Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Doutorado em Matemática

Sobre uma Classe de Problemas em Espaços de Orlicz-Sobolev Envolvendo Crescimento Crítico Exponencial

por

Ozana da Silva Alencar

João Pessoa
2025

Sobre uma Classe de Problemas em Espaços de Orlicz-Sobolev Envolvendo Crescimento Crítico Exponencial

por

Ozana da Silva Alencar

sob a orientação do

Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo

e coorientação da

Profa. Dra. Elisandra de Fátima Gloss de Moraes

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática do CCEN/UFPB, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutora em Matemática.

João Pessoa

2025

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

A368s Alencar, Ozana da Silva.
Sobre uma classe de problemas em Espaços de Orlicz-Sobolev envolvendo crescimento crítico exponencial / Ozana da Silva Alencar. - João Pessoa, 2025.
119 f. : il.

Orientação: Uberlandio Batista Severo.
Coorientação: Elisandra de Fátima Gloss de Moraes.
Tese (Doutorado) - UFPB/CCEN.

1. Problemas não lineares. 2. Espaços de Orlicz-Sobolev. 3. Crescimento crítico exponencial. 4. Operador Phi-laplaciano. 5. Métodos variacionais. I. Severo, Uberlandio Batista. II. Moraes, Elisandra de Fátima Gloss de. III. Título.

UFPB/BC CDU 517.957(043)

Elaborado por RUSTON SAMMEVILLE ALEXANDRE MARQUES DA SILVA - CRB-15/0386

Ozana da Silva Alencar

Sobre uma Classe de Problemas em Espaços de Orlicz-Sobolev Envolvendo Crescimento Crítico Exponencial

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutora em Matemática.

Área de Concentração: Análise
Aprovada em: 20 de agosto de 2025

Banca Examinadora:

[redacted]

Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo (UFPB)
Orientador

[redacted]

Profa. Dra. Elisandra de Fátima Gloss de Moraes (UFPB)
Coorientadora

[redacted]

Profa. Dra. Yane Lísley Ramos Araújo (UFRPE)

[redacted]

Prof. Dr. Jefferson Abrantes dos Santos (UFCG)

[redacted]

Prof. Dr. Marcos Leandro Mendes Carvalho (UFG)

[redacted]

Prof. Dr. Everaldo Souto De Medeiros (UFPB)

João Pessoa
2025

Aos meus pais

Agradecimentos

A Deus, pela vida, pela saúde e pela força que me sustentaram em todos os momentos desta caminhada.

Aos meus pais, Maria e José, agricultores semianalfabetos que, com sabedoria, garra, amor e firmeza, moldaram o meu caráter. O esforço e a dignidade com que trabalharam foram a minha primeira e maior escola. Amo-vos com toda a minha alma.

Aos meus irmãos, cunhadas e sobrinhos, pelo carinho, pela presença constante em minha vida e pelas orações.

À minha orientadora, Elisandra Gloss, que dedicou muitas horas preciosas a este trabalho. Seu empenho, paciência e generosidade em partilhar o conhecimento foram fundamentais para que eu pudesse superar obstáculos que, para mim, pareciam intransponíveis. Agradeço não apenas pela orientação, mas também por ter estado ao meu lado, resolvendo comigo os problemas mais difíceis que enfrentei nessa jornada.

Ao meu orientador, Uberlandio Severo, pela orientação firme e responsável, pelas propostas de problemas a serem abordados e pelas contribuições decisivas que deram forma a este trabalho.

À CAPES, pelo apoio financeiro concedido por meio da bolsa de estudos, sem o qual este trabalho não teria sido possível.

Aos colegas de doutorado, pela convivência, pela troca de ideias e pelo apoio constante ao longo desta jornada.

À psicóloga, Dra. Erlayne Beatriz, pela escuta atenta e pelo suporte emocional que me ofereceu durante o último ano do meu doutorado.

Às pessoas que, em diferentes momentos desta caminhada, estiveram ao meu lado, oferecendo apoio emocional, ajudando em mudanças e compartilhando da rotina, mesmo que brevemente. Cada gesto de cuidado contribuiu, de alguma forma, para que eu chegasse até aqui.

Resumo

Esta tese trata da existência de soluções para uma classe de problemas elípticos não lineares definidos em espaços de Orlicz-Sobolev, com destaque para não linearidades envolvendo crescimento crítico exponencial. Inicialmente, são estabelecidos resultados fundamentais sobre tais espaços, que servem de base para a análise posterior. Em seguida, utilizando métodos variacionais e técnicas refinadas, demonstra-se a existência de soluções positivas para problemas semipositones com o operador Φ-laplaciano, superando dificuldades relacionadas à falta de homogeneidade do operador e o crescimento exponencial. Por fim, mostramos a existência de uma solução nodal de energia mínima com exatamente dois domínios nodais, ampliando resultados já existentes na literatura, ao considerar hipóteses mais gerais sobre o operador e a não linearidade envolvida.

Palavras-chave: Espaços de Orlicz-Sobolev; Crescimento crítico exponencial; Operador Φ-laplaciano; Métodos variacionais.

Abstract

This thesis addresses the existence of solutions for a class of nonlinear elliptic problems defined in Orlicz-Sobolev spaces, with emphasis on nonlinearities involving critical exponential growth. Initially, fundamental results concerning these spaces are established, serving as the foundation for the subsequent analysis. Then, by employing variational methods and refined techniques, the existence of positive solutions is demonstrated for semipositone problems involving the Φ-Laplacian operator, overcoming difficulties related to the operator's lack of homogeneity and the exponential growth of the nonlinearity. Finally, we establish the existence of a least energy nodal solution with exactly two nodal domains, extending existing results in the literature by considering more general assumptions on both the operator and the nonlinearity involved.

Keywords: Orlicz–Sobolev spaces; Critical exponential growth; Φ-Laplacian operator; Variational methods.

Sumário

Notação e Terminologia

Nesta tese são empregadas as seguintes notações e terminologias:

- $\rightharpoonup$, $\to$ convergência fraca e forte, respectivamente.
- $\hookrightarrow$ imersão.
- *q.t.p.* quase todo ponto.
- $\mathrm{supp}(f)$ suporte da função f.
- $\sim$ equivalência assintótica.
- $\equiv$ equivalência.
- $\ll$, $\gg$ muito menor do que e muito maior do que, respectivamente.
- $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$ contendo a origem.
- $\partial\Omega$ fronteira de Ω.
- $|A|$ medida de Lebesgue de um conjunto mensurável $A \subset \mathbb{R}^N$.
- A^c complemento do conjunto A.
- X^* espaço dual topológico de X.
- $B(R, x)$ bola aberta de centro x e raio R.
- χ_Ω função característica do conjunto Ω.
- $f = o(g)$, quando $t \to t_0$ se $\lim\limits_{t \to t_0} \left| \dfrac{f(t)}{g(t)} \right| = 0$.
- $u^+ = \max\{u, 0\}$. $u^- = \min\{u, 0\}$.
- $C(\Omega)$ espaço das funções contínuas em Ω.
- $C_0(\overline{\Omega})$ espaço das funções contínuas em $\overline{\Omega}$ que se anulam sobre $\partial\Omega$.
- $C^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$ espaço das funções k vezes continuamente diferenciáveis em Ω.

- $C^k(\overline{\Omega})$, espaço das funções $C^k(\Omega)$ tais que para todo multi-índice ζ, com $|\zeta| \leq k$, a função $x \mapsto D^{\zeta}u(x)$ admite extensão contínua para $\overline{\Omega}$.

- $C_c(\Omega)$ espaço das funções contínuas com suporte compacto em Ω.

- $C_c^k(\Omega) = C^k(\Omega) \cap C_c(\Omega)$; $C^{\infty}(\Omega) = \bigcap_{k\geq 1} C^k(\Omega)$; $C_c^{\infty}(\Omega) = C^{\infty}(\Omega) \cap C_c(\Omega)$.

- $C^{0,\tau}(\overline{\Omega}) = \left\{ u \in C(\overline{\Omega})\,;\ \sup\limits_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \dfrac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\tau}} < \infty \right\}$, $0 < \tau < 1$ espaço das funções Hölder contínuas em $\overline{\Omega}$ com expoente τ.

- $C^{k,\tau}(\overline{\Omega}) = \{u \in C^k(\overline{\Omega})\,;\ D^{\zeta}u(x) \in C^{0,\tau}$ para todo multi-índice ζ com $|\zeta| = k\}$.

- $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right)$ gradiente da função u.

- $\Delta_{\Phi} u = \operatorname{div}\left(\Phi'(|\nabla u|)\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)$ Φ-laplaciano da função u.

- $L^p(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}$ mensurável ; $\int_{\Omega} |u|^p dx < \infty\}$, $1 \leq p < \infty$.

- $\|u\|_p = (\int_{\Omega} |u|^p dx)^{1/p}$ norma no espaço $L^p(\Omega)$.

- $K^{\Phi}(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}$ mensurável ; $\int_{\Omega} \Phi(|u|)dx < \infty\}$ classe de Orlicz.

- $L^{\Phi}(\Omega) = \left\{u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mensurável} ;\ \int_{\Omega} \Phi\left(\frac{|u|}{\lambda}\right) dx < \infty \text{ para algum } \lambda > 0\right\}$ espaço de Orlicz.

- $\|u\|_{\Phi} = \inf\left\{\lambda > 0\,;\ \int_{\Omega} \Phi\left(\frac{|u|}{\lambda}\right) dx \leq 1\right\}$ norma de Luxemburgo de $L^{\Phi}(\Omega)$.

- $W^{1,\Phi}(\Omega) = \left\{ \begin{array}{l} u \in L^{\Phi}(\Omega) \text{ tal que existem } f_i \in L^{\Phi}(\Omega),\ i = 1, \ldots, N, \text{ com} \\ \displaystyle\int_{\Omega} u \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\, dx = -\int_{\Omega} f_i \psi\, dx, \quad \forall \psi \in C_c^{\infty}(\Omega),\ i = 1, \ldots, N \end{array} \right\}$ espaço de Orlicz-Sobolev.

- $\|u\| = \|u\|_{\Phi} + \|\nabla u\|_{\Phi}$ norma no espaço $W^{1,\Phi}(\Omega)$.

- $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ fecho de $C_c^{\infty}(\Omega)$ em $W^{1,\Phi}(\Omega)$.

Introdução

Neste trabalho, estudaremos problemas do tipo

$$\begin{cases} -\Delta_\Phi u &= h(u) \quad \text{em } \Omega, \\ \qquad u &= 0 \qquad\ \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, com $N \geq 2$, é um domínio limitado com fronteira suave, $\Phi \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ é uma N-função, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e

$$\Delta_\Phi u = \operatorname{div}\left(\Phi'(|\nabla u|)\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)$$

é o operador Φ-laplaciano. Hipóteses adicionais e especificidades para Φ e h serão apresentadas em cada capítulo.

Esta classe de problemas pode ser motivada por aplicações físicas, em especial no contexto da mecânica dos fluidos. Em particular, ao considerarmos

$$\Phi(t) = t^2 + 2\int_0^{|t|} s \ \text{arcsenh}^\alpha\, s\, ds \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

pode-se mostrar que Φ satisfaz condições adequadas que indicaremos posteriormente. Neste caso, o problema

$$\begin{cases} \operatorname{div}\left(\Phi'(|Du|)\dfrac{Du}{|Du|}\right) + (\text{termo potencial}) = 0 & \text{em } \Omega, \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

modela um fluido do tipo Prandtl–Eyring, que caminha lento sobre Ω, onde $u : \Omega \to \mathbb{R}^2$ denota o campo velocidade de um fluido incompressível e

$$Du := \tfrac{1}{2}\Big[\nabla u + (\nabla u)^T\Big],$$

é o gradiente simétrico de u. Para mais detalhes, veja [10] e [30].

Esta tese está estruturada da forma a seguir.

O Capítulo 1 é dedicado à apresentação dos espaços de Orlicz e Orlicz-Sobolev. Nele, discutimos algumas propriedades e resultados fundamentais desses espaços. Essa análise desempenha um papel crucial nas argumentações desenvolvidas nos capítulos subsequentes, fornecendo uma base sólida para as discussões posteriores.

No Capítulo 2, inspirados em [37], investigamos a existência de soluções positivas para um problema semipositone da forma

$$\begin{cases} -\Delta_\Phi u &=& f(u)-\mu & \text{em } \Omega, \\ u &>& 0 & \text{em } \Omega, \\ u &=& 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, com $N \geq 2$, é um domínio limitado com fronteira suave, a função $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ é contínua, $\Phi : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ é uma N-função de classe C^2 e Δ_Φ é o operador Φ-laplaciano definido anteriormente. Assumindo algumas condições adicionais sobre Φ e f mostraremos que (1) possui uma solução se o parâmetro real $\mu > 0$ for pequeno.

Muitos autores estudaram problemas semipositones ao longo dos anos, desde o surgimento do artigo de Castro e Shivaji [16], que foram os primeiros a considerar essa classe de problemas.

Quando $\mu = 0$, o Problema (1) é bem conhecido e pode ser resolvido usando o Teorema do Passo da Montanha, proposto por Ambrosetti e Rabinowitz em [7]. No entanto, para o caso em que (1) é semipositone, ou seja, quando $f(0) = 0$ e $-\mu < 0$, a existência de uma solução positiva não é tão simples, pois os argumentos padrão via Teorema do Passo da Montanha, combinados com o Princípio do Máximo, não fornecem diretamente uma solução para o problema.

Problemas do tipo semipositone continuam sendo amplamente estudados na literatura recente. Em [37], Perera e Sim trataram do caso com o operador N-laplaciano (isto é, $\Phi(t) = \frac{1}{N}|t|^N$) e uma não linearidade específica do tipo

$$f(u) = \lambda|u|^{N-2}ue^{\beta|u|^{N'}}, \quad \text{com } N' = \frac{N}{N-1} \quad \text{e} \quad 0 < \lambda < \lambda_1,$$

onde

$$\lambda_1 = \inf_{u \in W_0^{1,N}(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^N\,dx}{\displaystyle\int_\Omega |u|^N\,dx}$$

é o menor autovalor do problema não linear $-\Delta_N u = \lambda|u|^{N-2}u$, com $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$. Assim, os autores provaram que se $\lambda \in (0,\lambda_1)$ então existe $\mu^* > 0$ tal que para todo

$\mu \in (0, \mu^*)$, o problema

$$\begin{cases} -\Delta_N u = \lambda |u|^{N-2} u e^{\beta |u|^{N'}} - \mu & \text{em } \Omega, \\ u > 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

tem solução fraca positiva $u_\mu \in C_0^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ para algum $\alpha \in (0, 1)$.

Em outra direção, em [4], Alves *et al.* estudaram um problema semipositone com operador geral Δ_Φ em espaços de Orlicz–Sobolev, considerando Φ satisfazendo

$$\ell \leq \frac{\Phi'(t)t}{\Phi(t)} \leq m, \quad \forall\, t > 0, \quad \text{com } \ell, m \in (1, N). \tag{2}$$

Sob essa e outras condições técnicas, e assumindo que $f > 0$ tem crescimento subcrítico do tipo Sobolev, os autores demonstram a existência de solução positiva do problema para μ pequeno, também explorando métodos variacionais e argumentos de truncamento.

Em [38], os autores Rădulescu *et. al.* trabalharam com o problema

$$\begin{cases} -\Delta_\Phi u = \lambda f(x, u) + \mu g(x, u) & \text{em } \Omega, \\ u > 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

com $\lambda > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ e $f, g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções Carathéodory. Os autores incluíram dentre outras hipóteses a seguinte:

$$\ell - 1 \leq \frac{\Phi''(t)t}{\Phi'(t)} \leq m - 1, \quad \forall\, t > 0, \quad \text{com } \ell, m \in (1, N),$$

com $\ell \leq m < N\ell/(N - \ell)$.

Usando métodos variacionais, um teorema de compacidade para o espaço de Orlicz-Sobolev e algumas estimativas a priori, e supondo (2), Alves *et. al.*, em [5], estudaram a existência de solução positiva para o problema semipositone quasilinear

$$\begin{cases} -\Delta_\Phi u = \lambda f(x, u) + b(u) - a & \text{em } \Omega, \\ u > 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

com parâmetros $a, \lambda > 0$, $f(x, u)$ uma função Carathéodory, com crescimento subcrítico e $b(t)$ uma função com crescimento crítico no espaço $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$.

Na literatura, encontramos diferentes métodos para provar a existência e a não existência de soluções, como subsupersoluções, argumentos da teoria do grau, teoria do ponto fixo e bifurcação; veja, por exemplo, [2], [3], [6], [8] e suas referências. Além desses métodos, o método variacional também foi utilizado em alguns artigos, como pode ser visto em [26], [13], [15], [21], [22] e [23].

O Capítulo 2 desta tese foi inspirado, principalmente, pelos artigos [37] e [4].

Em todo este texto, adotaremos a seguinte definição:

Definição 0.1. Seja $\alpha \in [0, N-1)$. Definimos os números γ, B e $K_{N,\alpha}$ da seguinte forma:

(a) $\gamma = \dfrac{N}{N-1-\alpha} > 1$;

(b) $B = 1 - \dfrac{\alpha}{N-1} = \dfrac{N}{(N-1)\gamma} \in (0,1)$;

(c) $K_{N,\alpha} = B^{1/B}\, N\, \omega_{N-1}^{1/(N-1)}$, em que ω_{N-1} denota a medida da esfera unitária em $\mathbb{R}^N$.

Iremos supor que $\Phi : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ é uma N-função de classe C^2 e satisfaz as seguintes condições:

(ϕ_1) Existe uma constante $C \geq 1$, tal que para todo $t \in \left[0, \frac{1}{C}\right)$

$$\frac{t^N}{C} \leq \Phi(t) \leq Ct^N;$$

(ϕ_2) Para algum $\alpha \in [0, N-1)$, temos

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\Phi(t)}{t^N log^{\alpha}(t)} = 1;$$

(ϕ_3) Existem constantes $\tilde{m}_\alpha, \tilde{c}_\alpha > 0$ tais que

$$\tilde{m}_\alpha \leq \frac{\Phi''(t)t}{\Phi'(t)} \leq \tilde{c}_\alpha, \quad \forall\, t > 0;$$

(ϕ_4) Existem $t_0 > e$ e $a \in (0, B)$, tais que

$$\Phi(t) \leq t^N \log^{\alpha}(t)(1 - \log^{-a}(t)),\ t \in [t_0, \infty).$$

Decorre das hipóteses (ϕ_1) e (ϕ_3) que, denotando $m_\alpha = \tilde{m}_\alpha + 1$ e $c_\alpha = \tilde{c}_\alpha + 1$, vale

$$1 < m_\alpha \leq \inf_{t>0} \frac{\Phi'(t)t}{\Phi(t)} \leq \sup_{t>0} \frac{\Phi'(t)t}{\Phi(t)} \leq c_\alpha. \tag{3}$$

Veja o Lema 2.3 para os detalhes.

Quanto à função contínua $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, consideramos as seguintes hipóteses:

(f_1) $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} \frac{f(t)}{\Phi'(t)} = 0$;

(f_2) Existem constantes $C > 0$ e $\beta > 0$ tais que

$$0 < f(t) \leq C\left[t^{N-1} + \exp(\beta t^{\gamma})\right] \quad \forall\, t > 0;$$

(f_3) Existem constantes $C, M, R_0 > 0$, tais que

$$\frac{F(t)}{f(t)} \leq Ct^{1-M} \quad \forall\, t > R_0,$$

em que $F(t) = \int_0^t f(s)\,ds$, para todo $t \geq 0$;

(f_4) $\displaystyle\liminf_{t\to\infty} \frac{tf(t)}{\exp(\beta|t|^{\gamma})} =: L > 0$;

(f_5) A função $\dfrac{F(t)}{t^{c_\alpha}}$ é crescente para $t > 0$, e

$$\inf_{t>0} \frac{F(t)}{t^{c_\alpha}} = k_0 > 0.$$

Devido à desigualdade do tipo Trudinger-Moser, válida para funções em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, ver Teorema 1.3 de [19], temos a seguinte noção de criticalidade para o Problema 2.1:

Definição 0.2. Dizemos que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ possui crescimento crítico exponencial quando existe uma constante $K_0 > 0$ tal que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{|f(t)|}{e^{K|t|^{\gamma}}} = \begin{cases} 0, & \text{para todo } K > K_0, \\ +\infty, & \text{para todo } K < K_0. \end{cases}$$

O principal resultado do Capítulo 2 é o seguinte teorema:

Teorema 0.1. *Assuma* $(\phi_1) - (\phi_4)$ *e* $(f_1) - (f_5)$. *Existe* $\mu^* > 0$ *tal que para todo* $\mu \in (0, \mu^*)$ *o Problema* (1) *tem uma solução fraca positiva*

$$u_\mu \in C_0^{1,\sigma}(\overline{\Omega})$$

para algum $\sigma \in (0, 1)$.

O nosso resultado constitui uma generalização daquele obtido em [37], na medida em que o operador Φ-laplaciano estende o N-laplaciano. Essa generalização nos trouxe a dificuldade adicional advinda da não-homogeneidade do Φ-laplaciano. Além disso, a não linearidade considerada neste trabalho é de natureza mais geral do que a tratada por eles, que abordam um caso particular. No entanto, em razão da hipótese (f_1) adotada aqui, o caso específico considerado em [37] não está contido como caso particular do nosso, o que limita parcialmente essa generalização.

Além disso, complementamos o escopo de [4], uma vez que trabalhamos com $m > N$, diferentemente da condição (2) usada por eles.

No Capítulo 3, investigamos a existência de uma solução nodal, isto é, uma solução que muda de sinal no domínio Ω para o problema

$$\begin{cases} -\Delta_\Phi u = f(u) & \text{em } \Omega, \\ u^\pm \neq 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, com $N \geq 2$, é um domínio limitado e suave, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 e $\Phi : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ é uma N-função de classe C^2.

Mostraremos que a solução encontrada possui exatamente dois domínios nodais, ou seja, as partes do domínio onde a função assume valores estritamente positivos ou negativos formam duas componentes conexas abertas disjuntas, conforme estabeleceremos na Definição 3.1.

Problemas de natureza semelhante, envolvendo soluções que mudam de sinal, têm sido objeto de estudo em diferentes contextos variacionais. Um exemplo relevante é o trabalho de Figueiredo e Santos [28], onde os autores estabelecem a existência de uma solução nodal com dois domínios nodais para uma equação do tipo Kirchhoff:

$$-M\left(\int_\Omega \Phi(|\nabla u|)\,dx\right)\Delta_\Phi u = f(u), \quad u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$

No presente capítulo, seguimos uma abordagem semelhante a de [28], utilizando métodos variacionais, argumentos de minimização sobre um subconjunto da variedade de Nehari e um lema de deformação. Porém, trabalhamos com o caso $M \equiv 1$ e com hipóteses diferentes sobre a função Φ.

Além disso, diversas ideias e resultados utilizados neste capítulo foram inspirados no trabalho de [29], onde os autores estudam soluções do tipo multi-bump para um problema envolvendo o operador Φ-laplaciano envolvendo crescimento crítico exponencial.

No Capítulo 3, além de $(\phi_1) - (\phi_3)$, consideramos as seguintes hipóteses sobre a N-função Φ:

($\hat{\phi}_4$) A função $\dfrac{\Phi'(t)}{|t|^{c_\alpha-2}t}$ é não-decrescente para $t<0$ e não-crescente para $t>0$;

(ϕ_5) As funções $t \mapsto \Phi'(t)t$ e $t \mapsto \Phi(t) - \frac{1}{c_\alpha}\Phi'(t)t$ são convexas para $t>0$.

Para a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe C^1 consideramos as seguintes hipóteses:

($\hat{f}_1$) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{\Phi'(t)} = 0.$

($\hat{f}_2$) Existem C e $\beta>0$ constantes, tais que

$$|f(t)| \le C\left[|t|^{N-1} + \exp(\beta t^\gamma)\right] \quad \forall\, t \in \mathbb{R};$$

($\hat{f}_3$) (Ambrosetti–Rabinowitz) Existe $\sigma > c_\alpha$ tal que

$$0 < \sigma F(t) \le t f(t),\ \forall\ t \neq 0,$$

em que $F(t) := \int_0^t f(s)\,ds$;

($\hat{f}_4$) A função

$$t \mapsto \frac{f(t)}{|t|^{c_\alpha-2}t}$$

é decrescente para $t<0$ e crescente para $t>0$;

($\hat{f}_5$) $\displaystyle\inf_{t\neq 0}\frac{F(t)}{|t|^\sigma} =: \mu \ \ge\ \mu^*$, onde

$$\mu^* := \max\left\{\mu_\delta,\ \left[\frac{\frac{\delta^N\beta_N}{2^N}\left(\frac{\mu_\delta}{\sigma}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-m_\alpha}}(\sigma-m_\alpha)\,m_\alpha^{\frac{m_\alpha}{\sigma-m_\alpha}}}{d_{N,\alpha}}\right]^{\frac{\sigma-m_\alpha}{m_\alpha}}\right\},$$

com $\delta \in (0,4)$ fixado de modo que, existam $x^+, x^- \in \Omega$ tais que $B(x^+,\delta) \subset \Omega$, $B(x^-,\delta)\subset\Omega$, $B(x^+,\delta)\cap B(x^-,\delta) = \varnothing$, e

$$\mu_\delta := 2^N\,\Phi\!\left(\tfrac{4}{\delta}\right), \qquad d_{N,\alpha} := \frac{\sigma - c_\alpha}{\sigma}\left(\frac{K_{N,\alpha}}{\beta N}\right)^{\frac{N}{\gamma}},$$

em que β_N representa a medida de Lebesgue da bola unitária $B(1,0)$ e $K_{N,\alpha}$ é dado na Definição 0.1.

O resultado principal deste capítulo é o seguinte:

Teorema 0.2. *Suponha que as condições* $(\phi_1) - (\phi_3)$, $(\hat{\phi}_4)$, (ϕ_5) *e* $(\hat{f}_1)$-$(\hat{f}_5)$ *estejam satisfeitas. Então o Problema* (3.1) *admite ao menos uma solução nodal de energia mínima, a qual apresenta exatamente dois domínios nodais.*

Capítulo 1

Resultados preliminares de espaços de Orlicz-Sobolev

Neste capítulo, faremos uma introdução aos espaços de Orlicz-Sobolev. Apresentaremos a teoria e os pré-requisitos necessários ao bom entendimento de todos os resultados deste trabalho.

Para uma análise mais detalhada sobre os espaços de Orlicz-Sobolev, veja, por exemplo, [1], [35] e [39].

Ao longo deste trabalho, a função Φ será sempre considerada uma N-função. A seguir, apresentaremos sua definição formal, bem como alguns exemplos ilustrativos.

Definição 1.1. Dizemos que a função $\Phi : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ é uma N-função quando satisfaz as seguintes condições:

(a) Φ é convexa e par;

(b) $\Phi(t) = 0$ se, e somente se, $t = 0$;

(c) $\displaystyle\lim_{t \to 0^+} \frac{\Phi(t)}{t} = 0$;

(d) $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \frac{\Phi(t)}{t} = \infty$.

De acordo com ([39], Corolário 2), toda N-função Φ admite a seguinte representação

$$\Phi(t) = \int_0^{|t|} \varphi(s)\, ds \quad t \in \mathbb{R},$$

com a função $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ satisfazendo as propriedades:

(a) φ é contínua à direita e não-decrescente;

(b) $\varphi(s) = 0$ se, e somente se, $s = 0$;

(c) $\lim_{s \to +\infty} \varphi(s) = \infty$.

Exemplo 1.1 ([39])**.** As funções abaixo são exemplos de N-funções.

(a) $\Phi(t) = \dfrac{|t|^p}{p}$ $p > 1$.

(b) $\Phi(t) = e^{|t|} - |t| - 1$.

Para uma N-função Φ, definimos a seguir a classe de Orlicz e o espaço de Orlicz associados a Φ.

Definição 1.2. Sejam Φ uma N-função e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto. Dizemos que

(a) A classe de Orlicz associada a Φ é o conjunto de funções definido por

$$K^{\Phi}(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mensurável}\,;\ \int_{\Omega} \Phi(|u(x)|)\, dx < \infty\};$$

(b) O espaço de Orlicz é o conjunto de funções definido por

$$L^{\Phi}(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}^N \text{ mensurável}\,;\ \int_{\Omega} \Phi\left(\frac{u}{\lambda}\right) dx < \infty, \text{ para algum } \lambda > 0\}.$$

A seguir, enunciamos algumas propriedades satisfeitas pela classe e pelo espaço de Orlicz. As respectivas demonstrações podem ser consultadas em [1] e [35].

Lema 1.1. Sejam $K^{\Phi}(\Omega)$ e $L^{\Phi}(\Omega)$, respectivamente, a classe de Orlicz e o espaço de Orlicz definidos anteriormente. Então, valem as seguintes propriedades:

(a) $K^{\Phi}(\Omega)$ é um conjunto convexo.

(b) $K^{\Phi}(\Omega)$ não necessariamente é um espaço vetorial.

(c) $L^{\Phi}(\Omega)$ é o menor espaço vetorial que contém $K^{\Phi}(\Omega)$.

É possível definir diferentes normas no espaço $L^{\Phi}(\Omega)$, entre as quais destacamos as aplicações a seguir, que associam elementos de $L^{\Phi}(\Omega)$ a valores reais.

(a)

$$\|u\|_{\Phi} := \inf\left\{\lambda > 0\,;\ \int_{\Omega} \Phi\left(\frac{|u|}{\lambda}\right) dx \leq 1\right\},$$

denominada norma de Luxemburgo.

(b)

$$\|u\|_{\Phi,A} := \inf_{\lambda > 0}\left\{\frac{1}{\lambda}\left(1 + \int_{\Omega} \Phi(\lambda|u|)\, dx\right)\right\},$$

chamada de norma de Amemiya.

As normas apresentadas são equivalentes entre si e, sob qualquer uma delas, o espaço vetorial $L^\Phi(\Omega)$ constitui um espaço de Banach. Quando $u \neq 0$, o ínfimo na norma de Luxemburgo é atingido, pois se considerarmos em

$$\int_\Omega \Phi\left(\frac{|u(x)|}{\lambda}\right) dx \leq 1, \tag{1.1}$$

uma sequência decrescente de números reais positivos (λ_n) que converge para $\|u\|_\Phi$ então, pelo Teorema da Convergência Monótona (ver Teorema 4.7), obtemos

$$\int_\Omega \Phi\left(\frac{|u(x)|}{\|u\|_\Phi}\right) dx \leq 1. \tag{1.2}$$

Se ocorre a igualdade em (1.1), então $\lambda = \|u\|_\Phi$. Entretanto, a recíproca não é sempre válida. Isto é, pode ocorrer $\lambda = \|u\|_\Phi$ com a desigualdade estrita em (1.1). Para mais detalhes, ver [1].

Neste trabalho, adotaremos como norma no espaço $L^\Phi(\Omega)$ a norma de Luxemburgo, denotada por $\|\cdot\|_\Phi$.

A N-função $\Phi(t) = \dfrac{|t|^p}{p}$, com $p > 1$, apresentada no Exemplo 1.1, é tal que o espaço de Orlicz $L^\Phi(\Omega)$ coincide com o clássico espaço de Lebesgue $L^p(\Omega)$. Nesse caso, a norma de Luxemburgo em $L^\Phi(\Omega)$ é dada por

$$\|\cdot\|_\Phi = p^{-\frac{1}{p}}\|\cdot\|_p,$$

em que $\|\cdot\|_p$ denota a norma usual em $L^p(\Omega)$.

Definição 1.3. Dada uma N-função Φ, a função $\tilde{\Phi} : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ definida por

$$\tilde{\Phi}(t) = \sup_{s \geq 0}\{st - \Phi(s)\},\ t \geq 0 \quad \text{e} \quad \tilde{\Phi}(t) = \tilde{\Phi}(-t),\ t < 0$$

é dita a complementar de Φ.

De acordo com [39], uma função complementar $\widetilde{\Phi}$ pode ser escrita na forma

$$\tilde{\Phi}(t) = \int_0^{|t|} \psi(s)\, ds \quad \text{em que} \quad \psi(s) = \sup_{\varphi(t) \leq s} t, \text{ para } s \geq 0$$

e, além disso, $\widetilde{\Phi}$ é também uma N-função. Por fim, a função complementar de $\widetilde{\Phi}$ é a própria Φ, ou seja, $\widetilde{\widetilde{\Phi}} = \Phi$.

Agora, dado $\tilde{u} \in L^{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$, introduzimos a seguinte norma associada ao espaço $L^{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$:

(c)

$$\|\tilde{u}\|_{(\tilde{\Phi})} := \sup\left\{\int_\Omega \tilde{u}v\,dx \ ; \ v \in L^\Phi(\Omega) \text{ e } \|v\|_\Phi \leq 1\right\},$$

denominada norma de Orlicz no espaço $L^{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$.

A seguir, apresentamos um exemplo em que, dada uma N-função Φ, determinamos sua N-função complementar $\widetilde{\Phi}$.

Exemplo 1.2. Sejam $p > 1$ e p' seu conjugado, isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Considere a função

$$\varphi(t) = |t|^{p-2}t.$$

Então, a N-função Φ associada é dada por

$$\Phi(t) = \int_0^{|t|} \varphi(s)\,ds = \frac{|t|^p}{p}.$$

Observe que esta é justamente a primeira N-função apresentada no Exemplo 1.1. Temos que

$$\psi(s) = \sup_{\varphi(t)\leq s} t = \sup_{|t|^{p-2}t\leq s} t = s^{1/(p-1)}, \quad \text{para } s \geq 0.$$

Portanto, a função complementar de Φ é

$$\tilde{\Phi}(t) = \int_0^{|t|} \psi(s)\,ds = \int_0^{|t|} s^{1/(p-1)}\,ds = \frac{|t|^{p'}}{p'}.$$

Para a N-função $\Phi(t) = e^{|t|} - |t| - 1$, apresentada no Exemplo 1.1, tem-se, conforme [39], que sua N-função complementar é dada por

$$\tilde{\Phi}(t) = (1 + |t|)\ln(1 + |t|) - |t|.$$

Nos espaços $L^\Phi(\Omega)$ e $L^{\tilde{\Phi}}(\Omega)$ vale a seguinte desigualdade de Hölder: Se $u \in L^\Phi(\Omega)$ e $v \in L^{\tilde{\Phi}}(\Omega)$, então $uv \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_\Omega |uv|\,dx \leq 2\|u\|_\Phi \|v\|_{\tilde{\Phi}}.$$

Vale também a desigualdade de Young

$$ab \leq \Phi(a) + \tilde{\Phi}(b), \quad \forall\ a, b \in \mathbb{R}.$$

Essas duas desigualdades são demonstradas em [1].

Lema 1.2. Seja Φ uma N-função. Então

(a) $\Phi(\alpha t) \leq \alpha\Phi(t),$ para $\alpha \in [0,1]$ e $t \in \mathbb{R}$.

(b) $\Phi(\beta t) \geq \beta\Phi(t),$ para $\beta \in [1,\infty)$ e $t \in \mathbb{R}$.

Demonstração.

(a) Como Φ é uma função convexa e $\Phi(0) = 0$, segue que, para todo $\alpha \in [0,1]$,

$$\Phi(\alpha t) = \Phi(\alpha t + (1-\alpha)0) \leq \alpha\Phi(t).$$

(b) Como Φ é uma função par, podemos supor, sem perda de generalidade, que $t > 0$. Assim, pelo item (a), para $\beta \geq 1$ temos

$$\frac{1}{\beta}\Phi(t) \geq \Phi\left(\frac{t}{\beta}\right).$$

Fazendo a substituição $s = \dfrac{t}{\beta}$, obtemos

$$\Phi(\beta s) \geq \beta\Phi(s), \quad s > 0,$$

como desejado. □

Definição 1.4. Dizemos que uma N-função Φ satisfaz a condição Δ_2 (e escrevemos $\Phi \in \Delta_2$) se existem constantes $k > 0$ e $t_0 \geq 0$, tais que

$$\Phi(2t) \leq k\Phi(t), \ \forall\, t \geq t_0.$$

No caso em que $|\Omega| = \infty$, dizemos que Φ satisfaz a condição Δ_2 se existe uma constante $k > 0$, tal que $\Phi(2t) \leq k\Phi(t)$, para todo $t \geq 0$.

Como veremos na Observação 1.1, o espaço $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ é um espaço de Banach, e a condição Δ_2 é necessária para garantir a sua reflexividade. Recordemos que, em espaços de Banach reflexivos, toda sequência limitada admite uma subsequência fracamente convergente. Esse resultado será utilizado de maneira recorrente ao longo das demonstrações.

Lema 1.3. Uma N-função Φ satisfaz a condição Δ_2 se, e somente se, para cada $s > 1$ existem $k > 0$ e $t_0 \geq 0$, tais que

$$\Phi(st) \leq k_s\Phi(t), \ \forall\, t \geq t_0.$$

No caso em que $|\Omega| = \infty$, a N-função Φ satisfaz a condição Δ_2 se, e somente se, para todo $s > 1$ existe uma constante $k_s > 0$, tal que $\Phi(st) \leq k_s\Phi(t)$, para todo $t \geq 0$.

Proposição 1.1 ([1] e [39])**.** Se Φ satisfaz a condição Δ_2, então existem $a, b > 0$, tais que

$$\Phi(t) \leq at^b,$$

para t suficientemente grande.

Isso significa que Φ cresce, no infinito, de forma assintoticamente inferior a uma função polinomial.

Exemplo 1.3. A N-função $\Phi_1(t) = \frac{|t|^p}{p}$, com $p \in (1, \infty)$, satisfaz a condição Δ_2, pois $\Phi(2t) = 2^p\Phi(t)$. Por outro lado, a N-função $\Phi_2(t) = e^{|t|} - |t| - 1$ não satisfaz a condição Δ_2, uma vez que seu crescimento, no infinito, é mais rápido do que o de qualquer função polinomial. Além disso, conforme visto anteriormente, a N-função complementar de Φ_2 é dada por

$$\tilde{\Phi}(t) = (1 + |t|)\ln(1 + |t|) - |t|,$$

a qual, conforme visto em [35], satisfaz a condição Δ_2.

Definição 1.5. Dizemos que uma N-função Φ satisfaz a condição ∇_2 (e denotamos por $\Phi \in \nabla_2$) se existe $\zeta > 1$, tal que

$$\Phi(t) \leq \frac{1}{2\zeta}\Phi(\zeta t) \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

Lema 1.4 ([1])**.** Seja Φ uma N-função. Então,

(a) O espaço $(L^\Phi(\Omega), \|\cdot\|_\Phi)$ é reflexivo se, e somente se, Φ e $\tilde{\Phi}$ satisfazem Δ_2.

(b) Seja $\Phi \in \Delta_2$. Então, a sequência (u_n) converge para zero em $L^\Phi(\Omega)$ se, e somente se,

$$\int_\Omega \Phi(|u_n|)\,dx \to 0.$$

(c) Seja $\Phi \in \Delta_2$. Então, a sequência (u_n) é limitada em $L^\Phi(\Omega)$ se, e somente se,

$$\int_\Omega \Phi(|u_n|)\,dx$$

é limitada.

Além disso, vale destacar que, se Φ e $\tilde{\Phi}$ são ambas Δ_2, então

$$(L^\Phi(\Omega), \|\cdot\|_\Phi)^* = (L^{\tilde{\Phi}}(\Omega), \|\cdot\|_{\tilde{\Phi}}) \quad \text{e} \quad (L^{\tilde{\Phi}}(\Omega), \|\cdot\|_{\tilde{\Phi}})^* = (L^\Phi(\Omega), \|\cdot\|_\Phi)$$

em que $(L^{\Phi}(\Omega), \|\cdot\|_{\Phi})^*$ e $(L^{\tilde{\Phi}}(\Omega), \|\cdot\|_{\tilde{\Phi}})^*$ representam os espaços duais topológicos de $L^{\Phi}(\Omega)$ e $L^{\tilde{\Phi}}(\Omega)$, respectivamente.

Os três lemas a seguir podem ser encontrados em Fukagai et al. [32]. Os dois primeiros serão utilizados para demonstrar, no terceiro, que as N-funções consideradas neste trabalho satisfazem a condição Δ_2. Além disso, esses resultados também se mostram úteis em diversos outros argumentos ao longo deste trabalho.

Lema 1.5 ([32], Lema 2.1)**.** Seja A uma N-função de classe C^1 que satisfaz a seguinte condição

$$1 < m \leq \frac{A'(t)t}{A(t)} \leq M < \infty, \text{ para todo } t > 0. \tag{1.3}$$

Considere, ainda, as funções auxiliares

$$\xi_0(t) = \min\{t^m, t^M\}, \quad \xi_1(t) = \max\{t^m, t^M\}.$$

Então

(a) $\xi_0(\rho)A(t) \leq A(\rho t) \leq \xi_1(\rho)A(t)$ para $\rho, t \geq 0$.

(b) $\xi_0(\|u\|_A) \leq \int_\Omega A(|u|)\, d\mu \leq \xi_1(\|u\|_A)$ para $u \in L^{\Phi}(A)$.

Lema 1.6 ([32], Lema 2.5)**.** Seja A uma N-função de classe C^1 que satisfaz a condição (1.3), e seja $\widetilde{A}$ a N-função complementar associada a A. Defina as funções

$$\xi_2(t) = \min\{t^{\frac{m}{m-1}}, t^{\frac{M}{M-1}}\}, \quad \xi_3(t) = \max\{t^{\frac{m}{m-1}}, t^{\frac{M}{M-1}}\}.$$

Então:

(a) $\frac{M}{M-1} \leq \frac{\tilde{A}'(t)t}{\tilde{A}(t)} \leq \frac{m}{m-1}$ para $t \geq 0$.

(b) $\xi_2(\rho)\tilde{A}(t) \leq \tilde{A}(\rho t) \leq \xi_3(\rho)\tilde{A}(t) \quad$ para $\rho, t \geq 0$.

Segue dos Lemas 1.5(a) e 1.6(b) que:

Lema 1.7 ([32], Lema 2.7)**.** Sejam A uma N-função de classe C^1 satisfazendo (1.3) e $\widetilde{A}$ a sua N-função complementar. Então A e $\widetilde{A}$ satisfazem a condição Δ_2.

Prosseguimos agora com a definição do espaço de Orlicz-Sobolev.

Definição 1.6. O espaço de Orlicz-Sobolev é definido por

$$W^{1,\Phi}(\Omega) = \left\{ u \in L^{\Phi}(\Omega); \begin{array}{c} \text{existem } f_1, ..., f_N \in L^{\Phi}(\Omega) \text{ tais que} \\ \displaystyle\int_\Omega u \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\, dx = -\int_\Omega f_i \psi\, dx \ \ \forall\ \psi \in C_c^{\infty}(\Omega),\ i = 1, ..., N \end{array} \right\}.$$

As funções $u_{x_i} := f_i$ são denominadas derivadas fracas de u.

De forma mais compacta, o espaço de Orlicz-Sobolev pode ser descrito como o conjunto de funções

$$W^{1,\Phi}(\Omega) = \{u \in L^{\Phi}(\Omega); |\nabla u| \in L^{\Phi}(\Omega)\}.$$

A aplicação

$$u \mapsto \|u\|_{\Phi} + \|\nabla u\|_{\Phi}$$

define uma norma em $W^{1,\Phi}(\Omega)$. De acordo com [1], $W^{1,\Phi}(\Omega)$ é um espaço de Banach.

A partir de agora, até o fim deste capítulo vamos assumir que Φ satisfaz a condição Δ_2.

O subespaço $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ é definido como o fecho do conjunto $C_c^{\infty}(\Omega)$ em $W^{1,\Phi}(\Omega)$ com respeito a essa norma.

Observação 1.1. Conforme apresentado em [1], temos que:

1. O espaço $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ também é um espaço de Banach.
2. O espaço $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ é separável;
3. Se também $\widetilde{\Phi}$ satisfaz a condição Δ_2, então $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ é reflexivo;

Proposição 1.2 ([1], Desigualdade de Poincaré)**.** Se $\Phi \in \Delta_2$, então existe uma constante $c > 0$, tal que

$$\|u\|_{\Phi} \leq c\|\nabla u\|_{\Phi}, \ \forall\, u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$

A partir da desigualdade de Poincaré, obtemos uma equivalência entre a norma de u em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ e a norma de Luxemburgo do gradiente de u em $L^{\Phi}(\Omega)$. Diante disso, ao longo deste trabalho consideraremos como norma em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ a norma

$$\|u\| := \|\nabla u\|_{\Phi},$$

isto é, a norma de Luxemburgo do gradiente de u no espaço $L^{\Phi}(\Omega)$.

Enunciamos a seguir o Princípio do Máximo Forte e o Princípio da Comparação Forte, conforme apresentados nos Lemas 3.4 e 3.5 de [31]. Em ambos os casos, considere Φ uma função tal que

(1) $\Phi \in C^2([0,\infty))$, convexa, com $\Phi(0) = 0$ e $\Phi(t) > 0$ para todo $t > 0$.

(2) Existem constantes $l, m > 1$ tais que

$$l \leq \frac{t\,\Phi'(t)}{\Phi(t)} \leq m, \quad \forall\, t > 0.$$

(3) Existem constantes $a_0, a_1 > 0$ tais que

$$a_0 \leq \frac{t\,\Phi''(t)}{\Phi'(t)} \leq a_1, \quad \forall\, t > 0.$$

Teorema 1.1. *(1. Princípio do Máximo Forte.) Seja $h \in L^\infty(\Omega)$ uma função não negativa e não identicamente nula. Então, a solução $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ do problema*

$$-\Delta_\Phi u = h,$$

isto é, a solução da equação

$$\int_\Omega \Phi'(|\nabla u|)\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\nabla v\,dx = \int_\Omega hv\,dx, \quad \forall\, v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega),$$

é estritamente positiva em Ω, ou seja, $u(x) > 0$ para todo $x \in \Omega$.
(2. Princípio da Comparação Forte.) Sejam $h_i \in L^\infty(\Omega)$, com $i \in \{1,2\}$, e sejam $u_i \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ soluções do problema elíptico

$$\begin{cases} -\Delta_\Phi u = h_i & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Suponha que $0 \leq h_1 \leq h_2$ q.t.p. em Ω, e que o conjunto

$$C := \{x \in \Omega;\ h_1(x) = h_2(x)\},$$

possui interior vazio. Então, valem as seguintes conclusões:

$$0 \leq u_1 < u_2 \quad \text{em } \Omega,$$

e

$$\frac{\partial u_2}{\partial \nu} < \frac{\partial u_1}{\partial \nu} \leq 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega,$$

em que ν denota o vetor normal exterior à fronteira $\partial\Omega$.

Capítulo 2

Soluções positivas para uma classe de problemas semipositones envolvendo crescimento crítico exponencial

Neste capítulo, investigaremos o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta_\Phi u &= f(u) - \mu \quad \text{em } \Omega, \\ u &> 0 \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

no qual $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, com $N \geq 2$ é um conjunto aberto e limitado com fronteira suave,

$$\Delta_\Phi u = \operatorname{div}\left(\Phi'(|\nabla u|)\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)$$

é o operador Φ-laplaciano.

Sob algumas hipóteses na N-função Φ e no termo não linear f, veremos que o Problema 2.1 tem solução fraca positiva $u_\mu \in C_0^{1,\sigma}(\overline{\Omega})$ para algum $\sigma \in (0,1)$, se $\mu > 0$ for suficientemente pequeno.

Iremos supor que Φ é uma N-função de classe C^2 que satisfaz as seguintes condições:

(ϕ_1) Existe uma constante $C \geq 1$ tal que, para todo $t \in \left[0, \frac{1}{C}\right)$, vale

$$\frac{t^N}{C} \leq \Phi(t) \leq Ct^N.$$

Ou seja, próximo da origem, o crescimento de Φ está controlado entre dois polinômios de grau N.

(ϕ_2) Para algum $\alpha \in [0, N-1)$, vale

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\Phi(t)}{t^N log^\alpha(t)} = 1,$$

o que significa que, no infinito, $\Phi(t)$ se comporta assintoticamente como $t^N \log^\alpha t$. Neste caso, escrevemos $\Phi(t) \sim t^N log^\alpha(t)$ no infinito.

(ϕ_3) Existem constantes $\tilde{m}_\alpha, \tilde{c}_\alpha > 0$ tais que

$$\tilde{m}_\alpha \leq \frac{\Phi''(t)t}{\Phi'(t)} \leq \tilde{c}_\alpha, \quad \forall\, t > 0. \tag{2.2}$$

(ϕ_4) Existem $\tilde{t}_0 > e$ e $a \in (0, B)$, tais que

$$\Phi(t) \leq t^N \log^\alpha(t)(1 - \log^{-a}(t)), \quad t \in [\tilde{t}_0, \infty),$$

em que B é dado na Definição 0.1.

Com o intuito de ilustrar as hipóteses (ϕ_1)–(ϕ_4) e favorecer uma maior compreensão, apresentamos a seguir um exemplo uma N-função Φ que satisfaz todas essas condições.

Exemplo 2.1. Considere $N = 3$, $\alpha = 1$, $B = \frac{1}{2}$ e $a = \frac{1}{3}$ e sejam $0 \leq t_1 < t_2$ com $t_2 \gg e$. Defina

$$\begin{aligned} \Phi_1(t) &:= |t|^3 \log(e + |t|), \quad |t| < t_1 \\ \Phi_2(t) &:= |t|^3 \log(|t|)\Big(1 - \log^{-\frac{1}{3}}(|t|)\Big), \quad |t| \geq t_2. \end{aligned}$$

Calculando a primeira e segunda derivadas de $\Phi_1(t)$, com $t \neq 0$, temos

$$\Phi_1'(t) = \mathrm{sgn}(t)\left[3t^2 \log(e + |t|) + \frac{|t|^3}{e + |t|}\right], \quad t \neq 0$$

e

$$\Phi_1''(t) = 6|t| \log(e + |t|) + \frac{6|t|^2 e + 5|t|^3}{(e + |t|)^2} > 0, \quad t \neq 0.$$

Por outro lado, quando $t = 0$, temos

$$\begin{aligned} \Phi_1'(0) &= \lim_{t\to 0} \frac{\Phi_1(t) - \Phi_1(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{|t|^3 \log(e + |t|)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \mathrm{sgn}(t)t^2 \log(e + |t|) = 0, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\Phi_1''(0) &= \lim_{t\to 0}\frac{\Phi_1'(t)-\Phi_1'(0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\Phi_1'(t)}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\left(3|t|\log(e+|t|)\ +\ \frac{t^2}{e+|t|}\right) = 0.\end{aligned}$$

Isso prova que Φ_1 é de classe C^2 e convexa. Agora, considerando a função $\Phi_2(t)$, temos

$$\Phi_2'(t) = t^2\left[3\log(|t|)+1-3(\log(|t|))^{\frac{2}{3}}-\tfrac{2}{3}(\log(|t|))^{-\frac{1}{3}}\right],\quad t\geq t_2,$$

e

$$\begin{aligned}\Phi_2''(t) &= t\Big(6\log(|t|)+5-6(\log(|t|))^{\frac{2}{3}}-\tfrac{10}{3}(\log(|t|))^{-\frac{1}{3}}+\tfrac{2}{9}(\log(|t|))^{-\frac{4}{3}}\Big)\\ &= t\Big(5+6(\log(|t|))^{\frac{2}{3}}\Big((\log(|t|))^{\frac{1}{3}}-1\Big)-\tfrac{10}{3}(\log(|t|))^{-\frac{1}{3}}+\tfrac{2}{9}(\log(|t|))^{-\frac{4}{3}}\Big)\\ &\geq \frac{5}{3}t>0,\quad t\geq t_2>e.\end{aligned}$$

Logo, Φ_2 é de classe C^2 e convexa em $[t_2,\infty)$.

Agora definimos

$$\Phi(t) = \begin{cases} |t|^3\log(e+|t|), & |t|<t_1\\ H(t), & |t|\in[t_1,t_2]\\ |t|^3\log(|t|)\Big(1-\log^{-\frac{1}{3}}(|t|)\Big), & |t|\geq t_2,\end{cases} \tag{2.3}$$

onde $H\in C^2$ é uma função par arbitrária de modo que Φ seja de classe C^2 e convexa em $\mathbb{R}$, com $H''>0$ em $[t_1,t_2]$. É fácil ver que Φ satisfaz as condições da definição de N-função, ver Definição 1.1, pois

$$\lim_{t\to 0}\frac{\Phi(t)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\Phi_1(t)}{t} = \Phi'(0) = 0$$

e

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\Phi(t)}{t} = \lim_{t\to\infty}\frac{\Phi_2(t)}{t} = \lim_{t\to\infty}t^2\log(t)\Big(1-\log^{-\frac{1}{3}}(t)\Big) = \infty.$$

Pela definição de Φ, facilmente vemos que as hipóteses (ϕ_1), (ϕ_2) e (ϕ_4) são satisfeitas e omitiremos as demonstrações. Verificaremos a hipótese (ϕ_3) para a função Φ. Note que

$$\lim_{t\to 0}\frac{\Phi_1''(t)\,t}{\Phi_1'(t)} = \lim_{t\to 0} t\cdot \frac{6|t|\log(e+|t|)+\dfrac{6|t|^2e+5|t|^3}{(e+|t|)^2}}{\operatorname{sgn}(t)\Big(3|t|^2\log(e+|t|)+\dfrac{|t|^3}{e+|t|}\Big)}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{6\log(e+|t|)+\dfrac{6|t|+5|t|^2}{(e+|t|)^2}}{3\log(e+|t|)+\dfrac{|t|}{e+|t|}} = 2.$$

Assim,

$$\frac{\Phi_1''(t)\,t}{\Phi_1'(t)} > 1, \quad \text{para } |t| < \tilde{t}_1,$$

para algum $\tilde{t}_1 \le t_1$. Por outro lado, temos

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\Phi_2''(t)\,t}{\Phi_2'(t)} = \lim_{t\to\infty}\frac{t^2\Big(6\log t+5-6(\log t)^{\frac{2}{3}}-\frac{10}{3}(\log t)^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{9}(\log t)^{-\frac{4}{3}}\Big)}{t^2\Big(3\log t+1-3(\log t)^{\frac{2}{3}}-\frac{2}{3}(\log t)^{-\frac{1}{3}}\Big)}$$

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{6\log t+5-6(\log t)^{\frac{2}{3}}-\frac{10}{3}(\log t)^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{9}(\log t)^{-\frac{4}{3}}}{3\log t+1-3(\log t)^{\frac{2}{3}}-\frac{2}{3}(\log t)^{-\frac{1}{3}}}$$

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{6+\frac{5}{\log t}-\frac{6}{(\log t)^{1/3}}-\frac{10}{3(\log t)^{4/3}}+\frac{2}{9(\log t)^{7/3}}}{3+\frac{1}{\log t}-\frac{3}{(\log t)^{1/3}}-\frac{2}{3(\log t)^{4/3}}} = 2,$$

de onde obtemos

$$\frac{\Phi_2''(t)\,t}{\Phi_2'(t)} < 3, \quad \text{para } |t| \ge \tilde{t}_2$$

para algum $\tilde{t}_2 \ge t_2$. Além disso, como Φ'' e Φ' são funções contínuas e positivas no compacto $[\tilde{t}_1, \tilde{t}_2]$, temos, pelos limites acima, que existem constantes $\tilde{m}_\alpha$ e $\tilde{c}_\alpha$ positivas satisfazendo (2.2). Portanto, Φ é um exemplo de $N-$função que satisfaz as hipóteses deste capítulo.

A seguir, apresentamos as condições assumidas para a função $f \in C([0,+\infty),\mathbb{R})$ e a sua primitiva $F(t) = \int_0^t f(s)\,ds$.

(f_1) $\displaystyle\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)}{\Phi'(t)} = 0$;

(f_2) Existem C e β constantes positivas, tais que

$$0 < f(t) \le C\left[t^{N-1}+\exp(\beta t^\gamma)\right], \quad \forall\, t > 0$$

em que γ é dado na Definição 0.1;

(f_3) Existem constantes $C, M, R_0 > 0$, tais que

$$\frac{F(t)}{f(t)} \leq Ct^{1-M} \quad \text{para todo } t \geq R_0;$$

(f_4) $\displaystyle\liminf_{t\to\infty} \frac{tf(t)}{\exp(\beta|t|^{\gamma})} \geq L$ para algum $L \in (0, +\infty)$.

(f_5) A função $t \mapsto \dfrac{F(t)}{t^{c_\alpha}}$ é não decrescente em $(0,\infty)$, e existe $k_0 > 0$ tal que

$$\inf_{t>0} \frac{F(t)}{t^{c_\alpha}} = k_0 > 0,$$

em que $c_\alpha = \tilde{c}_\alpha + 1$.

A seguir temos um exemplo de uma função f nessas condições.

Exemplo 2.2. Considere $N = 3$ e $\alpha = 1$. Assim, $\gamma = 3$. Seja Φ a N-função do Exemplo 2.1. Assuma que $c_\alpha \in (3, 4]$. Considere a função contínua

$$f(t) = t^{c_\alpha - 1} + \left(e^{\beta t^3} - 1\right), \quad t \geq 0.$$

Para verificar a hipótese (f_1), note que para $t \in (0, t_1)$ tem-se

$$\frac{f(t)}{\Phi'(t)} = \frac{f(t)}{\Phi_1'(t)} = \frac{t^{c_\alpha-1} + \left(e^{\beta t^3} - 1\right)}{3t^2\log(e+t) + \frac{t^3}{e+t}} = \frac{t^{c_\alpha - 3} + \dfrac{e^{\beta t^3} - 1}{t^2}}{3\log(e+t) + \dfrac{t}{e+t}}.$$

Como

$$\lim_{t\to 0} \frac{e^{\beta t^3} - 1}{t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{3t^2 e^{\beta t^3}}{2t} = 0,$$

temos que

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(t)}{\Phi'(t)} = 0.$$

A hipótese (f_2) é válida, pois

$$0 < f(t) = t^{c_\alpha - 1} + e^{\beta t^3} - 1 < t^2 + c\, e^{\beta t^3}, \quad \forall\, t > 0.$$

Quanto à hipótese (f_3), temos

$$F(t) = \int_0^t f(s)\, ds = \int_0^t \left(s^{c_\alpha - 1} + e^{\beta s^3} - 1\right) ds = \frac{1}{c_\alpha} t^{c_\alpha} + \int_0^t \left(e^{\beta s^3} - 1\right) ds.$$

Veja que

$$\int_1^t e^{\beta s^3}\,ds \leq \frac{1}{3\beta}\int_1^t 3\beta s^2 e^{\beta s^3}\,ds = \frac{1}{3\beta}\int_\beta^{\beta t^3} e^u\,du = \frac{1}{3\beta}\left[e^{\beta t^3} - e^{\beta}\right].$$

Substituindo isso na igualdade acima, obtemos

$$F(t) = \frac{1}{c_\alpha}t^{c_\alpha} + \int_0^t e^{\beta s^3}\,ds + \int_1^t e^{\beta s^3}\,ds \leq \frac{1}{c_\alpha}t^{c_\alpha} + \int_0^1 e^{\beta s^3}\,ds + \frac{1}{3\beta}e^{\beta t^3}, \quad \forall\ t \geq 1.$$

Daí, para $t \geq 1$, temos

$$\begin{aligned} F(t) &\leq C_1 + \frac{t^{c_\alpha}}{c_\alpha} + \frac{1}{3\beta}e^{\beta t^3} \leq C_1 + C_2 e^{\beta t^3} = (C_1 + C_2) + C_2(e^{\beta t^3} - 1) \\ &\leq (C_1 + C_2)\left[t^{c_\alpha - 1} + e^{\beta t^3} - 1\right] = c \cdot f(t). \end{aligned}$$

Portanto, vemos que (f_3) vale com $M = 1$, já que

$$\frac{F(t)}{f(t)} \leq c \leq c \cdot t^{1-1}, \quad \forall\ t \geq 1.$$

Para a condição $(f4)$, basta notar que

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{tf(t)}{e^{\beta t^3}} = \lim_{t\to+\infty}\frac{t^{c_\alpha} + te^{\beta t^3} - t}{e^{\beta t^3}} = \lim_{t\to+\infty}\frac{t^{c_\alpha} - t}{e^{\beta t^3}} + t = \infty.$$

Por fim, quanto à hipótese $(f5)$, segue que

$$F(t) = \int_0^t f(s)\,ds = \int_0^t \left(s^{c_\alpha - 1} + (e^{\beta s^3} - 1)\right) ds \geq \int_0^s s^{c_\alpha - 1}\,ds = \frac{1}{c_\alpha}t^{c_\alpha}, \quad \forall\ t \geq 0.$$

Isto é,

$$\frac{F(t)}{t^{c_\alpha}} \geq \frac{1}{c_\alpha}, \quad \forall\, t > 0$$

e com isso o ínfimo deste quociente em $(0, \infty)$ é positivo. Resta mostrar que $t \mapsto \frac{F(t)}{t^{c_\alpha}}$ é uma função não decrescente. Denote,

$$h(t) := \frac{1}{t^{c_\alpha}}\int_0^t \left(e^{\beta s^3} - 1\right) ds,$$

de modo que

$$\frac{F(t)}{t^{c_\alpha}} = \frac{1}{c_\alpha} + \frac{1}{t^{c_\alpha}}\int_0^t \left(e^{\beta s^3} - 1\right) ds = \frac{1}{c_\alpha} + h(t), \quad \forall t > 0.$$

A derivada de h é

$$\begin{aligned} h'(t) &= -\frac{c_\alpha}{t^{c_\alpha+1}}\int_0^t \left(e^{\beta s^3}-1\right) ds + \frac{1}{t^{c_\alpha}}\left(e^{\beta t^3}-1\right) \\ &= \frac{1}{t^{c_\alpha+1}}\left[t\left(e^{\beta t^3}-1\right) - c_\alpha\int_0^t \left(e^{\beta s^3}-1\right) ds\right] := \frac{1}{t^{c_\alpha+1}}\Psi(t), \end{aligned} \tag{2.4}$$

em que

$$\Psi(t) = t\left(e^{\beta t^3}-1\right) - c_\alpha\int_0^t \left(e^{\beta s^3}-1\right) ds.$$

Temos, $\Psi(0)=0$ e

$$\begin{aligned} \Psi'(t) &= e^{\beta t^3} - 1 + 3\beta t^3 e^{\beta t^3} - c_\alpha\left(e^{\beta t^3}-1\right) \\ &= e^{\beta t^3}\left(1+3\beta t^3 - c_\alpha\right) + c_\alpha - 1. \end{aligned}$$

Escrevendo $s=\beta t^3$, temos que $s\geq 0$ para $t\geq 0$. Defina $\Psi'(t) := \eta(s)$, isto é,

$$\eta(s) := e^s(1+3s-c_\alpha) + c_\alpha - 1.$$

Temos que $\eta(0)=0$ e

$$\eta'(s) = e^s(1+3s-c_\alpha) + 3e^s = e^s(4-c_\alpha+3s) > 0, \quad \forall\ s>0,$$

dado que $c_\alpha\leq 4$. Logo, η é crescente e daí

$$\Psi'(t) = \eta(\beta t^3) > \eta(0) = 0, \quad \forall\ t>0.$$

Isso mostra que Ψ é crescente, o que garante que

$$\Psi(t) > \Psi(0) = 0, \quad \forall\ t>0.$$

Assim, por (2.4), segue que $h'(t)>0$, $\forall\ t>0$. Logo, h é crescente. Consequentemente,

$$t \mapsto \frac{F(t)}{t^{c_\alpha}} = \frac{1}{c_\alpha} + h(t)$$

é crescente em $(0,\infty)$. Isso conclui a prova de que (f_5) vale e portanto f é um exemplo de função satisfazendo as condições deste capítulo.

O principal teorema deste capítulo é o seguinte:

Teorema 2.1. *Assuma que $(\phi_1)-(\phi_4)$ e $(f_1)-(f_5)$ são satisfeitas. Então existe $\mu^*>0$ tal que para todo $\mu\in(0,\mu^*)$ o Problema 2.1 tem solução fraca positiva $u_\mu \in C_0^{1,\sigma}(\overline{\Omega})$*

para algum $\sigma \in (0,1)$.

Diante das hipóteses sobre Φ, é apropriado recorrer ao método variacional no contexto dos espaços de Orlicz-Sobolev para o estudo do problema proposto. A seguir, apresentamos alguns resultados preliminares que serão fundamentais nas etapas subsequentes do trabalho.

2.1 Resultados básicos

Proposição 2.1 ([39], Teorema 3)**.** Sejam Φ e $\tilde{\Phi}$ N-funções conjugadas diferenciáveis. Então são equivalentes:

(a) $\Phi \in \Delta_2$.

(b) existe $\alpha \in (1,\infty)$ tal que $\Phi'(t)t/\Phi(t) < \alpha$ para todo $t \geq 0$.

(c) existe $\beta \in (1,\infty)$ tal que $\tilde{\Phi}'(s)s/\tilde{\Phi}(s) > \beta$ para todo $s \geq 0$.

(d) $\tilde{\Phi} \in \nabla_2$.

Lema 2.1 ([24], Lema 2.6)**.** Seja Φ uma N-função satisfazendo (ϕ_1) e (ϕ_2). Então $\Phi \in \nabla_2$.

Na Proposição 3.1 de [24], temos o seguinte resultado de imersão.

Lema 2.2. Se as condições (ϕ_1) e (ϕ_2) são satisfeitas, então as seguintes imersões são contínuas:

(a) $L^{\Phi}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^N(\mathbb{R}^N)$.

(b) $W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$.

(c) $W^{1,\Phi}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^N)$, para todo $r \in [N,+\infty)$.

Segue do lema acima que $W_0^{1,\Phi}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ para todo $r \in [1,+\infty)$, pois, em domínio limitado, temos a imersão contínua $L^N(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ para $r \in [1,N)$.

A seguir apresentamos alguns fatos que decorrem das hipóteses $(f_1)-(f_5)$.

(1) A hipótese (f_1) garante que $f(0)=0$.

De fato, por (f_1), temos

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tal que } 0 < t < \delta \implies \left|\frac{f(t)}{\Phi'(t)}\right| < \varepsilon.$$

Como Φ' é contínua e $\Phi'(0) = 0$, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$0 < t < \delta_1 \implies |\Phi'(t)| < \varepsilon.$$

Seja $0 < t < \min\{\delta, \delta_1\}$. Assim,

$$|f(t)| < \varepsilon\,|\Phi'(t)| < \varepsilon^2.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, conclui-se que

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = 0.$$

Pela continuidade de f, obtemos $f(0) = 0$.

Dessa forma, a não linearidade presente no Problema 2.1 assume, na origem, o valor $-\mu < 0$, o que permite classificar o problema como sendo do tipo semipositone.

(2) A hipótese (f_1) garante que, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que

$$F(t) < \epsilon\Phi(t), \text{ para } 0 \leq t < \delta. \tag{2.5}$$

Com efeito, considere $\epsilon > 0$. Pela hipótese $\lim_{t\to 0} \dfrac{f(t)}{\Phi'(t)} = 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$f(s) < \epsilon\Phi'(s), \quad \forall\, s \in (0, \delta).$$

Assim, para $0 < t < \delta$, temos

$$F(t) = \int_0^t f(s)\,ds \leq \epsilon \int_0^t \Phi'(s)\,ds = \epsilon\Phi(t).$$

(3) A hipótese (f_1) em conjunto com (f_2), garante que para $p \geq 1$, dado $\epsilon > 0$ existe $c_\epsilon > 0$ tal que

$$0 < F(t) \leq \epsilon\,\Phi(t) + c_\epsilon t^{p-1}\exp(\beta t^\gamma), \quad \forall\, t > 0. \tag{2.6}$$

(4) Seja $\sigma > c_\alpha$. As hipóteses $(f_2) - (f_3)$ implicam que a função f satisfaz a condição de Ambrosetti–Rabinowitz

$$0 < \sigma F(t) \leq f(t)t, \text{ para todo } t \geq R \tag{2.7}$$

para algum $R = R_\sigma \geq R_0$.

Com efeito, por (f_2) temos $F(t) > 0$ para todo $t > 0$. Devido a (f_3) obtemos

$$t^M F(t) \leq C\, f(t)\, t, \quad \forall t \geq R_0.$$

Seja $R \geq R_0$ tal que $R^M/C \geq \sigma$. Assim,

$$0 < \sigma F(t) \leq\; f(t)\, t, \quad \forall t \geq R.$$

(5) Seja $\sigma > c_\alpha$. As hipóteses $(f_2) - (f_3)$ implicam que existem constantes $c_1, c_2 > 0$ tais que

$$F(t) \geq c_1\, t^\sigma - c_2, \quad \forall t \geq 0. \tag{2.8}$$

De fato, por (2.7), para $t \geq R$, temos

$$\sigma \int_R^t \frac{1}{s}\, ds \;\leq\; \int_R^t \frac{F(s)}{f(s)}\, ds,$$

de onde

$$\sigma[\log(t) - \log(R)] \;\leq\; \log(F(t)) - \log(F(R)), \quad \forall\, t \geq R.$$

Daí,

$$\log\!\left(\left(\tfrac{t}{R}\right)^\sigma\right) \;\leq\; \log\!\left(\tfrac{F(t)}{F(R)}\right), \quad \forall\, t > R.$$

Assim,

$$F(t) \;\geq\; \frac{F(R)}{R^\sigma}\, t^\sigma =: c_1 t^\sigma, \quad \forall\, t \geq R.$$

Por outro lado, se $t \in [0, R]$, como F é limitada em compactos, existe uma constante $c_2 > 0$ tal que

$$-F(t) \leq |F(t)| \leq c_2.$$

Portanto,

$$F(t) \;\geq\; c_1\, t^\sigma - c_2, \quad \forall\, t \geq 0.$$

(6) A hipótese (f_4) implica que existe $t_0 > 0$ tal que

$$f(t)t \geq \frac{L}{2}\exp(\beta t^\gamma), \;\forall\, t \geq t_0. \tag{2.9}$$

(7) A hipótese (f_5) implica que

$$F(t) \geq k_0 t^{c_\alpha}, \quad \forall\, t \geq 0. \tag{2.10}$$

(8) Usando o fato de que $t \mapsto F(t)/t^{c_\alpha}$ é não decrescente para $t > 0$, parte da hipótese (f_5), vemos que

$$0 \leq c_\alpha F(t) \leq t f(t), \quad \forall\, t \geq 0. \tag{2.11}$$

Lema 2.3. Seja Φ uma N-função satisfazendo as hipótes (ϕ_1) e (ϕ_3). Então, para $m_\alpha = \tilde{m}_\alpha + 1$ e $c_\alpha = \tilde{c}_\alpha + 1$ valem as sequintes desigualdades:

(a) Tem-se

$$m_\alpha \leq \frac{\Phi'(t)t}{\Phi(t)} \leq c_\alpha, \quad \forall\, t > 0; \tag{2.12}$$

(b) $1 < m_\alpha \leq N \leq c_\alpha < \infty$.

Demonstração. (a) Pela hipótese (ϕ_3) temos

$$0 < \tilde{m}_\alpha \leq \frac{\Phi''(t)t}{\Phi'(t)} \leq \tilde{c}_\alpha < \infty, \quad \forall\, t > 0,$$

o que implica que

$$\tilde{m}_\alpha \Phi'(s) \leq \Phi''(s)s \leq \tilde{c}_\alpha \Phi'(s), \quad \forall\, s > 0.$$

Assim, usando integração por partes obtemos

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= \int_0^t \Phi'(s)\, ds \leq \frac{1}{\tilde{m}_\alpha} \int_0^t \Phi''(s)s\, ds = \frac{1}{\tilde{m}_\alpha}\left[s\Phi'(s)|_0^t - \int_0^t \Phi'(s)\, ds \right] \\ &= \frac{1}{\tilde{m}_\alpha}\left[t\Phi'(t) - \Phi(t) \right],\end{aligned}$$

o que nos dá

$$m_\alpha \Phi(t) = (\tilde{m}_\alpha + 1)\Phi(t) \leq t\Phi'(t), \quad \forall t > 0. \tag{2.13}$$

De modo análogo obtemos

$$c_\alpha \Phi(t) = (\tilde{c}_\alpha + 1)\Phi(t) \geq t\Phi'(t), \quad \forall t > 0, \tag{2.14}$$

o que garante que (2.12) se verifica.

(b) É claro que $1 < m_\alpha \leq c_\alpha < \infty$. Além disso, ao derivarmos a função $t \mapsto \Phi(t)/t^{c_\alpha}$, verificamos que a desigualdade (2.14) implica que esta função é não-crescente para

$t > 0$. De forma análoga, a partir da desigualdade de (2.13) segue que $t \mapsto \Phi(t)/t^{m_\alpha}$ é não-decrescente para $t > 0$. Logo,

$$\Phi(1)t^{c_\alpha} \leq \Phi(t) \leq \Phi(1)t^{m_\alpha}, \ \forall\, t \in [0,1].$$

Combinando essas desigualdades com a hipótese (ϕ_1), obtemos que, para $t \in [0, 1/C)$, valem as seguintes relações

$$\Phi(1)t^{c_\alpha} \leq \Phi(t) \leq Ct^N \quad \text{e} \quad \frac{1}{C}t^N \leq \Phi(t) \leq \Phi(1)t^{m_\alpha},$$

donde $m_\alpha \leq N \leq c_\alpha$. □

Observação 2.1. Decorre do Lema 2.3 que Φ satisfaz a condição (1.3) da N-função A, apresentada no Capítulo 1. Assim, concluímos que os Lemas 1.5, 1.6 e 1.7 são aplicáveis a Φ com os parâmetros $m = m_\alpha$ e $M = c_\alpha$. Em particular, isso implica que Φ e $\widetilde{\Phi}$ satisfazem a condição Δ_2. Daí, pela Proposição 2.1, Φ e $\widetilde{\Phi}$ satisfazem também a condição ∇_2. Em particular, pela Observação 1.1, temos que $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ é um espaço de Banach reflexivo.

2.2 Um problema auxiliar e lemas técnicos

O objetivo desta seção é formular um problema auxiliar que contorne a dificuldade causada pela presença do termo constante negativo $-\mu$ no problema original, o qual impede que a função identicamente nula seja uma subsolução, dificultando a aplicação direta de métodos variacionais clássicos.

O problema auxiliar de que falamos é

$$\begin{cases} -\Delta_\Phi u &= f(u^+) - \mu g(u) & \text{em } \Omega, \\ u &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.15}$$

com $u^+(x) = \max\{u(x), 0\}$ e $g : \mathbb{R} \to [0,1]$ a função auxiliar definida a seguir

$$g(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t \leq -1, \\ 1+t, & \text{se } -1 < t < 0, \\ 1, & \text{se } t \geq 0. \end{cases} \tag{2.16}$$

Ao considerar uma versão modificada do problema, com a introdução de um termo auxiliar $g(u)$, tornamos possível o emprego de ferramentas variacionais clássicas, como o Teorema do Passo da Montanha.

Dizemos que $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ é uma solução fraca do problema auxiliar (2.15), se

$$\int_\Omega \Phi'(|\nabla u|)\frac{\nabla u \nabla v}{|\nabla u|}\, dx = \int_\Omega f(u^+)v\, dx - \mu \int_\Omega g(u)v\, dx, \tag{2.17}$$

para toda $v \in C_c^\infty(\Omega)$.

Seja $E_\mu \colon W_0^{1,\Phi}(\Omega) \to \mathbb{R}$ o funcional definido por

$$E_\mu(u) = \int_\Omega \Big[\Phi(|\nabla u|) - F(u^+) + \mu G(u)\Big]\, dx,$$

em que

$$F(t) = \int_0^t f(s)\, ds \quad \text{e} \quad G(t) = \int_0^t g(s)\, ds,$$

com f uma função contínua satisfazendo as hipóteses (f_1)–(f_5), g sendo a função definida em (2.16) e Φ uma N-função de classe C^2 que cumpre as condições (ϕ_1)–(ϕ_4). Essa modificação do problema original permite mostrar, através da desigualdade de Trudinger-Moser (ver Teorema 4.4), que o funcional energia E_μ, associado ao problema auxiliar, está bem definido. Além disso, E_μ é de classe $C^1(\Omega)$ e satisfaz as condições requeridas para a aplicação do Teorema do Passo da Montanha.

O próximo lema estabelece uma desigualdade entre as funções g e G, a qual será utilizada em demonstrações subsequentes.

Antes de enunciarmos o próximo resultado, destacamos que a análise variacional feita no Teorema Auxiliar 2.2 da seção seguinte requer a convergência da primitiva F. Em particular, será necessário garantir que, sob hipóteses adequadas, a integral de $F(u_j^+)$ converge para a integral de $F(u^+)$, mesmo na ausência de convergência forte. O lema a seguir estabelece esse resultado e será usado nas Afirmações 2.2 e 2.4 da prova do Teorema 2.2.

Definição 2.1. Seja $A \subset \Omega$ um conjunto mensurável. A função característica de A, denotada por χ_A, é definida por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A, \\ 0, & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

Lema 2.4. Seja $\{u_j\} \subset W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ uma sequência tal que $u_j(x) \to u(x)$ q.t.p. em Ω, para algum $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, e suponha que

$$C_1 := \sup_j \int_\Omega u_j^+ f(u_j^+)\, dx < \infty. \tag{2.18}$$

Então

$$\int_\Omega F(u_j^+)\,dx \longrightarrow \int_\Omega F(u^+)\,dx.$$

Demonstração. Seja $\{u_j\} \subset W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ uma sequência tal que $u_j(x) \to u(x)$ q.t.p. $x \in \Omega$, para algum $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, e suponha que a sequência $(u_j^+ f(u_j^+))$ é limitada em $L^1(\Omega)$. Devido a (2.18), segue do Lema de Fatou (ver Lema 4.1), que

$$0 \le \int_\Omega u^+ f(u^+)\,dx \le \liminf_{j\to\infty} \int_\Omega u_j^+ f(u_j^+)\,dx \le C_1.$$

De acordo com a hipótese (f_3), existe $R_0 > 0$ tal que

$$0 \le F(t) \le \frac{C}{t^M} f(t)t \quad \forall\, t > R_0,$$

para certas constantes $C, M > 0$. Dado $\varepsilon > 0$, seja $R \ge R_0$ tal que $4(CC_1/R^M) < \varepsilon$. Para esse valor de R, usando a desigualdade triangular e lembrando que $f(t)t \ge 0$, para todo $t \ge 0$, temos

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega F(u_j^+)\,dx - \int_\Omega F(u^+)\,dx\right| &\le \left|\int_{\{u_j^+ \ge R\}} F(u_j^+)\,dx - \int_{\{u^+ \ge R\}} F(u^+)\,dx\right| \\
&\quad + \left|\int_{\{u_j^+ < R\}} F(u_j^+)\,dx - \int_{\{u^+ < R\}} F(u^+)\,dx\right| \\
&\le \frac{C}{R^M}\int_\Omega u_j^+ f(u_j^+)\,dx + \frac{C}{R^M}\int_\Omega u^+ f(u^+)\,dx \\
&\quad + \left|\int_{\{u_j^+ < R\}} F(u_j^+)\,dx - \int_{\{u^+ < R\}} F(u^+)\,dx\right|. \qquad (2.19)
\end{aligned}$$

Para estimar o último termo, recorremos ao uso de funções características e à desigualdade triangular, obtendo assim a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\{u_j^+ < R\}} F(u_j^+)\,dx - \int_{\{u^+ < R\}} F(u^+)\,dx\right| &= \left|\int_\Omega F(u_j^+)\chi_{\{u_j^+ < R\}}\,dx - \int_\Omega F(u^+)\chi_{\{u^+ < R\}}\,dx\right| \\
&\le \int_\Omega |F(u_j^+) - F(u^+)|\chi_{\{u_j^+ < R\}}\,dx \\
&\quad + \int_\Omega F(u^+)\left|\chi_{\{u_j^+ < R\}} - \chi_{\{u^+ < R\}}\right|\,dx. \qquad (2.20)
\end{aligned}$$

Pela continuidade de F, segue que ela é limitada em $[0, R]$. Portanto, existe uma constante $\tilde{C} > 0$, tal que

$$\chi_{\{u_j^+ < R\}}|F(u_j^+) - F(u^+)| \le \tilde{C} + F(u^+) \in L^1(\Omega).$$

Além disso, como $u_j^+(x) \to u^+(x)$ q.t.p. $x \in \Omega$ e F é contínua, temos que $F(u_j^+(x)) \to F(u^+(x))$ q.t.p. $x \in \Omega$. Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada (ver Teorema 4.6), segue que

$$\int_\Omega |F(u_j^+) - F(u^+)|\chi_{\{u_j^+<R\}}\, dx \to 0. \tag{2.21}$$

Para a última integral em (2.20), observamos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega F(u^+)\left|\chi_{\{u_j^+<R\}} - \chi_{\{u^+<R\}}\right| dx = &\int_{\{u^+<R\}} F(u^+)\left|\chi_{\{u_j^+<R\}} - 1\right| dx\\ &+ \int_{\{u^+\geq R\}} F(u^+)\chi_{\{u_j^+<R\}}\, dx.\end{aligned} \tag{2.22}$$

Como $u_j^+(x) \to u^+(x)$ q.t.p. $x \in \Omega$, segue que $\chi_{\{u_j^+<R\}}(x) \to 1$ q.t.p. $x \in \{u^+ < R\}$. Além disso,

$$0 \leq F(u^+)\left|\chi_{\{u_j^+<R\}} - 1\right| \leq F(u^+) \in L^1(\Omega).$$

Assim, novamente pelo Teorema da Convergência Dominada, temos

$$\int_\Omega F(u^+)\left|\chi_{\{u_j^+<R\}} - 1\right| dx \to 0. \tag{2.23}$$

Para o último termo de (2.22), vemos que

$$\int_{\{u^+\geq R\}} F(u^+)\chi_{\{u_j^+<R\}}\, dx \leq \frac{C}{R^M}\int_{\{u^+\geq R\}} f(u^+)u^+\, dx.$$

Juntando esta última desigualdade a (2.20)-(2.23) e inserindo essas informações em (2.19) concluímos que

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega F(u_j^+)\, dx - \int_\Omega F(u^+)\, dx\right| &\leq \frac{C}{R^M}\int_\Omega u_j^+ f(u_j^+)\, dx + \frac{2C}{R^M}\int_\Omega u^+ f(u^+)\, dx + o(1)\\ &\leq \frac{3CC_1}{R^M} + o(1) < \varepsilon\end{aligned}$$

para $j \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, segue o resultado. □

O próximo resultado será utilizado na Afirmação 2.4 da demonstração do Teorema Auxiliar 2.2 adiante. Ele fornece uma estimativa fundamental de limitação do termo exponencial. Esse tipo de resultado está relacionado à desigualdade de Trudinger–Moser generalizada.

Lema 2.5. ([18], Proposição 4.1). Considere Φ uma N- função satisfazendo $(\phi_1)-(\phi_2)$. Sejam $N \geq 2$, $\alpha < N-1$ e (u_j) uma sequência de funções em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, tal que

$$\lim_{j\to\infty}\int_\Omega \Phi(|\nabla u_j|)\, dx < \infty \quad \text{e} \quad \nabla u_j(x) \to \nabla u(x) \quad \text{q.t.p.} \quad x \in \Omega.$$

Então para cada

$$p < P := \left(\frac{1}{\lim\limits_{j\to\infty} \int_\Omega \Phi(|\nabla u_j|)\,dx - \int_\Omega \Phi(|\nabla u|)\,dx} \right)^{\frac{\gamma}{N}},$$

($P = \infty$ se o denominador é zero), temos

$$\int_\Omega \exp(K_{N,\alpha} p |u_j|^\gamma)\,dx \le C,$$

em que C é uma constante que não depende de j.

Lema 2.6. ([19], Proposição 3.2). Considere Φ uma função de N-função satisfazendo (ϕ_1) e (ϕ_2). Seja $(u_j) \subset W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ uma sequência, tal que

$$\int_\Omega \Phi(|\nabla u_j|)\,dx \le \bar{c} < \left(\frac{K_{N,\alpha}}{\beta}\right)^{N/\gamma}, \quad \text{para cada} \quad j \in \mathbb{N}.$$

Então existem $q > 1$ e $C > 0$, tais que

$$\int_\Omega \exp(q\beta |u_j|^\gamma)\,dx < C, \quad \text{para cada} \quad j \in \mathbb{N}.$$

Definição 2.2 (Sequência (PS))**.** Sejam X um espaço de Banach e $I\colon X \to \mathbb{R}$ um funcional de classe $C^1(X)$. Dizemos que uma sequência $(u_j) \subset X$ é uma sequência de Palais–Smale para I no nível $c \in \mathbb{R}$ se ela satisfaz:

(a) $I(u_j) \to c$;

(b) $I'(u_j) \to 0$ em X^*.

Em outras palavras, trata-se de uma sequência cujos valores pelo funcional se aproximam do nível c enquanto os funcionais derivadas tendem a zero no dual X^*, caracterizando-a como uma sequência de “quase-pontos críticos” de I.

Definição 2.3 (Funcional $(\mathrm{PS})_c$)**.** Seja X um espaço de Banach. Dizemos que um funcional $I\colon X \to \mathbb{R}$ satisfaz a condição de Palais–Smale no nível $(\mathrm{PS})_c$, se toda sequência (PS) para I no nível c possui subsequência convergente em X.

O objetivo do teorema a seguir é provar um resultado de compacidade, o qual possui interesse independente. Como consequência, veremos no corolário seguinte que o funcional E_μ satisfaz a condição $(\mathrm{PS})_c$ para valores de c apropriados.

2.2.1 Um teorema auxiliar

O objetivo dessa subseção é provar um resultado de compacidade, o qual possui interesse independente. Como consequência, veremos no corolário seguinte que o funcional E_μ satisfaz a condição $(\mathrm{PS})_c$ para valores de c apropriados.

Lema 2.7. Para todo $t \in \mathbb{R}$ temos que $G(t) \geq g(t)t - 1/2$.

Demonstração. Para $t \in (-1, 0)$, temos que $t + \frac{t^2}{2} \geq t + t^2 - 1/2$. Assim, desde que

$$G(t) = \begin{cases} -1/2, & \text{se } t \leq -1, \\ t + \frac{t^2}{2}, & \text{se } -1 < t < 0, \\ t, & \text{se } t \geq 0, \end{cases}$$

e

$$g(t)t - 1/2 = \begin{cases} -1/2, & \text{se } t \leq -1, \\ t + t^2 - 1/2, & \text{se } -1 < t < 0, \\ t - 1/2, & \text{se } t \geq 0, \end{cases}$$

temos que $G(t) \geq g(t)t - 1/2$. □

A seguir, temos um importante resultade de compacidade.

Teorema 2.2. *Sejam $\mu_j > 0$ uma sequência tal que $\mu_j \to \mu \geq 0$ e $(u_j) \subset W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ uma sequência que satisfaz:*

$$E_{\mu_j}(u_j) \to c \quad e \quad E'_{\mu_j}(u_j) \to 0 \quad em\ [W_0^{1,\Phi}(\Omega)]^*,$$

para algum $c \neq 0$ tal que

$$c < \left(\frac{K_{N,\alpha}}{\beta}\right)^{\frac{N}{\gamma}} - \frac{\mu}{2}|\Omega|, \tag{2.24}$$

em que $\beta > 0$ é a constante fornecida por (f_2) e $K_{N,\alpha}$ foi dado na Definição 0.1. Então, existe uma subsequência de (u_j) que converge em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ para um ponto crítico de E_μ no nível c.

Demonstração. Como $E_{\mu_j}(u_j) \to c$, temos

$$E_{\mu_j}(u_j) = \int_\Omega \Phi(|\nabla u_j|)\, dx - \int_\Omega F(u_j^+)\, dx + \mu_j \int_\Omega G(u_j)\, dx = c + o(1), \tag{2.25}$$

e, já que

$$|E'_{\mu_j}(u_j)(v)| \leq \|E'_{\mu_j}(u_j)\|_* \cdot \|v\| = o(1)\|v\|,$$

obtemos

$$\int_\Omega \Phi'(|\nabla u_j|)\frac{\nabla u_j}{|\nabla u_j|}\cdot\nabla v\,dx - \int_\Omega f(u_j^+)v\,dx + \mu_j\int_\Omega g(u_j)v\,dx = o(1)\|v\|,$$

quando $j\to\infty$, para todo $v\in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$. Em particular, tomando $v=u_j$, obtemos

$$E'_{\mu_j}(u_j)(u_j) = \int_\Omega \Phi'(|\nabla u_j|)|\nabla u_j|\,dx - \int_\Omega f(u_j^+)u_j^+\,dx + \mu_j\int_\Omega g(u_j)u_j\,dx = o(\|u_j\|). \tag{2.26}$$

Pela hipótese (f_3), dado $\delta\in(0,1)$, existe uma constante $c_1=c_1(\delta)>0$, tal que

$$F(t)\le c_1+\delta\, t f(t)\quad \text{para todo } t\in\mathbb{R}.$$

Além disso, pelas definições das funções g e G, temos

$$\left|\int_\Omega g(u_j)u_j\,dx\right|\le\int_\Omega|u_j|\,dx,\qquad \left|\int_\Omega G(u_j)\,dx\right|\le\int_\Omega|u_j|\,dx,\quad \forall\, j\in\mathbb{N}. \tag{2.27}$$

Afirmação 2.1. A sequência (u_j) é limitada em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$.

De fato, pela equação (2.25), temos

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Phi(|\nabla u_j|)\,dx &= \int_\Omega F(u_j^+)\,dx+\mu_j\int_\Omega G(u_j)\,dx + c + o(1)\\ &\le c_1+\delta\int_\Omega f(u_j^+)u_j^+\,dx - \mu_j\int_\Omega G(u_j)\,dx + c + o(1)\\ &\le c_2+\delta\left[\int_\Omega \Phi'(|\nabla u_j|)|\nabla u_j|\,dx+\mu_j\int_\Omega g(u_j)u_j\,dx - o(\|u_j\|)\right]\\ &\quad -\mu_j\int_\Omega G(u_j)\,dx + o(1).\end{aligned}$$

Assim, por (2.27) e pela imersão $W_0^{1,\Phi}(\Omega)\hookrightarrow L^1(\Omega)$ mencionada logo após o Lema 2.2, segue que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Phi(|\nabla u_j|)\,dx-\delta\int_\Omega \Phi'(|\nabla u_j|)|\nabla u_j|\,dx &\le c_2+\delta\mu_j\int_\Omega g(u_j)u_j\,dx-\mu_j\int_\Omega G(u_j)\,dx\\ &\quad + o(1)+o(\|u_j\|)\\ &\le c_3+c_4\|u_j\|.\end{aligned}$$

Por (2.14) temos que $\Phi'(t)t/\Phi(t)\le c_\alpha$, para todo $t>0$. Como Φ é uma função par, segue que, $\Phi'(t)t\le c_\alpha\Phi(t)$ para todo $t\in\mathbb{R}$. Assim,

$$\delta\int_\Omega \Phi'(|\nabla u_j|)|\nabla u_j|\,dx\le c_\alpha\delta\int_\Omega\Phi(|\nabla u_j|)\,dx,\quad \forall\, j\in\mathbb{N}.$$

Substituindo esta estimativa na desigualdade anterior, obtemos

$$(1 - c_\alpha \delta) \int_\Omega \Phi(|\nabla u_j|)\, dx \leq c_2 + c_3 \|u_j\|.$$

Além disso, para todo $v \in L^\Phi(\Omega)$, vale a desigualdade

$$\min\{\|v\|_\Phi^{c_\alpha}, \|v\|_\Phi^{m_\alpha}\} \leq \int_\Omega \Phi(v)\, dx \leq \max\{\|v\|_\Phi^{c_\alpha}, \|v\|_\Phi^{m_\alpha}\}.$$

Fazendo $v = |\nabla u_j|$ na desigualdade acima e lembrando que $\|u_j\| = \|\nabla u_j\|_\Phi$, obtemos

$$(1 - c_\alpha \delta) \min\{\|u_j\|^{c_\alpha}, \|u_j\|^{m_\alpha}\} \leq c_2 + c_3 \|u_j\|, \quad \forall\, j \in \mathbb{N}.$$

Daí se conclui que a sequência (u_j) é limitada em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, visto que $c_\alpha \geq m_\alpha > 1$. Isso conclui a prova da Afirmação 2.1. Em particular, pelas imersões do Lema 2.2, temos que, a menos de subsequência:

$$\begin{aligned} &u_j \rightharpoonup u && \text{em } W_0^{1,\Phi}(\Omega), \\ &u_j \to u && \text{em } L^p(\Omega), \quad \text{para todo } p \in [1, \infty), \\ &u_j(x) \to u(x) && \text{q.t.p. } x \in \Omega. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Afirmação 2.2. A função u é não nula.

Como (u_j) é limitada, temos pela equação (2.26) que

$$E'_{\mu_j}(u_j)(u_j) = \int_\Omega \Phi'(|\nabla u_j|)|\nabla u_j|\, dx - \int_\Omega f(u_j^+) u_j^+\, dx + \mu_j \int_\Omega g(u_j) u_j\, dx \longrightarrow 0. \tag{2.29}$$

Como $\Phi \in \Delta_2$, vemos que $(\int_\Omega \Phi(|\nabla u_j|)\, dx)$ é limitada. Pela desigualdade (2.14) concluímos que a sequência $(\Phi'(|\nabla u_j|)\, |\nabla u_j|)$ é limitada. Usando esse fato juntamente com os controles dados por (2.27), obtemos de (2.29) que

$$\sup_j \int_\Omega u_j^+ f(u_j^+)\, dx < \infty. \tag{2.30}$$

Dessa forma, podemos aplicar o Lema 2.4, o que nos garante que

$$\int_\Omega F(u_j^+)\, dx \longrightarrow \int_\Omega F(u^+)\, dx. \tag{2.31}$$

Além disso, a convergência $u_j \to u$ em $L^1(\Omega)$ junto com o fato de as funções g e G serem ambas contínuas, assegura que

$$\mu_j \int_\Omega u_j g(u_j)\, dx \longrightarrow \mu \int_\Omega u g(u)\, dx \quad \text{e} \quad \mu_j \int_\Omega G(u_j)\, dx \longrightarrow \mu \int_\Omega G(u)\, dx. \tag{2.32}$$

Suponha, por absurdo, que $u = 0$. Então, pelas convergências dadas em (2.31) e (2.32), segue que

$$\int_\Omega F(u_j^+)\,dx \longrightarrow 0, \qquad \mu_j \int_\Omega u_j g(u_j)\,dx \longrightarrow 0, \qquad \mu_j \int_\Omega G(u_j)\,dx \longrightarrow 0. \tag{2.33}$$

Portanto, pela equação (2.25), obtemos que

$$\int_\Omega \Phi(|\nabla u_j|)\,dx \longrightarrow c.$$

Entretanto, como

$$c < \left(\frac{K_{N,\alpha}}{\beta}\right)^{\frac{N}{\gamma}} - \frac{\mu}{2}|\Omega| < \left(\frac{K_{N,\alpha}}{\beta}\right)^{\frac{N}{\gamma}},$$

existem $c_1 < \left(\frac{K_{N,\alpha}}{\beta}\right)^{\frac{N}{\gamma}}$ e $j_0 \in \mathbb{N}$, tais que

$$\int_\Omega \Phi(|\nabla u_j|)\,dx < c_1, \quad \forall\, j \geq j_0.$$

Assim, o Lema 2.6 garante que existem constantes $c_2 > 0$ e $q > 1$ tais que

$$\int_\Omega \exp(q\beta|u_j|^\gamma)\,dx \leq c_2, \quad \forall\, j \geq j_0.$$

Agora, aplicando a hipótese de crescimento da função f dada por (f_2), e usando a desigualdade de Hölder com expoentes conjugados q e q', obtemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega u_j^+ f(u_j^+)\,dx &\leq c_3 \int_\Omega \Big(|u_j|^N + |u_j|\exp(\beta|u_j|^\gamma)\Big)\,dx \\
&\leq c_3 \int_\Omega |u_j|^N\,dx + c_4 \left(\int_\Omega |u_j|^{q'}\,dx\right)^{1/q'} \left(\int_\Omega \exp(q\beta|u_j|^\gamma)\,dx\right)^{1/q} \\
&\leq c_3 \int_\Omega |u_j|^N\,dx + c_5 \left(\int_\Omega |u_j|^{q'}\,dx\right)^{1/q'} \longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

visto que $u_j \to 0$ em $L^{q'}(\Omega)$ e em $L^N(\Omega)$. Essa convergência, combinada com (2.29) e (2.33), implica que

$$\int_\Omega \Phi'(|\nabla u_j|)\,|\nabla u_j|\,dx \longrightarrow 0,$$

e, portanto, (2.13) garante que

$$\int_\Omega \Phi(|\nabla u_j|)\,dx \longrightarrow 0.$$

Finalmente, usando as equações (2.25) e (2.33), concluímos que

$$E_{\mu_j}(u_j) \longrightarrow 0,$$

o que é um absurdo, pois $E_{\mu_j}(u_j) \to c \neq 0$. Portanto, $u \not\equiv 0$, como queríamos demonstrar.

Afirmação 2.3. O limite fraco u em (2.28) é um ponto crítico do funcional energia E_μ.

Com efeito, dado que $E'_{\mu_j}(u_j) \to 0$, temos

$$\int_\Omega \Phi'(|\nabla u_j|)\,\frac{\nabla u_j}{|\nabla u_j|} \cdot \nabla v\,dx - \int_\Omega f(u_j^+)\,v\,dx + \mu_j \int_\Omega g(u_j)\,v\,dx \longrightarrow 0, \tag{2.34}$$

para todo $v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$. Estudaremos agora o comportamento de cada uma das três integrais. Primeiro, como $|g(u_j)| \leq 1$, $v \in L^1(\Omega)$ e $\mu_j \to \mu$, segue do Teorema da Convergência Dominada (ver Teorema 4.6), que

$$\mu_j \int_\Omega g(u_j)\,v\,dx \longrightarrow \mu \int_\Omega g(u)\,v\,dx, \quad \forall\, v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega). \tag{2.35}$$

Para a segunda integral, dado $v \in C_c^\infty(\Omega)$ e $R > 0$, temos

$$\left|\int_{\{u_j^+ \geq R\}} f(u_j^+)\,v\,dx\right| \leq \frac{\|v\|_\infty}{R} \int_\Omega f(u_j^+)u_j^+\,dx, \quad \forall\, j \in \mathbb{N}.$$

Lembremos que a sequência $(u_j^+ f(u_j^+))$ é limitada, como visto em (2.30). Usando um raciocínio análogo ao do Lema 2.4, obtemos

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega f(u_j^+)\,v\,dx - \int_\Omega f(u^+)\,v\,dx\right| &\leq \left|\int_{\{u_j^+ \geq R\}} f(u_j^+)\,v\,dx - \int_{\{u^+ \geq R\}} f(u^+)\,v\,dx\right| \\
&\quad + \left|\int_{\{u_j^+ < R\}} f(u_j^+)\,v\,dx - \int_{\{u^+ < R\}} f(u^+)\,v\,dx\right| \\
&\leq \frac{\|v\|_\infty}{R} \int_\Omega \Big(f(u_j^+)u_j^+ + f(u^+)u^+\Big)\,dx \\
&\quad + \left|\int_{\{u_j^+ < R\}} f(u_j^+)\,v\,dx - \int_{\{u^+ < R\}} f(u^+)\,v\,dx\right|.
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Agora, usando a desigualdade triangular no último termo acima, segue que

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\{u_j^+ < R\}} f(u_j^+)\,v\,dx - \int_{\{u^+ < R\}} f(u^+)\,v\,dx\right| &\leq \left|\int_\Omega \Big(f(u_j^+)v - f(u^+)v\Big)\,\chi_{\{u_j^+ < R\}}\,dx\right| \\
&\quad + \int_\Omega f(u^+)\,|v|\left|\chi_{\{u_j^+ < R\}} - \chi_{\{u^+ < R\}}\right|\,dx.
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Como f é contínua em $[0, R]$ e $v \in C_c^\infty(\Omega)$, temos que $f(u_j^+(x))v \to f(u^+(x))v$ q.t.p.

em Ω e é dominada por função integrável como a seguir,

$$\left| f(u_j^+)v - f(u^+)v \right| \chi_{\{u_j^+<R\}} \leq C + |f(u^+)v| \in L^1(\Omega),$$

segue novamente do Teorema da Convergência Dominada

$$\int_\Omega \Big(f(u_j^+)v - f(u^+)v \Big) \chi_{\{u_j^+<R\}}\, dx \longrightarrow 0. \tag{2.38}$$

Por fim, temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f(u^+)|v| \left|\chi_{\{u^+<R\}} - \chi_{\{u_j^+<R\}}\right| dx &= \int_{\{u^+<R\}\cup\{u^+\geq R\}} f(u^+)|v| \left|\chi_{\{u^+<R\}} - \chi_{\{u_j^+<R\}}\right| dx \\
&= \int_{\{u^+<R\}} f(u^+)|v| \left|1 - \chi_{\{u_j^+<R\}}\right| dx \\
&\quad + \int_{\{u^+\geq R\}} f(u^+)|v| \left|\chi_{\{u_j^+<R\}}\right| dx \\
&\leq o(1) + \frac{\|v\|_\infty}{R} \int_\Omega f(u^+)u^+\, dx \qquad (2.39)
\end{aligned}$$

visto que o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue também garante que

$$\int_{\{u^+<R\}} f(u^+)|v| \left|1 - \chi_{\{u_j^+<R\}}\right| dx \to 0.$$

Utilizando (2.38) e (2.39) em (2.37) e, em seguida, retornando à equação (2.36), concluímos que

$$\left| \int_\Omega f(u_j^+)v\, dx - \int_\Omega f(u)^+ v\, dx \right| \leq \frac{c}{R} + o(1),$$

quando $j \to \infty$. Sendo $R > 0$ arbitrário, segue que

$$\int_\Omega f(u_j^+)\, v\, dx \to \int_\Omega f(u^+)\, v\, dx \quad \forall\, v \in C_c^\infty(\Omega). \tag{2.40}$$

Para a primeira integral em (2.34), usamos os Lemas 4.3 e 4.4, para garantir que a menos de subsequência, temos

$$\nabla u_j(x) \longrightarrow \nabla u(x) \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega, \tag{2.41}$$

e,

$$\int_\Omega \Phi'(|\nabla u_j|) \frac{\nabla u_j}{|\nabla u_j|} \cdot \nabla v\, dx \longrightarrow \int_\Omega \Phi'(|\nabla u|) \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \cdot \nabla v\, dx, \quad \forall\, v \in C_c^\infty(\Omega). \tag{2.42}$$

Pelas três convergências obtidas em (2.35), (2.40) e (2.42), segue que

$$\int_\Omega \Phi'(|\nabla u|)\,\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\cdot \nabla v\,dx = \int_\Omega f(u^+)\,v\,dx - \mu\int_\Omega g(u)\,v\,dx, \quad \forall\, v\in C_c^\infty(\Omega).$$

Pela densidade de $C_c^\infty(\Omega)$ em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, concluímos que u é um ponto crítico de E_μ. Em particular, tomando $v=u$, obtemos

$$\int_\Omega \Phi'(|\nabla u|)\,|\nabla u|\,dx = \int_\Omega f(u^+)\,u^+\,dx - \mu\int_\Omega ug(u)\,dx. \tag{2.43}$$

Afirmação 2.4. A sequência (u_j) é tal que $u_j\to u$ em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$.

Primeiramente, lembremos que por (2.31) e (2.32) temos

$$\int_\Omega F(u_j^+)\,dx \longrightarrow \int_\Omega F(u^+)\,dx \quad \text{e} \quad \mu_j\int_\Omega G(u_j)\,dx \longrightarrow \mu\int_\Omega G(u)\,dx. \tag{2.44}$$

Agora, queremos garantir que

$$\int_\Omega f(u_j^+)\,u_j^+\,dx \longrightarrow \int_\Omega f(u^+)\,u^+\,dx. \tag{2.45}$$

Para isso, mostraremos, inicialmente, que $(f(u_j^+))$ é limitada em $L^q(\Omega)$ para algum $q>1$. De fato, pelo Lema 2.7, temos que

$$c_\alpha G(t) - g(t)t \geq -\frac{c_\alpha}{2}, \quad \forall\, t\in\mathbb{R}.$$

Assim, segue de (2.14) e da condição de Ambrosetti–Rabinowitz com o parâmetro $\theta = c_\alpha$, vista em (2.11), que

$$\begin{aligned}
E_\mu(u) &= E_\mu(u) - \frac{1}{c_\alpha}E'_\mu(u)(u)\\
&= \int_\Omega \left[\Phi(|\nabla u|) - \frac{1}{c_\alpha}\Phi'(|\nabla u|)\,|\nabla u|\right]dx - \int_\Omega\left[F(u^+) - \frac{1}{c_\alpha}f(u^+)\,u^+\right]dx\\
&\quad + \frac{\mu}{c_\alpha}\int_\Omega \left[c_\alpha G(u) - g(u)\,u\right]dx\\
&\geq -\frac{\mu}{2}|\Omega|.
\end{aligned}$$

Logo, usando a hipótese sobre a constante c, dada em (2.24), obtemos

$$c - E_\mu(u) < \left(\frac{K_{N,\alpha}}{\beta}\right)^{N/\gamma}.$$

Além disso, como $E_\mu(v_j) \to c$ e valem as convergências em (2.44), temos

$$\begin{aligned}\lim_{j\to\infty}\int_\Omega \Phi(|\nabla u_j|)\,dx &= \lim_{j\to\infty}\left[E_{\mu_j}(u_j) + \int_\Omega F(u_j^+)\,dx - \mu_j\int_\Omega G(u_j)\,dx\right]\\ &= c + \int_\Omega F(u^+)\,dx - \mu\int_\Omega G(u)\,dx\\ &= c - E_\mu(u) + \int_\Omega \Phi(|\nabla u|)\,dx.\end{aligned}$$

Combinando isso com desigualdade estrita obtida acima, temos

$$\lim_{j\to\infty}\int_\Omega \Phi(|\nabla u_j|)\,dx - \int_\Omega \Phi(|\nabla u|)\,dx = c - E_\mu(u) < \left(\frac{K_{N,\alpha}}{\beta}\right)^{N/\gamma}.$$

Como Φ é contínua e convexa segue do Teorema 4.5 que

$$\int_\Omega \Phi(|\nabla u|)\,dx \le \liminf_{j\to\infty}\int_\Omega \Phi(|\nabla u_j|)\,dx = \lim_{j\to\infty}\int_\Omega \Phi(|\nabla u_j|)\,dx.$$

Daí,

$$0 \le \lim_{j\to\infty}\int_\Omega \Phi(|\nabla u_j|)\,dx - \int_\Omega \Phi(|\nabla u|)\,dx < \left(\frac{K_{N,\alpha}}{\beta}\right)^{N/\gamma}. \tag{2.46}$$

Seja

$$P := \left(\frac{1}{\lim\limits_{j\to\infty}\int_\Omega \Phi(|\nabla u_j|)\,dx - \int_\Omega \Phi(|\nabla u|)\,dx}\right)^{\frac{\gamma}{N}},$$

($P = \infty$ se o denominador é zero), então, por (2.46), temos que $\frac{\beta}{K_{N,\alpha}} < P$. Logo existe $q > 1$ tal que $p := \frac{\beta}{K_{N,\alpha}}q < P$. Assim, pelo Lema 2.5 existe $C > 0$, tal que

$$\int_\Omega \exp(q\beta|u_j|^\gamma)\,dx < C, \quad \text{para cada} \quad j \in \mathbb{N}.$$

Utilizando esta estimativa junto com a hipótese (f_2), temos

$$\int_\Omega |f(u_j^+)|^q\,dx \le c\int_\Omega |u_j|^{q(N-1)}\,dx + c\int_\Omega \exp(q\beta|u_j|^\gamma)\,dx < \tilde{C}, \quad \forall\, j \in \mathbb{N}.$$

Isso prova que $(f(u_j^+))$ é limitada em $L^q(\Omega)$ para algum $q > 1$, como queríamos. Agora, considerando q' o expoente conjugado de q e aplicando a desigualdade de Hölder, temos

$$\int_\Omega |f(u_j^+)(u_j - u)|\,dx \le \left(\int_\Omega |f(u_j^+)|^q\,dx\right)^{1/q}\left(\int_\Omega |u_j - u|^{q'}\,dx\right)^{1/q'} \le C\cdot o(1).$$

Isso prova (2.45). Por fim, já que Φ é convexa, temos

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Phi(|\nabla u|)\,dx - \int_\Omega \Phi(|\nabla u_j|)\,dx &\geq \int_\Omega \Phi'(|\nabla u_j|)\,\frac{\nabla u_j}{|\nabla u_j|}\cdot(\nabla u - \nabla u_j)\,dx\\ &= E'_{\mu_j}(u_j)(u-u_j) + \int_\Omega f(u_j^+)(u_j^+ - u)\,dx\\ &\quad - \mu_j \int_\Omega g(u_j)(u_j - u)\,dx.\end{aligned}$$

Daí, pelas convergências obtidas em (2.44) e (2.45), obtemos

$$\int_\Omega \Phi(|\nabla u|)\,dx \geq \int_\Omega \Phi(|\nabla u_j|)\,dx + o(1),$$

isto é,

$$\limsup_{j\to\infty} \int_\Omega \Phi(|\nabla u_j|)\,dx \leq \int_\Omega \Phi(|\nabla u|)\,dx. \tag{2.47}$$

Das equações (2.46) e (2.47), obtemos

$$\int_\Omega \Phi(|\nabla u_j|)\,dx \longrightarrow \int_\Omega \Phi(|\nabla u|)\,dx.$$

Combinando com (2.41) e aplicando o Lema de Brezis–Lieb (ver Lema 4.2), temos

$$\int_\Omega \Phi(|\nabla u_j - \nabla u|)\,dx \longrightarrow 0.$$

Lembrando que $\Phi \in \Delta_2$, temos que

$$\|u_j - u\| = \|\nabla u_j - \nabla u\|_\Phi \longrightarrow 0,$$

o que conclui a prova da Afirmação 2.4 e finaliza a demonstração do Teorema 2.2. □

Corolário 2.1. O funcional E_μ satisfaz a condição $(\mathrm{PS})_c$ para todo $c \neq 0$, tal que

$$c < \left(\frac{K_{N,\alpha}}{\beta}\right)^{N-1-\alpha} - \frac{\mu}{2}|\Omega|.$$

Demonstração. Seja $\mu > 0$ fixado e $c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, tal que

$$c < \left(\frac{K_{N,\alpha}}{\beta}\right)^{\frac{N-1-\alpha}{\alpha}} - \frac{\mu}{2}|\Omega|.$$

Seja $(u_j) \subset W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ uma sequência de Palais–Smale para E_μ no nível c, isto é,

$$E_\mu(u_j) \to c \quad \text{e} \quad E'_\mu(u_j) \to 0.$$

Definimos a sequência constante de parâmetros $\mu_j \equiv \mu$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Com isso, temos

$$E_{\mu_j}(u_j) \to c \quad \text{e} \quad E'_{\mu_j}(u_j) \to 0.$$

Como $c \neq 0$ e a desigualdade acima é satisfeita, todas as hipóteses do Teorema 2.2 estão verificadas. Assim, a sequência (u_j) possui uma subsequência que converge fortemente em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$. Portanto, o funcional E_μ satisfaz a condição $(\mathrm{PS})_c$, como queríamos demonstrar. $\square$

2.3 Estrutura do passo da montanha

Nesta seção, desenvolvemos os elementos necessários para a aplicação do Teorema do Passo da Montanha ao funcional energia associado ao problema estudado. Para isso, começamos estabelecendo a geometria do passo da montanha, demonstrando que o funcional é limitado inferiormente por uma constante positiva em uma esfera em torno da origem, bem como a existência de um ponto onde ele assume valor negativo. Em seguida veremos que o nível minimax está no intervalo no qual o funcional satisfaz a condição de Palais–Smale, verificando que o funcional satisfaz as hipóteses do teorema. Essas construções são essenciais para assegurar a existência de um ponto crítico não trivial, o qual será identificado com uma solução do problema auxiliar abordado.

Para desenvolver os passos citados, iremos supor, sem perda de generalidade, que $0 \in \Omega$ e fixar $R > 0$ tal que $B(0, R) \subset \Omega$. Para $j \in \mathbb{N}$ consideramos $g_j : [0, R] \to [0, \infty)$ definida no Exemplo 5.1 de [17], por

$$g_j(y) = \begin{cases} \left(-\dfrac{2}{R}y + 2\right) K_{N,\alpha}^{-\frac{1}{\gamma}} N^B \log^B(2)\, j^{\frac{1}{\gamma}-B} \left(1 + \dfrac{\log(j)}{j}\right)^{\frac{1}{\gamma}}, & \text{se } y \in \left[\dfrac{R}{2}, R\right], \\ K_{N,\alpha}^{-\frac{1}{\gamma}} N^B \log^B\left(\dfrac{R}{y}\right) j^{\frac{1}{\gamma}-B} \left(1 + \dfrac{\log(j)}{j}\right)^{\frac{1}{\gamma}}, & \text{se } y \in \left[Re^{-\frac{j}{N}}, \dfrac{R}{2}\right], \\ K_{N,\alpha}^{-\frac{1}{\gamma}} j^{\frac{1}{\gamma}} \left(1 + \dfrac{\log(j)}{j}\right)^{\frac{1}{\gamma}}, & \text{se } y \in \left[0, Re^{-\frac{j}{N}}\right], \end{cases}$$

e então definimos a sequência de funções radiais $v_j : B[0, R] \to \mathbb{R}$ por

$$v_j(x) = g_j(|x|). \tag{2.48}$$

Assumindo as hipóteses $(\phi_1) - (\phi_4)$, obtemos o resultado a seguir.

Lema 2.8. Considere Φ uma N-função de classe C^1 que satisfaz $(\phi_1) - (\phi_4)$. Então, para v_j definida em (2.48), tem-se $v_j \in W_0^{1,\Phi}(B(0,R))$ e existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_{B(0,R)} \Phi\left(|\theta \nabla v_j|\right) dx \leq \theta^N, \quad \forall\, j \geq j_0, \tag{2.49}$$

onde $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$, com $\theta_1 > 0$.

Demonstração. Primeiramente, veja que v_j é uma função contínua e limitada, para todo $j \in \mathbb{N}$. Em particular, $v_j \in L^\Phi(B(0,R))$. Calculando as derivadas parciais de v_j em $x \neq 0$, obtemos

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_i}(x) = g_j'(|x|)\frac{x_i}{|x|}$$

de modo que $|\nabla v_j(x)| = |g_j'(|x|)|$. Note que $|\nabla v_j(x)| = 0$ para $|x| < Re^{-j/N}$. Introduzimos agora a sequência auxiliar $\sigma_j = \frac{R}{j^{\log(j)}}$. Uma vez que

$$\lim_{j\to\infty} e^{-j/N} j^{\log(j)} = \lim_{j\to\infty} e^{\log^2(j) - j/N} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{j\to\infty} \frac{1}{j^{\log(j)}} = 0,$$

escolhemos $j_1 > e$ tal que $Re^{-j/N} < \sigma_j < R/2$ para todo $j > j_1$. Com isso, a prova de (2.49) será dividida na estimativa das integrais radiais de $\Phi(\theta|g_j'(y)|)$ associadas a estes três intervalos. Mais precisamente, temos

$$\int_{B(0,R)} \Phi(\theta|\nabla v_j|)\, dx = \omega_{N-1} \int_{Re^{-j/N}}^{R} \Phi(\theta|g_j'(y)|) y^{N-1}\, dy = \omega_{N-1}\left(I_1 + I_2 + I_3\right), \tag{2.50}$$

onde os termos I_1, I_2 e I_3 correspondem às integrais nos intervalos $[Re^{-j/N}, \sigma_j]$, $[\sigma_j, R/2]$ e $[R/2, R]$, respectivamente. Vamos estimar cada uma destas integrais.

Antes disso, observe que pelas condições $(\phi_1) - (\phi_4)$ existem $\tilde{t}_0 > e$, $a \in (0, B)$ e $c > 0$, tais que

$$\Phi(t) \leq \begin{cases} ct^N, & \text{se } t \in [0, \tilde{t}_0], \\ t^N \log^\alpha(t)\left(1 - \log^{-a}(t)\right), & \text{se } t \in [\tilde{t}_0, \infty). \end{cases} \tag{2.51}$$

Estimativa de I_3: Para $y \in [R/2, R]$, temos $\theta|g_j'(y)| \leq \theta_2 c j^{1/\gamma - B}$, e como $1/\gamma - B < 0$, existe $j_2 > j_1$ tal que $|\theta g_j'(y)| \leq \tilde{t}_0$, possibilitando aplicar a primeira parte da desigualdade (2.51), obtendo

$$I_3 = \int_{R/2}^{R} \Phi(\theta|g_j'(y)|) y^{N-1}\, dy \leq \hat{c}\theta^N j^{N(1/\gamma - B)} = \hat{c}\theta^N j^{-B}. \tag{2.52}$$

Estimativa de I_2: Continuamos considerando $j \geq j_2$. Usando (2.51) obtemos

$$\Phi(t) \leq Ct^N\left[1 + \left|\log^N(t)\right|\right], \quad \forall\, t > 0.$$

Note que $[\sigma_j, R/2] \subset [Re^{-j/N}, R/2]$ e para y no intervalo $[Re^{-j/N}, R/2]$ tem-se

$$g_j'(y) = -K_{N,\alpha}^{-1/\gamma} N^B B \log^{B-1}(R/y) \frac{1}{y} j^{1/\gamma - B} \left(1 + \frac{\log j}{j}\right)^{1/\gamma} < 0. \tag{2.53}$$

Então

$$I_2 \leq C\theta^N \int_{\sigma_j}^{R/2} \left|g_j'(y)\right|^N \left[1 + \left|\log\left(\theta|g_j'(y)|\right)\right|^N\right] y^{N-1}\, dy. \tag{2.54}$$

Vamos estimar a parcela $\log^N\left(\theta|g_j'(y)|\right)$. Utilizando o fato de que $2 \leq \frac{R}{y} \leq \frac{R}{\sigma_j}$ para todo $y \in [\sigma_j, R/2]$, com $\sigma_j = \frac{R}{j^{\log(j)}}$, temos

$$2 \leq \frac{R}{y} \leq \frac{R}{\sigma_j} = j^{\log(j)} = e^{\log\left(j^{\log(j)}\right)} = e^{\log(j)\cdot\log(j)} = e^{\log^2(j)}. \tag{2.55}$$

Já que log é uma função crescente, vemos que

$$\log(2) \leq \log(R/y) \leq \log^2(j) \leq j^2, \quad \forall\, y \in [\sigma_j, R/2]. \tag{2.56}$$

Além disso,

$$j^{1/\gamma - B} \leq j^{1/\gamma - B}\left(1 + \frac{\log j}{j}\right)^{1/\gamma} \leq 2^{1/\gamma} j^{1/\gamma - B}. \tag{2.57}$$

Por (2.53), (2.56) e (2.57), lembrando que $1/\gamma < B < 1$, obtemos

$$\theta_1 C j^{2(B-1)} \frac{R}{y} j^{1/\gamma - B} \leq \theta|g_j'(y)| \leq \theta_2 C \log^{B-1}(2) \frac{R}{y} 2^{1/\gamma} j^{1/\gamma - B}, \quad \forall\, y \in [\sigma_j, R/2],$$

ou seja, existem $c_1, c_2 > 0$ tais que

$$c_1 \frac{R}{y} j^{B + 1/\gamma - 2} \leq \theta|g_j'(y)| \leq c_2 \frac{R}{y} j^{1/\gamma - B}, \quad \forall\, y \in [\sigma_j, R/2].$$

Consequentemente, para $j \geq j_2 > e$ existe $c_3 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \left|\log\left(\theta|g_j'(y)|\right)\right| &\leq \max\left\{|\log\left(c_1 R j^{B+1/\gamma-2}/y\right)|; |\log\left(c_2 R j^{1/\gamma - B}/y\right)|\right\} \\ &\leq c_3\left[\log(R/y) + \log(j)\right], \quad \forall\, y \in [\sigma_j, R/2]. \end{aligned}$$

Assim, usando (2.55), vemos que

$$\left|\log\left(\theta|g_j'(y)|\right)\right|^N \leq c_4\left[\log^N(R/y) + \log^N(j)\right] \leq c_4 \log^{2N}(j) \tag{2.58}$$

para todo $y \in [\sigma_j, R/2]$ e $j \geq j_2$. Retomando a estimativa da integral I_2, dada em

(2.54), e utilizando (2.58) em conjunto com a expressão da derivada em (2.53), temos

$$\begin{aligned} I_2 &\leq c_5 \theta^N j^{\left(\frac{1}{\gamma}-B\right)N} \log^{2N}(j) \int_{\sigma_j}^{R/2} \log^{(B-1)N}(R/y) \cdot \frac{1}{y^N} \cdot y^{N-1}\, dy \\ &= c_5 j^{-B} \log^{2N}(j) \int_{\sigma_j}^{R/2} \log^{(B-1)N}(R/y) \frac{1}{y}\, dy. \end{aligned} \tag{2.59}$$

Denotemos $b = (B-1)N$. Se $b \neq -1$, usando a mudança de variáveis $s = \log(R/y)$ e (2.55) obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\sigma_j}^{R/2} \log^b(R/y) \frac{1}{y}\, dy &= \int_{\log(2)}^{\log^2(j)} s^b\, ds = \frac{1}{b+1}\, s^{b+1}\Big|_{s=\log(2)}^{s=\log^2(j)} \\ &= \frac{1}{b+1}\left(\log^{2(b+1)}(j) - \log^{b+1}(2)\right) \\ &\leq c_6'[1 + \log^{2(b+1)}(j)] \leq c_6'[1 + \log^{2(b+2)}(j)]. \end{aligned}$$

Caso ocorra $b = -1$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\sigma_j}^{R/2} \log^{-1}(R/y) \frac{1}{y}\, dy &= \int_{\log(2)}^{\log^2(j)} s^{-1}\, ds = \log(s)\big|_{s=\log(2)}^{s=\log^2(j)} \\ &= \log\left(\log^2(j)\right) - \log\left(\log(2)\right) \\ &\leq c_6''[1 + \log\left(\log^2(j)\right)] \leq c_6''[1 + \log^2(j)]. \end{aligned}$$

Em qualquer caso, vemos que

$$\int_{\sigma_j}^{R/2} \log^b(R/y) \frac{1}{y}\, dy \leq c_6[1 + \log^{2(b+2)}(j)], \quad \forall\, j \geq j_2 > e.$$

Substituindo essa estimativa na expressão (2.59), obtemos

$$I_2 \leq c_7 \theta^N j^{-B} \cdot \log^{2N}(j) \cdot \log^{2(B-1)N+4}(j) \;=\; c_7 \theta^N j^{-B} \log^{2BN+4}(j). \tag{2.60}$$

Estimativa para I_1: Lembremos que $\sigma_j = \frac{R}{j\log(j)}$ e $\frac{1}{\gamma} < \frac{N}{(N-1)\gamma} = B < 1$. Para $y \in [Re^{-\frac{j}{N}}, \sigma_j]$ temos $e^{j/N} \geq \frac{R}{y} \geq e^{\log^2(j)}$, de modo que

$$e^{\log^2(j)} \left(\frac{j}{N}\right)^{B-1} \leq \frac{R}{y} \log^{B-1}(R/y) \leq e^{\log^2(j)} \log^{2(B-1)}(j).$$

Isso implica que

$$N^{1-B} j^{\frac{1}{\gamma}} \leq N^{1-B} e^{\log^2(j)} j^{\frac{1}{\gamma}-1} \leq \frac{R}{y} \log^{B-1}(R/y)\, j^{\frac{1}{\gamma}-B} \leq e^{\log^2(j)} \log^{2(B-1)}(j) j^{\frac{1}{\gamma}-B}.$$

Então, a partir da expressão da derivada de g_j dada em (2.53), vemos que existe um índice $j_3 > j_2$ tal que, para todo $j > j_3$, vale

$$\theta|g_j'(y)| = C\theta \log^{B-1}(R/y)\frac{1}{y}j^{\frac{1}{\gamma}-B}\left(1+\frac{\log(j)}{j}\right)^{\frac{1}{\gamma}} > \tilde{t}_0, \tag{2.61}$$

para todo $y \in \left[Re^{-j/N}, \sigma_j\right]$ e $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$, onde $\tilde{t}_0$ é dado em (2.51). Além disso, para y nesse mesmo intervalo, escrevendo $s = R/y$ e $h(s) = s/\log^{1-B}(s)$ vemos que h é uma função crescente no intervalo $[e^{\log^2(j)}, e^{j/N}]$ e assim atinge o máximo em $s = e^{j/N}$. Assim,

$$\begin{aligned}\left|\theta g_j'(y)\right| &\leq \theta\frac{C}{R}h(R/y)\cdot j^{\frac{1}{\gamma}-B}\left(1+\frac{\log j}{j}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \leq \frac{2^{\frac{1}{\gamma}}\theta_2 C}{R}h(e^{j/N})j^{\frac{1}{\gamma}-B}\\ &\leq \tilde{C}e^{j/N}j^{B-1}j^{\frac{1}{\gamma}-B} = \tilde{C}e^{j/N}j^{\frac{1}{\gamma}-1} = \tilde{C}e^{j}e^{-j(N-1)/N}j^{\frac{1}{\gamma}-1},\end{aligned}$$

para todo $y \in \left[Re^{-j/N}, \sigma_j\right]$. Dessa forma, podemos encontrar um índice $j_4 > j_3$ tal que, para todo $j > j_4$, temos

$$\sup_{y\in[Re^{-j/N},\sigma_j]}\left|\theta g_j'(y)\right| \leq e^j, \quad \forall\, \theta \in [\theta_1, \theta_2].$$

Em particular, para $a \in (0, B)$ obtemos $\log^{-a}(\theta|g_j'(y)|) \geq \frac{1}{j^a}$. Devido a (2.61) e (2.51) verificamos que

$$\begin{aligned}\Phi\left(\theta\left|g_j'(y)\right|\right) &\leq \theta^N\left|g_j'(y)\right|^N\log^{\alpha}\left(\theta\left|g_j'(y)\right|\right)\left(1-\log^{-a}\left(\theta\left|g_j'(y)\right|\right)\right)\\ &\leq \theta^N\left(1-\frac{1}{j^a}\right)\left|g_j'(y)\right|^N\log^{\alpha}\left(\left|\theta g_j'(y)\right|\right),\end{aligned} \tag{2.62}$$

para $j > j_4$. Já que $\log^{B-1}(R/y) < 1$ e $j^{\frac{1}{\gamma}-B} \to 0$ quando $j \to \infty$, por (2.61) temos

$$\theta|g_j'(y)| \leq C\theta_2 2^{\frac{1}{\gamma}}j^{\frac{1}{\gamma}-B}\frac{1}{y} \leq \frac{R}{y},$$

para todo $j > j_5$ e $y \in \left[Re^{-j/N}, \sigma_j\right]$, para algum $j_5 > j_4$. Com isso, usando (2.62) e

(2.53), já que $\alpha \geq 0$, a integral I_1 satisfaz

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{Re^{-j/N}}^{\sigma_j} \Phi\left(\theta\left|g_j'(y)\right|\right) y^{N-1}\,dy \\
&\leq \theta^N \left(1-\frac{1}{j^a}\right) \int_{Re^{-j/N}}^{\sigma_j} \left|g_j'(y)\right|^N \log^\alpha\left(\left|\theta g_j'(y)\right|\right) y^{N-1}\,dy \\
&\leq \theta^N \left(1-\frac{1}{j^a}\right) K_{N,\alpha}^{-\frac{N}{\gamma}} N^{NB} B^N \left(1+\frac{\log j}{j}\right)^{\frac{N}{\gamma}} j^{\left(\frac{1}{\gamma}-B\right)N} \\
&\quad \cdot \int_{Re^{-j/N}}^{\sigma_j} \log^{(B-1)N}(R/y) \cdot \frac{1}{y^N} \cdot \log^\alpha(R/y) \cdot y^{N-1}\,dy.
\end{aligned}$$

Pela definição de B temos $(B-1)N+\alpha = B-1 > -1$. Daí, já que $\sigma_j = Re^{-\log^2(j)}$, usando a mesma mudança de variáveis $s=\log(R/y)$ da estimativa de I_2 obtemos

$$\int_{Re^{-j/N}}^{\sigma_j} \log^{B-1}(R/y)\,\frac{dy}{y} \leq \frac{1}{B}\left(\frac{j}{N}\right)^B.$$

Lembrando das definições de B e $K_{N,\alpha}$ dadas em Definição 0.1, $K_{N,\alpha} = B^{1/B} N \omega_{N-1}^{\gamma/N}$, vemos que $K_{N,\alpha}^{-\frac{N}{\gamma}} N^{(N-1)B} B^{N-1} = \omega_{N-1}^{-1}$. Além disso, $(1/\gamma - B)N = -B$ e então

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq \theta^N K_{N,\alpha}^{-\frac{N}{\gamma}} N^{(N-1)B} B^{N-1} \left(1-\frac{1}{j^a}\right)\left(1+\frac{\log j}{j}\right)^{\frac{N}{\gamma}} \\
&\leq \theta^N \omega_{N-1}^{-1} \left(1-\frac{1}{j^a}\right)\left(1+\frac{\log j}{j}\right)^{\frac{N}{\gamma}}. \qquad (2.63)
\end{aligned}$$

Por fim, usando as estimativas (2.52), (2.60) e (2.63), obtidas para as integrais I_1, I_2 e I_3, na equação (2.50), segue que

$$\begin{aligned}
\int_{B(0,R)} \Phi\left(|\theta \nabla v_j(x)|\right) dx &= \omega_{N-1} \int_0^R \Phi\left(\left|\theta g_j'(y)\right|\right) y^{N-1}\,dy \\
&\leq \theta^N \left[\left(1-\frac{1}{j^a}\right)\left(1+\frac{\log(j)}{j}\right)^{\frac{N}{\gamma}} + c_8 j^{-B}\log^{2BN+4}(j)\right], \qquad (2.64)
\end{aligned}$$

para todo $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ e $j > j_5$. Note que

$$\lim_{j\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{j^a}\right)\left(1+\frac{\log(j)}{j}\right)^{\frac{N}{\gamma}} + c_8 j^{-B}\log^{2BN+4}(j)\right] = 1.$$

Afirmamos que para j suficientemente grande vale

$$\left(1-\frac{1}{j^a}\right)\left(1+\frac{\log(j)}{j}\right)^{\frac{N}{\gamma}} + c_8 j^{-B}\log^{2BN+4}(j) < 1. \qquad (2.65)$$

Com efeito, já que $(N-1)B = N/\gamma$, consideremos $h\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ a função auxiliar dada por

$$h(x) = (1+x)^{(N-1)B},$$

a qual é derivável em $(0,\infty)$. Aplicando o Teorema do Valor Médio obtemos que, para cada $x > 0$ existe $\xi \in (0,x)$ tal que

$$h(x) - h(0) = h'(\xi)x.$$

Como $h(0) = 1$, segue que

$$(1+x)^{(N-1)B} = 1 + h'(\xi)x = 1 + (N-1)B(1+\xi)^{(N-1)B-1}x.$$

No nosso caso, tomando $x = \frac{\log(j)}{j}$, obtemos

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{\log(j)}{j}\right)^{(N-1)B} &= 1 + (N-1)B\,(1+\xi_j)^{(N-1)B-1}\,\frac{\log(j)}{j}\\ &\leq 1 + c\left(1+\frac{\log(j)}{j}\right)^{(N-1)B-1}\frac{\log(j)}{j},\end{aligned} \tag{2.66}$$

para algum $\xi_j \in \left(0, \frac{\log(j)}{j}\right)$. Substituindo (2.66) na expressão original à esquerda de (2.65), obtemos

$$\begin{aligned}&\left(1-\frac{1}{j^a}\right)\left(1+\frac{\log(j)}{j}\right)^{(N-1)B} + c_8 j^{-B}\log^{2BN+4}(j)\\ &\quad\leq \left(1-\frac{1}{j^a}\right)\left[1+c\left(1+\frac{\log(j)}{j}\right)^{(N-1)B-1}\frac{\log(j)}{j}\right] + c_8 j^{-B}\log^{2BN+4}(j)\\ &\quad= 1 - b_j\end{aligned} \tag{2.67}$$

onde

$$b_j := \frac{1}{j^a}\left[1 + c(1-j^a)\left(1+\frac{\log(j)}{j}\right)^{(N-1)B-1}\frac{\log(j)}{j} - c_8 j^{a-B}\log^{2BN+4}(j)\right].$$

Lembrando que $(N-1)B > 1$ e $0 < a < B < 1$, temos

$$\left(1+\frac{\log(j)}{j}\right)^{(N-1)B-1} \to 1^+ \quad \text{e} \quad \frac{\log(j)}{j},\ \frac{\log(j)}{j^{1-a}},\ \frac{\log^k(j)}{j^{B-a}} \to 0,$$

para qualquer $k > 0$, quando $j \to \infty$. Portanto, para j suficientemente grande, temos que $b_j > 0$. Então, (2.67) garante que (2.65) é válido, como afirmamos. Desse modo, tomando o limite quando $j \to \infty$ em (2.64), concluimos que

$$\int_{B(0,R)} \Phi\left(|\theta \nabla v_j(x)|\right)\, dx < \theta^N$$

para j suficientemente grande e $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$, com $\theta_1 > 0$. Em particular, $v_j \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ e para $\theta = 1$ tem-se

$$\|\nabla v_j\|_\Phi \leq 1,$$

para $j \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. □

O próximo resultado estabelece a geometria do Teorema do Passo da Montanha para o funcional E_μ. Mais precisamente, mostramos que E_μ satisfaz três propriedades fundamentais: (a) positividade uniforme na esfera de raio pequeno; (b) existência de uma direção em que, no infinito, o funcional decresce para menos infinito; e (c) existência de um valor de nível crítico obtido por um min-max sobre uma família de caminhos que ligam a origem a um ponto específico da direção de decaimento.

Essas propriedades, combinadas com a compacidade do funcional (garantida por condições anteriores), asseguram a existência de um ponto crítico de E_μ no nível correspondente ao valor crítico min-max. Esse ponto crítico será interpretado posteriormente como uma solução fraca do problema elíptico associado.

A formalização dessas ideias é apresentada no lema a seguir.

Lema 2.9. Existem constantes $\mu_0, \rho, c_0 > 0$, $J \geq 2$, $T > \rho$ e

$$\vartheta < \left(\frac{K_{N,\alpha}}{\beta}\right)^{\frac{N}{\gamma}},$$

tais que, para todo $\mu \in (0, \mu_0)$, valem as seguintes propriedades:

(a) $E_\mu(u) \geq c_0$ para todo $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ com $\|u\| = \rho$.

(b) Para toda função não negativa $u_0 \in W_0^{1,\Phi}(\Omega) \setminus \{0\}$ temos $E_\mu(tu_0) \to -\infty$ quando $t \to \infty$.

(c) Considerando a seuqência (v_j) definida em (2.48), tem-se para algum J, $\|Tv_J\| > \rho$ e $E_\mu(Tv_J) < 0$. Além disso, se denotamos por

$$\Gamma = \left\{\eta \in C([0,1], W_0^{1,\Phi}(\Omega))\,;\, \eta(0) = 0,\ \eta(1) = Tv_J\right\}$$

a classe de caminhos que ligam a origem ao ponto Tv_J, então

$$c_0 \leq c_\mu := \inf_{\eta \in \Gamma} \max_{u \in \eta([0,1])} E_\mu(u) \leq \vartheta + C\mu^{c'_\alpha}. \tag{2.68}$$

(d) O funcional E_μ possui um ponto crítico $u_\mu \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ no nível c_μ.

Demonstração.

(a) Fixamos $p > c_\alpha$. Inicialmente escolhemos $\rho_0 > 0$ satisfazendo

$$\rho_0 < \left(\frac{K_{N,\alpha}}{2\beta}\right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Para $\rho \in (0, \rho_0)$ e $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ tal que $\|u\| = \rho$, defina $\tilde{u} = u/\rho$. Note que a desigualdade de Trudinger–Moser (ver Teorema 4.4) é aplicável a $\tilde{u}$. Dado $\epsilon > 0$, usando (2.6) e aplicando as desigualdades de Hölder, de Poincaré (ver Proposição 1.2) e de Trudinger–Moser, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega F(u^+)\,dx &\le \epsilon \int_\Omega \Phi(u)\,dx + C_\epsilon \int_\Omega |u|^p \exp(\beta|u|^\gamma)\,dx \\
&\le \epsilon C \int_\Omega \Phi(|\nabla u|)\,dx + C_\epsilon \|u\|_{2p}^p \left(\int_\Omega \exp(2\beta|u|^\gamma)\,dx\right)^{1/2} \\
&= \epsilon C \int_\Omega \Phi(|\nabla u|)\,dx + C_\epsilon \rho^p \left(\int_\Omega \exp(2\beta\rho^\gamma|\tilde{u}|^\gamma)\,dx\right)^{1/2} \\
&\le \epsilon C \int_\Omega \Phi(|\nabla u|)\,dx + \tilde{C}_\epsilon \rho^{p-1} C_{\rho_0},
\end{aligned}$$

onde $C_{\rho_0} > 0$ depende de ρ_0, e $\tilde{C}_\epsilon$ é uma constante ajustada, que depende de ϵ e da constante de imersão de $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ em $L^{2p}(\Omega)$. Fixando $\epsilon = \epsilon_0$ tal que $1 - C\epsilon_0 = \frac{1}{2}$, tomamos $\rho \le \tilde{\rho}_0 \le \min\{\rho_0; 1\}$ suficientemente pequeno de modo que

$$C_0(\tilde{\rho}_0)^{p-c_\alpha} < \frac{1}{4},$$

onde $C_0 = \tilde{C}_{\epsilon_0} C_{\rho_0}$. Substituindo a estimativa acima no funcional E_μ obtemos

$$\begin{aligned}
E_\mu(u) &= \int_\Omega \Phi(|\nabla u|)\,dx - \int_\Omega F(u^+)\,dx + \mu \int_\Omega G(u)\,dx \\
&\ge (1 - C\epsilon_0) \int_\Omega \Phi(|\nabla u|)\,dx - C_0\rho^p - \frac{\mu}{2}|\Omega|.
\end{aligned}$$

Aqui usamos o fato de que $G(t) \ge -1/2$ para todo $t \in \mathbb{R}$, decorrente do Lema 2.7. Pela escolha de ϵ_0 e $\tilde{\rho}_0$, devido ao Lema 1.5 vemos que

$$\begin{aligned}
E_\mu(u) &\ge \frac{1}{2}\|u\|^{c_\alpha} - C_0\rho^p - \frac{\mu}{2}|\Omega| \;=\; \rho^{c_\alpha}\left(\frac{1}{2} - C_0\rho^{p-c_\alpha}\right) - \frac{\mu}{2}|\Omega| \\
&\ge \frac{\rho^{c_\alpha}}{4} - \frac{\mu}{2}|\Omega|.
\end{aligned}$$

Por fim, escolhemos $\mu_0 > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$\frac{\mu_0}{2}|\Omega| \leq \frac{\tilde{\rho}_0^{c_\alpha}}{8},$$

e definimos

$$c_0 := \frac{\tilde{\rho}_0^{c_\alpha}}{8} > 0.$$

Assim, para todo $\mu \in (0, \mu_0)$, temos $E_\mu(u) \geq c_0$ sempre que $\|u\| = \tilde{\rho}_0$, o que conclui a demonstração do item (a).

(b) Seja $u_0 \in W_0^{1,\Phi}(\Omega) \setminus \{0\}$ tal que $u_0 \geq 0$. Utilizando a estimativa $G(t) \leq |t|$, em conjunto com o Lema 1.5 e a desigualdade (2.8) para um $\sigma > c_\alpha$ fixado, obtemos

$$\begin{aligned}
E_\mu(tu_0) &= \int_\Omega \Phi(t|\nabla u_0|)\,dx - \int_\Omega F(tu_0^+)\,dx + \mu\int_\Omega G(tu_0)\,dx \\
&\leq \xi_1(t)\int_\Omega \Phi(|\nabla u_0|)\,dx - ct^\sigma\int_\Omega |u_0|^\sigma\,dx + c_1|\Omega| + \mu\int_\Omega t|u_0|\,dx \\
&= c_2t^{c_\alpha} - c_3t^\sigma + c_1|\Omega| + c_4t\mu \to -\infty,
\end{aligned}$$

quando $t \to \infty$. Assim, para t suficientemente grande temos $E_\mu(tu_0) < 0$.

(c) Para demonstrar este item usaremos a sequência (v_j) definida em (2.48). Observe que, como $G(t) \leq |t|$ para todo $t \in \mathbb{R}$, e como $v_j \geq 0$ para todo j, segue que

$$\begin{aligned}
E_\mu(tv_j) &= \int_\Omega [\Phi(|\nabla(tv_j)|) - F(tv_j) + \mu G(tv_j)]\,dx \\
&\leq \int_\Omega [\Phi(t|\nabla v_j|) - F(tv_j) + \mu tv_j]\,dx, \quad \forall\, t \geq 0.
\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Young ao termo μtv_j, obtemos

$$\mu tv_j \leq k_0(tv_j)^{c_\alpha} + c_5\mu^{c_\alpha'},$$

onde c_α e c_α' são expoentes conjugados, k_0 é dado na condição (f_5) e a constante c_5 é dada por

$$c_5 = \frac{1}{c_\alpha'\,(k_0c_\alpha)^{1/(c_\alpha-1)}}.$$

Substituindo essa estimativa na desigualdade anterior, obtemos

$$E_\mu(tv_j) \leq \int_\Omega \Phi(t|\nabla v_j|)\,dx - \int_\Omega F(tv_j)\,dx + k_0\int_\Omega (tv_j)^{c_\alpha}\,dx + c_5\mu^{c_\alpha'}\int_\Omega dx. \tag{2.69}$$

Para cada $j \in \mathbb{N}$, definimos a função $H_j : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ por

$$H_j(t) := \int_\Omega \Phi(t|\nabla v_j|)\,dx - \int_\Omega F(tv_j)\,dx + k_0\int_\Omega (tv_j)^{c_\alpha}\,dx.$$

Aplicando novamente o Lema 1.5 e a estimativa (2.8) para $F(t)$, temos

$$H_j(t) \leq t^{c_\alpha} \int_\Omega \Phi(|\nabla v_j|)\, dx - \left(c_6 t^\sigma \int_\Omega v_j^\sigma \, dx + c_7 |\Omega| \right) + k_0 t^{c_\alpha} \int_\Omega v_j^{c_\alpha} \, dx,$$

para $t > 1$ e $\sigma > c_\alpha$. Portanto,

$$\lim_{t \to \infty} H_j(t) = -\infty. \tag{2.70}$$

Para obter um controle inferior para $H_j(t)$ quando $t \to 0$, como $v_j \in L^\infty(\Omega)$, utilizamos o Lema 1.5 e (2.5) com $\epsilon = \frac{1}{2\tilde{c}}$, onde $\tilde{c} > 0$ é a constante da desigualdade de Poincaré para Φ, e obtemos

$$\begin{aligned} H_j(t) &= \int_\Omega \Phi(t|\nabla v_j|)\, dx - \int_\Omega F(tv_j)\, dx + k_0 \int_\Omega (tv_j)^{c_\alpha}\, dx \\ &\geq \int_\Omega \Phi(t|\nabla v_j|)\, dx - \epsilon \int_\Omega \Phi(tv_j)\, dx + k_0 \int_\Omega (tv_j)^{c_\alpha}\, dx, \end{aligned}$$

para $t > 0$ suficientemente pequeno. Aplicando a desigualdade de Poincaré, Proposição 1.2, temos

$$H_j(t) \geq (1 - \tilde{c}\epsilon) \int_\Omega \Phi(t|\nabla v_j|)\, dx + k_0 \int_\Omega (tv_j)^{c_\alpha}\, dx.$$

Por fim, utilizando o Lema 1.5, obtemos

$$H_j(t) \geq \frac{1}{2} t^{m_\alpha} \int_\Omega \Phi(|\nabla v_j|)\, dx + k_0 t^{c_\alpha} \int_\Omega v_j^{c_\alpha}\, dx > 0, \quad \text{para } t \in (0, \tilde{t}_j),$$

com $\tilde{t}_j$ suficientemente pequeno, já que $v_j \not\equiv 0$. Como H_j é contínua em $[0, \infty)$, segue que existe $t_j > 0$ tal que

$$H_j(t_j) = \max_{t \geq 0} H_j(t).$$

Além disso, como H_j é diferenciável, temos

$$H_j'(t_j) = 0.$$

Afirmação 2.5. Existe $J \in \mathbb{N}$, com $J \geq 2$, tal que

$$H_j(t_j) < \left(\frac{K_{N,\alpha}}{\beta} \right)^{\frac{N}{\gamma}}, \quad \forall\, j \geq J.$$

Suponha, por contradição, que

$$H_j(t_j) \geq \left(\frac{K_{N,\alpha}}{\beta} \right)^{\frac{N}{\gamma}}, \quad \text{para todo } j \geq 2.$$

Pela estimativa (2.10), temos que $F(t) \geq k_0 t^{c_\alpha}$ para todo $t \geq 0$. Assim, para cada $j \geq 2$, segue que

$$\begin{aligned}\left(\frac{K_{N,\alpha}}{\beta}\right)^{\frac{N}{\gamma}} &\leq \int_\Omega \Phi(t_j|\nabla v_j|)\,dx - \int_\Omega F(t_j v_j)\,dx + k_0 \int_\Omega (t_j v_j)^{c_\alpha}\,dx \\ &\leq \int_\Omega \Phi(t_j|\nabla v_j|)\,dx. \end{aligned} \tag{2.71}$$

Agora, suponha que $t_j < 1$. Pelo Lema 2.8, com $\theta = 1$, existe $j_0 > 0$, tal que

$$\int_\Omega \Phi(|\nabla v_j|)\,dx \leq 1, \text{ para } j \geq j_0.$$

Dessa forma, aplicando o Lema 1.2 (a),

$$\int_\Omega \Phi(t_j|\nabla v_j|)\,dx \leq t_j \int_\Omega \Phi(|\nabla v_j|)\,dx \leq t_j, \text{ para } j \geq j_0.$$

Daí, voltando para (2.71), obtemos

$$\left(\frac{K_{N,\alpha}}{\beta}\right)^{\frac{N}{\gamma}} \leq t_j, \text{ se } j \geq j_0 \text{ e } t_j < 1.$$

Assim, verificamos que

$$t_j \geq \min\left\{1, \left(\frac{K_{N,\alpha}}{\beta}\right)^{\frac{N}{\gamma}}\right\} =: k_1 \tag{2.72}$$

para todo $j \geq j_0$. Por outro lado, como $H_j'(t_j) = 0$, segue que $t_j H_j'(t_j) = 0$. Isto é,

$$\int_\Omega \Phi'\Big(t_j|\nabla v_j|\Big)(t_j|\nabla v_j|)\,dx + k_0 c_\alpha t_j^{c_\alpha} \int_\Omega v_j^{c_\alpha}\,dx = \int_\Omega f(t_j v_j)(t_j v_j)\,dx. \tag{2.73}$$

Pelo Lema 1.5, em conjunto com (3), obtemos

$$\Phi'\Big(t_j|\nabla v_j|\Big)(t_j|\nabla v_j|) \leq c_\alpha \Phi(t_j|\nabla v_j|) \leq c_\alpha\, \xi_1(t_j)\, \Phi(|\nabla v_j|),$$

com $\xi_1(t) = \max\{t^{m_\alpha}, t^{c_\alpha}\}$. Portanto,

$$\Phi'\Big(t_j|\nabla v_j|\Big)(t_j|\nabla v_j|) \leq c_\alpha \max\{t_j^{m_\alpha}, t_j^{c_\alpha}\}\Phi(|\nabla v_j|).$$

Além disso, conforme visto anteriormente, temos

$$\int_\Omega \Phi(|\nabla v_j|)\,dx \leq 1, \quad \text{para todo } j \geq j_0.$$

Ademais, a sequência $\left(\int_\Omega v_j^{c_\alpha}\, dx\right)$ é limitada em j. Utilizando essas informações em (2.73), obtemos que existe uma constante $\tilde{k} > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \tilde{k}\left(t_j^{m_\alpha} + t_j^{c_\alpha}\right) &\geq \int_\Omega f(t_j v_j)\,(t_j v_j)\, dx \\ &\geq \int_{B(0,Re^{-\frac{j}{N}})} f(t_j v_j)\,(t_j v_j)\, dx. \end{aligned} \tag{2.74}$$

Por outro lado, pela definição de v_j em (2.48) vemos que para $x \in B(0, Re^{-\frac{j}{N}})$ vale

$$t_j v_j = t_j \left[K_{N,\alpha}^{-1}\, j \left(1 + \frac{\log j}{j}\right)\right]^{\frac{1}{\gamma}} = t_j \left[K_{N,\alpha}^{-1}\,(j + \log j)\right]^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Assim, para $t_0 > 0$ apresentado em (2.9), a partir de (2.72), vemos que

$$t_j v_j(x) = t_j \left[K_{N,\alpha}^{-1}\,(j + \log j)\right]^{\frac{1}{\gamma}} \geq k_1 \left[K_{N,\alpha}^{-1}\,(j + \log j)\right]^{\frac{1}{\gamma}} \geq t_0, \quad \forall\, x \in B(0, Re^{-\frac{j}{N}}),$$

para todo $j \geq j_0$. Dessa forma, em virtude de (2.9), temos que

$$f(t_j v_j) t_j v_j \geq \frac{L}{2} \exp\left(\beta (t_j v_j)^\gamma\right),$$

para todo $j \geq j_0$ no conjunto $B(0, Re^{-\frac{j}{N}})$. Retornando à desigualdade em (2.74), obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{k}\left(t_j^{m_\alpha} + t_j^{c_\alpha}\right) &\geq \frac{L}{2} \int_{B(0,Re^{-\frac{j}{N}})} \exp\left(\beta (t_j v_j)^\gamma\right)\, dx \\ &= \left(\frac{L}{2}\omega_{N-1} R^N e^{-j}\right) \exp\left(\beta t_j^\gamma K_{N,\alpha}^{-1}(j + \log j)\right). \end{aligned} \tag{2.75}$$

Observe que a sequência (t_j) deve ser limitada. De fato, suponha, por absurdo, que $t_j \to \infty$ para alguma subsequência. Nesse caso, para $j \gg 1$, temos

$$\beta t_j^\gamma K_{N,\alpha}^{-1} \geq 1 \quad \text{e} \quad \beta K_{N,\alpha}^{-1} \log j \geq 1.$$

Substituindo essas estimativas em (2.75), obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{k}\left(t_j^{m_\alpha} + t_j^{c_\alpha}\right) &\geq \frac{L}{2}\omega_{N-1} R^N e^{-j} \exp\left(\beta t_j^\gamma K_{N,\alpha}^{-1}(j + \log j)\right) \\ &\geq \frac{L}{2}\omega_{N-1} R^N e^{-j} e^j e^{t_j^\gamma} = \frac{L}{2}\omega_{N-1} R^N e^{t_j^\gamma}. \end{aligned}$$

No entanto, o lado esquerdo da desigualdade acima cresce, no máximo, polinomialmente em t_j, enquanto o lado direito cresce exponencialmente. Assim, a hipótese $t_j \to \infty$ leva a uma contradição, o que prova que a sequência (t_j) é necessariamente limitada.

Seja

$$0 < k_1 = \min \left\{ 1, \left(\frac{k_{N,\alpha}}{\beta} \right)^{\frac{N}{\gamma}} \right\} \leq t_j \leq k_2, \quad \forall\, j \geq j_1,$$

para algum $j_1 \geq j_0$ tal que $\int_\Omega \Phi(|\nabla v_j|)\, dx \leq 1$, e tal que a desigualdade (2.75) seja válida. Além disso, pelo Lema 2.8, sabemos que existe $j_2 \in \mathbb{N}$, com $j_2 \geq j_1$, tal que

$$\int_\Omega \Phi(\theta |\nabla v_j|)\, dx \leq \theta^N, \quad \forall\, \theta \in [k_1, k_2], \quad \forall\, j \geq j_2.$$

Retornando à desigualdade (2.71), obtemos

$$t_j^N \geq \int_\Omega \Phi(t_j |\nabla v_j|)\, dx \geq \left(\frac{K_{N,\alpha}}{\beta} \right)^{\frac{N}{\gamma}}, \quad \forall\, j \geq j_2.$$

Assim, temos que

$$\beta t_j^\gamma K_{N,\alpha}^{-1} \geq 1, \quad \forall\, j \geq j_2.$$

Retornando à desigualdade (2.75), concluímos que, para todo $j \geq j_2$,

$$\begin{aligned} k_3 := \tilde{k}\,(k_2^{m_\alpha} + k_2^{c_\alpha}) &\geq \frac{L}{2} \omega_{N-1} R^N e^{-j} \cdot e^j \cdot e^{\log j} \\ &= \frac{L}{2} \omega_{N-1} R^N j \longrightarrow \infty, \quad \text{quando } j \to \infty \end{aligned}$$

o que é um absurdo, já que o lado esquerdo da desigualdade é constante. Portanto, existe $J \in \mathbb{N}$, com $J \geq 2$, tal que

$$H_j(t_j) < \left(\frac{k_{N,\alpha}}{\beta} \right)^{\frac{N}{\gamma}}, \quad \forall\, j \geq J.$$

Concluímos, então a prova da Afirmação 2.5. Como (2.70) implica que $H_J(t) \to -\infty$ quando $t \to \infty$, escolhemos $T > 0$ suficientemente grande tal que

$$H_J(t) \leq -1, \quad \forall\, t \geq T.$$

Definindo $w := T v_J$, devido a (2.69) obtemos, para todo $t \in [0,1]$,

$$E_\mu(tw) \leq H_J(tT) + c_5 |\Omega| \mu^{c'_\alpha}. \tag{2.76}$$

Note que existe $\mu_0 > 0$ tal que

$$E_\mu(w) \leq H_J(T) + c_5 |\Omega| \mu^{c'_\alpha} \leq -1 + c_5 |\Omega| \mu^{c'_\alpha} < 0, \quad \text{sempre que } \mu \leq \mu_0.$$

Assim, a curva $t \mapsto tw$, com $t \in [0,1]$, pertence ao conjunto Γ. Pelo que foi estabelecido em (2.76), segue que

$$c_\mu \leq \max_{0\leq t\leq 1} E_\mu(tw) \leq \max_{t\geq 0} H_J(t) + c_5|\Omega|\mu^{c'_\alpha} = H_J(t_J) + c_5|\Omega|\mu^{c'_\alpha},$$

para todo $\mu \in (0,\mu_0)$. Tomando $\vartheta := H_J(t_J)$, essa constante satisfaz

$$\vartheta < \left(\frac{K_{N,\alpha}}{\beta}\right)^{\frac{N}{\gamma}},$$

como vimos na Afirmação 2.5. Assim, o funcional E_μ apresenta a geometria do tipo passo da montanha no nível c_μ, o qual satisfaz

$$c_0 < c_\mu \leq \vartheta + c\mu^{c'_\alpha},$$

com $\vartheta < (K_{N,\alpha}/\beta)^{N-1-\alpha}$, para todo $\mu \in (0,\mu_0)$ e c_0 dado no item (a).

(d) Segue do item (c), em conjunto com o Corolário 2.1, que o funcional E_μ satisfaz a condição de Palais–Smale no nível c_μ, isto é, $(PS)_{c_\mu}$. Portanto, pelo Teorema do Passo da Montanha, o funcional E_μ admite um ponto crítico u_μ no nível de energia do passo da montanha, ou seja,

$$E'_\mu(u_\mu) = 0 \quad \text{e} \quad E_\mu(u_\mu) = c_\mu.$$

Sabendo que $E_\mu(0) = 0$, concluímos que u_μ é não trivial. □

2.4 Regularidade das soluções

A fim de aplicar o teorema de Liberman para garantir a regularidade das soluções u_μ, faremos primeiramente a estimativa L^∞. Em seguida veremos que as hipóteses do Teorema 4.3 se verificam, o qual garante que as funções u_μ são de classe $C^{1,\sigma}$ e fornece uma estimativa uniforme para as normas neste espaço.

2.4.1 Estimativa L^∞

Nesta subseção provaremos uma estimativa L^∞ para soluções de (2.15). Para obter algumas convergências envolvendo a não linearidade f, precisamos do lema a seguir.

Lema 2.10. Se (u_j) é uma sequência convergente em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, então

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \int_\Omega \exp(b|u_j|^\gamma)\, dx < \infty, \qquad \forall\, b \in \mathbb{R}.$$

Demonstração. O caso $b \leq 0$ é trivial. Considere $b > 0$. Seja $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ o limite de (u_j). Temos que

$$|u_j|^\gamma \leq (|u_j| + |u_j - u|)^\gamma \leq 2^\gamma(|u|^\gamma + |u_j - u|^\gamma),$$

de modo que

$$\int_\Omega \exp(b|u_j|^\gamma)\, dx \leq \left(\int_\Omega \exp\Big(2^{\gamma+1}b|u|^\gamma\Big)\, dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega \exp\Big(2^{\gamma+1}b|u_j - u|^\gamma\Big)\, dx\right)^{1/2}.$$

A primeira integral à direita é finita, devido à desigualdade de Trudinger-Moser, Teorema 4.4. Já a segunda integral é igual a

$$\int_\Omega \exp\Big(2^{\gamma+1}b\|u_j - u\|^\gamma |v_j|^\gamma\Big)\, dx,$$

onde $v_j = (u_j - u)/\|u_j - u\|$. Como $u_j \to u$, temos $2^{\gamma+1}b\|u_j - u\|^\gamma < K_{N,\alpha}$ para j suficientemente grande. Além disso, temos $\|v_j\| = 1$. Assim, a desigualdade de Trudinger-Moser, Teorema 4.4, garante a limitação desta sequência de integrais, o que conclui a prova do lema. $\square$

Para $\mu \in (0, \mu_0)$, seja $u = u_\mu$ a solução do problema auxiliar (2.15) no nível c_μ. Ou seja, $E_\mu(u) = c_\mu$ e $E'_\mu(u) = 0$. Considere $\mu_j \to \bar{\mu}_0$, com $\bar{\mu}_0 \in [0, \mu_0)$. Como $0 < \tilde{c} \leq c_\mu < \vartheta + c\mu^{c'_\alpha}$, em que $\vartheta < (\frac{K_{N,\alpha}}{\beta})^{\frac{N}{\gamma}}$, temos que a menos de subsequência $c_{\mu_j} \to \bar{c} \in [\tilde{c}, \vartheta]$. Em particular, $\bar{c} \neq 0$. Pelo Teorema 2.2 temos que a menos de subsequência $u_j := u_{\mu_j} \to u_0$ em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ em que u_0 é ponto crítico de $E_{\bar{\mu}_0}$ no nível $\bar{c}$.

Proposição 2.2. Para $\mu_j \to \bar{\mu}_0$ como acima, cada solução $u_j := u_{\mu_j}$ pertence a $L^\infty(\Omega)$ e existe $M_0 > 0$ tal que $\|u_j\|_\infty \leq M_0$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Como $E'_{\mu_j}(u_j)u_j = 0$, usando a imersão contínua de $L^N(\Omega)$ em $L^1(\Omega)$ e o Lema 2.10 vemos que existe $D = D(u_0)$ tal que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \Phi'(|\nabla u_j|)|\nabla u_j|\, dx &= \int_\Omega f(u_j^+)u_j\, dx - \mu_j \int_\Omega g(u_j)u_j\, dx \\
&\leq c_1 \int_\Omega |u_j|^N\, dx + c_2 \int_\Omega |u_j| e^{\beta|u_j|^\gamma}\, dx + \mu_j \int_\Omega |u_j|\, dx \\
&\leq c_1 \int_\Omega |u_j|^N\, dx + c_2 \left(\int_\Omega |u_j|^N\, dx\right)^{\frac{1}{N}} \left(\int_\Omega e^{N'\beta|u_j|}\, dx\right)^{\frac{1}{N'}} + \mu_0 \int_\Omega |u_j|\, dx \\
&\leq c_1 \int_\Omega |u_j|^N\, dx + D\left(\int_\Omega |u_j|^N\, dx\right)^{\frac{1}{N}}.
\end{aligned}$$

Uma vez que Φ satisfaz $(\phi_1) - (\phi_2)$, vemos que existe $C > 0$ tal que $\Phi(t) \geq Ct^N$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Então existe $c_3 > 0$, independente de j, tal que

$$\int_\Omega \Phi'(|\nabla u_j|)|\nabla u_j|\,dx \leq c_3 \left[\int_\Omega \Phi(u_j)\,dx + \left(\int_\Omega \Phi(u_j)\,dx \right)^{\frac{1}{N}} \right]. \tag{2.77}$$

Como

$$m_\alpha \leq \frac{\Phi'(t)t}{\Phi(t)} \leq c_\alpha, \quad \forall\, t > 0,$$

segue de (2.77) que para todo j,

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Phi(|\nabla u_j|)\,dx &\leq \frac{1}{m_\alpha} \int_\Omega \Phi'(|\nabla u_j|)|\nabla u_j|\,dx \\ &\leq \frac{2c_3}{m_\alpha} \max \left\{ \left[\int_\Omega \Phi(u_j)\,dx \right]^{\frac{1}{N}}, \int_\Omega \Phi(u_j)\,dx \right\}. \end{aligned} \tag{2.78}$$

Uma vez que Φ' é não negativa e crescente em $[0, \infty)$ vemos que $\Phi'(t)s \leq \Phi'(t)t + \Phi'(s)s$ para $s, t \geq 0$. Além disso, como Φ' é ímpar obtemos

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla(\Phi(u_j))|\,dx = \int_\Omega |\Phi'(u_j)\nabla u_j|\,dx \;&=\; \int_\Omega \Phi'(|u_j|)|\nabla u_j|\,dx \\ &\leq \int_\Omega \Phi'(u_j)u_j\,dx + \int_\Omega \Phi'(|\nabla u_j|)|\nabla u_j|\,dx \\ &\leq c_\alpha \int_\Omega \Phi(u_j)\,dx + c_\alpha \int_\Omega \Phi(|\nabla u_j|)\,dx. \end{aligned}$$

Como (u_j) é convergente em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, é limitada em $L^\Phi(\Omega)$ e $\int_\Omega \Phi(u_j)\,dx$ é limitada. Daí, usando (2.78) vemos que

$$\int_\Omega |\nabla(\Phi(u_j))|\,dx \leq c_4 \max \left\{ \int_\Omega \Phi(u_j)\,dx, \left(\int_\Omega \Phi(u_j)\,dx \right)^{\frac{1}{N}} \right\} \leq c', \quad \forall\, j.$$

Logo, $\{\Phi(u_j)\}$ é limitada em $W_0^{1,1}(\Omega)$. Além disso, pela imersão

$$W_0^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^{1^*}(\Omega) = L^{N'}(\Omega),$$

obtemos

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\Phi(u_j)|^{N'}\,dx \leq c\|\Phi(u_j)\|_{W^{1,1}(\Omega)} \;&=\; c(\|\Phi(u_j)\|_{L^1(\Omega)} + \|\nabla\Phi(u_j)\|_{L^1(\Omega)}) \\ &\leq c \max \left\{ \int_\Omega \Phi(u_j)\,dx, \left(\int_\Omega \Phi(u_j)\,dx \right)^{1/N} \right\} \leq \tilde{C}, \end{aligned} \tag{2.79}$$

em que $\tilde{C} > 0$ depende de N, c_α, u_0 e da constante de imersão, mas não depende de $j \in \mathbb{N}$. Agora considere uma constante $d_0 \in (1, N')$ e um número arbitrário $q > 1$ tal que $\Phi(u_j) \in L^{qd_0}(\Omega)$. Para $t \geq 0$ defina

$$\Phi_L(t) = \Phi(\min\{t, L\}), \text{ com } L > 0,$$

e considere a função teste $w_j = [\Phi_L(|u_j|)]^{q-1}u_j$. Note que $\{w_j\}_j$ é limitada em $\in L^{\Phi}(\Omega)$, para cada L fixado. De fato, desde que $|w_j| \leq [\Phi(L)]^{q-1}|u_j|$ e $\Phi \in \Delta_2$, temos

$$\int_\Omega \Phi(w_j)\, dx \leq \int_\Omega \Phi([\Phi(L)]^{q-1}u_j)\, dx \leq c_L \int_\Omega \Phi(u_j)\, dx \leq \tilde{c}_L.$$

Além disso,

$$\frac{\partial w_j}{\partial x_i}(x) = \begin{cases} (q-1)[\Phi(u_j)]^{q-2}\Phi'(u_j)\frac{\partial u_j}{\partial x_i}u_j + [\Phi(u_j)]^{q-1}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}, & \text{se } |u_j(x)| \leq L \\ [\Phi(L)]^{q-1}\,\frac{\partial u_j}{\partial x_i}, & \text{se } |u_j(x)| > L, \end{cases}$$

de modo que

$$\begin{aligned} \nabla w_j(x) &= \begin{cases} \{(q-1)[\Phi(|u_j|)]^{q-2}\Phi'(u_j)u_j + [\Phi(|u_j|)]^{q-1}\}\,\nabla u_j, & \text{se } |u_j(x)| \leq L \\ [\Phi(L)]^{q-1}\,\nabla u_j, & \text{se } |u_j(x)| > L \end{cases} \\ &=: \Psi_L(u_j)\nabla u_j. \end{aligned}$$

Como

$$\Psi_L(t) = \begin{cases} (q-1)[\Phi(t)]^{q-2}\Phi'(t)t + [\Phi(t)]^{q-1} \leq [1 + c_\alpha(q-1)]\,[\Phi(L)]^{q-1}, & \text{se } |t| \leq L \\ [\Phi(L)]^{q-1}, & \text{se } |t| > L, \end{cases}$$

vemos que, para todo $j \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Phi(|\nabla w_j|)\, dx &\leq \int_\Omega \Phi([1 + c_\alpha(q-1)][\Phi(L)]^{q-1}|\nabla u_j|)\, dx \\ &\leq \overline{c}_L \int_\Omega \Phi(|\nabla u_j|)\, dx \leq \overline{c}_L c'. \end{aligned}$$

Portanto, $w_j \in W^{1,\Phi}(\Omega)$. Usando w_j como função teste obtemos

$$0 = E'_{\mu_j}(u_j)w_j = \int_\Omega \frac{\Phi'(|\nabla u_j|)}{|\nabla u_j|}\nabla u_j \nabla w_j\, dx - \int_\Omega f(u_j^+)w_j\, dx + \mu_j \int_\Omega g(u_j)w_j\, dx.$$

o que nos dá

$$\int_\Omega \Psi_L(u_j)\Phi'(|\nabla u_j|)|\nabla u_j|\, dx = \int_\Omega f(u_j^+)u_j[\Phi_L(u_j)]^{q-1}\, dx - \mu_j \int_\Omega g(u_j)u_j[\Phi_L(u_j)]^{q-1}\, dx.$$

Para $t \geq 0$ temos que $0 \leq tf(t) \leq c(t^N + t^N e^{\beta t^\gamma}) \leq c(\Phi(t) + \Phi(t)e^{\beta t^\gamma})$. Também temos

$g(t)t \geq 0$ para $|t| \geq 1$ e $|g(t)| \leq 1$ para todo t. Assim,

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \Psi_L(u_j)\Phi'(|\nabla u_j|)|\nabla u_j|\,dx &\leq c\int_\Omega [\Phi(u_j)]^q\left(1+e^{\beta|u_j|^\gamma}\right)\,dx \\
&\quad + \mu_0\int_{\{|u_j|\leq 1\}}(1+[\Phi(u_j)]^q)|u_j|\,dx \\
&\leq (c+\mu_0)\int_\Omega [\Phi(u_j)]^q\left(1+e^{\beta|u_j|^\gamma}\right)\,dx \qquad (2.80)\\
&\quad + \mu_0\int_\Omega |u_j|\,dx.
\end{aligned}
$$

Lembrando que $\Phi(u_j) \in L^{qd_0}(\Omega)$, usando a desigualdade de Hölder e o Lema 2.10, vemos que

$$
\int_\Omega [\Phi(u_j)]^q\left(1+e^{\beta|u_j|^\gamma}\right)\,dx \leq \|\Phi(u_j)\|_{qd_0}^q(|\Omega|^{1-1/d_0}+D^{1-1/d_0})
$$

e, já que $\Phi(t) \geq c't^N$ para todo $t \in \mathbb{R}$, temos também

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega |u_j|\,dx &\leq c\left(\int_\Omega |u_j|^N\,dx\right)^{1/N} \leq C\left(\int_\Omega \Phi(u_j)\,dx\right)^{1/N} \\
&\leq C\left(\|\Phi(u_j)\|_{qd_0}|\Omega|^{[1-1/(qd_0)]}\right)^{1/N} \leq C\|\Phi(u_j)\|_{qd_0}^{1/N}(1+|\Omega|).
\end{aligned}
$$

Usando estas desigualdades em (2.80) obtemos

$$
\int_\Omega \Psi_L(u_j)\Phi'(|\nabla u_j|)|\nabla u_j|\,dx \leq \tilde{c}\left[\|\Phi(u_j)\|_{qd_0}^{1/N}+\|\Phi(u_j)\|_{qd_0}^q\right], \qquad (2.81)
$$

onde $\tilde{c}$ é uma constante que não depende de j ou L ou q. Agora vamos analisar a sequência de funções $\{\Phi_L^q(u_j)\}$. Note que

$$
\nabla(\Phi_L^q(u_j)) = \begin{cases} 0, & \text{se } |u_j| > L \\ q\Phi^{q-1}(u_j)\Phi'(u_j)\nabla u_j, & \text{se } |u_j| \leq L \end{cases}
$$

de modo que, para $|u_j| \leq L$, vale

$$
|\nabla(\Phi_L^q(u_j))| = q\Phi^{q-1}(u_j)\Phi'(|u_j|)|\nabla u_j| \leq q\Phi^{q-1}(u_j)\left[\Phi'(|u_j|)|u_j| + \Phi'(|\nabla u_j|)|\nabla u_j|\right].
$$

Temos ainda, para $|u_j| \leq L$,

$$
\begin{aligned}
\Phi^{q-1}(u_j) &\leq [1+m_\alpha(q-1)]\Phi^{q-1}(u_j) \\
&\leq \Phi^{q-1}(u_j) + (q-1)\Phi^{q-2}(u_j)\Phi'(u_j)u_j = \Psi_L(u_j).
\end{aligned}
$$

Então

$$\int_\Omega |\nabla(\Phi_L^q(u_j))| \leq q\int_{\{|u_j|\leq L\}} [\Phi(u_j)]^{q-1}\left[\Phi'(u_j)u_j + \Phi'(|\nabla u_j|)|\nabla u_j|\right] dx$$
$$\leq qc_\alpha \int_\Omega \Phi^q(u_j)\,dx + q\int_\Omega \Psi_L(u_j)\Phi'(|\nabla u_j|)|\nabla u_j|\,dx.$$

Usando (2.81) obtemos

$$\int_\Omega |\nabla(\Phi_L^q(u_j))| \leq qc_\alpha \|\Phi(u_j)\|_{qd_0}^q |\Omega|^{\frac{1}{d_0'}} + q\tilde{c}\left\{\|\Phi(u_j)\|_{qd_0}^q + \|\Phi(u_j)\|_{qd_0}^{\frac{1}{N}}\right\}$$
$$\leq qc\max\left\{\|\Phi(u_j)\|_{qd_0}^q, \|\Phi(u_j)\|_{qd_0}^{\frac{1}{N}}\right\}.$$

Pela desigualdade de Sobolev-Gagliardo-Niremberg, como $1^* = N'$, temos

$$\left(\int_\Omega |\Phi_L^q(u_j)|^{N'}\right)^{\frac{1}{N'}} \leq c\int |\nabla(\Phi_L^q(u_j))|$$
$$\leq qC\max\left\{\|\Phi(u_j)\|_{qd_0}^q, \|\Phi(u_j)\|_{qd_0}^{\frac{1}{N}}\right\},$$

para alguma constante $C > 1$, independente de j, L e q. Fazendo $L \to \infty$, segue do Lema de Fatou que

$$\|\Phi(u_j)\|_{qN'} \leq q^{\frac{1}{q}} C^{\frac{1}{q}} \max\left\{\|\Phi(u_j)\|_{qd_0}, \|\Phi(u_j)\|_{qd_0}^{\frac{1}{Nq}}\right\}. \tag{2.82}$$

A partir de agora iremos escolher uma sequência $\{q_m\}$ de modo que $\Phi(u_j) \in L^{qd_0}(\Omega)$. Tomando $q_1 > 1$ tal que $q_1 d_0 = N'$, temos $\Phi(u_j) \in L^{qd_0}(\Omega)$ e

$$\|\Phi(u_j)\|_{q_1 N'} \leq q_1^{\frac{1}{q_1}} C^{\frac{1}{q_1}} \max\left\{\|\Phi(u_j)\|_{N'}, \|\Phi(u_j)\|_{N'}^{\frac{1}{Nq_1}}\right\}. \tag{2.83}$$

Definindo $q_{m+1} = \frac{N'}{d_0} q_m$, temos $q_m = \left(\frac{N'}{d_0}\right)^m = q_1^m$, para todo $m \in \mathbb{N}$ e para $q = q_m$ em (2.82) temos

$$\|\Phi(u_j)\|_{q_m N'} \leq (q_m)^{\frac{1}{q_m}} C^{\frac{1}{q_m}} \max\left\{\|\Phi(u_j)\|_{q_m d_0}, \|\Phi(u_j)\|_{q_m d_0}^{\frac{1}{Nq_m}}\right\}. \tag{2.84}$$

Provaremos que

$$\|\Phi(u_j)\|_{q_m N'} \leq (q_1)^{\sum_{i=1}^m \left(\frac{i}{q_i}\right)} C^{\sum_{i=1}^m \left(\frac{1}{q_i}\right)} \max\left\{\|\Phi(u_j)\|_{N'}, 1\right\}. \tag{2.85}$$

Vimos em (2.83) que (2.85) vale para $m = 1$. Suponha que (2.85) vale para m. Como

$q_1, C \geq 1$, $\max\{\|\Phi(u_j)\|_{N'}, 1\} \geq 1$ e $1/Nq_{m+1} < 1$, obtemos

$$\|\Phi(u_j)\|_{q_m N'}^{\frac{1}{Nq_{m+1}}} \leq (q_1)^{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{i}{q_i}\right)} C^{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{q_i}\right)} \max\{\|\Phi(u_j)\|_{N'}, 1\}.$$

Então, devido a (2.84) e usando o fato de que $q_{m+1}d_0 = q_m N'$, temos para $m+1$

$$\begin{aligned}
\|\Phi(u_j)\|_{q_{m+1}N'} &\leq q_{m+1}^{\frac{1}{q_{m+1}}} C^{\frac{1}{q_{m+1}}} \max\left\{\|\Phi(u_j)\|_{q_m N'}, \|\Phi(u_j)\|_{q_m N'}^{\frac{1}{Nq_{m+1}}}\right\} \\
&\leq (q_1^{m+1})^{\frac{1}{q_{m+1}}} C^{\frac{1}{q_{m+1}}} (q_1)^{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{i}{q_i}\right)} C^{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{q_i}\right)} \max\{\|\Phi(u_j)\|_{N'}, 1\} \\
&= (q_1)^{\sum_{i=1}^{m+1}\left(\frac{i}{q_i}\right)} C^{\sum_{i=1}^{m+1}\left(\frac{1}{q_i}\right)} \max\{\|\Phi(u_j)\|_{N'}, 1\}, \quad \forall\, j
\end{aligned}$$

o que mostra que (2.85) também vale para $m+1$. Portanto, vale para todo $m \in \mathbb{N}$. Assim, por (2.79) vemos que

$$\begin{aligned}
\|\Phi(u_j)\|_{q_{m+1}N'} &\leq (q_1)^{\sum_{i=1}^{m+1}\left(\frac{i}{q_i}\right)} C^{\sum_{i=1}^{m+1}\left(\frac{1}{q_i}\right)} \max\{\|\Phi(u_j)\|_{N'}, 1\} \\
&\leq (q_1)^{\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{i}{q_i}\right)} C^{\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{q_i}\right)} \max\left\{\tilde{C}, 1\right\} =: \bar{C}
\end{aligned}$$

para todo $j, m \in \mathbb{N}$, já que

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{i}{q_1^i}\right) = \frac{q_1}{(q_1-1)^2} < \infty \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{q_1}\right)^i = \frac{1}{q_1-1} < \infty.$$

Sabemos pelo Teorema 8.1 de [42] que, se $|E| < \infty$, então $\|f\|_\infty = \lim\limits_{p\to\infty}\|f\|_p$. Assim, fazendo $m \to \infty$ na desigualdade acima, temos

$$\|\Phi(u_j)\|_\infty \leq \bar{C}, \quad \forall\, j \in \mathbb{N}.$$

Portanto,

$$|u_j(x)| \leq \tilde{c}[\Phi(u_j(x))]^{\frac{1}{N}} \leq \tilde{c}\|\Phi(u_j)\|_\infty^{\frac{1}{N}} \leq \tilde{c}\bar{C}^{\frac{1}{N}} =: M_0,$$

o que conclui esta prova. □

2.4.2 Estimativa em $C^{1,\sigma}$

A seguir, provaremos que as hipóteses do Teorema de Limitação Global de Lieberman, Teorema 4.3, são válidas no nosso contexto.

Lema 2.11. Suponha que Φ é uma N-função de classe C^2 que satisfaz $(\phi_1) - (\phi_3)$ e

f, g são funções contínuas. Então, para cada $M_0 > 0$, as hipóteses (a) - (d) do Teorema 4.3 são válidas para as funções

$$A(x,z,p) = A(p) := \frac{\Phi'(|p|)}{|p|}p \quad \text{e} \quad B(x,z,p) = B(z) := f(z^+) - \mu g(z)$$

para $(x,z,p) \in \Omega \times [-M_0, M_0] \times \mathbb{R}^N$.

Demonstração.

(a) Precisamos mostrar que

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \frac{c\Phi'(|p|)}{|p|}|\xi|^2,$$

para todo $p, \xi \in \mathbb{R}^N$, onde $a^{ij} = \frac{\partial A^i}{\partial p_j}$. Dada a definição de A, temos

$$\begin{aligned} a_{ij}(p) = \frac{\partial}{\partial j}\left(\frac{\Phi'(|p|)}{|p|}p_i\right) &= \frac{\Phi''(|p|)\frac{2p_j|p|}{2|p|} - \Phi'(|p|)\frac{2p_j}{2|p|}}{|p|^2}p_i + \frac{\Phi'(|p|)}{|p|}\delta_{ij} \\ &= \frac{\Phi''(|p|) - \frac{\Phi'(|p|)}{|p|}}{|p|^2}p_ip_j + \frac{\Phi'(|p|)}{|p|}\delta_{ij}. \end{aligned} \tag{2.86}$$

Então

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(p)\xi_i\xi_j &= \frac{\Phi''(|p|) - \frac{\Phi'(|p|)}{|p|}}{|p|^2}\sum_{i,j=1}^{N} p_ip_j\xi_i\xi_j + \frac{\Phi'(|p|)}{|p|}\sum_{i,j=1}^{N}\delta_{ij}\xi_i\xi_j \\ &= \frac{\Phi''(|p|) - \frac{\Phi'(|p|)}{|p|}}{|p|^2}\langle p,\xi\rangle^2 + \frac{\Phi'(|p|)}{|p|}|\xi|^2 \\ &= \frac{\Phi''(|p|) - \frac{\Phi'(|p|)}{|p|}}{|p|^2}|p|^2|\xi|^2\cos^2 \langle^p_\xi + \frac{\Phi'(|p|)}{|p|}|\xi|^2. \end{aligned}$$

Como Φ satisfaz (ϕ_3), temos $\Phi''(t) \geq \delta\frac{\Phi'(t)}{t}$ para todo $t > 0$, com $\delta = \tilde{m}_\alpha > 0$. Daí segue que

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(p)\xi_i\xi_j &\geq (\delta - 1)\frac{\Phi'(|p|)}{|p|}|\xi|^2\cos^2 \langle^\xi_p + \frac{\Phi'(|p|)}{|p|}|\xi|^2 \\ &= \frac{\Phi'(|p|)}{|p|}|\xi|^2[(\delta-1)\cos^2 \langle^\xi_p + 1] \\ &\geq \begin{cases} \frac{\Phi'(|p|)}{|p|}|\xi|^2 & \text{se} \quad \delta \geq 1, \\ \delta\frac{\Phi'(|p|)}{|p|}|\xi|^2 & \text{se} \quad 0 < \delta < 1. \end{cases} \end{aligned}$$

(b) Precisamos mostrar que $\sum_{i,j=1}^{N}|a_{ij}| \leq \Lambda\frac{\Phi'(|p|)}{|p|}$, para alguma constante $\Lambda > 0$.

Uma vez que $\tilde{m}_\alpha \leq \frac{t\Phi''(t)}{\Phi'(t)} \leq \tilde{c}_\alpha$ para todo $t > 0$, tomando $\lambda = \max\{|\tilde{m}_\alpha - 1|; |\tilde{c}_\alpha - 1|\}$ temos

$$|t\Phi''(t) - \Phi'(t)| \leq \lambda\Phi'(t), \quad \forall\, t > 0.$$

Usando (2.86) vemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{N} |a_{ij}| &\leq \left|\frac{\Phi''(|p|) - \frac{\Phi'(|p|)}{|p|}}{|p|^2}\right| \sum_{i,j=1}^{N} |p_i p_j| + \frac{\Phi'(|p|)}{|p|} \sum_{i,j=1}^{N} \delta_{ij} \\
&\leq \frac{N^2}{|p|} \left||p|\Phi''(|p|) - \Phi'(|p|)\right| + N\frac{\Phi'(|p|)}{|p|} \\
&\leq (N^2\lambda + N)\frac{\Phi'(|p|)}{|p|} =: \frac{\Lambda\Phi'(|p|)}{|p|}, \quad \forall\, p \in \mathbb{R}^N.
\end{aligned}$$

(c) Temos que

$$|A(x, z, p) - A(y, w, p)| \leq \Lambda_1(1 + \Phi'(|p|))[|x - y|^\sigma + |z - w|^\sigma],$$

para alguma constante $\Lambda_1 > 0$. De fato, a função A depende apenas de p, obtemos $|A(x, z, p) - A(y, w, p)| = 0$ para quaisquer $x, y \in \Omega$, $z, w \in \mathbb{R}$ e $p \in \mathbb{R}^N$.

(d) Para algum $\Lambda_1 > 0$, vale

$$|B| \leq \Lambda_1 \left[1 + \Phi'(|p|)|p|\right]$$

para todo $(x, z, p) \in \Omega \times [-M_0, M_0] \times \mathbb{R}^N$. Com efeito, as funções f e g são contínuas e, sendo $z^+ = \max\{z, 0\}$, vemos que

$$|B(z)| = |f(z^+) - \mu g(z)| \leq \max_{z\in[0,M_0]} |f(z)| + \mu \max_{z\in[-M_0,M_0]} |g(z)| := \Lambda_1 \leq \Lambda_1 \left[1 + \Phi'(|p|)|p|\right].$$

Portanto, se verificam as hipóteses do Teorem 4.3. □

Logo, dada a limitação L^∞ da sequência (u_j), podemos aplicar o teorema de Lieberman, Teorema 4.3, e garantir que $u_j \in C^{1,\sigma}(\Omega)$ para algum $\sigma > 0$ e

$$\|u_j\|_{C^{1,\sigma}(\Omega)} \leq c$$

onde σ e c não dependem de j. Ou seja, a sequência (u_j) é limitada em $C^{1,\sigma}(\overline{\Omega})$. Pela imersão compacta de $C_0^{1,\sigma}(\overline{\Omega})$ em $C_0^1(\overline{\Omega})$ temos que a menos de subsequência u_j converge para u_0 em $C_0^1(\overline{\Omega})$.

Note que, considerando $\mu_j \equiv \mu$, a Proposição 2.2 garante que $u_\mu \in L^\infty(\Omega)$ e pelo Teorema 4.3 temos $u_\mu \in C_0^1(\overline{\Omega})$, para cada $\mu \in (0, \mu_0)$.

2.5 Prova do teorema principal

Já sabemos que para $\mu \in (0, \mu_0)$ existe uma solução do problema auxiliar (2.15), a qual denotamos por u_μ, e $u_\mu \in C_0^1(\overline{\Omega})$. Agora provaremos que, se $\mu_0 > 0$ é suficientemente pequeno, então u_μ é positiva em Ω, e portanto uma solução fraca do Problema 2.1. Para isso, é suficiente provar que para cada sequência $\mu_j > 0$, que satisfaz $\mu_j \to 0$, existe uma subsequência de $u_j = u_{\mu_j}$ positiva em Ω.

Considerando $\mu_j \to 0$, por (2.68), a menos de subsequência, c_{μ_j} converge para algum c^* satisfazendo

$$0 < c^* < \left(\frac{K_{N,\alpha}}{\beta}\right)^{\frac{N}{\gamma}}.$$

Pelo Teorema 2.2, a menos de subsequência (u_j) converge em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ para um ponto crítico u de E_0 no nível c^*. Como $c^* > 0$, u é não trivial. Como u é uma solução fraca não trivial do problema

$$\begin{cases} -\Delta_\Phi u &= f(u^+) \quad \text{em } \Omega \\ \quad u &= 0 \qquad\quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

temos, pelo Teorema 1.1, temos que $u > 0$ em Ω e que a derivada normal exterior é negativa, $\partial u/\partial \nu < 0$ em $\partial\Omega$. Lembramos que, sendo ν o vetor normal unitário exterior sobre $\partial\Omega$, o conjunto

$$\mathcal{A} = \{u \in C_0^1(\overline{\Omega}); u > 0 \text{ e } \partial u/\partial \nu < 0\},$$

é um subconjunto aberto de $C_0^1(\overline{\Omega})$. Pelos resultados da Seção 2.4 sabemos que, a menos de subsequência, $u_j \to u$ em $C_0^1(\overline{\Omega})$. Consequentemente, $u_j \in \mathcal{A}$ para j suficientemente grande, o que garante que $u_j > 0$. Isso conclui a prova do Teorema 2.1.

Capítulo 3

Solução nodal de energia mínima para um problema no espaço de Orlicz-Sobolev com crescimento crítico exponencial

Neste capítulo, investigaremos a existência de uma solução nodal, com exatamente dois domínios nodais, para o problema

$$\begin{cases} -\Delta_\Phi u = f(u) & \text{em } \Omega, \\ u^\pm \neq 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, com $N \geq 2$, é um domínio limitado e suave, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 e Δ_Φ denota o operador Φ-laplaciano, definido por

$$\Delta_\Phi u = \operatorname{div}\left(\Phi'(|\nabla u|)\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right),$$

em que $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma N-função de classe C^2.

Definição 3.1. Seja $u : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Dizemos que u é uma função nodal, se u muda de sinal em Ω. Além disso, o domínio nodal de u são as componentes conexas dos conjuntos abertos

$$\Omega_+ = \{x \in \Omega : u(x) > 0\} \quad \text{e} \quad \Omega_- = \{x \in \Omega : u(x) < 0\}.$$

Neste capítulo, o nosso objetivo é mostrar que o Problema 3.1 admite pelo menos uma solução nodal de energia mínima que possui exatamente dois domínios nodais.

A seguir, listamos as hipóteses adotadas sobre a N-função Φ.

(ϕ_1) Existe uma constante $C \geq 1$ tal que, para todo $t \in \left[0, \frac{1}{C}\right)$, temos

$$\frac{t^N}{C} \leq \Phi(t) \leq Ct^N;$$

(ϕ_2) Para algum $\alpha \in [0, N-1)$, vale o limite

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\Phi(t)}{t^N \log^\alpha(t)} = 1;$$

(ϕ_3) Existem constantes $\tilde{m}_\alpha, \tilde{c}_\alpha > 0$ tais que

$$\tilde{m}_\alpha \leq \frac{\Phi''(t)t}{\Phi'(t)} \leq \tilde{c}_\alpha, \quad \forall\, t > 0. \tag{3.2}$$

Denotando $c_\alpha = \tilde{c}_\alpha + 1$, veja Lema 2.3, supomos também que:

$(\hat{\phi}_4)$ A função $\frac{\Phi'(t)}{|t|^{c_\alpha - 2}t}$ é não-decrescente para $t < 0$ e não-crescente para $t > 0$;

(ϕ_5) As funções $t \mapsto \Phi'(t)t$ e $t \mapsto \Phi(t) - \frac{1}{c_\alpha}\Phi'(t)t$ são convexas para $t > 0$.

A seguir, apresentamos um exemplo de função Φ satisfazendo as hipóteses acima.

Exemplo 3.1. Considere a função

$$\Phi(t) = |t|^3 \log(e + |t|), \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Temos que $\Phi \in C^2$ é convexa e par e que $\Phi(t) = 0$ se, e somente se, $t = 0$. Além disso, temos

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\Phi(t)}{t} = \lim_{t\to 0^+} t^2 \log(e+t) = 0, \qquad \text{e} \qquad \lim_{t\to +\infty} \frac{\Phi(t)}{t} = \lim_{t\to +\infty} t^2 \log(e+t) = +\infty.$$

Portanto, Φ é uma N-função. Agora verificaremos as 5 hipóteses apresentadas acima.

(ϕ_1) Existe uma constante $C \geq 1$ tal que, para todo $t \in \left[0, \frac{1}{C}\right)$, temos $\frac{t^3}{C} \leq \Phi(t) \leq Ct^3$.

Como $\log(e+t) \to 1$ quando $t \to 0^+$, temos $\Phi(t) \sim t^3$ perto da origem. Portanto, existe $C \geq 1$ tal que para todo $t \in \left[0, \frac{1}{C}\right)$, vale

$$\frac{t^3}{C} \leq \Phi(t) \leq C\, t^3.$$

(ϕ_2) Vale o limite $\lim_{t\to\infty} \frac{\Phi(t)}{t^3 \log(t)} = 1$.

Com efeito,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\Phi(t)}{t^3 \log t} = \lim_{t\to\infty} \frac{\log(e+t)}{\log t} = 1,$$

(ϕ_3) Para $\tilde{m}_\alpha = 2$ e $\tilde{c}_\alpha = 3$, temos $\tilde{m}_\alpha \leq \frac{\Phi''(t)\,t}{\Phi'(t)} \leq \tilde{c}_\alpha$, para todo $t > 0$.

De fato, derivando Φ para $t > 0$, obtemos

$$\Phi'(t) = \frac{t^2\Big(t + 3(t+e)\log(e+t)\Big)}{t+e}$$

e

$$\Phi''(t) = \frac{t\Big(-t^2 + 6t(t+e) + 6(t+e)^2 \log(e+t)\Big)}{(t+e)^2}.$$

Então,

$$\frac{\Phi''(t)\,t}{\Phi'(t)} - 2 = \frac{t(3t+4e)}{t^2 + et + \log\Big((t+e)^{3t^2+6et+3e^2}\Big)} > 0,$$

e

$$3 - \frac{\Phi''(t)\,t}{\Phi'(t)} = \frac{-2t^2 - 3et + \log\Big((t+e)^{3t^2+6et+3e^2}\Big)}{(t+e)\Big(t + 3(t+e)\log(e+t)\Big)} \geq 0,$$

pois $\log(e+t) \geq 1$ implica

$$\log\Big((t+e)^{3t^2+6et+3e^2}\Big) = (3t^2 + 6et + 3e^2)\log(e+t) \geq 2t^2 + 3et.$$

Assim,

$$2 \leq \frac{\Phi''(t)\,t}{\Phi'(t)} \leq 3.$$

($\hat{\phi}_4$) Pondo $c_\alpha = \tilde{c}_\alpha + 1 = 4$, temos que a função $h(t) := \frac{\Phi'(t)}{|t|^{c_\alpha - 2} t}$ é não-decrescente para $t < 0$ e não-crescente para $t > 0$.

Consideremos, para $t > 0$,

$$h(t) = \frac{\Phi'(t)}{t^3} = \frac{t + 3(t+e)\log(e+t)}{t(t+e)}.$$

Calculando a derivada de h, temos

$$h'(t) = \frac{2t^2 + 3et - \log\Big((t+e)^{3t^2+6et+3e^2}\Big)}{t^2\Big(t^2 + 2et + e^2\Big)} \leq 0,$$

porque novamente $\log(e+t) \geq 1$ torna o numerador não-positivo. Logo h é não-crescente em $(0,\infty)$ e, por paridade de Φ', a função $t \mapsto \Phi'(t)/\Big(|t|^2\, t\Big)$ é não-decrescente em $(-\infty, 0)$.

(ϕ_5) As funções $h_1(t) := \Phi'(t)t$ e $h_2(t) := \Phi(t) - \frac{1}{4}\Phi'(t)t$ são convexas para $t > 0$.

Como Φ é par, basta verificar a convexidade em $(0, \infty)$. Observe que

$$h_1(t) = 3t^3 \log(e + t) + \frac{t^4}{t + e}.$$

Sejam $A(t) := t^3 \log(e + t)$ e $B(t) := t^4/(t + e)$. Mostraremos que A e B são convexas. De fato,

$$A''(t) = \frac{t\Big(- t^2 + 6t(t + e) + 6(t + e)^2 \log(e + t)\Big)}{(t + e)^2} > 0,$$

e

$$B''(t) = \frac{2t^2\Big(t^2 - 4t(t + e) + 6(t + e)^2\Big)}{(t + e)^3} = \frac{2t^2\Big(3t^2 + 8et + 6e^2\Big)}{(t + e)^3} > 0.$$

Portanto, A e B são convexas, o que implica a convexidade de h_1. Agora, quanto a

$$h_2(t) = \frac{1}{4}\Big(t^3 \log(e + t) \; - \; \frac{t^4}{t + e}\Big),$$

seja $C(t) := \frac{1}{4}\Big(t^3 \log(e + t) \; - \; \frac{t^4}{t+e}\Big)$. Assim para $t > 0$, temos

$$C''(t) = \frac{t}{(t + e)^3}\Big(- t^3 - 5et^2 - 6e^2t + \Big(6t^3 + 18et^2 + 18e^2t + 6e^3\Big) \log(e + t)\Big) > 0.$$

O que implica a convexidade de h_2.

Supomos que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de classe C^1 e satisfaz as seguintes condições:

($\hat{f}_1$) $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{f(t)}{\Phi'(t)} = 0$.

($\hat{f}_2$) Existem C e $\beta > 0$ constantes, tais que

$$|f(t)| \leq C \left[|t|^{N-1} + \exp(\beta t^{\gamma})\right] \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

com γ dado na Definição 0.1;

($\hat{f}_3$) (Ambrosetti–Rabinowitz) Existe $\sigma > c_\alpha$ tal que

$$0 < \sigma F(t) \leq t f(t), \quad \forall\, t \neq 0.$$

($\hat{f}_4$) A função

$$t \mapsto \frac{f(t)}{|t|^{c_\alpha - 2} t}$$

é decrescente para $t < 0$ e crescente para $t > 0$;

$(\hat{f}_5)$ $\inf_{t\neq 0} \dfrac{F(t)}{|t|^\sigma} =: \mu \ \geq \ \mu^*,$ onde

$$\mu^* := \max\left\{ \mu_\delta, \left[\frac{\frac{\delta^N \beta_N}{2^N} \left(\frac{\mu_\delta}{\sigma}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma - m_\alpha}} (\sigma - m_\alpha)\, m_\alpha^{\frac{m_\alpha}{\sigma - m_\alpha}}}{d_{N,\alpha}} \right]^{\frac{\sigma - m_\alpha}{m_\alpha}} \right\},$$

com $\delta \in (0,4)$ fixado de modo que, existam $x^+, x^- \in \Omega$ tais que $B_1(x^+,\delta) \subset \Omega$, $B_2(x^-,\delta) \subset \Omega$, $B_1(x^+,\delta) \cap B_2(x^-,\delta) = \varnothing$, e

$$\mu_\delta := 2^N\, \Phi\big(\tfrac{4}{\delta}\big), \qquad d_{N,\alpha} := \frac{\sigma - c_\alpha}{\sigma} \left(\frac{K_{N,\alpha}}{\beta N}\right)^{\frac{N}{\gamma}},$$

em que β_N representa a medida de Lebesgue da bola unitária $B_1(0)$ e $K_{N,\alpha}$ é dado na Definição 0.1.

A hipótese $(\hat{f}_4)$ implica para $t > 0$ que

$$\frac{f'(t)t^{c_\alpha - 1} - f(t)(c_\alpha - 1)t^{c_\alpha - 2}}{(t^{c_\alpha - 1})^2} > 0,$$

isto é,

$$(c_\alpha - 1) f(t) t < f'(t) t^2 \quad \forall\, t > 0. \tag{3.3}$$

Exemplo 3.2. Sejam $N = 3$ e $\alpha = 1$, neste caso, $\gamma = 3$ e $c_\alpha = 4$. Sejam $\sigma > c_\alpha$ e $\beta > 0$. Considere a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(t) = |t|^\sigma e^{\beta |t|^3}$$

cuja derivada é

$$f(t) = e^{\beta t^3}(\sigma t^{\sigma - 1} + 3\beta t^{2+\sigma}),\ t \geq 0.$$

Verifica-se que f satisfaz as hipóteses $(\hat{f}_1)$ - $(\hat{f}_5)$.

O principal resultado do Capítulo, cuja demonstração foi inspirada, principalmente, nos trabalhos [28] e [29] é o seguinte:

Teorema 3.1. *Suponha que as condições* $(\phi_1) - (\phi_3)$, $(\hat{\phi}_4)$, (ϕ_5) *e* $(\hat{f}_1)$-$(\hat{f}_5)$ *estejam satisfeitas. Então o Problema 3.1 admite ao menos uma solução nodal de energia mínima, a qual apresenta exatamente dois domínios nodais.*

A seguir, apresentamos algumas consequências importantes decorrentes das hipóteses $(\hat{f}_1)$-$(\hat{f}_5)$.

(1) Por $(\hat{f}_3)$, existe uma constante $c > 0$ tal que

$$F(t) \geq c|t|^{\sigma} - \tilde{c}, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}. \tag{3.4}$$

(2) Dados $p \geq 1$ e $\varepsilon > 0$, as hipóteses $(\hat{f}_1)$ e $(\hat{f}_2)$ implicam que existe uma constante $C = C(p, \varepsilon) > 0$ tal que

$$|f(t)| \leq \varepsilon\, \Phi'(t) + C|t|^{p-1} \exp\left(\beta |t|^{\gamma}\right), \quad \forall\, t \geq 0. \tag{3.5}$$

3.1 Estrutura variacional e lemas técnicos

Dizemos que $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ é uma solução nodal fraca do Problema 3.1 se $u^+ \neq 0$ e $u^- \neq 0$ em Ω, e se satisfaz

$$\int_\Omega \Phi'(|\nabla u|) \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \nabla v \, dx - \int_\Omega f(u)\, v\, dx = 0, \quad \forall\, v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$

O funcional energia $J : W_0^{1,\Phi}(\Omega) \to \mathbb{R}$ associado ao Problema 3.1 é dado por

$$J(u) := \int_\Omega \Phi(|\nabla u|)\, dx - \int_\Omega F(u)\, dx,$$

o qual está bem definido e é de classe C^1. Sobre $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, em vista de $(\hat{f}_1)$ e $(\hat{f}_2)$, motra-se que, para $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, a derivada de J em u é dada por

$$J'(u)v = \int_\Omega \Phi'(|\nabla u|) \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \nabla v \, dx - \int_\Omega f(u)\, v\, dx, \quad \forall\, v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$

A prova do próximo resultado pode ser encontrada em [28].

Lema 3.1 ([28], Lema 2.4)**.** Suponha que a condição (ϕ_3) está satisfeita. Para $t \geq 0$, defina as funções

$$\tau_0(t) := \min\left\{t^{\tilde{m}_\alpha},\, t^{\tilde{c}_\alpha}\right\} \quad \text{e} \quad \tau_1(t) := \max\left\{t^{\tilde{m}_\alpha},\, t^{\tilde{c}_\alpha}\right\}.$$

Então para todo $\rho, t > 0$, temos

$$\tau_0(\rho)\, \Phi'(t) \leq \Phi'(\rho t) \leq \tau_1(\rho)\, \Phi'(t).$$

Lembre que, por (3), podemos supor $\tilde{m}_\alpha = m_\alpha - 1$ e $\tilde{c}_\alpha = c_\alpha - 1$.

Lema 3.2. Seja $h : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ uma função integrável e suponha que existe $m > 1$ tal que a função

$$s \mapsto \frac{h(s)}{s^{m-1}} \quad \text{é crescente (resp., não-crescente) em } (0, +\infty).$$

Defina

$$H(s) := \int_0^s h(\tau)\, d\tau.$$

Então a função

$$s \mapsto sh(s) - mH(s)$$

é crescente (resp., não-crescente) em $(0, +\infty)$.

Demonstração. Sejam $0 < s < t$. Como $\frac{h(s)}{(s)^{m-1}}$ é crescente, temos

$$\frac{h(s)}{s^{m-1}} \leq \frac{h(\tau)}{\tau^{m-1}} \leq \frac{h(t)}{t^{m-1}}, \quad \text{para todo } \tau \in [s, t].$$

Consequentemente,

$$h(s) \leq \frac{h(\tau)}{\tau^{m-1}} s^{m-1} \quad \text{e} \quad h(\tau) \leq \frac{h(t)}{t^{m-1}} \tau^{m-1}, \quad \text{para todo } \tau \in [s, t].$$

Agora, observe que

$$\begin{aligned}
sh(s) - mH(s) &= \frac{h(s)}{s^{m-1}} s^m - m \int_0^s h(\tau)\, d\tau \\
&= \frac{h(s)}{s^{m-1}} s^m - mH(t) + m \int_s^t h(\tau)\, d\tau \\
&< \frac{h(t)}{t^{m-1}} s^m - mH(t) + m \int_s^t \frac{h(t)}{t^{m-1}} \tau^{m-1}\, d\tau \\
&= \frac{h(t)}{t^{m-1}} s^m - mH(t) + \frac{mh(t)}{t^{m-1}} \left(\frac{t^m - s^m}{m} \right) \\
&= \frac{h(t)}{t^{m-1}} t^m - mH(t) \\
&= th(t) - mH(t),
\end{aligned}$$

isto é,

$$sh(s) - mH(s) < th(t) - mH(t).$$

Portanto, a função $s \mapsto sh(s) - mH(s)$ é crescente. Para o caso em que a função $\frac{h(s)}{s^{m-1}}$ é não-crescente, basta inverter todas as desigualdades e o mesmo raciocínio usado acima mostrará que $sh(s) - mH(s)$ será não-crescente.

$\square$

Observação 3.1. A partir do lema anterior, em conjunto com as hipóteses $(\hat{\phi}_4)$ e $(\hat{f}_4)$, obtemos as seguintes propriedades:

(a) Para todo $t > 0$, a função $t \mapsto tf(t) - c_\alpha F(t)$ é crescente. Em particular, a função

$$\frac{1}{c_\alpha} f(t)t - F(t)$$

também é crescente para $t > 0$.

(b) Para todo $t > 0$, a função $t \mapsto \Phi'(t)t - c_\alpha \Phi(t)$ é não-crescente. Consequentemente, a função

$$\Phi(t) - \frac{1}{c_\alpha}\Phi'(t)t$$

é não-decrescente para $t > 0$. Pelo mesmo argumento, dado que $\sigma > c_\alpha$, a função

$$\Phi(t) - \frac{1}{\sigma}\,\Phi'(t)t$$

também é não-decrescente para $t > 0$.

Lema 3.3. Seja $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, com $\|u\| \leq \rho$, onde $\rho \in \left(0, \min\left\{\left(\frac{K_{N,\alpha}}{\beta}\right)^{\frac{1}{\gamma}}, 1\right\}\right)$, e seja $p > c_\alpha$. Então, existe uma função $\eta = \eta(\rho) > 0$ tal que

$$\int_\Omega |u|^p \exp\left(\beta |u|^\gamma\right)\, dx \leq \eta(\rho) \int_\Omega \Phi'\left(|\nabla u|\right)|\nabla u|\, dx. \tag{3.6}$$

Além disso, tem-se que $\eta(\rho) \to 0$ quando $\rho \to 0^+$.

Demonstração. Fixe $r > 1$ suficientemente próximo de 1 de modo que ainda se tenha

$$\rho^\gamma < \min\left\{\frac{K_{N,\alpha}}{\beta r}, 1\right\}. \tag{3.7}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder, à função à esquerda de (3.6), com os expoentes conjugados r e $r' := \frac{r}{r-1}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u|^p \exp\left(\beta |u|^\gamma\right)\, dx &\leq \left(\int_\Omega |u|^{r'p}\, dx\right)^{\frac{1}{r'}} \left(\int_\Omega \exp\left(\beta r |u|^\gamma\right)\, dx\right)^{\frac{1}{r}} \\
&\leq \left(\int_\Omega |u|^{r'p}\, dx\right)^{\frac{1}{r'}} \left[\int_\Omega \exp\left(\|u\|^\gamma \beta r \left(\frac{|u|}{\|u\|}\right)^\gamma\right)\, dx\right]^{\frac{1}{r}}.
\end{aligned}$$

Pela condição (3.7), temos

$$\beta r \|u\|^\gamma \leq \beta r \rho^\gamma < K_{N,\alpha}.$$

Além disso, como $\|u/\|u\|\| = 1$, podemos aplicar a desigualdade de Trudinger-Moser, Teorema 4.4, juntamente com a imersão contínua $W_0^{1,\Phi}(\Omega) \hookrightarrow L^{r'p}(\Omega)$ e a equivalência entre as normas $\|u\|$ e $\|\nabla u\|_\Phi$ para obter

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u|^p \exp\left(\beta|u|^\gamma\right)\, dx &\leq c_2\left(\int_\Omega |u|^{r'p}\, dx\right)^{\frac{1}{r'}}\\ &\leq c_4\|u\|^p\\ &\leq c_5\|\nabla u\|_\Phi^{p-c_\alpha}\cdot\|\nabla u\|_\Phi^{c_\alpha}\\ &\leq c_6\rho^{p-c_\alpha}\|\nabla u\|_\Phi^{c_\alpha}.\end{aligned}$$

Como $\|\nabla u\|_\Phi \leq \rho < 1$, segue do Lema 1.5, que

$$\int_\Omega \Phi(|\nabla u|)\, dx \geq \xi_0(\|\nabla u\|_\Phi) = \|\nabla u\|_\Phi^{c_\alpha}.$$

Combinando isso com (3) e substituindo acima, temos

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u|^p \exp\left(\beta|u|^\gamma\right)\, dx &\leq c_6\rho^{p-c_\alpha}\int_\Omega \Phi(|\nabla u|)\, dx\\ &\leq \frac{c_6}{m_\alpha}\rho^{p-c_\alpha}\int_\Omega \Phi'(|\nabla u|)|\nabla u|\, dx\\ &= \eta(\rho)\int_\Omega \Phi'(|\nabla u|)|\nabla u|\, dx,\end{aligned}$$

onde $\eta(\rho) \coloneqq c_6/m_\alpha \cdot \rho^{p-c_\alpha} > 0$. Como $p > c_\alpha$, temos $\eta(\rho) \to 0$ quando $\rho \to 0^+$, como queríamos provar. $\square$

3.1.1 A variedade nodal de Nehari: definição e propriedades

Associado ao funcional J, definimos a variedade de Nehari

$$\mathcal{N} := \left\{u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega) \setminus \{0\}\ ;\ J'(u)\, u = 0\right\}.$$

Para provar o Teorema 3.1, mostraremos que existe $w \in \mathcal{M}$ tal que

$$J(w) = \min_{v\in\mathcal{M}} J(v) =: c^*,$$

onde $\mathcal{M}$ é definido por

$$\mathcal{M} := \left\{w \in \mathcal{N}\ ;\ w^\pm \neq 0,\ \text{e}\ J'(w)\, w^\pm = 0\right\}.$$

O conjunto $\mathcal{M}$ é denominado de Variedade Nodal de Nehari.

No lema a seguir, provaremos que $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ é precisamente o conjunto das funções $w \in \mathcal{N}$ cujas partes positiva e negativa, w^+ e w^-, também pertencem a $\mathcal{N}$.

Lema 3.4. Seja $w \in \mathcal{M}$. Então, $J'(w^{\pm})\, w^{\pm} = 0$. Em particular,

$$\mathcal{M} = \Big\{ w \in \mathcal{N} \; ; \; w^{\pm} \in \mathcal{N} \Big\} .$$

Demonstração. Seja $w \in \mathcal{M}$. Como w^+ e w^- têm suportes disjuntos, segue que

$$\begin{aligned} 0 = J'(w)w^+ &= \int_\Omega \Phi'(|\nabla w|) \frac{\nabla w}{|\nabla w|} \nabla w^+ \, dx - \int_\Omega f(w) w^+ \, dx \\ &= \int_\Omega \Phi'(|\nabla w^+|) |\nabla w^+| \, dx - \int_\Omega f(w^+) w^+ \, dx = J'(w^+)w^+. \end{aligned}$$

Isso implica que $w^+ \in \mathcal{N}$. Desde que, por $(\hat{f}_3)$, $f(t) \leq 0$ para $t \leq 0$, concluímos de modo análogo, que $w^- \in \mathcal{N}$, o que mostra que

$$\mathcal{M} \subset \Big\{ w \in \mathcal{N} \; ; \; w^+, w^- \in \mathcal{N} \Big\} .$$

A recíproca é direta da definição de $\mathcal{M}$. Logo, a igualdade é válida. □

Agora provaremos algumas propriedades da Variedade de Nehari.

Lema 3.5. **(a)** Para todo $u \in \mathcal{N}$, vale a estimativa

$$J(u) \geq \left(\frac{\sigma - c_\alpha}{\sigma} \right) \xi_0 \Big(\|\nabla u\|_\Phi \Big);$$

(b) Existe $r > 0$ tal que $\|u\| \geq r$ para todo $u \in \mathcal{N}$. Em particular, tem-se que $\|w^{\pm}\| \geq r$ para todo $w \in \mathcal{M}$.

Demonstração. **(a)** Seja $u \in \mathcal{N}$. Pela hipótese $(\hat{f}_3)$, temos

$$J(u) = J(u) - \frac{1}{\sigma} J'(u)u \geq \int_\Omega \Phi(|\nabla u|) \, dx - \frac{1}{\sigma} \int_\Omega \Phi'(|\nabla u|) |\nabla u| \, dx.$$

Aplicando o Lema 1.3 juntamente com (3), obtemos

$$\begin{aligned} J(u) &\geq \int_\Omega \Phi(|\nabla u|) \, dx - \frac{c_\alpha}{\sigma} \int_\Omega \Phi(|\nabla u|) \, dx \\ &= \left(\frac{\sigma - c_\alpha}{\sigma} \right) \int_\Omega \Phi(|\nabla u|) \, dx \\ &\geq \left(\frac{\sigma - c_\alpha}{\sigma} \right) \xi_0 \left(\|\nabla u\|_\Phi \right). \end{aligned}$$

(b) Suponha, por contradição, que exista uma sequência $(u_n) \subset \mathcal{N}$ tal que $u_n \to 0$ em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ e $\|u_n\| \leq \rho$, com $\rho > 0$ satisfazendo as hipóteses do Lema 3.3. Como

$(u_n) \subset \mathcal{N}$, segue que

$$\int_\Omega \Phi'(|\nabla u_n|)|\nabla u_n|\,dx - \int_\Omega f(u_n)u_n\,dx = 0. \tag{3.8}$$

Considere $p > c_\alpha > 1$ e fixe $\varepsilon > 0$ de modo que

$$1 - \frac{\varepsilon c_\alpha \tilde{c}}{m_\alpha} < \frac{1}{2}.$$

A partir da estimativa (3.5), da Desigualdade de Poincaré, Proposição 1.2, e de (3), segue que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f(u_n)u_n\,dx &\leq \varepsilon \int_\Omega \Phi'(|u_n|)|u_n|\,dx + C\int_\Omega |u_n|^p \exp(\beta|u_n|^\gamma)\,dx \\
&\leq \varepsilon c_\alpha \int_\Omega \Phi(|u_n|)\,dx + C\int_\Omega |u_n|^p \exp(\beta|u_n|^\gamma)\,dx \\
&\leq \varepsilon c_\alpha \tilde{c} \int_\Omega \Phi(|\nabla u_n|)\,dx + C\int_\Omega |u_n|^p \exp(\beta|u_n|^\gamma)\,dx,
\end{aligned}$$

onde $\tilde{c}$ é a constante associada à Desigualdade de Poincaré. Utilizando essa estimativa e, mais uma vez, (3) em (3.8), obtemos

$$\begin{aligned}
0 &= \int_\Omega \Phi'(|\nabla u_n|)|\nabla u_n|\,dx - \int_\Omega f(u_n)u_n\,dx \\
&\geq \int_\Omega \Phi'(|\nabla u_n|)|\nabla u_n|\,dx - \frac{\varepsilon c_\alpha \tilde{c}}{m_\alpha}\int_\Omega \Phi'(|\nabla u_n|)|\nabla u_n|\,dx - C\int_\Omega |u_n|^p \exp(\beta|u_n|^\gamma)\,dx.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Seja $\rho > 0$ suficientemente pequeno de modo que $\eta(\rho)C < 1/2$ em que $\eta(\rho)$ é dada pelo Lema 3.3. Assim,

$$\int_\Omega |u_n|^p \exp(\beta|u_n|^\gamma)\,dx \leq \eta(\rho)\int_\Omega \Phi'(|\nabla u_n|)|\nabla u_n|\,dx. \tag{3.10}$$

Como $u_n \neq 0$ (pois $u_n \in \mathcal{N}$), ao substituirmos (3.10) em (3.9), obtemos

$$\begin{aligned}
0 &= \int_\Omega \Phi'(|\nabla u_n|)|\nabla u_n|\,dx - \varepsilon c_\alpha \tilde{c}\int_\Omega \Phi(|\nabla u_n|)\,dx - C\eta_n(r)\int_\Omega \Phi'(|\nabla u_n|)|\nabla u_n|\,dx \\
&\geq \left(1 - \frac{\varepsilon c_\alpha \tilde{c}}{m_\alpha} - C\eta(\rho)\right)\int_\Omega \Phi'(|\nabla u_n|)|\nabla u_n|\,dx > 0,
\end{aligned}$$

o que é uma contradição. Logo, não existe sequência $(u_n) \subset \mathcal{N}$ tal que $u_n \to 0$. Portanto, existe $r > 0$ tal que $\|u\| \geq r$ para todo $u \in \mathcal{N}$. $\square$

Lema 3.6. Seja $v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ tal que $v^+ \neq 0$ e $v^- \neq 0$. Então, existem $t, s > 0$ tais que

$$J'\left(tv^+ + sv^-\right)(v^+) = 0 \quad \text{e} \quad J'\left(tv^+ + sv^-\right)(v^-) = 0.$$

Demonstração. Como o funcional J é de classe C^1 sobre $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, temos que a função $V : (0, +\infty) \times (0, +\infty) \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$V(t,s) = \left(J'\left(tv^+ + sv^-\right)(tv^+),\ J'\left(tv^+ + sv^-\right)(sv^-)\right)$$

é contínua. Observe que

$$\begin{aligned} J'\left(tv^+ + sv^-\right)(tv^+) &= \int_\Omega \Phi'\left(\left|\nabla(tv^+ + sv^-)\right|\right) \frac{\nabla(tv^+ + sv^-)}{|\nabla(tv^+ + sv^-)|}\nabla(tv^+)\, dx \\ &\quad - \int_\Omega f\left(tv^+ + sv^-\right) tv^+\, dx \\ &= \int_\Omega \Phi'\left(|\nabla(tv^+)|\right)|\nabla(tv^+)|\, dx - \int_\Omega f(tv^+)tv^+\, dx, \end{aligned} \tag{3.11}$$

onde usamos o fato de que os suportes de v^+ e v^- são disjuntos. Para $t > 0$ suficientemente pequeno, podemos aplicar o Lema 3.3 juntamente com (3.5), além de (3) e da desigualdade de Poincar, Proposição 1.2, a fim de obter

$$\begin{aligned} \int_\Omega f(tv^+)\cdot tv^+\, dx &\le \varepsilon \int_\Omega \Phi'\left(|tv^+|\right)|tv^+|\, dx + C\int_\Omega |tv^+|^p \exp\left(\beta|tv^+|^\gamma\right)\, dx \\ &\le \varepsilon c_\alpha \int_\Omega \Phi\left(|tv^+|\right)\, dx + C\eta(\rho)\int_\Omega \Phi'\left(|\nabla tv^+|\right)|\nabla tv^+|\, dx \\ &\le \varepsilon c_\alpha c_1 \int_\Omega \Phi\left(|\nabla tv^+|\right)\, dx + C\eta(\rho)\int_\Omega \Phi'\left(|\nabla tv^+|\right)|\nabla tv^+|\, dx. \end{aligned} \tag{3.12}$$

De modo análogo ao procedimento adotado no Lema 3.3, fixamos $\varepsilon > 0$ tal que

$$1 - \frac{\varepsilon c_\alpha c_1}{m_\alpha} < \frac{1}{2},$$

e tomamos $\eta(\rho)$ suficientemente pequeno tal que $C\eta(\rho) < \frac{1}{2}$. Substituindo a estimativa (3.12) na expressão (3.11) e utilizando novamente (3), obtemos para todo $s > 0$

$$\begin{aligned} J'\left(tv^+ + sv^-\right)(tv^+) &\ge \int_\Omega \Phi'\left(|\nabla(tv^+)|\right)|\nabla tv^+|\, dx - \varepsilon c_\alpha c_1 \int_\Omega \Phi\left(|\nabla tv^+|\right)\, dx. \\ &\quad - C\eta(\rho)\int_\Omega \Phi'(|\nabla(tv^+)|)|\nabla tv^+|\, dx \\ &\ge \left(1 - \frac{\varepsilon c_\alpha c_1}{m_\alpha} - C\eta(\rho)\right)\int_\Omega \Phi'(|\nabla(tv^+)|)|\nabla tv^+|\, dx > 0. \end{aligned}$$

De forma análoga, para $s > 0$ suficientemente pequeno, obtemos para todo $t > 0$, que

$$J'\left(tv^+ + sv^-\right)(sv^-) \ge \left(1 - \frac{\varepsilon c_\alpha c_1}{m_\alpha} - C\eta(\rho)\right)\int_\Omega \Phi'\left(|\nabla(sv^-)|\right)|\nabla sv^-|\, dx > 0.$$

Resumindo, existe $r > 0$ suficientemente pequeno de modo que

$$\begin{aligned} J'\Big(rv^+ + sv^-\Big)\,(rv^+) > 0 \quad \text{para todo } s > 0, \\ J'\Big(tv^+ + rv^-\Big)\,(rv^-) > 0 \quad \text{para todo } t > 0. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Por outro lado, das hipóteses $(\hat{f}_3)$, $(\hat{f}_5)$ e de (3), segue que

$$\begin{aligned} J'\left(tv^+ + sv^-\right)(tv^+) &= \int_\Omega \Phi'\left(|\nabla(tv^+)|\right)|\nabla tv^+|\,dx - \int_\Omega f(tv^+)\cdot tv^+\,dx \\ &\le c_\alpha \int_\Omega \Phi\left(|\nabla tv^+|\right)dx - \mu\sigma t^\sigma \int_\Omega (v^+)^\sigma\,dx. \end{aligned}$$

Assim, pelo Lema 1.5, e como $\sigma > c_\alpha$, conclui-se que, para $t > 0$ suficientemente grande,

$$J'\left(tv^+ + sv^-\right)(tv^+) \le c_\alpha t^{c_\alpha}\xi_1\left(\|\nabla v^+\|\right) - \mu\sigma t^\sigma \int_\Omega (v^+)^\sigma\,dx < 0 \quad \forall\, s > 0.$$

De forma análoga, para $s > 0$ suficientemente grande, temos

$$J'\left(tv^+ + sv^-\right)(sv^-) < 0, \quad \text{para todo } t > 0.$$

Portanto, existe $R > r$ tal que

$$\begin{aligned} J'\Big(Rv^+ + sv^-\Big)\,(Rv^+) < 0, \quad \text{para todo } s > 0, \\ J'\Big(tv^+ + Rv^-\Big)\,(Rv^-) < 0, \quad \text{para todo } t > 0. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Combinando as estimativas (3.13), (3.14) e usando o Teorema de Miranda, Teorema 4.1, o resultado está provado. □

Corolário 3.1. O conjunto $\mathcal{M}$ é não vazio.

Demonstração. Pelo lema anterior, dado $v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ tal que $v^\pm \neq 0$, existem $t, s > 0$ satisfazendo

$$J'\left(tv^+ + sv^-\right)(v^\pm) = 0.$$

Em particular, a função $w_0 := tv^+ + sv^-$ pertence a $\mathcal{M}$. Logo, $\mathcal{M} \neq \emptyset$. □

Lema 3.7. Sob as condições do Lema 3.6, os números $t, s > 0$ são únicos.

Demonstração. Suponha que $v = v^+ + v^- \in \mathcal{M}$ e que existam $t, s > 0$ tais que $tv^+ + sv^- \in \mathcal{M}$. Nosso objetivo é provar que $t = s = 1$. Como $v \in \mathcal{M}$, temos

$$J'(v^+ + v^-)(v^+) = 0,$$

isto é,

$$\int_\Omega \Phi'\left(|\nabla v^+|\right)|\nabla v^+|\,dx = \int_\Omega f(v^+)\cdot v^+\,dx.$$

Logo,

$$\int_\Omega \frac{\Phi'(|\nabla v^+|)}{|\nabla v^+|^{c_\alpha-1}}|\nabla v^+|^{c_\alpha}\,dx = \int_\Omega \frac{f(v^+)}{(v^+)^{c_\alpha-1}}(v^+)^{c_\alpha}\,dx. \tag{3.15}$$

Por outro lado, como $tv^+ + sv^- \in \mathcal{M}$, temos

$$J'(tv^+ + sv^-)(tv^+) = 0,$$

isto é,

$$\int_\Omega \Phi'\left(|\nabla(tv^+)|\right)|\nabla(tv^+)|\,dx = \int_\Omega f(tv^+)\cdot tv^+\,dx,$$

de onde segue que

$$\int_\Omega \frac{\Phi'(|\nabla(tv^+)|)}{|\nabla(tv^+)|^{c_\alpha-1}}|\nabla(tv^+)|^{c_\alpha}\,dx = \int_\Omega \frac{f(tv^+)}{(tv^+)^{c_\alpha-1}}(tv^+)^{c_\alpha}\,dx. \tag{3.16}$$

Suponha, por absurdo, que $t > 1$. Subtraindo a expressão (3.15) da (3.16), temos

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_\Omega \frac{\Phi'(|\nabla(tv^+)|)}{|\nabla(tv^+)|^{c_\alpha-1}}|\nabla(tv^+)|^{c_\alpha}\,dx - \int_\Omega \frac{\Phi'(|\nabla v^+|)}{|\nabla v^+|^{c_\alpha-1}}|\nabla v^+|^{c_\alpha}\,dx \\ &= \int_\Omega \frac{f(tv^+)}{(tv^+)^{c_\alpha-1}}(tv^+)^{c_\alpha}\,dx - \int_\Omega \frac{f(v^+)}{(v^+)^{c_\alpha-1}}(v^+)^{c_\alpha}\,dx > 0, \end{aligned}$$

onde usamos as hipóteses $(\hat{\phi}_4)$ e $(\hat{f}_4)$, que asseguram que, para $t > 0$,

$$t \mapsto \frac{\Phi'(t)}{t^{c_\alpha-1}} \quad \text{é não-crescente}, \quad \text{e} \quad t \mapsto \frac{f(t)}{t^{c_\alpha-1}} \quad \text{é crescente}.$$

Obtemos, assim, uma contradição. Por um argumento análogo, provamos que também não ocorre $t < 1$, o que nos leva à conclusão de que $t = 1$. Analogamente, prova-se que $s = 1$. □

Lema 3.8. Se $(w_n) \subset \mathcal{N}$, então

$$\liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f(w_n)w_n\,dx > 0.$$

Demonstração. Como $(w_n) \subset \mathcal{N}$, temos, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_\Omega \Phi'(|\nabla w_n|)\,|\nabla w_n|\,dx = \int_\Omega f(w_n)w_n\,dx.$$

Por (3), obtemos

$$\int_\Omega f(w_n)w_n\,dx \geq m_\alpha \int_\Omega \Phi(|\nabla w_n|)\,dx.$$

Pelos Lemas 1.5 e 3.3, existe $\rho > 0$ tal que $\|w_n\| \geq \rho$ para todo n. Logo,

$$\int_\Omega \Phi(|\nabla w_n|)\, dx \geq \xi_0\left(\|w_n\|\right) \geq \xi_0(\rho),$$

pois ξ_0 é crescente e, portanto,

$$\int_\Omega f(w_n)w_n\, dx \geq m_\alpha \xi_0(\rho) > 0,$$

o que implica

$$\liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f(w_n)w_n\, dx \geq m_\alpha \xi_0(\rho) > 0.$$

$\square$

O mesmo raciocínio usado no lema acima se aplica às sequências $(w_n^\pm) \subset \mathcal{N}$.

3.2 Um teorema auxiliar

Seguindo ideias de [28], vamos definir uma função auxiliar e um campo gradiente associados ao funcional J, os quais desempenharão um papel central, especialmente na aplicação de um lema de deformação.

Para cada $v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ com $v^\pm \neq 0$, considere a função $h^v : [0,+\infty)\times[0,+\infty) \to \mathbb{R}$, dada por

$$h^v(t,s) := J(tv^+ + sv^-),$$

e o campo vetorial associado

$$\Upsilon^v(t,s) := \left(\frac{\partial h^v(t,s)}{\partial t}, \frac{\partial h^v(t,s)}{\partial s}\right) = \Big(J'(tv^+ + sv^-)v^+,\ J'(tv^+ + sv^-)v^-\Big).$$

Mais explicitamente, temos

$$\Upsilon^v(t,s) = \left(\int_\Omega \Big[\Phi'(|\nabla(tv^+)|)|\nabla v^+| - f(tv^+)v^+\Big]\, dx, \int_\Omega \Big[\Phi'(|\nabla(sv^-)|)|\nabla v^-| - f(sv^-)v^-\Big]\, dx\right).$$

Para cada $(t,s) \in [0,+\infty) \times [0,+\infty)$, considere a matriz Hessiana de h^v, que coincide com a matriz Jacobiana do campo vetorial Υ^v, dada por

$$(\Upsilon^v)'(t,s) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Upsilon_1^v(t,s)}{\partial t} & \frac{\partial \Upsilon_1^v(t,s)}{\partial s} \\ \frac{\partial \Upsilon_2^v(t,s)}{\partial t} & \frac{\partial \Upsilon_2^v(t,s)}{\partial s} \end{pmatrix}.$$

Calculando as derivadas parciais, obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \Upsilon_1^v}{\partial s} &= \frac{\partial \Upsilon_2^v}{\partial t} = 0;\\
\frac{\partial \Upsilon_1^v}{\partial t} &= \frac{d}{dt}\left(\int_\Omega \Phi'\Big(t|\nabla v^+|\Big)|\nabla v^+|\,dx - \int_\Omega f(tv^+)v^+\,dx\right)\\
&= \int_\Omega \Phi''\Big(t|\nabla v^+|\Big)|\nabla v^+|^2\,dx - \int_\Omega f'(tv^+)(v^+)^2\,dx;\\
\frac{\partial \Upsilon_2^v}{\partial s} &= \frac{d}{ds}\left(\int_\Omega \Phi'\Big(s|\nabla v^-|\Big)|\nabla v^-|\,dx - \int_\Omega f(sv^-)v^-\,dx\right)\\
&= \int_\Omega \Phi''\Big(s|\nabla v^-|\Big)|\nabla v^-|^2\,dx - \int_\Omega f'(sv^-)(v^-)^2\,dx.
\end{aligned}
$$

Portanto, a matriz Jacobiana de Υ^v em (s,t) é diagonal e assume a forma

$$
\begin{pmatrix}
\int_\Omega [\Phi''(t|\nabla v^+|)|\nabla v^+|^2 - f'(tv^+)(v^+)^2]\,dx & 0\\
0 & \int_\Omega [\Phi''(s|\nabla v^-|)|\nabla v^-|^2 - f'(sv^-)(v^-)^2]\,dx
\end{pmatrix}.
$$

A seguir, demonstraremos um resultado auxiliar que será fundamental nas etapas posteriores.

Teorema 3.2. *Seja $w \in \mathcal{M}$. Então, valem as seguintes propriedades:*
(a) *Para todo $t, s \geq 0$, com $(t,s) \neq (1,1)$, temos*

$$h^w(t,s) < h^w(1,1) = J(w).$$

(b) *A matriz Jacobiana de Υ^w no ponto $(1,1)$ é tal que*

$$\det\left((\Upsilon^w)'(1,1)\right) > 0.$$

Demonstração. (a) Como $w \in \mathcal{M}$, temos que

$$J'(w)w^{\pm} = J'(w^+ + w^-)w^{\pm} = 0.$$

Logo,

$$\Upsilon^w(1,1) = \left(\frac{\partial h^w}{\partial t}(1,1), \frac{\partial h^w}{\partial s}(1,1)\right) = (0,0). \tag{3.17}$$

Afirmação 3.1.

$$\lim_{|(t,s)| \to +\infty} h^w(t,s) = -\infty.$$

De fato, sabemos que

$$J(tw^+ + sw^-) = \int_\Omega \Phi\Big(|\nabla(tw^+ + sw^-)|\Big)\, dx - \int_\Omega F(tw^+ + sw^-)\, dx. \tag{3.18}$$

Sabemos, pelo Lema 1.5, que para $t, s \gg 1$ vale

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Phi\Big(|\nabla(tw^+ + sw^-)|\Big)\, dx &\leq \xi_1\Big(\|\nabla(tw^+ + sw^-)\|_\Phi\Big)\\ &\leq \xi_1\Big(t\|w^+\| + s\|w^-\|\Big)\\ &= \Big(t\|w^+\| + s\|w^-\|\Big)^{c_\alpha}\\ &\leq 2^{c_\alpha - 1}\left(t^{c_\alpha}\|w^+\|^{c_\alpha} + s^{c_\alpha}\|w^-\|^{c_\alpha}\right).\end{aligned} \tag{3.19}$$

Além disso, usando o fato de que as funções w^+ e w^- possuem suportes disjuntos, e pela hipótese $(\hat{f}_5)$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega F(tw^+ + sw^-)\, dx &= \int_\Omega F(tw^+)\, dx + \int_\Omega F(sw^-)\, dx\\ &\geq c_1 \int_\Omega (tw^+)^\sigma\, dx + c_2 \int_\Omega |sw^-|^\sigma\, dx - c_3\\ &= c_1 t^\sigma \int_\Omega (w^+)^\sigma\, dx + c_2 s^\sigma \int_\Omega |w^-|^\sigma\, dx - c_3.\end{aligned} \tag{3.20}$$

Portanto, substituindo (3.19) e (3.20) em (3.18), obtemos

$$\begin{aligned}J(tw^+ + sw^-) \leq{}& 2^{c_\alpha - 1}\left(t^{c_\alpha}\|w^+\|^{c_\alpha} + s^{c_\alpha}\|w^-\|^{c_\alpha}\right)\\ &- c_1 t^\sigma \int_\Omega (w^+)^\sigma\, dx - c_2 s^\sigma \int_\Omega |w^-|^\sigma\, dx + c_3.\end{aligned}$$

Como $\sigma > c_\alpha$, segue que

$$J(tw^+ + sw^-) \to -\infty \quad \text{quando } t \to +\infty \text{ ou } s \to +\infty.$$

Isso conclui a prova da Afirmação 3.1. Portanto, $(1,1)$ é um ponto crítico da função h^w e, além disso, h^w possui um ponto de máximo global, que denotamos por (a,b). Observe que $(a,b) \neq (0,0)$, isto é, não ocorre $a = b = 0$. De fato,

$$J(aw^+ + bw^-) = h^w(a,b) \geq h^w(1,1) = J(w).$$

Para estimar $J(w)$, utilizamos o fato de que $w \in \mathcal{M}$, em conjunto (3) e a hipótese $(\hat{f}_3)$, conforme descrito a seguir:

$$\begin{aligned} J(w) &\geq \frac{1}{c_\alpha}\int_\Omega \Phi'(|\nabla w|)|\nabla w|\,dx - \frac{1}{\sigma}\int_\Omega f(w)w\,dx \\ &= \left(\frac{1}{c_\alpha} - \frac{1}{\sigma}\right)\int_\Omega \Phi'(|\nabla w|)|\nabla w|\,dx \\ &= \left(\frac{\sigma - c_\alpha}{\sigma c_\alpha}\right)\int_\Omega \Phi'(|\nabla w|)|\nabla w|\,dx > 0. \end{aligned}$$

Unindo esse fato à desigualdade anterior, concluímos que $h^w(a,b) > 0$. Como $h^w(0,0) = J(0) = 0$, segue que o ponto de máximo (a,b) de h^w não ocorre na origem $(0,0)$.

Afirmação 3.2. Temos que $a, b > 0$.

Primeiro, provaremos que se $b = 0$ então $a \leq 1$. Para isso, suponha, por contradição, que $b = 0$. Nesse caso, temos

$$J'(aw^+)aw^+ = 0,$$

o que implica que

$$\int_\Omega \Phi'(|\nabla(aw^+)|)|a\nabla w^+|\,dx = \int_\Omega f(aw^+)aw^+\,dx.$$

Agora, aplicando o Lema 3.1, obtemos

$$\tau(a)a\int_\Omega \Phi'(|\nabla w^+|)|\nabla w^+|\,dx \geq \int_\Omega f(aw^+)aw^+\,dx,$$

onde $\tau(a) := \min\{a^{\tilde{m}_\alpha}, a^{\tilde{c}_\alpha}\}$. Como, pela Observação 3, $\tau(a)a = \xi_1(a)$, segue que

$$\int_\Omega \Phi'(|\nabla w^+|)|\nabla w^+|\,dx \geq \int_\Omega \frac{f(aw^+)aw^+}{\xi_1(a)}\,dx. \tag{3.21}$$

Por outro lado, como $J'(w^+)w^+ = 0$, temos

$$\int_\Omega \Phi'(|\nabla w^+|)|\nabla w^+|\,dx = \int_\Omega f(w^+)w^+\,dx. \tag{3.22}$$

Se $a > 1$, subtraindo (3.21) de (3.22) e utilizando que $w^+ > 0$ (pois $w \in \mathcal{M}$) e a hipótese $(\hat{f}_4)$, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_\Omega f(w^+)w^+\,dx - \int_\Omega \frac{f(aw^+)}{\xi_1(a)}aw^+\,dx \\ &= \int_\Omega \frac{f(w^+)}{(w^+)^{c_\alpha - 1}}(w^+)^{c_\alpha}\,dx - \int_\Omega \frac{f(aw^+)}{(aw^+)^{c_\alpha - 1}}(aw^+)^{c_\alpha}\,dx \\ &< 0, \end{aligned} \tag{3.23}$$

o que é um absurdo. Com isso provamos que $b = 0$ implica $a \leq 1$, como afirmamos. Agora, continuemos supondo por absurdo $b = 0$. Assim,

$$\begin{aligned} h^w(a,0) = J(aw^+) &= J(aw^+) - \frac{1}{c_\alpha} J'(aw^+)(aw^+) \\ &= \int_\Omega \left[\Phi(a|\nabla w^+|) - \frac{1}{c_\alpha} \Phi'(a|\nabla w^+|) a |\nabla w^+| \right] dx \\ &\quad + \int_\Omega \left[\frac{1}{c_\alpha} f(aw^+) aw^+ - F(aw^+) \right] dx. \end{aligned}$$

De acordo com a Observação 3.1 e o fato de $a \leq 1$, temos

$$h^w(a,0) \leq \int_\Omega \left[\Phi(|\nabla w^+|) - \frac{1}{c_\alpha} \Phi'(|\nabla w^+|)|\nabla w^+| \right] dx + \int_\Omega \left[\frac{1}{c_\alpha} f(w^+) w^+ - F(w^+) \right] dx.$$

Além disso, ainda pela Observação 3.1, temos que

$$\Phi(|\nabla w^-|) - \frac{1}{c_\alpha} \Phi'(|\nabla w^-|)|\nabla w^-| \geq 0 \quad \text{e} \quad \frac{1}{c_\alpha} f(w^-) w^- - F(w^-) > 0.$$

Usando essas informações na última desigualdade, obtemos

$$\begin{aligned} h^w(a,0) < &\int_\Omega \left[\Phi(|\nabla w^+|) - \frac{1}{c_\alpha} \Phi'(|\nabla w^+|)|\nabla w^+| \right] dx \\ &+ \int_\Omega \left[\frac{1}{c_\alpha} f(w^+) w^+ - F(w^+) \right] dx \\ &+ \int_\Omega \left[\Phi(|\nabla w^-|) - \frac{1}{c_\alpha} \Phi'(|\nabla w^-|)|\nabla w^-| \right] dx \\ &+ \int_\Omega \left[\frac{1}{c_\alpha} f(w^-) w^- - F(w^-) \right] dx. \end{aligned}$$

Como os suportes de w^+ e w^- são disjuntos, segue da última desigualdade que

$$\begin{aligned} h^w(a,0) &< \int_\Omega [\Phi(|\nabla w|) - F(w)] \, dx + \frac{1}{c_\alpha} \int_\Omega [f(w)w - \Phi'(|\nabla w|)|\nabla w|] \, dx. \\ &= J(w) - \frac{1}{c_\alpha} J'(w)w = J(w) = h^w(1,1), \end{aligned}$$

o que é um absurdo. Portanto, $b > 0$. Analogamente, podemos mostrar que $a > 0$. Isso conclui a demonstração da Afirmação 3.2.

Afirmação 3.3. Temos que $a, b \leq 1$.

Suponha, sem perda de generalidade, que $a \geq b$. Como o ponto (a, b) é um ponto crítico de h^w, pois $(a, b) \in (0, +\infty) \times (0, +\infty)$, então

$$0 = J'(aw^+ + bw^-)(aw^+) = \int_\Omega \Phi'(a|\nabla w^+|) a |\nabla w^+| \, dx - \int_\Omega f(aw^+) aw^+ \, dx.$$

Assim, argumentando de modo análogo ao feito em (3.23), se supusermos $a > 1$, obtemos uma contradição com a hipótese $(\hat{f}_3)$, que garante que $\frac{f(t)}{t^{c_\alpha - 1}}$ é crescente. Logo, $a \leq 1$. Como $b \leq a$, segue que $b \leq 1$, o que prova a Afirmação 3.3.

Afirmação 3.4. A função h^w não admite ponto de máximo global no conjunto $[0,1] \times [0,1] \setminus \{(1,1)\}$.

Para demonstrar essa afirmação, basta mostrar que se $a < 1$ ou $b < 1$, então

$$h^w(a,b) < h^w(1,1).$$

Note que

$$\begin{aligned}
h^w(a,b) &= J(aw^+ + bw^-) \\
&= J(aw^+ + bw^-) - \frac{1}{c_\alpha} J'(aw^+ + bw^-)(aw^+ + bw^-) \\
&= \int_\Omega \Phi\Big(|\nabla(aw^+ + bw^-)|\Big)\, dx - \int_\Omega F(aw^+ + bw^-)\, dx \\
&\quad - \frac{1}{c_\alpha} \int_\Omega \Phi'\Big(|\nabla(aw^+ + bw^-)|\Big) |\nabla(aw^+ + bw^-)|\, dx \\
&\quad + \frac{1}{c_\alpha} \int_\Omega f(aw^+ + bw^-)(aw^+ + bw^-)\, dx.
\end{aligned}$$

Como os suportes de w^+ e w^- são disjuntos, segue que

$$|\nabla(aw^+ + bw^-)| = a|\nabla w^+| + b|\nabla w^-| \leq |\nabla w^+| + |\nabla w^-| = |\nabla w|.$$

Assim, obtemos

$$\begin{aligned}
h^w(a,b) &= \int_\Omega \Phi\left(|\nabla(aw^+ + bw^-)|\right)\, dx - \int_\Omega F(aw^+ + bw^-)\, dx \\
&\quad - \frac{1}{c_\alpha} \int_\Omega \Phi'\left(|\nabla(aw^+ + bw^-)|\right) |\nabla(aw^+ + bw^-)|\, dx \\
&\quad + \frac{1}{c_\alpha} \int_\Omega f(aw^+ + bw^-)(aw^+ + bw^-)\, dx \\
&\leq \int_\Omega \Phi(|\nabla w|)\, dx - \frac{1}{c_\alpha} \int_\Omega \Phi'(|\nabla w|)|\nabla w|\, dx \\
&\quad + \frac{1}{c_\alpha} \int_\Omega f(aw^+ + bw^-)(aw^+ + bw^-)\, dx - \int_\Omega F(aw^+ + bw^-)\, dx.
\end{aligned}$$

Mais uma vez, como os suportes de w^+ e w^- são disjuntos, temos

$$\begin{aligned}
h^w(a,b) &\leq \int_\Omega \Phi(|\nabla w|)\, dx - \frac{1}{c_\alpha} \int_\Omega \Phi'(|\nabla w|)|\nabla w|\, dx \\
&\quad + \int_\Omega \left[\frac{1}{c_\alpha} f(aw^+)aw^+ - F(aw^+)\right] dx + \int_\Omega \left[\frac{1}{c_\alpha} f(bw^-)bw^- - F(bw^-)\right] dx.
\end{aligned}$$

Usando a Observação 3.1 e o fato de que $a < 1$ ou $b < 1$, segue que

$$\begin{aligned} h^w(a,b) < & \int_\Omega \Phi(|\nabla w|)\,dx - \frac{1}{c_\alpha}\int_\Omega \Phi'(|\nabla w|)|\nabla w|\,dx \\ & + \int_\Omega \left[\frac{1}{c_\alpha} f(w^+)w^+ - F(w^+)\right] dx + \int_\Omega \left[\frac{1}{c_\alpha} f(w^-)w^- - F(w^-)\right] dx. \end{aligned}$$

Usando novamente o fato de que w^+ e w^- possuem suportes disjuntos, obtemos

$$\begin{aligned} h^w(a,b) &< \int_\Omega \Phi(|\nabla w|)\,dx - \frac{1}{c_\alpha}\int_\Omega \Phi'(|\nabla w|)|\nabla w|\,dx + \frac{1}{c_\alpha}\int_\Omega f(w)w\,dx - \int_\Omega F(w)\,dx \\ &= J(w) - \frac{1}{c_\alpha}J'(w)w = J(w) = h^w(1,1), \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar, e a prova do item (a) está completa. Agora provaremos o item(b). Considere as seguintes notações:

$$\Upsilon_1^w(t,s) := J'(tw^+ + sw^-)w^+ \quad \text{e} \quad \Upsilon_2^w(t,s) := J'(tw^+ + sw^-)w^-.$$

Dessa forma, temos

$$\Upsilon_1^w(t,s) = \int_\Omega \Phi'\left(\left|\nabla(tw^+)\right|\right)\left|\nabla w^+\right|\,dx - \int_\Omega f(tw^+)w^+\,dx,$$

e

$$\Upsilon_2^w(t,s) = \int_\Omega \Phi'\left(\left|\nabla(sw^-)\right|\right)\left|\nabla w^-\right|\,dx - \int_\Omega f(sw^-)w^-\,dx.$$

Portanto, aplicando as funções Υ_1^w e Υ_2^w no ponto $(1,1)$, segue de (3.17) que

$$\int_\Omega \Phi'\left(|\nabla w^+|\right)|\nabla w^+|\,dx = \int_\Omega f(w^+)w^+\,dx, \tag{3.24}$$

e

$$\int_\Omega \Phi'\left(|\nabla w^-|\right)|\nabla w^-|\,dx = \int_\Omega f(w^-)w^-\,dx.$$

Agora, calculando as derivadas parciais de Υ_1^w e Υ_2^w, obtemos

$$\frac{\partial \Upsilon_1^w(t,s)}{\partial t} = \int_\Omega \Phi''\left(t|\nabla w^+|\right)|\nabla w^+|^2\,dx - \int_\Omega f'\left(tw^+\right)(w^+)^2\,dx;$$

$$\frac{\partial \Upsilon_2^w(t,s)}{\partial s} = \int_\Omega \Phi''\left(s|\nabla w^-|\right)|\nabla w^-|^2\,dx - \int_\Omega f'\left(sw^-\right)(w^-)^2\,dx;$$

$$\frac{\partial \Upsilon_1^w(t,s)}{\partial s} = \frac{\partial \Upsilon_2^w(t,s)}{\partial t} = 0.$$

Segue da hipótese (ϕ_3) e da Observação 3 juntamente com (3.24) e (3.3), que

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Upsilon_1^w}{\partial t}(1,1) &= \int_\Omega \Phi''\left(|\nabla w^+|\right)|\nabla w^+|^2\,dx - \int_\Omega f'\left(w^+\right)(w^+)^2\,dx\\ &\leq (c_\alpha - 1)\int_\Omega \Phi'\left(|\nabla w^+|\right)|\nabla w^+|\,dx - \int_\Omega f'\left(w^+\right)(w^+)^2\,dx\\ &= (c_\alpha - 1)\int_\Omega f(w^+)w^+\,dx - \int_\Omega f'\left(w^+\right)(w^+)^2\,dx < 0.\end{aligned}$$

Analogamente, obtemos

$$\frac{\partial \Upsilon_2^w}{\partial s}(1,1) < 0.$$

Como

$$\frac{\partial \Upsilon_1^w}{\partial s}(1,1) = \frac{\partial \Upsilon_2^w}{\partial t}(1,1) = 0,$$

temos

$$\det\left((\Upsilon^w)'(1,1)\right) = \frac{\partial \Upsilon_1^w}{\partial t}(1,1)\cdot\frac{\partial \Upsilon_2^w}{\partial s}(1,1) > 0.$$

□

3.3 Prova do Teorema 3.1

Começamos esta seção seguindo a abordagem apresentada em [29], com o objetivo de obter uma estimativa para o nível de energia mínima associado ao funcional J, dado por

$$c^* := \inf_{v\in\mathcal{M}} J(v). \tag{3.25}$$

Em seguida, com base nas ideias desenvolvidas em [28], demonstraremos que existe $w \in \mathcal{M}$ satisfazendo

$$J(w) = \min_{v\in\mathcal{M}} J(v)$$

e que w é ponto crítico de J, isto é, w é uma solução nodal de energia mínima para o Problema 3.1. Por fim, provaremos que w possui exatamente dois domínios nodais. Seguindo ideias de [29], fixe $0 < \delta < 4$ tal que $B(x^+,\delta) \subset \Omega$, $B(x^-,\delta) \subset \Omega$ e $B(x^+,\delta)\cap B(x^-,\delta) = \varnothing$, e defina a função

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in B_1,\\ 0, & \text{se } x \in \Omega\setminus B_2,\end{cases}$$

com $|\nabla\phi(x)| \leq \frac{4}{\delta}$, de forma que $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. A partir dela, construa a função

$$\zeta(x) = \phi\left(\frac{2(x-x^+)}{\delta}\right) - \phi\left(\frac{2(x-x^-)}{\delta}\right), \quad \text{de modo que } \zeta \in C^\infty(\Omega).$$

Note que

$$|x-x^+| \geq \delta \;\Rightarrow\; \left|\frac{x-x^+}{\delta/2}\right| \geq 2 \;\Rightarrow\; \phi\left(\frac{x-x^+}{\delta/2}\right) = 0.$$

Aplicando um argumento análogo à segunda parcela de ζ obtemos

$$\operatorname{supp}(\zeta^\pm) \subset \Omega.$$

Lembrando que $\sigma > c_\alpha$, $|\nabla\phi| \leq \frac{4}{\delta}$, $\phi \leq 1$, e que assumimos, na hipótese $(\hat{f}_5)$, que $\mu \geq \mu_* \geq \mu_\delta := 2^N \Phi\left(\frac{4}{\delta}\right)$, então, aplicando o Lema 1.5, obtemos, para todo $t \geq 1$,

$$\begin{aligned}
J(t\zeta^+) &\leq t^{c_\alpha} \int_{B_\delta(x^+)} \Phi(|\nabla\phi|)\,dx - \mu t^\sigma \int_{B_\delta(x^+)} \phi^\sigma\,dx \\
&< t^{c_\alpha}\left[\Phi\left(\tfrac{4}{\delta}\right)|B_\delta| - 2^N\Phi\left(\tfrac{4}{\delta}\right)|B_{\delta/2}|\right] \\
&= t^{c_\alpha}\Phi\left(\tfrac{4}{\delta}\right)\left[\beta_N\delta^N - \beta_N\left(\tfrac{\delta}{2}\right)^N \cdot 2^N\right] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Analogamente, obtemos $J(t\zeta^-) < 0$ para todo $t \geq 1$, observando que $|\zeta^-| = |-\phi| > 0$ em um subconjunto de medida positiva de $B(\delta, x^-)$. Como $J(0) = 0$, segue que

$$\max_{t>0} J(t\zeta^+) \in [0,1] \quad \text{e} \quad \max_{t>0} J(t\zeta^-) \in [0,1].$$

No próximo resultado, obteremos uma estimativa para o nível de energia mínima (3.25).

Lema 3.9. Suponha que a hipótese $(\hat{f}_5)$ é satisfeita e considere o valor $d_{N,\alpha}$ lá definido. Então, $c^* < d_{N,\alpha}$ para c dado em (3.25).

Demonstração. Primeiro, note que, por definição, $\zeta^+ \neq 0$ e $\zeta^- \neq 0$. Assim, pelo Lema 3.6, existem $\tilde{t}, \tilde{s} \neq 0$ tais que a combinação $\tilde{t}\zeta^+ + \tilde{s}\zeta^- \in \mathcal{M}$. Como ζ^+ e ζ^- têm suportes disjuntos, segue que

$$\begin{aligned}
c^* &\leq J(\tilde{t}\zeta^+ + \tilde{s}\zeta^-) = J(\tilde{t}\zeta^+) + J(\tilde{s}\zeta^-)\\
&\leq \max_{t>0} J(t\zeta^+) + \max_{t>0} J(t\zeta^-)\\
&= \max_{t\in[0,1]} \left(\int_{B_1} \Phi(t|\nabla\zeta^+|)\, dx - \int_{B_1} F(t\zeta^+)\, dx \right)\\
&\quad + \max_{t\in[0,1]} \left(\int_{B_2} \Phi(t|\nabla\zeta^-|)\, dx - \int_{B_2} F(t\zeta^-)\, dx \right).
\end{aligned}$$

Agora, utilizando a hipótese $(\hat{f}_5)$ e o Lema 1.5, obtemos

$$\begin{aligned}
c^* &\leq \max_{t\in[0,1]} \left(\int_{B_1} t^{m_\alpha}\Phi(|\nabla\zeta^+|)\, dx - \mu t^\sigma \int_{B_1} (\zeta^+)^\sigma\, dx \right)\\
&\quad + \max_{t\in[0,1]} \left(\int_{B_2} t^{m_\alpha}\Phi(|\nabla\zeta^-|)\, dx - \mu t^\sigma \int_{B_2} |\zeta^-|^\sigma\, dx \right).
\end{aligned}$$

Lembrando que $0 \leq |\zeta^\pm| \leq 1$, e que para $t \in [0,1]$ vale $t^\sigma < t^{m_\alpha}$, pois $\sigma > m_\alpha$, concluímos que

$$\begin{aligned}
c^* &< \max_{t\in[0,1]} \left[|B_\delta|\, \Phi\left(\tfrac{4}{\delta}\right) t^{m_\alpha} + |B_\delta|\, \Phi\left(\tfrac{4}{\delta}\right) t^\sigma - 2|B_{\delta/2}|\mu t^\sigma \right]\\
&= \max_{t\in[0,1]} \left[\delta^N\beta_N\Phi\left(\tfrac{4}{\delta}\right) t^{m_\alpha} + \delta^N\beta_N\Phi\left(\tfrac{4}{\delta}\right) t^\sigma - 2\frac{\delta^N}{2^N}\beta_N\mu t^\sigma \right].
\end{aligned}$$

Pela hipótese $(\hat{f}_5)$, $\mu \geq 2^N\Phi\left(\frac{4}{\delta}\right) =: \mu_\delta$. Assim,

$$\begin{aligned}
c^* &< \max_{t\in[0,1]} \left[\frac{\delta^N\beta_N 2^N\, \Phi\left(\frac{4}{\delta}\right) t^{m_\alpha} + \delta^N\beta_N 2^N\, \Phi\left(\frac{4}{\delta}\right) t^\sigma - \delta^N\beta_N 2^N\, \Phi\left(\frac{4}{\delta}\right) t^\sigma}{2^N} - \frac{\mu\, t^\sigma\, \delta^N\beta_N}{2^N} \right]\\
&= \frac{\delta^N\beta_N}{2^N} \max_{t\in[0,1]} \left[2^N\, \Phi\left(\tfrac{4}{\delta}\right) t^{m_\alpha} - \mu\, t^\sigma \right]\\
&= \frac{\delta^N\beta_N}{2^N} \max_{t\in[0,1]} \left[\mu_\delta\, t^{m_\alpha} - \mu\, t^\sigma \right].
\end{aligned}$$

Portanto,

$$c^* < \frac{\delta^N\beta_N}{2^N} \left(\frac{\mu_\delta}{\sigma}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-m_\alpha}} (\sigma - m_\alpha)\, m_\alpha^{\frac{m_\alpha}{\sigma-m_\alpha}} \frac{1}{\mu^{\frac{m_\alpha}{\sigma-m_\alpha}}}. \tag{3.26}$$

Pela hipótese $(\hat{f}_5)$, temos

$$\mu > \left[\frac{\frac{\delta^N\beta_N}{2^N} \left(\frac{\mu_\delta}{\sigma}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-m_\alpha}} (\sigma - m_\alpha)\, m_\alpha^{\frac{m_\alpha}{\sigma-m_\alpha}}}{d_{N,\alpha}} \right]^{\frac{\sigma-m_\alpha}{m_\alpha}},$$

ou seja,

$$\frac{\frac{\delta^N\beta_N}{2^N}\left(\frac{\mu_\delta}{\sigma}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-m_\alpha}}(\sigma-m_\alpha)\,m_\alpha^{\frac{m_\alpha}{\sigma-m_\alpha}}}{d_{N,\alpha}}<\mu^{\frac{m_\alpha}{\sigma-m_\alpha}},$$

isto é,

$$\frac{\delta^N\beta_N}{2^N}\left(\frac{\mu_\delta}{\sigma}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-m_\alpha}}(\sigma-m_\alpha)\,m_\alpha^{\frac{m_\alpha}{\sigma-m_\alpha}}\frac{1}{\mu^{\frac{m_\alpha}{\sigma-m_\alpha}}}<d_{N,\alpha}.$$

Substituindo essa desigualdade em (3.26), obtemos

$$c^*<d_{N,\alpha},$$

como queríamos demonstrar. □

Lema 3.10. Considere o valor c^* definido em (3.25). Se $(w_n)\subset\mathcal{M}$ é uma sequência minimizante de J. Então

$$\int_\Omega\Phi(|\nabla w_n|)\,dx\le\frac{\sigma c^*}{\sigma-c_\alpha}+o_n(1).$$

Em particular, a sequência (w_n) é limitada em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$.

Demonstração. De fato, como $(w_n)\subset\mathcal{M}$ é uma sequência minimizante de J, segue que

$$\begin{aligned}c^*+o_n(1)=J(w_n)&=J(w_n)-\frac{1}{\sigma}J'(w_n)w_n\\&=\int_\Omega\left[\Phi(|\nabla w_n|)-\frac{1}{\sigma}\Phi'(|\nabla w_n|)|\nabla w_n|\right]dx\\&\quad+\frac{1}{\sigma}\int_\Omega\left[f(w_n)w_n-\sigma F(w_n)\right]dx.\end{aligned}$$

Agora, utilizando a hipótese $(\hat{f}_3)$ e o Lema 1.5, obtemos

$$c^*+o_n(1)\ge\int_\Omega\Phi(|\nabla w_n|)\,dx-\frac{c_\alpha}{\sigma}\int_\Omega\Phi(|\nabla w_n|)\,dx=\frac{\sigma-c_\alpha}{\sigma}\int_\Omega\Phi(|\nabla w_n|)\,dx.$$

Portanto,

$$\int_\Omega\Phi(|\nabla w_n|)\,dx\le\frac{\sigma c^*}{\sigma-c_\alpha}+o_n(1),\quad\forall\,n\ge1.$$

Em particular, concluímos que a sequência (w_n) é limitada em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, pois

$$\min\{\|\nabla w_n\|^{m_\alpha},\|\nabla w_n\|^{c_\alpha}\}\le\int_\Omega\Phi(|\nabla w_n|)\,dx.$$

□

Lema 3.11. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ e uma constante

$$\bar{c} < \left(\frac{K_{N,\alpha}}{\beta} \right)^{\frac{N}{\gamma}}$$

tais que

$$\int_\Omega \Phi(|\nabla w_n|)\, dx \leq \bar{c}, \quad \forall\, n \geq n_0.$$

Demonstração. De fato, pelos Lemas 3.9 e 3.10, temos que, a menos de uma subsequência

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \Phi(|\nabla w_n|)\, dx \leq \frac{\sigma c^*}{\sigma - c_\alpha} < \left(\frac{K_{N,\alpha}}{\beta} \right)^{\frac{N}{\gamma}}.$$

Portanto, existem $n_0 \in \mathbb{N}$ e uma constante $\frac{\sigma c^*}{\sigma - c_\alpha} \leq \bar{c} < (K_{N,\alpha}/\beta)^{\frac{N}{\gamma}}$ tais que, a menos de uma subsequência,

$$\int_\Omega \Phi(|\nabla w_n|)\, dx \leq \bar{c}, \quad \forall\, n \geq n_0.$$

□

Lema 3.12. Valem as seguintes convergências:

(a)
$$\int_\Omega f(w_n)\, w_n\, dx \to \int_\Omega f(w)\, w\, dx;$$

(b)
$$\int_\Omega F(w_n)\, dx \to \int_\Omega F(w)\, dx;$$

(c)
$$\int_\Omega f(w_n^\pm)\, w_n^\pm\, dx \to \int_\Omega f(w^\pm)\, w^\pm\, dx.$$

Demonstração.

(a) Pela desigualdade triangular, temos

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega f(w_n) w_n\, dx - \int_\Omega f(w) w\, dx \right| \leq & \left| \int_\Omega f(w_n) w\, dx - \int_\Omega f(w) w\, dx \right| \\ & + \left| \int_\Omega f(w_n)(w_n - w)\, dx \right|. \end{aligned}$$

Portanto, a convergência da integral

$$\int_\Omega f(w_n) w_n\, dx \to \int_\Omega f(w) w\, dx$$

ocorre quando verificarem-se simultaneamente os limites:

(a_1) $\displaystyle\int_\Omega |f(w_n)w - f(w)w|\, dx \to 0;$

(a_2) $\displaystyle\int_\Omega |f(w_n)(w_n - w)|\, dx \to 0.$

Para provar o item (a_1), notamos que $w_n(x) \to w(x)$ q.t.p. $x \in \Omega$. Como f é contínua, segue que $f(w_n(x))w \to f(w(x))w$ q.t.p. $x \in \Omega$. Agora, seja $E \subset \Omega$ um conjunto mensurável arbitrário. Pelo Lema 3.11, podemos aplicar a desigualdade de Trudinger–Moser, Lema 2.6. Combinando esse resultado com a hipótese $(\hat{f}_2)$ e a desigualdade de Hölder, garantimos que existe $q > 1$ suficientemente próximo de 1, tal que

$$\begin{aligned}
\int_E |f(w_n)w|\, dx &\le C\int_E \left(|w_n|^{N-1} + \exp(\beta|w_n|^\gamma)\right)|w|\, dx \\
&\le c_1\left(\int_E |w_n|^N\, dx\right)^{\frac{N-1}{N}}\left(\int_E |w|^N\, dx\right)^{\frac{1}{N}} \\
&\quad + c_2\left(\int_E |w|^{q'}\, dx\right)^{\frac{1}{q'}}\left(\int_\Omega \exp(q\beta|w_n|^\gamma)\, dx\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\le c_3\left(\int_E |w|^N\, dx\right)^{\frac{1}{N}} + c_4\left(\int_E |w|^{q'}\, dx\right)^{\frac{1}{q'}} < \infty,
\end{aligned}$$

onde $q' := \frac{q}{q-1}$. Portanto, a sequência $(f(w_n)w)$ é equi-integrável, Definição 4.1. Logo, pelo Teorema de Vitali, Teorema 4.2, concluímos que

$$f(w_n)w \to f(w)w \quad \text{em } L^1(\Omega).$$

Quanto ao item (a_2), obtemos, de modo análogo, que

$$\int_\Omega |f(w_n)(w_n - w)|\, dx \le c_5\left(\int_\Omega |w_n - w|^N\, dx\right)^{\frac{1}{N}} + c_6\left(\int_\Omega |w_n - w|^{q'}\, dx\right)^{\frac{1}{q'}} \to 0,$$

em virtude da imersão compacta de $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ em $L^p(\Omega)$ para todo $p \in (1, \infty)$, e do fato de que a convergência fraca

$$w_n \rightharpoonup w \quad \text{em } W_0^{1,\Phi}(\Omega)$$

implica, a menos de subsequência, que $w_n \to w$ fortemente em $L^N(\Omega)$ e em $L^{q'}(\Omega)$.

(b) Como $w_n(x) \to w(x)$ q.t.p. $x \in \Omega$ e F é contínua, segue que $F(w_n(x)) \to F(w(x))$ q.t.p. $x \in \Omega$. Além disso, no item (a) demonstramos que

$$f(w_n)w_n \to f(w)w \quad \text{em } L^1(\Omega).$$

Pela hipótese $(\hat{f}_3)$, temos que

$$0 < F(w_n) \leq \frac{1}{\sigma} f(w_n) w_n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Assim, podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada Generalizado para concluir que

$$\int_\Omega F(w_n)\, dx \to \int_\Omega F(w)\, dx.$$

(c) O resultado segue de forma análoga ao demonstrado no item (a), bastando considerar $w_n^\pm$ e $w^\pm$ no lugar de w_n e w, respectivamente. □

Lema 3.13. Existe $w \in \mathcal{M}$ tal que

$$J(w) = \inf_{v \in \mathcal{M}} J(v).$$

Demonstração. Pelo Corolário 3.1, temos $\mathcal{M} \neq \emptyset$. Além disso, pelo Lema 3.5, segue que

$$c^* = \inf_{v \in \mathcal{M}} J(v) > 0.$$

Portanto, existe uma sequência minimizante $(w_n) \subset \mathcal{M}$, a qual, pelo Lema 3.5, é limitada. Assim, pela imersão de Sobolev, a menos de subsequência, existem $w, w_1, w_2 \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ tais que

$$w_n \rightharpoonup w, \quad w_n^+ \rightharpoonup w_1, \quad w_n^- \rightharpoonup w_2 \quad \text{em } W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$

Assim, a menos de subsequência,

$$w_n \to w, \quad w_n^+ \to w_1, \quad w_n^- \to w_2 \quad \text{em } L^q(\Omega), \quad \text{para todo } q \in [1, \infty),$$

e

$$w_n(x) \to w(x), \quad w_n^+(x) \to w_1(x), \quad w_n^-(x) \to w_2(x) \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega.$$

Dessa forma, concluímos que $w_1(x) = w^+(x)$ e $w_2(x) = w^-(x)$ q.t.p. $x \in \Omega$. Como as aplicações $w \mapsto w^+$ e $w \mapsto w^-$, de $L^q(\Omega)$ em $L^q(\Omega)$, são contínuas – isso decorre do Lema 2.2 de [14] – segue que $w^+ = w_1$ e $w^- = w_2$. Além disso, pelas convergências demonstradas no Lema 3.12, juntamente com o Lema 3.8, obtemos que $w \neq 0$, $w^+ \neq 0$ e $w^- \neq 0$. Dessa forma, pelo Lema 3.6, existem $t, s > 0$ tais que

$$J'(tw^+ + sw^-)w^+ = 0 \quad \text{e} \quad J'(tw^+ + sw^-)w^- = 0,$$

isto é, $\tilde{w} := tw^+ + sw^- \in \mathcal{M}$.

Afirmação 3.5. Os valores t e s satisfazem $t \leq 1$ e $s \leq 1$.

Como $J'(w_n^+)w_n^+ = 0$, segue que

$$\int_\Omega \Phi'(|\nabla w_n^+|)|\nabla w_n^+|\,dx = \int_\Omega f(w_n^+)w_n^+\,dx.$$

Pela hipótese $(\hat{\phi}_4)$ e o Teorema 4.5, obtemos

$$\int_\Omega \frac{\Phi'(|\nabla w^+|)}{|\nabla w^+|^{c_\alpha - 1}}|\nabla w^+|^{c_\alpha}\,dx \leq \int_\Omega \frac{f(w^+)(w^+)^{c_\alpha}}{(w^+)^{c_\alpha - 1}}\,dx.$$

Por outro lado, como $J'(tw^+ + sw^-)\,tw^+ = 0$, segue que

$$\int_\Omega \frac{\Phi'(|t\nabla w^+|)}{|t\nabla w^+|^{c_\alpha - 1}}|t\nabla w^+|^{c_\alpha}\,dx = \int_\Omega \frac{f(tw^+)}{(tw^+)^{c_\alpha - 1}}(tw^+)^{c_\alpha}\,dx.$$

Combinando essa desigualdade com a anterior, e utilizando as hipóteses $(\hat{\phi}_4)$ e $(\hat{f}_4)$, concluímos que $0 < t \leq 1$. De fato, suponha, por absurdo, que $t > 1$. Então, teríamos

$$\begin{aligned}
0 &\geq \int_\Omega \left[\frac{\Phi'(|t\nabla w^+|)}{|t\nabla w^+|^{c_\alpha - 1}}|t\nabla w^+|^{c_\alpha} - \frac{\Phi'(|\nabla w^+|)}{|\nabla w^+|^{c_\alpha - 1}}|\nabla w^+|^{c_\alpha}\right] dx \\
&\geq \int_\Omega \left[\frac{f(tw^+)}{(tw^+)^{c_\alpha - 1}}(tw^+)^{c_\alpha} - \frac{f(w^+)(w^+)^{c_\alpha}}{(w^+)^{c_\alpha - 1}}\right] dx > 0,
\end{aligned}$$

o que é uma contradição. Portanto, necessariamente $0 < t \leq 1$. Da mesma forma prova-se que $0 < s \leq 1$ ao considerar-se a função w^-.

Afirmação 3.6. O ínfimo $c^* = \inf_{v \in \mathcal{M}} J(v)$ é atingido no ponto $\tilde{w} \in \mathcal{M}$.

Pelo que acabamos de provar, existem $0 < t, s \leq 1$ tais que

$$\tilde{w} \coloneqq tw^+ + sw^- \in \mathcal{M},$$

em que w é o limite fraco da sequência (w_n) em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, visto no Lema 3.13. Além disso, temos

$$\begin{aligned}
c^* &\leq J(tw^+ + sw^-) = J(tw^+ + sw^-) - \frac{1}{c_\alpha}J'(tw^+ + sw^-)(tw^+ + sw^-) \\
&= \int_\Omega \Phi(t|\nabla w^+| + s|\nabla w^-|)\,dx - \frac{1}{c_\alpha}\int_\Omega \Phi'(t|\nabla w^+| + s|\nabla w^-|)(t|\nabla w^+| + s|\nabla w^-|)\,dx \\
&\quad + \frac{1}{c_\alpha}\int_\Omega f(tw^+ + sw^-)(tw^+ + sw^-)\,dx - \int_\Omega F(tw^+ + sw^-)\,dx.
\end{aligned}$$

Assim, pela Observação 3.1, obtemos

$$
\begin{aligned}
c^* &\leq J(tw^+ + sw^-) \\
&\leq \int_\Omega \left[\Phi(|\nabla w^+| + |\nabla w^-|) - \frac{1}{c_\alpha}\Phi'(|\nabla w^+| + |\nabla w^-|)(|\nabla w^+| + |\nabla w^-|)\right] dx \\
&\quad + \int_\Omega \left[\frac{1}{c_\alpha} f(w^+ + w^-)(w^+ + w^-) - F(w^+ + w^-)\right] dx. \qquad (3.27)
\end{aligned}
$$

Note que a diferença

$$
\Phi(|\nabla w^+| + |\nabla w^-|) - \frac{1}{c_\alpha}\Phi'(|\nabla w^+| + |\nabla w^-|)(|\nabla w^+| + |\nabla w^-|) \qquad (3.28)
$$

é uma função convexa. De fato, pois se trata da composição da função

$$
t \mapsto \Phi(t) - \frac{1}{c_\alpha}\Phi'(t)t,
$$

a qual, para $t > 0$, é convexa e não-decrescente, conforme a hipótese (ϕ_5) e a Observação 3.1, respectivamente, com a aplicação

$$
x \mapsto |\nabla w^+(x)| + |\nabla w^-(x)|,
$$

a qual é convexa por ser soma de funções convexas. Além disso, a função dada em (3.28) é contínua. Assim, podemos aplicar o Teorema 4.5 em (3.27). Ademais, em virtude da condição de Ambrosetti–Rabinowitz, imposta em $(\hat{f}_3)$, é possível também utilizar, em (3.27), o Lema de Fatou, Lema 4.1, e daí concluímos

$$
\begin{aligned}
c^* &\leq J(tw^+ + sw^-) \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega \left[\Phi\left(|\nabla w_n^+| + |\nabla w_n^-|\right) - \frac{1}{c_\alpha}\Phi'\left(|\nabla w_n^+| + |\nabla w_n^-|\right)\left(|\nabla w_n^+| + |\nabla w_n^-|\right)\right] dx \\
&\quad + \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega \left[\frac{1}{c_\alpha} f(w_n^+ + w_n^-)(w_n^+ + w_n^-) - F(w_n^+ + w_n^-)\right] dx \\
&= \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega [\Phi(|\nabla w_n|) - F(w_n)]\, dx - \frac{1}{c_\alpha}\int_\Omega [\Phi'(|\nabla w_n|)|\nabla w_n| - f(w_n)w_n]\, dx \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \left[J(w_n) - \frac{1}{c_\alpha}J'(w_n)(w_n)\right].
\end{aligned}
$$

Como $(w_n) \subset \mathcal{M}$, concluímos que

$$
c^* \leq J(tw^+ + sw^-) \leq \liminf_{n\to\infty} J(w_n) = c^*.
$$

Portanto, $c^* = J(tw^+ + sw^-)$, ou seja, a função $\tilde{w} := tw^+ + sw^-$ atinge o ínfimo $c^* = \inf_{v\in\mathcal{M}} J(v)$, como afirmamos.

Afirmação 3.7. $\tilde{w} = w$, isto é, $t = s = 1$.

Suponha, por absurdo, que $0 < t < 1$. De modo análogo ao argumento apresentado anteriormente, utilizando a Observação 3.1, obtemos

$$\begin{aligned}
c^* &\leq J(tw^+ + sw^-) \\
&= \int_\Omega \Phi(t|\nabla w^+| + s|\nabla w^-|)\, dx - \frac{1}{\theta}\int_\Omega \Phi'(t|\nabla w^+| + s|\nabla w^-|)(t|\nabla w^+| + s|\nabla w^-|)\, dx \\
&\quad + \frac{1}{\theta}\int_\Omega f(tw^+ + sw^-)(tw^+ + sw^-)\, dx - \int_\Omega F(tw^+ + sw^-)\, dx \\
&< \int_\Omega \Phi(|\nabla w^+| + |\nabla w^-|)\, dx - \frac{1}{\theta}\int_\Omega \Phi'(|\nabla w^+| + |\nabla w^-|)(|\nabla w^+| + |\nabla w^-|)\, dx \\
&\quad + \frac{1}{\theta}\int_\Omega f(w^+ + w^-)(w^+ + w^-)\, dx - \int_\Omega F(w^+ + w^-)\, dx \leq c^*,
\end{aligned}$$

o que é um absurdo. Portanto, $t \geq 1$. O mesmo raciocínio se aplica no caso em que $s < 1$, conduzindo novamente a uma contradição. Logo, concluímos que $t = s = 1$, como queríamos demonstrar. Portanto, $w \in \mathcal{M}$ e atinge o ínfimo de J em $\mathcal{M}$, o que conclui a prova do Lema 3.13. $\square$

3.3.1 Lema de deformação

Seguindo ideias de [28], aplicaremos a seguir um lema de deformação.

Lema 3.14. Considere $w \in \mathcal{M}$ dado no Lema 3.13. Então existe $0 < \delta < 1$ tal que o quadrado aberto

$$D_\delta = (1-\delta, 1+\delta) \times (1-\delta, 1+\delta) \subset \mathbb{R}^2$$

satisfaz as seguintes propriedades:

1. $(1,1) \in D_\delta$ e
$$\Upsilon^w(t,s) = (0,0) \text{ em } \overline{D} \iff (t,s) = (1,1);$$

2. $c^* \notin h^w(\partial D_\delta)$;

3. Dado $r > 0$, podemos tomar $\delta > 0$ tal que
$$\{tw^+ + sw^- \,;\, (t,s) \in \overline{D_\delta}\} \subset B(r,w) \subset W_0^{1,\Phi}(\Omega),$$

em que as funções h^w e Υ^w são aquelas previamente definidas na Seção 3.2.

Demonstração.

1) De fato, como $w \in \mathcal{M} \subset \mathcal{N}$, segue que

$$\Upsilon^w(1,1) = (J'(w)w^+,\ J'(w)w^-) = (0,0).$$

Reciprocamente, como a matriz Jacobiana $(\Upsilon^w)'(1,1)$ é invertível, pelo Teorema da Função Inversa, existem uma bola aberta $B(\epsilon,(1,1)) \subset \mathbb{R}^2$, com $\epsilon > 0$, e uma vizinhança aberta $V \subset \mathbb{R}^2$ contendo $(0,0)$ tais que

$$\Upsilon^w\Big|_{B(\epsilon,(1,1))} : B(\epsilon,(1,1)) \to V$$

é um difeomorfismo de classe $C^1(B(\epsilon,(1,1)))$. Seja $\delta > 0$ tal que $\overline{D_\delta} \subset B(\epsilon,(1,1))$. Como $\Upsilon^w(1,1) = (0,0)$ e Υ^w é injetiva em $B(\epsilon,(1,1))$, temos que $\Upsilon^w(t,s) = (0,0)$ se, e somente se, $(t,s) = (1,1)$ para $(t,s) \in \overline{D_\delta}$.

2) Para provar que $c^* \notin h^w(\partial D_\delta)$, basta mostrar que

$$J(tw^+ + sw^-) > c^*, \quad \text{para todo } (t,s) \in \partial D_\delta.$$

De fato, sabemos que $J(w) = c^*$ e $J'(w)w^\pm = 0$. Vimos acima que $(t,s) = (1,1) \in D_\delta$ é o único ponto da vizinhança $\overline{D_\delta}$ tal que $tw^+ + sw^- \in \mathcal{M}$. Como J atinge seu mínimo global em $\mathcal{M}$ no ponto w, e não há outros pontos de $\overline{D_\delta}$ que pertençam a $\mathcal{M}$, conclui-se que

$$J(tw^+ + sw^-) > c^*, \quad \text{para todo } (t,s) \in \overline{D_\delta} \setminus \{(1,1)\}.$$

Em particular, isso vale para todo ponto da fronteira ∂D_δ, o que implica

$$c^* \notin h^w(\partial D_\delta).$$

3) Seja $(t,s) \in \overline{D_\delta}$. Dado $r > 0$, considere $\delta < r/\|w\|$. Então

$$\|tw^+ + sw^- - w\| = \|(t-1)w^+ + (s-1)w^-\| \leq \delta\|w^+\| + \delta\|w^-\| = \delta\|w\| < r.$$

□

Usando um lema de deformação e argumentos de [9] provaremos o resultado a seguir.

Lema 3.15. Seja $w \in \mathcal{M}$ dado no Lema 3.13. Então, w é um ponto crítico de J.

Demonstração. Suponha, por contradição, que $J'(w) \neq 0$. Então existem $\varepsilon > 0$ e $v_0 \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, com $\|v_0\| = 1$, tais que

$$J'(w)v_0 = 2\varepsilon > 0.$$

Como J' é contínuo, existe $r > 0$ tal que

$$J'(v)v_0 \geq \varepsilon, \quad \text{para todo } v \in B(r,w).$$

Seja $D_\delta \subset \mathbb{R}^2$ o conjunto construído no Lema 3.14. Note que, por construção, temos

$$\partial\Big(\{tw^+ + sw^-;\ (t,s) \in D_\delta\}\Big) = \{tw^+ + sw^-;\ (t,s) \in \partial D_\delta\}.$$

Escolhemos agora um raio $r' \in (0,r)$ tal que

$$\mathcal{B} := \overline{B(r',w)} \subset B(r,w) \quad \text{e} \quad \mathcal{B} \cap \{tw^+ + sw^-;\ (t,s) \in \partial D_\delta\} = \emptyset, \tag{3.29}$$

ou seja,

$$\mathcal{B} \cap \partial\Big(\{tw^+ + sw^-;\ (t,s) \in D_\delta\}\Big) = \emptyset.$$

Agora, definimos o mapa contínuo $\rho\colon\ W_0^{1,\Phi}(\Omega) \to [0,\infty)$ dado por

$$\rho(u) = \operatorname{dist}(u, \mathcal{B}^c),$$

e o campo vetorial $\mathcal{V}\colon\ W_0^{1,\Phi}(\Omega) \to W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, dado por

$$\mathcal{V}(u) = -\rho(u)\, v_0.$$

O campo $\mathcal{V}$ é Lipschitz e limitado. De fato, como a função distância ρ é Lipschitz, temos

$$\frac{\|\mathcal{V}(u) - \mathcal{V}(v)\|}{\|u-v\|} = \frac{\|\rho(v)v_0 - \rho(u)v_0\|}{\|u-v\|} = \frac{|\rho(v)-\rho(u)|}{\|u-v\|} \leq c,$$

onde $c > 0$ é a constante de Lipschitz de ρ. Além disso, como $0 \leq \rho(u) \leq r'$ e $\|v_0\| = 1$, segue que $\mathcal{V}$ é limitado por r', ou seja,

$$\|\mathcal{V}(u)\| \leq r', \quad \forall\, u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$

Agora, para cada $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, denotamos por $\eta(\tau) = \eta(\tau,u)$ a solução do seguinte problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \eta'(\tau) = \mathcal{V}(\eta(\tau)), & \tau > 0, \\ \eta(0) = u. \end{cases}$$

Pelo Teorema de Existência e Unicidade para Equações Diferenciais Ordinárias com valor inicial, esse problema admite uma solução local única $\eta(\tau,u)$, definida em um intervalo aberto contendo $\tau = 0$. Além disso, como o campo $\mathcal{V}$ é limitado, segue que a solução η pode ser estendida para todo $\tau \in \mathbb{R}$.

Afirmação 3.8. Existe $\tau_0 > 0$ tal que, para todo $\tau \in [0, \tau_0]$, a deformação contínua $\eta(\tau, u)$ satisfaz as seguintes propriedades:

(1) $\eta(\tau, u) = u$, para todo $u \notin \mathcal{B}$;

(2) A aplicação $\tau \mapsto J(\eta(\tau, u))$ é estritamente decrescente, sempre que $\eta(\tau, u) \in \mathcal{B}$;

(3) $J(\eta(\tau, w)) \leq J(w) - \dfrac{r'\varepsilon\tau}{2}$.

(1) Note que, se $u \notin \mathcal{B}$, então $\rho(u) = 0$. Nesse caso, o campo vetorial satisfaz $\mathcal{V}(u) = 0$, de modo que a única solução do problema de Cauchy é a função constante $\eta(\tau, u) \equiv u$, para todo $\tau \geq 0$.

(2) Se $\eta(\tau) \in \mathcal{B} \subset B(r, w)$, segue da condição em r que $J'(\eta(\tau))v_0 \geq \alpha > 0$. Além disso, como $\eta(\tau) \in \mathcal{B}$, temos

$$\rho(\eta(\tau)) := \operatorname{dist}(\eta(\tau), \mathcal{B}^c) > 0.$$

Dessa forma, derivando J em relação a τ, para todo $\eta(\tau) \in \mathcal{B}$, obtemos

$$\frac{d}{d\tau} J(\eta(\tau)) = J'(\eta(\tau))\eta'(\tau) = -\rho(\eta(\tau))J'(\eta(\tau))v_0 \leq -\rho(\eta(\tau))\varepsilon < 0.$$

Portanto, $J(\eta(\tau))$ é decrescente com respeito a τ.

(3) Seja $\tau_0 > 0$ tal que $\eta(\tau, w) \in \mathcal{B}$ para todo $\tau \in [0, \tau_0]$. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que

$$\|\eta(\tau, w) - w\| \leq \frac{r'}{2}, \quad \forall\, \tau \in [0, \tau_0],$$

isto é, $\eta(\tau, w) \in \overline{B(\frac{r'}{2}, w)} \subset \mathcal{B}$ para todo $\tau \in [0, \tau_0]$. Logo,

$$\rho(\eta(\tau, w)) = \operatorname{dist}(\eta(\tau, w), \mathcal{B}^c) \geq \frac{r'}{2}, \quad \forall\, \tau \in [0, \tau_0].$$

Portanto,

$$\frac{d}{d\tau} J(\eta(\tau, w)) \leq -\rho(\eta(\tau, w))\varepsilon \leq -\frac{r'\varepsilon}{2},$$

Integrando a desigualdade obtida sobre o intervalo $[0, \tau]$, para $0 < \tau \leq \tau_0$, obtemos

$$J(\eta(\tau, w)) - J(w) = \int_0^\tau \frac{d}{ds} J(\eta(s, w))\, ds \leq -\int_0^\tau \frac{r'\varepsilon}{2}\, ds = -\frac{r'\varepsilon}{2}\tau.$$

Logo,

$$J(\eta(\tau, w)) \leq J(w) - \frac{r'\varepsilon}{2}\tau,$$

concluindo assim a prova da Afirmação 3.8. Agora considere $\overline{\eta}_{\tau_0} \colon \overline{D_\delta} \to W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ a aplicação dada por

$$\overline{\eta}_{\tau_0}(t,s) = \eta(\tau_0, tw^+ + sw^-),$$

para a qual vale a estimativa

$$\max_{(t,s)\in\overline{D}} J(\overline{\eta}_{\tau_0}(t,s)) < c^*. \tag{3.30}$$

Com efeito, pelo item (2) da Afirmação 3.8 juntamente com o Teorema Auxiliar 3.2 e a condição inicial $\eta(0,u) = u$, segue que, para todo $(t,s) \in \overline{D} \setminus \{(1,1)\}$,

$$\begin{aligned} J(\overline{\eta}_{\tau_0}(t,s)) &= J(\eta(\tau_0, tw^+ + sw^-)) \\ &\leq J(\eta(0, tw^+ + sw^-)) \\ &= J(tw^+ + sw^-) \\ &= h^w(t,s) < h^w(1,1) = c^*. \end{aligned}$$

Já no caso $(t,s) = (1,1)$, pelo item (3) da Afirmação 3.8, temos

$$J(\overline{\eta}_{\tau_0}(1,1)) := J(\eta(\tau_0, w^+ + w^-)) = J(\eta(\tau_0, w)) \leq J(w) - \frac{r'\varepsilon\tau_0}{2} < J(w) < c^*,$$

concluindo assim a prova da desigualdade (3.30). Assim, obtemos que $\eta_{\tau_0}(\overline{D_\delta}) \cap \mathcal{M} = \emptyset$, ou seja,

$$\eta_{\tau_0}(t,s) \notin \mathcal{M}, \quad \forall\,(t,s) \in \overline{D_\delta}. \tag{3.31}$$

Por fim, definimos a aplicação $\Lambda_{\tau_0} \colon \overline{D_\delta} \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\Lambda_{\tau_0}(t,s) = \left(\frac{J'\big(\overline{\eta}_{\tau_0}(t,s)\big)\big(\overline{\eta}_{\tau_0}(t,s)^+\big)}{t},\ \frac{J'\big(\overline{\eta}_{\tau_0}(t,s)\big)\big(\overline{\eta}_{\tau_0}(t,s)^-\big)}{s} \right).$$

Pela condição (3.29) e pelo item (1) da Afirmação 3.8, temos que, para todo $(t,s) \in \partial D_\delta$

$$\Lambda_{\tau_0}(t,s) = \Big(J'(tw^+ + sw^-)w^+,\ J'(tw^+ + sw^-)w^-\Big) = \Upsilon^w(t,s).$$

Como as funções Λ_{τ_0} e Υ^w coincidem na fronteira, segue da definição de Grau de Brouwer, da Propriedade d_6 do grau do Capítulo 3 de [25] e do Teorema Auxiliar 3.2, que

$$\deg(\Lambda_{\tau_0}, D_\delta, (0,0)) = \deg(\Upsilon^w, D_\delta, (0,0)) = \operatorname{sgn}\left(\det\left((\Upsilon^w)'(1,1)\right)\right) = 1.$$

Portanto, a aplicação Λ_{τ_0} possui um zero no interior de D_δ, ou seja, existem $(\bar{t}, \bar{s}) \in D_\delta$

tais que
$$\Lambda_{\tau_0}(\bar{t}, \bar{s}) = (0, 0),$$
o que implica
$$J'\Big(\overline{\eta}_{\tau_0}(\bar{t}, \bar{s})\Big)\Big(\overline{\eta}_{\tau_0}(\bar{t}, \bar{s})^{\pm}\Big) = 0.$$
Logo, $\overline{\eta}_{\tau_0}(\bar{t}, \bar{s}) \in \mathcal{M}$, contradizendo (3.31), uma vez que $(\bar{t}, \bar{s}) \in D_\delta$. Essa contradição mostra que nossa suposição inicial estava incorreta, e, portanto, w é de fato um ponto crítico de J. □

Lema 3.16. Seja $w \in \mathcal{M}$ dado no Lema 3.13. Então, w possui exatamente dois domínios nodais.

Demonstração. Suponha, por absurdo, que w possui três domínios nodais, ou seja, suponha que existam conjuntos abertos $\Omega_i \subset \Omega$, para $i = 1, 2, 3$, tais que $w > 0$ em Ω_1, Ω_3 e $w < 0$ em Ω_2. Agora considere as funções $w_i \colon \Omega \to \mathbb{R}$ dadas por
$$w_i(x) = \begin{cases} w(x), & \text{se } x \in \Omega_i, \\ 0, & \text{se } x \in \Omega \setminus \Omega_i. \end{cases}$$
Note que $w_1 > 0$ em Ω_1, $w_2 < 0$ em Ω_2, $w_3 > 0$ em Ω_3 e
$$\Omega = \Omega_1 \mathbin{\dot\cup} \Omega_2 \mathbin{\dot\cup} \Omega_3 \mathbin{\dot\cup} \hat{\Omega},$$
em que $\hat{\Omega} = \{x \in \Omega;\ w(x) = 0\}$. Além disso, $w = w_1 + w_2 + w_3$ e os suportes de w_i e w_j são disjuntos para $i \neq j$, com $i, j = 1, 2, 3$. Como $J'(w) = 0$, temos
$$J'(w_1 + w_2)w_1 = 0 = J'(w_1 + w_2)w_2.$$
Desde que $0 \neq w_1 = (w_1 + w_2)^+$ e $0 \neq w_2 = (w_1 + w_2)^-$, pelo Teorema 3.6 existem $t, s \in (0, 1]$ tais que $t(w_1 + w_2)^+ + s(w_1 + w_2)^- \in \mathcal{M}$, ou seja, $tw_1 + sw_2 \in \mathcal{M}$. Assim, segue que
$$J(tw_1 + sw_2) \geq c^*. \tag{3.32}$$
Por outro lado, como $0 \neq w_3 \in \mathcal{N}$, temos $J(w_3) > 0$. Usando o Teorema Auxiliar 3.2, obtemos
$$J(tw_1 + sw_2) \leq J(w_1 + w_2) < J(w_1 + w_2) + J(w_3) = J(w) = c^*,$$
o que contradiz (3.32). Portanto, w possui exatamente dois domínios nodais. □

A prova do Teorema 3.1 segue agora dos Lemas 3.13, 3.15 e 3.16.

Capítulo 4

Resultados auxiliares

O resultado a seguir pode ser encontrado em [36].

Teorema 4.1 (Teorema de Miranda). *Seja $G = \{x \in \mathbb{R}^N; |x_i| \leq L, \quad 1 \leq i \leq N\}$. Suponha que a aplicação $F = (f_1, f_2, \ldots, f_N) : \bar{G} \to \mathbb{R}^N$ é contínuo no fecho $\bar{G}$ de G e $F(x) \neq 0$ para x na fronteira ∂G de G, e*

1. $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, -L, x_{i+1}, \ldots, x_n) \geq 0, \quad 1 \leq i \leq N$

2. $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, +L, x_{i+1}, \ldots, x_n) \leq 0, \quad 1 \leq i \leq N.$

Então, $F(x) = 0$ tem uma solução em G.

Definição 4.1. Dizemos que (u_n), uma sequência de funções de $L^1(\Omega)$, é *equi-integrável* se a seguinte condição é satisfeita: para todo $\varepsilon > 0$, existe um conjunto mensurável A, de medida finita, e $\delta > 0$ tais que

$$\begin{cases} \forall\, n \geq 1, \quad \displaystyle\int_{A^c} |u_n(x)|\, dx < \varepsilon, \\ \forall E \subset \Omega, \quad \text{mensurável com } |E| < \delta, \quad \displaystyle\int_E |u_n(x)|\, dx < \varepsilon. \end{cases}$$

Observa-se que, no caso particular em que Ω é de medida finita, a equi-integrabilidade se reduz à segunda condição.

O teorema a seguir pode ser encontrado na página 13 em [43].

Teorema 4.2 (Teorema de Vitali). *Seja (u_n) uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$ que converge q.t.p. em Ω para uma função mensurável u. Então, $u_n \to u$ em $L^1(\Omega)$ se, e somente se, (u_n) é equi-integrável.*

Apresentamos, conforme utilizado no Capítulo 2, o seguinte resultado clássico de regularidade para soluções de equações elípticas quasilineares, apresentado por Lieberman, no Teorema 1.7, de [34].

Seja $\phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ uma função de classe C^1, derivada de uma função convexa $\Phi \in C^2([0, \infty))$, que satisfaz a condição de crescimento:

$$0 < \delta \leq \frac{\phi(t)t}{\Phi(t)} \leq \phi_0, \quad \forall\, t > 0, \tag{4.1}$$

para constantes $\delta, \phi_0 > 0$.

Suponha que as funções $A(x, z, p),\ B(x, z, p) : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ satisfaçam as seguintes condições:

(a) $\sum_{i,j=1}^{N} a^{ij}\xi_i\xi_j \geq \frac{\phi(|p|)}{|p|}|\xi|^2$;

(b) $\sum_{i,j=1}^{N} |a^{ij}| \leq \Lambda\phi(|p|)|p|$;

(c) $|A(x, z, p) - A(y, w, p)| \leq \Lambda_1(1 + \phi(|p|))[|x - y|^\sigma + |z - w|^\sigma]$;

(d) $|B| \leq \Lambda_1(1 + \phi(|p|)|p|)$;

em que $a^{ij} = \frac{\partial A^i}{\partial p_j}$, para constantes positivas $\sigma \leq 1$, Λ, Λ_1.

Teorema 4.3 (Teorema de Regularidade Global de Lieberman)**.** *Seja $M_0 > 0$ e suponha que as condições $(a) - (d)$ sejam satisfeitas para $x, y \in \Omega$, $z \in [-M_0, M_0]$ e $p, \xi \in \mathbb{R}^N$. Assuma também que* (4.1) *seja válida com $\phi \in C^1$. Então, toda solução fraca $u \in W^{1,\Phi}(\Omega)$ de*

$$Qu := \operatorname{div}(A(x, u, Du)) + B(x, u, Du) = 0, \quad em\ \Omega$$

com $|u| \leq M_0$ em Ω, pertence a $C^{1,\tau}(\Omega)$ para algum $\tau > 0$ e

$$\|u\|_{C^{1,\tau}(\Omega')} \leq C\left(\sigma, \Lambda, \phi_0, N, \Lambda_1, \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega), M_0\right),$$

para todo aberto $\Omega' \subset\subset \Omega$.

Observação 4.1 ([34])**.** A mesma estimativa de Hölder vista no teorema acima, é válida em $\overline{\Omega}$ quando $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ é solução do problema com condição de fronteira de Dirichlet, sob as mesmas condições $(a) - (d)$.

Em ([19], Teorema 1.1), encontramos teorema a seguir, cuja demonstração se baseia em [33], [20], [17] e [27].

Teorema 4.4 (Desigualdade de Trudinger-Moser)**.** *Sejam $K \geq 0$, $N \geq 2$ e $\alpha < N - 1$. Seja Φ uma função de Young satisfazendo a hipótese (ϕ_2) dos capítulos acima, isto é,*

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\Phi(t)}{t^N log^\alpha(t)} = 1,$$

para algum $\alpha \in [0, N-1)$. Então,

1. *Se $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, temos*

$$\int_\Omega \exp(K|u(x)|^\gamma)dx < \infty;$$

2. *Se $K < K_{N,\alpha}$ e $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ é tal que $\|\nabla u\|_\Phi \leq 1$, temos*

$$\int_\Omega \exp(K|u(x)|^\gamma)dx < C(N, \alpha, \Phi, K).$$

Antes de enunciarmos o próximo teorema, vejamos a seguinte caracterização.

Sejam $I : X \to (-\infty, +\infty]$ um funcional definido em um espaço de Banach X e uma sequência $(u_n) \subset X$. Quando a convergência $u_n \rightharpoonup u$ implica

$$\liminf_{n\to\infty} I(u_n) \geq I(u),$$

dizemos que I é fracamente semicontínuo inferiormente.

O teorema a seguir pode ser encontrado em ([11], Observação 6, Capítulo 3).

Teorema 4.5 ([11]). *Seja X um espaço de Banach. Se $I : X \to (-\infty, +\infty)$ é um funcional convexo e contínuo, então I é fracamente semicontínuo inferiormente.*

Teorema 4.6 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue). *Seja (f_n) uma sequência de funções mensuráveis em um conjunto mensurável $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, e suponha que:*

1. *$f_n(x) \to f(x)$ q.t.p. $x \in \Omega$;*

2. *Existe $g \in L^1(\Omega)$ tal que $|f_n(x)| \leq g(x)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, q.t.p. $x \in \Omega$.*

Então,

1. *$f \in L^1(\Omega)$;*

2. *$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)\,dx = \int_\Omega f(x)\,dx$.*

Teorema 4.7 (Teorema da Convergência Monótona). *Seja (f_n) uma sequência de funções mensuráveis não negativas em um conjunto mensurável $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, tal que*

1. *$f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e quase todo $x \in \Omega$;*

2. *$f_n(x) \to f(x)$ quase em todo ponto de Ω.*

Então,

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n(x)\,dx = \int_\Omega f(x)\,dx.$$

Lema 4.1 (Lema de Fatou)**.** Seja (f_n) uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$ que satisfaz:

1. Para todo n, $f_n \geq 0$ q.t.p. em Ω;

2. $\sup_n \int_\Omega f_n < \infty$.

Para quase todo $x \in \Omega$, definimos

$$f(x) := \liminf_{n\to\infty} f_n(x) \leq +\infty.$$

Então, $f \in L^1(\Omega)$ e

$$\liminf_{n\to\infty}\int_\Omega f_n(x)\,dx \geq \int f(x)\,dx.$$

O resultado a seguir encontra-se em [12].

Lema 4.2 (Brezis–Lieb)**.** Seja Φ uma função de Young e seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto mensurável. Considere $u \in L^\Phi(\Omega)$ e uma sequência (u_n) de funções em $L^\Phi(\Omega)$ tal que

1. $u_n \to u$ quase em todo ponto de Ω;

2. a sequência (u_n) é limitada em $L^\Phi(\Omega)$.

Então,

$$\int_\Omega \Phi(|u_n|)\,dx - \int_\Omega \Phi(|u_n - u|)\,dx \;\longrightarrow\; \int_\Omega \Phi(|u|)\,dx.$$

Agora, enunciaremos dois lemas de [19].

Se tivermos $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ tal que a menos de subsequência:

$$\begin{aligned}
&u_j \rightharpoonup u && \text{em } W_0^{1,\Phi}(\Omega),\\
&u_j \to u && \text{em } L^p(\Omega), \quad \text{para todo } p \in [1,\infty),\\
&u_j(x) \to u(x) && \text{q.t.p. } x \in \Omega,
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Então, os lemas a seguir, encontrados em [19], garantem que:

Lema 4.3. A menos de subsequência temos

$$\nabla u_j(x) \longrightarrow \nabla u(x) \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega,$$

Lema 4.4. A menos de subsequência temos

$$\int_\Omega \Phi'(|\nabla u_j|)\,\frac{\nabla u_j}{|\nabla u_j|}\cdot\nabla v\,dx \longrightarrow \int_\Omega \Phi'(|\nabla u|)\,\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\cdot\nabla v\,dx, \quad \forall\, v \in C_c^\infty(\Omega).$$

Referências Bibliográficas

[1] ADAMS, R.; FOURNIER, J.: *Sobolev Spaces*. Pure and Applied Mathematics, vol. 140. 2nd ed. Amsterdam: Academic Press, 2003.

[2] ALI, I.; CASTRO, A.; SHIVAJI, R.: *Uniqueness and stability of nonnegative solutions for semipositone problems in a ball*. Proc. Amer. Math. Soc. **117**(3), 775–782, 1993.

[3] ALLEGRETTO, W.; NISTRI, P.; ZECCA, P.: *Positive solutions of elliptic non-positone problems*. Differential Integral Equations **5**(1), 95–101, 1992.

[4] ALVES, C.; HOLANDA, A.; SANTOS, J.: *Existence of positive solutions for a class of semipositone quasilinear problems through Orlicz-Sobolev spaces*. Proc. Amer. Math. Soc. **147**(1), 288–299, 2018.

[5] ALVES, C.; SANTOS, J.; ZHOU, J.: *Positive solutions for a class semipositone quasilinear problem with Orlicz–Sobolev critical growth*. Math. Nachr. **296**(3), 4686–4711, 2023.

[6] AMBROSETTI, A.; ARCOYA, D.; BUFFONI, B.: *Positive solutions for some semi-positone problems via bifurcation theory*. Differential and Integral Equations **7** (3–4), 655–663, 1994.

[7] AMBROSETTI, A.; RABINOWITZ, P.: *Dual variational methods in critical point theory and applications*. J. Funct. Anal. **14**(4), 349–381, 1973.

[8] ANURADHA, V.; HAI, D.; SHIVAJI, R.: *Existence results for superlinear semipositone BVPs*. Proc. Amer. Math. Soc. **124**(3), 757–763, 1996.

[9] BARTSCH, T.; WETH, T.; WILLEM, M.: *Partial symmetry of least energy nodal solutions to some variational problems*. J. Anal. Math. **96**(1), 1–18, 2005.

[10] BREIT, D.; CIANCHI, A.: *Negative Orlicz–Sobolev norms and strongly nonlinear systems in fluid mechanics*. J. Differential Equations **259**, 48–83, 2015.

[11] Brezis, H.: *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Vol. 2. New York: Springer, 2011.

[12] Brezis, H.; Lieb, E.: *A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals*. Proc. Amer. Math. Soc. **88**(3), 486–490, 1983.

[13] Caldwell, S.; Castro, A.; Shivaji, R.; Unsurangsie, S.: *Positive solutions for a class of multiparameter elliptic semipositone problems*. Electron. J. Differ. Equ. **2007**(96), 1–10, 2007.

[14] Castro, A.; Cossio, J.; Neuberger, J.: *A sign-changing solution for a superlinear Dirichlet problem*. Rocky Mountain J. Math. **27**(4), 1041–1053, 1997.

[15] Castro, A.; de Figueiredo, D.; Lopera, E.: *Existence of positive solutions for a semipositone p-Laplacian problem*. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **146**, 475–482, 2016.

[16] Castro, A.; Shivaji, R.: *Nonnegative solutions for a class of nonpositone problems*. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. **108**(A), 291–302, 1988.

[17] Černý, R.: *Concentration-compactness principle for embedding into multiple exponential spaces*. Math. Inequal. Appl. **15**, 165–198, 2012.

[18] Černý, R.: *Generalized n-Laplacian: quasilinear nonhomogeneous problem with critical growth*. Nonlinear Anal. **74**, 3419–3439, 2011.

[19] Černý, R.: *Generalized Moser–Trudinger inequality for unbounded domains and its application*. NoDEA Nonlinear Differ. Equ. Appl. **19**, 575–608, 2012.

[20] Černý, R.; Mašková, S.: *A sharp form of an embedding into multiple exponential spaces*. Czechoslovak Math. J. **60**, 751–782, 2010.

[21] Chhetri, M.; Drábek, P.; Shivaji, R.: *Existence of positive solutions for a class of p-Laplacian superlinear semipositone problems*. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **145** (5), 925–936, 2015.

[22] Costa, D.; Quoirin, H.; Tehrani, H.: *A variational approach to superlinear semipositone elliptic problems*. Proc. Amer. Math. Soc. **145**(6), 2661–2675, 2017.

[23] Costa, D.; Tehrani, H.; Yang, J.: *On a variational approach to existence and multiplicity results for semipositone problems*. Electron. J. Differential Equations **2006** (11), 1–10, 2006.

[24] de Freitas, L.; Santos, J.; Severo, U.: *Quasilinear equations involving indefinite nonlinearities and exponential critical growth in* $\mathbb{R}^N$. Ann. Mat. Pura Appl. **200**, 315–335, 2021.

[25] Deimling, K.: *Nonlinear Functional Analysis.* Berlin: Springer-Verlag, 1985.

[26] Drame, A.; Costa, D.: *On positive solutions of one-dimensional semipositone equations with nonlinear boundary conditions.* Appl. Math. Lett. **25**(12), 2411–2416, 2012.

[27] Edmunds, D.; Gurka, P.; Opic, B.: *Double exponential integrability of convolution operators in generalized Lorentz–Zygmund spaces.* Indiana Univ. Math. J. **44**, 19–43, 1995.

[28] Figueiredo, G.; Santos, J.: *Existence of least energy nodal solution with two nodal domains for a generalized Kirchhoff problem in an Orlicz–Sobolev space.* Math. Nachr. **290**, 583–603, 2017.

[29] Figueiredo, G.; Santos, J.; Severo, U.: *Multi-bump solutions for a strongly degenerate problem with exponential growth in* $\mathbb{R}^N$. J. Geom. Anal. **34**(8) 2024, Paper No. 242, 51 pp.

[30] Fuchs, M.; Seregin, C.: *Variational methods for fluids of Prandtl–Eyring type and plastic materials with logarithmic hardening.* Math. Meth. Appl. Sci. **22**, 317–351, 1999.

[31] Fukagai, N.; Narukawa, K.: *On the existence of multiple positive solutions of quasilinear elliptic eigenvalue problems.* Ann. Mat. Pura Appl. **186**(3), 539–564, 2007.

[32] Fukagai, N.; Ito, M.; Narukawa, K.: *Positive solutions of quasilinear elliptic equations with critical Orlicz-Sobolev nonlinearity on* $\mathbb{R}^n$. Funkcial. Ekvac. **49**, 235–267, 2006.

[33] Hencl, S.: *A sharp form of an embedding into exponential and double exponential spaces.* J. Funct. Anal. **204**(1), 196–227, 2003.

[34] Lieberman, G.: *The natural generalization of the natural conditions of Ladyzhenskaya and Ural'tseva for elliptic equations.* Comm. Partial Differential Equations. **16**(2), 311–361, 1991.

[35] Meneses, J.: *Existência de múltiplas soluções positivas para uma classe de problemas elípticos quaselineares.* Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2016.

[36] Miranda, C.: *Un'osservazione su un teorema di Brouwer.* Boll. Un. Mat. Ital. (2) **3**, 5–7, 1940.

[37] Perera, K.; Sim, I.: *Positive solutions of semipositone elliptic problems with critical Trudinger–Moser nonlinearities.* Topol. Methods Nonlinear Anal. **55**(1), 243–255, 2020.

[38] Rădulescu, V.; Santos, G.; Tavares, L.: *Nonhomogeneous multiparameter problems in Orlicz–Sobolev spaces.* Math. Nachr. **296**(14), 2555–2574, 2023.

[39] Rao, M.; Ren, Z.: *Theory of Orlicz spaces.* New York: Marcel Dekker, 1991.

[40] Santos, J.; Severo, U.: *On a class of quasilinear equations involving critical exponential growth and concave terms in* $\mathbb{R}^N$. Ann. Henri Poincaré. **23**, 1-24, 2022.

[41] Santos, L.: *Obtaining and breaking uniqueness of positive solutions to strong singular problems.* Tese de Doutorado — Universidade de Brasília, 2018.

[42] Wheeden, R; Zygmund, A.: *Measure and integral: An introduction to real analysis.* New York: Marcel Dekker, 1977.

[43] Kavian, O.: *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques.* Paris: Springer-Verlag, 1993.