



Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Informática  
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional

FORMULAÇÃO VARIACIONAL DE ELEMENTOS FINITOS ESTABILIZADOS  
APLICADO AO PROBLEMA DE VIGA DE TIMOSHENKO COM GEOMETRIA  
ARBITRÁRIA NO ESPAÇO TRIDIMENSIONAL

Anderson Kerlly Rodrigues de Sousa

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional, UFPB, da Universidade Federal da Paraíba, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Modelagem Matemática e Computacional.

Orientadores: Antônio José Boness dos Santos  
Ana Paula Pintado Wyse

João Pessoa  
Outubro de 2022

FORMULAÇÃO VARIACIONAL DE ELEMENTOS FINITOS ESTABILIZADOS  
APLICADO AO PROBLEMA DE VIGA DE TIMOSHENKO COM  
GEOMETRIA ARBITRÁRIA NO ESPAÇO TRIDIMENSIONAL


ANDERSON KERLLY RODRIGUES DE SOUSA

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO PROGRAMA DE  
PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL  
(PPGMMC) DO CENTRO DE INFORMÁTICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL  
DA PARAÍBA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A  
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM MODELAGEM  
MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL.

Examinada por:

  
Prof. Antônio José Boness dos Santos, D.Sc.

  
Prof<sup>a</sup>. Ana Paula Pintado Wyse, D.Sc.

  
Prof. Thiago José Machado, D.Sc.

  
Prof<sup>a</sup>. Cristiane Oliveira de Faria, D.Sc.

JOÃO PESSOA, PB – BRASIL  
OUTUBRO DE 2022

Ata da Sessão Pública de Defesa de Dissertação de  
Mestrado de **ANDERSON KERLLY RODRIGUES  
DE SOUSA**, candidato ao título de Mestre em  
Matemática Computacional, na Área de Modelagem  
Matemática e Computacional, realizada no dia 28 de  
outubro de 2022.

1 Aos vinte e oito dias do mês de outubro do ano de dois mil e vinte e dois, às 14 horas, via  
2 videoconferência, reuniram-se os membros da Banca Examinadora constituída para julgar o Trabalho  
3 Final do Sr. **ANDERSON KERLLY RODRIGUES DE SOUSA**, vinculado à Universidade Federal da  
4 Paraíba sob matrícula nº 20201001538, candidato ao grau de Mestre em "*Modelagem Matemática e*  
5 *Computacional*", na linha de pesquisa "*Modelagem e Simulação de Sistemas*", do Programa de  
6 Modelagem Matemática e Computacional. A comissão examinadora foi composta pelos professores  
7 Antônio José Boness dos Santos, Orientador e Presidente da Banca; Ana Paula Pintado Wyse, Segundo  
8 Orientador; Thiago José Machado Examinador Interno ao Programa; Cristiane Oliveira de Faria,  
9 Examinador Externo ao Programa. Dando início aos trabalhos, o presidente da banca cumprimentou os  
10 presentes, comunicou aos mesmos a finalidade da reunião e passou a palavra ao candidato para que o  
11 mesmo fizesse, oralmente, a exposição do trabalho de dissertação intitulado "**Formulação Variacional**  
12 **de Elementos Finitos Estabilizados Aplicado ao Problema de Viga de Timoshenko com Geometria**  
13 **Arbitrária no Espaço Tridimensional**". Concluída a exposição, o candidato foi arguido pela Banca  
14 Examinadora, que emitiu o parecer: "*aprovado*". Do ocorrido, eu Gean Paulo Pereira Maurício de Barros,  
15 Coordenador do Programa de Modelagem Matemática e Computacional (PPGMMC), lavrei a presente ata  
16 que vai assinada por mim e pelos membros da Banca Examinadora.

João Pessoa, 28 de Outubro de 2022.

Gean Paulo Pereira Maurício de Barros  
Secretário do PPGMMC  
SIAPE 2326476

Prof. Dr. Antônio José Boness dos Santos  
Orientador (PPGMMC)

---

Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Ana Paula Pintado Wyse  
Coorientadora no Programa (PPGMMC)

---

Prof. Dr. Thiago José Machado  
Examinador Interno ao Programa (PPGMMC)

*Thiago José Machado*

Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Cristiane Oliveira de Faria  
Examinador Externo ao Programa (UERJ)

---

**Catálogo na publicação**  
**Seção de Catalogação e Classificação**

S725f Sousa, Anderson Kerlly Rodrigues de.

Formulação variacional de elementos finitos estabilizados aplicado ao problema de viga de Timoshenko com geometria arbitrária no espaço tridimensional / Anderson Kerlly Rodrigues de Sousa. - João Pessoa, 2022.

74 f. : il.

Orientação: Antônio José Boness dos Santos, Ana Paula Pintado Wyse.

Dissertação (Mestrado) - UFPB/CI.

1. Geometria - Espaço tridimensional. 2. Modelo de viga de Timoshenko. 3. Princípio de Hellinger-Reissner. 4. Formulação variacional mista. I. Santos, Antônio José Boness dos. II. Wyse, Ana Paula Pintado. III. Título.

UFPB/BC

CDU 514(043)

*Dedico este trabalho à minha  
família e em especial aos meus  
avôs materno e paterno (in  
memoriam).*

# Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus, por me conceder discernimento, coragem e força para enfrentar as adversidades diárias e seguir em frente com determinação. À minha família, expresso minha mais profunda gratidão pelo apoio incondicional, pelo incentivo constante e por acreditarem em mim em todos os momentos. Aos amigos e colegas de trabalho, deixo meu reconhecimento pelo estímulo e pela motivação indispensáveis à realização deste aperfeiçoamento.

Estendo meus agradecimentos a todos os professores que contribuíram de forma significativa para minha formação, em especial ao meu orientador, Antônio Boness, pela orientação dedicada e pelos valiosos conselhos ao longo desta jornada. Registro, ainda, minha gratidão à colega de curso, Raquel Priscila, pela parceria, amizade e apoio constantes durante todo este processo formativo.

Resumo da Dissertação apresentada ao PPGMMC/CI/UFPB como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

FORMULAÇÃO VARIACIONAL DE ELEMENTOS FINITOS ESTABILIZADOS  
APLICADO AO PROBLEMA DE VIGA DE TIMOSHENKO COM GEOMETRIA  
ARBITRÁRIA NO ESPAÇO TRIDIMENSIONAL

Anderson Kerlly Rodrigues de Sousa

Outubro/2022

Orientadores: Antônio José Boness dos Santos

Ana Paula Pintado Wyse

Programa: Modelagem Matemática e Computacional

Apresentamos, neste trabalho, um modelo matemático para estruturas flexíveis de geometria arbitrária no espaço tridimensional, cuja cinemática esteve regida pela teoria de barras com flexão, cisalhamento e torção, no regime de pequenos deslocamentos e deformações. Inicialmente, retomamos a teoria clássica das vigas retilíneas, fundamentada nos modelos de Euler-Bernoulli e Timoshenko, formulamos as equações governantes da deformação sob a ação de carregamentos distribuídos. Em seguida, estendemos esses conceitos teóricos para barras com curvatura arbitrária no espaço, deduzindo as equações constitutivas e de equilíbrio, que resultam em um sistema vetorial de equações diferenciais ordinárias. Para a resolução desse problema, adotamos uma formulação variacional abstrata baseada no princípio de Hellinger–Reissner, a qual permite tratar deslocamentos e esforços generalizados como variáveis independentes. Nesse contexto, os campos dos deslocamentos e esforços generalizados foram aproximados por funções de interpolação de mesma ordem, sendo contínuas para os deslocamentos e descontínuas para os esforços, assegurando, assim, maior flexibilidade para representar adequadamente suas variações internas. Para garantir a estabilidade numérica das aproximações, incorporamos termos residuais de mínimos quadrados diretamente nas equações de equilíbrio a nível de elemento, o que possibilita evitar o efeito de trancamento de solução. Alguns resultados numéricos são apresentados demonstrando a potencialidade da formulação.

Abstract of Dissertation presented to PPGMMC/CI/UFPB as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

VARIATIONAL STABILIZED FINITE ELEMENT FORMULATION APPLIED TO THE  
TIMOSHENKO BEAM PROBLEM WITH ARBITRARY GEOMETRY IN  
THREE-DIMENSIONAL SPACE

Anderson Kerlly Rodrigues de Sousa

October/2022

Advisors: Antônio José Boness dos Santos

Ana Paula Pintado Wyse

Program: Computational Mathematical Modelling

We present a mathematical model for flexible structures with arbitrary geometries in three-dimensional space, governed by beam theory that accounts for bending, shear, and torsion, within the framework of small displacements and strains. We begin by revisiting the classical theory of straight beams, founded on the Euler–Bernoulli and Timoshenko models, and derive the governing equations for deformation under distributed loading. These concepts are then extended to spatially curved beams, resulting in the derivation of constitutive and equilibrium equations that form a system of ordinary differential equations. To solve this problem, an abstract variational formulation founded on the Hellinger–Reissner principle is adopted, which enables generalized displacements and internal forces to be treated as independent variables. In this context, the displacement and internal force fields are approximated by interpolation functions of the same polynomial degree, continuous for displacements and discontinuous for internal forces, thereby allowing greater flexibility in accurately capturing their internal variations. To guarantee the numerical stability of the approximations, least-squares residual terms are directly incorporated into the equilibrium equations at the element level, which prevents locking phenomena in the solution. Numerical results are presented to demonstrate the potential of the formulation.



# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>x</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xiii</b>
<b>Lista de Abreviaturas</b>	<b>xiv</b>
<b>Lista de Símbolos</b>	<b>xv</b>
<b>1 Teoria clássica de viga de Euler-Bernoulli e de Timoshenko</b>	<b>4</b>
1.1 Considerações iniciais . . . . .	5
1.2 Modelo clássico de viga de Euler-Bernoulli . . . . .	7
1.3 Modelo clássico de viga de Timoshenko . . . . .	11
<b>2 Modelos de barras no espaço 3D</b>	<b>17</b>
<b>3 Formulações variacionais mistas</b>	<b>24</b>
3.0.1 Formulação variacional . . . . .	24
3.0.2 Formulação cinemática . . . . .	26
3.1 Formulação variacional baseada no princípio de Hellinger-Reissner . . . .	27
3.1.1 Método dos elementos finitos misto estabilizado . . . . .	29
<b>4 Resultados</b>	<b>33</b>
4.0.1 Experimento 1 . . . . .	33
4.1 Experimento 2 . . . . .	37
4.2 Experimento 3 . . . . .	44
<b>5 Conclusões</b>	<b>49</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>51</b>
<b>A Formulação padrão para o problema de viga de Timoshenko no espaço tridi-</b> <b>mensional</b>	<b>54</b>
A.1 Equações de equilíbrio em $\mathbb{R}^3$ . . . . .	54

<b>B</b>	<b>Formulação variacional mista estabilizada no espaço tridimensional</b>	<b>58</b>
B.0.1	Descrição do modelo em termos de componentes . . . . .	58

# Lista de Figuras

1.1	Modelo de uma viga prismática de comprimento $L$ , de largura $b$ e altura $h$ com seção transversal retangular, descrita no $\mathbb{R}^3$ . O eixo global $e_1$ representa a direção longitudinal e os eixos $e_2$ e $e_3$ , as direções transversais da viga. . . . .	5
1.2	Representação da curvatura de flexão da viga, indicando o deslocamento transversal $u_3(x)$ e a inclinação $\frac{du_3(x)}{dx}$ da linha neutra em um ponto $x$ . . . . .	7
2.1	A representação no espaço tridimensional de uma barra de geometria arbitrária, de comprimento $L$ , descrita por uma curva parametrizada $\mathbf{r}(s)$ , onde $s \in [0, L]$ representa o comprimento de arco, e $\mathbf{r}(0)$ é sua origem. Em cada ponto $s$ da curva, temos um sistema de coordenadas locais, descrito pelos vetores $\mathbf{E}_1(s)$ , $\mathbf{E}_2(s)$ e $\mathbf{E}_3(s)$ . . . . .	17
2.2	Representação do equilíbrio estático em um segmento de viga prismática $AB$ . . . . .	20
4.1	Representação esquemática de uma viga retilínea, engastada e livre, de comprimento $L = 3.0\text{m}$ , com seção transversal retangular $ab$ e submetida a uma carga distribuída $F_3 = -5.0\text{kN}$ . . . . .	34
4.2	Comparação das soluções numéricas $U_3$ e analítica $U_{3e}$ da componente do deslocamento na direção $e_3$ de uma viga engastada e livre, sujeita a uma carga distribuída $F_3 = -5,0\text{kN}$ na direção do eixo $e_3$ . . . . .	35
4.3	Comparação das soluções numéricas $\theta_2$ e analítica $\theta_{2e}$ da componente da rotação em relação ao eixo $e_2$ de uma viga engastada e livre, sujeita a uma carga distribuída $F_3 = -5,0\text{kN}$ na direção do eixo $e_3$ . . . . .	35
4.4	Comparação das soluções numéricas $M_3$ e analítica $M_{3e}$ da componente do momento fletor em relação ao eixo $e_3$ de uma viga engastada e livre, sujeita a uma carga distribuída $F_3 = -5,0\text{kN}$ na direção do eixo $e_3$ . . . . .	36
4.5	Comparação das soluções numéricas $N_2$ e analítica $N_{2e}$ da componente dos esforços cisalhantes na direção $e_2$ de uma viga engastada e livre, sujeita a uma carga distribuída $F_3 = -5,0\text{kN}$ na direção do eixo $e_3$ . . . . .	36
4.6	Representação esquemática de uma hélice engastada sujeita a uma carga concentrada $F_3$ aplicada na sua extremidade livre. . . . .	38

4.7	Comparação das soluções numéricas $U_1$ e analítica $U_{1e}$ da componente do deslocamento na direção $e_1$ de uma hélice simplesmente engastada, sujeita a uma carga concentrada $F_3 = 1,0\text{kN}$ aplicada na sua extremidade livre, com curvatura e torção $\gamma = \mu = \sqrt{2\pi}$ , respectivamente. . . . .	38
4.8	Comparação das soluções numéricas $U_2$ e analítica $U_{2e}$ da componente do deslocamento na direção $e_2$ de uma hélice simplesmente engastada, sujeita a uma carga concentrada $F_3 = 1,0\text{kN}$ aplicada na sua extremidade livre, com curvatura e torção $\gamma = \mu = \sqrt{2\pi}$ , respectivamente. . . . .	39
4.9	Comparação das soluções numéricas $U_3$ e analítica $U_{3e}$ da componente do deslocamento na direção $e_3$ de uma hélice simplesmente engastada, sujeita a uma carga concentrada $F_3 = 1,0\text{kN}$ aplicada na sua extremidade livre, com curvatura e torção $\gamma = \mu = \sqrt{2\pi}$ , respectivamente. . . . .	39
4.10	Comparação das soluções numéricas $\theta_1$ e analítica $\theta_{1e}$ da componente da rotação em relação ao eixo $e_1$ de uma hélice simplesmente engastada, sujeita a uma carga concentrada $F_3 = 1,0\text{kN}$ aplicada na sua extremidade livre, com curvatura e torção $\gamma = \mu = \sqrt{2\pi}$ , respectivamente. . . . .	40
4.11	Comparação das soluções numéricas $\theta_2$ e analítica $\theta_{2e}$ da componente da rotação em relação ao eixo $e_2$ de uma hélice simplesmente engastada, sujeita a uma carga concentrada $F_3 = 1,0\text{kN}$ aplicada na sua extremidade livre, com curvatura e torção $\gamma = \mu = \sqrt{2\pi}$ , respectivamente. . . . .	40
4.12	Comparação das soluções numéricas $\theta_3$ e analítica $\theta_{3e}$ da componente da rotação em relação ao eixo $e_3$ de uma hélice simplesmente engastada, sujeita a uma carga concentrada $F_3 = 1,0\text{kN}$ aplicada na sua extremidade livre, com curvatura e torção $\gamma = \mu = \sqrt{2\pi}$ , respectivamente. . . . .	41
4.13	Comparação das soluções numéricas $M_1$ e analítica $M_{1e}$ da componente do momento em relação ao eixo $e_1$ de uma hélice simplesmente engastada, sujeita a uma carga concentrada $F_3 = 1,0\text{kN}$ aplicada na sua extremidade livre, com curvatura e torção $\gamma = \mu = \sqrt{2\pi}$ , respectivamente. . . . .	41
4.14	Comparação das soluções numéricas $M_2$ e analítica $M_{2e}$ da componente do momento em relação ao eixo $e_2$ de uma hélice simplesmente engastada, sujeita a uma carga concentrada $F_3 = 1,0\text{kN}$ aplicada na sua extremidade livre, com curvatura e torção $\gamma = \mu = \sqrt{2\pi}$ , respectivamente. . . . .	42
4.15	Comparação das soluções numéricas $M_3$ e analítica $M_{3e}$ da componente do momento em relação ao eixo $e_3$ de uma hélice simplesmente engastada, sujeita a uma carga concentrada $F_3 = 1,0\text{kN}$ aplicada na sua extremidade livre, com curvatura e torção $\gamma = \mu = \sqrt{2\pi}$ , respectivamente. . . . .	42

4.16	Comparação das soluções numéricas $N_1$ e analítica $N_{1e}$ da componente dos esforços cisalhantes na direção $e_1$ de uma hélice simplesmente engastada, sujeita a uma carga concentrada $F_3 = 1,0\text{ kN}$ aplicada na sua extremidade livre, com curvatura e torção $\gamma = \mu = \sqrt{2\pi}$ , respectivamente. . . . .	43
4.17	Comparação das soluções numéricas $N_2$ e analítica $N_{2e}$ da componente dos esforços cisalhantes na direção $e_2$ de uma hélice simplesmente engastada, sujeita a uma carga concentrada $F_3 = 1,0\text{ kN}$ aplicada na sua extremidade livre, com curvatura e torção $\gamma = \mu = \sqrt{2\pi}$ , respectivamente. . . . .	43
4.18	Comparação das soluções numéricas $N_3$ e analítica $N_{3e}$ da componente dos esforços cisalhantes na direção $e_3$ de uma hélice simplesmente engastada, sujeita a uma carga concentrada $F_3 = 1,0\text{ kN}$ aplicada na sua extremidade livre, com curvatura e torção $\gamma = \mu = \sqrt{2\pi}$ , respectivamente. . . . .	44
4.19	Representação tridimensional da estrutura interconectada de seção tubular vazada, sob a ação das cargas concentradas $F'_3 = -600\text{ N}$ e $F''_3 = -200\text{ N}$ . . . . .	45
4.20	Configuração deformada da estrutura, quando aplicadas cargas concentradas $F'_3 = -600\text{ N}$ e $F''_3 = -200\text{ N}$ . . . . .	46
4.21	Rotação ao longo da estrutura, em decorrência da aplicação das cargas concentradas $F'_3 = -600\text{ N}$ e $F''_3 = -200\text{ N}$ . . . . .	46
4.22	Variação da componente $M_1$ do momento em relação ao eixo $e_1$ , em decorrência da aplicação das cargas concentradas $F'_3 = -600\text{ N}$ e $F''_3 = -200\text{ N}$ . . . . .	46
4.23	Variação da componente $M_2$ do momento em relação ao eixo $e_2$ , em decorrência da aplicação das cargas concentradas $F'_3 = -600\text{ N}$ e $F''_3 = -200\text{ N}$ . . . . .	47
4.24	Variação da componente $M_3$ do momento em relação ao eixo $e_3$ , em decorrência da aplicação das cargas concentradas $F'_3 = -600\text{ N}$ e $F''_3 = -200\text{ N}$ . . . . .	47
4.25	Variação da componente $N_1$ dos esforços cisalhantes na direção do eixo $e_1$ , em decorrência da aplicação das cargas concentradas $F'_3 = -600\text{ N}$ e $F''_3 = -200\text{ N}$ . . . . .	47
4.26	Variação da componente $N_2$ dos esforços cisalhantes na direção do eixo $e_2$ , em decorrência da aplicação das cargas concentradas $F'_3 = -600\text{ N}$ e $F''_3 = -200\text{ N}$ . . . . .	48
4.27	Variação da componente $N_3$ dos esforços cisalhantes na direção do eixo $e_3$ , em decorrência da aplicação das cargas concentradas $F'_3 = -600\text{ N}$ e $F''_3 = -200\text{ N}$ . . . . .	48

# Lista de Tabelas

4.1	Propriedades da viga . . . . .	34
4.2	Propriedades da estrutura . . . . .	45

# Lista de Abreviaturas

PPGMMC	Programa de Pós-graduação em Modelagem Matemática e Computacional, p. 1
MEF	Método dos Elementos Finitos, p. 51

# Lista de Símbolos

$\mathbb{R}^3$	Espaço tridimensional, p. 5
$\mathbb{R}^2$	Espaço bidimensional, p. 5
$\Omega$	Domínio, p. 5
$\bar{I}$	Intervalo definido por $\bar{I} = (0, L)$ , p. 5
$\bar{\Omega}$	Fecho na fronteira $\partial\Omega$ com simetria nos planos $e_1 e_2$ e $e_1 e_3$ , p. 5
$L$	Comprimento de viga, p. 5
$b$	Espessura da viga, p. 5
$h$	Altura da viga, p. 5
$\sigma$	Vetor tensão, p. 5
$\varepsilon$	Vetor deformação, p. 5
$E$	Módulo de Young, p. 6
$I$	Momento de inércia, p. 6
$\mathbf{u}$	Vetor deslocamento, p. 6
$u_1, u_2, u_3$	Componentes do vetor deslocamento, p. 6
$\theta$	Vetor rotação devido ao efeito de flexão, p. 7
$\theta_1, \theta_2, \theta_3$	Componentes do vetor rotação devido ao efeito de flexão, p. 7
$\beta$	Vetor rotação devido ao efeito cisalhante, p. 7
$\beta_1, \beta_2, \beta_3$	Componentes do vetor rotação devido ao efeito cisalhante, p. 7
$\mathbf{F}$	Vetor de carga, p. 8
$F_1, F_2, F_3$	Componentes do vetor de carga, p. 8



$\Pi$	Funcional de energia potencial, p. 9
$U_i$	Energia de deformação interna , p. 9
$U_e$	Energia potencial devido as forças externas , p. 9
$\Delta x$	Elemento infinitesimal na direção do eixo $e_1$ , p. 9
$\Delta y$	Elemento infinitesimal na direção do eixo $e_2$ , p. 9
$\Delta z$	Elemento infinitesimal na direção do eixo $e_3$ , p. 9
$d\varepsilon_1$	Deformação infinitesimal na direção do eixo $e_1$ , p. 10
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Componentes do vetor tensão, p. 10
$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$	Componentes do vetor deformação, p. 10
$dA$	Elemento infinitesimal de área, p. 10
$dV$	Elemento infinitesimal de volume, p. 10
$\mathbf{V}$	Vetor de tensão axial, p. 13
$V_1, V_2, V_3$	Componentes do vetor tensão axial, p. 13
$\mathbf{M}$	Vetor dos esforços de flexão e torção, p. 13
$M_1, M_2, M_3$	Componentes do vetor dos esforços de flexão e torção, p. 13
$\mathbf{N}$	Vetor dos esforços cisalhantes e extensão, p. 13
$N_1, N_2, N_3$	Componentes do Vetor dos esforços cisalhantes e extensão, p. 13
$G$	Módulo cisalhante, p. 17
$\kappa$	Coefficientes de correção, p. 17
$\nu$	Coefficiente de Poisson, p. 20
$\mathcal{C}$	Curva suficientemente regular coincidente com a linha que liga os centróides das seções transversais da viga, p. 40
$\mathbf{E}_i$	Vetor da base intrínseca na configuração indeformada, com $i = 1, 2, 3$ , p. 40
$s$	Comprimento de arco, p. 40
$\mathbf{E}_1$	Vetor tangencial, p. 40

$\mathbf{E}_2$	Vetor normal, p. 41
$\mathbf{E}_3$	Vetor birnormal, p. 41
$\gamma(s)$	Função espacial que representa curvatura, p. 41
$\mu(s)$	Função espacial que representa torção, p. 41
$\mathbf{r}$	Vetor associado a uma partícula da viga na configuração de referência, p. 41
$\mathbf{v}$	Medidas das deformações cisalhantes e o alongamento ou encurtamento da viga, p. 41
$\Psi$	Matriz das componentes de $\mathbf{v}$ , p. 42
$\delta(s)$	Função que associa deformações axiais e de cisalhamento, p. 44
$\eta(s)$	Função que associa as flexões e torções, p. 44
$\mathbf{D}_u, \mathbf{D}_\theta$	Especializações do tensor elasticidade da viga, p. 45
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais, p. 45
$I_1, I_2$	Momentos de inércia em relação ao eixos $\mathbf{E}_1$ e $\mathbf{E}_2$ , p. 45
$J$	Momento polar de inércia, p. 45
$\kappa_1, \kappa_2$	Coefficientes de correção que compensam a distribuição não uniforme da tensão cisalhante em relação ao eixos $\mathbf{E}_1$ e $\mathbf{E}_2$ , p. 45
$A_1, A_2$	Áreas corrigidas pelo fatores de correção $\kappa_1$ e $\kappa_2$ em relação aos eixos $\mathbf{E}_1$ e $\mathbf{E}_2$ , p. 45
$\eta_1, \eta_2, \eta_3$	componentes das deformações axiais e de cisalhamento, p. 96
$\delta_1, \delta_2, \delta_3$	componentes das deformações por flexões e torsões, p. 96

# Introdução

Historicamente, estruturas como vigas, pilares e pórticos têm sido amplamente utilizados em construções de pontes, aquedutos, edifícios, entre outros. Estas estruturas são projetadas para suportar esforços de flexão, tração, compressão e torção ou combinações entre eles. De modo geral, o comportamento desses tipos de estruturas espaciais é representada por modelos unidimensionais, sendo aqui referidos por estruturas flexíveis unidimensionais.

Além das aplicações em construções civis, os modelos de estruturas flexíveis unidimensionais têm sido amplamente aplicados em outras áreas, como biologia, engenharia espacial, indústria de extração de petróleo, entre outras. Em aplicações subaquáticas, por exemplo, aplicam-se esses modelos para analisar os efeitos de torção e tensões nos dutos submarinos que transportam petróleo da plataforma até o continente. De modo geral, os efeitos de torção nesses equipamentos constituem um problema contínuo e recorrente. O processo não é simples, e ocorre devido às correntes marítimas, que geram uma ação combinada de torção e tração nos dutos, fazendo com que eles se movimentem e gerem dobras. Esse problema foi analisado por Ross (1977) [1], que propôs um modelo baseado em estruturas flexíveis unidimensionais para analisar as combinações críticas de tensão e torção nesses cabos, apresentando resultados que evitam a ocorrência de falhas.

Na engenharia espacial, os modelos de estruturas flexíveis unidimensionais têm sido utilizados para analisar os efeitos de deformações sofridos por cabos que conectam veículos espaciais a outros corpos em órbita, como estações, satélites e até mesmo os próprios astronautas. Neste contexto, Aslanov (2012) [2] desenvolveu um modelo que analisa a tensão e torção sofridas por estes cabos durante o transporte de carga. Valverde *et al.* (2003) [3] apresentaram um modelo que analisa o comportamento de flexão de cabos submetidos a interações eletromagnéticas. Estes, por sua vez, são utilizados para trazer à Terra detritos do espaço (fragmentos de veículos espaciais, satélites abandonados) que possam comprometer futuros voos espaciais. Um exemplo disso é o chamado *Short Electrodynamic Tether (SET)*, proposto pela *European Space Agency*. O SET é uma estrutura extremamente flexível que orbita a Terra com seu eixo de menor inércia apontado para o plano normal da sua órbita. Esta estrutura, por ser condutora, sofre ação do efeito Faraday devido à interação com o campo magnético terrestre.

Dessa forma, o SET modifica sua trajetória orbital em função da sua interação com o campo magnético da Terra, alterando sua velocidade de giro em torno de seu eixo de menor inércia [3].

Em estudos biológicos, modelos de estruturas flexíveis unidimensionais têm sido utilizado para analisar o comportamento da molécula do DNA, que é caracterizada por ter uma estrutura helicoidal de fita dupla, cujo emaranhamento dos filamentos que compõem essa fita está sujeita a flexões e torções (PHISET *et al.*, 2003) [4]. Estas estruturas são resultados das ações das enzimas presentes nos processos de replicação e transição de material genético de uma célula (MENZEL *et al.*, 1994) [5].

Como se pode perceber, o modelo de estruturas flexíveis unidimensionais é amplamente utilizado para descrever o comportamento de uma ampla variedade de elementos estruturais em diversas aplicações. Embora seja uma abordagem simplificada, muitos problemas práticos podem ser adequadamente analisados usando esse tipo de modelo. No entanto, a solução analítica para este tipo de modelo é um processo desafiador, especialmente quando as equações diferenciais que descrevem o comportamento dessas estruturas são complexas e não lineares. Em muitos casos, mesmo para problemas relativamente simples, não há soluções analíticas conhecidas, o que torna necessário o uso de métodos numéricos para obter soluções aproximadas. É aí que entram as ferramentas computacionais, como o Método dos Elementos Finitos e outros métodos numéricos, que são capazes de resolver numericamente as equações diferenciais complexas que surgem ao modelar estruturas flexíveis unidimensionais.

Nesse cenário, uma maneira eficaz de abordar problemas desse tipo é por meio da aplicação de formulações mistas. Nessa abordagem, empregam-se as equações de equilíbrio e constitutivas do modelo, associando variáveis a diferentes campos. Isso resultou no aumento do número de variáveis, cada uma com propriedades físicas distintas. Dessa forma, obtém-se um maior controle sobre a qualidade da solução dos campos envolvidos, resultando em aprimoramento na qualidade das soluções obtidas.

Nesta linha, destacam-se as contribuições de Arnould (1981) [1], que analisou o problema da viga de Timoshenko no plano, mostrando que a formulação cinemática dá origem a uma convergência não uniforme, e que a formulação mista dá origem a aproximações com taxas quase ótimas, independente do parâmetro de esbeltez; Loula et al. (1987b) [15] introduziram uma formulação mista de Petrov-Galerkin, ou Galerkin com mínimos quadrados para a construção das aproximações por elementos finitos, para resolver o problema da viga de Timoshenko no plano; Loula et al. (1987a) [22] aplicaram esta formulação para investigar arcos, introduzindo uma formulação variacional fundamentada no princípio de Hellinger-Reissner. Nessa abordagem, as variáveis independentes incluem esforços generalizados (momentos e esforços axiais) e deslocamentos generalizados (deslocamentos e rotações). Além disso, eles introduziram uma formulação em elementos finitos mistos e estabilizados; Arunakirinathar

(1991) [3] desenvolveu uma formulação variacional mista baseada em funcionais bilineares para analisar o processo de deformação sofrida por uma viga de geometria qualquer no espaço tridimensional; Santos (2007) [28] investigou o processo de deformação de barras elásticas de Timoshenko com geometria arbitrária no espaço tridimensional, utilizando o método dos elementos finitos mistos estabilizados proposto por Loula et al.

Conforme é sabido, o método dos Elementos Finitos, fundamentado na formulação clássica de Galerkin, tem se destacado como uma ferramenta crucial na obtenção de soluções numéricas. Entretanto, é fato que tais aproximações podem não convergir de maneira uniforme para a solução desejada, devido ao surgimento do processo, hoje bem conhecido, do “trancamento de solução” ou “shear locking”. Este fenômeno surge em alguns casos específicos de análise, especialmente quando se utilizam funções de interpolação de baixa ordem e a estrutura possui uma seção transversal muito esbelta (por exemplo, placas muito finas ou vigas muito estreitas). Tais situações provocam perda considerável de precisão da solução.

Com base no que foi apresentado, este trabalho tem como objetivo aplicar o método dos elementos finitos mistos estabilizados, baseado no princípio de Hellinger-Reissner, para obter aproximações para o problema da viga de Timoshenko, considerando que esta seja composta por material elástico e isotrópico sob regime de pequenos deslocamentos e deformações. Além disso, considera-se esta estrutura com geometria arbitrária no espaço tridimensional em equilíbrio estático.

Este trabalho está estruturado em quatro capítulos: no Capítulo 1 são apresentadas noções básicas da teoria clássica dos modelos de vigas de Euler-Bernoulli e Timoshenko; no Capítulo 2, expandem-se as definições apresentadas no Capítulo 1, introduzindo noções básicas de geometria diferencial no espaço tridimensional; no Capítulo 3, discute-se o método dos elementos finitos mistos estabilizados, baseado no princípio de Hellinger-Reissner; e, por último, no Capítulo 4, são apresentados os resultados obtidos via formulação variacional desenvolvida no Capítulo 3 para a estrutura de viga de Timoshenko com diferentes geometrias.

# Capítulo 1

## Teoria clássica de viga de Euler-Bernoulli e de Timoshenko

A concepção de vigas teve início com Leonardo da Vinci, que concebeu um modelo considerando seções transversais retangulares. Ele observou que, ao serem submetidas à flexão, as vigas apresentam tensões de tração e compressão nas fibras externas, opostas, respectivamente. Da Vinci propôs que essas tensões possuíam magnitudes iguais nas fibras inferiores e superiores, o que implica que a linha média da viga permanece inalterada, sem sofrer deformações longitudinais durante a flexão.

Passados 500 anos, Galileu Galilei propôs um modelo para determinar a capacidade de carga transversal aplicada sobre a viga. No entanto, presumiu, de forma incorreta, que a carga aplicada na seção transversal da viga desenvolveria uma distribuição uniforme de tensões.

Em meados do século XVIII, Leonhard Euler e Daniel Bernoulli propuseram um modelo que descrevia o comportamento da deformação das vigas. Em 1750, Euler apresentou sua teoria sobre a flexão de vigas em sua obra *"Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti"* (Método para encontrar curvas com propriedades máximas ou mínimas, ou solução de problemas isoperimétricos em sentido amplo). Nesta obra, Euler expôs diversas soluções relacionadas à teoria da flexão e suas equações diferenciais, descrevendo o comportamento de vigas submetidas a carregamentos transversais. Em 1759, Daniel Bernoulli também fez importantes contribuições para a teoria das vigas em seu trabalho *"Hydrodynamica"*. Nesta obra, Bernoulli ampliou as ideias de Euler, e contribuiu para o desenvolvimento das equações que hoje são conhecidas como as equações de Euler-Bernoulli.

Posteriormente, por volta de 1921, Timoshenko apresentou uma versão modificada da teoria de vigas de Euler-Bernoulli, incorporando os efeitos do cisalhamento. Assim, surgiu a teoria de viga de Timoshenko, que considera a existência de rotação em cada ponto da viga, adicionado a contribuição da deformação angular decorrente do cisa-

lhamento.

Como se pode observar, esses modelos foram fundamentais para o desenvolvimento da teoria de vigas e para a engenharia estrutural como um todo. A contribuição desses trabalhos ilustra como ideias e conceitos avançados surgiram ao longo da história, ajudando a estabelecer as bases para as teorias estruturais modernas utilizadas atualmente.

## 1.1 Considerações iniciais

Define-se viga como um corpo fechado  $\mathcal{B}$ , inserido no espaço euclidiano tridimensional  $\mathbb{R}^3$ , dotado de um sistema de eixos ortogonais  $e_i$ , com  $i = \{1, 2, 3\}$ , correspondentes às coordenadas cartesianas  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente. Essa estrutura é delimitada por um domínio unidimensional  $\Omega = ]0, L[$ , onde  $L$  representa o comprimento da viga;  $\overline{\Omega}$  denota o fecho de  $\Omega$  e  $\partial\Omega$  sua fronteira. As dimensões transversais da viga, representadas pela largura  $b$  e altura  $h$ , são significativamente menores que o comprimento  $L$ , caracterizando a geometria alongada típica da viga. Adota-se como configuração de referência o estado indeformado da viga, isto é, a condição inicial em que não existem esforços internos nem forças externas aplicadas, servindo de base para a análise de deformações e tensões subsequentes.

No estudo de vigas, diferentes modelos são utilizados para analisar e projetar sistemas estruturais. A Fig. 1.1 apresenta um esquema representativo de uma viga retilínea de comprimento  $L$ , prismática e biapoada, descrita no espaço tridimensional. Nessa configuração, a viga está submetida a uma força axial  $F_1$ , aplicada ao longo da direção longitudinal  $e_1$ , e a um carregamento distribuído transversal  $F_3$  atuando na direção  $e_3$ , perpendicular ao eixo da viga.

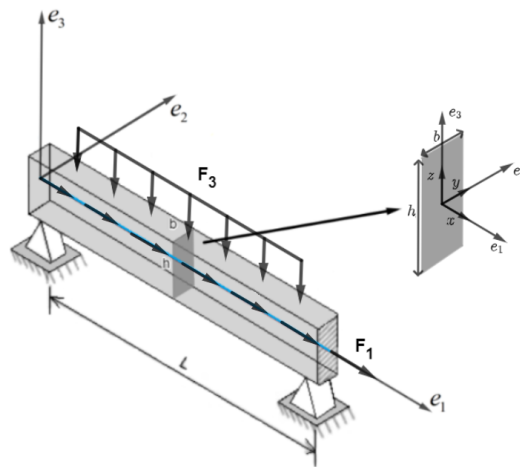


Figura 1.1: Modelo de uma viga prismática de comprimento  $L$ , de largura  $b$  e altura  $h$  com seção transversal retangular, descrita no  $\mathbb{R}^3$ . O eixo global  $e_1$  representa a direção longitudinal e os eixos  $e_2$  e  $e_3$ , as direções transversais da viga.

Denotamos por  $A(x) \subset \mathbb{R}^2$  a área da seção transversal da viga em uma posição  $x \in \Omega$ , e  $\bar{A}(x) \subset \mathbb{R}^2$  o fecho. A junção de todos os centroides das áreas,  $A(x)$ , define a curva de centroides que, nesse modelo, será considerada coincidente com a linha neutra da viga. Sejam  $b$  e  $h$  as dimensões máximas da largura e da altura das seções transversais, respectivamente, de modo que, para todo  $(y, z) \in \bar{A}$ , tem-se  $\|y\| < b$  e  $\|z\| < h$ . Assim, o domínio  $\Omega$  fica caracterizado por:

$$\Omega = \{(y, z) \in \bar{A} \subset \mathbb{R}^2, x \in [0, L] \subset \mathbb{R}\}. \quad (1.1)$$

Neste capítulo, descreveremos as duas teorias clássicas de modelos de vigas no plano submetidas a cargas arbitrária: a teoria de Euler-Bernoulli e a teoria de Timoshenko. Ambas as teorias compartilham as seguintes hipóteses:

### Hipóteses 1.1

- (i) Os modelos consideram pequenos deslocamentos e pequenas deformações;
- (ii) As propriedades constitutivas dos materiais são homogêneas e isotrópicas, fazendo com que o eixo da viga coincida com a linha neutra;
- (iii) Os deslocamentos laterais ao longo do eixo  $\mathbf{e}_2$  são nulos ( ver Fig.1.1 );
- (iv) As seções, inicialmente planas antes da deformação, permanecem planas após a deformação.

A Fig. 1.1 apresenta um esquema simplificado da viga em seu estado indeformado. Note que a viga encontra-se inicialmente reta, com sua linha neutra coincidindo com o eixo  $\mathbf{e}_1$ , sendo submetida a uma força axial  $F_1$  na direção  $\mathbf{e}_1$  e a uma carga distribuída  $F_3$  na direção  $\mathbf{e}_3$ . Para analisarmos seu comportamento cinemático, denotamos por  $\mathbf{u}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  o campo de deslocamento em qualquer seção da viga, definido por:

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \bar{u}_1(x, y, z) \mathbf{e}_1 + \bar{u}_2(x, y, z) \mathbf{e}_2 + \bar{u}_3(x, y, z) \mathbf{e}_3, \quad (1.2)$$

onde  $\bar{u}_1(x, y, z)$ ,  $\bar{u}_2(x, y, z)$  e  $\bar{u}_3(x, y, z)$  representam as componentes dos deslocamentos na direção dos vetores  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  e  $\mathbf{e}_3$ , respectivamente.

A caracterização dos campos de deslocamento da viga pode ser realizada a partir da análise das interações entre os efeitos das forças axiais e transversais atuantes. Para compreender esse comportamento, consideramos um elemento. Para compreender esse comportamento, consideramos um elemento diferencial de uma viga deformada ao longo do eixo  $e_1$ , em uma posição  $x$ , com deslocamentos e rotações variando ao longo de seu comprimento, conforme mostrado na Fig. 1.2.

Nesse esquema, o deslocamento vertical da fibra média da viga é representada por  $u_3(x)$  e a linha neutra é descrita por sua derivada  $\frac{du_3(x)}{dx}$ . Em uma posição deslocada de



$dx$  ao longo do eixo  $e_1$ , o deslocamento é  $u_3(x) + \frac{du_3(x)}{dx} dx$ . A rotação da linha neutra da viga em relação ao eixo  $e_2$  é denotada por  $\theta_2(x)$ , enquanto  $\beta_2(x)$  representa o ângulo de inclinação relativo da seção transversal em relação ao eixo deformado.

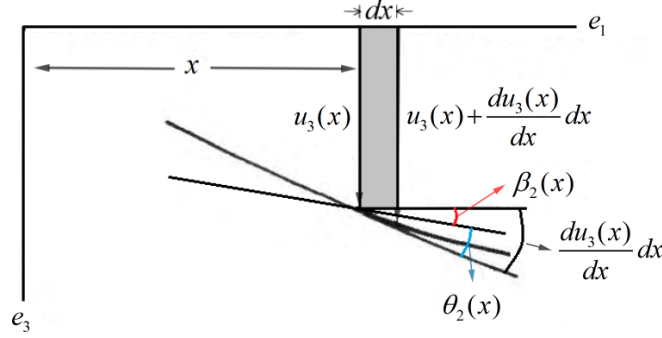


Figura 1.2: Representação da curvatura de flexão da viga, indicando o deslocamento transversal  $u_3(x)$  e a inclinação  $\frac{du_3(x)}{dx}$  da linha neutra em um ponto  $x$ .

De acordo com as hipóteses 1.1, o campo de deslocamento  $\mathbf{u}(x, y, z)$ , descrito pela Eq.(1.2), para uma viga sujeita à ação de forças axiais e transversais pode ser expresso como:

$$\bar{u}_1(x, y, z) = u_a(x) - z\theta_2(x), \quad (1.3)$$

$$\bar{u}_2(x, y, z) = 0, \quad (1.4)$$

$$\bar{u}_3(x, y, z) = u_3(x). \quad (1.5)$$

Considerando essas hipóteses comuns aos modelos de vigas de Euler-Bernoulli e Timoshenko, nas próximas seções apresentaremos as hipóteses adicionais que os distinguem e desenvolveremos as equações características de cada modelo.

## 1.2 Modelo clássico de viga de Euler-Bernoulli

A teoria clássica da viga de Euler-Bernoulli incorpora à hipóteses 1.1, em particular a suposição de que as seções transversais, inicialmente planas e ortogonais ao eixo  $e_1$  na configuração indeformada, permanecem planas e ortogonais a este mesmo eixo após a deformação. Assim, temos que:

$$\theta_2 = \frac{du_3(x)}{dx}, \quad (1.6)$$

isto é, a derivada da linha neutra da viga é dada simplesmente pela rotação devido à flexão, obtendo-se das Eqs. (1.3–1.5)

$$\bar{u}_1(x, y, z) = u_a(x) - z \frac{du_3(x)}{dx}, \quad (1.7)$$

$$\bar{u}_2(x, y, z) = 0, \quad (1.8)$$

$$\bar{u}_3(x, y, z) = u_3(x), \quad (1.9)$$

onde  $u_a$  representa o deslocamento na direção longitudinal e  $u_3$  o deslocamento na direção transversal.

Para descrever as equações de equilíbrio do modelo da viga de Euler-Bernoulli, vamos usar o funcional de energia potencial total. Dessa forma, denotando por  $\Pi^{EB}$  a energia potencial total do sistema, definida como a soma da energia de deformação interna  $U_i$  com a energia potencial das forças externas  $U_e$ :

$$\Pi^{EB} = U_i + U_e, \quad (1.10)$$

onde:

$$U_i = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega, \quad (1.11)$$

$$U_e = \int_{\Omega} \mathbf{f} \mathbf{u} d\Omega. \quad (1.12)$$

sendo  $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$  o tensor das tensões,  $\boldsymbol{\varepsilon} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$  o tensor das deformações e  $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  o campo de forças de corpo.

Fazendo uso do campo de deslocamentos, Eqs. (1.7–1.9), especializado para o modelo de vigas de Euler-Bernoulli, temos que o tensor  $\nabla \mathbf{u}(x)$  será dado por:

$$\nabla \mathbf{u}(x) = \begin{bmatrix} \frac{du_a(x)}{dx} - z \frac{d^2 u_3(x)}{dx^2} & 0 & -\frac{du_3(x)}{dx} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{du_3(x)}{dx} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.13)$$

Como estamos tratando de pequenos deslocamentos e deformações, temos que o tensor de deformação  $\boldsymbol{\varepsilon}(x)$ , especializado para o modelo, é dado por:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}(x) &= \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}(x) + \nabla \mathbf{u}(x)^T) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{du_a(x)}{dx} - z \frac{d^2 u_3(x)}{dx^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Note que, no cálculo da energia interna Eq.(1.11), as únicas componentes do tensor  $\sigma(x)$  que influenciam no funcional são aquelas associadas às componentes não nulas de  $\varepsilon(x)$ , isto é, a componente  $\sigma_{11}(x)$ . Com isso, o trabalho interno será dado por:

$$\begin{aligned} U_i &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{11}(x) \varepsilon_{11}(x) d\Omega \\ &= \frac{b}{2} \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11}(x) \varepsilon_{11}(x) dz dx. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Segue da relação constitutiva elástica e linear entre a tensão e a deformação que

$$\sigma_{11}(x) = E \varepsilon_{11}(x), \quad (1.16)$$

onde  $E$  é o módulo de Young. Com isso, temos:

$$\begin{aligned} U_i &= \frac{b}{2} \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} E \left( \frac{du_a(x)}{dx} - z \frac{d^2 u_3(x)}{dx^2} \right)^2 dz dx \\ &= \int_0^L \left[ \frac{EA}{2} \left( \frac{du_a(x)}{dx} \right)^2 + \frac{EI}{2} \left( \frac{d^2 u_3(x)}{dx^2} \right)^2 \right] dx, \end{aligned} \quad (1.17)$$

com momento de inércia  $I = \frac{bh^3}{12}$  e área  $A = bh$  correspondentes a uma seção transversal retangular.

Para calcular a energia potencial externa, é necessário considerar a ação das cargas axiais  $F_1$  e transversais  $F_3$  na viga. A energia potencial externa para este modelo é dada por:

$$U_e = - \int_0^L F_1(x) \frac{du_a(x)}{dx} dx - \int_0^L F_3(x) u_3(x) dx, \quad (1.18)$$

onde a primeira integral representa a energia potencial devido à carga axial  $F_1$  atuando ao longo da viga na direção longitudinal, isto é:

$$\int_0^L F_1(x) \frac{du_a(x)}{dx} dx = F_1(x) [u_a(L) - u_a(0)]. \quad (1.19)$$

Por outro lado, a segunda integral representa a energia potencial das cargas transversais  $F_3(x)$  atuantes na direção vertical. Dessa forma, realizando o somatório destas contribuições, obtemos o funcional de energia potencial total para o modelo de vigas de Euler-Bernoulli:

$$\Pi^{EB} = \int_0^L \left[ \frac{EA}{2} \left( \frac{du_a(x)}{dx} \right)^2 + \frac{EI}{2} \left( \frac{d^2 u_3(x)}{dx^2} \right)^2 - F_1(x) \frac{du_a(x)}{dx} - F_3 u_3(x) \right] dx. \quad (1.20)$$

A partir da formulação variacional do problema, fundamentada no princípio da minimização do funcional da energia potencial total ( $\delta\Pi^{EB} = 0$ ), derivou-se as equações de equilíbrio correspondentes ao modelo de viga de Euler-Bernoulli. Esse processo conduz às equações de Euler-Lagrange, que governam o comportamento da estrutura sob flexão, desconsiderando os efeitos de cisalhamento. Como resultado, obtemos:

$$\frac{d}{dx} \left( EA \frac{du_a(x)}{dx} \right) = F_1, \quad (1.21)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 u_3(x)}{dx^2} \right) = F_3. \quad (1.22)$$

As condições de contorno associadas a este modelo podem ser resumidas da seguinte maneira:

**Condições de contorno cinemáticas**

**Condições de contorno naturais**

$$u_a(x) \text{ prescrita} \quad \text{ou} \quad EA \frac{du_a}{dx} = F_1 \quad (1.23)$$

$$\frac{du_3(x)}{dx} \text{ prescrita} \quad \text{ou} \quad EI \frac{d^2 u_3}{dx^2} = 0 \quad (1.24)$$

$$u_3(x) \text{ prescrita} \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dx} \left( EI \frac{d^2 u_3}{dx^2} \right) = 0 \quad (1.25)$$

Especializando a equação constitutiva 1.16 para o modelo de viga de Euler-Bernoulli, temos que o esforço axial  $N_1$  e o momento fletor  $M_2$  são dados, respectivamente, por:

$$N_1(x) = EA \frac{du_a(x)}{dx} \quad (1.26)$$

e

$$M_2(x) = -EI \frac{d^2 u_3(x)}{dx^2}. \quad (1.27)$$

A solução analítica das Equações (1.21) e (1.22), sujeitas às condições de contorno definidas em (1.23), (1.24) e (1.25), pode ser encontrada em (Fleischfresser [6], 2012) e (Assam [7], 2020). Nessas referências, os autores apresentam abordagens detalhadas para a resolução das equações de equilíbrio da vigas pelo modelo de Euler-Bernoulli, contemplando distintos tipos de carregamento e variações nas condições de contorno.

Nas discussões apresentadas até o momento, observamos que a teoria da viga de Euler-Bernoulli assume que as seções transversais da viga permanecem ortogonais à

linha neutra após a deformação, o que torna o modelo incapaz de estimar os efeitos do cisalhamento. No entanto, essa simplificação não é adequada para a modelagem de todos os tipos de vigas. Em casos como vigas curtas e vigas do tipo sanduíche, os efeitos do cisalhamento são significativamente relevantes. Com base nisso, Timoshenko propôs um ajuste na teoria de Euler-Bernoulli, que será discutido na próxima seção.

### 1.3 Modelo clássico de viga de Timoshenko

A teoria de vigas de Timoshenko compartilha das hipóteses apresentadas em (1.1), provenientes da teoria clássica de Euler-Bernoulli. No entanto, a hipótese relativa à cinemática na direção normal da viga, adquire um novo significado. As seções transversais, inicialmente planas e normais à linha neutra, permanecem planas à linha neutra, mas não necessariamente normais a esta linha. Essa suposição proporciona uma aproximação mais precisa da deformação real da seção transversal, especialmente em vigas espessas. Com base nessas hipóteses, a rotação da seção transversal pode ser escrita como:

$$\theta_2(x) = \frac{du_3(x)}{dx} - \beta_2(x), \quad (1.28)$$

Vale destacar que a rotação  $\theta_2(x)$  da seção transversal não coincide com a inclinação da linha neutra  $\frac{du_3(x)}{dx}$ , ao contrário do que ocorre na teoria de Euler-Bernoulli. Considerando que estamos interessados exclusivamente na deformação da viga submetida a cargas verticais, a equação cinemática do modelo assume a seguinte forma:

$$\bar{u}_1(x, y, z) = u_a(x) - z \left( \frac{du_3(x)}{dx} - \beta_2(x) \right), \quad (1.29a)$$

$$\bar{u}_2(x, y, z) = 0, \quad (1.29b)$$

$$\bar{u}_3 A(x, y, z) = u_3(x). \quad (1.29c)$$

Fazendo uso do nosso campo de deslocamentos Eqs. (1.29a–1.29c) especializado para o modelo de viga de Timoshenko, temos que o tensor  $\nabla \mathbf{u}(x)$  será dado por

$$\nabla \mathbf{u}(x) = \begin{bmatrix} \frac{du_a(x)}{dx} - z \frac{d}{dx} \left( \frac{du_3(x)}{dx} - \beta_2(x) \right) & 0 & - \left( \frac{du_3(x)}{dx} - \beta_2(x) \right) \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{du_3(x)}{dx} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.30)$$

Como resultado, o tensor de deformação  $\varepsilon(x)$ , especializado para o modelo de viga de

Timoshenko, é dado por:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}(x) &= \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}(x) + \nabla \mathbf{u}(x)^T) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{du_a(x)}{dx} - z \frac{d}{dx} \left( \frac{du_3(x)}{dx} - \beta_2(x) \right) & 0 & \frac{1}{2}\beta_2(x) \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\beta_2(x) & 0 & 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (1.31)$$

Sob o regime de pequenas deformações, e considerando a relação constitutiva para o cisalhamento válida nessas condições, temos a seguinte expressão:

$$\sigma_{13} = \sigma_{31} = 2G\varepsilon_{13}, \quad (1.32)$$

onde  $G$  é o módulo de cisalhamento. Assim, o tensor de tensões pode ser caracterizado da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\sigma}(x) = \begin{bmatrix} \frac{du_a(x)}{dx} - Ez \frac{d}{dx} \left( \frac{du_3(x)}{dx} - \beta_2(x) \right) & 0 & G\beta_2(x) \\ 0 & 0 & 0 \\ G\beta_2(x) & 0 & 0 \end{bmatrix}.\quad (1.33)$$

Com base nas expressões previamente definidas, podemos formular o funcional da energia potencial total associado ao campo de deformações da viga, conforme descrito pelo modelo de Timoshenko, como:

$$\Pi^T = U_i + U_c + U_e, \quad (1.34)$$

onde  $U_i$ ,  $U_c$  e  $U_e$  representam, respectivamente, a energia interna associada à deformação axial; à deformação por cisalhamento e o trabalho realizado pelas forças externas. Suas respectivas expressões são dadas por

$$U_i = \frac{1}{2}b \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11}(x) \varepsilon_{11}(x) dz dx, \quad (1.35)$$

$$U_c = b \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{31}(x) \varepsilon_{31}(x) dz dx, \quad (1.36)$$

$$U_e = - \int_0^L F_1(x) \frac{du_a(x)}{dx} dx - \int_0^L F_3(x) u_3(x) dx. \quad (1.37)$$

No contexto da formulação do modelo de viga de Timoshenko, que considera os efeitos da deformação por cisalhamento transversal, torna-se necessário a introdução de um fator de correção  $\kappa$ , com o objetivo de representar de forma mais precisa a distribuição não uniforme da tensão de cisalhamento ao longo da seção transversal.

Diversos trabalhos foram propostos para caracterizar este fator de correção. Dentre eles, destacamos o estudo conduzido por Gruttmann et al. (1999) [8], que emprega equações da elasticidade linear para determinar o valor de  $\kappa$ , e o método proposto por Cowper (1966) [9], que usa modelos matemáticos derivados de análises experimentais para calcular o coeficiente de cisalhamento  $\kappa$  em diversas geometrias. Assim, ao introduzir  $\kappa$  na Eq. (1.36), temos:

$$U_c = \kappa b \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{31}(x) \varepsilon_{31}(x) dz dx. \quad (1.38)$$

Com isso, a Eq.(1.34) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \Pi^T = & \frac{1}{2} b \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11}(x) \varepsilon_{11}(x) dz dx + \kappa b \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{31}(x) \varepsilon_{31}(x) dz dx \\ & - \int_0^L F_1(x) u_a(x) dx - \int_0^L F_3(x) u_3(x) dx \end{aligned} \quad (1.39)$$

Considerando os resultados obtidos nas Eqs. 1.16, 1.31 e 1.33, esta expressão assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \Pi^T = & \frac{1}{2} b \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} E (\varepsilon_{11}(x))^2 dz dx + \frac{1}{2} \kappa b G \int_0^L (\beta_2(x))^2 \int_{-h/2}^{h/2} dz dx \\ & - \int_0^L F_1(x) u_a(x) dx - \int_0^L F_3(x) u_3(x) dx. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Aplicando os resultados das equações (1.31) e (1.28), e considerando a área  $A(x) = A$ , para todo  $x \in [0, L]$ , temos:

$$\begin{aligned}
\Pi^T &= \frac{1}{2}b \int_0^L \left( \int_{-h/2}^{h/2} E \left( \frac{du_a(x)}{dx} - z \frac{d\theta_2(x)}{dx} \right)^2 dz \right) dx \\
&\quad + \frac{1}{2}\kappa AG \int_0^L \left( \frac{du_3(x)}{dx} - \theta_2(x) \right)^2 dx - \int_0^L F_1(x)u_a(x) dx - \int_0^L F_3(x)u_3(x) dx \\
&= \frac{1}{2}bE \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \left( \frac{du_a(x)}{dx} \right)^2 - 2z \frac{du_a(x)}{dx} \frac{d\theta_2(x)}{dx} + z^2 \left( \frac{d\theta_2(x)}{dx} \right)^2 \right] dz \\
&\quad + \frac{1}{2}\kappa AG \int_0^L \left( \frac{du_3(x)}{dx} - \theta_2(x) \right)^2 dx - \int_0^L F_1(x)u_a(x) dx - \int_0^L F_3(x)u_3(x) dx \\
&= \frac{1}{2}bE \left[ h \int_0^L \left( \frac{du_a(x)}{dx} \right)^2 dx + \frac{h^3}{12} \int_0^L \left( \frac{d\theta_2(x)}{dx} \right)^2 dx \right] \\
&\quad + \frac{1}{2}\kappa AG \int_0^L \left( \frac{du_3(x)}{dx} - \theta_2(x) \right)^2 dx - \int_0^L F_1(x)u_a(x) dx - \int_0^L F_3(x)u_3(x) dx.
\end{aligned} \tag{1.41}$$

Como podemos observar, o termo  $\frac{bh^3}{12}$  corresponde ao momento de inércia  $I$  da seção transversal retangular. Assim, a expressão anterior pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}
\Pi^T &= \frac{EA}{2} \int_0^L \left( \frac{du_a(x)}{dx} \right)^2 dx + \frac{EI}{2} \int_0^L \left( \frac{d\theta_2(x)}{dx} \right)^2 dx \\
&\quad + \frac{\kappa GA}{2} \int_0^L \left( \frac{du_3(x)}{dx} - \theta_2(x) \right)^2 dx - \int_0^L F_1(x)u_a(x) dx \\
&\quad - \int_0^L F_3(x)u_3(x) dx \\
&= \int_0^L \left[ \frac{EA}{2} \left( \frac{du_a(x)}{dx} \right)^2 + \frac{EI}{2} \left( \frac{d\theta_2(x)}{dx} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{\kappa GA}{2} \left( \frac{du_3(x)}{dx} - \theta_2(x) \right)^2 - F_1(x)u_a(x) - F_3(x)u_3(x) \right] dx.
\end{aligned} \tag{1.42}$$

A partir da formulação variacional do problema, fundamentada no princípio da minimização da energia potencial total ( $\delta\Pi^T = 0$ ), são obtidas as equações de equilíbrio correspondentes ao modelo da viga de Timoshenko. Esse processo conduz às equações de Euler-Lagrange, que governam o comportamento da estrutura sob flexão, considerando os efeitos de cisalhamento. Como resultado, obtêm-se as seguintes expressões:



$$EA \frac{d^2 u_a(x)}{dx^2} + F_1(x) = 0, \quad (1.43)$$

$$EI \frac{d^2 \theta_2(x)}{dx^2} + \kappa GA \left( \frac{du_3(x)}{dx} - \theta_2(x) \right) = 0, \quad (1.44)$$

$$\kappa GA \left( \frac{d^2 u_3(x)}{dx^2} - \frac{d\theta_2(x)}{dx} \right) + F_3(x) = 0. \quad (1.45)$$

As condições de contorno compatíveis com este modelo podem ser resumidas da seguinte forma:

**Condições de contorno cinemáticas**

**Condições de contorno naturais**

$$\theta_2(x) \text{ prescrita} \quad \text{ou} \quad EA \frac{d\theta_2(x)}{dx} = 0 \quad (1.46)$$

$$u_3(x) \text{ prescrita} \quad \text{ou} \quad \kappa GA \left( \frac{du_3(x)}{dx} - \theta_2(x) \right) = 0 \quad (1.47)$$

$$u_a(x) \text{ prescrita} \quad \text{ou} \quad EA \frac{du_a(x)}{dx} = 0 \quad (1.48)$$

Especializando as equações constitutiva 1.16 e 1.32 para o modelo de viga de Timoshenko, temos o esforço  $N_2(x)$  e momento  $M_2(x)$ , são dados, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} N_2(x) &= \int_{-h/2}^{h/2} \kappa \sigma_{13}(x) b dz \\ &= \kappa \sigma_{13}(x) (bh) \\ &= \kappa G \beta_2(x) A \\ &= \kappa G A \left( \frac{du_3(x)}{dx} - \theta_2(x) \right), \end{aligned} \quad (1.49)$$

$$\begin{aligned} M_2(x) &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11}(x) b z dz \\ &= \int_{-h/2}^{h/2} \left( -z \frac{d\theta_2(x)}{dx} \right) E z b dz \\ &= -Eb \frac{d\theta_2(x)}{dx} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz \\ &= -EI \frac{d\theta_2(x)}{dx}. \end{aligned} \quad (1.50)$$

Com isso, encerramos as formulações das teorias clássicas de vigas de Euler-Bernoulli e Timoshenko. No capítulo seguinte, será apresentada uma formulação capaz de descrever o comportamento de estruturas flexíveis modeladas como barras com geometria arbitrária. Para isso, serão introduzidas noções básicas de geometria diferencial, que permitem representar curvas no espaço tridimensional com precisão, fornecendo os conceitos matemáticos necessários para descrever a orientação, a curvatura e a torção da barra ao longo de sua trajetória. Essa abordagem possibilita o desenvolvimento de modelos mais gerais, capazes de representar adequadamente o processo de deformação em estruturas com geometria não retilínea.

## Capítulo 2

### Modelos de barras no espaço 3D

No capítulo anterior, apresentamos o modelo de flexão de vigas de Euler-Bernoulli clássico, incluindo os efeitos das forças axiais e, em seguida, estendemos este modelo considerando os efeitos do cisalhamento, recaindo no modelo de Timoshenko. Nesta seção, dando continuidade ao aprimoramento dos modelos, apresentamos as equações que descrevem o comportamento de uma barra de geometria arbitrária no espaço tridimensional, isto é, um modelo com comportamentos fora do plano, considerando o efeito do cisalhamento. Para isso, consideramos a barra (ver a figura 2.1), com sua linha neutra descrevendo uma curva no espaço, descrita pelo vetor posição  $\mathbf{r}(s) : \bar{I} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , com origem fixada em um ponto qualquer  $\mathbb{R}^3$ , dado por:

$$\mathbf{r}(s) = r_1(s)\mathbf{E}_1(s) + r_2(s)\mathbf{E}_2(s) + r_3(s)\mathbf{E}_3(s), \quad (2.1)$$

sendo  $I$  o intervalo aberto  $(0, L)$ ,  $\bar{I}$  seu fecho,  $s$  o comprimento de arco,  $\mathbf{E}_i(s) : \bar{I} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , com  $i = 1, 2, 3$ , os vetores que definem, em cada posição  $s$  da curva, uma base local ou intrínseca para a barra na configuração de referência e  $r_i(s)$  as componentes em relação a  $\mathbf{E}_i$ , respectivamente.

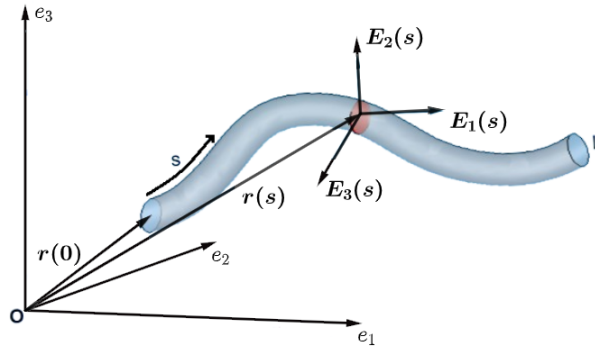


Figura 2.1: A representação no espaço tridimensional de uma barra de geometria arbitrária, de comprimento  $L$ , descrita por uma curva parametrizada  $\mathbf{r}(s)$ , onde  $s \in [0, L]$  representa o comprimento de arco, e  $\mathbf{r}(0)$  é sua origem. Em cada ponto  $s$  da curva, temos um sistema de coordenadas locais, descrito pelos vetores  $\mathbf{E}_1(s)$ ,  $\mathbf{E}_2(s)$  e  $\mathbf{E}_3(s)$ .

Os vetores  $\mathbf{E}_i(s)$  possuem as seguintes características

$$\|\mathbf{E}_i(s)\| = 1, \quad \mathbf{E}_i(s) \cdot \mathbf{E}_j(s) = \delta_{ij}, \quad \forall s \in \bar{I}, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{E}_1(s) = \frac{\mathbf{r}'(s)}{\|\mathbf{r}'(s)\|}, \quad \mathbf{E}_1(s) = \mathbf{E}_2(s) \times \mathbf{E}_3(s), \quad \forall s \in \bar{I}. \quad (2.3)$$

onde  $\|\cdot\|$  é a norma euclidiana,  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker. Nota-se que esta base se relaciona com a curvatura da barra, dada pela relação Eq.1.44, onde  $\mathbf{E}_1(s)$  é definido como o vetor tangente à curva em cada ponto  $s$ . Com isso,  $\mathbf{E}_2(s)$  e  $\mathbf{E}_3(s)$  tornam-se os vetores normal e binormal, respectivamente.

A partir da expressão (2.3), observamos que a derivada da curva  $\mathbf{r}(s)$  está relacionada à derivada espacial dos vetores da base intrínseca  $\mathbf{E}_i(s)$ , evidenciando a dependência do campo de direções locais ao longo do comprimento da barra. A caracterização da diferenciação destes vetores será estabelecida pelas equações de Serret-Frenet, as quais relacionam as derivadas dos vetores da base intrínseca com eles próprios, da seguinte forma:

$$\mathbf{E}_1'(s) = \gamma(s)\mathbf{E}_2(s), \quad \forall s \in \bar{I}, \quad (2.4)$$

$$\mathbf{E}_3'(s) = -\mu(s)\mathbf{E}_2(s), \quad \forall s \in \bar{I}, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{E}_2'(s) = \mu(s)\mathbf{E}_3(s) - \gamma(s)\mathbf{E}_1(s), \quad \forall s \in \bar{I}, \quad (2.6)$$

onde  $\gamma(s) : \bar{I} \rightarrow \mathbb{R}$  é o parâmetro de curvatura, o qual mede a taxa de variação do vetor tangente  $\mathbf{E}_1(s)$  em cada posição  $s$ , e  $\mu(s) : \bar{I} \rightarrow \mathbb{R}$  é o parâmetro de torção, o qual mede a taxa de variação do plano osculante (plano formado pelos vetores  $\mathbf{E}_3(s)$  e  $\mathbf{E}_1(s)$  em cada posição  $s$ ). As deduções das equações (2.4) a (2.6) encontram-se bem detalhadas em Stewart (2016)[10] ou Sauter (2022).

Neste contexto, tomando um vetor qualquer  $\mathbf{v} : \bar{I} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , descrito em função da base intrínseca  $\mathbf{E}_i(s)$  expressa por:

$$\mathbf{v}(s) = v_1(s)\mathbf{E}_1(s) + v_2(s)\mathbf{E}_2(s) + v_3(s)\mathbf{E}_3(s), \quad (2.7)$$

onde  $v_i$  são suas componentes, a diferenciação em relação a  $s$  é dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'(s) &= \dot{\mathbf{v}}(s) + \Psi \mathbf{v}(s) \\ &= \left( \frac{dv_1}{ds} - \gamma(s)v_2 \right) \mathbf{E}_1 + \left( \frac{dv_2}{ds} + \gamma(s)v_1 - \mu(s)v_3 \right) \mathbf{E}_2 + \left( \frac{dv_3}{ds} + \mu(s)v_2 \right) \mathbf{E}_3, \end{aligned} \quad (2.8)$$

com

$$\dot{\mathbf{v}}(s) = \frac{dv_1}{ds} \mathbf{E}_1 + \frac{dv_2}{ds} \mathbf{E}_2 + \frac{dv_3}{ds} \mathbf{E}_3 \quad (2.9)$$

e

$$\Psi = \begin{pmatrix} 0 & \gamma(s) & 0 \\ -\gamma(s) & 0 & \mu(s) \\ 0 & -\mu(s) & 0 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

a matriz de rotação.

Tendo em vista as hipóteses 1.1, temos que a configuração deformada da barra pode ser completamente descrita pelo deslocamento de sua linha neutra e pela rotação da seção transversal em cada ponto  $s$ . Dessa forma, os vetores de deslocamento generalizados e de rotações generalizados são representados de forma parametrizada por  $\mathbf{u}$  e  $\boldsymbol{\theta}$ , respectivamente. Essas variáveis descreverão o comportamento cinemático de um elemento de barra orientado no espaço tridimensional.

A partir dessas definições, podemos introduzir as deformações generalizadas  $\boldsymbol{\delta} : \bar{I} \rightarrow \mathbb{R}^3$  e  $\boldsymbol{\eta} : \bar{I} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , definidas respectivamente como o vetor de deformações translacionais e o vetor de deformações rotacionais. Em particular, as deformações translacionais são obtidas pela primeira derivada dos deslocamentos, subtraindo o movimento de corpo rígido, enquanto as deformações rotacionais são obtidas pelas primeiras derivadas das rotações.

Para um movimento de corpo rígido da barra, os campos de deslocamentos e rotações são constantes em toda a barra, e podem ser descritos como:

$$\boldsymbol{\theta}(s) = \boldsymbol{\theta}(0), \quad (2.11)$$

$$\mathbf{u}(s) = \mathbf{u}(0) + \boldsymbol{\theta}(s) \times (\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(0)). \quad (2.12)$$

Derivando essas expressões em relação a  $s$ , obtemos

$$\frac{d\boldsymbol{\theta}(s)}{ds} = 0, \quad (2.13)$$

$$\frac{d\mathbf{u}(s)}{ds} = \frac{d\boldsymbol{\theta}(s)}{ds} \times (\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(0)) + \boldsymbol{\theta}(s) \times \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} = \boldsymbol{\theta}(s) \times \mathbf{r}'(s). \quad (2.14)$$

Dessa forma, os campos de deformação e rotações generalizadas podem ser escritos como:

$$\boldsymbol{\eta}(s) = \frac{d\boldsymbol{\theta}(s)}{ds}, \quad (2.15)$$

$$\boldsymbol{\delta}(s) = \frac{d\mathbf{u}(s)}{ds} - \boldsymbol{\theta}(s) \times \mathbf{r}'(s), \quad (2.16)$$

onde  $\boldsymbol{\delta}(s)$  está associada aos campos de deformações axial e cisalhamentos, enquanto  $\boldsymbol{\eta}(s)$  aos campos de torção e flexões.

A Fig. 2.2 ilustra o modelo de uma barra orientada no espaço tridimensional, representando tanto sua configuração deformada quanto as forças e momentos distribuídos

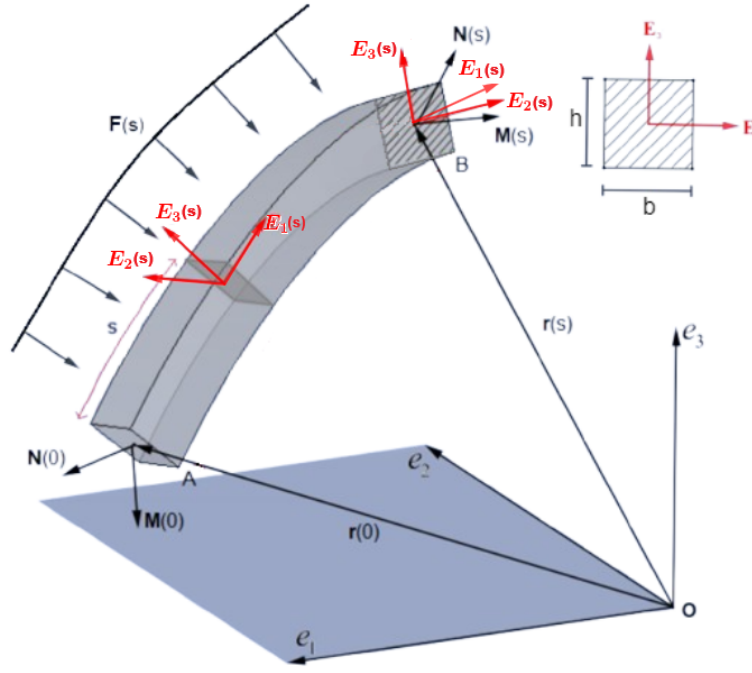


Figura 2.2: Representação do equilíbrio estático em um segmento de viga prismática  $AB$ .

ao longo de seu comprimento. Com base nesse esquema, podemos derivar as equações de equilíbrio associadas ao modelo. Para isso, utilizamos uma abordagem variacional fundamentada no Princípio dos Trabalhos Virtuais, que estabelece que, para um sistema em equilíbrio, o trabalho virtual realizado pelas forças externas e internas, associado a um deslocamento virtual admissível, deve ser nulo, isto é,  $\delta\Pi^{3D} = 0$ . Nesse contexto, consideramos que a barra ilustrada na Fig. 2.2 está sujeita a um pequeno deslocamento virtual  $\delta\mathbf{u}(s)$  e a uma rotação virtual  $\delta\boldsymbol{\theta}(s)$  ao longo do seu comprimento  $s$ . A expressão correspondente ao trabalho virtual realizado pelas forças externas  $\mathbf{F}(s)$ , associado ao deslocamento virtual  $\delta\mathbf{u}(s)$  é dada por:

$$\delta U_e = - \int_0^L \mathbf{F}(s) \cdot \delta\mathbf{u}(s) ds. \quad (2.17)$$

Além disso, o trabalho virtual das forças internas, que contempla a contribuição do força axial  $\mathbf{N}(s)$  e do momento  $\mathbf{M}(s)$ , é definido por:

$$\delta U_i = \int_0^L (\mathbf{N}(s) \cdot \delta\mathbf{u}'(s) + \mathbf{M}(s) \cdot \delta\boldsymbol{\theta}(s)) ds. \quad (2.18)$$

Aqui,  $\delta\mathbf{u}'(s)$  é a variação virtual da deformação axial e  $\delta\boldsymbol{\theta}(s)$  é a variação virtual da rotação ao longo da barra.

Para que a barra esteja em equilíbrio, devemos ter:

$$\delta\Pi^{3D} = \delta U_e + \delta U_i = 0. \quad (2.19)$$

Substituindo (2.17) e (2.18) nesta expressão, obtemos:

$$-\int_0^L \mathbf{F}(s) \cdot \delta \mathbf{u}(s) ds + \int_0^L \mathbf{N}(s) \cdot \delta \mathbf{u}'(s) ds + \int_0^L \mathbf{M}(s) \cdot \delta \boldsymbol{\theta}(s) ds = 0. \quad (2.20)$$

Resolvendo a segunda integral por integração por partes, temos:

$$\begin{aligned} \int_0^L \mathbf{N}(s) \cdot \delta \mathbf{u}'(s) ds &= [\mathbf{N}(s) \cdot \delta \mathbf{u}(s)]_0^L - \int_0^L \mathbf{N}'(s) \cdot \delta \mathbf{u}(s) ds, \\ &= - \int_0^L \mathbf{N}'(s) \cdot \delta \mathbf{u}(s) ds. \end{aligned} \quad (2.21)$$

O primeiro termo,  $[\mathbf{N}(s) \cdot \delta \mathbf{u}(s)]_0^L$ , representa o trabalho virtual nas extremidades, que normalmente é zero se as extremidades forem fixas ou se os deslocamentos virtuais nas extremidades forem nulos. Dessa forma,

$$-\int_0^L \mathbf{F}(s) \cdot \delta \mathbf{u}(s) ds - \int_0^L \mathbf{N}'(s) \cdot \delta \mathbf{u}(s) ds = 0, \quad (2.22)$$

$$\int_0^L (-\mathbf{F}(s) - \mathbf{N}'(s)) \delta \mathbf{u}(s) ds = 0, \quad (2.23)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} -\mathbf{F}(s) - \mathbf{N}'(s) &= \mathbf{0} \\ -\mathbf{N}'(s) &= \mathbf{F}(s). \end{aligned} \quad (2.24)$$

para qualquer valor arbitrário de  $\delta \mathbf{u}(s)$ .

Para o momento, o princípio dos trabalhos virtuais também leva à condição de que o trabalho virtual seja zero, resultando em:

$$\int_0^L \mathbf{M}(s) \cdot \delta \boldsymbol{\theta}(s) ds = 0 \quad (2.25)$$

para qualquer valor arbitrário de  $\delta \boldsymbol{\theta}(s)$ . Como o momento  $\mathbf{M}(s)$  varia ao longo da barra, devido à ação das forças internas, e considerando especificamente a contribuição da força axial  $\mathbf{N}(s)$ , o equilíbrio é dado por:

$$-\mathbf{M}'(s) + \mathbf{N}(s) \times \mathbf{r}(s) = \mathbf{0}. \quad (2.26)$$

Esta expressão nos mostra que o termo  $\mathbf{N}(s) \times \mathbf{r}(s)$  representa o momento gerado pela força axial  $\mathbf{N}(s)$  em relação ao vetor posição  $\mathbf{r}(s)$ . Este termo deve ser equilibrado pela variação do momento  $\mathbf{M}'(s)$  ao longo do comprimento da barra.

Como se pode perceber, as Eqs. 2.24 e (2.26) descrevem o estado de equilíbrio de uma barra orientada no espaço tridimensional. Além disso, ao considerar que a

mesma é constituída por um material isotrópico, linear e homogêneo, englobamos no modelo as relações constitutivas expressas por:

$$\mathbf{M}(s) = \mathbf{D}_\theta \boldsymbol{\eta}(s), \quad (2.27)$$

$$\mathbf{N}(s) = \mathbf{D}_u \boldsymbol{\delta}(s), \quad (2.28)$$

onde

$$\mathbf{D}_u = \text{diag}[GA_1, GA_2, EA], \quad (2.29)$$

$$\mathbf{D}_\theta = \text{diag}[GJ, EI_1, EI_2], \quad (2.30)$$

são especializações do tensor de elasticidade para o modelo, onde  $J$  é o momento de inércia polar,  $I_1$  e  $I_2$  são os momentos de inércia em relação aos eixos  $\mathbf{E}_1$  e  $\mathbf{E}_2$ , respectivamente, e  $A$  representa a área da seção transversal. Aplicando os fatores de correção  $\kappa_1$  e  $\kappa_2$ , que compensam a distribuição não uniforme da tensão cisalhante em relação aos eixos  $\mathbf{E}_1$  e  $\mathbf{E}_2$ , obtemos as áreas corrigidas  $A_1 = \kappa_1 A$  e  $A_2 = \kappa_2 A$ .

Com base nas equações constitutivas e de equilíbrio previamente definidas, podemos formular o sistema de equações diferenciais vetoriais que rege o comportamento da estrutura no espaço tridimensional, apresentado pelo seguinte problema:

**PROBLEMA – A:** Dado  $\mathbf{F}(s) \in \mathbb{R}^3$ , encontrar  $\mathbf{u}(s)$ ,  $\boldsymbol{\theta}(s)$ ,  $\mathbf{M}(s)$  e  $\mathbf{N}(s) \in \mathbb{R}^3$ , para  $\forall s \in (0, L)$  que satisfaça:

1. Equações de equilíbrio:

$$-\mathbf{N}'(s) = \mathbf{F}(s), \quad (2.31)$$

$$-\mathbf{M}'(s) + \mathbf{N}(s) \times \mathbf{r}'(s) = \mathbf{0}. \quad (2.32)$$

2. Equações cinemáticas:

$$\boldsymbol{\delta}(s) = \mathbf{u}'(s) - \boldsymbol{\theta}(s) \times \mathbf{r}'(s), \quad (2.33)$$

$$\boldsymbol{\eta}(s) = \boldsymbol{\theta}'(s). \quad (2.34)$$

3. Equações constitutivas:

$$\mathbf{M}(s) = \mathbf{D}_\theta \boldsymbol{\eta}(s), \quad (2.35)$$

$$\mathbf{N}(s) = \mathbf{D}_u \boldsymbol{\delta}(s). \quad (2.36)$$



4. Condições de contorno:

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \boldsymbol{\theta}(0) = \boldsymbol{\theta}_0 \quad (2.37)$$

$$\mathbf{u}(L) = \mathbf{u}_l, \quad \boldsymbol{\theta}(L) = \boldsymbol{\theta}_l \quad (2.38)$$

A partir das relações constitutivas (2.35) e (2.36), podemos deduzir as equações de equilíbrio escritas unicamente em função dos deslocamentos generalizados. Sendo assim, o **PROBLEMA – A** assume a seguinte configuração:

**PROBLEMA – B:** Para  $s \in (0, L)$  e dado  $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ , encontrar  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  e  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$  que satisfaçam:

1. As equações de equilíbrio:

$$\frac{d}{ds} \left[ \mathbf{D}_u \left( \frac{d\mathbf{u}(s)}{ds} - \boldsymbol{\theta}(s) \times \mathbf{E}_1 \right) \right] + \mathbf{F}(s) = 0, \quad (2.39)$$

$$\frac{d}{ds} \left( \mathbf{D}_\theta \frac{d\boldsymbol{\theta}(s)}{ds} \right) - \mathbf{D}_u \left( \frac{d\mathbf{u}(s)}{ds} - \boldsymbol{\theta}(s) \times \mathbf{E}_1 \right) \times \mathbf{E}_1 = 0. \quad (2.40)$$

2. Condições de contorno:

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \boldsymbol{\theta}(0) = \boldsymbol{\theta}_0, \quad (2.41)$$

$$\mathbf{u}(L) = \mathbf{u}_l, \quad \boldsymbol{\theta}(L) = \boldsymbol{\theta}_l. \quad (2.42)$$

O **PROBLEMA – A**, definido pelo sistema de equações (2.31–2.38), e o **PROBLEMA – B**, representado pelo sistema (2.40–2.42), descrevem o comportamento geral de uma estrutura flexível no espaço tridimensional, considerando o regime de pequenos deslocamentos e deformações. Ressalta-se que o **PROBLEMA – A** adota uma formulação em termos dos esforços e deslocamentos generalizados, enquanto o **PROBLEMA – B** baseia-se exclusivamente nos deslocamentos generalizados.

Vale destacar que tanto o **PROBLEMA – A** quanto o **PROBLEMA – B** foram expressos em notação vetorial, com o objetivo de compactar as equações e facilitar sua interpretação. Para uma descrição detalhada, em termos das componentes escalares dos deslocamentos, rotações, momentos e esforços cisalhantes nas três direções do espaço, apresenta-se no Apêndice A, Seção A.1, a formulação expandida correspondente.

# Capítulo 3

## Formulações variacionais mistas

Neste capítulo, desenvolvemos uma modelagem variacional mista com o intuito de superar limitações observadas em formulações puramente cinemáticas para a análise de vigas, sobretudo em situações em que os efeitos de cisalhamento são relevantes. Nesses casos, o uso de funções de interpolação inadequadas pode resultar em fenômenos de travamento por cisalhamento, comprometendo a precisão das soluções obtidas. Para contornar tais restrições, adotamos uma abordagem variacional mista estabilizada, a qual combina a flexibilidade de tratar os esforços internos e os deslocamentos como variáveis independentes com técnicas adicionais de estabilização, assegurando coerência física e robustez numérica.

Nesta perspectiva, apresentaremos na próxima seção uma breve descrição das propriedades associadas aos espaços de funções específicos utilizados na construção da formulação variacional mista.

### 3.0.1 Formulação variacional

Seja  $\mathbb{Q} = \mathcal{L}_2(0, L)$  o espaço de funções escalares de quadrado integrável segundo a medida de Lebesgue e

$$\mathbb{S} = \{\mathbf{v}; \mathbf{v} \in H^1(0, L), \mathbf{v}(0) = 0\}, \quad (3.1)$$

onde

$$H^1(0, L) = \left\{ \mathbf{v} \in \mathcal{L}_2(0, L); \frac{d\mathbf{v}}{ds} \in \mathcal{L}_2(0, L) \right\} \quad (3.2)$$

é o espaço de funções de Hilbert. Definindo os espaços:

$$\mathbb{S}^3 = \mathbb{S} \times \mathbb{S} \times \mathbb{S}, \quad (3.3)$$

$$\mathbb{Q}^3 = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, \quad (3.4)$$

com produto interno e norma dados definidos por:

$$(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) = \int_0^L \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} ds \quad \|\boldsymbol{\sigma}\| = (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma})^{1/2} \quad \forall \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{Q}^3, \quad (3.5)$$

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_1 = \int_0^L (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{v}}) ds \quad \|\mathbf{v}\|_1 = (\mathbf{v}, \mathbf{v})_1^{1/2} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{S}^3, \quad (3.6)$$

onde:

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{dv_1}{ds} \mathbf{E}_1 + \frac{dv_2}{ds} \mathbf{E}_2 + \frac{dv_3}{ds} \mathbf{E}_3. \quad (3.7)$$

é o vetor das derivadas das componentes do vetor  $\mathbf{v}$ . No espaço  $\mathbb{S}^3$ , define-se a seminorma por:

$$|v|_1 = \left( \frac{d\mathbf{v}}{ds}, \frac{d\mathbf{v}}{ds} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.8)$$

Com base nessas definições, são apresentados a seguir alguns lemas importantes de equivalência de norma.

**Lema 3.0.1.** *Seja  $\|\cdot\|_1$  a norma usual em  $\mathbb{S}^3$  (3.6) e a seminorma  $|\cdot|_1$  (3.6). Existe  $c_1 > 0$  tal que*

$$|v|_1 \geq c_1 \|\mathbf{v}\|_1, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{S}. \quad (3.9)$$

**Lema 3.0.2.** *Existe uma constante  $c_2 > 0$  tal que*

$$|v|_1 \leq c_2 \|\mathbf{v}\|_1, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{S}. \quad (3.10)$$

**Lema 3.0.3.** *No espaço vetorial  $\mathbb{S}^3$ , a norma e a seminorma são equivalentes:*

$$\exists c_1, c_2 > 0 \text{ tais que } c_1 \|\mathbf{v}\| \leq |v|_1 \leq c_2 \|\mathbf{v}\|. \quad (3.11)$$

A verificação de cada um destes lemas encontra-se em (Brezzi, 1991) [11] e (Ciarlet, 2002) [12]. Uma vez estabelecida a relação entre a norma e a seminorma, redefinimos o produto interno e a norma no espaço  $\mathbb{S}^3$  da seguinte forma

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_1 = \int_0^L \left( \frac{d\mathbf{u}}{ds} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{ds} \right), \quad |\mathbf{v}|_1 = \left( \frac{d\mathbf{v}}{ds} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{ds} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{S}^3, \quad (3.12)$$

com a identificação dos espaços produto  $\mathbb{W} = \mathbb{Q}^3 \times \mathbb{Q}^3$  e  $\mathbb{Z} = \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ , com norma e produto interno <sup>1</sup> definidos por:

$$(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) = (\mathbf{M}, \boldsymbol{\Gamma}) + (\mathbf{N}, \boldsymbol{\Phi}), \quad \|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbb{W}}^2 = \|\boldsymbol{\Gamma}\|^2 + \|\boldsymbol{\Phi}\|^2, \quad (3.13)$$

$$(\mathbf{z}, \mathbf{w})_1 = \left( \frac{d\mathbf{u}}{ds}, \frac{d\mathbf{v}}{ds} \right) + \left( \frac{d\boldsymbol{\theta}}{ds}, \frac{d\boldsymbol{\psi}}{ds} \right), \quad \|\mathbf{w}\|_{\mathbb{Z}}^2 = |\mathbf{v}|_1^2 + |\boldsymbol{\psi}|_1^2, \quad (3.14)$$

<sup>1</sup>Uma descrição completa acerca destas normas e produtos encontram-se em (Brezzi, 1974) [13], (Arnold, 1981)[14], (Loula, 1987b) [15], (Reddy, 1992)[16] e (Arunakirinathar, 1993) [17].

onde

$$\mathbf{z} = (\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}) \in \mathbb{Z}, \quad \mathbf{w} = (\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}) \in \mathbb{Z}, \quad (3.15)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = (\mathbf{M}, \mathbf{N}) \in \mathbb{W}, \quad \boldsymbol{\tau} = (\boldsymbol{\Gamma}, \boldsymbol{\Phi}) \in \mathbb{W}. \quad (3.16)$$

### 3.0.2 Formulação cinemática

Após a definição dos espaços de funções, o **PROBLEMA – B** foi representado de maneira equivalente, por meio de uma formulação variacional abstrata, apresentado no seguinte problema:

**PROBLEMA – C:** Dado  $(\mathbf{F}, \mathbf{0}) \in \mathbb{Z}'$ , encontrar  $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}$  tal que

$$c(\mathbf{z}, \mathbf{w}) = f(\mathbf{w}), \mathbf{w} \in \mathbb{W}, \quad (3.17)$$

com

$$c(\mathbf{z}, \mathbf{w}) = \left( \mathbf{D}_\theta \frac{d\boldsymbol{\theta}(s)}{ds}, \frac{d\boldsymbol{\psi}(s)}{ds} \right) + \left( \mathbf{D}_u \left( \frac{d\mathbf{u}(s)}{ds} - \boldsymbol{\theta}(s) \times \mathbf{E}_1(s) \right), \frac{d\mathbf{v}(s)}{ds} - \boldsymbol{\psi}(s) \times \mathbf{E}_1(s) \right), \quad (3.18)$$

$$f(\mathbf{w}) = (\mathbf{F}, \mathbf{v}) + (\mathbf{0}, \boldsymbol{\psi}), \quad (3.19)$$

onde  $\mathbf{z} = (\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}) \in \mathbb{Z}$ ,  $\mathbf{w} = (\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}) \in \mathbb{Z}$  e  $\mathbb{Z}'$  é o espaço dual de  $\mathbb{Z}$ .

Este problema ajusta-se à classe de formulações abstratas estabelecidas pelo lema de Lax-Milgram. Com isso, a existência e unicidade de solução do **PROBLEMA – C** foram garantidas pelo seguinte resultado:

**Lema 3.0.4.** (*Lax-Milgram*)

1. A forma bilinear  $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua e portanto, existe uma constante positiva  $\beta$  tal que:

$$|c(\mathbf{z}, \mathbf{w})| \leq \beta \|\mathbf{z}\|_1 \|\mathbf{w}\|_1, \quad \forall \mathbf{w}, \mathbf{z} \in \mathbb{Z}. \quad (3.20)$$

2. A forma  $(*, *)$  é  $\mathbb{Z}$ -elíptico, ou seja, existe uma constante positiva  $\alpha$  tal que

$$|c(\mathbf{z}, \mathbf{z})| \geq \alpha (\|\mathbf{z}\|_1)^2, \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbb{Z}. \quad (3.21)$$

3. O funcional linear  $\mathcal{F} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  é contínuo, isto é, existe uma constante positiva  $\gamma$ , tal que

$$|\mathcal{F}(\mathbf{z})| \leq \gamma \|\mathbf{z}\|_1, \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbb{Z}. \quad (3.22)$$

As propriedades apresentadas neste lema são verificadas em (Ciarlet, 2002) [12] e (Santos, 2007) [18]. O **PROBLEMA – C** é a forma mais simples e direta para representar

o modelo e tem sua existência e unicidade de solução asseguradas pelo lema de Lax-Milgram, tanto na sua forma contínua quanto discreta, quando ela é aproximada pelo Método de Galerkin e discretizada pelo Método dos Elementos Finitos. Entretanto, é bem conhecido que tais aproximações exigem um compromisso entre as funções interpoladoras dos campos de deslocamento e rotações para garantir a estabilidade. Para atingir esse objetivo, apresentamos a seguir uma abordagem variacional mista baseada no princípio de Hellinger–Reissner.

### 3.1 Formulação variacional baseada no princípio de Hellinger-Reissner

A construção de uma formulação variacional mista, fundamentada no princípio de Hellinger–Reissner, oferece maior flexibilidade na representação dos campos físicos (deslocamentos e esforços) quando se deseja modelar o processo de deformação de vigas em regime de pequenos deslocamentos e rotações. Diferentemente das abordagens puramente cinemáticas, essa formulação permite tratar deslocamentos e esforços generalizados como variáveis independentes, possibilitando a escolha de funções de interpolação específicas para cada campo. Essa característica é particularmente vantajosa em situações em que os efeitos de cisalhamento não podem ser desprezados, como ocorre em vigas esbeltas.

Além disso, a formulação mista fundamentada no princípio de Hellinger–Reissner contribui para evitar fenômenos de travamento numérico, comuns em formulações tradicionais, garantindo maior coerência física e estabilidade da solução. Nesta perspectiva, apresentamos um problema equivalente ao **PROBLEMA – A**, em que as variáveis primais são os esforços generalizados, representados por  $\sigma$  (momentos e esforços cortantes), enquanto os deslocamentos generalizados, denotados por  $\tau$  (deslocamentos e rotações), atuam como multiplicadores de Lagrange. Assim, temos:

**PROBLEMA – D:** Dado  $F \in \mathbb{Z}'$ , encontrar  $(\sigma, z) \in \mathbb{W} \times \mathbb{Z}$  tal que satisfaçam o sistema de equações:

$$a(\sigma, \tau) + b(\tau, z) = 0, \quad \forall \tau \in \mathbb{W}, \quad (3.23)$$

$$b(\sigma, w) = f(w), \quad \forall w \in \mathbb{Z}, \quad (3.24)$$

onde

$$\begin{aligned}
a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) &= -(\mathbf{D}_\theta \mathbf{N}, \boldsymbol{\Gamma}) - (\mathbf{D}_u \mathbf{M}, \boldsymbol{\Phi}) \\
&= -\frac{1}{EI_1}(N_1, \Gamma_1) - \frac{1}{EI_2}(N_2, \Gamma_2) - \frac{1}{GJ}(N_3, \Gamma_3) - \\
&\quad - \frac{1}{\kappa_1 GA}(M_1, \Phi_1) - \frac{1}{\kappa_2 GA}(M_2, \Phi_2) - \frac{1}{EA}(M_3, \Phi_3),
\end{aligned} \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned}
b(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{w}) &= \left( \boldsymbol{\Gamma}, \frac{d\mathbf{v}}{ds} - \boldsymbol{\psi} \times \mathbf{E}_1(s) \right) + \left( \boldsymbol{\Phi}, \frac{d\boldsymbol{\psi}}{ds} \right) \\
&= \left( \Gamma_1, \frac{dv_1}{ds} - \gamma v_2 - \psi_2 \right) + \left( \Gamma_2, \frac{dv_2}{ds} + \gamma v_1 - \mu v_3 + \psi_1 \right) + \left( \Gamma_3, \frac{dv_3}{ds} + \gamma v_2 \right) + \\
&\quad + \left( \Phi_1, \frac{d\psi_1}{ds} - \gamma \psi_2 \right) + \left( \Phi_2, \frac{d\psi_2}{ds} + \gamma \psi_1 - \mu \psi_3 \right) + \left( \Phi_3, \frac{d\psi_3}{ds} + \mu \psi_2 \right),
\end{aligned} \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{w}) &= (\mathbf{F}, \mathbf{v}) \\
&= (F_1, v_1) + (F_2, v_2) + (F_3, v_3).
\end{aligned} \tag{3.27}$$

É importante ressaltar que as Eqs. (3.23) e (3.24) resultam das formas fracas das equações constitutiva do modelo e de equilíbrio dos esforços generalizados, respectivamente. Neste contexto, o **PROBLEMA – D** enquadra-se na classe das formulações mistas abstratas, conforme discutido por (Babuška, 1973) [20], (Brezzi, 1974) [13], (Douglas, 1989) [21] e (Reddy, 1992) [16] e possuem existência e unicidade de solução, asseguradas pelo seguinte resultado:

**Teorema 3.1.1** (Brezzi).

1. O funcional  $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  é contínuo, isto é, existe uma constante positiva  $\eta$  tal que

$$|f(\mathbf{w})| \leq \eta \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{Z}}, \forall \mathbf{w} \in \mathbf{Z}. \tag{3.28}$$

2. As formas bilineares  $a : \mathbb{W} \times \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $b : \mathbb{W} \times \mathbf{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  são contínuas, ou seja, existem constantes  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  positivas tais que:

$$|a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})| \leq \alpha_1 \|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathbb{W}} \|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbb{W}}, \forall \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{W}. \tag{3.29}$$

$$|b(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{w})| \leq \alpha_2 \|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbb{W}} \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{Z}}, \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{W}, \forall \mathbf{w} \in \mathbf{Z}. \tag{3.30}$$

3.  $a(*, *)$  é  $K$ -elíptica; ou seja, existe uma constante positiva  $\alpha_3$  tal que

$$a(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}) \geq \alpha_3 (|\boldsymbol{\tau}|_1)^2, \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{W}, \tag{3.31}$$

onde

$$\mathbf{K} = \{\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{W} / b(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{w}) = 0, \forall \mathbf{w} \in \mathbb{Z}\}. \quad (3.32)$$

4. A condição LBB (Ladysenskaja – Babuška – Brezzi): Existe uma constante positiva  $\alpha_4 > 0$  tal que

$$\sup_{\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{W}} \frac{b(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{w})}{\|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbb{W}}} \geq \alpha_4 \|\mathbf{w}\|_{\mathbb{Z}}, \quad \boldsymbol{\tau} \neq 0, \forall \mathbf{w} \in \mathbb{Z}. \quad (3.33)$$

A verificação de cada uma destas propriedades encontram-se em (Brezzi, 1974) [13] e (Santos, 2007) [18]. Na próxima seção, faremos a aproximação desta formulação pelo método de Galerkin e discretização pelo método dos elementos finitos. Vamos discutir algumas questões de estabilidade e apresentar uma formulação estabilizada para o problema.

### 3.1.1 Método dos elementos finitos misto estabilizado

Seja  $I_e$  o domínio de cada elemento  $e$  da partição do domínio total,  $h_e$  o diâmetro do elemento,  $n_e$  o número total de elementos, e  $h = \max\{h_e\}$ ,  $1 \leq e \leq n_e$  o parâmetro de malha. Definimos o espaço de elementos finitos Lagrangiano de grau  $l$  e classe  $C^{-1}(0, L)$  como:

$$\mathbb{Q}_h^l = \{\boldsymbol{\tau}_h \in C^{-1}(0, L) : \boldsymbol{\tau}_h(I_e) \in P_l(I_e)\} \quad (3.34)$$

e o espaço de aproximação

$$\mathbb{S}_h^l = \mathbb{Q}_h^l \cap \mathbb{S},$$

correspondendo ao espaço de elementos finitos Lagrangiano de grau  $l$  e classe  $C^0(0, L)$ . Neste contexto, utilizamos polinômios de interpolação do mesmo grau tanto para os deslocamentos generalizados ( $\mathbb{S}_h^l$ ) quanto para os esforços generalizados ( $\mathbb{Q}_h^l$ ). Os polinômios associados aos deslocamentos são contínuos entre os elementos, enquanto os associados aos esforços são descontínuos. Assim, denotamos por:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_h^l &= \left(\mathbb{S}_h^l\right)^3 \times \left(\mathbb{S}_h^l\right)^3 \subset \mathbb{Z}, \\ \mathbb{W}_h^l &= \left(\mathbb{Q}_h^l\right)^3 \times \left(\mathbb{Q}_h^l\right)^3 \subset \mathbb{W}, \end{aligned}$$

os espaços de aproximação para  $\mathbb{Z}$  e  $\mathbb{W}$ , respectivamente. Com base nestas definições, a aproximação de Galerkin para o **PROBLEMA – D** é dado por:

**PROBLEMA – D<sub>h</sub>**: Encontrar  $(\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{z}_h) \in \mathbb{W}_h^r \times \mathbb{Z}_h^r$  tal que:

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}_h) + b(\boldsymbol{\tau}_h, \mathbf{u}_h) &= 0, & \forall \boldsymbol{\tau}_h \in \mathbb{W}_h^r, \\ b(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}_h) &= f(\mathbf{w}_h), & \forall \mathbf{w}_h \in \mathbb{Z}_h^r, \end{aligned} \quad (3.35)$$

onde

$$a(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}_h) = -(\mathbf{D}_\theta \mathbf{N}_h, \boldsymbol{\Gamma}_h) - (\mathbf{D}_u \mathbf{M}_h, \boldsymbol{\Phi}_h), \quad (3.36)$$

$$(\boldsymbol{\tau}_h, \mathbf{w}_h) = \left( \boldsymbol{\Gamma}_h, \frac{d\mathbf{v}_h}{ds} - \boldsymbol{\psi}_h \times \mathbf{E}_1 \right) + \left( \boldsymbol{\Phi}_h, \frac{d\boldsymbol{\psi}_h}{ds} \right), \quad (3.37)$$

$$f(\mathbf{w}_h) = (\mathbf{F}_h, \mathbf{v}_h) + (\mathbf{0}, \boldsymbol{\psi}_h). \quad (3.38)$$

Esta forma discreta tem existência e unicidade de solução assegurada pelo teorema de Brezzi.

Devido à aproximação, conforme adotada  $\mathbb{Z}_h^l \subset \mathbb{Z}$  e  $\mathbb{W}_h^l \subset \mathbb{W}$ , as propriedades de continuidade do funcional  $f(\cdot)$  e das formas bilineares  $a(\cdot, \cdot)$  e  $b(\cdot, \cdot)$  são transmitidas da forma contínua. No entanto, em geral, tem-se que  $K_h \not\subset K$ , de modo que as demais condições como a  $K$ -elipticidade e a LBB precisam ser verificadas também no contexto do **PROBLEMA – D<sub>h</sub>**. A propriedade de compatibilidade entre os espaços é verificada pelo seguinte lema:

**Lema 1.** *Existe  $\beta \in \mathbb{R}$  tal que*

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{\tau}_h \in \mathbb{W}_h^l \\ \boldsymbol{\tau}_h \neq 0}} \frac{b(\boldsymbol{\tau}_h, \mathbf{w}_h)}{\|\boldsymbol{\tau}_h\|_{\mathbb{W}}} \geq \beta \|\mathbf{w}_h\|_{\mathbb{Z}}, \quad \forall \mathbf{w}_h \in \mathbb{Z}_h^l. \quad (6.13)$$

A verificação desse lema encontra-se em (Brezzi, 1974) [13] e (Santos, 2007) [18]. Assim, a verificação da condição de compatibilidade entre os espaços é obtida a partir das mesmas escolhas feitas na formulação contínua. Porém, nota-se que a propriedade de  $K$ -elipticidade não segue o mesmo contexto, isto é, para os espaços de aproximação considerados  $\mathbb{Z}_h^l$  e  $\mathbb{W}_h^l$ , não é possível estabelecer escolhas que assegurem a  $K$ -elipticidade da forma bilinear  $a(\cdot, \cdot)$ . Para superar esta dificuldade, uma estratégia adotada foi considerar os esforços interpolados de forma descontínua, podendo eliminá-los a nível de elemento. Com isso, obtemos uma formulação apenas em deslocamentos generalizados. Tal formulação representa precisamente a aproximação cinemática do **PROBLEMA – C** dado por:

**PROBLEMA – C<sub>h</sub>:** Dado  $\mathbf{F} \in \mathbb{Z}_h^l$ , encontrar  $\mathbf{z}_h \in \mathbb{Z}_h$  tal que

$$c(\mathbf{z}_h, \mathbf{w}_h) = f(\mathbf{w}_h), \quad \forall \mathbf{w}_h \in \mathbb{Z}_h, \quad (3.39)$$



onde

$$\begin{aligned} c(\mathbf{z}_h, \mathbf{w}_h) &= \left( \mathbf{D}_\theta \frac{d\boldsymbol{\theta}_h(s)}{ds}, \frac{d\boldsymbol{\psi}_h(s)}{ds} \right) + \\ &+ \left( \mathbf{D}_u \left[ \frac{d\mathbf{u}_h(s)}{ds} - \boldsymbol{\theta}_h(s) \times \mathbf{E}_1(s) \right], \frac{d\mathbf{v}_h(s)}{ds} - \boldsymbol{\psi}_h(s) \times \mathbf{E}_1(s) \right), \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$f(\mathbf{w}_h) = (\mathbf{F}_h, \mathbf{v}_h) + (\mathbf{0}, \boldsymbol{\psi}_h). \quad (3.41)$$

Esta forma discreta tem existência e unicidade de solução garantida pelo teorema de Lax-Milgram.

Neste contexto, estabilizamos o **PROBLEMA** –  $\mathbf{D}_h$  fazendo a adição de termos residuais de mínimos quadrados provenientes das equações de equilíbrio do modelo. Essa estratégia garante a estabilidade da formulação, mesmo quando são utilizadas interpolações de mesma ordem para os campos de esforços e deslocamentos generalizados. A estabilização utilizada consiste em introduzir na aproximação de Galerkin uma perturbação a nível de elemento da seguinte forma:

Para  $\boldsymbol{\tau}_h \in \mathbb{W}_h^r$  e  $\mathbf{w}_h \in \mathbb{W}_h^r$ , encontrar  $(\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{w}_h) \in \mathbb{W}_h^r \times \mathbb{Z}_h^r$  tal que

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}_h) + b(\mathbf{z}_h, \boldsymbol{\tau}_h) + b(\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{w}_h) - f(\mathbf{w}_h) - \sum_{e=1}^{n_e} \delta_1 h_e^2 \left( \frac{d\mathbf{N}_e}{ds} - \mathbf{M}_e \times \mathbf{E}_1, \frac{d\boldsymbol{\Phi}_e}{ds} - \boldsymbol{\Gamma}_e \times \mathbf{E}_1 \right) - \\ - \sum_{e=1}^{n_e} \delta_2 h_e^2 \left( \frac{d\mathbf{M}_e}{ds} + \mathbf{F}, \frac{d\boldsymbol{\Gamma}_e}{ds} \right) = 0, \end{aligned} \quad (3.42)$$

em que  $\delta_1 > 0$  e  $\delta_2 > 0$  são parâmetros arbitrários e os termos a eles associados correspondem aos resíduos em mínimos quadrados das equações de equilíbrio dos momentos e dos esforços generalizados (cisalhantes e normal), respectivamente. Nesta nova abordagem, os resíduos são considerados apenas no interior dos elementos o que garante a estabilização (Loula, *et al.*, 1987a [22], Loula, *et al.*, 1987b [15]; Santos, *et al.*, 2007 [23]). Dessa forma, reorganizando os termos da Eq.(3.42), o **PROBLEMA** –  $\mathbf{D}_h$  assume a seguinte forma:

**PROBLEMA** –  $\mathbf{D}_h^E$ : Encontrar  $(\boldsymbol{\tau}_h, \mathbf{u}_h) \in \mathbb{W}_h^r \times \mathbb{V}_h^r$  tal que satisfaçam o sistema de equações

$$\begin{aligned} a_h(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}_h) + b(\boldsymbol{\tau}_h, \mathbf{z}_h) &= g_\delta(\boldsymbol{\tau}_h), & \forall \boldsymbol{\tau}_h \in \mathbb{W}_h^r, \\ b(\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{w}_h) &= f(\mathbf{w}_h), & \forall \mathbf{w}_h \in \mathbb{Z}_h^r, \end{aligned} \quad (3.43)$$

onde

$$a_h(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}_h) = a(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}_h) + a_\delta(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}_h)_h, \quad (3.44)$$

$$a_\delta(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}_h)_h = - \sum_{n=1}^{n_e} \delta_1 h_e^2 \left[ \left( \frac{d\mathbf{N}_e}{ds} \right) - \mathbf{M}_e \times \mathbf{E}_1, \frac{d\boldsymbol{\Phi}_e}{ds} - \boldsymbol{\Gamma}_e \times \mathbf{E}_1 \right] - \delta_2 h_e^2 \left( \frac{d\mathbf{M}_e}{ds}, \frac{d\boldsymbol{\Gamma}_e}{ds} \right), \quad (3.45)$$

$$g_\delta(\boldsymbol{\tau}_h) = \delta_2 h_e^2 \left( \mathbf{F}, \frac{d\boldsymbol{\Gamma}_e}{ds} \right). \quad (3.46)$$

Essa formulação tem existência e unicidade de solução garantidas pelo teorema de Brezzi. Como se pode observar, o funcional bilinear  $a_h(*, *)$  inclui termos adicionais que servem para estabilizar o método de Galerkin no nível de elemento. No Apêndice B, apresentamos essa formulação em termos de componentes.

Com isso, finalizamos as discussões referentes à formulação variacional do problema de viga de Timoshenko no espaço tridimensional. No capítulo seguinte, serão apresentados experimentos numéricos com o intuito de ilustrar e validar a aplicabilidade e a robustez da formulação desenvolvida, evidenciando seu potencial na análise de estruturas tridimensionais.

# Capítulo 4

## Resultados

Nessa seção apresentamos os resultados da aplicação do modelo de estruturas flexíveis, desenvolvido no capítulo anterior, através de três experimentos numéricos. No primeiro experimento, analisamos um problema simples de uma viga retilínea engastada submetida a um carregamento transversal distribuído. No segundo experimento, analisamos uma viga engastada com sua geometria descrevendo uma hélice no espaço tridimensional. Por fim, no terceiro experimento, analisamos o problema de uma estrutura composta por vários elementos de barras interconectados. Estes estudos consideram deformações, rotações e esforços no espaço tridimensional, evidenciando a potencialidade e o comportamento do modelo em aplicações de estruturas mais complexas.

### 4.0.1 Experimento 1

Este experimento tem como objetivo comparar a solução numérica com a solução analítica, para evidenciar a sua precisão. Para isso, consideramos uma viga de comprimento  $L = 3.0m$ , engastada na sua extremidade inicial e livre na final, sujeita a uma carga distribuída  $F_3 = -5,0kN$  na direção  $e_3$ , conforme ilustra a Fig.4.1. Além disso, consideramos as propriedades geométricas e constitutivas como descritas na Tab.4.1. Para resolver este problema, discretizamos o nosso domínio numa malha de elementos finitos com 14 elementos uniformemente espaçados, e utilizamos funções de interpolações lineares para os campos dos deslocamentos e esforços generalizados.

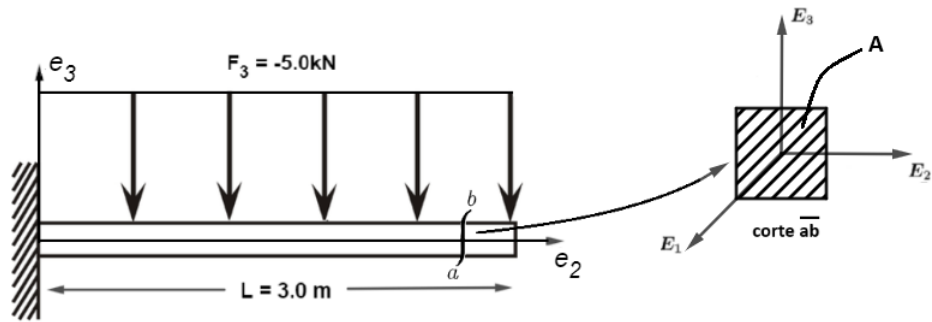


Figura 4.1: Representação esquemática de uma viga retilínea, engastada e livre, de comprimento  $L = 3.0\text{ m}$ , com seção transversal retangular  $ab$  e submetida a uma carga distribuída  $F_3 = -5.0\text{ kN}$ .

Tabela 4.1: Propriedades da viga

Descrição	Valores
Módulo de elasticidade $E$	$2,0 \times 10^{11}\text{ Pa}$
Módulo de elasticidade transversal $G$	$7,5 \times 10^{10}\text{ Pa}$
Momento de inércia $I_1$	$6,0 \times 10^{-7}\text{ m}^4$
Momento de inércia $I_2$	$6,0 \times 10^{-7}\text{ m}^4$
Momento polar de inércia $J$	$1,2 \times 10^{-6}\text{ m}^4$
Área de seção transversal $A$	$2,8 \times 10^{-3}\text{ m}^2$

As Figs.4.2 e 4.3 ilustram a comparação dos resultados numéricos e analíticos para as componentes não nulas do deslocamento e da rotação, respectivamente.

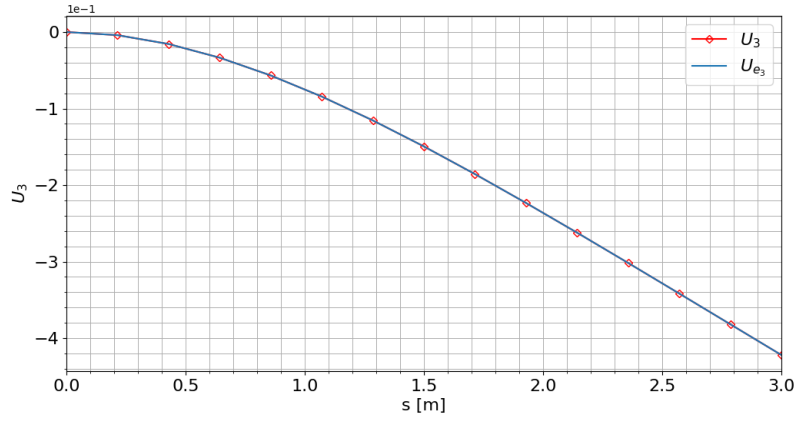


Figura 4.2: Comparação das soluções numéricas  $U_3$  e analítica  $U_{3e}$  da componente do deslocamento na direção  $e_3$  de uma viga engastada e livre, sujeita a uma carga distribuída  $F_3 = -5,0\text{kN}$  na direção do eixo  $e_3$ .

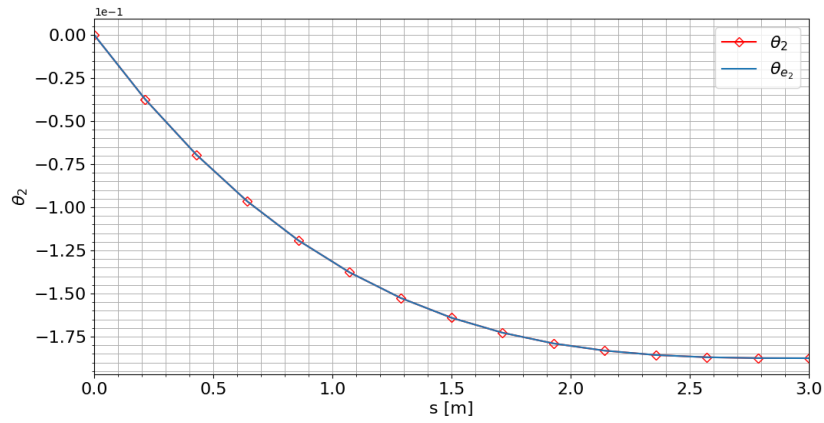


Figura 4.3: Comparação das soluções numéricas  $\theta_2$  e analítica  $\theta_{2e}$  da componente da rotação em relação ao eixo  $e_2$  de uma viga engastada e livre, sujeita a uma carga distribuída  $F_3 = -5,0\text{kN}$  na direção do eixo  $e_3$ .

As Figs.4.4 e 4.5 ilustram a comparação dos resultados numéricos e analíticos para as componentes não nulas dos momentos fletores e dos esforços cisalhantes, respectivamente.

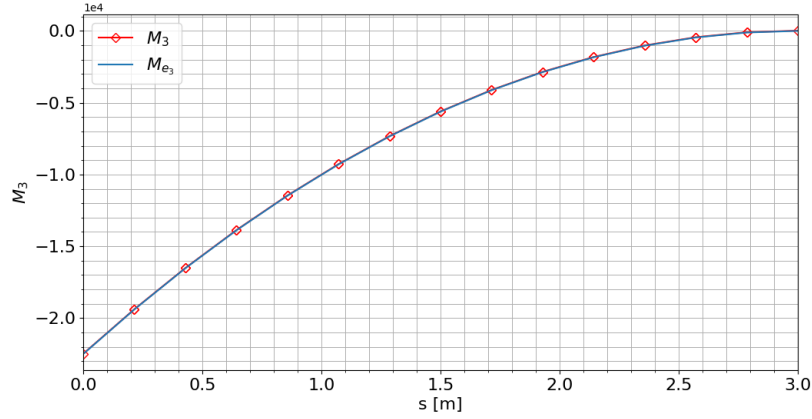


Figura 4.4: Comparação das soluções numéricas  $M_3$  e analítica  $M_{3e}$  da componente do momento fletor em relação ao eixo  $e_3$  de uma viga engastada e livre, sujeita a uma carga distribuída  $F_3 = -5,0\text{kN}$  na direção do eixo  $e_3$ .

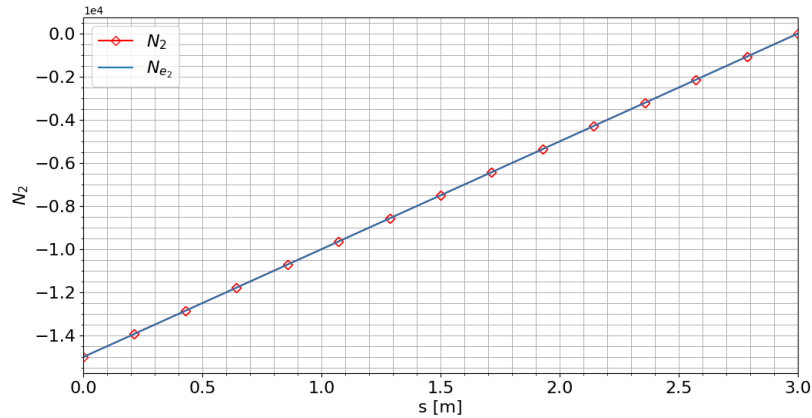


Figura 4.5: Comparação das soluções numéricas  $N_2$  e analítica  $N_{2e}$  da componente dos esforços cisalhantes na direção  $e_2$  de uma viga engastada e livre, sujeita a uma carga distribuída  $F_3 = -5,0\text{kN}$  na direção do eixo  $e_3$ .

Com base nos resultados gráficos apresentados, podemos constatar a boa precisão da solução numérica. Fazendo o cálculo do erro relativo para as componentes do deslocamento, rotação, momento e esforço cisalhante, verificamos valores percentuais na ordem de  $10^{-2}\%$ , podendo ser considerados desprezíveis. Esses resultados evidenciam a acurácia da formulação numérica.

## 4.1 Experimento 2

Este experimento tem como objetivo comparar a solução numérica com a solução analítica, para evidenciar a sua precisão quando a estrutura descreve um comportamento para fora do plano, isto é, no espaço tridimensional. Para isso, consideramos uma viga de comprimento  $L = 3.0\text{ m}$ , engastada na sua extremidade inicial e livre final, sujeita a uma carga concentrada unitária  $F_3 = 1,0\text{ kN}$  aplicada na sua extremidade livre e na mesma direção do eixo  $e_3$ , conforme ilustra a Fig.4.6. As propriedades geométricas e constitutivas são as mesmas apresentadas na Tab.4.1. A linha neutra desta estrutura representa uma curva no espaço tridimensional descrita pela equação da hélice:

$$\mathbf{r}(s) = R \cos\left(\frac{s}{m}\right) \mathbf{e}_1 + R \sin\left(\frac{s}{m}\right) \mathbf{e}_2 + C \left(\frac{s}{m}\right) \mathbf{e}_3 \quad (4.1)$$

onde  $R$  é o seu raio,  $C$  a sua altura do passo e  $m = \sqrt{R^2 + C^2}$  é o parâmetro geométrico da hélice.

Decompondo a carga  $F_3$  em componentes nas direções tangencial e binormal do sistema de coordenadas local do modelo, temos que:

$$\mathbf{F} = \left(\frac{C}{m}P\right) \mathbf{E}_1 + \left(\frac{R}{m}P\right) \mathbf{E}_3. \quad (4.2)$$

Em nosso experimento, consideramos os parâmetros geométricos  $C = R = \frac{\sqrt{2}}{4\pi}$  e obtemos  $m = \frac{1}{2\pi}$ . Com isso, a curvatura  $\gamma = \frac{C}{m^2}$  e a torção  $\mu = \frac{R}{m^2}$  assumem valores iguais a  $\sqrt{2}\pi$ . Substituindo estes resultados na Eq.4.2 encontramos o valor de  $0,707\text{ kN}$  para cada componente da carga  $F_3$ .

Para resolver este problema, discretizamos o domínio utilizando uma malha de elementos finitos com 96 elementos uniformemente espaçados e funções de interpolação lineares para aproximar tanto os campos de deslocamentos quanto os esforços generalizados.

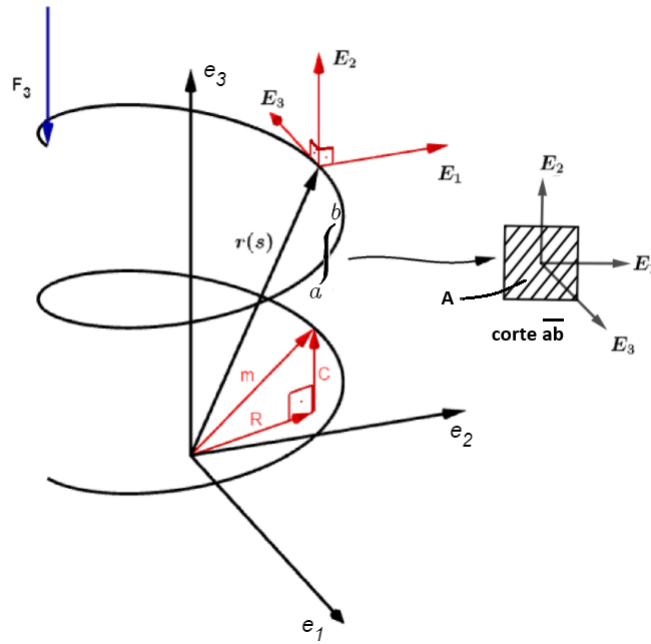


Figura 4.6: Representação esquemática de uma hélice engastada sujeita a uma carga concentrada  $F_3$  aplicada na sua extremidade livre.

As Figs.4.7 a 4.12 ilustram a comparação entre a solução numérica e analítica para as componentes dos deslocamentos e das rotações generalizados.

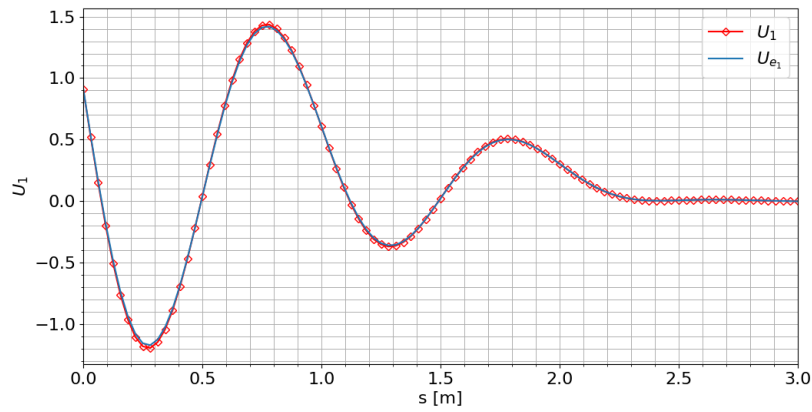


Figura 4.7: Comparação das soluções numéricas  $U_1$  e analíticas  $U_{1e}$  da componente do deslocamento na direção  $e_1$  de uma hélice simplesmente engastada, sujeita a uma carga concentrada  $F_3 = 1,0 \text{ kN}$  aplicada na sua extremidade livre, com curvatura e torção  $\gamma = \mu = \sqrt{2\pi}$ , respectivamente.



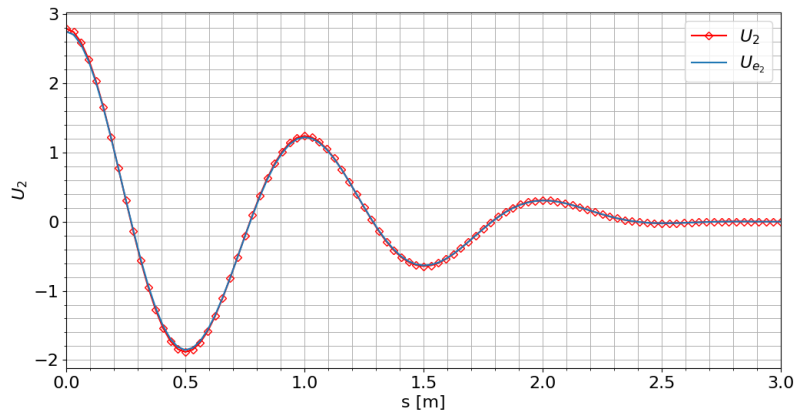


Figura 4.8: Comparação das soluções numéricas  $U_2$  e analítica  $U_{2e}$  da componente do deslocamento na direção  $e_2$  de uma hélice simplesmente engastada, sujeita a uma carga concentrada  $F_3 = 1,0 \text{ kN}$  aplicada na sua extremidade livre, com curvatura e torção  $\gamma = \mu = \sqrt{2\pi}$ , respectivamente.

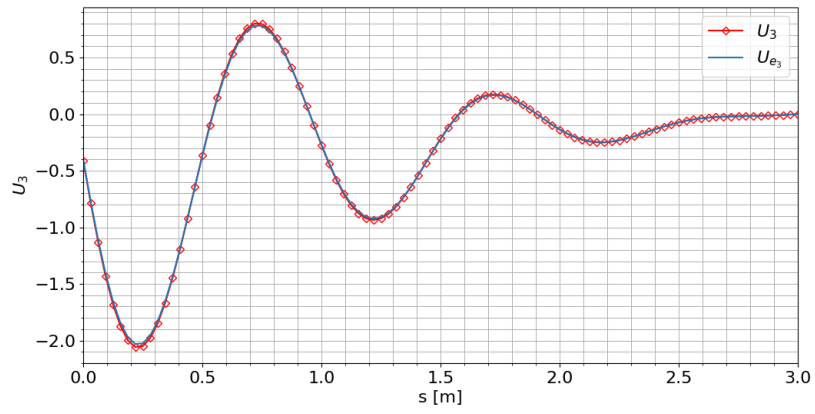


Figura 4.9: Comparação das soluções numéricas  $U_3$  e analítica  $U_{3e}$  da componente do deslocamento na direção  $e_3$  de uma hélice simplesmente engastada, sujeita a uma carga concentrada  $F_3 = 1,0 \text{ kN}$  aplicada na sua extremidade livre, com curvatura e torção  $\gamma = \mu = \sqrt{2\pi}$ , respectivamente.

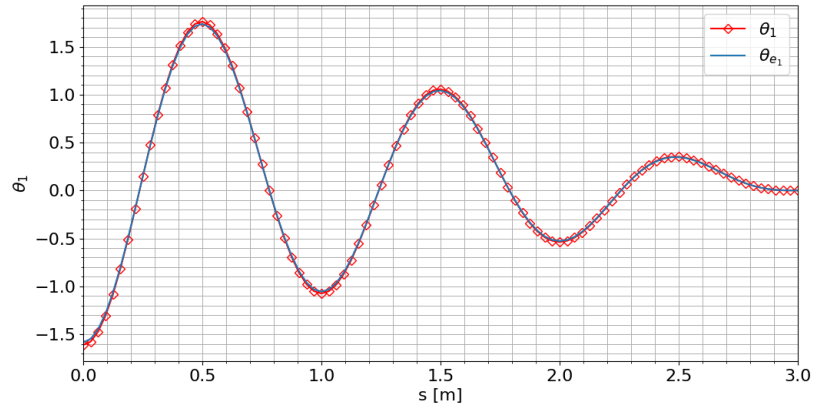


Figura 4.10: Comparação das soluções numéricas  $\theta_1$  e analítica  $\theta_{1e}$  da componente da rotação em relação ao eixo  $e_1$  de uma hélice simplesmente engastada, sujeita a uma carga concentrada  $F_3 = 1,0\text{kN}$  aplicada na sua extremidade livre, com curvatura e torção  $\gamma = \mu = \sqrt{2\pi}$ , respectivamente.

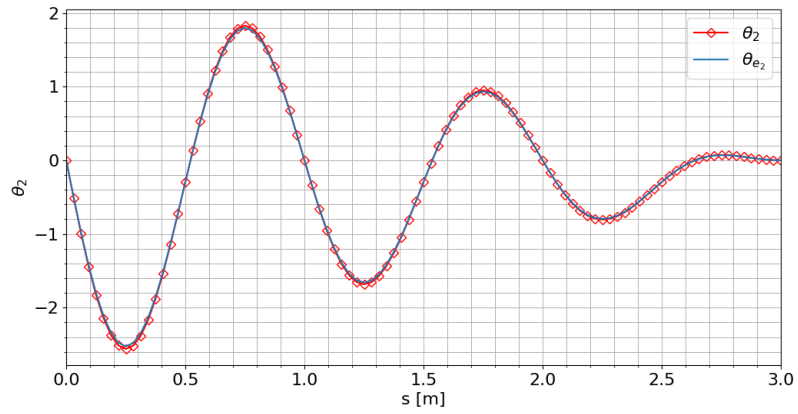


Figura 4.11: Comparação das soluções numéricas  $\theta_2$  e analítica  $\theta_{2e}$  da componente da rotação em relação ao eixo  $e_2$  de uma hélice simplesmente engastada, sujeita a uma carga concentrada  $F_3 = 1,0\text{kN}$  aplicada na sua extremidade livre, com curvatura e torção  $\gamma = \mu = \sqrt{2\pi}$ , respectivamente.

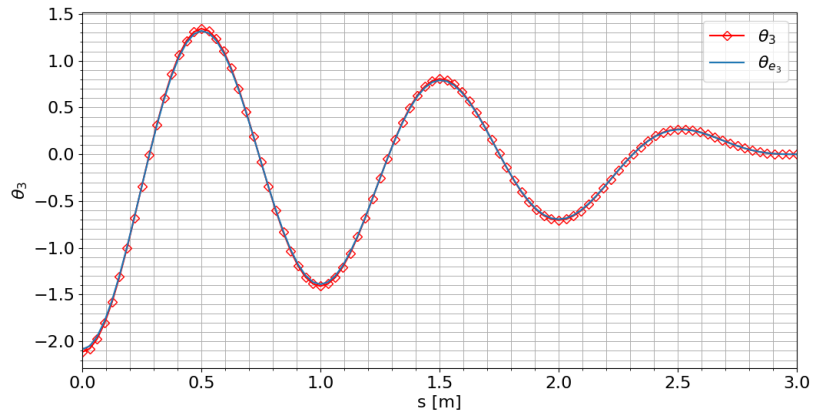


Figura 4.12: Comparação das soluções numéricas  $\theta_3$  e analítica  $\theta_{3e}$  da componente da rotação em relação ao eixo  $e_3$  de uma hélice simplesmente engastada, sujeita a uma carga concentrada  $F_3 = 1,0\text{kN}$  aplicada na sua extremidade livre, com curvatura e torção  $\gamma = \mu = \sqrt{2\pi}$ , respectivamente.

As Figs.4.13 a 4.18 ilustram a comparação entre a solução numérica e analítica para as componentes dos momentos e dos esforços cisalhantes generalizados.

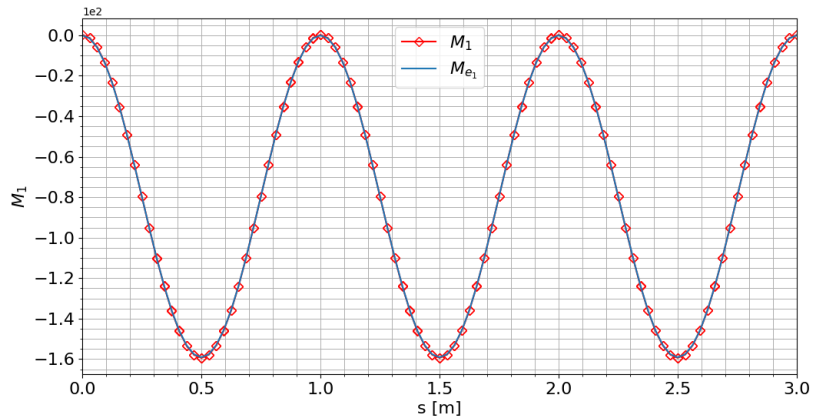


Figura 4.13: Comparação das soluções numéricas  $M_1$  e analítica  $M_{1e}$  da componente do momento em relação ao eixo  $e_1$  de uma hélice simplesmente engastada, sujeita a uma carga concentrada  $F_3 = 1,0\text{kN}$  aplicada na sua extremidade livre, com curvatura e torção  $\gamma = \mu = \sqrt{2\pi}$ , respectivamente.

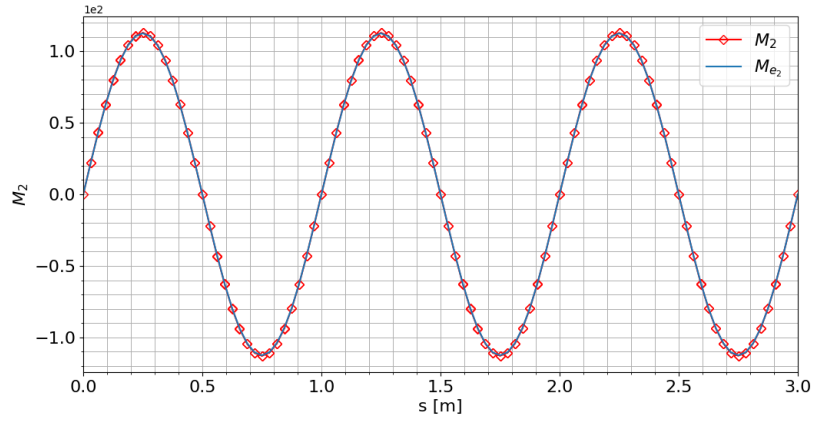


Figura 4.14: Comparação das soluções numéricas  $M_2$  e analítica  $M_{2e}$  da componente do momento em relação ao eixo  $e_2$  de uma hélice simplesmente engastada, sujeita a uma carga concentrada  $F_3 = 1,0\text{kN}$  aplicada na sua extremidade livre, com curvatura e torção  $\gamma = \mu = \sqrt{2\pi}$ , respectivamente.

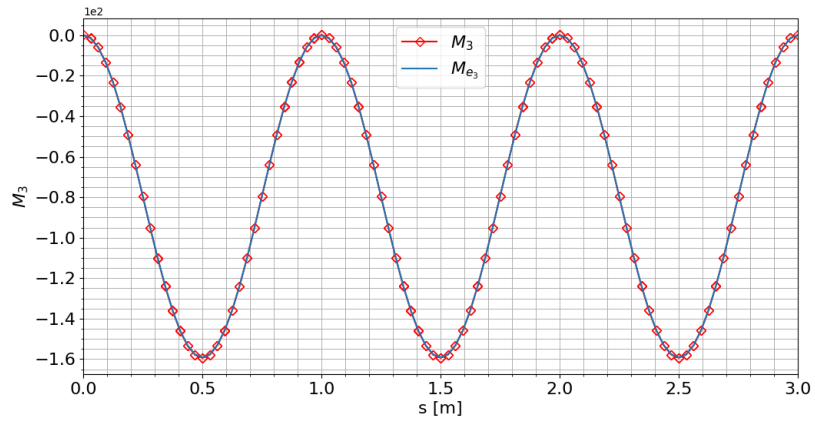


Figura 4.15: Comparação das soluções numéricas  $M_3$  e analítica  $M_{3e}$  da componente do momento em relação ao eixo  $e_3$  de uma hélice simplesmente engastada, sujeita a uma carga concentrada  $F_3 = 1,0\text{kN}$  aplicada na sua extremidade livre, com curvatura e torção  $\gamma = \mu = \sqrt{2\pi}$ , respectivamente.

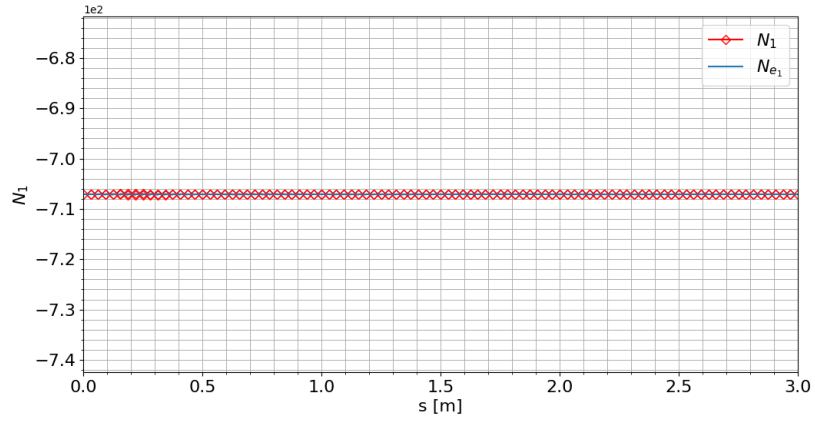


Figura 4.16: Comparação das soluções numéricas  $N_1$  e analítica  $N_{1e}$  da componente dos esforços cisalhantes na direção  $e_1$  de uma hélice simplesmente engastada, sujeita a uma carga concentrada  $F_3 = 1,0\text{ kN}$  aplicada na sua extremidade livre, com curvatura e torção  $\gamma = \mu = \sqrt{2\pi}$ , respectivamente.

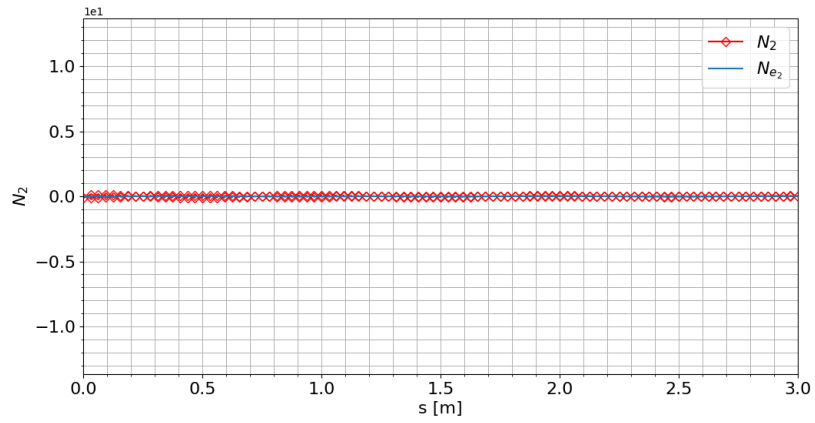


Figura 4.17: Comparação das soluções numéricas  $N_2$  e analítica  $N_{2e}$  da componente dos esforços cisalhantes na direção  $e_2$  de uma hélice simplesmente engastada, sujeita a uma carga concentrada  $F_3 = 1,0\text{ kN}$  aplicada na sua extremidade livre, com curvatura e torção  $\gamma = \mu = \sqrt{2\pi}$ , respectivamente.

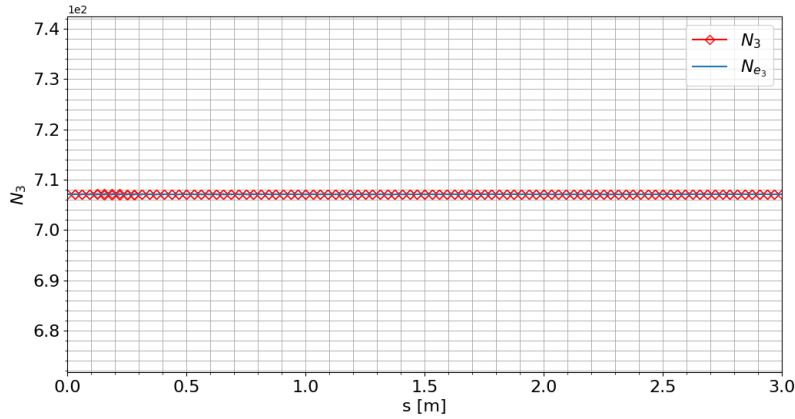


Figura 4.18: Comparação das soluções numéricas  $N_3$  e analítica  $N_{3e}$  da componente dos esforços cisalhantes na direção  $e_3$  de uma hélice simplesmente engastada, sujeita a uma carga concentrada  $F_3 = 1,0\text{ kN}$  aplicada na sua extremidade livre, com curvatura e torção  $\gamma = \mu = \sqrt{2\pi}$ , respectivamente.

Com base nos resultados gráficos apresentados, calculamos os erros percentuais relativos para as componentes dos deslocamentos, rotações, momentos e esforços cisalhantes. Observamos que os erros percentuais obtidos para cada uma das componentes dos deslocamentos e rotações estão na ordem de  $10^{-2}\%$ , enquanto os momentos apresentam erros na ordem de  $10^{-3}\%$ , e os esforços cisalhantes na ordem de  $10^{-4}\%$ . Estes erros são muito pequenos e podemos desprezá-los, o que evidencia a acurácia da formulação numérica quando a estrutura descreve um comportamento fora do plano.

## 4.2 Experimento 3

O presente experimento tem como objetivo investigar o comportamento da formulação em um sistema composto por múltiplos elementos de barras interconectadas. Esta estrutura é constituída por tubos de alumínio de seção transversal circular vazada, de diâmetro externo  $D = 20\text{ mm}$  e de diâmetro interno  $d = 16\text{ mm}$ , conforme ilustrado na Figura 4.19. A estrutura possui seus movimentos de rotação e deslocamentos restritos em todas as direções nos nós 1, 3 e 6, e está sujeita à ação simultânea das cargas concentradas  $F'_3 = -600\text{ N}$  e  $F''_3 = -200\text{ N}$ , aplicadas nos nós 5 e 2, respectivamente.

Para a resolução deste problema, foram utilizadas as propriedades geométricas e constitutivas apresentadas na Tabela 4.2. O domínio foi discretizado em uma malha composta por 400 elementos finitos uniformemente distribuídos. Para a aproximação dos campos de deslocamentos e esforços generalizados, empregou-se funções de interpolação lineares.

Tabela 4.2: Propriedades da estrutura

Descrição	Valores
Módulo de elasticidade $E$	$6,9 \times 10^{10}$ Pa
Módulo de elasticidade transversal $G$	$2,875 \times 10^{10}$ Pa
Momento de inércia $I_1$	$4,637 \times 10^{-9}$ m <sup>4</sup>
Momento de inércia $I_2$	$4,637 \times 10^{-9}$ m <sup>4</sup>
Momento polar de inércia $J$	$9,274 \times 10^{-9}$ m <sup>4</sup>
Área de seção transversal $A$	$1,131 \times 10^{-4}$ m <sup>2</sup>

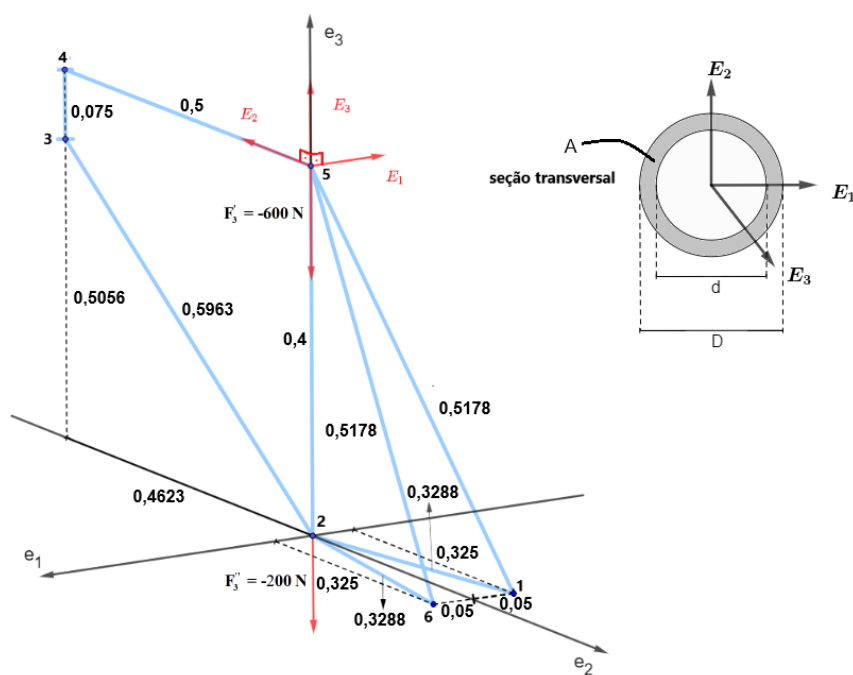


Figura 4.19: Representação tridimensional da estrutura interconectada de seção tubular vazada, sob a ação das cargas concentradas  $F'_3 = -600$  N e  $F''_3 = -200$  N.

As Figs. 4.20 a 4.27 representam graficamente a solução numérica para os campos dos deslocamentos e esforços generalizados na estrutura interconectada. A escala de cores representa as magnitudes dessas grandezas, em que a cor vermelha indica os valores máximos e a cor azul, os mínimos. A transição contínua entre as cores ilustra gradualmente as variações das magnitudes, os quais permitem uma interpretação visual precisa e detalhada dos resultados.

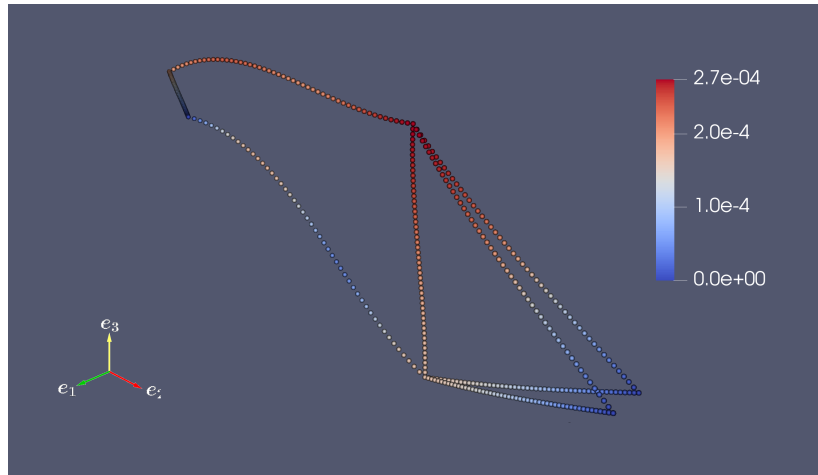


Figura 4.20: Configuração deformada da estrutura, quando aplicadas cargas concentradas  $\mathbf{F}'_3 = -600\text{ N}$  e  $\mathbf{F}''_3 = -200\text{ N}$ .

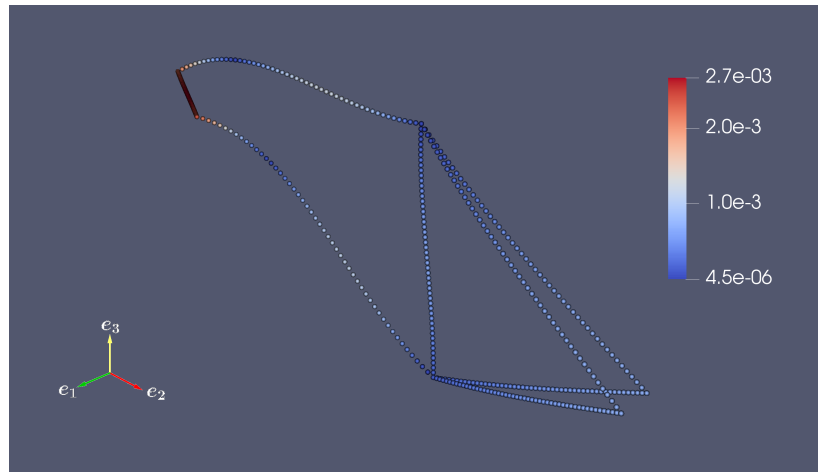


Figura 4.21: Rotação ao longo da estrutura, em decorrência da aplicação das cargas concentradas  $\mathbf{F}'_3 = -600\text{ N}$  e  $\mathbf{F}''_3 = -200\text{ N}$ .

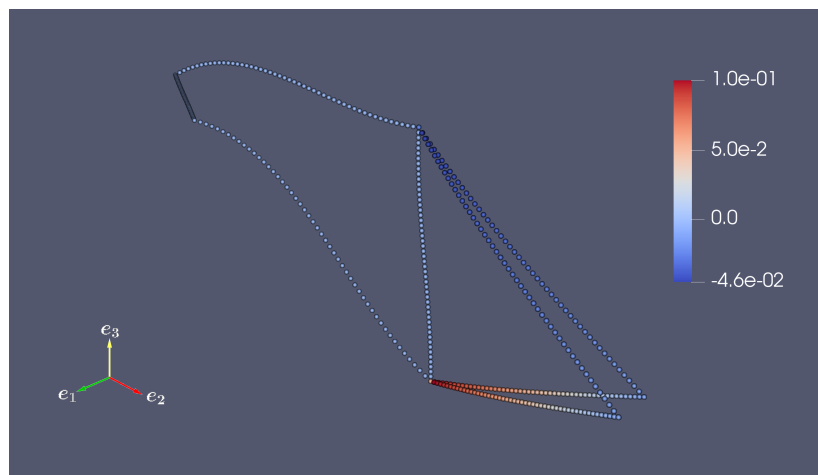


Figura 4.22: Variação da componente  $M_1$  do momento em relação ao eixo  $e_1$ , em decorrência da aplicação das cargas concentradas  $\mathbf{F}'_3 = -600\text{ N}$  e  $\mathbf{F}''_3 = -200\text{ N}$ .



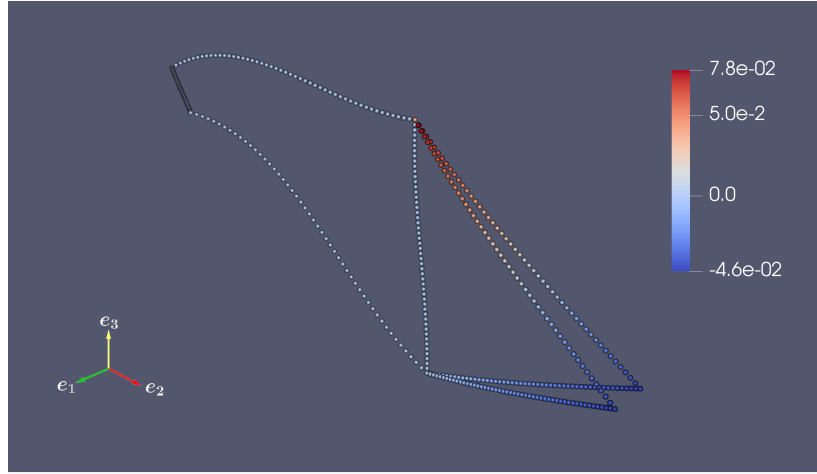


Figura 4.23: Variação da componente  $M_2$  do momento em relação ao eixo  $e_2$ , em decorrência da aplicação das cargas concentradas  $\mathbf{F}'_3 = -600\text{ N}$  e  $\mathbf{F}''_3 = -200\text{ N}$ .

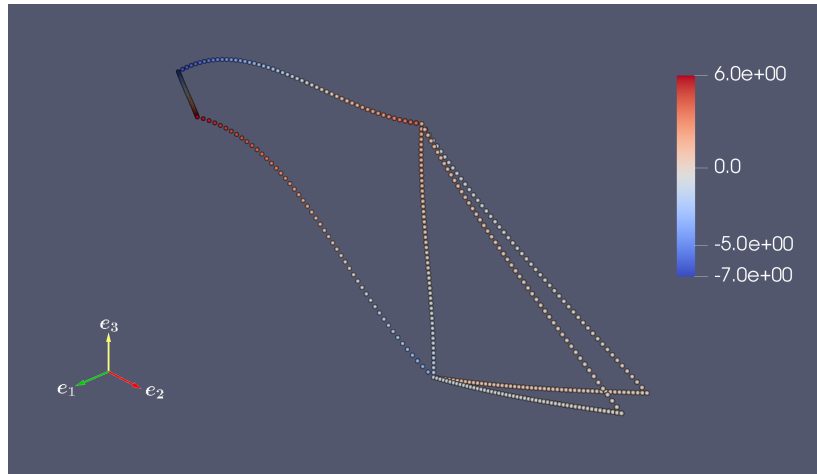


Figura 4.24: Variação da componente  $M_3$  do momento em relação ao eixo  $e_3$ , em decorrência da aplicação das cargas concentradas  $\mathbf{F}'_3 = -600\text{ N}$  e  $\mathbf{F}''_3 = -200\text{ N}$ .

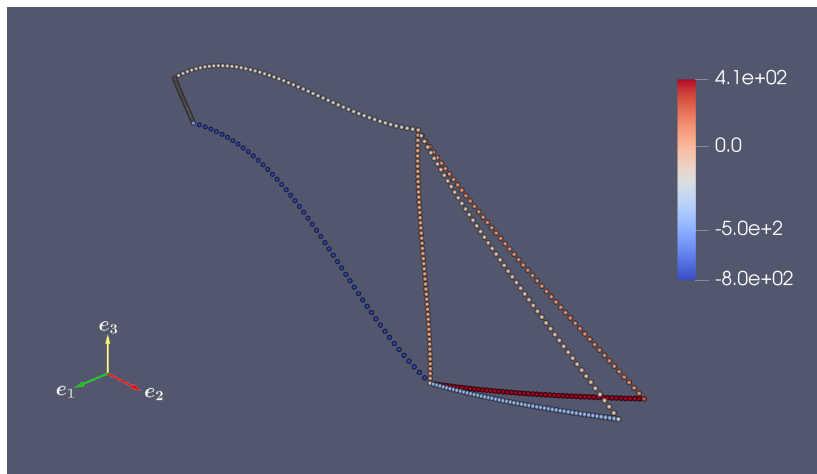


Figura 4.25: Variação da componente  $N_1$  dos esforços cisalhantes na direção do eixo  $e_1$ , em decorrência da aplicação das cargas concentradas  $\mathbf{F}'_3 = -600\text{ N}$  e  $\mathbf{F}''_3 = -200\text{ N}$ .

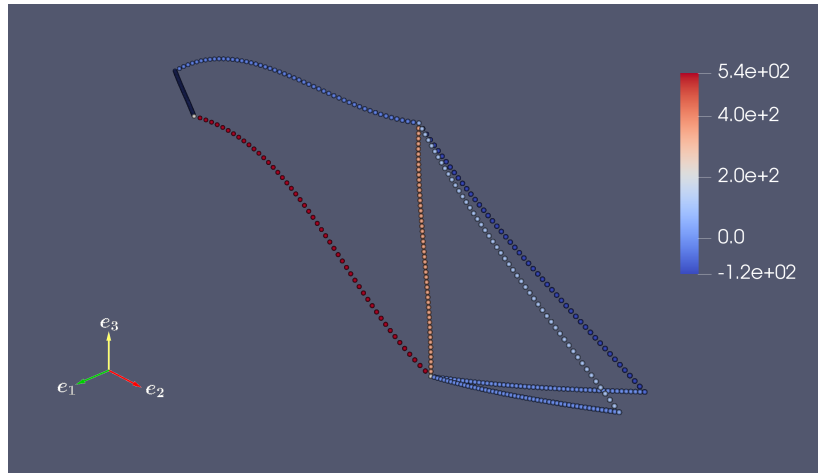


Figura 4.26: Variação da componente  $N_2$  dos esforços cisalhantes na direção do eixo  $e_2$ , em decorrência da aplicação das cargas concentradas  $\mathbf{F}'_3 = -600\text{ N}$  e  $\mathbf{F}''_3 = -200\text{ N}$ .

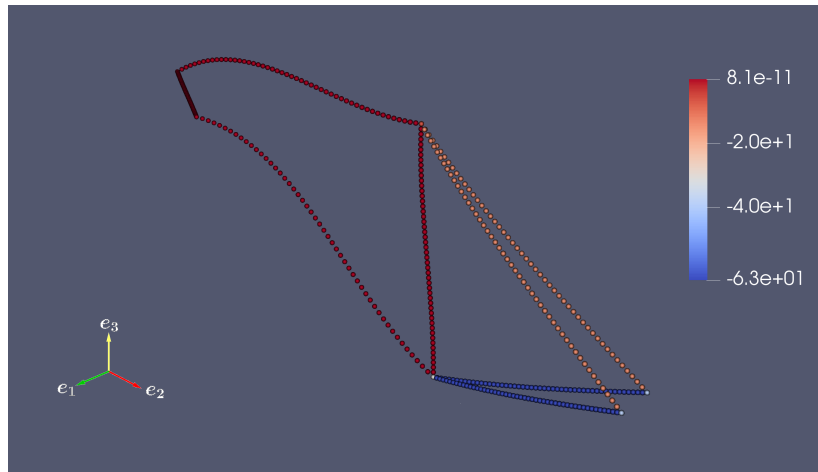


Figura 4.27: Variação da componente  $N_3$  dos esforços cisalhantes na direção do eixo  $e_3$ , em decorrência da aplicação das cargas concentradas  $\mathbf{F}'_3 = -600\text{ N}$  e  $\mathbf{F}''_3 = -200\text{ N}$ .

Nessa seção, apresentamos três problemas estruturais com naturezas geométricas distintas, os quais nos permitiram explorar a capacidade do modelo de representar as deformações em diversos cenários estruturais, considerando diferentes condições de contorno e distribuições de cargas.

# Capítulo 5

## Conclusões

Fundamentado no modelo de estruturas flexíveis unidimensionais, este trabalho apresentou o desenvolvimento de uma formulação variacional mista estabilizada, baseada no princípio de Hellinger–Reissner, para a solução do problema da viga de Timoshenko no espaço tridimensional, em regime de pequenos deslocamentos e deformações.

A formulação proposta foi desenvolvida como alternativa às limitações observadas em abordagens puramente cinemáticas, que tendem a apresentar imprecisões significativas quando os efeitos de cisalhamento não podem ser desprezados. Para superar essas restrições, adotamos uma representação independente para os campos de deslocamentos e esforços generalizados, utilizando funções de interpolação específicas para cada um. Essa estratégia demonstrou-se eficaz na mitigação de fenômenos como o travamento por cisalhamento, contribuindo para maior coerência física e robustez numérica das soluções.

Os resultados obtidos com a formulação variacional mista ressaltaram a importância da estabilização numérica por meio da introdução de termos residuais, baseados no método dos mínimos quadrados, os quais foram aplicados às equações de equilíbrio. Essa abordagem proporcionou ganhos significativos em precisão, estabilidade e eficiência computacional.

Além de validar a robustez do modelo, este trabalho apresenta potencial para ser expandido no contexto da otimização estrutural. A proposta consiste em integrar técnicas de otimização à formulação variacional, por meio da definição de um funcional de custo adequado, permitindo a calibração de diferentes parâmetros do sistema. Entre os parâmetros passíveis de otimização, destacam-se o comprimento, a espessura, a área da seção transversal e as configurações estruturais (como o posicionamento de apoios, a conectividade entre elementos e o arranjo topológico). O objetivo é alcançar soluções que atendam simultaneamente a critérios de desempenho mecânico, segurança estrutural e economia de material.

Por fim, os objetivos propostos foram plenamente alcançados. O modelo desenvolvido mostrou-se uma alternativa eficaz para a análise de vigas de Timoshenko sob

a influência significativa de cisalhamento, demonstrando ainda potencial de evolução para aplicações práticas em projetos estruturais. Espera-se que a abordagem proposta contribua para o desenvolvimento de soluções mais robustas, flexíveis e inovadoras na engenharia estrutural, ampliando seu impacto tanto no meio acadêmico quanto no profissional, por meio da adoção de métodos mais eficientes, confiáveis e orientados à otimização.

## Referências Bibliográficas

- [1] ROSS, A. L. “Cable Kinking Analysis and Prevention”, *Journal of Engineering for Industry*, v. vol. 99, pp. pp. 112–115, 1977.
- [2] ASLANOV, V. S., LEDKOV, A. S. (Eds.). *Delivery of a payload from an orbit by means of a space tether*. Woodhead Publishing, 2012. ISBN: 978-0-85709-156-7.
- [3] DOMÍNGUEZ, J. V. J. E. J. M. J. “Dynamic Analysis of a Light Structure in Outer Space: Short Electrodynamic Tether”, *Multibody System Dynamics*, v. 10, pp. 125–146, 2003. ISSN: 1384-5640,1573-272X.
- [4] SA-ARDYEN, PHISSET; VOLOGODSKII, A. V. S. N. C. “The Flexibility of DNA Double Crossover Molecules”, *Biophysical Journal*, v. 84, pp. 3829–3837, 2003. ISSN: 0006-3495,1542-0086. doi: 10.1016/s0006-3495(03)75110-8. Disponível em: <<http://doi.org/10.1016/s0006-3495%2803%2975110-8>>.
- [5] MENZEL, R., GELLERT, M. “The Biochemistry and Biology of DNA Gyrase”. In: Liu, L. F. (Ed.), *DNA Topoisomerases: Biochemistry and Molecular Biology*, v. 29, *Advances in Pharmacology*, Academic Press, pp. 39–69, 1994. doi: [https://doi.org/10.1016/S1054-3589\(08\)60539-6](https://doi.org/10.1016/S1054-3589(08)60539-6). Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1054358908605396>>.
- [6] FLEISCHFRESSER, S. A. *Uma formulação do Método dos Elementos de contorno para a análise de vigas de Timoshenko*. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Paraná, 2012. Disponível em: <<https://acervodigital.ufpr.br/bitstream/handle/1884/29366/R%20-%20T%20-%20SERGIO%20AUGUSTO%20FLEISCHFRESSER.pdf;jsessionid=D7F6C2AA171F17FEB7641D8EF3BEE461?sequence=1>>.
- [7] ASSAM, A. E. *Método dos elementos finitos: primeiros passos*. 3ªed ed. Campinas, SP, Editora da Unicamp, 2020.
- [8] WAGNER, F. G. W. “Shear correction factors in Timoshenko’s beam theory for arbitrary shaped cross-sections”, *Computational Mechanics*, v. 27, pp. 199–207, 2001. ISSN: 0178-7675,1432-0924. doi: 10.1007/s004660100239.

- [9] COWPER, G. R. “The Shear Coefficient in Timoshenko’s Beam Theory”, *Journal of Applied Mechanics*, v. 87, n. 4, pp. 621–635, 1983. ISSN: 0022-460X. doi: 10.1115/1.3625046. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022460X83905114>>.
- [10] STEWART, J., CLEGG, D., WATSON, S. *Cálculo*, v. 2. Cengage, 2022. ISBN: 9780357113516.
- [11] FRANCO BREZZI, MICHEL FORTIN (AUTH.), F. B. M. F. E. *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*. Springer Series in Computational Mathematics 15. Springer-Verlag New York, 1991. ISBN: 978-1-4612-7824-5, 978-1-4612-3172-1.
- [12] CIARLET, P. G. *The finite element method for elliptic problems*. Classics in applied mathematics 40. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002. ISBN: 9780898715149, 0898715148.
- [13] BREZZI, F. “On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrangian multipliers”, *Publications mathématiques et informatique de Rennes*, , n. S4, pp. 1–26, 1974. Disponível em: <[http://www.numdam.org/item/PSMIR\\_1974\\_\\_S4\\_A1\\_0.pdf](http://www.numdam.org/item/PSMIR_1974__S4_A1_0.pdf)>.
- [14] ARNOLD, D. N. “Discretization by finite elements of a model parameter dependent problem”, *Numerische Mathematik*, v. 37, n. 3, pp. 405–421, 1981.
- [15] MIRANDA, A. F. L. T. J. H. L. P. F. I. “Mixed Petrov-Galerkin methods for the Timoshenko beam problem”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 63, pp. 133–154, 1987. ISSN: 0045-7825. doi: 10.1016/0045-7825(87)90168-x. Disponível em: <<http://doi.org/10.1016/0045-7825%2887%2990168-x>>.
- [16] REDDY, B., VOLPI, M. “Mixed finite element methods for the circular arch problem”, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, v. 97, n. 1, pp. 125–145, 1992.
- [17] ARUNAKIRINATHAR, K., REDDY, B. “Mixed finite element methods for elastic rods of arbitrary geometry”, *Numerische Mathematik*, v. 64, n. 1, pp. 13–43, 1993.
- [18] SANTOS, A. J. B. D. *Modelos mecânicos e numéricos para estruturas flexíveis unidimensionais*. Tese (doutorado em modelagem computacional), Laboratório Nacional de Computação Científica (LNCC), Petrópolis, Petrópolis, RJ, Brasil, 2007. Disponível em: <<https://tede.lncc.br/handle/tede/67>>.

- [19] HE, J. H. “Generalized Hellinger-Reissner Principle”, *Journal of Applied Mechanics*, v. 67, pp. 326, 2000. ISSN: 0021-8936,1884-832X. doi: 10.1115/1.1303826. Disponível em: <<http://doi.org/10.1115/1.1303826>>.
- [20] BABUŠKA, I. “The finite element method with Lagrangian multipliers”, *Numerische Mathematik*, v. 20, pp. 179–192, 1973. ISSN: 0029-599X,0945-3245.
- [21] DOUGLAS, JIM; WANG, J. P. “An absolutely stabilized finite element method for the Stokes problem”, *Mathematics of Computation*, v. 52, pp. 495–495, 1989. ISSN: 0025-5718,1088-6842.
- [22] MIRANDA, A. F. L. L. P. F. T. J. H. I. “Stability, convergence and accuracy of a new finite element method for the circular arch problem”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 63, pp. 281–303, 1987. ISSN: 0045-7825. doi: 10.1016/0045-7825(87)90074-0. Disponível em: <<http://doi.org/10.1016/0045-7825%2887%2990074-0>>.
- [23] SANTOS, A. J. B. D., LOULA, A. F. D., GUERREIRO, J. N. C. “Stability and convergence of mixed methods for elastic rods of arbitrary geometry”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 198, n. 15-16, pp. 1283–1297, 2009. ISSN: 0045-7825.

## Apêndice A

# Formulação padrão para o problema de viga de Timoshenko no espaço tridimensional

Apresentamos, neste apêndice, as expressões dos deslocamentos, rotações, momentos e esforços cisalhantes em termos de componentes em  $\mathbb{R}^3$ .

### A.1 Equações de equilíbrio em $\mathbb{R}^3$

Sejam funções arbitrárias  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  e  $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$  com  $\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi} \in \mathbb{R}^3$ . Atendendo as Eqs. 2.31 e 2.32 e aplicando a integração ao longo de  $s \in (0, L)$ , obtêm-se:

$$-\int_0^s \mathbf{D}_\theta \left( \frac{d\mathbf{u}}{ds} - \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E}_1 \right) \cdot \frac{d\mathbf{v}}{ds} ds + \int_0^s \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} ds = \mathbf{0}, \quad (\text{A.1})$$

$$-\int_0^s \mathbf{D}_\theta \frac{d\boldsymbol{\theta}}{ds} \cdot \frac{d\boldsymbol{\psi}}{ds} ds + \int_0^s \mathbf{E}_1 \times \mathbf{D}_u \left( \frac{d\mathbf{u}(s)}{ds} - \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E}_1 \right) \cdot \boldsymbol{\psi} ds = \mathbf{0}. \quad (\text{A.2})$$

Somando membro a membro estas duas expressões e reordenando os termos, obtêm-se:

$$\int_0^s \mathbf{D}_\theta \frac{d\boldsymbol{\theta}}{ds} \cdot \frac{d\boldsymbol{\psi}}{ds} ds + \int_0^s \mathbf{D}_u \left( \frac{d\mathbf{u}}{ds} - \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E}_1 \right) \cdot \left( \frac{d\mathbf{v}}{ds} - \boldsymbol{\psi} \times \mathbf{E}_1 \right) ds = \int_0^s \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} ds. \quad (\text{A.3})$$

onde

$$\begin{aligned} \int_0^s \mathbf{D}_\theta \frac{d\boldsymbol{\theta}}{ds} \cdot \frac{d\boldsymbol{\psi}}{ds} ds &= \int_0^s GJ \left( \frac{d\theta_1}{ds} - \gamma\theta_2 \right) \cdot \left( \frac{d\psi_1}{ds} - \gamma\psi_2 \right) ds + \\ &+ \int_0^s EI_1 \left( \frac{d\theta_2}{ds} + \gamma\theta_1 - \mu\theta_3 \right) \cdot \left( \frac{d\psi_2}{ds} + \gamma\psi_1 - \mu\psi_3 \right) ds + \\ &+ \int_0^s EI_2 \left( \frac{d\theta_1}{ds} + \mu\theta_2 \right) \cdot \left( \frac{d\psi_3}{ds} + \mu\psi_2 \right) ds, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$



$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{u}}{ds} - \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E}_1 &= \left( \frac{du_1}{ds} - \gamma u_2 \right) \mathbf{E}_1 + \left( \frac{du_2}{ds} + \gamma u_1 - \mu u_3 - \theta_3 \right) \mathbf{E}_2 + \\ &+ \left( \frac{du_3}{ds} + \mu u_2 - \theta_2 \right) \mathbf{E}_3,\end{aligned}\quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned}\int_0^S \mathbf{D}_u \left( \frac{d\mathbf{u}}{ds} - \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E}_1 \right) \left( \frac{d\mathbf{v}}{ds} - \boldsymbol{\psi} \times \mathbf{E}_1 \right) ds &= \int_0^S EA \left( \frac{du_1}{ds} - \gamma u_2 \right) \left( \frac{dv_1}{ds} - \gamma v_2 \right) ds + \\ &+ \int_0^S GA_1 \left( \frac{du_2}{ds} + \gamma u_1 - \mu u_3 - \theta_3 \right) \left( \frac{dv_2}{ds} + \gamma v_1 - \mu v_3 - \psi_3 \right) ds + \\ &+ \int_0^S GA_2 \left( \frac{du_3}{ds} + \mu u_2 + \theta_2 \right) \left( \frac{dv_3}{ds} + \mu v_2 + \psi_2 \right) ds.\end{aligned}\quad (\text{A.6})$$

Substituindo os resultados (A.4 - A.6) em (A.3), obtêm-se:

$$\begin{aligned}\int_0^S \mathbf{D}_\theta \frac{d\boldsymbol{\theta}}{ds} \cdot \frac{d\boldsymbol{\psi}}{ds} ds + \int_0^S \mathbf{D}_u \left( \frac{d\mathbf{u}}{ds} - \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E}_1 \right) \left( \frac{d\mathbf{v}}{ds} - \boldsymbol{\psi} \times \mathbf{E}_1 \right) ds &= \int_0^S GJ \left( \frac{d\theta_1}{ds} - \gamma \theta_2 \right) \left( \frac{d\psi_1}{ds} - \gamma \psi_2 \right) ds + \\ &+ \int_0^S EI_1 \left( \frac{d\theta_2}{ds} + \gamma \theta_1 - \mu \theta_3 \right) \left( \frac{d\psi_2}{ds} + \gamma \psi_1 - \mu \psi_3 \right) ds + \int_0^S EI_2 \left( \frac{d\theta_1}{ds} + \mu \theta_2 \right) \left( \frac{d\psi_3}{ds} + \mu \psi_2 \right) ds + \\ &+ \int_0^S EA \left( \frac{du_1}{ds} - \gamma u_2 \right) \left( \frac{dv_1}{ds} - \gamma v_2 \right) ds + \int_0^S GA_1 \left( \frac{du_2}{ds} + \gamma u_1 - \mu u_3 - \theta_3 \right) \left( \frac{dv_2}{ds} + \gamma v_1 - \mu v_3 - \psi_3 \right) ds + \\ &+ \int_0^S GA_2 \left( \frac{du_3}{ds} + \mu u_2 + \theta_2 \right) \left( \frac{dv_3}{ds} + \mu v_2 + \psi_2 \right) ds.\end{aligned}\quad (\text{A.7})$$

A energia interna para o modelo de viga de Timoshenko no espaço tridimensional é expressa por:

$$\begin{aligned}\langle \Phi, \nabla_u^s \rangle &= - \int_0^S M_1 \left( \frac{d\psi_1}{ds} - \gamma \psi_2 \right) ds - \int_0^S M_2 \left( \frac{d\psi_2}{ds} + \gamma \psi_1 - \mu \psi_3 \right) ds - \int_0^S M_3 \left( \frac{d\psi_3}{ds} + \mu \psi_2 \right) ds - \\ &- \int_0^S N_1 \left( \frac{dv_1}{ds} - \gamma v_2 \right) ds - \int_0^S N_2 \left( \frac{dv_2}{ds} + \gamma v_1 - \mu v_3 - \psi_3 \right) ds - \int_0^S N_3 \left( \frac{dv_3}{ds} + \mu v_2 + \psi_2 \right) ds.\end{aligned}$$

Pelo princípio dos trabalhos virtuais, o trabalho das forças externas equivale ao

trabalho das forças internas, isto é,

$$\begin{aligned}
& -\langle \Phi, \nabla_u^s \rangle + \langle \mathbf{F}, \mathbf{u} \rangle = 0 \\
& \langle \Phi, \nabla_u^s \rangle = \langle \mathbf{F}, \mathbf{u} \rangle = \int_0^s M_1 \left( \frac{d\psi_1}{ds} - \gamma\psi_2 \right) ds + \int_0^s M_2 \left( \frac{d\psi_2}{ds} + \gamma\psi_1 - \mu\psi_3 \right) ds + \int_0^s M_3 \left( \frac{d\psi_3}{ds} + \mu\psi_2 \right) ds + \\
& + \int_0^s N_1 \left( \frac{dv_1}{ds} - \gamma v_2 \right) ds + \int_0^s N_2 \left( \frac{dv_2}{ds} + \gamma v_1 - \mu v_3 - \psi_3 \right) ds + \int_0^s N_3 \left( \frac{dv_3}{ds} + \mu v_2 + \psi_2 \right) ds \\
& = \left( M_1, \frac{d\psi_1}{ds} \right) - (M_1, \gamma\psi_2) + \left( M_2, \frac{d\psi_2}{ds} \right) + (M_2, \gamma\psi_1) - (M_2, \mu\psi_3) + \left( M_3, \frac{d\psi_3}{ds} \right) + (M_1, \mu\psi_2) + \\
& + \left( N_1, \frac{dv_1}{ds} \right) - (N_1, \gamma v_2) + \left( N_2, \frac{dv_2}{ds} \right) + (N_2, \gamma v_1) - (N_2, \mu v_3) - (N_2, \psi_3) + \left( N_3, \frac{dv_3}{ds} \right) + (N_3, \mu v_2) + (N_3, \psi_2) \\
& = M_1 \psi_1|_0^s - \left( \frac{dM_1}{ds}, \psi_1 \right) - (M_1, \gamma\psi_2) + M_2 \psi_2|_0^s - \left( \frac{dM_2}{ds}, \psi_2 \right) + (M_2, \gamma\psi_1) - (M_2, \mu\psi_3) + \\
& + M_3 \psi_3|_0^s - \left( \frac{dM_3}{ds}, \psi_3 \right) + (M_3, \mu\psi_2) + N_1 v_1|_0^s - \left( \frac{dN_1}{ds}, v_1 \right) - (N_1, \gamma v_2) + \\
& + N_2 v_2|_0^s - \left( \frac{dN_2}{ds}, v_2 \right) + (N_2, \gamma v_1) - (N_2, \mu v_3) - (N_2, \psi_3) + \\
& + N_3 v_3|_0^s - \left( \frac{dN_3}{ds}, v_3 \right) + (N_3, \mu v_2) + (N_3, \psi_2) \\
& = \left( -\frac{dM_1}{ds} + \gamma M_2, \psi_1 \right) + \left( -\gamma M_1 - \frac{dM_2}{ds} + \mu M_2 + N_3, \psi_2 \right) + \left( -\mu M_1 - \frac{dM_3}{ds} - N_2, \psi_3 \right) + \\
& + \left( -\frac{dN_1}{ds} + \gamma N_2, v_1 \right) + \left( -\gamma N_1 - \frac{dN_2}{ds} + \mu N_3, v_2 \right) + \left( -\mu N_2 - \frac{dN_3}{ds}, v_3 \right) \\
& = (F_1, \psi_1) + (F_2, \psi_2) + (F_3, \psi_3) + (F_1, v_1) + (F_2, v_2) + (F_3, v_3)
\end{aligned} \tag{A.8}$$

Com base nisto, chegam-se as equações de equilíbrio nas três direções do  $\mathbb{R}^3$

$$-\frac{dM_1}{ds} + \gamma M_2 = F_1 \tag{A.9a}$$

$$-\gamma M_1 - \frac{dM_2}{ds} + \mu M_2 + N_3 = F_2 \tag{A.9b}$$

$$-\mu M_1 - \frac{dM_3}{ds} - N_2 = F_3 \tag{A.9c}$$

$$-\frac{dN_1}{ds} + \gamma N_2 = F_1 \tag{A.9d}$$

$$-\gamma N_1 - \frac{dN_2}{ds} + \mu N_3 = F_2 \tag{A.9e}$$

$$-\mu N_2 - \frac{dN_3}{ds} = F_3 \tag{A.9f}$$

As equações constitutivas são obtidas a partir de (A.7). Logo,

$$M_1 = GJ \left( \frac{d\theta_1}{ds} - \gamma\theta_2 \right), \quad (\text{A.10a})$$

$$M_2 = EI_1 \left( \frac{d\theta_2}{ds} + \gamma\theta_1 - \mu\theta_3 \right), \quad (\text{A.10b})$$

$$M_3 = EI_2 \left( \frac{d\theta_1}{ds} + \mu\theta_2 \right), \quad (\text{A.10c})$$

$$N_1 = EA \left( \frac{du_1}{ds} - \gamma u_2 \right) \quad (\text{A.10d})$$

$$N_2 = GA_1 \left( \frac{du_2}{ds} + \gamma u_1 - \mu u_3 - \theta_3 \right), \quad (\text{A.10e})$$

$$N_3 = GA_2 \left( \frac{du_3}{ds} + \mu u_2 + \theta_2 \right). \quad (\text{A.10f})$$

## Apêndice B

# Formulação variacional mista estabilizada no espaço tridimensional

Neste apêndice, apresenta-se a formulação variacional mista estabilizada do modelo de viga de Timoshenko, expressa em termos de suas componentes.

### B.0.1 Descrição do modelo em termos de componentes

Dados  $\boldsymbol{\sigma} = (\mathbf{M}, \mathbf{N}) \in \mathbb{W}$ ,  $\boldsymbol{\tau} = (\boldsymbol{\Gamma}, \boldsymbol{\Phi}) \in \mathbb{W}$  e  $\mathbb{W} = \mathbb{Q}^3 \times \mathbb{Q}^3$  o espaço produto, define-se os funcionais bilineares:

$$a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) = -\frac{1}{GJ}(\Phi, \Sigma) - \frac{1}{EI_1}(M_1, \Xi_1) - \frac{1}{EI_2}(M_2, \Xi_2) - \frac{1}{EA}(N, \Theta) - \frac{1}{GA_1}(F_1, \Gamma_1) - \frac{1}{GA_2}(F_2, \Gamma_2). \quad (\text{B.1})$$

$$\begin{aligned} b(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{u}) &= \left( \Sigma, \frac{d\theta_1}{ds} - \gamma\theta_2 \right) + \left( \Xi_1, \frac{d\theta_2}{ds} + \gamma\theta_1 - \mu\theta_3 \right) + \left( \Xi_2, \frac{d\theta_3}{ds} - \mu\theta_2 \right) + \left( \Theta, \frac{du_1}{ds} - \gamma u_2 \right) + \\ &+ \left( \Gamma_1, \frac{du_2}{ds} + \gamma u_1 - \mu u_3 - \theta_3 \right) + \left( \Gamma_2, \frac{du_3}{ds} + \mu u_2 + \theta_2 \right), \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

$$\mathbf{F}(v) = (F_1, \psi_1) + (F_2, \psi_2) + (F_3, \psi_3) + (F_1, v_1) + (F_2, v_2) + (F_3, v_3), \quad (\text{B.3})$$

$$a_h(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) = a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) + a_\delta(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}), \quad (\text{B.4})$$

$$\begin{aligned} a_\delta(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) &= -\delta_1 h_e^2 \left( \frac{d\Phi}{ds} - \gamma M_1, \frac{d\Phi}{ds} - \gamma M_1 \right) - \delta_2 h_e^2 \left( \gamma\Phi + \frac{dM_1}{ds} - \mu M_2 - F_2, \Phi + \frac{dM_1}{ds} - \mu M_2 - F_2 \right) - \\ &- \delta_3 h_e^2 \left( \mu M_1 + \frac{dM_2}{ds} + F_1, \mu M_1 + \frac{dM_2}{ds} + F_1 \right) - \delta_4 h_e^2 \left( \frac{dN}{ds} - \gamma F_1, \frac{dN}{ds} - \gamma F \right) - \\ &- \delta_5 h_e^2 \left( \gamma N + \frac{dF_1}{ds} - \mu F_2, \gamma N + \frac{dF_1}{ds} - \mu F_2 \right) - \delta_6 h_e^2 \left( \mu F_1 + \frac{dF_2}{ds}, \mu F_1 + \frac{dF_2}{ds} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$