,n}| \geq \alpha_1|m|^{-1} \quad e \quad |\lambda_{1,m} - \lambda_{2,n}| \geq \alpha_1|n|^{-1}. \quad (3.43)$$

Além disso, existem uma infinidade de inteiros m, n tais que

$$|\lambda_{1,m} - \lambda_{2,n}| \leq \alpha_2|m|^{-1} \quad e \quad |\lambda_{1,m} - \lambda_{2,n}| \leq \alpha_2|n|^{-1}. \quad (3.44)$$

3) Para quase todos irracionais positivos $a^{-1}b$ e todo $|n|, |m| \geq N_0$, temos

$$|\lambda_{1,m} - \lambda_{2,n}| \geq \alpha_1(|m| \ln^2|m|)^{-1} \quad e \quad |\lambda_{1,m} - \lambda_{2,n}| \geq \alpha_1(|n| \ln^2|n|)^{-1}. \quad (3.45)$$

Além disso, existem uma infinidade de inteiros m, n tal que

$$|\lambda_{1,m} - \lambda_{2,n}| \leq \alpha_2(|m| \ln|m|)^{-1} \quad e \quad |\lambda_{1,m} - \lambda_{2,n}| \leq \alpha_2(|n| \ln|n|)^{-1}. \quad (3.46)$$

Demonstração. A afirmação (3.40) segue diretamente de (3.39) e do fato de que todos os valores próprios são simples. Agora usando (3.36), temos

$$\begin{aligned} \left| \frac{\lambda_{1,m} - \lambda_{2,n}}{m} \right| &= \frac{m\pi\sqrt{b} - n\pi\sqrt{a}}{\sqrt{a}\sqrt{b}} + \frac{-\sqrt{abc}n - acm}{a\sqrt{b}(a-b)nm^2} + \frac{O(m^{-3})}{m} + \frac{O(n^{-3})}{m} \\ &= \sqrt{b^{-1}}\pi \left| \sqrt{ba^{-1}} - \frac{n}{m} \right| + \frac{O(a, b, c)}{m^2} + \frac{O(a, b, c)}{|mn|} \end{aligned} \quad (3.47)$$

Se $|\sqrt{ba^{-1}} - \frac{n}{m}| \geq \frac{1}{2}\sqrt{ba^{-1}}$, então as estimativas (3.41), (3.43) e (3.45) decorrem de maneira igual ao ocorrido na proposição 3.2. Caso contrário, se $|\sqrt{ba^{-1}} - \frac{n}{m}| < \frac{1}{2}\sqrt{ba^{-1}}$, então $m \sim n$ e da igualdade acima, temos

$$\left| \frac{\lambda_{1,m} - \lambda_{2,n}}{m} \right| = \sqrt{b^{-1}}\pi \left| \sqrt{ba^{-1}} - \frac{n}{m} \right| + O(m^{-2}) \quad (3.48)$$

Portanto, é suficiente considerar o termo principal de (3.48).

1. Seja $ba^{-1} = \frac{p_0}{q_0}$ um número racional reduzido. Logo, $\sqrt{ba^{-1}}$ é raiz do polinômio inteiro $q_0x^2 - p_0$. Desde $ba^{-1} \neq \frac{p^2}{q^2}$ para todo inteiro p, q , então o polinômio $q_0x^2 - p_0$ é irreduzível. Isso significa que $\sqrt{ba^{-1}}$ é um número algébrico quadrático. Graças ao Teorema de Liouville (Teorema 1.3.9), existe uma constante $\alpha_1 > 0$, dependendo de ba^{-1} , tal que para todo $|n|, |m| \geq N_0$, temos

$$|\sqrt{ba^{-1}} - \frac{n}{m}| \geq \alpha_1 m^{-2}$$

Por outro lado, como $\sqrt{ba^{-1}}$ é um número irracional, usando o teorema clássico de

Dirichlet (Teorema 1.3.10, existe uma infinidade de inteiros m, n tais que

$$\left| \sqrt{ba^{-1}} - \frac{n}{m} \right| < m^{-2}$$

2. Seja $\sqrt{ba^{-1}} = \frac{p_0}{q_0}$, um número racional reduzido. Retomando a (3.47), obtemos

$$|\lambda_{1,m} - \lambda_{2,n}| = \frac{\pi}{q_0} \sqrt{b^{-1}} |p_0 m - n q_0| + O(|m|^{-1}) + O(|n|^{-1})$$

Se $n \neq k q_0$ ou $m \neq k p_0$, para todo $k \in \mathbb{Z}^*$, então da desigualdade acima, obtemos (3.38). Caso contrário, se $n = k q_0$ e $m = k p_0$, então

$$|\lambda_{1,m} - \lambda_{2,n}| = \left| \frac{(p_0 \sqrt{b} - q_0 \sqrt{a}) k \pi}{\sqrt{ab}} + O(k^{-1}) \right|$$

Como $\left| \frac{(p_0 \sqrt{b} - q_0 \sqrt{a}) k \pi}{\sqrt{ab}} \right| > \alpha_1 > 0$, pois $a \neq b \Rightarrow \sqrt{a} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \neq \sqrt{b} \Rightarrow \sqrt{a} \frac{q_0}{p_0} \neq \sqrt{b}$.
Logo, obtemos (3.43).

Por outro lado, tomando $m = q_0 k$ e $n = p_0 k$, $k \in \mathbb{Z}^*$, temos

$$|\lambda_{1,m} - \lambda_{2,n}| = O(|m|^{-1}) + O(|n|^{-1}) < \alpha_2 |m|^{-1}$$

3. Seja $ba^{-1} \notin \mathbb{Q}$. Em primeiro lugar a partir do teorema de khintchine sobre a aproximação Diofantina, para quase todos os números irracionais $\sqrt{ba^{-1}}$, existem apenas uma finidade de inteiros m, n tais que

$$\left| b - \frac{n}{m} \right| < (m^2 (\ln|m|)^2)^{-1}$$

Portanto, segue de (3.48), que para quase todos os números irracionais $\sqrt{ba^{-1}}$, existem uma constante $\alpha_1 > 0$ e $N_0 \in \mathbb{N}$, tais que, para todo $|m|, |n| \geq N_0$,

$$\left| \frac{\lambda_{1,m} - \lambda_{2,n}}{m} \right| \alpha_1 (m^2 \ln^2|m|)^2.$$

E por ultimo, utilizando novamente o teorema de Khintchine, existe uma infinidade de inteiros $m, n > 0$ tais que

$$\left| \sqrt{ba^{-1}} - \frac{n}{m} \right| \leq (m^2 \ln|m|)^{-1}$$

Terminando a demonstração da proposição.

□

Similar a proposição 3.2.4, temos o seguinte resultado.

Proposição 3.3.3. Assuma $a = b$ e a condição (H) seja válida, se existir $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sqrt{k_0} = k_0\pi$, então ajustando os ramos dos autovalores em uma sequência $(\lambda_n)_n$ tal que $(Im\lambda_n)_n$ é estritamente crescente. Se

$$0 < Im\lambda_{n+1} - Im\lambda_n \leq \gamma, \quad (3.49)$$

Então,

$$Im\lambda_n - Im\lambda_{n-1} > \gamma \quad e \quad Im\lambda_{n+2} - Im\lambda_{n+1} > \gamma$$

De (3.37)-(3.38) temos o seguinte

$$\varphi_{1,n}(x) = \frac{\operatorname{sen}(n\pi x)}{n\pi} \Rightarrow (\varphi_{1,n})_x(x) = \operatorname{cos}(n\pi x)$$

e

$$\varphi_{2,n}(x) = \frac{b\operatorname{sen}(n\pi x)}{(a-b)n\pi} + n\pi O(n^{-4})\operatorname{sen}(n\pi x)$$

$$\Rightarrow (\varphi_{2,n})_x(x) = \frac{b\operatorname{cos}(n\pi x)}{(a-b)n\pi} + n\pi O(n^{-4})\operatorname{cos}(n\pi x)$$

Logo,

$$|(\varphi_{1,n})_x(1) + \psi_{1,n}(1)| = \left| \pm 1 + \frac{\pm ac}{(a-b)n^2\pi^2} + O(n^{-4}) \right|$$

$$\leq 1 + \left| \frac{\pm ac}{(a-b)n^2\pi^2} \right| + \frac{c'}{n^4}$$

$$\Rightarrow \varphi_{1,n}(1) + \psi_{1,n}(1) = O(1)$$

Por outro lado,

$$|\varphi_{2,n}(1) + \psi_{2,n}(1)| = \left| \frac{\pm b}{(a-b)n\pi} \pm n\pi O(n^{-4}) + \frac{\pm 1}{n\pi} \right|$$

$$\leq \left| \frac{\pm b}{(a-b)n\pi} \right| + \left| \frac{\pi k}{n^{-3}} \right| + \left| \frac{\pm 1}{n\pi} \right|$$

$$\leq \frac{1}{n} \left(\left| \frac{\pm b}{(a-b)\pi} \right| + \left| \frac{\pi k}{n^{-2}} \right| + \left| \frac{\pm 1}{\pi} \right| \right)$$

$$\Rightarrow \varphi_{2,n}(1) + \psi_{2,n}(1) = O(n^{-1}).$$

Portanto temos o seguinte

$$\Rightarrow \varphi_{1,n}(1) + \psi_{1,n}(1) = O(1) \quad e \quad \Rightarrow \varphi_{2,n}(1) + \psi_{2,n}(1) = O(n^{-1}) \quad (3.50)$$

Agora definimos os seguintes espaços espetrais poderados.

$$D_1 = \left\{ \Phi_0 = \sum_{n \neq 0} (\alpha_{1,n} E_{1,n} + \alpha_{2,n} n E_{2,n}) n; \alpha_{1,n}, \alpha_{2,n} \in \mathbb{C}, \sum_{n \neq 0} (|\alpha_{1,n}|^2 + |\alpha_{2,n}|^2) < \infty \right\}$$

e

$$D_2 = \left\{ \Phi_0 = \sum_{n \neq 0} (\alpha_{1,n} E_{1,n} + \alpha_{2,n} n E_{2,n}) n \ln^2 |n|; \alpha_{1,n}, \alpha_{2,n} \in \mathbb{C}, \sum_{n \neq 0} (|\alpha_{1,n}|^2 + |\alpha_{2,n}|^2) < \infty \right\}$$

o fator $\ln^2 |n|$ em D_2 será omitido para $|n| = 1$. Como o sistema $\{E_{1,n}, E_{2,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ é uma base de Riesz no espaço de energia H_2 , temos que os espaços D_1 e D_2 são obviamente um espaço de Hilbert T equipado respectivamente com as normas

$$\|\Phi_0\|_{D_1} = \sqrt{\sum_{n \neq 0} (|\alpha_{1,n}|^2 + |\alpha_{2,n}|^2)} \quad e \quad \|\Phi_0\|_{D_2} = \sqrt{\sum_{n \neq 0} (|\alpha_{1,n}|^2 + |\alpha_{2,n}|^2)}$$

Na verdade, para obter a observabilidade, precisamos usar uma norma mais fraca para a segunda equação, a fim de que $(\varphi_{2,n}(1) + \psi_{2,n}(1))$ tem a mesma ordem que $(\varphi_{1,n}(1) + \psi_{1,n}(1))$. Por esta razão, multiplicamos o vetor próprio $E_{2,n}$ por n em D_1 e D_2 . Agora estamos prontos para provar nossas desigualdades de observabilidade.

Teorema 3.3.4. Assuma que $a \neq b$, a condição (H) seja válida e $T > 2(\sqrt{a} + \sqrt{b})$. Então para toda solução $\Phi = (\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t)$ que resolve o problema (3.1)-(??), então existe uma constante $l_0 > 0$ tal que a seguinte desigualdade direta é válida:

$$\int_0^T |\varphi_x(1, t) + \psi(1, t)|^2 dt \leq l_0 \|\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1\|_{H_2}^2 \quad (3.51)$$

Além disso, existe uma constante $0 < l_1 < l_0$ dependendo de a, b e c tal que segue as desigualdades de observabilidade

Caso 1: Se $a^{-1}b$ é um número racional então

$$l_1 \|(\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1)\|_{D_1}^2 \leq \int_0^T |\varphi_x(1, t) + \psi(1, t)|^2 dt \quad (3.52)$$

Caso 2: para quase todos os números irracionais $a^{-1}b$, temos

$$l_1 \|(\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1)\|_{D_2}^2 \leq \int_0^T |\varphi_x(1, t) + \psi(1, t)|^2 dt \quad (3.53)$$

Demonastração. A prova de (3.51) é semelhante ao que foi feito na seção 3.2

Caso 1: Seja $a^{-1}b$ um número racional. Considere o valor inicial $\Phi_0 = \sum_{n \neq 0} (\alpha_{1,n} E_{1,n} + \alpha_{2,n} n E_{1,n}) n \in D_1$, usando a propriedades de Riesz a solução de (3.1)-(??) é dada por.

$$(\varphi(x, t), \varphi_t(x, t), \psi(x, t), \psi_t(x, t)) = \sum_{n \neq 0} (\alpha_{1,n} E_{1,n} e^{\lambda_{1,n} t} + \alpha_{2,n} n E_{2,n} e^{\lambda_{2,n} t}) n.$$

Portanto, temos

$$\varphi_x(1, t) + \psi(1, t) = \sum_{n \neq 0} (\alpha_{1,n} ((\varphi_{1,n})_x(1) + \psi_{1,n}(1)) e^{\lambda_{1,n} t} + \alpha_{2,n} n ((\varphi_{2,n})_x(1) + \psi_{2,n}(1)) e^{\lambda_{2,n} t}) n. \quad (3.54)$$

Igual foi feito na seção 3.2. Juntaremos os dois ramos de autovalores $\lambda_{1,n} n \neq 0, \lambda_{2,n} n \neq 0$ em uma sequência $(Im \lambda_n)_{n \neq 0}$ é estritamente crescente. Da proposição 3.3.3, segue-se que toda cadeia $Im \lambda_n, \lambda_{n+1}$ de expoentes próximos em relação a γ é de comprimento 2. Então, denotamos o conjunto A de inteiros $n \in \mathbb{Z}$ tal que a condição (3.49) seja válida, e $B = \mathbb{Z} \setminus \{n, n+1; n \in A\}$. Denotamos por a_n os coeficientes antes chamados de $e^{\lambda_{1,n} t}$ ou $e^{\lambda_{2,n} t}$ em (3.54). Logo

$$\varphi_x(1, t) + \psi(1, t) = \sum_{n \in B} a_n e^{\lambda_n t} + \sum_{n \in A} ((a_n + a_{n+1}) e^{\lambda_n t} + (\lambda_{n+1} - \lambda_n) a_{n+1} e_{n+1}(t))$$

$$\text{tal que, } e_{n+1}(t) = \frac{e^{\lambda_{n+1} t} - e^{\lambda_n t}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}.$$

Do Teorema 1.3.7, as sequências $(e^{\lambda_n t}, e_{n+1}(t))_{n \in A}$ formam uma base de Riesz em $L^2(0, T)$, desde que $T > 2(\sqrt{a} + \sqrt{b})$. Assim, segue-se que.

$$\int_0^T |\varphi_x(1, t) + \psi(1, t)|^2 dt \sim \sum_{n \in B} |a_n|^2 + \sum_{n \in A} (|a_n + a_{n+1}|^2 + |\lambda_{n+1} - \lambda_n|^2 |a_{n+1}|) \quad (3.55)$$

De acordo com (3.41) e (3.43) da proposição 3.3.2, implica que

$$|a_n + a_{n+1}|^2 + |\lambda_{n+1} - \lambda_n|^2 |a_{n+1}|^2 \geq l_1 \left(\frac{|a_n|^2}{|n|^2} + \frac{|a_{n+1}|^2}{|n+1|^2} \right)$$

Inserindo a desigualdade acima em (3.55) e retornando as notações anteriores, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^T |\varphi_x(1, t) + \psi(1, t)|^2 dt &\geq l_1 \sum_{n \in B} \frac{|a_n|^2}{|n|^2} + l_1 \sum_{n \in A} \left(\frac{|a_n|^2}{|n|^2} \frac{|a_{n+1}|^2}{|n+1|^2} \right) \\ &\geq l_1 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \end{aligned}$$

Portanto, da desigualdade acima e de (3.50)

$$\begin{aligned} &\int_0^T |\varphi_x(1, t) + \psi(1, t)|^2 dt \\ &\geq l_1 \sum_{n \neq 0} (|\alpha_{1,n}|^2 ((\varphi_{1,n})_x(1) + \psi_{1,n}(1))^2 + |\alpha_{2,n}|^2 n ((\varphi_{2,n})_x(1) + \psi_{2,n}(1))^2) \\ &\geq l_1 \sum_{n \neq 0} (|\alpha_{1,n}|^2 + |\alpha_{2,n}|^2) = l_1 \|\phi_0\|_{D_1}^2 \end{aligned}$$

Assim, obtendo a desigualdade (3.52).

Caso 2: para quase todo número irracional $a^{-1}b$. Dado um valor inicial $\Phi_0 D_2$, com $\Phi_0 = \sum_{n \neq 0} (\alpha_{1,n} E_{1,n} + \alpha_{2,n} n E_{2,n}) n \ln^2 |n|$, então a solução de (3.1)-(??) pode ser escrita como

$$(\varphi(x, t), \varphi_t(x, t), \psi(x, t), \psi_t(x, t)) = \sum_{n \neq 0} (\alpha_{1,n} E_{1,n} e^{\lambda_{1,n} t} + \alpha_{2,n} n E_{2,n} e^{\lambda_{2,n} t}) n \ln |n|$$

Portanto,

$$\varphi_x(1, t) + \psi(1, t) = \sum_{n \neq 0} (\alpha_{1,n} ((\varphi_{1,n})_x(1) + \psi_{1,n}(1)) e^{\lambda_{1,n} t} + \alpha_{2,n} n ((\varphi_{2,n})_x(1) + \psi_{2,n}(1)) e^{\lambda_{2,n} t}) n \ln^2 |n| \quad (3.56)$$

de maneira similar ao caso 1,

$$\int_0^T |\varphi_x(1, t) + \psi(1, t)|^2 dt \sim \sum_{n \in B} |a_n|^2 + \sum_{n \in A} (|a_n + a_{n+1}|^2 + |\lambda_{n+1} - \lambda_n|^2 |a_{n+1}|^2) \quad (3.57)$$

onde denotamos por a_n o coeficiente antes chamado de $e^{\lambda_{1,n} t}$ e $e^{\lambda_{2,n} t}$. Em (3.56), usando

(3.45) da proposição (3.15), obtemos

$$|a_n + a_{n+1}|^2 + |\lambda_{n+1} - \lambda_n|^2 \geq l_1 \left(\frac{|a_n|^2}{|n|^2 \ln^4 |n|} + \frac{|a_{n+1}|^2}{|n+1|^2 \ln^4 |n+1|} \right)$$

Inserindo a desigualdade acima em (3.57), obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^T |\varphi_x(1, t) + \psi(1, t)|^2 dt &\geq l_1 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{|a_n|^2}{|n|^2 \ln^4 |n|} \\ &\geq l_1 \sum_{n \neq 0} (|\alpha_{1,n}((\varphi_{1,n})_x(1) + \psi_{1,n}(1)|^2 + |\alpha_{2,n}n((\varphi_{2,n})_x(1) + \psi_{2,n}(1)|^2) \end{aligned}$$

Inserindo (3.50) na desigualdade acima, obtemos a desigualdade (3.52). A prova do teorema está completa. \square

Os espaços espectrais D_1 e D_2 são meio dos autovalores $(E_{1,n})_{n \neq 0}$ e $(E_{2,n})_{n \neq 0}$, que podem ser escritos por

$$\begin{cases} E_{1,n} = (x_n, g_n) = \left(\left(\frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}, \frac{i\sin(n\pi x)}{\sqrt{a}} \right), \left(\frac{O(a, b, c)}{n^2} \cos(n\pi x), \frac{O(a, b, c)}{n} \cos(n\pi x) \right) \right) \\ E_{2,n} = (f_n, y_n) = \left(\left(\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}, \frac{i\cos(n\pi x)}{\sqrt{b}} \right), \left(\frac{O(a, b, c)}{n^2} \sin(n\pi x), \frac{O(a, b, c)}{n} \sin(n\pi x) \right) \right) \end{cases}$$

Para cada $s \geq 0$ definimos os espaços

$$\begin{cases} x_s = \left\{ \widehat{\varphi}, \widehat{\psi} \right\} = \sum_{n \neq 0} \beta_n n^s x_n ; \|(\widehat{\varphi}, \widehat{\psi})\|_{x_s}^2 = \sum_n |\beta_n|^2 \\ \widehat{x}_s = \left\{ \widehat{\varphi}, \widehat{\psi} \right\} = \sum_{n \neq 0} \beta_n n^s \ln |n| x_n ; \|(\widehat{\varphi}, \widehat{\psi})\|_{\widehat{x}_s}^2 = \sum_n |\beta_n|^2 \end{cases}$$

Corolário 3.3.5. Assuma que $a \neq b$ e a condição (H) seja válida. Portanto,

$$D_1 = x_1 \times x_2 \quad e \quad D_2 = \widehat{x}_1 \times \widehat{x}_2. \quad (3.58)$$

Além disso, para qualquer $s \geq 0$ definimos os espaços

$$v_s = \left\{ f = \sum_{n>0} \alpha_n \frac{\sin(n\pi x)}{n^s} \right\}, \quad \|f\|_{v_s}^2 = \sum_{n>0} |\alpha_n|^2$$

e

$$\widehat{v}_s = \left\{ f = \sum_{n>0} \alpha_n \frac{\sin(n\pi x)}{n^s \ln^2 |n|} \right\}, \quad \|f\|_{\widehat{v}_s}^2 = \sum_{n>0} |\alpha_n|^2.$$

Como $L^2(0, 1)$ é o espaço pivô, então de maneira análoga a seção 3.2, teremos $x_s = v'_{s-1} \times v'_s$ e $\widehat{x}_s = \widehat{v}'_{s-1} \times \widehat{v}'_s$. Logo, segue-se

$$D_1 = v'_0 \times v'_1 \times v'_1 \times v'_2 \quad e D_2 = \widehat{v}'_0 \times \widehat{v}'_1 \times \widehat{v}'_1 \times \widehat{v}'_2 \times$$

Além disso, teremos também que

$$D_1 = L^2(0, 1) \times H^{-1}(0, 1) \times H^{-1}(0, 1) \times H^{-2}(0, 1)$$

em que os espaços de controle são $H^1(0, 1) \times L^2(0, 1) \times H^2(0, 1) \times H^1(0, 1)$.

Semelhante à seção 3.2 do teorema 3.4, obtemos o seguinte resultado.

Teorema 3.3.6. Assuma que $a \neq b, T > 2(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ e a condição (H) seja válida

1) Se $a^{-1}b$ é racional, seja

$$(u_0, u_1, y_0, y_1) \in v_1 \times v_0 \times v_2 \times v_1$$

2) Para quase todo número irracional $a^{-1}b$, seja $(u_0, u_1, y_0, y_1) \in \widehat{v}_1 \times \widehat{v}_0 \times \widehat{v}_2 \times \widehat{v}_1$

Então existe $v \in L^2(0, T)$ tal que a solução do sistema de Timoshenko (2), com condições de fronteira (6) satisfaz as condições finais nulas

$$u(x, T) = u_t(x, T) = y(x, T) = y_t(x, T) = 0, \quad \forall x \in (0, 1)$$

Referências Bibliográficas

- [1] Akil, M. Chitour, Y. Ghader, M. and Wehbe, A. Stability and exact controllability of a Timoshenko system with only one fractional damping on the boundary, Khawarizmi Laboratory of Mathematics and Applications-KALMA. Paris-Saclay Univ. (2019).
- [2] F. Alabau-Boussouira, Indirect boundary stabilization of weakly coupled hyperbolic systems, SIAM Journal on Control and Optimization (2002).
- [3] F. Alabau-Boussouira, A two-level energy method for indirect boundary observability and controllability of weakly coupled hyperbolic systems, SIAM Journal on Control and Optimization (2003).
- [4] F. Alabau-Boussouira, A general formula for decay rates of nonlinear dissipative systems, Comptes Rendus Mathematique (2004).
- [5] F. Ammar-Khodja, A. Benabdallah, J.M. Rivera and R. Racke, Energy decay for Timoshenko systems of memory type, Journal of Differential Equations (2003).
- [6] Araruna, F.D. and Zuazua, E. Controllability of the kirchhoff system for beams as a limit of the Mindlin-Timoshenko system, SIAM J. Control Optim (2008).
- [7] R.L. Bagley and J. Torvik, Fractional calculus - a different approach to the analysis of viscoelasticity damped structures, AIAA Journal (1983).
- [8] C.J.K. Batty and T. Duyckaerts, Non-uniform stability for bounded semi-groups on Banach spaces, J. Evol. Equ. (2008)
- [9] A. Benaissa and S. Benazzouz, Well-posedness and asymptotic behavior of Timoshenko beam system with dynamic boundary dissipative feedback of fractional derivative type, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik (2017).
- [10] BREZIS, H. Analyse Fonctionnelle, Theorie et Applications. Masson, Paris, 1983.
- [11] Y. Bugeaud, Approximation by Algebraic Numbers, Cambridge Tracts in Mathematics, Vol. 160, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

- [12] T. Cazenave and A. Haraux. An Introduction to Semilinear Evolution Equations. Oxford: Clarendon press, 1998.
- [13] J.U. Kim and Y. Renardy, Boundary control of the Timoshenko beam, SIAM J. Control Optim. (1987).
- [14] V. Komornik and P. Loreti, Fourier Series in Control Theory, Springer, New York, 2005.
- [15] Lions, J. L. Contrôlabilité exacte, perdubations et stabilisation de systèmes distribués. Tome 1. Contrôlabilité exacte. [Exact controllability], recherches en Mathématiques Appliquées [Research in Applied Mathematics], Vol. 8. Masson, Paris, 1988. With appendices by Zuazua, E. Bardos, C. Lebeau, G. and Rauch, J.
- [16] Lions, J. L. Contrôlabilité exacte, perdubations et stabilisation de systèmes distribués. Tome 2. Perturbations. [Exact controllability], recherches en Mathématiques Appliquées [Research in Applied Mathematics], Vol. 9. Masson, Paris, 1988.
- [17] Z. Liu and B. Rao, A spectral approach to the indirect boundary control of a system of weakly coupled wave equations, Discrete Contin. Dyn. Syst. (2009).
- [18] B. Mbodje, Wave energy decay under fractional derivative controls, IMA Journal of Mathematical Control and Information 23(2) (2006).
- [19] J.H. Park and J.R. Kang, Energy decay of solutions for Timoshenko beam with a weak non-linear dissipation, IMA Journal
- [20] R. Racke and J.M. Rivera, Global stability for damped Timoshenko systems, Discrete and Continuous Dynamical Systems (2003).
- [21] C.A. Raposo, J. Ferreira, M.L. Santos and N.N.O. Castro, Exponential stability for the Timoshenko system with two weak dampings, Appl. Math. Lett. (2005).
- [22] J.E.M. Rivera and R. Racke, Timoshenko systems with indefinite damping, J. Math. Anal. Appl. 341(2) (2008).
- [23] D.L. Russell, A general framework for the study of indirect damping mechanisms in elastic systems, J. Math. Anal. Appl. (1993).
- [24] S. Samko, A. Kilbas and O. Marichev, Fractional Integrals and Derivatives. Gordon and Breach, Amsterdam, 1993. of Applied Mathematics 76(2) (2010).

- [25] A. Soufyane and A. Whebe, Uniform stabilization for the Timoshenko beam by a locally distributed damping, *Electronic Journal of Differential Equations (EJDE)* (2003).
- [26] S. Timoshenko, LXVI. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars, *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* (1921),
- [27] Zhang, C.G. and Hu, H.X. Exact controllability of a Timoshenko beam with dynamical boundary, *J. Math. Kyoto Univ.* (2007).