UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS APLICADAS E EDUCAÇÃO
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Caio Vinicius Oliveira de Pontes

Séries de Potências como Método de Solução de EDO: Fundamentos e Aplicações

Rio Tinto – PB
2025

Caio Vinicius Oliveira de Pontes

Séries de Potências como Método de Solução de EDO: Fundamentos e Aplicações

Trabalho Monográfico apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador(a): Carlos Alberto Gomes de Almeida

Rio Tinto – PB
2025

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

P814s Pontes, Caio Vinicius Oliveira de.
Séries de potências como método de solução de EDO: Fundamentos e aplicações / Caio Vinicius Oliveira de Pontes. - Rio Tinto, 2025.
41 f. : il.

Orientação: Carlos Alberto Gomes de Almeida.
TCC (Graduação) - UFPB/CCAE.

1. Séries de potências. 2. Equações diferenciais ordinárias. 3. Coeficientes variáveis. I. Almeida, Carlos Alberto Gomes de. II. Título.

UFPB/CCAE CDU 517.93

Elaborado por DAVI DA SILVA NOVAES - CRB-1064/15

Caio Vinicius Oliveira de Pontes

Séries de Potências como Método de Solução de EDO: Fundamentos e Aplicações

Trabalho Monográfico apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador(a): Carlos Alberto Gomes de Almeida

Trabalho aprovado em 11 de DEZEMBRO de 2025.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Carlos Alberto Gomes de Almeida
UFPB (Orientador)

Prof. Dr. José Fabricio Lima de Souza
UFPB

Agnes Liliane L. Soares de Santana

Profª. Dra. Agnes Liliane Lima Soares de Santana
UFPB

Este trabalho é dedicado às minhas avós Maria Dália e Helena.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus, a quem admiro profundamente. Usando as palavras de Matthew McConaughey em seu discurso quando venceu o Oscar, Ele tem agraciado minha vida com oportunidades que reconheço não serem fruto apenas das minhas mãos, nem de qualquer esforço humano. Deus me mostrou, de forma quase científica, que a gratidão sempre retorna para nós de maneira generosa. Como disse o falecido Charlie Laughton: “Quando você tem Deus, você tem um amigo — e esse amigo é você.”

Agradeço à Virgem Maria, mãe de Deus e nossa. Sei que todas as graças que consegui durante a minha vida foram por Sua intercessão. Eu não chegaria onde cheguei se não fosse a Minha Mãe. E agradeço a São José, que nos ensinou a ficar em silêncio e, mesmo que não entendamos os planos de Deus, devemos confiar que Ele sempre prezará pelo nosso bem.

Agradeço a meus pais, José Gilmar e Denise Sandra, por nunca terem desistido de mim, apesar de eu ter dado bastante motivos. Eu não poderia pedir algo melhor do que ter um pai devoto de São José e uma mãe devota de Nossa Senhora. Sem o apoio e a força deles eu não seria nada, e não tinha como escolher outra profissão, pois ser professor já estava no meu sangue.

Agradeço a todos da minha família que demonstraram apoio nessa fase da minha vida, especialmente à minha Vó Helena e à minha Tia Rosa, que, por mais que não compreendessem muito sobre tudo isso, nunca deixaram de perguntar e torcer pelo meu sucesso.

Agradeço à minha fiel companheira Yasmin, que me mostrou que o ditado “por trás de um grande homem existe uma grande mulher” estava errado. Todo grande homem tem uma grande mulher que nunca está atrás, mas sempre ao seu lado.

Agradeço a todos os professores que tive durante a minha vida, no ensino fundamental e médio, especialmente aos professores de Matemática. Não citarei o nome de nenhum, mas guardo comigo todos que fizeram parte da minha formação e me ajudaram a gostar dessa disciplina tão temida.

Agradeço aos professores do Campus IV do Curso de Licenciatura em Matemática, especialmente aos dois orientadores que tive durante esse percurso: o professor Dr. Jamilson Ramos Campos, que me auxiliou na escolha do tema, e o professor Dr. Carlos Alberto

Gomes de Almeida, que aceitou prosseguir com esse projeto em andamento e me ajudou de uma forma que nunca terei como agradecer, permitindo-me concluir o curso de forma mais rápida. Tive uma oportunidade única na minha vida e só a consegui devido ao seu auxílio durante um curto período.

Agradeço aos professores Agnes Liliane Lima Soares de Santana e José Fabrício Lima de Souza, que aceitaram o convite para fazer parte da banca avaliadora deste trabalho, colaborando na construção de um projeto melhor. Ademais, agradeço à professora Marilza Pereira Valentini, que foi minha orientadora durante a minha tutoria na disciplina de Estatística.

Agradeço a todos os amigos que fiz durante essa jornada. Não citarei o nome de nenhum, mas cada um sabe como contribuiu para a minha formação e por transformar um lugar que deveria ser de preocupação e dificuldades em um ambiente confortável. Eu não teria conseguido sozinho.

E, por fim, algo incomum: agradeço ao meu gato amarelo, Júnior, por sempre ficar me esperando chegar em casa todas as noites.

"Bem, antes sempre havia escuridão. Se me perguntarem, a luz está vencendo."
(Rust Cohle em True Detective)

RESUMO

O estudo das Equações Diferenciais Ordinárias é de extrema importância para diversas áreas, como Física e Engenharia. Entretanto, existem algumas Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs), em que os métodos mais conhecidos não se mostram eficazes, o que faz necessário a exploração de ferramentas do conhecimento para uma abordagem alternativa. Uma das ferramentas que pode ser usada é resolver por meio das Séries de Potências, que permite representar a solução da EDO em forma de Séries em torno de um ponto específico. Neste contexto, buscou-se investigar como o método de séries de potências pode ser aplicado na resolução de EDOs de segunda ordem com coeficientes variáveis. Para comprovar sua funcionalidade, aplicou-se o método a duas EDOs muito importantes dentro da área da Matemática, a Equação de Airy e a Equação de Legendre. Como esse estudo está relacionado com as EDOs, ele insere-se na área da Matemática Pura, especificamente na subárea da Análise.

Palavras-chave: Séries de Potências, Equações Diferenciais Ordinárias, Coeficientes Variáveis.

ABSTRACT

The study of Ordinary Differential Equations is extremely important for various fields, such as Physics and Engineering. However, there are some Ordinary Differential Equations (ODEs) for which the most well-known methods are not effective, making it necessary to explore knowledge tools for an alternative approach. One of the tools that can be used is solving through Power Series, which allows representing the solution of the ODE in the form of Series around a specific point. In this context, we sought to investigate how the power series method can be applied in solving second-order ODEs with variable coefficients. To prove its functionality, the method was applied to two very important ODEs in the field of mathematics, the Airy equation and the Legendre equation. As this study is related to ODEs, it falls within the field of pure mathematics, specifically in the subfield of analysis.

Key-words: Power Series, Ordinary Differential Equations, Variable Coefficients.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

EDO	Equações Diferenciais Ordinárias

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

No curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Paraíba, no Campus IV estudamos a disciplina de Séries e Equações Diferenciais Ordinárias, diversos métodos utilizados na resolução de problemas envolvendo essas equações. Entre esses estudos o tema de Séries de Potências e sua aplicação na resolução de Equações Diferenciais nem sempre é explorado com profundidade, apesar de sua ampla utilização na modelagem de problemas do cotidiano.

No entanto, existem EDOs para as quais os métodos tradicionalmente apresentados na disciplina não se mostram eficazes. Nesses casos, torna-se necessário recorrer a abordagens alternativas, como o uso de Séries de Potências. Esse método é especialmente útil quando lidamos com EDOs que possuem coeficientes não constantes. Segundo Matos(1), o método consiste em substituir a solução por uma Série de Potências, e, em seguida, calcular seus coeficientes.

Diante disso, este trabalho busca realizar uma investigação na área de Matemática Pura, especificamente na subárea de Análise, com foco no tema: Uso de Séries de Potências na Resolução de Equações Diferenciais Ordinárias. O estudo está direcionado ao Ensino Superior e integrar conteúdos abordados na disciplina Séries e Equações Diferenciais Ordinárias, ofertada no curso de Licenciatura em Matemática. Para a compreensão será necessária uma breve revisão dos conceitos fundamentais envolvendo Sequências, Séries e Séries de Potências.

O método de Séries de Potências permite encontrar soluções para EDOs em casos situações em que os métodos tradicionais não são eficientes, sobretudo quando os coeficientes são variáveis. Dessa forma, amplia-se o conjunto de problemas que podem ser resolvidos, possibilitando o tratamento de situações que, de outro modo, permaneceriam sem solução. A importância dessa diversidade de métodos se reforça quando se considera que, segundo Matos (1), as EDOs são amplamente aplicadas em áreas como Engenharia, Economia e Física, servindo de base para a formulação matemática de leis e fundamentos teóricos nessas disciplinas.

Assim, este trabalho de investigação pode colaborar para um melhor entendimento por parte dos estudantes que se dedicam a essa área, mas que muitas vezes não têm contato aprofundado com esse conteúdo, restringindo-se aos métodos usuais para a resolução de EDOs. O estudo, portanto, pode beneficiar não apenas os alunos da Licenciatura, como também ajudar pesquisadores interessados na temática.

Como mencionado, as EDOs aparecem em diversas áreas. Em seu Trabalho de Conclusão de Curso, Alves (2) destaca que elas estão presentes na modelagem de diversos fenômenos, como a queda livre de um corpo, o crescimento populacional e a perseguição entre presa e predador, entre outros. Ainda, segundo Matos (1), não basta apenas encontrar a solução de uma EDO: é igualmente essencial formular matematicamente o fenômeno que dá origem à equação diferencial. Além disso, suas soluções são têm aplicações importantes em campos como mecânica quântica e cinética química.

À vista disso, este trabalho tem como objetivo geral analisar o método de Séries de Potências como ferramenta para a solução de EDOs. Para isso, busca-se, primeiramente definir os conceitos historicamente construídos: Sequências, Séries e Equações Diferenciais Ordinárias, Séries de Potências e como se relacionam. Em seguida, identificar em quais tipos de EDOs o método de Séries de Potências pode se aplicar, e, por fim, demonstrar sua utilização na resolução dessas equações e em suas aplicações.

Desse modo, este trabalho está organizado em três seções. Na primeira, que tem como referencial teóricos os livros de Boyer (3) e Eves (4), com uma breve apresentação sobre o desenvolvimento histórico dos principais conceitos envolvendo Séries e Séries de Potências. Em seguida, apresenta-se a fundamentação teórica necessária para realizar o estudo do método envolvendo as Séries de Potências, fundamentado nos livros de Boyce, Diprima e Meade (5) e Matos (1). Por fim, no último capítulo na última seção são exploradas duas aplicações do método, analisando duas equações fundamentais na área da Matemática, baseando-se nos livros Boyce, Diprima e Meade (5), Matos (1) e Zill(6).

2 APONTAMENTOS HISTÓRICOS

Desenvolvida há milhares de anos, a Matemática exerce um papel fundamental em nossa sociedade, desde sua criação até os dias atuais. É importante destacar que a Matemática surgiu devido a necessidade do homem de contar e de medir, mas com o passar do tempo, com a colaboração de diversos intelectuais, ela evoluiu com novos conceitos e novas técnicas.

Neste tópico, iremos fazer uma breve abordagem sobre a evolução das ideias em torno do conceito de Séries e de Séries de Potências, que despertou a curiosidade de estudiosos da Antiguidade até matemáticos europeus no século XVIII.

Os babilônios foram um dos primeiros a ter conhecimento sobre o conceito de série. Eles tinham um entendimento inicial sobre alguns conceitos que envolviam Séries e Progressões, que hoje estão ligados às Séries Geométricas e Aritméticas, especialmente a soma dos termos de uma Progressão Geométrica e de uma Sequência Numérica, respectivamente

Quando vamos falar sobre o cálculo integral é necessário fazer referência a John Wallis (1616-1703), um matemático britânico do século XVII que fez contribuições enriquecedoras para a Matemática, como por exemplo, o uso do símbolo do infinito (∞). Eves (4) afirma que Wallis foi quem abriu o caminho para Isaac Newton (1642-1727), fazendo um uso sistemático de Séries Infinitas na área da Análise.

Isaac Newton teve uma contribuição fundamental no desenvolvimento das Séries, destacando-se especialmente no estudo e na formalização das Séries de Potências. Ele explicou e demonstrou que poderíamos utilizar o Teorema do Binômio para expoentes

Figura 1 – John Wallis

Fonte: Eves (2011)

não inteiros, permitindo, assim a série que hoje chamamos de Série Binomial. Ademais, Newton resolvia funções transcendentes (seno, cosseno, arco-seno,etc) utilizando Séries de Potências. E, Boyce, Diprima e Meade (5) afirmam que Newton desenvolveu um método para resolver Equações Diferenciais Ordinárias utilizando Séries Infinitas. Em paralelo a Newton, Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) foi mais um intelectual que Séries Infinitas desempenharam um papel fundamental em seus trabalhos. Segundo Boyer (3), foi após um problema proposto por Christiaan Huygens (1629-1695) sobre encontrar a soma dos recíprocos números triangulares, isto é, $\frac{2}{n(n+1)}$. Após resolver esse problema, Leibinz propôs que era possível encontrar a soma de quase todas as séries.

Figura 2 – Isaac Newton

Fonte: Eves (2011)

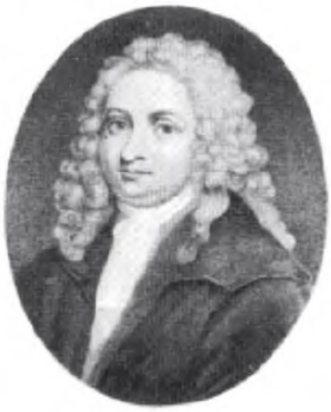
O escocês James Gregory (1638-1675) teve um grande papel no estudo de Séries, pois, foi o primeiro a diferenciar uma Série convergente e uma Série Divergente. Ademais, Eves (4) conta que Gregory fez a expansão em série infinita de $\arctan x, \tan x$ e $\operatorname{arcsec} x$. Por sua vez, o matemático britânico Brook Taylor (1685-1731) foi responsável por criar um método de expansão de funções em Séries de Potências. Em 1715, Taylor publicou em seu *Methodus incrementorum directa it inversa* a Série que hoje conhecemos como a Série de Taylor,

$$f(x+a) = f(a) + f'(a)x + f''(a)\frac{x^2}{2!} + f'''(a)\frac{x^3}{3!} + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{x^n}{n!} + \cdots$$

que possui um caso especial que é conhecida como Série de Maclaurin. Segundo Boyer (3), Colin Maclaurin (1698-1746), um matemático escocês, é lembrado por causa de um resultado em análise no qual ele tinha sido antecipado por outros. Em 1742, em seu *Treatise of fluxions*, aparece a Série de Maclaurin, que é um caso especial da Série de Taylor quando substituimos a por zero. Boyer (3) completa que Taylor não sabia sobre isso mas James

Gregory já conhecia essa Série. E, a Série de Maclaurin já havia aparecido no *Methodus differentialis* de James Stirling (1692-1770), que trouxe avanços relevantes para o estudo de convergência de Séries Infinitas e das funções especiais definidas por Séries.

Figura 3 – Colin Maclaurin



Fonte: Eves (2011)

Durante o século XVIII, Leonhard Euler (1707-1783) foi outro estudioso que se aprofundou no conteúdo de Séries Infinitas. Segundo Eves (4), tinha pouco cuidado na utilização das Séries, fazendo aplicações a elas que só eram válidas com somas finitas. Para mais, Euler considerava as Séries de Potências como polinômios de grau infinito e acabava contando com a sorte para chegar em resultados profundos e verdadeiros.

Figura 4 – Leonhard Euler

Fonte: Eves (2011)

Quando estamos diante a uma Série, um dos estudos que podemos fazer com ela é verificar a sua convergência, ou seja, observar se a soma de seus termos aproxima-se de um valor finito. Eves (4) conta que o primeiro a fazer essa investigação foi o alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855), em 1812, no seu artigo sobre Séries Hiporgeométricas. Outro intelectual que teve uma grande colaboração do estudo da convergência de uma Série foi o matemático Francês Augustin-Louis Cauchy (1789-1857). Inclusive um dos métodos utilizados para determinar se uma Série é convergente é o Critério do n-ésimo termo, ou, o Critério de Cauchy, que leva o seu nome devido ao rigor que ele introduziu no estudo das séries.

Niels Henrik Abel (1802-1829), um matemático noruguês, colaborou bastante no trabalho de Cauchy, já que Abel forneceu teoremas fundamentais sobre o estudo do limite das Séries de Potências, que hoje chamamos de Teorema de Abel. O alemão Karl Weierstrass (1815-1897), tem como sua contribuição matemática mais conhecida a teoria das funções complexas por meio de Séries de Potências. Segundo Eves (4), ele pôs em prática com vigor uma extensão ao plano complexo de uma ideia tentada anteriormente por Joseph-Louis Lagrange (1736-1813).

Assim, podemos observar que o desenvolvimento de conceitos relacionados Séries e Séries de Potências não ocorreram de forma isolada, mas veio de uma construção coletiva ao longo do tempo com diversos intelectuais. Essa colaboração vem desde a antiguidade com as primeiras noções de Séries Geométricas e Aritméticas até progressos fundamentais de matemáticos como Newton, Leibniz, Taylor, Maclaurin, Euler, Gauss, Cauchy, Abel e Weierstrass, cada um contribuindo de maneira significativa para a consolidação da Análise Matemática. Esse percurso histórico descrito nos mostra a importância do estudo das Séries e Séries de Potências para diversos temas na área da Matemática, como resolução de Equações Diferenciais e a teoria das funções complexas.

3 FUNDAMENTOS

Neste capítulo, apresentamos os principais conceitos sobre Sequências Numéricas, Séries infinitas e Séries de Potências, além de abordar suas extensões ás Séries de Taylor e de Maclaurin. São noções fundamentais no estudo do método de resolução de Equações Diferenciais Ordinárias por meio de Séries de Potências, que constitui o objeto de estudo deste trabalho. Neste capítulo utilizaremos como base as referências (1) e (5), que servem como recomendação caso queira se aprofundar no tema.

3.1 SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS

Uma sequência ou sucessão de números é uma função

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

que relaciona um número natural n a um número real *f(n)*.

É denominado de n-ésimo termo ou termo geral de uma sequência f o valor de uma sequência f e que pode ser representado por $\mathrm{a}_n, b_n, x_n, etc.$ Para simplificar, iremos utilizar como representação a_n para referenciar o termo geral de uma sequência, de modo que,

$$f(n) = a_n.$$

Portanto, uma sequência se define como uma lista ordenada que apresenta infinitos números. Uma sequência pode ser denotada como $(a_n), n \in \mathbb{N}$ ou simplesmente (a_n). Podemos representar sequências da seguinte forma:

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_i, \ldots).$$

Exemplo 3.1. Considere a sequência $a_n = \frac{1}{n}$. Os termos dela são $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots$

Sobre a classificação das sequências numéricas, ela é dada de acordo com o comportamento de seus termos. Dizemos que uma sequência (a_n) é limitada superiormente quando existir um número real C, denominado cota superior da sequência, que atende à seguinte condição

$$a_n \leq C \ , \quad \forall n.$$

Já para uma sequência (a_n) que é limitada inferiormente, existe um número real c, denominado cota inferior da sequência, que atende à seguinte condição

$$a_n \geq c \ , \quad \forall n.$$

Dizemos que uma sequência (a_n) é limitada quando os dois casos citados anteriormente ocorrerem de forma simultânea, ou seja, quando uma constate positiva K, que serve como um limite superior para os termos da sequência, atender à seguinte condição

$$|a_n| \leq K, \quad \forall n.$$

Exemplo 3.2. Considere a sequência $a_n = (-1)^n$. Note que ela é limitada, pois, seus valores sempres estão entre -1 e 1.

Denominamos uma sequência (a_n) de monótona não descrescente quando

$$a_n \leq a_{n+1}, \quad \forall n,$$

isto é,

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots$$

Exemplo 3.3. Considere a sequência $a_n = n$. Note que ela é uma sequência monótona não decrescente já que $1 \leq 2 \leq 3 \leq 4 \leq \ldots$

Já uma sequência (a_n) é dita como monótona não crescente quando

$$a_n \geq a_{n+1}, \quad \forall n,$$

isto é,

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots$$

Exemplo 3.4. Considere a sequência $a_n = \frac{1}{n}$. Note que ela é uma sequência monótona não crescente já que $1 \geq \frac{1}{2} \geq \frac{1}{3} \geq \frac{1}{4} \geq \cdots$.

Conforme Matos (1), quando ocorrerem as desigualdades $<$ e $>$ ao em vez de $\leq e \geq$, respectivamente, denominamos a sequência de monótona crescente ou monótona decrescente, conforme o caso.

Ao analisar uma sequência é necessário identificar se esta é convergente, isto é, se os seus termos estão se aproximando de um determinado número à medida que o índice dessa sequência vai aumentando. Para essa análise é preciso estudar o limite da sequência.

Definição 3.1. Uma sequência (a_n) é chamada de **convergente** se existe um número real L tal que os termos a_n se aproximam de L à medida que n cresce. Em outras palavras, dizemos que L é o **limite** de (a_n) quando:

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \, n_0 \in \mathbb{N} \ \text{ tal que } \quad |a_n - L| < \varepsilon, \forall n \geq n_0.$$

Exemplo 3.5. Considere a sequência $a_n = \frac{1}{n}$. Note que:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Sendo assim, dizemos que a sequência a_n converge para 0.

3.2 SÉRIES

Após os estudos sobre os principais conceitos e propriedades relacionados às Sequências Numéricas, podemos prosseguir para o estudo das Séries, já que uma Série nada mais é que uma soma dos termos de uma Sequência.

Dada uma sequência numérica (a_n), a soma infinita

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

será representada da seguinte forma: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ que pode ser chamada de série infinita, ou simplesmente, série.

Quando vamos analisar uma série, utilizamos ferramentas para determinar se aquela série é convergente (somável) ou divergente (não somável). E para isso, consideramos a sequência de somas parciais daquela Série. É necessário realizar o estudo da convergência da sequência de somas parciais da Série para determinar se uma Série é convergente ou divergente, que representamos da seguinte forma:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n.$$

De acordo com Matos (1), dizemos que a Série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \,,$$

é convergente quando a sequência (S_n) de suas somas parciais for convergente. Isto é, a soma da série é o limite da sequência (S_n), ou seja:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Na situação que essa situação não ocorrer, ou seja, quando a série não for convergente denominamos ela de divergente. Em outras palavras, a sequência (S_n) de suas somas parciais é divergente, ou seja, não tem limite ou $(S_n) \to \pm\infty$.

Exemplo 3.6. Considere a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots$$

Note que essa série é convergente, pois, $\frac{1}{n^2} \to 0$

Exemplo 3.7. Considere a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots$$

Note que essa série é divergente, pois, $S_n \to \infty$ quando $n \to \infty$.

Ainda falando sobre a convergência de uma série, existem dois casos específicos sobre esse tópico. Dizemos que uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente quando a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

for convergente. Por outro lado, dizemos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é condicionalmente convergente quando for convergente e

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

for divergente.

Dentre as Séries mais estudadas, podemos destacar: as séries geométricas, que possui a forma $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha r^{n-1}$; a série harmônica que é representada por $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, e as séries de encaixe que são do tipo $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1})$.

Como existem diferentes tipos de séries, cabe também a diferentes métodos utilizados para determinar se uma série classifica-se como convergente ou divergente. Como exemplo: podemos citar o método do n-ésimo termo, o critério da cauda e critério da comparação direta. Já que o foco é falar sobre Séries de Potências é importante entender o Critério da Razão, indispensável para melhor compreensão das Séries de Potências e suas aplicações.

3.2.1 Critério da Razão

Dada uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, com $a_n \neq 0, \forall n$, seja

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

(a) Se $L < 1$, então a série converge absolutamente;

(b) Se $L > 1$ ou $L = \infty$, então a série diverge.

Exemplo 3.8. Tomemos como exemplo a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ para utilizar o teste da razão para verificar sua convergência. Seja

$$a_n = \frac{n!}{n^n},$$

podemos aplicar no teste da razão da seguinte forma:

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}}.$$

Simplificando nossa expressão, ficamos com o seguinte

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)! \cdot n^n}{n! \cdot (n+1)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1) \cdot n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^n = \frac{1}{e}$$

Sendo assim, a série converge, pois

$$L = \frac{1}{e} \approx 0,367 < 1.$$

3.3 SÉRIES DE POTÊNCIAS

Nesta seção, iremos falar sobre Séries de Potências, que é um importante instrumento dentro da Análise Matemática, que pode ser utilizada para representar funções e na resolução de Equações Diferenciais Ordinárias. Dito isso, uma Série de Potência é uma Série em que os termos possuem potências de uma variável x. São Séries de Potências as séries do tipo:

$$c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \cdots + c_n(x - x_0)^n + \cdots ,$$

que pode ser representada da seguinte forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n.$$

Nessa Série, dizemos que o número real x_0 é o centro da série. Além disso, os números c_n são denominados de coeficientes. Existem algumas séries de potências em que o valor de x_0 é igual a 0, com isso elas podem ser escritas assim:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

Conforme Matos (1), ao trabalhar com Séries de Potências temos uma perguntas chave. Para pra quais valores reais de x a série é convergente? Toda Série de Potência da primeira forma mostrada é convergente quando $x = x_0$, sendo assim, a soma da série igual a c_0. Os valores de x que tornam a série convergente formam o domínio de uma função f, que é dada por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n,$$

na qual a função é aproximada pelas Somas Parciais S_n da série, que são polinômios.

É importante destacar que quando

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n = 0$$

então,

$$c_n = 0.$$

3.3.1 Intervalo de Convergência

Para determinar quais os valores de x a Série converge, utilizamos o Critério da Razão, que como citado anteriormente é dado por

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

Como dito anteriormente, uma Série de Potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ converge apenas quando $x = x_0$. Segundo Matos (1), pode convergir absolutamente em qualquer valor de x, ou, no intervalo $|x - x_0| < R$. Além disso, a Série é divergente quando $|x - x_0| > R$, podendo ser convergente ou não nos extremos desse intervalo. Esse R é um número real que denominamos raio de convergência da série e o intervalo correspondente é chamado de intervalo de convergência. Esse intervalo de convergência pode ser de diferentes tipos, que são:

$$(x_0 - R, x_0 + R),\ [x_0 - R, x_+R),\ (x_0 - R, x_0 + R] \text{ ou } [x_0 - R, x_0 + R],$$

dependendo da convergência ou não da série nos extremos do intervalo.

3.3.2 Derivação termo a termo

Com o estudo da convergência das Série de Potências, é possível entender melhor algumas de suas propriedades mais importantes, que é a derivação e integração termo a termo dentro do intervalo de convergência. Se uma Série de Potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$, converge para valores de x que pertencem ao intervalo $(x_0 - R, x_0 + R)$, então a série obtida pela derivação ou integração termo a termo também converge no mesmo intervalo. A derivada de uma Série de Potências é dada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x - x_0)^{n-1}.$$

Continuando na derivação termo a termo, podemos encontrar a derivada de segunda ordem que é representada assim:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n(x-x_0)^{n-2}$$

O estudo dessa propriedade é fundamental na resolução de uma EDO utilizando as Séries de Potências, pois, a derivação termo a termo vai permitir substituir na EDO uma série que represente a solução, como vamos estudar n tópico a seguir.

3.3.3 Séries de Potências na resolução de EDO

Definição 3.2. Uma equação que relaciona derivadas de funções ainda não determinadas, em relação a uma variável independente é denominada equação diferencial ordinária (EDO).

Como disse Matos (1), uma Equação Diferencial Ordinária define-se como "uma equação que envolve uma função desconhecida e suas derivadas ordinárias." Podemos representar assim uma Equação Diferencial Ordinária:

$$F(x, y, y') = 0$$

onde x é a variável independente e $y = y(x)$ é uma função que queremos encontrar. Ainda podemos representar uma EDO das seguintes formas:

a) Forma normal: $y' = f(x, y)$

b) Forma diferencial: $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$

Podemos classificar as EDO de acordo com sua **ordem**, que nada mais é que a maior ordem da derivada que está presenta na equação. Neste trabalho, a que será base para nosso estudo será a Equação Diferencial Ordinária Linear de Segunda Ordem que é representada da seguinte forma:

$$P(x) \cdot y'' + Q(x) \cdot y' + R(x) \cdot y = 0$$

Note que para o coeficiente $P(x) \neq 0$, podemos dividir a equação toda por esse fator e chegamos nessa EDO

$$y''(x) + \frac{Q(x)}{P(x)}y' + \frac{R(x)}{P(x)}y = 0$$

Levando em consideração essa EDO, dizemos que um ponto x_0 é um ponto ordinário quando $P(x_0) \neq 0$. Neste caso, as funções $\frac{Q(x)}{P(x)}$ e $\frac{R(x)}{P(x)}$ são funções analíticas nesse ponto, ou seja, quando elas podem ser desenvolvidas por Séries de Potências.

Definição 3.3. Dizemos que um ponto x_0 é um **ponto ordinário** ou não-singular da equação diferencial (1) se $P(x)$ e $R(x)$ são analíticas em x_0. Um ponto que não é um ordinário é considerado como um **ponto singular** da equação.

No estudo do uso das Séries de Potências para encontrar a solução de uma EDO de segunda ordem com coeficientes variáveis em torno de um ponto ordinário, torna-se necessário entender em quais condições esse método pode ser utilizado. Para isso, é necessário compreender o Teorema, que garante a existência de uma solução em forma de série.

Teorema 3.1. *Se x_0 for um ponto ordinário da equação diferencial*

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0,$$

ou seja, se $p(x) = Q(x)/P(x)$ e $q(x) = R(x)/P(x)$ forem analíticas em x_0 então a solução geral da equação será

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n = c_0 y_1(x) + c_1 y_2(x),$$

em que c_0 e c_1 são arbitrários, e y_1 e y_2 são duas soluções em séries de potências que são analíticas em x_0. As soluções y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções. Além disso, o raio de convergência de cada uma das soluções em série y_1 e y_2 é pelo menos tão grande quanto o mínimo dos raios de convergência das séries para p e q.

Esse teorema garante que quando os coeficientes da EDO são funções analíticas em um ponto x_0, existe pelo menos uma solução que pode ser representada por uma Série de Potência centrada nesse ponto.

Com esse entendimento, podemos prosseguir e demonstrar como encontrar a solução de uma EDO de segunda ordem com coeficientes variáveis em torno de um ponto ordinário x_0. Primeiramente, suponhamos que a solução $y(x)$ da EDO pode ser escrita em forma de Série de Potências, assim

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n.$$

O segundo passo é fazer a derivação termo a termo da Série de Potências, como mostrado anteriormente

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x - x_0)^{n-1}$$

e,

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n(x - x_0)^{n-2}$$

.

Em seguida, substituímos esses termos na EDO

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0.$$

e assim encontramos uma Série de Potências única. Em seguida, utilizamos a relação de recorrência para determinar seus coeficientes.

Exemplo 3.9. Consideremos a seguinte EDO,

$$y'' + 2xy = 0.$$

Note que essa é uma EDO de segunda ordem com coeficientes variáveis, pois perceba que

- Coeficiente de y'': 1 (constante);
- Coeficiente de y': 0;
- Coeficiente de y: $2x$ (função polinomial de primeiro grau).

Agora, vamos supor que

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

Sendo assim,

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}$$

.

O próximo passo, é substituir esses termos na nossa EDO, portanto, temos que

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + 2x \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0.$$

Perceba que podemos colocar o $2x$ dentro do somatório, realizando a multiplicação, logo

$$\sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1)x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} 2c_n x^{n+1} = 0.$$

Note que nos dois somatórios x não está elevado ao mesmo valor, para facilitar, vamos fazer com que ele fique com a mesma potência. Para isso, vamos usar $k = n - 2$ no primeiro somatório e $k = n + 1$ no segundo.Então, note que

- 1º caso: $k = n - 2$, então, $n = k + 2$;

- 2º caso: $k = n + 1$, então, $n = k - 1$.

Sendo assim, nossa soma fica da seguinte forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_{k+2}(k+2)(k+1)x^k + \sum_{k=1}^{\infty} 2c_{k-1}x^k = 0.$$

Agora, conseguimos deixar o termo x com a mesma potência, o próximo passo é deixar o índice dos dois somatórios iguais. Para isso, vamos relembrar que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Então, usando essa propriedade na nossa solução, fazemos o seguinte

$$c_{0+2}(0+2)(0+1)x^0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_{k+2}(k+2)(k+1)x^k + \sum_{k=1}^{\infty} 2c_{k-1}x^k = 0.$$

Simplificando o primeiro termo, temos que

$$2 \cdot c_2 + \sum_{k=1}^{\infty} c_{k+2}(k+2)(k+1)x^k + \sum_{k=1}^{\infty} 2c_{k-1}x^k = 0.$$

Agora, que os dois somatórios possuem o mesmo índice, podemos transformá-los em um só, da seguinte forma

$$c_2 2 + \sum_{k=1}^{\infty} [c_{k+2}(k+2)(k+1) + 2c_{k-1}]x^k = 0.$$

Observe que o termo x^k está em evidência, já que ele estava nas duas parcelas da soma. Note que isso é uma Série de Potências que resulta em 0, ou seja, a primeira parcela e a segunda parcela são iguais a 0. Sendo assim,

- Na 1º parcela, temos que $c_2 = 0$;
- Na 2º parcela, temos que $c_{k+2}(k+2)(k+1) + 2c_{k-1} = 0$.

Sendo assim, já podemos concluir que $c_2 = 0$. Já no 2º termo, vamos isolar o coeficiente com maior índice, ou seja, o c_{k+2} e chegamos na seguinte relação

$$c_{k+2} = -\frac{2c_{k-1}}{(k+2)(k+1)}, \quad k \geq 1.$$

Chamamos essa relação de fórmula de recorrência. A fórmula de recorrência serve apenas para $k \geq 1$, já que o somatório inicia no mesmo valor. Em seguida, precisamos determinar os coeficientes. Então, temos o seguinte

- c_0 e c_1 são arbitrários;
- $c_2 = 0$.

Além dessas informações, olhando nossa fórmula de recorrência, podemos notar que c_{k+2} é dado em função de c_{k-1}. Logo, os coeficientes são dados de três em três, ou seja, c_0 determina c_3 que determina $c_6,\cdots$; c_1 determina c_4 que determina $c_7,\cdots$; e c_2 determina o c_5 que determina o c_8, $\cdots$. Mas sabemos que $c_2 = 0$, então, chegamos a conclusão que $c_2 = c_5 = c_8 = c_11 = \cdots = 0$.

Para a sequência $c_0, c_3, c_6, \cdots$, vamos utilizar $k = 1, 4, 7, \cdots$ na nossa fórmula de recorrência. Então, temos

- Para k=1:
$$c_3 = -\frac{2c_0}{3 \cdot 2} = -\frac{c_0}{3}.$$
- Para k=4:
$$c_6 = -\frac{2c_3}{6 \cdot 5} = -\frac{2(\frac{-c_0}{3})}{30} = \frac{c_0}{45}.$$
- Para k=7:
$$c_9 = -\frac{2c_6}{9 \cdot 8} = -\frac{2\left(\frac{c_0}{45}\right)}{72} = -\frac{c_0}{1620}.$$

Observando os resultados, podemos notar que eles sugerem que a fórmula geral seja

$$c_{3n} = \frac{(-1)^n 2^n c_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdots (3n-1)(3n)}, \quad n \geq 1.$$

Agora vamos observar a sequência $c_1, c_4, c_7, \cdots$, utilizando $k = 2, 5, 8, \cdots$ na nossa fórmula de recorrência. Então, temos

- Para k=2:
$$c_4 = -\frac{2c_1}{4 \cdot 3} = -\frac{c_1}{6}$$
- Para k=5:
$$c_7 = -\frac{2c_4}{7 \cdot 6} = -\frac{2(\frac{-c_1}{6})}{42} = \frac{c_1}{126}$$
- Para k=8:
$$c_{10} = -\frac{2 \cdot \frac{c_1}{126}}{90} = -\frac{2c_1}{11340} = -\frac{c_1}{5670}$$

Observando os resultados, podemos notar que eles sugerem que a fórmula geral seja

$$c_{3n+1} = \frac{(-1)^n 2^n c_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdots (3n)(3n+1)}, \quad n \geq 1.$$

Agora usando o Teorema 2.1, podemos escrever a solução geral da equação $y''+2xy = 0$ da seguinte forma:

$$y(x) = c_0 \left[1 - \frac{2x^3}{2 \cdot 3} + \frac{2^2 x^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} - \cdots + \frac{(-1)^n 2^n x^{3n}}{2 \cdot 3 \cdots (3n-1)(3n)} + \cdots \right]$$

$$+ c_1 \left[x - \frac{2x^4}{3 \cdot 4} + \frac{2^2 x^7}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} - \cdots + \frac{(-1)^n 2^n x^{3n+1}}{3 \cdot 4 \cdots (3n)(3n+1)} + \cdots \right]$$
$$= c_0 y_1(x) + c_1 y_2(x).$$

Encontradas as soluções em Séries da EDO, podemos aplicar o Teste da Razão e encontramos que ambas as séries convergem em $x \in \mathbb{R}$, sendo assim, são soluções válidas da EDO.

4 APLICAÇÕES

No capítulo anterior, abordamos um breve estudo sobre Séries de Potências, estudando melhor sua definição, propriedades e critérios de convergências, além de explorar os processos de derivação termo a termo e demonstrar como utilizar as Séries de Potências para encontrar a solução de Equações Diferenciais Ordinárias de Segunda Ordem com Coeficientes Variáveis. Com base nesses fundamentos, este capítulo tem como propósito investigar as aplicações das Séries de Potências na resolução de Equações Diferencias Ordinárias (EDO).

O método de Séries de Potências na resolução de EDO é uma ferramenta analítica muito importante na área da Matemática, pois, ele permite que representamos a solução em forma de séries infinitas, sendo muito útil quando não podemos utilizar funções elementares. Nesta seção, vamos mostrar como resolver duas Equações muito importantes na área da Matemática, Equação de Airy e Equação de Legendre, utilizando as Séries de Potências para encontrar as soluções das duas EDO citadas.

4.1 EQUAÇÃO DE AIRY

Uma das EDOs de segunda ordem, que possui os coeficientes variáveis, mais conhecidas na área da Matemática é a Equação de Airy, que leva o nome do matemático e astrônomo inglês George Biddel Airy (1801-1892). É uma equação que surge de forma natural em diversos fenômenos. Zill (6) afirma que ela pode ser encontrada no estudo da difração de luz, difração de ondas de rádio em torno da superfície da Terra, aerodinâmica e deflexão de uma coluna vertical fina e uniforme. Ela é dada por

$$y'' - xy = 0.$$

Observando a equação podemos chegar a conclusão de que seus coeficientes não são constantes. Dessa forma, ela não possui solução em termos de funções elementares, fazendo com que as Séries de Potências sejam eficazes para encontrar sua solução.

Para essa equação temos que $P(x) = 1$, $Q(x) = 0$ e $R(x) = -x$, logo, todo ponto é ordinário. Para encontrar a solução dessa EDO vamos supor que $y(x)$ pode ser escrita em forma de Série de Potências centrada em $x_0 = 0$. Dessa forma,

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

e,
$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}.$$
.

Substituindo y'' e y na EDO, ficamos com o seguinte
$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_{n+2}x^{n-2} - x\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_{n+2}x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} = 0$$

Agora, para deixar x^{n-2} e x^{n+1} com a mesma potência, vamos igualar $k = n-2$ no primeiro termo e $k = n+1$ no segundo. Então, ficaremos com o seguinte
$$\sum_{k=0}^{\infty} c_{k+2}(k+2)(k+1)x^k - \sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1}x^k = 0.$$

Seguindo, precisamos igualar o índice dos dois somatórios. Para isso, basta encontrar o termo quando $k = 0$ no primeiro somatório e retirá-lo, da seguinte forma
$$c_2 2 + \sum_{k=1}^{\infty} c_{k+2}(k+2)(k+1)x^k - \sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1}x^k = 0.$$

Como os dois somatórios estão com o mesmo índice, podemos juntá-los em um só, assim
$$c_2 2 + \sum_{k=1}^{\infty}[c_{k+2}(k+2)(k+1) - c_{k-1}]x^k = 0.$$

Então, podemos notar que $c_2 = 0$ e agora basta isolar c_{k+2} para encontrar a fórmula de recorrência. Então,
$$c_{k+2} = \frac{c_{k-1}}{(k+2)(k+1)}, \quad k \geq 1.$$

Prosseguindo, precisamos encontrar nossos coeficientes. Como já dito, c_0 e c_1 são livres e $c_2 = 0$. Observando a fórmula de recorrência, $c_k + 2$ é dado em função de $c_k - 1$. Sendo assim, os coeficientes são dados de três em três. Então já sabemos que $c_2 = c_5 = c_8 = \ldots = 0$.

Para a sequência $c_0, c_3, c_6, \cdots$, vamos utilizar $k = 1, 4, 7, \cdots$ na nossa fórmula de recorrência. Então, temos que

- Para k=1:
$$c_3 = \frac{c_0}{3 \cdot 2}.$$

- Para k=4:
$$c_6 = \frac{c_3}{6 \cdot 5} = \frac{c_0}{6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2}.$$
- Para k=7:
$$c_9 = \frac{c_6}{9 \cdot 8} = \frac{c_0}{9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2}.$$

Para a sequência $c_1, c_4, c_7, \cdots$, vamos utilizar $k = 2, 5, 8, \cdots$ na nossa fórmula de recorrência. Então, temos que

- Para k=2:
$$c_4 = \frac{c_1}{4 \cdot 3}.$$
- Para k=5:
$$c_7 = \frac{c_4}{7 \cdot 6} = \frac{c_1}{7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3}.$$
- Para k=8:
$$c_{10} = \frac{c_7}{9 \cdot 8} = \frac{c_0}{9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2}.$$

Sendo assim, a solução geral da Equação de Airy é

$$\begin{aligned} y(x) = c_0 &\left[1 + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} + \cdots + \frac{x^{3n}}{2 \cdot 3 \cdots (3n-1)(3n)} + \cdots\right] \\ +c_1 &\left[x + \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \frac{x^7}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \cdots + \frac{x^{3n+1}}{3 \cdot 4 \cdots (3n)(3n+1)} + \cdots\right] \\ &= c_0 y_1(x) + c_1 y_2(x). \end{aligned}$$

Desse modo, a combinação linear $c_0y_1(x) + c_1y_2(x)$ é a solução geral da Equação de Airy $y'' - xy = 0$. Aplicando o Teste da Razão encontramos que as séries convergem em $x \in \mathbb{R}$, garantindo que são soluções válidas.

Ainda que y_1 e y_2 não sejam funções elementares conhecidas na área do Cálculo, elas são de extrema importância em áreas como Física e Engenharia, fazendo com que muitos da comunidade científica utilizem elas e estudem suas propriedades.

4.2 EQUAÇÃO DE LEGENDRE

A segunda EDO que será aplicado o método utilizando as Séries de Potências é conhecida como uma das funções especiais no ramo da Matemática. Segundo (6) , essas funções especiais (ou funções com nome) seriam um efeito colateral: algum estudioso estava buscando uma solução para uma EDO ultraespecífica que surgia de um problema físico.

A equação que será estudada é a Equação de Legendre, que leva o nome do matemático francês Adrien-Marie Legendre (1752-1833), que pode ser encontrada em estudos na área de Eletromagnetismo e seus resultados são objetos de estudo de atração de esferoides.

A EDO de Legendre é dada da seguinte forma

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0,$$

no qual α é qualquer inteiro positivo. Note que podemos dividir toda a equação por $(1-x^2)$, válida para $|x| < 1$, obtemos:

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2}y' + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1-x^2}y = 0.$$

Seguindo, podemos observar estamos diante de uma EDO de segunda ordem na qual seus coeficientes são variáveis. E, analisando seus coeficientes $\frac{-2x}{1-x^2}$ e $\frac{\alpha(\alpha+1)}{1-x^2}$ concluímos que são funções analíticas em uma vizinhança de $x = 0$, que é ponto ordinário da equação. Sendo assim, podemos utilizar as Séries de Potências para encontrar a solução dessa equação.

Admitimos que a solução seja da forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

e, derivando termo a termo, obtemos,

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1},$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}.$$

Substituindo na Equação de Legrenge, temos o seguinte

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y$$

$$= (1-x^2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - 2x\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} + \alpha(\alpha+1)\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0.$$

Desenvolvendo, podemos encontrar a seguinte equação

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - x^2\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} 2n c_n x^n + \alpha(\alpha+1)\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2n c_n x^n + \alpha(\alpha+1)\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0.$$

Note que a primeira parcela é a única na qual o termo x não está elevando apenas a n. Para facilitar, vamos fazer com que $k = n - 2$. Então, a primeira parcela fica assim

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}x^k$$

Substituindo de volta n no lugar de k, chegamos a seguinte expressão

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n - \sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^n - \sum_{n=1}^{\infty}2nc_nx^n + \alpha(\alpha+1)\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n = 0$$

Agora, queremos deixar todos os somatórios com o índice igual a 2. A segunda parcela já está como queremos, então vamos fazer os procedimentos necessários para deixar as outras três parcelas da mesma forma.

No primeiro somatório, vamos descobrir os valores quando $n = 0$ e $n = 1$.

- Para n=0:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n &= (0+2)(0+1)c_{0+2}x^0\\ &= 2\cdot 1\cdot c_2\cdot 1 = 2c_2.\end{aligned}$$

- Para n=1:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n &= (1+2)(1+1)c_{1+2}x^1\\ &= 3\cdot 2\cdot c_3\cdot x = 6c_3x.\end{aligned}$$

Com isso, o primeiro somatório fica da seguinte forma

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n = 2c_2 + 6c_3x + \sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n$$

Seguindo, vamos realizar o mesmo procedimento com o terceiro somatório e encontrar o valor quando $n = 1$. Então, temos que

- Para n=1:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}2nc_nx^n &= 2\cdot 1\cdot c_1\cdot x^1\\ &= 2c_1x.\end{aligned}$$

Consequentemente, o terceiro somatório fica assim

$$\sum_{n=1}^{\infty}2nc_nx^n = 2c_1x + \sum_{n=2}^{\infty}2nc_nx^n.$$

No último somatório, precisamos descobrir os valores do somatório quando $n = 0$ e $n = 1$.

- Para n=0:

$$\begin{aligned}\alpha(\alpha+1)\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n &= \alpha(\alpha+1)\cdot c_0 \cdot x^0\\ &= \alpha(\alpha+1)\cdot c_0.\end{aligned}$$

- Para n=1:

$$\begin{aligned}\alpha(\alpha+1)\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n &= \alpha(\alpha+1)\cdot c_1 \cdot x^1\\ &= \alpha(\alpha+1)\cdot c_1 \cdot x.\end{aligned}$$

Com isso, nosso quarto somatório fica assim

$$\alpha(\alpha+1)\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \alpha(\alpha+1)c_0 + \alpha(\alpha+1)c_1 x + \alpha(\alpha+1)\sum_{n=2}^{\infty} c_n x^n.$$

Após deixarmos todos os somatórios com o mesmo índice com $n = 2$, vamos substituir na nossa equação

$$2c_2 + 6c_3 x + \sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n$$

$$-2c_1 x - \sum_{n=2}^{\infty} 2nc_n x^n + \alpha(\alpha+1)c_0 + \alpha(\alpha+1)c_1 x + \alpha(\alpha+1)\sum_{n=2}^{\infty} c_n x^n = 0.$$

Colocando alguns termos em evidência e juntando os somatórios, chegamos a essa nova expressão

$$\begin{gathered}[2c_2 + \alpha(\alpha+1)c_0] + [6c_3 - [\alpha(\alpha+1) - 2]\, c_1]\cdot x\\ + \sum_{n=2}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)c_{n+2} + \{-n(n-1) - 2n + \alpha(\alpha+1)\}\, c_n\right] x^n = 0.\end{gathered}$$

Para que essa igualdade se satisfaça, as três parcelas precisam ser iguais a 0. Sendo assim, isso implica que

- Na primeira parcela

$$2c_2 + \alpha(\alpha+1)c_0 = 0.$$

- Na segunda parcela

$$6c_3 - [\alpha(\alpha+1) - 2]\, c_1 = 0.$$

- Na terceira parcela

$$\left[(n+2)(n+1)c_{n+2} + \{-n(n-1) - 2n + \alpha(\alpha+1)\}\, c_n\right] = 0.$$

Desenvolvendo o 1º caso, temos que

$$2c_2 = -\alpha(\alpha+1)c_0$$

$$c_2 = \frac{-\alpha(\alpha+1)c_0}{2!}.$$

No 2º caso, usando produtos notáveis, temos que

$$6c_3 = [\alpha(\alpha+1) - 2]\, c_1$$

$$c_3 = \frac{[\alpha(\alpha+1) - 2]\, c_1}{6} = \frac{(\alpha-1)(\alpha+2)c_1}{3!}.$$

E no último caso, obtemos

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} = -\{-n(n-1) - 2n + \alpha(\alpha+1)\}\, c_n.$$

Isolando c_{n+2}, obtemos

$$c_{n+2} = \frac{-\{-n(n-1) - 2n + \alpha(\alpha+1)\}\, c_n}{(n+2)(n+1)} = \frac{[n(n+1) - \alpha(\alpha+1)]\, c_n}{(n+2)(n+1)}$$

$$= \frac{(\alpha-n)(\alpha+n+1)}{(n+2)(n+1)} = 0; \quad n \geq 2.$$

Prosseguindo, vamos colocar alguns valores para n e aplicar na nossa fórmula de recorrência

- Para $n = 2$

$$c_4 = \frac{(\alpha-2)(\alpha+2+1)}{(2+1)(2+2)}c_2 = \frac{(\alpha-2)\alpha(\alpha+1)(\alpha+3)}{4!}c_0.$$

- Para $n = 3$

$$c_5 = \frac{(\alpha-3)(\alpha+3+1)}{(3+1)(3+2)}c_3 = \frac{(\alpha-3)(\alpha-1)(\alpha+2)(\alpha+4)}{5!}c_1.$$

- Para $n = 4$

$$c_6 = \frac{(\alpha-4)(\alpha+4+1)}{(4+1)(4+2)}c_4 = \frac{(\alpha-4)(\alpha-2)\alpha(\alpha+2)(\alpha+4)(\alpha+6)}{6!}c_0.$$

- Para $n = 5$

$$c_7 = \frac{(\alpha-5)(\alpha+5+1)}{(5+1)(5+2)}c_5 = \frac{(\alpha-5)(\alpha-3)(\alpha-1)(\alpha+1)(\alpha+3)(\alpha+5)}{7!}c_1.$$

Analisando os resultados, podemos notar que, para $|x| < 1$, encontramos as soluções da EDO em forma de Séries de Potências linearmente independentes. Podemos escrever a solução da seguinte forma

$$\begin{aligned} y(x) = c_0 \Bigg[1 - \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!}x^2 + \frac{(\alpha-2)\alpha(\alpha+1)(\alpha+3)}{4!}x^4 \\ - \frac{(\alpha-4)(\alpha-2)\alpha(\alpha+1)(\alpha+3)(\alpha+5)}{6!}x^6 + \dots \Bigg] \\ + c_1 \Bigg[x - \frac{(\alpha-1)(\alpha+2)}{3!}x^3 + \frac{(\alpha-3)(\alpha-1)(\alpha+2)(\alpha+4)}{5!}x^5 - \\ \frac{(\alpha-5)(\alpha-3)(\alpha-1)(\alpha+2)(\alpha+4)(\alpha+6)}{7!}x^7 + \dots \Bigg] \\ = c_0 y_1(x) + c_1 y_2(x). \end{aligned}$$

Dessa maneira, encontramos a solução geral da Equação de Legendre utilizando as Séries de Potências na vizinhança de $x = 0$. Conforme Zill (6), quando α assume um valor inteiro, alguma das séries y_1 e y_2 podem se tornar séries finitas, fato que está relacionado com o surgimento dos polinômios de Legendre. Como já dito no inicio deste tópico, essas soluções são de extrema importância para estudos de determinados problemas físicos.

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho, abordamos as Séries de Potências e sua utilização nas Equações Diferenciais Ordinárias, equações fundamentais na modelagem dos fenômenos mencionados. Diante disso, pôde-se notar que o método se mostrou uma ferramenta valiosa devido à ampla aplicabilidade.

O principal o objetivo do trabalho foi analisar o método de Séries de Potências como ferramenta para a solução de uma Equação Diferencial Ordinária. Com a realização dessa analise, foi possível perceber que o método é eficaz e uma excelente alternativa quando os principais métodos não são adequados.

Para alcançar esse objetivo, foram devidamente definidos os conceitos historicamente construídos de Sequências, Séries e Equações Diferenciais Ordinárias, Séries de Potências, bem como suas relações. A compreensão da evolução desses conceitos possibilitou uma melhor compreensão do desenvolvimento do método que foi constitui foco deste estudo.

Além disso, foi possível identificar em quais Equações Diferencias Ordinárias o método de Séries de Potências pode ser aplicado: EDO de segunda ordem cujos coeficientes são variáveis. Também, demonstramos o uso do método na resolução dessas equações e como ela pode ser empregada para para resolver equações clássicas na Matemática, mas que também aparecem em diversas áreas, como a Física.

No campo da Matemática, é fundamental conhecer diferentes maneiras de resolver determinados problemas, por isso oferece flexibilidade na formação acadêmica, e permite lidar com situações em que as ferramentas mais conhecidas não são eficazes. Neste trabalho, foram analisadas como utilizar as Séries de Potências para resolver a Equação de Airy e a Equação de Legendre, embora, o método possa ser aplicado em diferentes EDO lineares.

É importante destacar que este estudo mostra apenas uma pequena parte do conteúdo de relacionado às Séries de Potências e sua aplicação na resolução de EDOs. Sendo assim, trata-se de uma área muito promissora para investigações futuras. Em suma, o método das Séries de Potências revela-se uma ferramenta essencial no repertório de pesquisadores da área e de profissionais que trabalham com EDOs e modelagem matemática.

REFERÊNCIAS

1 MATOS, M. **Séries e Equações Diferenciais.** 11. ed. João Pessoa: Ciência Moderna, 2016.

2 ALVES, F. F. Equações diferenciais ordinárias e aplicações. **Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática)**, Ituitaba, p. 106, 2024.

3 BOYER, C. B. **História da Matemática. Tradução: Helena Castro**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012.

4 EVES, H. **Introdução à História da Matemática. Tradução: Hygino Hugueros Domingues**. 5. ed. Campinas: Unicamp, 2011.

5 BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C.; MEADE, D. B. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno.** 11. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2020.

6 ZILL, D. G. **Equações diferenciais com aplicações em modelagem. Tradução de Márcio Koji Umezawa.** 10. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016.