Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Soluções *blow-up* para uma classe de problemas do tipo Yamabe em variedades com bordo

Carlos Augusto Romero Neto

João Pessoa – PB
Dezembro de 2021

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Soluções *blow-up* para uma classe de problemas do tipo Yamabe em variedades com bordo

por

Carlos Augusto Romero Neto

sob a orientação do

Prof. Dr. Manassés Xavier de Souza

João Pessoa – PB
Dezembro de 2021

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

R763s Romero Neto, Carlos Augusto.
Soluções blow-up para uma classe de problemas do tipo Yamabe em variedades com bordo / Carlos Augusto Romero Neto. - João Pessoa, 2021.
82 f. : il.

Orientação: Manassés Xavier de Souza.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Matemática. 2. Problemas de Yamabe. 3. Soluções blow-up. 4. Variedades com bordo. I. Souza, Manassés Xavier de. II. Título.

UFPB/BC CDU 51(043)

Elaborado por ANNA REGINA DA SILVA RIBEIRO - CRB-15/024

Soluções *blow-up* para uma classe de problemas do tipo Yamabe em variedades com bordo

por

Carlos Augusto Romero Neto [1]

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós–Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada em 22 de Dezembro de 2021

Banca Examinadora:

[redacted]

Prof. Dr. Manassés Xavier de Souza – UFPB

(Orientador)

SERGIO DE MOURA ALMARAZ sergioalmaraz@id.uff.br:08254579717

Digitally signed by SERGIO DE MOURA ALMARAZ sergioalmaraz@id.uff.br:08254579717 Date: 2021.12.22 20:14:31 -03'00'

Prof. Dr. Sérgio de Moura Almaraz – UFF

(Examinador Externo)

[redacted]

Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó – UFPB

(Examinador Interno)

[1] O autor foi bolsista da Capes durante a elaboração desta dissertação.

À minha família.

Agradecimentos

Ao professor Dr. Manassés Xavier de Souza, que, mais do que me orientou, muito me ensinou, sempre me encorajou a continuar apesar das dificuldades e é uma grande inspiração para mim.

À minha família; em particular, aos meus pais Carlos Augusto Romero Filho e Ana Cristina Viana Romero, e à minha irmã Raíssa Viana Romero, que me deram muito apoio, tornando a caminhada muito mais agradável.

À professora Flávia Jerônimo Barbosa, que sempre acreditou no meu potencial e me estimulou a continuar, sempre me dando ótimos conselhos.

Aos meus colegas de graduação e de pós-graduação; em particular, a Lázaro, que me ajudou muito no trabalho e com quem até hoje tenho discussões bastante interessantes.

Aos meus amigos; em particular, a Edson, Joaquim e Harllen, com quem sempre pude contar com o apoio e amizade nos momentos difíceis.

Aos professores Dr. Sérgio de Moura Almaraz e Dr. João Marcos Bezerra do Ó, que aceitaram fazer parte da banca examinadora e, assim, contribuir para o aperfeiçoamento do trabalho.

Aos professores do Departamento de Matemática da UFPB, que muito contribuíram para a minha formação.

Finalmente, gostaria de agradecer ao CNPq e à Capes pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho, estudamos a existência de soluções *blow-up* para a seguinte classe de problemas

$$\begin{cases} -\Delta_g u + a(x)u = 0 \text{ em } M, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \frac{n-2}{2} b(x)u = (n-2)u^{\frac{n}{n-2} \pm \varepsilon} \text{ sobre } \partial M, \end{cases} \tag{$P_{\pm\varepsilon}$}$$

em que (M, g) é uma variedade Riemanniana compacta de dimensão $n \geq 5$ com bordo ∂M, Δ_g é o operador de Laplace-Beltrami referente à métrica g, $a \in C^1(M), b \in C^1(\partial M)$ e ν é o vetor unitário normal a ∂M apontando para fora e ε é um parâmetro positivo. Supondo adicionalmente que exista uma constante $\theta > 0$ tal que

$$\int_M (|\nabla_g u|^2 + a(x)u^2) d\mu_g + \frac{n-2}{2} \int_{\partial M} b(x)u^2 d\sigma \geq \theta \int_M (|\nabla_g u|^2 + u^2) d\mu_g,$$

mostramos que é possível construir soluções *blow-up* positivas para o caso $(P_{-\varepsilon})$ ou para o caso $(P_{+\varepsilon})$, dependendo do comportamento da função $\varphi : \partial M \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi(q) = b(q) - H(q)$, em que H é a curvatura média de ∂M.

Palavras-chave: Soluções *blow-up*, problema de Yamabe, método da redução finita, método variacional.

Abstract

In this work, we study the existence of blow-up solutions to the following class of problems

$$\begin{cases} -\Delta_g u + a(x)u = 0 \text{ in } M, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \frac{n-2}{2} b(x)u = (n-2)u^{\frac{n}{n-2} \pm \varepsilon} \text{ on } \partial M, \end{cases} \tag{$P_{\pm\varepsilon}$}$$

where (M, g) is a compact Riemannian manifold of dimension $n \geq 5$ with a boundary ∂M, Δ_g is the Laplace-Beltrami operator with respect to the metric g, $a \in C^1(M)$, $b \in C^1(\partial M)$, ν is the outward-pointing unit vector normal to ∂M and ε is a positive parameter. Assuming also that there is a real number $\theta > 0$ such that

$$\int_M (|\nabla_g u|^2 + a(x)u^2) d\mu_g + \frac{n-2}{2} \int_{\partial M} b(x)u^2 d\sigma \geq \theta \int_M (|\nabla_g u|^2 + u^2) d\mu_g,$$

we show that it is possible to build blow-up positive solutions to the case $(P_{-\varepsilon})$ or to the case $(P_{+\varepsilon})$, depending on the behavior of the function $\varphi : \partial M \to \mathbb{R}$, given by $\varphi(q) = b(q) - H(q)$, where H is the boundary mean curvature.

Keywords: Blow-up solutions, Yamabe Problem, Finite Reduction Method, Variational Method.

Sumário

Notações

A seguir, listamos algumas notações utilizadas neste trabalho.

Sejam X e Y espaços de Banach;

- X' denota o dual topológico de um espaço de Banach X;
- $\mathcal{L}(X, Y)$ denota o espaço dos operadores lineares contínuos de X em Y;
- $i : A \to B$ denota a aplicação inclusão, em que $A \subset B$;
- C, C_1, C_2, ... denotam constantes positivas, possivelmente diferentes;
- $\square$ denota o final de uma demonstração;
- $|\cdot|$ denota a norma euclidiana do $\mathbb{R}^m$;
- $\rightharpoonup$ denota convergência fraca em um espaço normado;
- $u^+ = \max\{u, 0\}$ e $u^- = \max\{-u, 0\}$;
- $B(0, R)$ denota a bola aberta de centro 0 e raio R do $\mathbb{R}^{n-1}$;
- $B(0, R) \times [0, R)$ denota a semi-bola aberta superior de centro 0 e raio R do $\mathbb{R}^n$;
- $d\mu_g$ denota o volume da variedade Riemanniana (M, g);
- $d\sigma$ denota o elemento de volume da subvariedade Riemanniana $(\partial M, g)$;
- q. t. p. denota quase todo ponto;
- Dizemos que $f(\varepsilon) = O(\varepsilon)$ se existe uma constante $C > 0$ tal que $\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{|f(\varepsilon)|}{|\varepsilon|} \leq C$;

- Dizemos que $g(\varepsilon) = o(\varepsilon)$ se $\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{|g(\varepsilon)|}{|\varepsilon|} = 0$;

Introdução

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão $n \geq 3$ com bordo ∂M. Neste trabalho, baseado no artigo devido a Ghimenti, Micheletti e Pistoia [29], temos como objetivo estudar a existência de soluções *blow-up* positivas para a seguinte classe de problemas:

$$\begin{cases} -\Delta_g u + a(x)u = 0 \text{ em } M, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \frac{n-2}{2} b(x)u = (n-2)u^{\frac{n}{n-2} \pm \varepsilon} \text{ sobre } \partial M, \end{cases} \tag{1}$$

em que Δ_g é o operador de Laplace-Beltrami referente à métrica g, $a \in C^1(M)$, $b \in C^1(\partial M)$, ν é o vetor unitário normal a ∂M apontando para fora e ε é um parâmetro positivo. Ao longo do trabalho, iremos supor que o operador linear $\mathcal{L}u := -\Delta_g u + au$ com a condição de fronteira $\mathcal{B}u := \frac{\partial u}{\partial \nu} + \frac{(n-2)}{2} bu$ é coercivo, ou seja, que existe uma constante $\theta > 0$ tal que

$$\int_M \left(|\nabla_g u|^2 + a(x)u^2 \right) d\mu_g + \frac{n-2}{2} \int_{\partial M} b(x)u^2 d\sigma \geq \theta \|u\|^2_{H^1(M)}, \tag{2}$$

em que $H^1(M)$ é o espaço de Sobolev munido da norma

$$\|u\|_{H^1(M)} = \left(\int_M \left(|\nabla_g u|^2 + u^2 \right) d\mu_g \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Observação 0.1. Veremos mais tarde que a Condição (2) é importante para que possamos ter uma norma equivalente à norma $\|\cdot\|_{H^1(M)}$ que possibilitará a construção de um espaço de soluções conveniente do Problema (1).

Nossa motivação para estudar tal problema vem da Conjectura da Compacidade, introduzida por Schoen em 1988, para o problema de Yamabe.

O problema de Yamabe foi proposto em 1960 pelo matemático japonês Hidehiko Yamabe em [48] e inicialmente foi formulado para variedades Riemannianas compactas sem bordo. Posteriormente, começou-se a estudar versões do problema para variedades compactas com bordo. Veremos a seguir ambas as versões do problema.

1. O problema de Yamabe clássico

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão $n \geq 3$ sem bordo. O problema de Yamabe formulado em [48] pode ser enunciado da seguinte maneira: *Existe uma métrica conforme a g que torna a curvatura escalar constante?*

É conhecido na literatura que se considerarmos a mudança conforme $\tilde{g} = u^{4/(n-2)}g$, em que $u \in C^\infty(M)$ é uma função positiva, tal problema é equivalente a provar a existência de uma solução positiva do seguinte problema:

$$-\Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} R_g u = K u^{\frac{n+2}{n-2}} \text{ em } M, \tag{3}$$

em que R_g é a curvatura escalar relativa à métrica g e K é uma constante. Então, afim de resolver o Problema (3), Yamabe considerou o funcional

$$Q(M, \tilde{g}) = \frac{\int_M R_{\tilde{g}} d\mu_g}{\left(\int_M d\mu_{\tilde{g}}\right)^{\frac{n-2}{n}}},$$

conhecido como *funcional de Yamabe.* A partir daí, foi definido o *invariante de Yamabe,* dado por

$$\lambda(M, g) = \inf_{\tilde{g} \in [g]} Q(M, \tilde{g}),$$

em que $[g]$ denota a classe de equivalência de métricas conformes a g. Um fato importante é que o conjunto de soluções depende do sinal desse invariante. Com efeito, quando $\lambda(M, g) < 0$, a solução é única. O caso em que $\lambda(M, g) = 0$, tem-se unicidade de solução a menos de multiplicação por escalar. Quando $\lambda(M, g) > 0$, temos multiplicidade de soluções.

Yamabe, em seu artigo [48], acreditava ter resolvido o problema. No entanto, em 1968 Trudinger apontou um erro na prova de Yamabe. No artigo [45], Trudinger adaptou os resultados obtidos por Yamabe e resolveu o problema de existência de solução positiva para a Equação (3) sob a condição analítica $\lambda(M) < \alpha$, em que α é uma constante positiva. Consequentemente, com esse trabalho, ficou provado também o caso particular $\lambda(M) \leq 0$. Em 1976, Aubin em [5] provou que a constante ótima encontrada em [45] é dada pelo invariante de Yamabe da esfera, isto é, $\alpha = \lambda(\mathbb{S}^n)$, em que $\mathbb{S}^n$ é a esfera do $\mathbb{R}^{n+1}$ munida da métrica canônica g_0, e adicionalmente verificou essa condição analítica quando a variedade é não-localmente conformemente plana e a dimensão $n \geq 6$. Schoen [42], então, em 1984 mostrou essa condição para variedades localmente conformemente planas e para variedades quaisquer de dimensão $3 \leq n \leq 5$, desde que a variedade não seja conformemente difeomórfica a esfera munida da métrica canônica g_0, completando, assim, a solução do problema de Yamabe.

2. O problema de Yamabe em variedades com bordo

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão $n \geq 3$ com bordo ∂M. Em [18, 19], Escobar formulou o problema de Yamabe em variedades com bordo, que pode ser enunciado da seguinte maneira: *Existe uma métrica conforme a g que, além de tornar a curvatura escalar constante, torna a curvatura média no bordo constante?*

Este problema é equivalente a provar a existência de uma solução positiva da seguinte equação:

$$\begin{cases} -\Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} R_g u = K u^{\frac{n+2}{n-2}} \text{ em } M \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \frac{n-2}{2} H_g u = \frac{(n-2)}{2} \lambda u^{\frac{n}{n-2}} \text{ sobre } \partial M, \end{cases} \tag{4}$$

em que H_g denota a curvatura média de ∂M e λ é uma constante.

Devido a sua complexidade, o Problema (4) foi estudado em casos, como, por exemplo, sob a hipótese de que uma das constantes K ou λ é nula.

O caso $\lambda = 0$, conhecido na literatura como o caso escalar *flat* foi primeiramente estudado por Escobar em [18, 19], que mostrou a existências de soluções supondo algumas condições sobre M e ∂M, tais como M sendo localmente conformemente plana e ∂M umbílico. Alguns casos remanescentes foram estudados por Marques [37, 38], Almaraz [2], e por Brendle e Chen [8]. Outros vários casos remanescentes foram estudados como por exemplo nos trabalhos de Marques [37, 38], Almaraz [2], e por Brendle e Chen [8]. Para mais referências, veja também [1, 11, 12, 13, 20, 31, 39, 40].

3. A conjectura da compacidade

Uma vez provada a existência de soluções, bem como a multiplicidade de soluções quando $\lambda(M, g) > 0$, como por exemplo é o caso de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ (veja o trabalho de Bray e Neves [6]), surge o problema da compacidade, isto é, queremos saber se tais soluções são limitadas, por exemplo, em $L^\infty(M)$. Tal conjectura foi levantada por Schoen num curso na Universidade de Stanford em 1988. Precisamente a conjectura da compacidade pode ser escrita da seguinte maneira:

Conjectura da compacidade: *O conjunto de soluções positivas do problema de Yamabe para variedades sem bordo no caso em que $\lambda(M, g) > 0$ é compacto com respeito à topologia $C^2(M)$ desde que M não seja conformemente equivalente à esfera.*

Em 1991, Schoen [43] provou alguns resultados de compacidade, mostrando que para variedades (M, g) localmente conformemente planas que não são conformemente equivalentes a esfera $(\mathbb{S}^n, g_0)$ as soluções do problema de Yamabe estão contidas num conjunto compacto com relação à topologia $C^2(M)$. Em 1999, Li e Zhu [36] provaram a compacidade para variedades gerais de dimensão 3 que não são conformemente equivalentes a esfera $(\mathbb{S}^3, g_0)$. No que se refere ainda a variedades gerais, Druet [23] em 2003 provou a compacidade para dimensão 4 e, no ano seguinte, para dimensão 5.

Em 2008, Brendle [7] mostrou que a a compacidade não é válida no caso geral quando $n \geq 52$. Ainda no mesmo ano, Brendle e Marques [9] aprimoraram o resultado, mostrando que a compacidade também não vale em geral quando $25 \leq n \leq 51$. Finalmente, em 2009, a conjectura foi provada para o caso geral quando $3 \leq n \leq 24$ por Khuri, Marques e Schoen [34]. Dessa maneira, fica posto o seguinte resultado:

A Conjectura da Compacidade no caso geral é válida se, e somente se, $3 \leq n \leq 24$.

Quando a variedade tem bordo, a condição para a compacidade passa a ser (M, g) não ser conforme à bola $(\mathbb{B}^n, \tilde{g}_0)$, em que $\tilde{g}_0$ é a métrica canônica da bola. A conjectura da compacidade com a presença do bordo foi estudada por Han e Li [30], que provaram o caso em que $K < 0$ e $\lambda = 0$, como também o caso $K > 0$ para variedades localmente conformemente planas com bordo umbílico. V. Felli e M. Ould Ahmedou [28] provaram a compacidade para o caso $K = 0$, $\lambda > 0$, para variedades localmente conformemente planas e com bordo umbílico. Almaraz [3] provou o caso em que $K = 0$ e $\lambda > 0$, $n \geq 7$, e supondo uma condição geral sobre a parte livre de traço da segunda forma fundamental.

Recentemente, o caso em que $K > 0$, $\lambda = 0$ e o bordo é umbílico foi completamente resolvido pelo trabalho de Disconzi e Khuri [22]. Precisamente, eles provaram a compacidade para o conjunto de soluções quando a dimensão $3 \leq n \leq 24$ e deram contra-exemplos para a compacidade quando $n \geq 25$. Para o caso $K = 0$ e $\lambda > 0$, Almaraz [3] provou que se a dimensão da variedade é $n \geq 25$, não vale a compacidade, uma vez que é possível construir soluções para (4) que explodem para uma certa métrica g. O problema da compacidade em dimensão $4 \leq n \leq 24$ ainda não está completamente resolvido para $K = 0$ e $\lambda > 0$. Veja também o trabalho de Almaraz, Queiroz e Wang [4] para variedades gerais em dimensão 3, em que foi provado que não vale a compacidade.

4. Uma generalização da equação de Yamabe

Motivado por um ponto de vista menos geométrico e mais analítico, começou-se a estudar uma classe mais geral de problemas em que substituímos a curvatura escalar por uma função $a \in C^1(M)$ satisfazendo certas condições. De maneira natural, considerou-se também, quando a variedade tem bordo ∂M, a substituição da curvatura média por uma função $b \in C^1(\partial M)$ também satisfazendo hipóteses adicionais.

Em 2003, Druet [23] considerou a seguinte generalização para a equação de Yamabe

$$-\Delta_g u + a(x)u = u^{\frac{n+2}{n-2}}, u > 0 \text{ em } M, \tag{5}$$

em que $a \in C^1(M)$ e provou que vale a compacidade para soluções com energia limitada se $n \in \{4, 5\}$ e $a(\xi) \neq \frac{n-2}{4(n-1)} R_g(\xi)$ para todo $\xi \in M$.

Para variedades com bordo, de Souza [15] em 2020 considerou a seguinte generalização do problema de Yamabe com bordo proposto por Escobar [18]

$$\begin{cases} -\Delta_g u + a(x)u = 0 \text{ em } M, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \frac{n-2}{2} b(x)u = (n-2)u^{\frac{n}{n-2}} \text{ sobre } \partial M, \end{cases} \tag{6}$$

em que $a \in C^\infty(M)$ e $b \in C^\infty(\partial M)$ são funções satisfazendo $a \leq \frac{n-2}{4(n-1)} R_g$ e $b \leq H_g$; e provou a compacidade para certos casos, como M localmente conformemente plana, ∂M umbílico e supondo condições adicionais sobre a e b.

5. O problema da estabilidade

Inspirada pela Conjectura da Compacidade para o Problema (5), surge o *Problema da Estabilidade* de (5). Isto é, queremos saber se perturbações da Equação (5) preservam a compacidade ou não, que é equivalente a existir ou não uma limitação uniforme na norma L^∞ para soluções *a priori*. Esta questão foi introduzida e desenvolvida pelos trabalhos de Druet [23], [24], Druet e Hebey [25] e Druet, Hebey e Robert [26].

Em 2014, Esposito, Pistoia e Vetois em [21] provaram que a compacidade não é válida para a seguinte classe de problemas de Yamabe com perturbação para variedades de dimensão $n \geq 4$:

$$-\Delta_g u + \left(\frac{n-2}{4(n-1)} R_g + \varepsilon h\right) u = u^{\frac{n+2}{n-2}} \text{ em } M, \;\; u > 0, \tag{7}$$

em que h é uma função pertencente a $C^1(M)$ ou a $C^{0,\alpha}(M)$, com $0 < \alpha < 1$, que satisfaz $\max_M h > 0$.

Nosso objetivo é provar a existência de solução positiva para o seguinte *Problema de Yamabe com perturbação no expoente*, que foi abordado no artigo de Ghimenti, Micheletti e Pistoia [29] de 2015:

$$\begin{cases} -\Delta_g u + a(x)u = 0 \text{ em } M, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \frac{n-2}{2} b(x)u = (n-2)u^{\frac{n}{n-2} \pm \varepsilon} \text{ sobre } \partial M, \end{cases} \tag{8}$$

em que $a \in C^1(M)$ e $b \in C^1(\partial M)$ são funções escolhidas satisfazendo algumas condições.

Mais do que isso, iremos também provar que tal solução apresenta um comportamento de *blow-up*, conceito este que definiremos no Capítulo 2. Veremos que tal comportamento é ditado pela função $\varphi(q) = b(q) - H_g(q)$ com $q \in \partial M$.

Com efeito, iremos provar que

(i) Se $q_0 \in \partial M$ é um ponto de mínimo local de φ com $\varphi(q_0) > 0$, então para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe uma solução *blow-up* u_ε de $(P_{-\varepsilon})$ quando $\varepsilon \to 0^+$.

(ii) Se $q_0 \in \partial M$ é um ponto de máximo local de φ com $\varphi(q_0) < 0$, então para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe uma solução *blow-up* u_ε de $(P_{+\varepsilon})$ quando $\varepsilon \to 0^+$.

Afim de atingir nossos objetivos, este trabalho será dividido da seguinte maneira:

No *Capítulo* 1, fazemos uma revisão de alguns conteúdos de geometria e análise que serão usados no trabalho. O dividiremos em três seções. A Seção 1.1 tratará de alguns conceitos fundamentais de geometria para que, assim, todos os aspectos do problema fiquem bem definidos. Introduziremos variedades Riemannianas com bordo, veremos que o bordo pode ser visto como uma subvariedade imersa de codimensão 1 e que, consequentemente, obtemos uma noção de vetor normal e, naturalmente, de curvatura média sobre o bordo. Depois, falaremos das coordenadas de Fermi, que serão extremamente úteis para simplificar os cálculos do trabalho. Finalmente, na Seção 1.2 definiremos o espaço de Sobolev, enunciaremos os teoremas de imersão e do traço numa variedade M com bordo, e definiremos a derivada de Fréchet para tratarmos da formulação variacional do problema.

O *Capítulo* 2 é dedicado à descrição minuciosa do problema. Além disso, explicaremos o método para resolvê-lo. De maneira resumida, a ideia é reformular o problema num espaço de funções conveniente. Feito isso, iremos usar o método da redução finita para decompor esse espaço numa soma direta e, assim, construir uma função que é a soma de uma função-bolha (*Standard Bubble*) com uma outra função positiva adequada. Posteriormente, enunciaremos alguns lemas auxiliares necessários para a solução do problema.

No *Capítulo* 3, provaremos o resultado principal. Mostraremos que a função construída no Capítulo 2 será, de fato, uma solução do problema. Para isso, usaremos a formulação variacional do problema. Dentro desse contexto, iremos provar que a solução é ponto crítico do funcional associado ao problema. Na verdade, teremos uma família de soluções variando com o parâmetro ε. Veremos que quando fazemos $\varepsilon \to 0$, a imagem em módulo das funções próximo de um certo ponto do bordo pode ficar arbitrariamente grande. Em outras palavras, construiremos uma família de soluções *blow-up*.

Finalmente, o *Apêndice A* é dedicado aos detalhes dos lemas técnicos.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, veremos alguns conceitos que serão abordados no Capítulo 2 em diante. Estes serão importantes para desenvolvermos a descrição e linguagem do problema no qual estamos interessados. Na Seção 1.1, falaremos sobre alguns conceitos fundamentais de Geometria Riemanniana e, ao final, introduziremos as coordenadas de Fermi. A Seção 1.2 é dedicada à parte analítica do problema, como as definições de espaços de Sobolev em variedades Riemannianas com bordo, os Teoremas de Sobolev e a derivada de Fréchet.

1.1 Pré-requisitos geométricos

Nesta seção, iremos apresentar algumas definições e resultados de geometria, que serão essenciais mais tarde. Utilizaremos como referência principal o livro do Lee [35] e auxiliarmente o livro do Tu [46].

1.1.1 Variedades com bordo

Primeiramente introduzamos o espaço que serve de modelo para variedades com bordo, *o hemisfério norte do espaço euclidiano* $\mathbb{R}^n_+ \subset \mathbb{R}^n$, definido por

$$\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}\,.$$

Diferentemente do contexto de variedades sem bordo, cujas vizinhanças são homeomorfas a abertos do $\mathbb{R}^n$, veremos que na presença de bordo as vizinhanças da variedade são homeomorfas a um dos dois tipos de abertos do $\mathbb{R}^n_+$, como ilustra a figura a seguir:

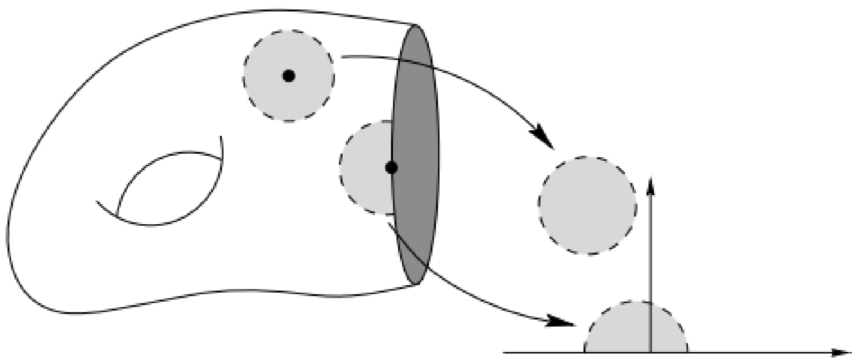

Figura 1.1: Variedade com bordo
Fonte: John Lee, 2012

Denotaremos por $\text{int}(\mathbb{R}^n_+)$ e $\partial\mathbb{R}^n_+$ *o interior de* $\mathbb{R}^n_+$ e *o bordo de* $\mathbb{R}^n_+$, respectivamente. Nesse caso, temos

$$\text{int}(\mathbb{R}^n_+) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$$

$$\partial\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\} = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}.$$

Observação 1.1. É comum fazermos a identificação $\partial\mathbb{R}^n_+ \cong \mathbb{R}^{n-1}$.

Definição 1.1. Uma variedade de dimensão n com bordo é um conjunto M tal que todo ponto tem uma vizinhança homeomorfa a um aberto do $\mathbb{R}^n$ ou a um aberto do $\mathbb{R}^n_+$.

O par (U, φ), em que $U \subseteq M$ é um aberto de M e $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ é um homeomorfismo sobre um aberto do $\mathbb{R}^n$ ou do $\mathbb{R}^n_+$, é dita uma *carta de* M ou um *sistema de coordenadas de* M (exatamente como no caso de variedades sem bordo). Quando necessário fazer uma distinção, diremos que (U, φ) é uma *carta interior* se $\varphi(U)$ for um aberto do $\mathbb{R}^n$ (que inclui o caso quando $\varphi(U)$ é um aberto do $\mathbb{R}^n_+$ que não intersecta $\partial\mathbb{R}^n_+$), e que é uma *carta do bordo* se $\varphi(U)$ for um aberto do $\mathbb{R}^n_+$ tal que $\varphi(U) \cap \partial\mathbb{R}^n_+ \neq \emptyset$.

Um ponto $p \in M$ é dito um *ponto interior de* M se este pertence a um domínio de uma carta interior e é dito um *ponto do bordo de* M se este pertence ao domínio de uma carta do bordo cuja imagem de p pertence a $\mathbb{R}^n_+$. Denotaremos o *bordo de* M por ∂M e *interior de* M por $\text{int}(M)$.

Observação 1.2. Note que, pela definição acima, um ponto $q \in \partial M$ tem, em coordenadas locais, a forma $(q_1, \dots, q_{n-1}, 0)$.

Veremos com os resultados seguintes que tais definições nunca coincidem, isto é, um ponto interior de M nunca pode ser um ponto do bordo de M e vice-versa.

A proposição a seguir pode ser encontrada como Proposição 22.4 de [46].

Proposição 1.1. Sejam U e V abertos de $\mathbb{R}^n_+$ e $f : U \to V$ um homeomorfismo. Então, f mapeia pontos do interior de U em pontos do interior V e pontos da fronteira de U em pontos da fronteira de V.

Demonstração. Seja $p \in U$ um ponto interior. Então p está contido numa bola B, que é um aberto do $\mathbb{R}^n$. Como f por hipótese é um homeomorfismo, então o conjunto $f(B)$ é um aberto do $\mathbb{R}^n$. Logo, $f(p)$ é um ponto do interior do $\mathbb{R}^n_+$.

Seja agora $q \in U \cap \partial\mathbb{R}^n_+$. Então $f^{-1}(f(q)) = q$ é um ponto do bordo. Como $f^{-1} : V \to U$ é um homeomorfismo, pelo que foi provado acima, $f(q)$ não pode ser um ponto do interior. Logo, $f(q)$ é um ponto do bordo. □

Corolário 1.2. O bordo de M e o interior de M são disjuntos.

Demonstração. Suponha por absurdo que $\partial M \cap \operatorname{int}(M) \neq \emptyset$ e seja $p \in \partial M \cap \operatorname{int}(M)$.

Como $p \in \operatorname{int}(M)$, existe uma carta interior $\varphi_1 : U_1 \to \mathbb{R}^n$ com $p \in U_1$ e como $p \in \partial M$, existe uma carta do bordo $\varphi_2 : U_2 \to \mathbb{R}^n_+$ com $p \in U_2$.

Como ambas as cartas são homeomorfismos, então $\varphi : \varphi(U_1) \to U_2$ dado por $\varphi = \varphi_1^{-1} \circ \varphi_2$ é um homeomorfismo, o que é um absurdo pela Proposição 1.1. □

Dessa maneira, podemos expressar a variedade como a seguinte união disjunta:

$$M = \operatorname{int}(M) \dot\cup \partial M.$$

1.1.2 Imersões Isométricas

Inspirado pela teoria de superfícies no $\mathbb{R}^3$, para falar de curvatura média de variedades de dimensão m, precisamos que estas estejam imersas isometricamente numa outra variedade de dimensão $m+1$. Utilizaremos o livro do Manfredo [16] como guia.

Definição 1.2. Sejam M e $\bar{M}$ variedades diferenciáveis de dimensões n e $k = n + m$, respectivamente. Uma função diferenciável $f : M \to \bar{M}$ é dita uma *imersão* se $df_p : T_pM \to T_{f(p)}\bar{M}$ é injetiva para todo $p \in M$. Se, além disso, f é um homeomorfismo sobre a imagem $f(M) \subset \bar{M}$, em que $f(M)$ tem a topologia subespaço induzida de $\bar{M}$, dizemos que f é um *mergulho*. Se $M \subset \bar{M}$ e a inclusão $\iota : M \to \bar{M}$ é um mergulho, dizemos que M é uma subvariedade de $\bar{M}$.

Definição 1.3. Sejam (M, g) e $(N, \tilde{g})$ variedades Riemannianas. Um difeomorfismo $\varphi : M \to N$ é dito uma isometria se vale

$$\langle u, v \rangle_p = \langle d\varphi_p(u), d\varphi_p(v) \rangle_{\varphi(p)}$$

para todo $p \in M, u, v \in T_pM$.

Serão de fundamental importância as funções que são imersões e isometrias ao mesmo tempo, as chamadas *imersões isométricas,* uma vez que estamos interessados na relação entre a geometria da variedade imersa e a variedade ambiente.

Seja $f : M \to \bar{M}$ uma imersão, em que M tem dimensão n e $\bar{M}$ tem dimensão $k = n + m$. Então, para cada $p \in M$, existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $f(U) \subset \bar{M}$ é uma subvariedade de $\bar{M}$. Isso significa que existe uma vizinhança $\bar{U} \subset \bar{M}$ de $f(p)$ e um difeomorfismo $\varphi : \bar{U} \to V \subset \mathbb{R}^k$ para o conjunto aberto V de $\mathbb{R}^k$, tal que φ mapeia $f(U) \cap \bar{U}$ difeomorficamente no aberto do subespaço de $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^k$. Para simplificar a notação, iremos identificar U com $f(U)$ e cada vetor $v \in T_qM$, $q \in U$, com $df_q(v) \in T_{f(q)}\bar{M}$. Devemos fazer essas identificações para estender, por exemplo, um campo vetorial local (isto é, definido em U) em M para um campo vetorial local (isto é, definido em $\bar{U}$) sobre $\bar{M}$; se U é suficientemente pequena, tal extensão é sempre possível, graças ao difeomorfismo φ.

Para cada $p \in M$, o produto interno em $T_p\bar{M}$ divide $T_p\bar{M}$ na soma direta

$$T_p\bar{M} = T_pM \oplus (T_pM)^{\perp}, \tag{1.1}$$

em que $(T_pM)^{\perp}$ é o complemento ortogonal de T_pM em $T_p\bar{M}$.

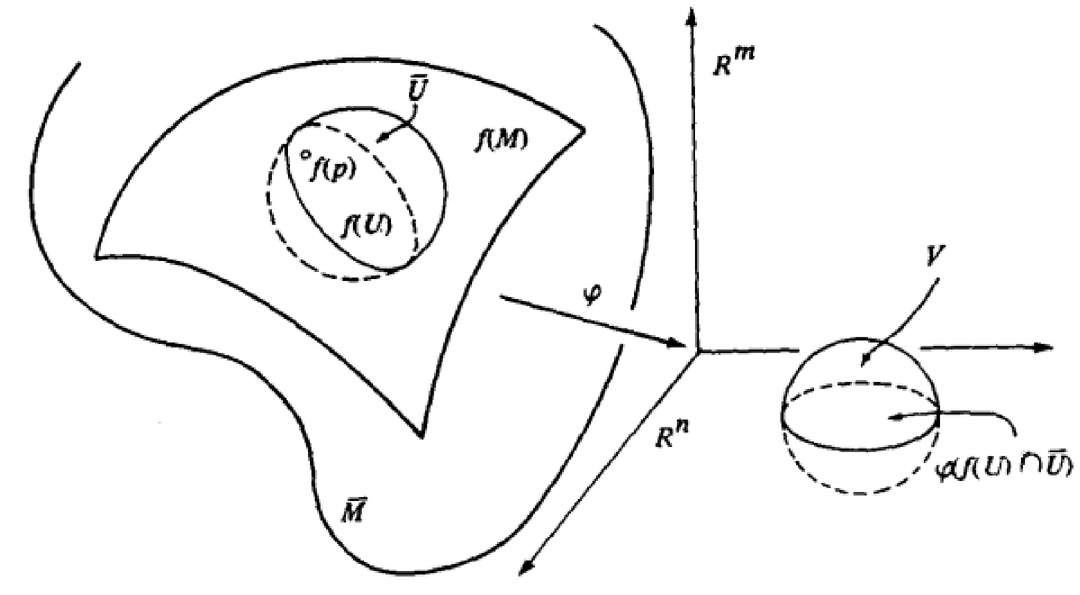

Figura 1.2: Imersão $M \hookrightarrow \bar{M}$
Fonte: Manfredo do Carmo, 1992

Isto é, se $v \in T_p\bar{M}, p \in M$, podemos escrever

$$v = v^T + v^N, \quad v^T \in T_pM, \quad v^N \in (T_pM)^{\perp}.$$

Dizemos que v^T é a componente tangencial de v e v^N, a componente normal de v.

Por uma questão didática, optamos por definir o operador de Weingarten ao invés de construí-lo usando a segunda forma fundamental. Caso o leitor esteja interessado na construção clássica deste, consulte o Capítulo 6 de [16].

Definição 1.4. (Fórmula de Weingarten) Sejam $p \in M, \eta \in (T_pM)^\perp$ e $\bar{\nabla}$ a conexão de $\bar{M}$. Seja N uma extensão local de η normal a M. O *operador de Weingarten* é o operador $S_\eta : T_pM \to T_pM$ dado por

$$S_\eta(x) = -\left(\bar{\nabla}_x N\right)^T.$$

Proposição 1.3. $S_\eta : T_pM \to T_pM$ é um operador auto-adjunto.

Demonstração. Ver a Seção 2 do Capítulo 6 de [16]. □

1.1.3 A curvatura média numa hipersuperfície

Considere o caso particular em que a codimensão da imersão $f : M \to \bar{M}$ é 1, isto é, M tem dimensão m e $\bar{M}$ tem dimensão $m+1$; $f(M) \subset \bar{M}$ é dita uma hipersuperfície. Como a aplicação traço independe da base escolhida de T_pM, está bem definida a *curvatura média de* f denotada por $H_g(f) : M \to \mathbb{R}$ dada por

$$H_g(f) = \frac{1}{m}\operatorname{tr}(S_\eta). \tag{1.2}$$

Em particular, fixada uma base $\{e_1, \ldots, e_m\}$ de T_pM, denotemos (h_{ij}) a matriz do operador S_η nessa base. Então, podemos reescrever a equação acima da seguinte maneira:

$$H_g(f) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} h_{ii}.$$

Agora consideremos o caso particular que é de maior interesse, que é o da curvatura média no bordo. Os dois resultados a seguir podem ser encontrados no Capítulo 5 do livro do Lee [35].

Teorema 1.4. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana de dimensão n com bordo, então, munida da topologia subespaço, ∂M é uma variedade topológica (sem bordo) de dimensão $n-1$ e tem uma estrutura suave de tal maneira que é uma subvariedade mergulhada de M.*

Demonstração. Com efeito, seja $q \in \partial M$. Então existe uma carta do bordo (U, φ), ou seja, uma carta tal que $q \in U$ e $\varphi(U) \cap \partial\mathbb{R}^n_+ \neq \emptyset$. Como $\partial\mathbb{R}^n_+$ é homeomorfo a $\mathbb{R}^{n-1}$, então o aberto $\varphi(U) \cap \partial\mathbb{R}^n_+$ é homeomorfo a um aberto $V \subset \mathbb{R}^{n-1}$. Assim, temos os seguintes homeomorfismos de abertos $U \cap \partial M \cong \varphi(U) \cap \partial\mathbb{R}^n_+ \cong V$. As outras propriedades topológicas como ser espaço de Hausdorff e ser segundo contável também são válidas para ∂M uma vez que $\partial M \subset M$. □

Destacamos ainda que a estrutura suave de ∂M é única, como mostra o teorema a seguir.

Teorema 1.5. *Seja M uma variedade suave e $S \subseteq M$ uma subvariedade mergulhada. A topologia subespaço de S e a estrutura suave descrita no Teorema (1.4) são a única topologia e estrutura suave tais que S é uma subvariedade mergulhada ou imersa.*

Demonstração. Ver Teorema 5.31 de [35]. □

Uma vez provado que ∂M é uma subvariedade imersa isometricamente de M, podemos definir a curvatura média no bordo.

Definição 1.5. Considere a imersão canônica dada pela inclusão $\iota : \partial M \to M$. A curvatura média no bordo é a função $H : \partial M \to \mathbb{R}$ dada por

$$H(q) := H_g(\iota)(q) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} h_{ii}(q). \tag{1.3}$$

1.1.4 Vetor normal ao bordo

Como já vimos anteriormente, se M é uma variedade de dimensão n com bordo, então ∂M é uma variedade de dimensão $n-1$. Além disso, uma orientação em M induz uma orientação em ∂M. A escolha de uma orientação no bordo é uma questão de convenção, motivado pelo Teorema de Stokes no objetivo de torná-la livre de sinal. Das várias maneiras de descrever a orientação do bordo, existem duas que se destacam pela simplicidade. A primeira delas é usar a teoria de formas, fazendo uma contração da orientação de M com um campo vetorial normal exterior à ∂M e a segunda é definir uma noção de vetor normal ao bordo primeiro. Para uma leitura bem detalhada desse assunto, o leitor pode consultar a introdução do Capítulo 22 de [46].

Como o nosso objetivo é apenas deixar bem definida a noção de vetor normal, optaremos pela segunda forma.

Para construir a noção de vetor normal ao bordo, usamos a decomposição do espaço tangente em (1.1) e obtemos

$$T_qM = T_q(\partial M) \oplus (T_q(\partial M))^{\perp}, \tag{1.4}$$

em que $q \in \partial M$.

Definição 1.6. Dado $q \in \partial M$. Um vetor $v \in (T_q(\partial M))^\perp$ é dito um *vetor normal ao bordo.*

Como ∂M e M têm dimensões $n-1$ e n, respectivamente, então os espaços vetoriais $T_q(\partial M)$ e T_qM têm dimensões $n-1$ e n, respectivamente.

Portanto, o espaço vetorial $(T_q(\partial M))^\perp$ tem dimensão 1. Dessa maneira, podemos dividir o espaço em duas classes, os que apontam para dentro e os que apontam para fora.

Definição 1.7. Dado $q \in \partial M$, dizemos que $v \in (T_q(\partial M))^\perp$ *aponta para dentro* se para algum $\varepsilon > 0$, existe uma curva suave $\gamma : [0, \varepsilon) \to M$ tal que $\gamma(0) = q$ e $\gamma'(0) = v$, e dizemos que *aponta para fora* se existe tal curva cujo domínio é $(-\varepsilon, 0]$. Denotaremos o *vetor normal a ∂M unitário apontando para dentro* por ν.

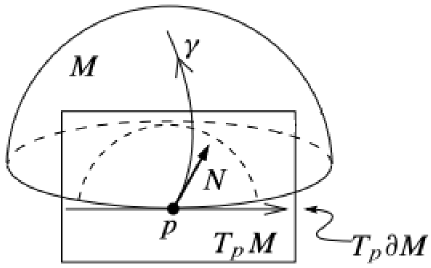

Figura 1.3: Um vetor normal apontando para dentro
Fonte: adaptado de John Lee, 2012

1.1.5 Coordenadas de Fermi

Um conceito que será de suma importância no trabalho são as coordenadas de Fermi. De fato, estas irão auxiliar em muitos cálculos posteriores. A definição a seguir pode ser encontrada em [37].

Definição 1.8. Seja M uma variedade Riemanniana compacta com bordo, $q_0 \in \partial M$, $x = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ as coordenadas normais de um ponto $q(x) \in \partial M$ numa vizinhança de q_0 e $\nu(x)$ o vetor normal unitário apontando para dentro. Então, considere a seguinte função

$$\begin{aligned} \psi^\partial_{q_0} : B(0,R) \times [0,R) \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} &\to M \\ (x,t) \mapsto \psi^\partial_{q_0}(x,t) &:= \exp_{q_0} t\nu(x). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Nesse caso, dizemos que $(x,t) \in \mathbb{R}^n$ são as *coordenadas de Fermi do ponto $\psi^\partial_{q_0}(x,t) \in M$ numa vizinhança de q_0.*

Apresentaremos um resultado útil sobre coordenadas de Fermi. Para mais detalhes, o leitor pode consultar o Lema 2.2 em [37].

Lema 1.6. Sejam $y = (y_1, \ldots, y_n) = (x, t)$ as coordenadas de Fermi de $q(y)$ em torno de um ponto $q_0 \in \partial M$. Então, valem as seguintes expansões da métrica em coordenadas de Fermi:

$$g^{ij}(y) = \delta_{ij} + 2h_{ij}(q_0)y_n + O\left(|y|^2\right) \text{ para } i, j = 1, \ldots, n-1, \tag{1.6}$$

$$g^{in}(y) = \delta_{in} \text{ para } i = 1, \ldots, n-1, \tag{1.7}$$

$$\sqrt{g}(y) = 1 - (n-1)H(q_0)y_n + O\left(|y|^2\right), \tag{1.8}$$

$$\sqrt{g}(x, 0) = 1 + O(|x|^2). \tag{1.9}$$

1.2 Pré-requisitos de Análise

Nessa seção, falamos um pouco sobre os espaços de Sobolev numa variedade M compacta suave com bordo. É bom salientar que a hipótese da compacidade sobre a variedade nessa teoria é muito importante. Usaremos como referência o livro do Hebey [32].

1.2.1 Espaços de Sobolev, Teoremas de Imersão e do Traço

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana suave compacta de dimensão n com bordo. Denotamos por $H^1(M)$ o complemento de $C^\infty(M)$ com respeito à norma $\|\cdot\|_{H^1(M)}$ dada por

$$\|u\|_{H^1(M)} = \left(\int_M |\nabla_g u|^2 + |u|^2 d\mu_g\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Observação 1.3. $H^1(M)$ é um espaço de Hilbert quando munido da norma $\|\cdot\|_{H^1(M)}$ induzida do produto interno

$$\langle u, v\rangle_{H^1(M)} = \int_M (\nabla_g u \nabla_g v + uv) d\mu_g.$$

Enunciamos agora um resultado importante de imersões de Sobolev.

Teorema 1.7. *(Teorema de Imersão de Sobolev) Seja (M, g) uma variedade Riemanniana suave compacta de dimensão n com bordo. Então, dado $p \in \left[1, \frac{2n}{n-2}\right]$, existe $C > 0$ tal que*

$$\|u\|_{L^p(M)} \leq C\|u\|_{H^1(M)}.$$

O resultado a seguir pode ser encontrado em [36].

Proposição 1.8. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana de dimensão $n \geq 3$ com bordo ∂M. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe uma constante $B > 0$ que depende apenas de ε, M e g tal que

$$\left(\int_{\partial M} |u|^{\frac{2(n-1)}{n-2}} d\sigma\right)^{\frac{n-2}{n-1}} \leq (S + \varepsilon) \int_M |\nabla_g u|^2 d\mu_g + B \int_M u^2 d\mu_g \tag{1.10}$$

para todo $u \in H^1(M)$, em que $S = \frac{2}{n-2}\sigma_n^{\frac{-1}{n-1}}$ e σ_n é o volume da esfera unitária de $\mathbb{R}^n$.

Demonstração. Ver Proposição 1.1 em [36]. □

Corolário 1.9. (Teorema do Traço de Sobolev) Seja (M, g) uma variedade Riemanniana de dimensão $n \geq 3$ com bordo ∂M. Então, existe uma constante $C > 0$ dependendo apenas de M e g tal que

$$\|u\|_{L^{\frac{2(n-1)}{n-2}}(\partial M)} \leq C\|u\|_{H^1(M)}. \tag{1.11}$$

1.2.2 Derivada de Gateaux

Nessa seção, trataremos de funcionais diferenciáveis, uma vez que usaremos o método variacional na abordagem do problema. Usaremos como referência o livro do Willem [47].

Definição 1.9. Seja $\varphi : U \to \mathbb{R}$, em que U é um subconjunto aberto de um espaço de Banach. Dados $u, h \in U$, denotamos, caso exista, a *a derivada de Fréchet em u aplicada em h* por

$$\varphi'(u) \cdot h = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(u + th) - \varphi(u)}{t}.$$

Capítulo 2

Sobre uma classe de problemas do tipo Yamabe em variedades com bordo

Neste capítulo, temos como objetivo estudar a existência de solução positiva do seguinte problema:

$$\begin{cases} -\Delta_g u + a(x)u = 0 \text{ em } M, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \frac{n-2}{2}b(x)u = (n-2)u^{\frac{n}{n-2}\pm\varepsilon} \text{ sobre } \partial M, \end{cases} \tag{$P_{\pm\varepsilon}$}$$

em que (M, g) é uma variedade Riemanniana compacta de dimensão $n \geq 3$ com bordo ∂M, $a \in C^1(M)$, $b \in C^1(\partial M)$, e ε é um parâmetro positivo.

Mostraremos que sob certas hipóteses existe solução para o problema $(P_{\pm\varepsilon})$. Mais ainda, mostraremos que tal solução é *blow-up* num ponto $q_0 \in \partial M$, no seguinte sentido:

Definição 2.1. Dizemos que u_ε é solução *blow-up* no ponto $q_0 \in \partial M$ caso

(i) Exista uma família de pontos $q_\varepsilon \in \partial M$ tais que $q_\varepsilon \to q_0$ quando $\varepsilon \to 0$;

(ii) Dada qualquer vizinhança $U \subset M$ de q_0, temos que $\sup_{q\in U} u_\epsilon(q) \to \infty$ quando $\varepsilon \to 0$.

Ao longo do trabalho, iremos supor que a parte quadrática associada ao problema $(P_{\pm\varepsilon})$ é coercivo, isto é, que existe uma constante $\theta > 0$ tal que

$$\int_M \left(|\nabla_g u|^2 + a(x)u^2\right) d\mu_g + \frac{n-2}{2}\int_{\partial M} b(x)u^2 d\sigma \geq \theta \|u\|^2_{H^1(M)}. \tag{C}$$

Enunciaremos, assim, o resultado principal do trabalho:

Teorema 2.1. *Defina $\varphi : \partial M \to \mathbb{R}$ por $\varphi(q) = b(q) - H(q)$ e suponha (C) e que $n \geq 5$. Então:*

(i) Se $q_0 \in \partial M$ *é um ponto de mínimo local de* φ *com* $\varphi(q_0) > 0$*, então para* $\varepsilon > 0$ *suficientemente pequeno, existe uma solução blow-up* u_ε *de* $(P_{-\varepsilon})$ *quando* $\varepsilon \to 0^+$.

(ii) Se $q_0 \in \partial M$ *é um ponto de máximo local de* φ *com* $\varphi(q_0) < 0$*, então para* $\varepsilon > 0$ *suficientemente pequeno, existe uma solução blow-up* u_ε *de* $(P_{+\varepsilon})$ *quando* $\varepsilon \to 0^+$.

Observação 2.1. No artigo [29] originalmente supõe-se $n \geq 7$, mas em nossos cálculos, encontramos que basta supormos $n \geq 5$.

2.1 Formulação de problema

Nesta seção, explicaremos a abordagem que faremos do problema e a estratégia para resolvê-lo. Para isso, dividiremos essa seção em algumas partes:

2.1.1 Resultados auxiliares - Parte I

Proposição 2.2. Supondo (C), então a função $\langle \cdot, \cdot \rangle : H^1(M) \times H^1(M) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\langle u, v \rangle = \int_M (\nabla_g u \nabla_g v + a(x)uv)\, d\mu_g + \frac{n-2}{2} \int_{\partial M} b(x)uv d\sigma$$

define um produto interno em $H^1(M)$.

Demonstração. Pela linearidade da integral e pela bilinearidade de $\nabla_g u \nabla_g v$, então são válidas as seguintes propriedades:

(i) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ para todo $u, v \in H^1(M)$,

(ii) $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u, v \in H^1(M)$ e

(iii) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$ para todo $u, v, w \in H^1(M)$.

Isto é, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é uma forma bilinear simétrica. Mostremos agora que valem

(iv) $\langle u, u \rangle \geq 0$ para todo $u \in H^1(M)$ e

(v) $\langle u, u \rangle = 0$ se, e somente se, $u = 0$.

De fato, por (C), temos

$$\langle u, u \rangle = \int_M \left(|\nabla_g u|^2 + a(x)u^2\right) d\mu_g + \frac{n-2}{2} \int_{\partial M} b(x)u^2 d\sigma \geq \theta \|u\|^2_{H^1(M)} \geq 0.$$

Pela expressão acima, se $\langle u, u \rangle = 0$, então $\|u\|^2_{H^1(M)} = 0$, o que implica em $u = 0$, o que mostra que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é, de fato, um produto interno. $\square$

Desse modo, o produto interno acima induz a norma $\|\cdot\|$ dada por

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}.$$

Ao longo do trabalho, denotaremos por H o espaço $H^1(M)$ munido do produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Proposição 2.3. Supondo (C), então as normas $\|\cdot\|_{H^1(M)}$ e $\|\cdot\|$ são equivalentes.

Demonstração. Por (C), temos $\|u\|^2 \geq \theta\|u\|^2_{H^1(M)}$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}\|u\|^2 &= \int_M \left(|\nabla_g u|^2 + a(x)u^2\right) d\mu_g + \frac{n-2}{2}\int_{\partial M} b(x)u^2 d\sigma \\ &\leq \int_M \left(|\nabla_g u|^2 + \|a\|_\infty u^2\right) d\mu_g + \frac{n-2}{2}\|b\|_\infty \int_{\partial M} u^2 d\sigma.\end{aligned}$$

Mas pelo Teorema do Traço, existe $C_1 > 0$ tal que

$$\int_{\partial M} u^2 d\sigma \leq C_1 \int_M \left(|\nabla_g u|^2 + u^2\right) d\mu_g.$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}\|u\|^2 &\leq \int_M \left(|\nabla_g u|^2 + \|a\|_\infty u^2\right) d\mu_g + \frac{C_1(n-2)}{2}\|b\|_\infty \int_M \left(|\nabla_g u|^2 + u^2\right) d\mu_g \\ &= \int_M \left(\left(1 + \frac{C_1(n-2)}{2}\|b\|_\infty\right)|\nabla_g u|^2 + \left(\|a\|_\infty + \frac{C_1(n-2)}{2}\|b\|_\infty\right)u^2\right) d\mu_g.\end{aligned}$$

Tomando $C_2 = \max\{1 + \frac{C_1(n-2)}{2}\|b\|_\infty, \|a\|_\infty + \frac{C_1(n-2)}{2}\|b\|_\infty\}$, obtemos que

$$\|u\|^2 \leq C_2\|u\|^2_{H^1(M)}.$$

Assim, concluímos a prova. □

2.1.2 Reexpressando o problema

Uma vez que os espaços adequados para estudar o problema $(P_{\pm\varepsilon})$ estão apresentados, vamos para o segundo passo, que é transformá-lo num problema mais conveniente. Para isso, definiremos alguns conceitos, provaremos algumas proposições importantes e alguns resultados da Teoria de Equações Diferenciais Elípticas.

Definição 2.2. Dada $g \in L^{\frac{2(n-1)}{n}}(\partial M)$, considere o seguinte problema:

$$\begin{cases} -\Delta_g u + a(x)u = 0 \text{ em } M, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \frac{n-2}{2}b(x)u = g \text{ sobre } \partial M. \end{cases} \tag{P_g}$$

Dizemos que $u_0 \in H^1(M)$ é solução fraca do problema (P_g) se u_0 é tal que

$$\int_M (\nabla_g u_0 \nabla_g v + a(x)u_0 v)\, d\mu_g + \frac{n-2}{2}\int_{\partial M} b(x)u_0 v d\sigma = \int_{\partial M} g v d\sigma, \tag{2.1}$$

para todo $v \in H^1(M)$.

Observação 2.2. Para obter a formulação fraca do problema (P_g), seguimos os seguintes passos:

Supomos que u_0 é suave e multiplicamos a primeira expressão de (P_g) por $v \in H^1(M)$ e integramos, obtendo:

$$-\int_M \Delta_g u_0 v d\mu_g + \int_M a(x)u_0 v d\mu_g = 0. \tag{2.2}$$

Usamos a Fórmula de Integração por Partes, temos

$$-\int_M \Delta_g u_0 v d\mu_g = \int_M \nabla_g u_0 \nabla_g v d\mu_g - \int_{\partial M} \frac{\partial u_0}{\partial \nu} v d\sigma. \tag{2.3}$$

Substituímos (2.3) em (2.2), segue que

$$\int_M \nabla_g u_0 \nabla_g v d\mu_g - \int_{\partial M} \frac{\partial u_0}{\partial \nu} v d\sigma + \int_M a(x)u_0 v d\mu_g = 0. \tag{2.4}$$

Substituímos em (2.4) a segunda expressão de (P_g), temos que

$$\int_M (\nabla_g u_0 \nabla_g v + a(x)u_0 v)\, d\mu_g + \frac{n-2}{2}\int_{\partial M} b(x)u_0 v d\sigma = \int_{\partial M} g v d\sigma,$$

que é a expressão definida em (2.1).

Lema 2.4. O problema (P_g) tem uma única solução fraca $u_0 \in H^1(M)$.

Demonstração. Considere o funcional $L_g : H^1(M) \to \mathbb{R}$ dado por $L_g(v) := \int_{\partial M} g v d\sigma$. Temos que L_g é contínuo em $H^1(M)$, pois L_g é linear e vale

$$|L_g(v)| \leq \int_{\partial M} |g||v| d\sigma \leq \|g\|_{L^{\frac{2(n-1)}{n}}(\partial M)} \|v\|_{L^{\frac{2(n-1)}{n-2}}(\partial M)}.$$

Pelo Teorema do Traço, vale

$$\|v\|_{L^{\frac{2(n-1)}{n-2}}(\partial M)} \leq C_1 \|v\|.$$

Assim, tem-se que

$$|L_g(v)| \leq C_2 \|v\|.$$

Logo, L_g é contínuo.

Portanto, pelo Teorema da Representação de Riesz, existe um único $u_0 \in H^1(M)$ tal que $L_g(v) = \langle u_0, v\rangle$. Substituindo $L_g(v)$ e $\langle u_0, v\rangle$ por suas respectivas expressões, obtemos exatamente a Equação (2.1). Isto é, u_0 é solução fraca de (P_g). $\square$

Observação 2.3. Vejamos agora que a solução de (P_g) é dado pelo adjunto do operador inclusão $i : H^1(M) \to L^{\frac{2(n-1)}{n-2}}(\partial M)$ aplicado na função g.

No contexto deste trabalho, o adjunto de i é o operador $i^* : L^{\frac{2(n-1)}{n}}(\partial M) \to H^1(M)$, definido pela expressão

$$\langle i^*(u), v\rangle_{H^1(M),H^1(M)} = \langle u, i(v)\rangle_{L^{\frac{2(n-1)}{n}}(\partial M),L^{\frac{2(n-1)}{n-2}}(\partial M)}, \tag{2.5}$$

em que fazemos as identificações dos espaços duais $(H^1(M))' \cong H^1(M)$ e $\left(L^{\frac{2(n-1)}{n-2}}(\partial M)\right)' \cong L^{\frac{2(n-1)}{n}}(\partial M)$.

Observando que $\langle i^*(u), v\rangle_{H^1(M),H^1(M)} = \langle i^*(u), v\rangle$ e $\langle u, i(v)\rangle_{L^{\frac{2(n-1)}{n}}(\partial M),L^{\frac{2(n-1)}{n-2}}(\partial M)} = \int_{\partial M} uvd\sigma$, temos

$$\langle i^*(u), v\rangle = \int_{\partial M} uvd\sigma.$$

Fazendo $u = g$, obtemos

$$\langle i^*(g), v\rangle = \int_{\partial M} gvd\sigma.$$

Mas pela unicidade da solução de (P_g), então $u_0 = i^*(g)$.

Observação 2.4. Assim, ao longo do trabalho, denotaremos a solução de (P_g) por $i^*(g)$.

Usando as notações acima e fazendo $g = f_\varepsilon(u)$ em (P_g), ficamos com o problema

$$u = i^*(f_\varepsilon(u)), \quad u \in \mathcal{H}, \tag{$P^*_{\pm\varepsilon}$}$$

em que $\mathcal{H} := H^1(M) \cap L^{s_\varepsilon}(\partial M)$ é o espaço de Banach dotado da norma $\|\cdot\|_{\mathcal{H}} := \|\cdot\| + \|\cdot\|_{L^{s_\varepsilon}(\partial M)}$, sendo o expoente s_ε definido por

$$s_\varepsilon = \begin{cases} \frac{2(n-1)}{n-2} & \text{para o caso } (P_{-\varepsilon}) \\ \frac{2(n-1)}{n-2} + n\varepsilon & \text{para o caso } (P_{+\varepsilon}) \end{cases}.$$

Observação 2.5. Após resolvermos o problema $(P^*_{\pm\varepsilon})$, é fácil ver que a solução que encontraremos é não-negativa, ou seja, temos que $u = u^+$. Desse modo, uma solução encontrada em $(P^*_{\pm\varepsilon})$ é também solução de $(P_{\pm\varepsilon})$.

Observação 2.6. Observe que, por conta do Teorema do Traço, temos que $\mathcal{H} = H^1(M)$ no caso $(P_{-\varepsilon})$ e, desse modo, temos que se $u \in \mathcal{H} = H^1(M)$, então, pelos resultados anteriores, $i^*(f_\varepsilon(u)) \in H^1(M) = \mathcal{H}$. No entanto, no caso $(P_{+\varepsilon})$ não é imediato provar que dada $u \in \mathcal{H}$, teríamos que $i^*(f_\varepsilon(u)) \in \mathcal{H}$.

Para provar isso, enunciaremos alguns resultados auxiliares que nos darão algumas estimativas importantes. Consideremos agora o problema (P_g) em coordenadas locais:

$$\begin{cases} Lu + a(x)u = 0 \text{ em } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \frac{n-2}{2} b(x)u = g \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.6}$$

em que Ω é um domínio limitado Lipschitz e L é o operador dado por

$$Lu = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{i=1}^{n} g^{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} g^{ij}\sqrt{g}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\right)\right)\frac{\partial u}{\partial x_i} \tag{2.7}$$

e a derivada normal $\frac{\partial}{\partial \nu}$ assume a forma

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j}\nu_j, \tag{2.8}$$

sendo $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ o vetor unitário normal a $\partial\Omega$ apontando para fora.

Como consequência do Teorema 3.14 em [17], temos as seguintes estimativas relativas ao Problema (2.6).

Teorema 2.5. *Suponha que $\frac{2n}{n+2} \le q < \frac{n}{2}$, $r > 0$ e $g \in L^{\frac{(n-1)q}{n-q}+r}(\partial\Omega)$. Então existe uma constante C satisfazendo a seguinte propriedade: Se $u \in H^1(\Omega)$ satisfaz (2.6), então valem também que $u \in L^{\frac{nq}{n-2q}}(\Omega)$ e $u \in L^{\frac{(n-1)q}{n-2q}}(\partial\Omega)$, e vale a estimativa*

$$\|u\|_{L^{\frac{nq}{n-2q}}(\Omega)} + \|u\|_{L^{\frac{(n-1)q}{n-2q}}(\partial\Omega)} \le C\left(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^{\frac{(n-1)q}{n-q}+r}(\partial\Omega)}\right). \tag{2.9}$$

Além disso, se a solução u é única, temos que

$$\|u\|_{L^{\frac{nq}{n-2q}}(\Omega)} + \|u\|_{L^{\frac{(n-1)q}{n-2q}}(\partial\Omega)} \le C\|g\|_{L^{\frac{(n-1)q}{n-q}+r}(\partial\Omega)}. \tag{2.10}$$

Corolário 2.6. Se $u \in H^1(M)$ é uma solução de (P_g) e $g \in L^{\frac{(n-1)q}{n-q}+r}(\partial M)$, então dados $\frac{2n}{n+2} \le q \le \frac{n}{2}$ e $r > 0$, existe $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^{\frac{(n-1)q}{n-2q}}(\partial M)} = \|i^*(g)\|_{L^{\frac{(n-1)q}{n-2q}}(\partial M)} \le C\|g\|_{L^{\frac{(n-1)q}{n-q}+r}(\partial M)}. \tag{2.11}$$

Demonstração. Segue da Estimativa (2.10) no Teorema 2.5. $\square$

Observação 2.7. No Corolário 2.6, tomamos q e r tais que $\frac{(n-1)q}{n-2q} = \frac{2(n-1)}{n-2} + n\varepsilon$ e $\frac{(n-1)q}{n-q} + r = \frac{2(n-1)+n(n-2)\varepsilon}{n+(n-2)\varepsilon}$, ou seja,

$$q = \frac{2n + n^2\left(\frac{n-2}{n-1}\right)\varepsilon}{n+2+2n\left(\frac{n-2}{n-1}\right)\varepsilon}$$

e

$$r = \frac{2(n-1)+n(n-2)\varepsilon}{n+(n-2)\varepsilon} - \frac{2(n-1)+n(n-2)\varepsilon}{n+(n-2)\left(\frac{n}{n-1}\right)\varepsilon}.$$

Notando que $\frac{2(n-1)}{n-2} + n\varepsilon = \left(\frac{n}{n-2} + \varepsilon\right)\frac{2(n-1)+n(n-2)\varepsilon}{n+\varepsilon(n-2)}$, temos que se $u \in L^{\frac{2(n-1)}{n-2}+n\varepsilon}(\partial M)$, então $|u|^{\frac{n}{n-2}+\varepsilon} \in L^{\frac{2(n-1)+n(n-2)\varepsilon}{n+\varepsilon(n-2)}}(\partial M)$ e, por (2.11), que $i^*\left(|u|^{\frac{n}{n-2}+\varepsilon}\right) \in L^{\frac{2(n-1)}{n-2}+n\varepsilon}(\partial M)$.

Assim, fica provado que no Problema $(P^*_{\pm\varepsilon})$ se $u \in \mathcal{H}$, então $i^*(f_\varepsilon(u)) \in \mathcal{H}$.

2.1.3 Resultados auxiliares - Parte II

Veremos alguns problemas auxiliares que ajudarão na construção de uma solução para o problema $(P^*_{\pm\varepsilon})$. Como já havíamos dito anteriormente, somos levados a construir soluções *blow-up* de $(P^*_{\pm\varepsilon})$. A maneira canônica de construir soluções deste tipo é através das funções bolhas. Estas são as funções $U_{\delta,\xi} : \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$ definidas por

$$U_{\delta,\xi}(x,t) := \frac{\delta^{\frac{n-2}{2}}}{\left((\delta+t)^2 + |x-\xi|^2\right)^{\frac{n-2}{2}}},$$

em que $\delta > 0$ e $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$, que são as soluções do problema limite

$$\begin{cases} -\Delta U = 0 \text{ em } \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+, \\ \frac{\partial U}{\partial \nu} = (n-2)U^{\frac{n}{n-2}} \text{ sobre } \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}. \end{cases} \tag{2.12}$$

Denotamos $U_\delta(x,t) := U_{\delta,0}(x,t)$. Também precisamos introduzir o problema linear

$$\begin{cases} -\Delta V = 0 \text{ em } \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+, \\ \frac{\partial U}{\partial \nu} = nU_1^{\frac{2}{n-2}}V \text{ sobre } \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}. \end{cases} \tag{2.13}$$

No trabalho de Almaraz [3] foi provado que o espaço de soluções de (2.13) de dimensão n é gerado pelas funções

$$V_i = \frac{\partial U_1}{\partial x_i} = (2-n)\frac{x_i}{((1+t)^2 + |x|^2)^{\frac{n}{2}}} \text{ para } i = i, \dots n-1,$$

$$V_0 = \frac{\partial U_\delta}{\partial \delta}(\delta = 1) = \frac{n-2}{2}\left(\frac{1}{(1+t)^2 + |x|^2}\right)^{\frac{n}{2}}\left[t^2 + |x|^2 - 1\right].$$

Definimos a função-bolha da variedade como sendo

$$W_{\delta,q}(\xi) = U_\delta\left(\left(\psi_q^\partial\right)^{-1}\xi\right)\chi\left(\left(\psi_q^\partial\right)^{-1}\xi\right),$$

em que $q \in \partial M$ e $\chi(x,t) = \tilde{\chi}(|x|)\tilde{\chi}(t)$, sendo $\tilde{\chi}$ uma função corte suave que satisfaz $\tilde{\chi}(s) \equiv 1$ para $0 \leq s < R/2$ e $\tilde{\chi}(s) \equiv 0$ para $s \geq R$. A partir das funções V_i, definimos as seguintes funções

$$Z^i_{\delta,q}(\xi) = \frac{1}{\delta^{\frac{n-2}{2}}}V_i\left(\frac{1}{\delta}\left(\psi_q^\partial\right)^{-1}\xi\right)\chi\left(\left(\psi_q^\partial\right)^{-1}\xi\right), \quad i = 0, \ldots n-1.$$

Escreveremos o espaço de Hilbert $H^1(M)$ como soma direta de dois subespaços ortogonais. São estes o subespaço

$$K_{\delta,q} = \left[Z^0_{\delta,q}, \ldots, Z^{n-1}_{\delta,q}\right]$$

e seu complemento ortogonal

$$K^\perp_{\delta,q} = \left\{\varphi \in H^1(M) \mid \langle\varphi, Z^i_{\delta,q}\rangle = 0 \text{ para todo } i = 0, \ldots, n-1\right\}.$$

Procuramos soluções de $(P^*_{\pm\varepsilon})$ do tipo

$$u_\varepsilon(x) = W_{\delta,q}(x) + \phi(x),$$

em que o ponto de *blow-up* é $q \in \partial M$ e a taxa de *blow-up* δ satisfaz $\delta := d\varepsilon$ para algum $d > 0$ e o resto ϕ pertence ao espaço vetorial de dimensão infinita $K^\perp_{\bar{\delta},q} \cap \mathcal{H}$ de codimensão n. Desse modo, o problema

$$W_{\delta,q}(x) + \phi(x) = i^*(f_\varepsilon(W_{\delta,q}(x) + \phi(x))), \quad \phi \in K^\perp_{\delta,q} \cap \mathcal{H}$$

pode ser reescrito na forma

$$W_{\delta,q}(x) + \phi(x) - i^*(f_\varepsilon(W_{\delta,q}(x) + \phi(x))) = 0, \quad \phi \in K^\perp_{\delta,q} \cap \mathcal{H}. \tag{2.14}$$

Uma vez que $\mathcal{H}$ é a soma direta de $K^\perp_{\delta,q} \cap \mathcal{H}$ e $K_{\delta,q} \cap \mathcal{H}$, resolver o Problema (2.14) é equivalente a resolver o sistema

$$\Pi^\perp_{\delta,q}\left\{W_{\delta,q}(x) + \phi(x) - i^*\left(f_\varepsilon\left(W_{\delta,q}(x) + \phi(x)\right)\right)\right\} = 0, \quad \phi \in K^\perp_{\delta,q} \cap \mathcal{H}, \tag{2.15}$$

$$\Pi_{\delta,q}\left\{W_{\delta,q}(x) + \phi(x) - i^*\left(f_\varepsilon\left(W_{\delta,q}(x) + \phi(x)\right)\right)\right\} = 0, \quad \phi \in K^\perp_{\delta,q} \cap \mathcal{H}, \tag{2.16}$$

sendo $\Pi^{\perp}_{\delta,q}$ e $\Pi_{\delta,q}$ as projeções em $K^{\perp}_{\delta,q} \cap \mathcal{H}$ e $K_{\delta,q} \cap \mathcal{H}$, respectivamente.

2.1.4 Redução a dimensão finita

Referente à Equação auxiliar (2.15), usaremos o método de redução a dimensão finita, que no nosso contexto consiste em reescrever (2.15) da seguinte maneira:

$$L_{\delta,q}(\phi) = N_{\delta,q}(\phi) + R_{\delta,q}, \tag{2.17}$$

em que $L_{\delta,q} : K^{\perp}_{\delta,q} \cap \mathcal{H} \to K^{\perp}_{\delta,q} \cap \mathcal{H}$ é o operador linear

$$L_{\delta,q}(\phi) = \Pi^{\perp}_{\delta,q} \left\{ \phi(x) - i^* \left(f'_\varepsilon \left(W_{\delta,q} \right) \cdot \phi \right) \right\}, \tag{2.18}$$

$f'_\varepsilon(W_{\delta,q})$ denota a derivada da função $f_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ em $W_{\delta,q}$, sendo $N_{\delta,q}(\phi)$ o termo não-linear

$$N_{\delta,q}(\phi) = \Pi^{\perp}_{\delta,q} \left\{ i^* \left(f_\varepsilon \left(W_{\delta,q}(x) + \phi(x) \right) \right) - i^* \left(f_\varepsilon \left(W_{\delta,q}(x) \right) - i^* \left(f'_\varepsilon \left(W_{\delta,q} \right) \cdot \phi \right) \right\} \tag{2.19}$$

e o erro $R_{\delta,q}$ definido por

$$R_{\delta,q} = \Pi^{\perp}_{\delta,q} \left\{ i^* \left(f_\varepsilon \left(W_{\delta,q}(x) \right) - W_{\delta,q}(x) \right\}. \tag{2.20}$$

2.2 Lemas auxiliares

Apresentaremos agora alguns lemas que serão muito importantes na prova do teorema principal.

Lema 2.7. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $0 < a < b$. Então, existe uma constante positiva $C_0 = C_0(a, b)$ tal que dados ε suficientemente pequeno, $q \in \partial M$, $d \in [a, b]$ e $\phi \in K^{\perp}_{\delta,q} \cap \mathcal{H}$, temos

$$\| L_{\delta,q}(\phi) \|_{\mathcal{H}} \geq C_0 \| \phi \|_{\mathcal{H}}.$$

Demonstração. Argumentamos por contradição. Suponha que existam duas sequências de números reais $\varepsilon_m \to 0$ e $d_m \in [a, b]$, uma sequência de pontos $q_m \in \partial M$ e uma sequência de funções $\phi_{\varepsilon_m d_m, q_m} \in K^{\perp}_{\varepsilon_m d_m, q_m} \cap \mathcal{H}$ tais que

$$\| \phi_{\varepsilon_m d_m, q_m} \|_{\mathcal{H}} = 1 \quad \text{e} \quad \| L_{\varepsilon_m d_m, q_m} \left(\phi_{\varepsilon_m d_m, q_m} \right) \|_{\mathcal{H}} \to 0 \text{ quando } m \to +\infty$$

Para simplificar a notação, ponha $\delta_m = \varepsilon_m d_m$ e defina

$$\tilde{\phi}_m := \delta_m^{(n-2)/2} \phi_{\delta_m, q_m} \left(\psi^{\partial}_{q_m} \left(\delta_m \eta \right) \right) \chi \left(\delta_m \eta \right) \text{ para } \eta = (z, t) \in \mathbb{R}^n_+, z \in \mathbb{R}^{n-1}, t \geq 0.$$

Nesse caso, temos $\|\phi_{\varepsilon_m d_m,q_m}\| \leq 1$, pois $\|\phi_{\delta_m,q_m}\| \leq \|\phi_{\delta_m,q_m}\| + \|\phi_{\delta_m,q_m}\|_{L^{s_\varepsilon}(\partial M)} = \|\phi_{\delta_m,q_m}\|_{\mathcal{H}} = 1$.

Afirmação 2.1. $\tilde{\phi_m}$ é limitada em $D^{1,2}(\mathbb{R}^n_+)$.

De fato,

$$\begin{aligned}
\nabla\tilde{\phi_m}(\eta) &= \delta_m^{\frac{n-2}{2}} \nabla\left(\phi_{\delta_m,q_m}(\delta_m\eta)\chi(\delta_m\eta)\right)\\
&= \delta_m^{\frac{n-2}{2}} \left[\chi(\delta_m\eta)\nabla(\phi_{\delta_m,q_m}(\delta_m\eta)) + \phi_{\delta_m,q_m}(\delta_m\eta)\nabla(\chi(\delta_m\eta))\right]\\
&= \delta_m^{\frac{n-2}{2}} \left[\delta_m\chi\nabla(\delta_m\eta)\phi_{\delta_m,q_m}(\delta_m\eta) + \phi_{\delta_m,q_m}(\delta_m\eta)\nabla\chi(\delta_m\eta)\right]\\
&= \delta_m^{\frac{n}{2}} \left[\chi(\delta_m\eta)\nabla\phi_{\delta_m,q_m}(\delta_m\eta) + \phi_{\delta_m,q_m}(\delta_m\eta)\nabla\chi(\delta_m\eta)\right].
\end{aligned}$$

Assim, temos

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla\tilde{\phi_m}(\eta)|^2 d\eta = \int_{\mathbb{R}^n_+} \delta_m^{n-2} \left|\chi(\delta_m\eta)\nabla\phi_{\delta_m,q_m}(\delta_m\eta) + \phi_{\delta_m,q_m}(\delta_m\eta)\nabla\chi(\delta_m\eta)\right|^2 d\eta.$$

Fazendo a mudança de variáveis $\delta_m\eta \mapsto (w,s)$, temos o elemento de volume $d\eta = \delta_m^{-n} dwds$ e, assim, ficamos com

$$\begin{aligned}
\|\tilde{\phi_m}\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^n_+)} &= \int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla\tilde{\phi_m}(\eta)|^2 d\eta\\
&= \int_{\mathbb{R}^n_+} |\chi(w,s)\nabla\phi_{\delta_m,q_m}(w,s) + \phi_{\delta_m,q_m}(w,s)\nabla\chi(w,s)|^2 dwds\\
&\leq 2\int_{\mathbb{R}^n_+} \left(|\chi(w,s)\nabla\phi_{\delta_m,q_m}(w,s)|^2 + |\phi_{\delta_m,q_m}(w,s)\nabla\chi(w,s)|^2\right) dwds\\
&\leq C\int_{\mathbb{R}^n_+} \left(|\nabla\phi_{\delta_m,q_m}(w,s)|^2 + |\phi_{\delta_m,q_m}(w,s)|^2\right) dwds\\
&\leq C_1\|\phi_{\delta_m,q_m}\|^2_{H^1(M)} \leq C_2\|\phi_{\delta_m,q_m}\|^2 = C_2.
\end{aligned}$$

Portanto, $\|\tilde{\phi_m}\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^n_+)}$ é limitada.

Observação 2.8. A partir de agora diremos que a sequência converge quando esta converge a menos de subsequência.

Por conta da Afirmação 2.1, temos que existe $\tilde{\phi_1} \in D^{1,2}(\mathbb{R}^n_+)$ tal que vale a convergência fraca $\tilde{\phi_m} \rightharpoonup \tilde{\phi_1}$. Pela propriedade reflexiva do espaço $D^{1,2}(\mathbb{R}^n_+)$, então $\tilde{\phi_m} \to \tilde{\phi_1}$ q.t.p. em $\mathbb{R}^n$.

Além disso, temos, pelo Teorema de Rellich-Kondrachov, que $\tilde{\phi_m} \to \tilde{\phi_2}$ em $L^q_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n_+)$ para $1 \leq q < \frac{2(n-1)}{n-2}$.

Assim existe $\tilde{\phi_2} \in L^q_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n_+)$ tal que vale a convergência fraca $\tilde{\phi_m} \rightharpoonup \tilde{\phi_2}$ e que, a menos de subsequência, $\tilde{\phi_m} \to \tilde{\phi_2}$ q.t.p. em $\mathbb{R}^n_+$.

Observação 2.9. Pela unicidade do limite, denotaremos ambos os limites por $\tilde{\phi}$.

Procedendo como anteriormente fazendo as mudanças de variáveis $M \ni \xi \mapsto \delta_m \eta \in \mathbb{R}^n_+$ e $\partial M \ni \xi \mapsto (\delta_m z, 0) \in \partial \mathbb{R}^n_+$, que nos dá os respectivos elementos de volume $d\mu_g = \delta_m^n d\eta$ e $d\sigma = \delta_m^{n-1} dz$, obtemos

$$
\begin{aligned}
0 = \left\langle \phi_{\delta_m,q_m}, Z^i_{\delta_m,q_m} \right\rangle &= \int_M \left(\nabla_g \phi_{\delta_m,q_m} \nabla_g Z^i_{\delta_m,q_m} + a(x)\phi_{\delta_m,q_m} Z^i_{\delta_m,q_m} \right) d\mu_g \\
&+ \int_{\partial M} b(x)\phi_{\delta_m,q_m} Z^i_{\delta_m,q_m} d\sigma \\
&:= I + \int_{B(0,R)\times[0,R)} \sqrt{g(\delta_m\eta)}\, a(\psi^\partial_{q_m}(\delta_m\eta))\phi_{\delta_m,q_m}(\psi^\partial_{q_m}(\delta_m\eta)) Z^i_{\delta_m,q_m}(\psi^\partial_{q_m}(\delta_m\eta))\delta_m^n d\eta \\
&+ \int_{B(0,R)} \sqrt{g(\delta_m z,0)}\, b(\psi^\partial_{q_m}(\delta_m z,0))\phi_{\delta_m,q_m}(\psi^\partial_{q_m}(\delta_m z,0)) Z^i_{\delta_m,q_m}(\psi^\partial_{q_m}(\delta_m z,0))\delta_m^{n-1} dz \\
&= I + \int_{B(0,R)\times[0,R)} \sqrt{g(\delta_m\eta)}\, a(\psi^\partial_{q_m}(\delta_m\eta))\phi_{\delta_m,q_m}(\psi^\partial_{q_m}(\delta_m\eta))\delta_m^{\frac{2-n}{2}} V_i(\eta)\chi(\delta_m\eta)\delta_m^n d\eta \\
&+ \int_{B(0,R)} \sqrt{g(\delta_m z,0)}\, b(\psi^\partial_{q_m}(\delta_m z,0))\phi_{\delta_m,q_m}(\psi^\partial_{q_m}(\delta_m z,0))\delta_m^{\frac{2-n}{2}} V_i(z,0)\chi(\delta_m z,0)\delta_m^{n-1} dz \\
&= I + \int_{B(0,R)\times[0,R)} \delta_m^{\frac{n+2}{2}} \sqrt{g(\delta_m\eta)}\, a(\psi^\partial_{q_m}(\delta_m\eta))\phi_{\delta_m,q_m}(\psi^\partial_{q_m}(\delta_m\eta)) V_i(\eta)\chi(\delta_m\eta) d\eta \\
&+ \int_{B(0,R)} \delta_m^{\frac{n}{2}} \sqrt{g(\delta_m z,0)}\, b(\psi^\partial_{q_m}(\delta_m z,0))\phi_{\delta_m,q_m}(\psi^\partial_{q_m}(\delta_m z,0)) V_i(z,0)\chi(\delta_m z,0) dz \\
&= I + \delta_m^2 \int_{B(0,R)\times[0,R)} \delta_m^{\frac{n-2}{2}} \sqrt{g(\delta_m\eta)}\, a(\psi^\partial_{q_m}(\delta_m\eta))\phi_{\delta_m,q_m}(\psi^\partial_{q_m}(\delta_m\eta)) V_i(\eta)\chi(\delta_m\eta) d\eta \\
&+ \delta_m \int_{B(0,R))} \delta_m^{\frac{n-2}{2}} \sqrt{g(\delta_m z,0)}\, b(\psi^\partial_{q_m}(\delta_m z,0))\phi_{\delta_m,q_m}(\psi^\partial_{q_m}(\delta_m z,0)) V_i(z,0)\chi(\delta_m z,0) dz \\
&= I + J,
\end{aligned}
$$

em que

$$
\begin{aligned}
J &= \delta_m^2 \int_{B(0,R)\times[0,R)} \delta_m^{\frac{n-2}{2}} \sqrt{g(\delta_m\eta)}\, a(\psi^\partial_{q_m}(\delta_m\eta))\phi_{\delta_m,q_m}(\psi^\partial_{q_m}(\delta_m\eta)) V_i(\eta)\chi(\delta_m\eta) d\eta \\
&+ \delta_m \int_{B(0,R)} \delta_m^{\frac{n-2}{2}} \sqrt{g(\delta_m z,0)}\, b(\psi^\partial_{q_m}(\delta_m z,0))\phi_{\delta_m,q_m}(\psi^\partial_{q_m}(\delta_m z,0)) V_i(z,0)\chi(\delta_m z,0) dz \\
&= \delta_m^2 \int_{B(0,R)} \sqrt{g(\delta_m\eta)}\, a(\psi^\partial_{q_m}(\delta_m\eta))\tilde{\phi_m}(\eta) V_i(\eta) d\eta \\
&+ \delta_m \int_{B(0,R)} \sqrt{g(\delta_m z,0)}\, b(\psi^\partial_{q_m}(\delta_m z,0))\tilde{\phi_m}(z,0) V_i(z,0) dz \\
&\leq C_1\delta_m^2 \int_{B(0,R)\times[0,R)} \tilde{\phi}_m(\eta) d\eta + \tilde{C}_1\delta_m \int_{B(0,R)} \tilde{\phi}_m(z,0) dz \leq C_2\delta_m^2 + \tilde{C}_2\delta_m = o(1)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{B(0,R)\times[0,R)} \sqrt{g(\delta_m\eta)} \left(\sum_{j,k=1}^{n} \delta_m^{n-2} g^{jk}(\delta_m\eta) \frac{\partial \phi_{\delta_m,q_m}}{\partial \eta_j}(\psi^{\partial}_{q_m}(\delta_m\eta)) \frac{Z^i_{\delta_m,q_m}}{\partial \eta_k}(\psi^{\partial}_{\delta_m,q_m}(\delta_m\eta)) \right) d\eta \\
&= \int_{B(0,R)\times[0,R)} \sqrt{g(\delta_m\eta)} \sum_{j,k=1}^{n} \delta_m^{n-2} g^{jk}(\delta_m\eta) \frac{\partial \phi_{\delta_m,q_m}}{\partial \eta_j}(\psi^{\partial}_{q_m}(\delta_m\eta)) \frac{\partial \left[\delta_m^{\frac{2-n}{2}} V_i(\eta)\chi(\delta_m\eta)\right]}{\partial \eta_k} d\eta \\
&= \int_{B(0,R)\times[0,R)} \sqrt{g(\delta_m\eta)} \sum_{j,k=1}^{n} \delta_m^{\frac{n-2}{2}} g^{jk}(\delta_m\eta) \frac{\partial \phi_{\delta_m,q_m}}{\partial \eta_j}(\psi^{\partial}_{q_m}(\delta_m\eta)) \frac{\partial \left[V_i(\eta)\chi(\delta_m\eta)\right]}{\partial \eta_k} d\eta \\
&= \int_{B(0,R)\times[0,R)} \sqrt{g(\delta_m\eta)} \sum_{j,k=1}^{n} \delta_m^{\frac{n-2}{2}} g^{jk}(\delta_m\eta) \frac{\partial \phi_{\delta_m,q_m}}{\partial \eta_j}(\psi^{\partial}_{q_m}(\delta_m\eta)) \frac{\partial \left[V_i(\eta)\chi(\delta_m\eta)\right]}{\partial \eta_k} d\eta \\
&= \int_{B(0,R)\times[0,R)} \sqrt{g(\delta_m\eta)} \sum_{j,k=1}^{n} \delta_m^{\frac{n-2}{2}} g^{jk}(\delta_m\eta) \frac{\phi_{\delta_m,q_m}}{\partial \eta_j}(\psi^{\partial}_{q_m}(\delta_m\eta))\chi(\delta_m\eta) \frac{\partial V_i}{\partial \eta_k}(\eta) d\eta \\
&\quad + \delta_m \int_{B(0,R)\times[0,R)} \sqrt{g(\delta_m\eta)} \sum_{j,k=1}^{n} \delta_m^{\frac{n-2}{2}} g^{jk}(\delta_m\eta) \frac{\partial \phi_{\delta_m,q_m}}{\partial \eta_j}(\psi^{\partial}_{q_m}(\delta_m\eta)) V_i(\eta) \frac{\partial \chi}{\partial \eta_k}(\delta_m\eta) d\eta.
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

Mas pelas expansões em coordenadas de Fermi (1.6) e (1.8), ficamos com

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{B(0,R)\times[0,R)} (1+O(\delta_m))(\delta_{jk}+O(\delta_m)) \sum_{j,k=1}^{n} \delta_m^{\frac{n-2}{2}} \frac{\partial \phi_{\delta_m,q_m}}{\partial \eta_j}(\psi^{\partial}_{q_m}(\delta_m\eta))\chi(\delta_m\eta) \frac{\partial V_i}{\partial \eta_k}(\eta) d\eta \\
&\quad + \int_{B(0,R)\times[0,R)} (1+O(\delta_m))(\delta_{jk}+O(\delta_m)) \sum_{j,k=1}^{n} \delta_m^{\frac{n-2}{2}} \frac{\partial \phi_{\delta_m,q_m}}{\partial \eta_j}(\psi^{\partial}_{q_m}(\delta_m\eta))\delta_m \frac{\partial \chi}{\partial \eta_k} V_i(\eta) d\eta \\
&= \int_{B(0,R)\times[0,R)} \sum_{j=1}^{n} \delta_m^{\frac{n-2}{2}} \chi(\delta_m\eta) \frac{\partial \phi_{\delta_m,q_m}}{\partial \eta_j}(\psi^{\partial}_{\delta_m,q_m}(\delta_m\eta)) \frac{\partial V_i}{\partial \eta_j}(\eta) d\eta \\
&\quad + \delta_m \int_{B(0,R)\times[0,R)} \sum_{j=1}^{n} \delta_m^{\frac{n-2}{2}} V_i(\eta) \frac{\partial \phi_{\delta_m,q_m}}{\partial \eta_j}(\psi^{\partial}_{\delta_m,q_m}(\delta_m\eta)) \frac{\partial \chi}{\partial \eta_j}(\delta_m\eta) d\eta + o(1) \\
&= \int_{B(0,R)\times[0,R)} \sum_{j=1}^{n} \delta_m^{\frac{n-2}{2}} \chi(\delta_m\eta) \frac{\partial \phi_{\delta_m,q_m}}{\partial \eta_j}(\psi^{\partial}_{\delta_m,q_m}(\delta_m\eta)) \frac{\partial V_i}{\partial \eta_j}(\eta) d\eta + o(1).
\end{aligned}
$$

Somando e subtraindo o termo, que pelos cálculos anteriores, satisfaz

$$
\delta_m \int_{B(0,R)\times[0,R)} \sum_{j=1}^{n} \delta_m^{\frac{n-2}{2}} \phi_{\delta_m,q_m}(\psi^{\partial}_{\delta_m,q_m}(\delta_m\eta)) \frac{\partial \chi}{\partial \eta_j}(\delta_m\eta) \frac{\partial V_i}{\partial \eta_j}(\eta) d\eta = o(1),
$$

na Equação (2.21), obtemos

$$\begin{aligned} I &= \int_{B(0,R)\times[0,R)} \nabla\tilde{\phi_m}(\eta)\nabla V_i(\eta)d\eta \\ &+ \delta_m \int_{B(0,R)\times[0,R)} \sum_{j=1}^{n} \delta_m^{\frac{n-2}{2}} V_i(\eta)\frac{\partial\phi_{\delta_m,q_m}}{\partial\eta_j}(\psi^{\partial}_{\delta_m,q_m}(\delta_m\eta))\frac{\partial\chi}{\partial\eta_j}(\delta_m\eta)d\eta \\ &- \delta_m \int_{B(0,R)\times[0,R)} \sum_{j=1}^{n} \delta_m^{\frac{n-2}{2}} \phi_{\delta_m,q_m}(\psi^{\partial}_{\delta_m,q_m}(\delta_m\eta))\frac{\partial\chi}{\partial\eta_j}(\delta_m\eta)\frac{\partial V_i}{\partial\eta_j}(\eta)d\eta. \end{aligned}$$

Isto é,

$$I = \int_{B(0,R)\times[0,R)} \nabla\tilde{\phi_m}(\eta)\nabla V_i(\eta)d\eta + o(1). \tag{2.22}$$

Assim, por (2.22) e (2.2), temos

$$0 = \left\langle \phi_{\delta_m,q_m}, Z^i_{\delta_m,q_m}\right\rangle = \int_{\mathbb{R}^n_+} \nabla V_i\nabla\tilde{\phi_m}(\eta)d\eta + o(1). \tag{2.23}$$

Logo, passando o limite em (2.23) e pela convergência fraca $\tilde{\phi_m} \rightharpoonup \tilde{\phi}$ em $D^{1,2}(\mathbb{R}^n_+)$, obtemos

$$0 = \left\langle \phi_{\delta_m,q_m}, Z^i_{\delta_m,q_m}\right\rangle = \int_{\mathbb{R}^n_+} \nabla V_i\nabla\tilde{\phi_m}d\eta + o(1) = \int_{\mathbb{R}^n_+} \nabla V_i\nabla\tilde{\phi}d\eta. \tag{2.24}$$

Por outro lado, como V_i é solução de (2.13) e usando a convergência fraca novamente, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} \nabla V_i\nabla\tilde{\phi_m}d\eta = \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} nU_1^{\frac{2}{n-2}}V\tilde{\phi_m}dz = n\int_{\partial\mathbb{R}^n_+} U_1^{\frac{2}{n-2}}\tilde{\phi}dz. \tag{2.25}$$

Desse modo, combinando (2.24) e (2.25), temos

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} \nabla V_i\nabla\tilde{\phi}d\eta = n\int_{\partial\mathbb{R}^n_+} U_1^{\frac{2}{n-2}}\tilde{\phi}dz. \tag{2.26}$$

Agora podemos expressar

$$\begin{aligned} \phi_{\delta_m,q_m} - i^*(f'_{\varepsilon_m}(W_{\delta_m,q_m})[\phi_{\delta_m,q_m}]) &= \Pi^{\perp}_{\delta_m,q_m}\{\phi_{\delta_m,q_m} - i^*(f'_{\varepsilon_m}(W_{\delta_m,q_m})[\phi_{\delta_m,q_m}])\} \\ &+ \Pi_{\delta_m,q_m}\{\phi_{\delta_m,q_m} - i^*(f'_{\varepsilon_m}(W_{\delta_m,q_m})[\phi_{\delta_m,q_m}])\} \\ &= L_{\delta_m,q_m}(\phi_{\delta_m,q_m}) + \sum_{i=0}^{n-1} c^i_m Z^i_{\delta_m,q_m} \end{aligned}$$

para certos c^i_m. Queremos mostrar que para todo $i \in \{0,\dots,n-1\}$, tem-se $c^i_m \to 0$

quando $m \to \infty$. Equivalentemente reexpressamos

$$\phi_{\delta_m,q_m} - i^*(f'_{\varepsilon_m}(W_{\delta_m,q_m})[\phi_{\delta_m,q_m}]) - L_{\delta_m,q_m}(\phi_{\delta_m,q_m}) = \sum_{i=0}^{n-1} c_m^i Z^i_{\delta_m,q_m}. \tag{2.27}$$

Fazendo o produto interno da Equação (2.27) com $Z^j_{\delta_m,q_m}$, obtemos

$$\sum_{i=0}^{n} c_m^i \left\langle Z^i_{\delta_m,q_m}, Z^j_{\delta_m,q_m} \right\rangle = \left\langle \phi_{\delta_m,q_m}, Z^j_{\delta_m,q_m} \right\rangle - \left\langle i^*(f'_{\varepsilon_m}(W_{\delta_m,q_m})[\phi_{\delta_m,q_m}]), Z^j_{\delta_m,q_m} \right\rangle$$
$$- \left\langle L_{\delta_m,q_m}(\phi_{\delta_m,q_m}), Z^j_{\delta_m,q_m} \right\rangle.$$

Levando em conta que $\phi_{\delta_m,q_m} \in K^\perp_{\delta_m,q_m}$ e $L_{\delta_m,q_m}(\phi_{\delta_m,q_m}) \in K^\perp_{\delta_m,q_m}$, temos que $\left\langle \phi_{\delta_m,q_m}, Z^j_{\delta_m,q_m} \right\rangle = 0$ e $\left\langle L_{\delta_m,q_m}(\phi_{\delta_m,q_m}), Z^j_{\delta_m,q_m} \right\rangle = 0$, o que nos dá

$$\sum_{i=0}^{n-1} c_m^i \left\langle Z^i_{\delta_m,q_m}, Z^j_{\delta_m,q_m} \right\rangle = - \left\langle i^*(f'_{\varepsilon_m}(W_{\delta_m,q_m})[\phi_{\delta_m,q_m}]), Z^j_{\delta_m,q_m} \right\rangle.$$

Pela definição de i^*, temos

$$\sum_{i=0}^{n-1} c_m^i \left\langle Z^i_{\delta_m,q_m}, Z^j_{\delta_m,q_m} \right\rangle = - \int_{\partial M} f'_{\varepsilon_m}(W_{\delta_m,q_m})[\phi_{\delta_m,q_m}] Z^i_{\delta_m,q_m} d\sigma. \tag{2.28}$$

Agora fazendo o produto interno da Equação 2.27 por ϕ_{δ_m,q_m}, temos

$$\langle \phi_{\delta_m,q_m}, \phi_{\delta_m,q_m} \rangle - \left\langle i^*(f'_{\varepsilon_m}(W_{\delta_m,q_m})[\phi_{\delta_m,q_m}]), \phi_{\delta_m,q_m} \right\rangle$$
$$- \langle \phi_{\delta_m,q_m}, L_{\delta_m,q_m}(\phi_{\delta_m,q_m}) \rangle = \sum_{i=0}^{n-1} c_m^i \left\langle Z^i_{\delta_m,q_m}, \phi_{\delta_m,q_m} \right\rangle.$$

Como no caso anterior, temos $\left\langle i^*(f'_{\varepsilon_m}(W_{\delta_m,q_m})[\phi_{\delta_m,q_m}]), \phi_{\delta_m,q_m} \right\rangle = 0$ e $\sum_{i=0}^{n-1} c_m^i \left\langle Z^i_{\delta_m,q_m}, \phi_{\delta_m,q_m} \right\rangle = 0$ e assim ficamos com

$$\|\phi_{\delta_m,q_m}\|^2 - \int_{\partial M} f'_{\varepsilon_m}(W_{\delta_m,q_m}) \phi^2_{\delta_m,q_m} d\sigma = 0.$$

Ou seja, temos

$$\int_{\partial M} f'_{\varepsilon_m}(W_{\delta_m,q_m}) \phi^2_{\delta_m,q_m} d\sigma = \|\phi_{\delta_m,q_m}\|^2 \leq 1.$$

Assim, $f'_{\varepsilon_m}(W_{\delta_m,q_m})^{\frac{1}{2}} \phi_{\delta_m,q_m}$ é limitada em $L^2(\partial M)$.

Afirmação 2.2. $\int_{\partial M} f'_{\varepsilon_m}(W_{\delta_m,q_m}) \phi^2_{\delta_m,q_m} d\sigma = o(1)$.

Substituindo cada termo por sua respectiva expressão, obtemos

$$\begin{aligned}&\int_{\partial M} f'_{\varepsilon_m}(W_{\delta_m,q_m})\phi^2_{\delta_m,q_m}d\sigma\\&= C\int_{\partial M}\left[U_{\delta_m}((\psi^{\partial}_{q_m})^{-1}(\xi))\chi((\psi^{\partial}_{q_m})^{-1}(\xi))\right]^{\frac{2}{n-2}\pm\varepsilon_m}\phi_{\delta_m,q_m}\delta^{\frac{2-n}{2}}V_i(\delta_m^{-1}(\psi^{\partial}_{q_m})^{-1}(\xi))d\sigma,\end{aligned}$$

em que $C = n \pm (n-2)\varepsilon$. Fazendo a mudança de coordenadas, obtemos

$$\begin{aligned}&\int_{\partial M} f'_{\varepsilon_m}(W_{\delta_m,q_m})\phi^2_{\delta_m,q_m}d\sigma\\&= C\int_{B(0,R)}\sqrt{g(z,0)}\,[U_{\delta_m}(z,0)\chi(z,0)]^{\frac{2}{n-2}\pm\varepsilon_m}\phi_{\delta_m,q_m}\delta_m^{\frac{2-n}{2}}V_i(\delta_m^{-1}(z,0))dz.\end{aligned}$$

Como $\sqrt{g}, \chi^{\pm\frac{n-2}{2}\varepsilon_m}$ e $U_{\delta_m}^{\pm\frac{n-2}{2}\varepsilon_m}$ são limitadas, uma vez que

$$U_{\delta_m}(z,0)^{\pm\varepsilon_m} \le (\delta_m^{-1})^{\pm\frac{n-2}{2}\varepsilon_m} = \delta_m^{\mp\frac{n-2}{2}\varepsilon_m}$$

$$\delta_m^{\mp\frac{n-2}{2}\varepsilon_m} = 1\mp\frac{n-2}{2}\varepsilon_m\ln\delta_m + O(\varepsilon_m^2\ln^2\delta_m) = 1\mp\frac{n-2}{2}\varepsilon\ln(d_m\varepsilon_m)+O(\varepsilon_m^2\ln^2\varepsilon_m) \le C_1. \tag{2.29}$$

Assim, obtemos a estimativa

$$\int_{\partial M} f'_{\varepsilon_m}(W_{\delta_m,q_m})\phi^2_{\delta_m,q_m}d\sigma \le C_2\int_{B(0,R)} n\left(\frac{\delta_m}{\delta_m^2+|z|^2}\right)\chi(z,0)\phi_{\delta_m,q_m}\delta_m^{\frac{2-n}{2}}V_i(\delta_m^{-1}(z,0))dz.$$

Colocando as potências de δ_m em evidência, obtemos

$$\int_{\partial M} f'_{\varepsilon_m}(W_{\delta_m,q_m})\phi^2_{\delta_m,q_m}d\sigma \le C_2\delta_m^{-\frac{n}{2}}\int_{B(0,R)} n\left(\frac{1}{1+|z/\delta_m|^2}\right)\chi(z,0)\phi_{\delta_m,q_m}V_i(\delta_m^{-1}(z,0))dz.$$

Fazendo a mudança de variável $w = \delta_m^{-1}z$, que nos dá o elemento de $dw = \delta_m^{-n+1}dz$, ficamos com

$$\begin{aligned}&\int_{\partial M} f'_{\varepsilon_m}(W_{\delta_m,q_m})\phi^2_{\delta_m,q_m}d\sigma\\&\le C_2\delta_m^{-\frac{n}{2}}\int_{B(0,R)} n\left(\frac{1}{1+|w|^2}\right)\chi(\delta_m w,0)\phi_{\delta_m,q_m}(\delta_m w,0)V_i(w,0)\delta_m^{-n+1}dw\\&= C_2\int_{B(0,R)} n\left(\frac{1}{1+|w|^2}\right)\delta_m^{\frac{n-2}{2}}\chi(\delta_m w,0)\phi_{\delta_m,q_m}(\delta_m w,0)V_i(w,0)dw\\&= C_2\int_{B(0,R)} nU_1^{\frac{2}{n-2}}(w,0)\tilde{\phi_m}(w,0)V_i(w,0)dw.\end{aligned}$$

Como V_i é limitada, então

$$\int_{\partial M} f'_{\varepsilon_m}(W_{\delta_m,q_m})\phi^2_{\delta_m,q_m} d\sigma \leq C_3 \int_{B(0,R)} nU_1^{\frac{n}{n-2}}(w,0)\tilde{\phi_m}(w,0)dw.$$

Como $\tilde{\phi_m} \rightharpoonup \tilde{\phi}$ em $L^q_{\text{loc}}(\partial\mathbb{R}^n_+)$ para $1 \leq q < \frac{2(n-1)}{n-2}$ então

$$\int_{B(0,R)} nU_1^{\frac{n}{n-2}}(w,0)\tilde{\phi_m}(w,0)dw \to \int_{B(0,R)} nU_1^{\frac{n}{n-2}}(w,0)\tilde{\phi}(w,0)dw.$$

Usando (2.26), ficamos com

$$\int_{\partial M} f'_{\varepsilon_m}(W_{\delta_m,q_m})\phi^2_{\delta_m,q_m} d\sigma = o(1).$$

Analogamente aos cálculos anteriores, temos que

$$|\left\langle Z^i_{\delta_m,q_m}, Z^j_{\delta_m,q_m}\right\rangle| = C\delta_{ij}. \tag{2.30}$$

Assim, substituindo (2.30) em (2.28), e fazendo $m \to \infty$, obtemos que

$$c^i_m \to 0. \tag{2.31}$$

Agora tomamos a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ na identidade (2.27), ficamos com

$$\begin{aligned}\|\phi_{\delta_m,q_m} - i^*(f'_{\varepsilon_m}(W_{\delta_m,q_m}))[\phi_{\delta_m,q_m}\|_{\mathcal{H}} &= \left\|\sum_{i=0}^{n-1} c^i_m Z^i_{\delta_m,q_m} + L_{\delta_m,q_m}(\phi_{\delta_m,q_m})\right\|_{\mathcal{H}} \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} |c^i_m| \|Z^i_{\delta_m,q_m}\|_{\mathcal{H}} + \|L_{\delta_m,q_m}(\phi_{\delta_m,q_m})\|_{\mathcal{H}}.\end{aligned} \tag{2.32}$$

Como supomos que $\|L_{\delta_m,q_m}(\phi_{\delta_m,q_m})\|_{\mathcal{H}} = o(1)$ no início do lema e usando o Fato (2.31), ficamos com

$$\|\phi_{\delta_m,q_m} - i^*(f'_{\varepsilon_m}(W_{\delta_m,q_m}))[\phi_{\delta_m,q_m}\|_{\mathcal{H}} = o(1). \tag{2.33}$$

Agora tomamos uma função $\varphi \in C^\infty_0(\mathbb{R}^n_+)$ cujo suporte está contido em $B(0,R)$ e defina a sequência de funções

$$\varphi_m(\xi) = \delta_m^{\frac{2-n}{2}} \varphi(\delta_m^{-1}(\psi^\partial_{q_m})^{-1}\xi)\chi((\psi^\partial_{q_m})^{-1}\xi), \quad \text{com } \xi \in M.$$

Podemos expressar $\langle \phi_{\delta_m,q_m}, \varphi_m \rangle$ da seguinte maneira

$$\begin{aligned}\langle \phi_{\delta_m,q_m}, \varphi_m \rangle &= \langle \phi_{\delta_m,q_m} - i^*(f'_{\varepsilon_m}(W_{\delta_m,q_m})[\phi_{\delta_m,q_m}]) + i^*(f'_{\varepsilon_m}(W_{\delta_m,q_m})[\phi_{\delta_m,q_m}]), \varphi_m \rangle \\ &= \langle \phi_{\delta_m,q_m} - i^*(f'_{\varepsilon_m}(W_{\delta_m,q_m})[\phi_{\delta_m,q_m}]), \varphi_m \rangle + \langle i^*(f'_{\varepsilon_m}(W_{\delta_m,q_m})[\phi_{\delta_m,q_m}]), \varphi_m \rangle \\ &= \langle \phi_{\delta_m,q_m} - i^*(f'_{\varepsilon_m}(W_{\delta_m,q_m})[\phi_{\delta_m,q_m}]), \varphi_m \rangle + \int_{\partial M} f'_{\varepsilon_m}(W_{\delta_m,q_m})[\phi_{\delta_m,q_m}]\varphi_m d\sigma.\end{aligned}$$

Por (2.33), ficamos com

$$\langle \phi_{\delta_m,q_m}, \varphi_m \rangle = \int_{\partial M} f'_{\varepsilon_m}(W_{\delta_m,q_m})[\phi_{\delta_m,q_m}]\varphi_m d\sigma + o(1).$$

Analogamente à prova da Afirmação (2.2), vemos que

$$\langle \phi_{\delta_m,q_m}, \varphi_m \rangle = (n \pm (n-2)\varepsilon_m) \int_{B(0,R)} \delta_m^{\mp\frac{n}{n-2}\varepsilon_m} U_1^{\frac{n}{n-2}\pm\varepsilon_m}(z,0)\tilde{\phi_m}(z,0)\varphi(z,0)dz + o(1).$$

Assim, ficamos com

$$\langle \phi_{\delta_m,q_m}, \varphi_m \rangle = n \int_{B(0,R)} U_1^{\frac{n}{n-2}}(z,0)\tilde{\phi_m}(z,0)\varphi(z,0)dz + o(1).$$

Como $\tilde{\phi_m} \to \tilde{\phi}$ em $L^q_{\text{loc}}(\partial\mathbb{R}^{n-1}_+)$ para $1 \le q < \frac{2(n-1)}{n-2}$, então

$$n \int_{B(0,R)} U_1^{\frac{n}{n-2}}(z,0)\tilde{\phi_m}(z,0)\varphi(z,0)dz + o(1) = n \int_{B(0,R)} U_1^{\frac{n}{n-2}}(z,0)\tilde{\phi}(z,0)\varphi(z,0)dz, \tag{2.34}$$

pois

$$\begin{aligned}\int_{B(0,R)} |U_1^{\frac{n}{n-2}}(z,0)\varphi(z,0)||\tilde{\phi_m}(z,0) - \tilde{\phi}(z,0)|dz &\le \|U_1^{\frac{n}{n-2}}(z,0)\varphi(z,0)\|_{L^\infty(B(0,R))} \\ &\times \int_{B(0,R)} |\tilde{\phi_m}(z,0) - \tilde{\phi}(z,0)|dz = o(1).\end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$\langle \phi_{\delta_m,q_m}, \varphi_m \rangle = \int_{B(0,R)\times[0,R)} \nabla\tilde{\phi}\nabla\varphi d\eta + o(1). \tag{2.35}$$

Assim, combinando (2.34) e (2.35) e passando o limite obtemos:

$$n \int_{B(0,R)} U_1^{\frac{n}{n-2}}(z,0)\tilde{\phi}(z,0)\varphi(z,0)dz = \int_{B(0,R)\times[0,R)} \nabla\tilde{\phi}(\eta)\nabla\varphi(\eta)d\eta, \tag{2.36}$$

que, como vimos anteriormente, nos diz que $\tilde{\phi}$ é solução fraca de (2.12). Assim, temos que $\tilde{\phi}$ é uma combinação das funções V_i. Mas como tínhamos construído a sequência $\tilde{\phi}_m \in K^{\perp}_{\delta_m,q_m}$, e consequentemente o limite $\tilde{\phi} \in K^{\perp}_{\delta,q}$, o que obriga que

$$\tilde{\phi} = 0.$$

Procedendo de maneira análoga, encontramos que

$$\begin{aligned}
\|\phi_{\delta_m,q_m}\|^2 &= \langle \phi_{\delta_m,q_m}, \phi_{\delta_m,q_m} \rangle \\
&= \int_{\partial M} f'_{\varepsilon_m}(W_{\delta_m,q_m})[\phi_{\delta_m,q_m}]\phi_{\delta_m,q_m} d\sigma + o(1) \\
&= (n \pm \varepsilon_m(n-2)) \int_{B(0,R)} \delta_m^{\mp\varepsilon_m \frac{n}{n-2}} U_1^{\frac{n}{n-2}\pm\varepsilon_m}(z,0)\tilde{\phi}_m^2(z,0)\varphi(z,0)dz + o(1) \\
&= o(1).
\end{aligned} \tag{2.37}$$

De maneira similar a (2.32), tomando desta vez a norma $\|\cdot\|_{L^{s_\varepsilon}(\partial M)}$, temos

$$\|\phi_{\delta_m,q_m}\|_{L^{s_\varepsilon}(\partial M)} \leq \|i^*(f'_{\varepsilon_m}(W_{\delta_m,q_m})[\phi_{\delta_m,q_m}])\|_{L^{s_{\varepsilon_m}}(\partial M)} + o(1) = o(1). \tag{2.38}$$

Desse modo, por (2.37) e (2.38), temos que

$$\|\phi_{\delta_m,q_m}\|_{\mathcal{H}} = \|\phi_{\delta_m,q_m}\| + \|\phi_{\delta_m,q_m}\|_{L^{s_\varepsilon}(\partial M)} = o(1), \tag{2.39}$$

o que é uma contradição, pois $\|\phi_{\delta_m,q_m}\|_{\mathcal{H}} = 1$. Assim, finalizamos a demonstração. $\square$

Lema 2.8. Sejam $a, b \in \mathbb{R}, 0 < a < b$ tais que existe uma constante positiva $C_1 = C_1(a,b)$ para a qual, dados ε pequeno, $q \in \partial M$ e $d \in [a,b]$ tem-se

$$\|R_{\varepsilon,\delta,q}\|_{\mathcal{H}} \leq C_1\varepsilon|\ln\varepsilon|.$$

Observação 2.10. Dividiremos a demonstração do lema em três afirmações principais. Cada uma é responsável por uma estimativa e ao fim utilizaremos as três estimativas para provar o lema.

Demonstração. Sendo $f_0(W_{\delta,q}) \in L^{\frac{2(n-1)}{n}}(\partial M)$, sabemos que existe Γ que satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta_g\Gamma + a(x)\Gamma = 0 \text{ em } M, \\ \frac{\partial}{\partial\nu}\Gamma + \frac{n-2}{2}b(x)\Gamma = f_0\left(W_{\delta,q}\right) \text{ sobre } \partial M, \end{cases} \tag{P_0}$$

em que $\Gamma\left(x\right) = i^*(f_0\left(W_{\delta,q}\left(x\right)\right)$, isto é, a solução fraca de (P_0).

Afirmação 2.3. $\|i^*(f_0(W_{\delta,q})) - W_{\delta,q}\| = O(\varepsilon)$.

De fato, temos

$$\begin{aligned}\|i^*\left(f_0\left(W_{\delta,q}\right)\right)-W_{\delta,q}\|^2 &= \|\Gamma - W_{\delta,q}\|^2\\ &= \int_M \left(|\nabla_g\left(\Gamma - W_{\delta,q}\right)|^2 + a(x)\left(\Gamma - W_{\delta,q}\right)^2\right) d\mu_g\\ &+ \frac{n-2}{2}\int_{\partial M} b(x)\left(\Gamma - W_{\delta,q}\right)^2 d\sigma.\end{aligned}$$

Pela fórmula de integração por partes, temos

$$\begin{aligned}\|\Gamma - W_{\delta,q}\|^2 &= \int_M \left(-\Delta_g\left(\Gamma - W_{\delta,q}\right) + a(x)\left(\Gamma - W_{\delta,q}\right)\right)\left(\Gamma - W_{\delta,q}\right) d\mu_g\\ &+ \int_{\partial M}\left[\frac{\partial\left(\Gamma - W_{\delta,q}\right)}{\partial\nu} + \frac{(n-2)}{2} b(x)\left(\Gamma - W_{\delta,q}\right)\right]\left(\Gamma - W_{\delta,q}\right) d\sigma.\end{aligned}$$

Como Γ é solução fraca, então

$$\begin{aligned}\|\Gamma - W_{\delta,q}\|^2 &= \int_M \left(\Delta_g W_{\delta,q} - a(x) W_{\delta,q}\right)\left(\Gamma - W_{\delta,q}\right) d\mu_g\\ &+ \int_{\partial M}\left[f_0\left(W_{\delta,q}\right) - \frac{\partial W_{\delta,q}}{\partial\nu}\right]\left(\Gamma - W_{\delta,q}\right) d\mu_g\\ &- \frac{(n-2)}{2}\int_{\partial M} b(x) W_{\delta,q}\left(\Gamma - W_{\delta,q}\right) d\mu_g := I_1 + I_2 + I_3.\end{aligned}$$

i) Pela Desigualdade de Hölder, temos

$$I_1 \leq \|\Delta_g W_{\delta,q} - a(x) W_{\delta,q}\|_{L^{\frac{2n}{n+2}}(M)} \|\Gamma - W_{\delta,q}\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(M)}.$$

Pelo Teorema de Imersão de Sobolev, existe $C > 0$ tal que

$$I_1 \leq C\|\Delta_g W_{\delta,q} - a(x) W_{\delta,q}\|_{L^{\frac{2n}{n+2}}(M)} \|\Gamma - W_{\delta,q}\|.$$

Mostraremos que $\|\Delta_g W_{\delta,q} - a(x) W_{\delta,q}\| = O(\delta)$. Primeiramente, temos

$$\begin{aligned}\|W_{\delta,q}\|_{L^{\frac{2n}{n+2}}(M)} &= \left(\int_M W_{\delta,q}^{\frac{2n}{n+2}} d\mu_g\right)^{\frac{n+2}{2n}}\\ &= \left(\int_M \left[U_\delta((\psi_q^\partial)^{-1})\chi((\psi_q^\partial)^{-1})\right]^{\frac{2n}{n+2}} d\mu_g\right)^{\frac{n+2}{2n}}.\end{aligned}$$

Como χ tem suporte compacto contido em $B(0,R)\times[0,R)$, temos

$$\begin{aligned}\|W_{\delta,q}\|_{L^{\frac{2n}{n+2}}(M)} &= \left(\int_{\psi_q^{\partial}(B(0,R)\times[0,R))} \left[U_\delta((\psi_q^{\partial})^{-1})\chi((\psi_q^{\partial})^{-1}))\right]^{\frac{2n}{n+2}} d\mu_g\right)^{\frac{n+2}{2n}} \\ &= \left(\int_{B(0,R)\times[0,R)} \sqrt{g(x,t)}\,[U_\delta(x,t)\chi(x,t)]^{\frac{2n}{n+2}}\, dxdt\right)^{\frac{n+2}{2n}},\end{aligned}$$

em que (x,t) são as coordenadas de Fermi em torno de $q\in\partial M$. Pela Desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned}\|W_{\delta,q}\|_{L^{\frac{2n}{n+2}}(M)} &\le \|\chi^{\frac{2n}{n+2}}\sqrt{g}\|^{\frac{n+2}{2n}}_{L^\infty(B(0,R)\times[0,R))}\left(\int_{B(0,R)\times[0,R)} U_\delta(x,t)^{\frac{2n}{n+2}} dxdt\right)^{\frac{n+2}{2n}} \\ &= C\left(\int_{B(0,R)\times[0,R)} U_\delta(x,t)^{\frac{2n}{n+2}} dxdt\right)^{\frac{n+2}{2n}}.\end{aligned}$$

Pelo Lema A.1, supondo $n\ge 5$, temos que

$$\|W_{\delta,q}\|_{L^{\frac{2n}{n+2}}(M)} = O(\delta^2). \tag{2.40}$$

Agora expressemos o Laplaciano da seguinte maneira:

$$\Delta_g W_{\delta,q} = \Delta[U_\delta\chi] + \sum_{i,j=1}^{n}\left(g^{ij}-\delta_{ij}\right)\frac{\partial^2[U_\delta\chi]}{\partial x_i\partial x_j} - \sum_{i,j,k=1}^{n} g^{ij}\Gamma_{ij}^k\frac{\partial[U_\delta\chi]}{\partial x_k}. \tag{2.41}$$

Em relação ao termo $\Delta W_{\delta,q}$, temos que

$$\|\Delta[U_\delta\chi]\|_{L^{\frac{2n}{n+2}}(M)} = \|\chi\Delta U_\delta + U_\delta\Delta\chi + 2\nabla U_\delta\nabla\chi\|_{L^{\frac{2n}{n+2}}(M)}.$$

Mas como U_δ é solução do Problema (2.12), então $\Delta U_\delta = 0$, o que nos dá

$$\|\Delta[U_\delta\chi]\|_{L^{\frac{2n}{n+2}}(M)} = \|U_\delta\Delta\chi + 2\nabla U_\delta\nabla\chi\|_{L^{\frac{2n}{n+2}}(M)},$$

dem que já vimos por (2.40), temos que
$\|U_\delta\Delta\chi\|_{L^{\frac{2n}{n+2}}(M)} = O(\delta^2)$. Já para $\nabla U_\delta\nabla\chi$, tem-se

$$\|\nabla U_\delta\nabla\chi\|_{L^{\frac{2n}{n+2}}(M)} = \left(\int_M |\nabla U_\delta\nabla\chi|^{\frac{2n}{n+2}} d\mu_g\right)^{\frac{n+2}{2n}}.$$

Pela Desigualdade de Cauchy-Schwartz, temos

$$\|\nabla U_\delta \nabla \chi\|_{L^{\frac{2n}{n+2}}(M)} \leq \left(\int_M |\nabla U_\delta|^{\frac{2n}{n+2}} |\nabla \chi|^{\frac{2n}{n+2}} d\mu_g \right)^{\frac{n+2}{2n}}.$$

Analogamente ao cálculo de $\|W_{\delta,q}\|_{L^{\frac{2n}{n+2}}(M)}$, temos que

$$\|\nabla U_\delta \nabla \chi\|_{L^{\frac{2n}{n+2}}(M)} \leq C \left(\int_{B(0,R)\times[0,R)} |\nabla U_\delta(x,t)|^{\frac{2n}{n+2}} dxdt \right)^{\frac{n+2}{2n}}. \tag{2.42}$$

Um cálculo direto nos dá

$$\begin{aligned} \nabla U_\delta(x,t) &= \left(\left(\frac{\partial U_\delta}{\partial t} \right)^2 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{\partial U_\delta}{\partial x_k} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\left[\frac{(2-n)\delta^{\frac{n-2}{2}}(\delta+t)}{((\delta+t)^2+|x|^2)^{\frac{n}{2}}} \right]^2 + \sum_{k=1}^{n-1} \left[\frac{(2-n)\delta^{\frac{n-2}{2}} x_k}{((\delta+t)^2+|x|^2)^{\frac{n}{2}}} \right]^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= (n-2)U_\delta(x,t). \end{aligned} \tag{2.43}$$

Usando o Lema A.2, supondo $n \geq 5$, temos que $\|\nabla U_\delta \nabla \chi\|_{L^{\frac{2n}{n+2}}(M)} = O(\delta)$. Assim, $\|\Delta[U_\delta \chi]\|_{L^{\frac{2n}{n+2}}(M)} = O(\delta^2)$. De maneira análoga, temos que

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i,j,k=1}^{n} g^{ij}\Gamma_{ij}^k \frac{\partial[U_\delta \chi]}{\partial x_k} \right\|_{L^{\frac{2n}{n+2}}(M)} &\leq C \sum_{k=1}^{n} \left\| \frac{\partial[U_\delta\chi]}{\partial x_k} \right\|_{L^{\frac{2n}{n+2}}(M)} \\ &= C \sum_{k=1}^{n} \left(\left\| \chi \frac{\partial U_\delta}{\partial x_k} \right\|_{L^{\frac{2n}{n+2}}(M)} + \left\| U_\delta \frac{\partial \chi}{\partial x_k} \right\|_{L^{\frac{2n}{n+2}}(M)} \right) \\ &= C \sum_{k=1}^{n} \left\| \chi \frac{\partial U_\delta}{\partial x_k} \right\|_{L^{\frac{2n}{n+2}}(M)} + O(\delta^2) \end{aligned} \tag{2.44}$$

por conta de (2.40) e que

$$\begin{aligned} \left\| \chi \frac{\partial U_\delta}{\partial x_k} \right\|_{L^{\frac{2n}{n+2}}(M)} &\leq C_1 \left(\int_{B(0,R)\times[0,R)} \left| \frac{\partial U_\delta}{\partial x_k}(x,t) \right|^{\frac{2n}{n+2}} dxdt \right)^{\frac{n+2}{2n}} \\ &= C_2 \left(\int_{B(0,R)\times[0,R)} \left[\frac{\delta^{\frac{n-2}{2}}|x_k|}{((\delta+t)^2+|x|^2)^{\frac{n}{2}}} \right]^{\frac{2n}{n+2}} dxdt \right)^{\frac{n+2}{2n}} \\ &\leq C_2 \left(\int_{B(0,R)\times[0,R)} \frac{\delta^{\frac{n(n-2)}{n+2}} |x|^{\frac{2n}{n+2}} dxdt}{((\delta+t)^2+|x|^2)^{\frac{n^2}{n+2}}} \right)^{\frac{n+2}{2n}}. \end{aligned}$$

Pelo Lema A.1, supondo $n \geq 4$, temos que

$$\left\| \sum_{i,j,k=1}^{n} g^{ij}\Gamma_{ij}^{k} \frac{\partial [U_\delta \chi]}{\partial x_k} \right\|_{L^{\frac{2n}{n+2}}(M)} = O(\delta). \tag{2.45}$$

Lembrando que $g^{ij} - \delta_{ij} = 2h_{ij}(0)t + O(|(x,t)|^2)$ e repetindo o mesmo procedimento anterior, obtemos que

$$\left\| \sum_{i,j=1}^{n} (g^{ij} - \delta_{ij}) \frac{\partial^2 [U_\delta \chi]}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^{\frac{2n}{n+2}}(M)} = O(\delta), \tag{2.46}$$

concluindo assim a demonstração de que

$$\|\Delta_g W_{\delta,q} - a(x) W_{\delta,q}\| = O(\delta). \tag{2.47}$$

Portanto, vale

$$I_1 = \|\Gamma - W_{\delta,q}\| O(\delta). \tag{2.48}$$

ii) Pela Desigualdade de Hölder, temos

$$I_2 \leq \|\Gamma - W_{\delta,q}\|_{L^{\frac{2(n-1)}{n-2}}(\partial M)} \left\| f_0(W_{\delta,q}) - \frac{\partial W_{\delta,q}}{\partial \nu} \right\|_{L^{\frac{2(n-1)}{n}}(\partial M)}.$$

Pelo Teorema do Traço, existe $C > 0$ tal que

$$I_2 \leq C \|\Gamma - W_{\delta,q}\| \left\| f_0(W_{\delta,q}) - \frac{\partial W_{\delta,q}}{\partial \nu} \right\|_{L^{\frac{2(n-1)}{n}}(\partial M)}.$$

Pelo Lema A.3 supondo $n \geq 3$, vemos que

$$\left\| f_0(W_{\delta,q}) - \frac{\partial W_{\delta,q}}{\partial \nu} \right\|_{L^{\frac{2(n-1)}{n}}(\partial M)} = O(\delta^2). \tag{2.49}$$

Assim,

$$I_2 = \|\Gamma - W_{\delta,q}\| \, O(\delta^2). \tag{2.50}$$

iii) Pela Desigualdade de Hölder, temos

$$I_3 \leq \|\Gamma - W_{\delta,q}\|_{L^{\frac{2(n-1)}{n-2}}(\partial M)} \|W_{\delta,q}\|_{L^{\frac{2(n-1)}{n}}(\partial M)}.$$

Pelo Teorema do Traço, temos

$$I_3 \leq C\|\Gamma - W_{\delta,q}\| \|W_{\delta,q}\|_{L^{\frac{2(n-1)}{n}}(\partial M)},$$

mas $\|W_{\delta,q}\|_{L^{\frac{2(n-1)}{n}}(\partial M)} = O(\delta)$, pois

$$\|W_{\delta,q}\|_{L^{\frac{2(n-1)}{n}}(\partial M)} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} U_\delta(z,0)^{\frac{2(n-1)}{n}} dz \right)^{\frac{n}{2(n-1)}},$$

que pelo Lema A.3 supondo $n \geq 5$,

$$\|W_{\delta,q}\|_{L^{\frac{2(n-1)}{n}}(\partial M)} = O(\delta). \tag{2.51}$$

Dessa maneira, temos

$$I_3 = \|\Gamma - W_{\delta,q}\| O(\delta). \tag{2.52}$$

Portanto, por (2.48), (2.50) e (2.52), temos que

$$\|i^*(f_0(W_{\delta,q})) - W_{\delta,q}\| = \|\Gamma - W_{\delta,q}\| = O(\delta). \tag{2.53}$$

Pondo $\delta = d\varepsilon$, ficamos com

$$\|i^*(f_0(W_{\delta,q})) - W_{\delta,q}\| = O(\varepsilon). \tag{2.54}$$

Afirmação 2.4. No caso $(P_{-\varepsilon})$, vale $\|i^*(f_\varepsilon(W_{\delta,q})) - i^*(f_0(W_{\delta,q}))\| = O(\varepsilon) + O(\varepsilon|\ln\varepsilon|)$.

De fato, temos por linearidade que

$$\begin{aligned}
\|i^*(f_\varepsilon(W_{\delta,q})) - i^*(f_0(W_{\delta,q}))\| &= \|i^*(f_\varepsilon(W_{\delta,q}) - f_0(W_{\delta,q}))\| \\
&\leq \|i^*\|_{\mathcal{L}(L^{\frac{2(n-1)}{n}}(\partial M), H^1(M))} \|f_\varepsilon(W_{\delta,q}) - f_0(W_{\delta,q})\|_{L^{\frac{2(n-1)}{n}}(\partial M)} \\
&= \|f_\varepsilon(W_{\delta,q}) - f_0(W_{\delta,q})\|_{L^{\frac{2(n-1)}{n}}(\partial M)} \\
&= (n-2) \left\| W_{\delta,q}^{\frac{n}{n-2}\pm\varepsilon} - W_{\delta,q}^{\frac{n}{n-2}} \right\|_{L^{\frac{2(n-1)}{n}}(\partial M)} \\
&\leq C \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left[(U^{\pm\varepsilon}(z,0) - 1) U^{\frac{n}{n-2}}(z,0) \right]^{\frac{2(n-1)}{n}} dz \right)^{\frac{n}{2(n-1)}}.
\end{aligned} \tag{2.55}$$

Substituindo $U^{\pm\varepsilon}(z,0) = \frac{1}{\delta^{\pm\varepsilon\frac{(n-2)}{2}}} U^{\pm\varepsilon}(z,0) + U^{\pm\varepsilon}(z,0) - \frac{1}{\delta^{\pm\varepsilon\frac{(n-2)}{2}}} U^{\pm\varepsilon}(z,0)$ em (2.55), ficamos com

$$\begin{aligned}
&\|i^*(f_\varepsilon(W_{\delta,q})) - i^*(f_0(W_{\delta,q}))\| \\
&\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\left[\left(\frac{1}{\delta^{\pm\varepsilon\frac{(n-2)}{2}}}U^{\pm\varepsilon}(z,0)-1\right)U^{\frac{n}{n-2}}(z,0)\right]^{\frac{2(n-1)}{n}}dz\right)^{\frac{n}{2(n-1)}} + O(\delta^2).
\end{aligned} \tag{2.56}$$

Consideremos agora as expansões de Taylor em relação a ε de ordem 1:

$$U^{\pm\varepsilon} = 1 \pm \varepsilon \ln U + O(\varepsilon^2 \ln^2 U), \tag{2.57}$$

$$\frac{1}{\delta^{\pm\varepsilon\frac{n-2}{2}}} = \delta^{\mp\varepsilon\frac{n-2}{2}} = 1 \mp \varepsilon\frac{n-2}{2}\ln\delta + O(\varepsilon^2\ln^2\delta). \tag{2.58}$$

Substituindo (2.57) e (2.58) em (2.56), obtemos

$$\begin{aligned}
&\|i^*(f_\varepsilon(W_{\delta,q})) - i^*(f_0(W_{\delta,q}))\| \\
&\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\left|\left(\mp\frac{n-2}{2}\varepsilon\ln\delta \pm \varepsilon\ln U(z,0) + O(\varepsilon^2) + O(\varepsilon^2\ln\delta)\right)U^{\frac{n}{n-2}}(z,0)\right|^{\frac{2(n-1)}{n}}dz\right)^{\frac{n}{2(n-1)}} \\
&\quad + O(\delta^2) \\
&= \frac{n-2}{2}\varepsilon|\ln\delta|\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}}U_\delta^{\frac{2(n-1)}{n-2}}(z,0)dz\right)^{\frac{n}{2(n-1)}} + \varepsilon\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}}U_\delta^{\frac{2(n-1)}{n-2}}(z,0)\ln U_\delta(z,0)dz\right)^{\frac{n}{2(n-1)}} \\
&\quad + O(\varepsilon^2) + O(\varepsilon^2|\ln\delta|) + O(\delta^2).
\end{aligned}$$

Já vimos que

$$\frac{n-2}{2}\varepsilon|\ln\delta|\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}}U_\delta^{\frac{2(n-1)}{n-2}}(z,0)dz\right)^{\frac{n}{2(n-1)}} = O(\varepsilon|\ln\delta|). \tag{2.59}$$

Para o segundo termo, note que

$$\begin{aligned}
\ln U_\delta(z,0) &= \ln\left(\frac{\delta}{\delta^2+|z|^2}\right)^{\frac{n-2}{2}} \\
&= \frac{n-2}{2}\ln\left(\frac{\delta}{\delta^2+|z|^2}\right) < \frac{n-2}{2}\ln\left(\frac{\delta}{\delta^2}\right) = \frac{n-2}{2}\ln(\delta^{-1}) = \frac{2-n}{2}\ln\delta.
\end{aligned} \tag{2.60}$$

Tomando o módulo em (2.60) e considerando $\delta < 1$, ficamos com

$$|\ln U_\delta(z,0)| < \frac{n-2}{2}|\ln\delta|. \tag{2.61}$$

Por (2.59) e (2.61), temos que

$$\frac{n-2}{2}\varepsilon|\ln\delta|\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} U_\delta^{\frac{2(n-1)}{n-2}}(z,0)dz\right)^{\frac{n}{2(n-1)}} + \varepsilon\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} U_\delta^{\frac{2(n-1)}{n-2}}(z,0)\ln U_\delta(z,0)dz\right)^{\frac{n}{2(n-1)}} = O(\varepsilon|\ln\delta|)$$

e, consequentemente, que

$$\|i^*(f_\varepsilon(W_{\delta,q})) - i^*(f_0(W_{\delta,q}))\| = O(\varepsilon) + O(\varepsilon|\ln\delta|) + O(\delta^2). \tag{2.62}$$

Pondo $\delta = d\varepsilon$, ficamos com

$$\|i^*(f_\varepsilon(W_{\delta,q})) - i^*(f_0(W_{\delta,q}))\| \le C\|f_\varepsilon(W_{\delta,q}) - f_0(W_{\delta,q})\|_{L^{\frac{2(n-1)}{n}}(\partial M)} = O(\varepsilon|\ln\varepsilon|). \tag{2.63}$$

Afirmação 2.5. No caso $(P_{+\varepsilon})$, temos $\|i^*(f_\varepsilon(W_{\delta,q})) - i^*(f_0(W_{\delta,q}))\| = O(\varepsilon|\ln\varepsilon|)$.

De fato, temos

$$\begin{aligned}\|R_{\varepsilon,\delta,q}\|_{L^{s_\varepsilon}(\partial M)} &\le \|\Pi^\perp_{\delta,q}\|_{\mathcal{L}(H^1(M),H^1(M))}\|i^*(f_\varepsilon(W_{\delta,q}(x))) - W_{\delta,q}(x)\|_{L^{s_\varepsilon}(\partial M)}\\ &= \|i^*(f_\varepsilon(W_{\delta,q}(x))) - W_{\delta,q}(x)\|_{L^{s_\varepsilon}(\partial M)}.\end{aligned}$$

Pela desigualdade triangular, temos

$$\begin{aligned}\|R_{\varepsilon,\delta,q}\|_{L^{s_\varepsilon}(\partial M)} \le\ & \|i^*(f_\varepsilon(W_{\delta,q}(x))) - i^*(f_0(W_{\delta,q}(x)))\|_{L^{s_\varepsilon}(\partial M)}\\ &+ \|i^*(f_0(W_{\delta,q}(x))) - W_{\delta,q}(x)\|_{L^{s_\varepsilon}(\partial M)}.\end{aligned} \tag{2.64}$$

Denotamos $\Gamma = i^*(f_0(W_{\delta,q}))$.

Observação 2.11. $\Gamma - W_{\delta,q}$ é solução de

$$\begin{cases} -\Delta_g(\Gamma - W_{\delta,q}) + a(x)(\Gamma - W_{\delta,q}) = \Delta_g W_{\delta,q} - a(x)W_{\delta,q} \text{ em } M,\\ \frac{\partial(\Gamma - W_{\delta,q})}{\partial\nu} + \frac{n-2}{2}b(x)(\Gamma - W_{\delta,q}) = f_0(\Gamma) - \frac{\partial W_{\delta,q}}{\partial\nu} - \frac{n-2}{2}b(x)W_{\delta,q} \text{ sobre } \partial M,\end{cases} \tag{2.65}$$

uma vez que

$$-\Delta_g(\Gamma - W_{\delta,q}) + a(x)(\Gamma - W_{\delta,q}) = -\Delta_g\Gamma + \Delta_g W_{\delta,q} + a(x)\Gamma - a(x)W_{\delta,q}.$$

Mas como Γ é solução de (P_0), então $-\Delta_g\Gamma + a(x)\Gamma = 0$, o que nos dá a primeira equação

$$-\Delta_g(\Gamma - W_{\delta,q}) + a(x)(\Gamma - W_{\delta,q}) = \Delta_g W_{\delta,q} - a(x)W_{\delta,q} \text{ em } M$$

e também

$$\frac{\partial(\Gamma - W_{\delta,q})}{\partial\nu} + \frac{n-2}{2}b(x)\left(\Gamma - W_{\delta,q}\right) = \frac{\partial\Gamma}{\partial\nu} - \frac{\partial W_{\delta,q}}{\partial\nu} + \frac{n-2}{2}b(x)\Gamma - \frac{n-2}{2}b(x)W_{\delta,q}.$$

Novamente, como Γ é solução de (P_0), então $\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu} + \frac{n-2}{2}b(x)\Gamma = f_0(\Gamma)$, o que nos dá a segunda equação

$$\frac{\partial\left(\Gamma - W_{\delta,q}\right)}{\partial\nu} + \frac{n-2}{2}b(x)\left(\Gamma - W_{\delta,q}\right) = f_0(\Gamma) - \frac{\partial W_{\delta,q}}{\partial\nu} - \frac{n-2}{2}b(x)W_{\delta,q} \text{ em } \partial M.$$

Agora utilizaremos o Teorema 2.5, tomando q de tal maneira que $\frac{(n-1)q}{n-2q} = \frac{2(n-1)}{n-2} + n\varepsilon = s_\varepsilon$, isto é,

$$q = \frac{2n + n^2\left(\frac{n-2}{n-1}\right)\varepsilon}{n + 2 + 2n\left(\frac{n-2}{n-1}\right)\varepsilon}$$

e $u = \Gamma - W_{\delta,q}$, $f_0 = \Delta_g W_{\delta,q} - a(x)W_{\delta,q}$ e $g = f_0(\Gamma) - \frac{\partial}{\partial\nu}W_{\delta,q} - \frac{n-2}{2}b(x)W_{\delta,q}$. O teorema nos garante a existência de $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\|\Gamma - W_{\delta,q}\|_{L^{s_\varepsilon}(\partial M)} \leq C\|\Delta_g W_{\delta,q} - a(x)W_{\delta,q}\|_{L^{q+\varepsilon}(\partial M)} \\ + \left\|f_0(\Gamma) - \frac{\partial}{\partial\nu}W_{\delta,q} - \frac{n-2}{2}b(x)W_{\delta,q}\right\|_{L^{\frac{(n-1)q}{n-q}}(\partial M)}.\end{aligned}$$

Observação 2.12. Note que

$$q = \frac{2n + n^2\left(\frac{n-2}{n-1}\right)\varepsilon}{n + 2 + 2n\left(\frac{n-2}{n-1}\right)\varepsilon} = \frac{2n}{n+2} + \frac{n^2\left(\frac{n-2}{n-1}\right)\varepsilon}{(n+2)(n+2+2n\left(\frac{n-2}{n-1}\right)\varepsilon} = \frac{2n}{n+2} + O^+(\varepsilon), \tag{2.66}$$

em que $0 < O^+(\varepsilon) < \frac{n^2(n-2)\varepsilon}{(n-1)(n+2)^2} = C\varepsilon$.

Através de cálculos análogos aos que fizemos no início do lema e usando o Fato (2.66), obtemos

$$\|a(x)W_{\delta,q}\|_{L^{q+\varepsilon}(M)} \leq C\delta^{2-O^+(\varepsilon)};$$

$$\|b(x)W_{\delta,q}\|_{L^{\frac{(n-1)q}{n-q}+\varepsilon}(\partial M)} \leq C\delta^{1-O^+(\varepsilon)}.$$

Também obtemos por (2.41), (2.44), (2.46) e (2.49) que

$$\|\Delta_g W_{\delta,q}\|_{L^{q+\varepsilon}(M)} \leq C\delta^{2-O^+(\varepsilon)},$$

$$\left\|f_0(W_{\delta,q}) - \frac{\partial W_{\delta,q}}{\partial\nu}\right\|_{L^{\frac{(n-1)q}{n-q}}(\partial M)} \leq C\delta^{1-O^+(\varepsilon)}.$$

Como $i^*(f_\varepsilon(W_{\delta,q}))$ é a solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta_g \Gamma + a(x)\Gamma = 0 \text{ em } M, \\ \frac{\partial}{\partial \nu}\Gamma + \frac{n-2}{2} b(x)\Gamma = f_\varepsilon\left(W_{\delta,q}\right) \text{ sobre } \partial M, \end{cases} \tag{2.67}$$

aplicamos novamente o Teorema 2.5 e obtemos, pelas Expansões (2.57) e (2.58), que

$$\begin{aligned} &\|i^*(f_\varepsilon(W_{\delta,q})) - i^*(f_0(W_{\delta,q}))\|_{L^{s_\varepsilon}(\partial M)} = \|i^*(f_\varepsilon(W_{\delta,q})) - i^*(f_0(W_{\delta,q}))\|_{L^{\frac{2(n-1)}{n}+O^+(\varepsilon)}} \\ &\leq \|f_\varepsilon(W_{\delta,q}) - f_0(W_{\delta,q})\|_{L^{\frac{2(n-1)}{n}+O^+(\varepsilon)}} \\ &\leq C\delta^{-O^+(\varepsilon)} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left[\left(\frac{1}{\delta^{\varepsilon\frac{n-2}{2}}} U_\delta^\varepsilon(z,0) - 1 \right) U_\delta^\varepsilon(z,0) dz \right]^{\frac{2(n-1)}{n}+O^+(\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{\frac{2(n-1)}{n}+O^+(\varepsilon)}} \\ &\quad + O(\delta^2). \end{aligned} \tag{2.68}$$

Usando a Estimativa (2.63) obtemos

$$\begin{aligned} \|i^*(f_\varepsilon(W_{\delta,q})) - i^*(f_0(W_{\delta,q}))\|_{L^{s_\varepsilon}(\partial M)} &= \delta^{-O^+(\varepsilon)}(O(\varepsilon|\ln\delta|) + O(\varepsilon)) + O(\delta^2) \\ &= O(\varepsilon|\ln\delta|) + O(\varepsilon) + O(\delta^2). \end{aligned}$$

Pondo $\delta = d\varepsilon$, obtemos

$$\|i^*(f_\varepsilon(W_{\delta,q})) - i^*(f_0(W_{\delta,q}))\|_{L^{s_\varepsilon}(\partial M)} \leq \|f_\varepsilon(W_{\delta,q}) - f_0(W_{\delta,q})\|_{L^{s_\varepsilon}(\partial M)} = O(\varepsilon|\ln\varepsilon|). \tag{2.69}$$

Para finalizar a demonstração do lema, estimamos

$$\begin{aligned} \|R_{\varepsilon,\delta,q}\|_{\mathcal{H}} &= \|R_{\varepsilon,\delta,q}\| + \|R_{\varepsilon,\delta,q}\|_{L^{s_\varepsilon}(\partial M)} \\ &= \|\Pi_{\delta,q}^{\perp}\{i^*(f_\varepsilon(W_{\delta,q})) - W_{\delta,q}\}\| + \|R_{\varepsilon,\delta,q}\|_{L^{s_\varepsilon}(\partial M)} \\ &\leq \|i^*(f_\varepsilon(W_{\delta,q})) - W_{\delta,q}\| + \|R_{\varepsilon,\delta,q}\|_{L^{s_\varepsilon}(\partial M)}. \end{aligned}$$

Pela Desigualdade Triangular, obtemos

$$\begin{aligned} \|R_{\varepsilon,\delta,q}\|_{\mathcal{H}} \leq &\|i^*(f_0(W_{\delta,q})) - W_{\delta,q}\| \\ &+ \|i^*(f_\varepsilon(W_{\delta,q})) - i^*(f_0(W_{\delta,q}))\| + \|R_{\varepsilon,\delta,q}\|_{L^{s_\varepsilon}(\partial M)}. \end{aligned}$$

Usando as estimativas enunciadas nas Afirmações 2.3, 2.4 e 2.5, ficamos com

$$\|R_{\varepsilon,\delta,q}\|_{\mathcal{H}} = O(\varepsilon|\ln\varepsilon|).$$

Assim, existe $C_1 > 0$ tal que

$$\|R_{\varepsilon,\delta,q}\|_{\mathcal{H}} \leq C_1 \varepsilon |\ln \varepsilon|,$$

concluindo a demonstração. $\square$

Proposição 2.9. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, com $0 < a < b$, existe uma constante positiva $C = C(a,b)$ tal que, para ε suficientemente pequeno e para quaisquer $q \in \partial M$ e $d \in [a,b]$, existe uma única $\phi_{\delta,q}$ solução de (2.15) que satisfaz $\|\phi_{\delta,q}\|_{\mathcal{H}} \leq C\varepsilon|\ln \varepsilon|$. Além disso, a aplicação $q \mapsto \phi_{\delta,q} \in C^1(\partial M, \mathcal{H})$.

Demonstração. Primeiramente, temos que

$$\begin{aligned} N(\phi_1) - N(\phi_2) = \Pi^{\perp}_{\delta,q}\{&i^*(f_\varepsilon(W_{\delta,q} + \phi_1)) - i^*(f_\varepsilon(W_{\delta,q})) - i^*(f'_\varepsilon(W_{\delta,q}) \cdot \phi_1)\} \\ &- \Pi^{\perp}_{\delta,q}\{i^*(f_\varepsilon(W_{\delta,q} + \phi_2)) - i^*(f_\varepsilon(W_{\delta,q})) - i^*(f'_\varepsilon(W_{\delta,q}) \cdot \phi_2)\}. \end{aligned}$$

Como $\Pi^{\perp}_{\delta,q}$ e i^* são operadores lineares, temos

$$N(\phi_1) - N(\phi_2) = \Pi^{\perp}_{\delta,q}\{i^*(f_\varepsilon(W_{\delta,q} + \phi_1(x)) - f_\varepsilon(W_{\delta,q}) - f'_\varepsilon(W_{\delta,q}) \cdot \phi_1) - (f_\varepsilon(W_{\delta,q} + \phi_2) - f_\varepsilon(W_{\delta,q}) - f'_\varepsilon(W_{\delta,q}) \cdot \phi_2)\}.$$

Isto é,

$$N(\phi_1) - N(\phi_2) = \Pi^{\perp}_{\delta,q}\{i^*(f_\varepsilon(W_{\delta,q} + \phi_1) - f_\varepsilon(W_{\delta,q} + \phi_2) - f'_\varepsilon(W_{\delta,q}) \cdot [\phi_1 - \phi_2])\}. \tag{2.70}$$

Tomando a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ em (2.70), temos

$$\begin{aligned} &\|N(\phi_1) - N(\phi_2)\|_{\mathcal{H}} = \|\Pi^{\perp}_{\delta,q}\{i^*(f_\varepsilon(W_{\delta,q} + \phi_1) - f_\varepsilon(W_{\delta,q} + \phi_2) - f'_\varepsilon(W_{\delta,q}) \cdot [\phi_1 - \phi_2])\}\|_{\mathcal{H}} \\ &\leq \|\Pi^{\perp}_{\delta,q}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{H})} \|i^*(f_\varepsilon(W_{\delta,q} + \phi_1) - f_\varepsilon(W_{\delta,q} + \phi_2) - f'_\varepsilon(W_{\delta,q}) \cdot [\phi_1 - \phi_2])\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Já que $\Pi^{\perp}_{\delta,q}$ é projeção, então $\|\Pi^{\perp}_{\delta,q}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{H})} = 1$. Assim,

$$\|N(\phi_1) - N(\phi_2)\|_{\mathcal{H}} \leq \|i^*(f_\varepsilon(W_{\delta,q} + \phi_1) - f_\varepsilon(W_{\delta,q} + \phi_2) - f'_\varepsilon(W_{\delta,q}[\phi_1 - \phi_2]))\|_{\mathcal{H}}.$$

em que s'_ε é o expoente conjugado de s_ε, dado por

$$s'_\varepsilon = \begin{cases} \frac{2(n-1)}{n} & \text{no caso } (P_{-\varepsilon}), \\ \frac{2(n-1)+\varepsilon n(n-2)}{n+\varepsilon n(n-2)} & \text{no caso } (P_{+\varepsilon}) \ . \end{cases}$$

Pela continuidade do operador i^*, temos

$$\|N(\phi_1) - N(\phi_2)\|_{\mathcal{H}} \leq C\|f_\varepsilon(W_{\delta,q} + \phi_1(x)) - f_\varepsilon(W_{\delta,q}(x) + \phi_2(x)) - f'_\varepsilon(W_{\delta,q}) \cdot [\phi_1 - \phi_2]\|_{L^{s'_\varepsilon}(\partial M)},$$

em que $C = \|i^*\|_{\mathcal{L}(L^{s'_\varepsilon}(\partial M),\mathcal{H})} = \|i\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H},L^{s_\varepsilon}(\partial M))} = 1$. Então, ficamos com

$$\|N(\phi_1) - N(\phi_2)\|_{\mathcal{H}} \leq \|f_\varepsilon(W_{\delta,q} + \phi_1) - f_\varepsilon(W_{\delta,q} + \phi_2) - f'_\varepsilon(W_{\delta,q}) \cdot [\phi_1 - \phi_2]\|_{L^{s'_\varepsilon}(\partial M)}.$$

Pelo Teorema do Valor Médio, existe $\theta \in (0,1)$ tal que

$$f_\varepsilon(W_{\delta,q} + \phi_1) - f_\varepsilon(W_{\delta,q} + \phi_2) = f'_\varepsilon(W_{\delta,q} + \theta\phi_1 + (1-\theta)\phi_2) \cdot [\phi_1 - \phi_2].$$

Assim, ficamos com

$$\|N(\phi_1) - N(\phi_2)\|_{\mathcal{H}} \leq \|(f'_\varepsilon(W_{\delta,q} + \theta\phi_1 + (1-\theta)\phi_2) + f'_\varepsilon(W_{\delta,q})) \cdot [\phi_1 - \phi_2]\|_{L^{s'_\varepsilon}(\partial M)}.$$

Usando a Desigualdade Hölder com expoentes $p = \left(\frac{s_\varepsilon}{s'_\varepsilon}\right)'$ e $q = \frac{s_\varepsilon}{s'_\varepsilon}$, ficamos com

$$\begin{aligned}\|N(\phi_1) - N(\phi_2)\|_{\mathcal{H}} \leq \|f'_\varepsilon(W_{\delta,q} + \theta\phi_1 + (1-\theta)\phi_2) - f'_\varepsilon(W_{\delta,q})\|_{L^{s'_\varepsilon\left(\frac{s_\varepsilon}{s'_\varepsilon}\right)'}(\partial M)} \\ \times \|\phi_1 - \phi_2\|_{L^{s_\varepsilon}(\partial M)}.\end{aligned}$$

Denotamos $\gamma = \gamma(\phi_1,\phi_2) = \|f'_\varepsilon(W_{\delta,q} + \theta\phi_1 + (1-\theta)\phi_2) - f'_\varepsilon(W_{\delta,q})\|_{L^{s'_\varepsilon\left(\frac{s_\varepsilon}{s'_\varepsilon}\right)'}(\partial M)}$.

Afirmação 2.6. Vale $\gamma(\phi_1,\phi_2) \to 0$ quando $\|\phi_1\|_{\mathcal{H}} \to 0$ e $\|\phi_2\|_{\mathcal{H}} \to 0$.

De fato,

$$\begin{aligned}\gamma &= \left(\frac{2}{n-2} \pm \varepsilon\right)\left(\int_{\partial M}\left||W_{\delta,q} + \theta\phi_1 + (1-\theta)\phi_2|^{\frac{2}{n-2}\pm\varepsilon} - |W_{\delta,q}|^{\frac{2}{n-2}\pm\varepsilon}\right|^{s'_\varepsilon\left(\frac{s_\varepsilon}{s'_\varepsilon}\right)'} d\sigma\right)^{\frac{1}{s'_\varepsilon\left(\frac{s_\varepsilon}{s'_\varepsilon}\right)'}} \\ &\leq C_1\left(\int_{\partial M}\left||W_{\delta,q} + \theta\phi_1 + (1-\theta)\phi_2|^{\left(\frac{2}{n-2}\pm\varepsilon\right)s'_\varepsilon\left(\frac{s_\varepsilon}{s'_\varepsilon}\right)'} - |W_{\delta,q}|^{\left(\frac{2}{n-2}\pm\varepsilon\right)s'_\varepsilon\left(\frac{s_\varepsilon}{s'_\varepsilon}\right)'}\right| d\sigma\right)^{\frac{1}{s'_\varepsilon\left(\frac{s_\varepsilon}{s'_\varepsilon}\right)'}}.\end{aligned}$$

Pelo Teorema do Valor Médio, existe $\lambda \in (0,1)$ tal que

$$\begin{aligned}&|W_{\delta,q} + \theta\phi_1 + (1-\theta)\phi_2|^{\left(\frac{2}{n-2}\pm\varepsilon\right)s'_\varepsilon\left(\frac{s_\varepsilon}{s'_\varepsilon}\right)'} - |W_{\delta,q}|^{\left(\frac{2}{n-2}\pm\varepsilon\right)s'_\varepsilon\left(\frac{s_\varepsilon}{s'_\varepsilon}\right)'} \\ &= \left(\frac{n}{n-2} \pm \varepsilon\right) s'_\varepsilon \left(\frac{s_\varepsilon}{s'_\varepsilon}\right)' |W_{\delta,q}|^{\left[\left(\frac{n}{n-2}\pm\varepsilon\right)s'_\varepsilon\left(\frac{s_\varepsilon}{s'_\varepsilon}\right)'-1\right]}[\lambda(\theta\phi_1 + (1-\theta)\phi_2)].\end{aligned}$$

Assim, ficamos com

$$\gamma \leq C_2\left(\int_{\partial M}|W_{\delta,q}|^{\left[\left(\frac{n}{n-2}\pm\varepsilon\right)s'_\varepsilon\left(\frac{s_\varepsilon}{s'_\varepsilon}\right)'-1\right]}|\lambda(\theta\phi_1 + (1-\theta)\phi_2)|d\sigma\right)^{\frac{1}{s'_\varepsilon\left(\frac{s_\varepsilon}{s'_\varepsilon}\right)'}}.$$

Novamente usamos a Desigualdade de Hölder com $p = s'_\varepsilon$ e $q = s_\varepsilon$ e obtemos

$$\gamma \leq C_2 \left(\int_{\partial M} |W_{\delta,q}|^{\left(\left[\left(\frac{n}{n-2}\pm\varepsilon\right)s'_\varepsilon\left(\frac{s_\varepsilon}{s'_\varepsilon}\right)'-1\right]s'_\varepsilon\right)} d\sigma \right)^{\frac{1}{(s'_\varepsilon)^2\left(\frac{s_\varepsilon}{s'_\varepsilon}\right)'}} \left(\int_{\partial M} |\theta\phi_1 + (1-\theta)\phi_2|^{s_\varepsilon} d\sigma \right)^{\frac{1}{s_\varepsilon s'_\varepsilon\left(\frac{s_\varepsilon}{s'_\varepsilon}\right)'}}.$$

Levando em consideração que $\left[\left(\frac{n}{n-2} \pm \varepsilon\right) s'_\varepsilon \left(\frac{s_\varepsilon}{s'_\varepsilon}\right)' - 1\right] s'_\varepsilon < \left(\frac{n}{n-2} \pm \varepsilon\right) s'_\varepsilon$ e que $|f'_\varepsilon(\cdot)| \in L^{s'_\varepsilon}(\partial M)$, temos que

$$\left(\int_{\partial M} |W_{\delta,q}|^{\left(\left[\left(\frac{n}{n-2}\pm\varepsilon\right)s'_\varepsilon\left(\frac{s_\varepsilon}{s'_\varepsilon}\right)'-1\right]s'_\varepsilon\right)} d\sigma \right)^{\frac{1}{(s'_\varepsilon)^2\left(\frac{s_\varepsilon}{s'_\varepsilon}\right)'}} < \infty.$$

e, assim,

$$\begin{aligned}
\gamma &\leq C_3 \left(\int_{\partial M} |\theta\phi_1 + (1-\theta)\phi_2|^{s_\varepsilon} d\sigma \right)^{\frac{1}{s_\varepsilon s'_\varepsilon\left(\frac{s_\varepsilon}{s'_\varepsilon}\right)'}} \\
&\leq C_4 \left(\int_{\partial M} \left(|\phi_1|^{s_\varepsilon} + |\phi_2|^{s_\varepsilon}\right) d\sigma \right)^{\frac{1}{s_\varepsilon s'_\varepsilon\left(\frac{s_\varepsilon}{s'_\varepsilon}\right)'}} \\
&= C_4 \left(\|\phi_1\|_{L^{s_\varepsilon}(\partial M)}^{s'_\varepsilon\left(\frac{s_\varepsilon}{s'_\varepsilon}\right)'} + \|\phi_2\|_{L^{s_\varepsilon}(\partial M)}^{s'_\varepsilon\left(\frac{s_\varepsilon}{s'_\varepsilon}\right)'} \right) \\
&\leq C_4 \left(\|\phi_1\|_{\mathcal{H}}^{s'_\varepsilon\left(\frac{s_\varepsilon}{s'_\varepsilon}\right)'} + \|\phi_2\|_{\mathcal{H}}^{s'_\varepsilon\left(\frac{s_\varepsilon}{s'_\varepsilon}\right)'} \right) \to 0
\end{aligned}$$

quando $\|\phi_1\|_{\mathcal{H}} \to 0$ e $\|\phi_2\|_{\mathcal{H}} \to 0$. Assim, temos que

$$\|N(\phi_1) - N(\phi_2)\|_{\mathcal{H}} \leq \gamma \|\phi_1 - \phi_2\|_{L^{s_\varepsilon}(\partial M)} \leq \gamma \|\phi_1 - \phi_2\|_{\mathcal{H}}. \tag{2.71}$$

Fazendo $\|\phi_1\|_{\mathcal{H}}$ e $\|\phi_2\|_{\mathcal{H}}$ suficientemente pequenos, podemos considerar $\gamma < 1$. Tomando $\phi_2 = 0$ em (2.71), vemos que

$$\|N(\phi)\|_{\mathcal{H}} \leq \gamma \|\phi\|_{\mathcal{H}}. \tag{2.72}$$

para algum $\gamma < 1$ desde que $\|\phi\|_{\mathcal{H}}$ seja suficientemente pequeno. Relembremos que pelo Lema 2.7, existe $C_0 > 0$ tal que

$$\|L_{\delta,q}(\phi)\|_{\mathcal{H}} \geq C_0 \|\phi\|_{\mathcal{H}}. \tag{2.73}$$

Daí, temos que $L_{\delta,q}$ é injetivo. Além disso, restringindo $L_{\delta,q}$ na sua imagem a uma bola pequena, temos também a sobrejetividade de $L_{\delta,q}$. Dessa maneira, $L_{\delta,q}$ é bijetivo e admite uma inversa $L_{\delta,q}^{-1}$, que, pela Equação (2.73), satisfaz

$$\|L_{\delta,q}^{-1}(\phi)\|_{\mathcal{H}} \leq C_0^{-1} \|\phi\|_{\mathcal{H}}. \tag{2.74}$$

Além disso, pelo Lema 2.8, existe $C_1 > 0$ tal que

$$\|R_{\varepsilon,\delta,q}\|_{\mathcal{H}} \leq C_1\varepsilon|\ln\varepsilon|. \tag{2.75}$$

Pelas Desigualdades (2.74) e (2.75), temos

$$\begin{aligned}\|L_{\delta,q}^{-1}(N(\phi)+R_{\varepsilon,\delta,q})\|_{\mathcal{H}} &\leq C_0^{-1}\|N(\phi)+R_{\varepsilon,\delta,q}\|_{\mathcal{H}}\\ &\leq C_0^{-1}\left(\|N(\phi)\|_{\mathcal{H}}+\|R_{\varepsilon,\delta,q}\|_{\mathcal{H}}\right).\end{aligned}$$

Por (2.72) e (2.75), temos

$$\|L_{\delta,q}^{-1}(N(\phi)+R_{\varepsilon,\delta,q})\|_{\mathcal{H}} \leq C_0^{-1}\left(\gamma\|\phi\|_{\mathcal{H}}+C_1\varepsilon|\ln\varepsilon|\right).$$

Tomando $C = \max\left\{C_0^{-1}, C_0^{-1}C_1\right\} > 0$, ficamos com

$$\left\|L_{\delta,q}^{-1}\left(N(\phi)+R_{\varepsilon,\delta,q}\right)\right\|_{\mathcal{H}} \leq C\left(\gamma\|\phi\|_{\mathcal{H}}+\varepsilon|\ln\varepsilon|\right). \tag{2.76}$$

Fixado este $C > 0$, podemos considerar γ satisfazendo $0 < C\gamma < \frac{1}{2}$ desde que $\|\phi\|_{\mathcal{H}}$ seja suficientemente pequeno. Se tomarmos $\|\phi\|_{\mathcal{H}} \leq 2C\varepsilon|\ln\varepsilon|$, teremos, por (2.76), que

$$\begin{aligned}\left\|L_{\delta,q}^{-1}\left(N(\phi)+R_{\varepsilon,\delta,q}\right)\right\|_{\mathcal{H}} &< \frac{1}{2}\|\phi\|_{\mathcal{H}}+C\varepsilon|\ln\varepsilon|\\ &\leq C\varepsilon|\ln\varepsilon|+C\varepsilon|\ln\varepsilon|\\ &= 2C\varepsilon|\ln\varepsilon|.\end{aligned}$$

Desse modo, a função $T(\phi) = L_{\delta,q}^{-1}(N(\phi)+R_{\varepsilon,\delta,q})$ é uma contração da bola $\{\phi \in \mathcal{H}; \|\phi\|_{\mathcal{H}} \leq 2C\varepsilon|\ln\varepsilon|\}$ nela própria. Portanto, pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, existe um único $\phi_{\delta,q}$ com $\|\phi_{\delta,q}\|_{\mathcal{H}} \leq 2C\varepsilon|\ln\varepsilon|$ que satisfaz

$$\phi_{\delta,q} = T(\phi_{\delta,q}) = L_{\delta,q}^{-1}(N(\phi_{\delta,q})+R_{\varepsilon,\delta,q}).$$

Aplicando $L_{\delta,q}$, temos

$$L_{\delta,q}(\phi_{\delta,q}) = N(\phi_{\delta,q})+R_{\varepsilon,\delta,q}.$$

Ou seja, $\phi_{\delta,q}$ é solução de (2.16). A regularidade de $\phi_{\delta,q}$ vem do Teorema da Função Implícita. □

2.3 A formulação do problema via energia reduzida

Seguindo os passos da Observação 2.2, temos que uma solução fraca $u \in \mathcal{H}$ do Problema $(P_{\pm\varepsilon})$ que satisfaz

$$\int_M (\nabla_g u \nabla_g v + a(x)uv)d\mu_g + \frac{n-2}{2}\int_{\partial M} b(x)uvd\sigma - (n-2)\int_{\partial M} u^{\frac{n}{n-2}\pm\varepsilon}d\sigma = 0 \quad (2.77)$$

para qualquer $v \in \mathcal{H}$. Veremos a seguir que o problema $(P_{\pm\varepsilon})$ admite uma formulação variacional.

Observação 2.13. Soluções fracas de $(P_{\pm\varepsilon})$ são pontos críticos do funcional $J_\varepsilon : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ dado por

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(u) = \frac{1}{2}\int_M (|\nabla_g u|^2 + a(x)u^2)d\mu_g &+ \frac{n-2}{4}\int_{\partial M} b(x)u^2 d\sigma \\ &- \frac{(n-2)^2}{2n-2\pm\varepsilon(n-2)}\int_{\partial M} u^{\frac{2n-2}{n-2}\pm\varepsilon}d\sigma. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Como na verdade estamos procurando soluções de $(P_{\pm\varepsilon})$ da forma $u_{\delta,q} = W_{\delta,q} + \phi_{\delta,q}$, em que $\phi_{\delta,q} \in K_{\delta,q}^{\perp} \cap \mathcal{H}$, então nos atemos a procurar pontos críticos da função $I_\varepsilon : (0,+\infty) \times \partial M \to \mathbb{R}$, chamada *Energia Reduzida*, definida por

$$I_\varepsilon(d,q) := J_\varepsilon\left(W_{\varepsilon d,q} + \phi_{\varepsilon d,q}\right), \quad (2.79)$$

em que $\phi_{\varepsilon d,q}$ foi encontrada na Proposição (2.9).

Capítulo 3

Provas dos principais resultados

Nesse capítulo, provaremos o teorema principal enunciado no Capítulo 2. Antes disso, enunciaremos e provaremos uma proposição importante.

Proposição 3.1. (i) Se $(d_0, q_0) \in (0, +\infty) \times \partial M$ é um ponto crítico da energia reduzida I_ε definida anteriormente, então $W_{\varepsilon d_0, q_0} + \phi_{\varepsilon d_0, q_0} \in \mathcal{H}$ é solução de $(P_{\pm\varepsilon})$.

(ii) Vale que $I_\varepsilon(d, q) = c_n(\varepsilon) + \varepsilon\,[\alpha_n d\varphi(q) - \beta_n \ln d] + o(\varepsilon)$ no caso $(P_{-\varepsilon})$ e $I_\varepsilon(d, q) = c_n(\varepsilon) + \varepsilon\,[\alpha_n d\varphi(q) + \beta_n \ln d] + o(\varepsilon)$ no caso $(P_{+\varepsilon})$ uniformemente em C^0 com respeito a d nos subconjuntos compactos de $(0, +\infty)$ e $q \in \partial M$. Aqui $c_n(\varepsilon)$ é uma constante que só depende de ε, e n, α_n e β_n são constantes positivas que só dependem de n, e $\varphi(q) = h(q) - H(q)$.

Para simplificar a notação, denotemos $q = q(y) = \psi^{\partial}_{q_0}(y)$ a parametrização de Fermi e considere a composição desta com a energia reduzida. Como trataremos dos pontos críticos da energia reduzida, o faremos em coordenadas, isto é, lidamos com pontos críticos da energia reduzida em coordenadas denotado por $I_\varepsilon(d, q(y))$.

3.1 Prova da Proposição 3.1 - (i)

Seja (d_0, q_0) um ponto crítico de I_ε, em que $q_0 = q(0)$. Então, para cada $i = 1, \ldots, n$ temos

$$\frac{\partial I_\varepsilon}{\partial y_i}(d_0, 0) = 0.$$

Levando em consideração que $I_\varepsilon(d, y) = J_\varepsilon \circ (W_{\varepsilon d, q(y)} + \phi_{\varepsilon d, q(y)})$ então pela regra da cadeia, temos que

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial I_\varepsilon}{\partial y_h}(d_0, 0) &= J'_\varepsilon(W_{\varepsilon d_0, q_0}) \cdot \frac{\partial (W_{\varepsilon d, q(y)} + \phi_{\varepsilon d, q(y)})}{\partial y_h}(d_0, 0) \\ &= J'_\varepsilon(W_{\varepsilon d_0, q_0}) \cdot \left(\frac{\partial W_{\varepsilon d, q(y)}}{\partial y_h}(d_0, 0) + \frac{\partial \phi_{\varepsilon d, q(y)}}{\partial y_h}(d_0, 0) \right). \end{aligned}$$

Usando a Expressão (2.77), obtemos

$$
\begin{aligned}
0 &= J'_\varepsilon(W_{\varepsilon d_0,q_0}) \cdot \left(\frac{\partial W_{\varepsilon d,q(y)}}{\partial y_h}(d_0,0) + \frac{\partial \phi_{\varepsilon d,q(y)}}{\partial y_h}(d_0,0) \right) \\
&= \left\langle W_{\varepsilon d_0,q_0} + \phi_{\varepsilon d_0,q_0} - i^*(f_\varepsilon(W_{\varepsilon d_0,q_0} + \phi_{\varepsilon d_0,q_0})), \frac{\partial W_{\varepsilon d,q(y)}}{\partial y_h}(d_0,0) + \frac{\partial \phi_{\varepsilon d,q(y)}}{\partial y_h}(d_0,0) \right\rangle .
\end{aligned} \tag{3.1}
$$

Por outro lado, fazendo a decomposição em $K_{\varepsilon d_0,q_0} \cap \mathcal{H}$ e $K^{\perp}_{\varepsilon d_0,q_0} \cap \mathcal{H}$, ficamos com

$$
\begin{aligned}
0 &= \left\langle W_{\varepsilon d_0,q_0} + \phi_{\varepsilon d_0,q_0} - i^*(f_\varepsilon(W_{\varepsilon d_0,q_0} + \phi_{\varepsilon d_0,q_0})), \frac{\partial W_{\varepsilon d,q(y)}}{\partial y_h}(d_0,0) + \frac{\partial \phi_{\varepsilon d,q(y)}}{\partial y_h}(d_0,0) \right\rangle \\
&= \left\langle \Pi_{\varepsilon d_0,q_0}\{W_{\varepsilon d_0,q_0} + \phi_{\varepsilon d_0,q_0} - i^*(f_\varepsilon(W_{\varepsilon d_0,q_0} + \phi_{\varepsilon d_0,q_0}))\}, \tfrac{\partial W_{\varepsilon d,q(y)}}{\partial y_h}(d_0,0) + \tfrac{\partial \phi_{\varepsilon d,q(y)}}{\partial y_h}(d_0,0) \right\rangle \\
&\quad + \left\langle \Pi^{\perp}_{\varepsilon d_0,q_0}\{W_{\varepsilon d_0,q_0} + \phi_{\varepsilon d_0,q_0} - i^*(f_\varepsilon(W_{\varepsilon d_0,q_0} + \phi_{\varepsilon d_0,q_0}))\}, \tfrac{\partial W_{\varepsilon d,q(y)}}{\partial y_h}(d_0,0) + \tfrac{\partial \phi_{\varepsilon d,q(y)}}{\partial y_h}(d_0,0) \right\rangle .
\end{aligned}
$$

Usando o fato de que $\phi_{\varepsilon d_0,q_0}$ é solução de (2.15), temos que

$$
\begin{aligned}
0 &= \left\langle W_{\varepsilon d_0,q_0} + \phi_{\varepsilon d_0,q_0} - i^*(f_\varepsilon(W_{\varepsilon d_0,q_0} + \phi_{\varepsilon d_0,q_0})), \frac{\partial W_{\varepsilon d,q(y)}}{\partial y_h}(d_0,0) + \frac{\partial \phi_{\varepsilon d,q(y)}}{\partial y_h}(d_0,0) \right\rangle \\
&= \left\langle \Pi_{\varepsilon d_0,q_0}\{W_{\varepsilon d_0,q_0} + \phi_{\varepsilon d_0,q_0} - i^*(f_\varepsilon(W_{\varepsilon d_0,q_0} + \phi_{\varepsilon d_0,q_0}))\}, \tfrac{\partial W_{\varepsilon d,q(y)}}{\partial y_h}(d_0,0) + \tfrac{\partial \phi_{\varepsilon d,q(y)}}{\partial y_h}(d_0,0) \right\rangle .
\end{aligned}
$$

Então, existem c^i_ε tais que

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=0}^{n-1} c^i_\varepsilon \left\langle Z^i_{\varepsilon d_0,q_0}, \frac{\partial W_{\varepsilon d,q(y)}}{\partial y_h}(d_0,0) + \frac{\partial \phi_{\varepsilon d,q(y)}}{\partial y_h}(d_0,0) \right\rangle \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} c^i_\varepsilon \left\langle Z^i_{\varepsilon d_0,q_0}, \frac{\partial W_{\varepsilon d,q(y)}}{\partial y_h}(d_0,0) \right\rangle + \sum_{i=0}^{n-1} c^i_\varepsilon \left\langle Z^i_{\varepsilon d_0,q_0}, \frac{\partial \phi_{\varepsilon d,q(y)}}{\partial y_h}(d_0,0) \right\rangle .
\end{aligned} \tag{3.2}
$$

Uma vez que $\phi_{\varepsilon d,q(y)} \in K^{\perp}_{\varepsilon d,q(y)}$ para todo y, então

$$
0 = \left\langle \phi_{\varepsilon d,q(y)}, Z^i_{\varepsilon d,q(y)} \right\rangle . \tag{3.3}
$$

Derivando a Expressão (3.3) em relação a y_h em $(d_0, 0)$, obtemos

$$
0 = \frac{\partial \left\langle \phi_{\varepsilon d,q(y)}, Z^i_{\varepsilon d,q(y)} \right\rangle}{\partial y_h}(d_0,0) = \left\langle \frac{\partial \phi_{\varepsilon d,q(y)}}{\partial y_h}(d_0,0), Z^i_{\varepsilon d_0,q_0} \right\rangle + \left\langle \phi_{\varepsilon d_0,q_0}, \frac{\partial Z^i_{\varepsilon d,q(y)}}{\partial y_h}(d_0,0) \right\rangle .
$$

Isto é, temos que

$$
\left\langle \frac{\partial \phi_{\varepsilon d,q(y)}}{\partial y_h}(d_0,0), Z^i_{\varepsilon d_0,q_0} \right\rangle = - \left\langle \phi_{\varepsilon d_0,q_0}, \frac{\partial Z^i_{\varepsilon d,q(y)}}{\partial y_h}(d_0,0) \right\rangle . \tag{3.4}
$$

Substituindo a Identidade (3.4) em (3.2), obtemos

$$0 = \sum_{i=0}^{n-1} c_\varepsilon^i \left\langle Z^i_{\varepsilon d_0, q_0}, \frac{\partial W_{\varepsilon d, q(y)}}{\partial y_h}(d_0, 0) \right\rangle - \sum_{i=0}^{n-1} c_\varepsilon^i \left\langle \phi_{\varepsilon d_0, q_0}, \frac{\partial Z^i_{\varepsilon d, q(y)}}{\partial y_h}(d_0, 0) \right\rangle.$$

Agora observamos que

$$\left\langle \phi_{\varepsilon d_0, q_0}, \frac{\partial Z^i_{\varepsilon d, q(y)}}{\partial y_h}(d_0, 0) \right\rangle \leq \left\| \frac{\partial Z^i_{\varepsilon d, q(y)}}{\partial y_h}(d_0, 0) \right\| \|\phi_{\varepsilon d_0, q_0}\| = o(\varepsilon), \tag{3.5}$$

por conta da Proposição 2.9. Temos também que

$$\begin{aligned} \left\langle Z^i_{\varepsilon d_0, q_0}, \frac{\partial W_{\varepsilon d, q(y)}}{\partial y_h}(d_0, 0) \right\rangle &= \frac{1}{\varepsilon d_0} \langle Z^i_{\varepsilon d_0, q_0}, Z^h_{\varepsilon d_0, q_0} \rangle + \left\langle Z^i_{\varepsilon d_0, q_0}, \frac{\partial \chi}{\partial y_h} U_{\varepsilon d_0} \right\rangle \\ &= \frac{1}{\varepsilon d_0} \langle Z^i_{\varepsilon d_0, q_0}, Z^h_{\varepsilon d_0, q_0} \rangle + o(\varepsilon), \end{aligned}$$

por conta do Lema A.1. Por outro lado, podemos ver que

$$\left\langle Z^i_{\varepsilon d_0, q_0}, \frac{\partial W_{\varepsilon d, q(y)}}{\partial y_h}(d_0, 0) \right\rangle = \frac{\alpha \delta^{ih}}{\varepsilon d_0} + o(\varepsilon), \tag{3.6}$$

em que α é uma constante positiva. Assim, por (3.5) e (3.6), temos que

$$0 = \frac{1}{\varepsilon d_0} \sum_{i=0}^{n-1} c_\varepsilon^i (\delta^{ih} + o(\varepsilon)).$$

Afirmação 3.1. $c_\varepsilon^i = 0$ para todo $i = 0, \ldots, n-1$.

Com efeito, suponha por absurdo que existam exatamente k termos c_ε^i não-nulos, em que $1 \leq k \leq n$. Sem perda de generalidade, admita que $c_\varepsilon^0 \neq 0, \ldots, c_\varepsilon^{k-1} \neq 0$. Então, temos o sistema homogêneo $k \times k$:

$$0 = \frac{1}{\varepsilon d_0} \left[o(\varepsilon) c_\varepsilon^0 + \cdots + (1 + o(\varepsilon)) c_\varepsilon^h + \ldots o(\varepsilon) c_\varepsilon^{k-1} \right], \quad 0 \leq h \leq k-1, \tag{3.7}$$

que pode ser reexpressado matricialmente da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}\right) & \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} & \cdots & \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} \\ \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}\right) & \\ & & \ddots & \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} \\ \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} & \cdots & \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} & \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}\right) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_\varepsilon^0 \\ \\ \vdots \\ \\ c_\varepsilon^{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ \vdots \\ \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tomando ε suficientemente pequeno, temos que

$$\det\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}\right) & \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} & \cdots & \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} \\ \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}\right) & \\ & & & \ddots \; \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} \\ \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} & \cdots & \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} & \left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}\right) \end{bmatrix} > 0.$$

Isso implica em que a única solução do sistema é a trivial, o que é um absurdo, pois supomos que a solução era não-trivial. Como $k \in \{1, \ldots, n\}$ é arbitrário, verificamos que todas as possibilidades de negação da hipótese levam a um absurdo, provando assim a Afirmação 3.1.

Isto é, $\phi_{\varepsilon d_0, q_0}$ é solução de (2.16). Sendo assim, $\phi_{\varepsilon d_0, q_0}$ é solução de $(P^*_{\pm\varepsilon})$.

3.2 Prova da Proposição 3.1 - (ii)

Passo 1 Queremos mostrar que para ε suficientemente pequeno, vale

$$|J_\varepsilon(W_{\delta,q}+\phi_{\delta,q}) - J_\varepsilon(W_{\delta,q})| \leq C\,\|\phi_{\delta,q}\|^2_{\mathcal{H}} + \tilde{C}\varepsilon|\ln\varepsilon|\,\|\phi_{\delta,q}\|_{\mathcal{H}} = o(\varepsilon).$$

i) De fato, temos

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(W_{\delta,q}+\phi_{\delta,q}) &= \frac{1}{2}\|W_{\delta,q}+\phi_{\delta,q}\|^2 - \frac{(n-2)^2}{2n-2\pm\varepsilon(n-2)}\int_{\partial M}(W_{\delta,q}+\phi_{\delta,q})^{\frac{2n-2}{n-2}\pm\varepsilon}d\sigma \\ &= \frac{1}{2}\langle W_{\delta,q}+\phi_{\delta,q}, W_{\delta,q}+\phi_{\delta,q}\rangle \\ &- \frac{(n-2)^2}{2n-2\pm\varepsilon(n-2)}\int_{\partial M}(W_{\delta,q}+\phi_{\delta,q})^{\frac{2n-2}{n-2}\pm\varepsilon}d\sigma \\ &= \frac{1}{2}\|W_{\delta,q}\|^2 + \langle W_{\delta,q}, \phi_{\delta,q}\rangle + \frac{1}{2}\|\phi_{\delta,q}\|^2 \\ &- \frac{(n-2)^2}{2n-2\pm\varepsilon(n-2)}\int_{\partial M}(W_{\delta,q}+\phi_{\delta,q})^{\frac{2n-2}{n-2}\pm\varepsilon}d\sigma \end{aligned} \tag{3.8}$$

ii) e também que

$$J_\varepsilon(W_{\delta,q}) = \frac{1}{2}\|W_{\delta,q}\|^2 - \frac{(n-2)^2}{2n-2\pm\varepsilon(n-2)}\int_{\partial M}(W_{\delta,q}+\phi_{\delta,q})^{\frac{2n-2}{n-2}\pm\varepsilon}d\sigma. \tag{3.9}$$

Logo, temos por (3.8) e (3.9) que

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(W_{\delta,q}+\phi_{\delta,q}) - J_\varepsilon(W_{\delta,q}) = & \int_M \nabla\phi_{\delta,q}\nabla W_{\delta,q} + a(x)\phi_{\delta,q}W_{\delta,q}d\mu_g \\ & + \frac{n-2}{2}\int_{\partial M} b(x)\phi_{\delta,q}W_{\delta,q}d\sigma + \frac{1}{2}\|\phi_{\delta,q}\|^2 \\ & - \frac{(n-2)^2}{2n-2\pm\varepsilon(n-2)}\int_{\partial M}(W_{\delta,q}+\phi_{\delta,q})^{\frac{2n-2}{n-2}\pm\varepsilon} - W_{\delta,q}^{\frac{2n-2}{n-2}\pm\varepsilon}d\sigma. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Usando a identidade de Green

$$\int_M \nabla_g\phi_{\delta,q}\nabla_g W_{\delta,q}d\mu_g = \int_M -\Delta_g W_{\delta,q}\phi_{\delta,q} + \int_{\partial M}\frac{\partial W_{\delta,q}}{\partial\nu}\phi_{\delta,q}d\sigma \tag{3.11}$$

na Equação (3.10), obtemos

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(W_{\delta,q}+\phi_{\delta,q}) - J_\varepsilon(W_{\delta,q}) = & \int_M -\Delta_g W_{\delta,q}\phi_{\delta,q} + a(x)W_{\delta,q}\phi_{\delta,q}d\mu_g \\ & + \int_{\partial M}\frac{\partial W_{\delta,q}}{\partial\nu} + \frac{n-2}{2}b(x)W_{\delta,q}\phi_{\delta,q}d\sigma + \frac{1}{2}\|\phi_{\delta,q}\|^2 \\ & - \frac{(n-2)^2}{2n-2\pm\varepsilon(n-2)}\int_{\partial M}(W_{\delta,q}+\phi_{\delta,q})^{\frac{2n-2}{n-2}\pm\varepsilon} - W_{\delta,q}^{\frac{2n-2}{n-2}\pm\varepsilon}d\sigma. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Para efeitos de cálculo, somamos e subtraímos o termo $\int_{\partial M} f_0(W_{\delta,q}) - f_\varepsilon(W_{\delta,q})\phi_{\delta,q}d\sigma$, reescrevemos a Equação (3.12) como sendo

$$\begin{aligned} & J_\varepsilon(W_{\delta,q}+\phi_{\delta,q}) - J_\varepsilon(W_{\delta,q}) = \int_M [-\Delta_g W_{\delta,q} + a(x)W_{\delta,q}]\phi_{\delta,q}d\mu_g + \frac{1}{2}\|\phi_{\delta,q}\|^2 \\ & + \int_{\partial M}\left[\frac{\partial W_{\delta,q}}{\partial\nu} + \frac{n-2}{2}b(x)W_{\delta,q} - f_0(W_{\delta,q})\right]\phi_{\delta,q}d\sigma + \int_{\partial M}[f_0(W_{\delta,q}) - f_\varepsilon(W_{\delta,q})]\phi_{\delta,q}d\sigma \\ & - \int_{\partial M}\frac{(n-2)^2}{2n-2\pm\varepsilon(n-2)}\left[(W_{\delta,q}+\phi_{\delta,q})^{\frac{2n-2}{n-2}\pm\varepsilon} - W_{\delta,q}^{\frac{2n-2}{n-2}\pm\varepsilon}\right] - f_\varepsilon(W_{\delta,q})\phi_{\delta,q}d\sigma. \end{aligned}$$

Finalmente, tomando o valor absoluto da equação acima e usando a desigualdade triangular em cada termo, obtemos

$$\begin{aligned} & \left|J_\varepsilon\left(W_{\delta,q}+\phi_{\delta,q}\right) - J_\varepsilon\left(W_{\delta,q}\right)\right| \leq \left|\int_M \left[-\Delta_g W_{\delta,q} + a(x)W_{\delta,q}\right]\phi_{\delta,q}d\mu_g\right| + \frac{1}{2}\left\|\phi_{\delta,q}\right\|^2 \\ & + \left|\int_{\partial M}\left[\frac{\partial W_{\delta,q}}{\partial\nu} + \frac{n-2}{2}b(x)W_{\delta,q} - f_0\left(W_{\delta,q}\right)\right]\phi_{\delta,q}d\sigma\right| \\ & + \left|\int_{\partial M}\left[f_0\left(W_{\delta,q}\right) - f_\varepsilon\left(W_{\delta,q}\right)\right]\phi_{\delta,q}d\sigma\right| \\ & + \left|\int_{\partial M}\frac{(n-2)^2}{2n-2\pm\varepsilon(n-2)}\left[(W_{\delta,q}+\phi_{\delta,q})^{\frac{2n-2}{n-2}\pm\varepsilon} - W_{\delta,q}^{\frac{2n-2}{n-2}\pm\varepsilon}\right] - f_\varepsilon\left(W_{\delta,q}\right)\phi_{\delta,q}d\sigma\right|. \end{aligned} \tag{3.13}$$

iii) Pela Desigualdade de Hölder, temos que

$$\begin{aligned}\left|\int_M \left[-\Delta_g W_{\delta,q} + a(x)W_{\delta,q}\right]\phi_{\delta,q} d\mu_g\right| &\leq \int_M |-\Delta_g W_{\delta,q} + a(x)W_{\delta,q}||\phi_{\delta,q}| d\mu_g \\ &\leq \left(\int_M |-\Delta_g W_{\delta,q} + a(x)W_{\delta,q}|^{\frac{2n}{n+2}} d\mu_g\right)^{\frac{n+2}{2n}} \\ &\times \left(\int_M |\phi_{\delta,q}|^{\frac{2n}{n-2}} d\mu_g\right)^{\frac{n-2}{2n}}.\end{aligned}$$

Pelo Teorema do Traço, ficamos com

$$\left|\int_M \left[-\Delta_g W_{\delta,q} + a(x)W_{\delta,q}\right]\phi_{\delta,q} d\mu_g\right| \leq C\left(\int_M |-\Delta_g W_{\delta,q} + a(x)W_{\delta,q}|^{\frac{2n}{n+2}} d\mu_g\right)^{\frac{n+2}{2n}} \|\phi_{\delta,q}\|.$$

Usando a Estimativa (2.47), ficamos com

$$\left|\int_M \left[-\Delta_g W_{\delta,q} + a(x)W_{\delta,q}\right]\phi_{\delta,q} d\mu_g\right| = O(\delta)\|\phi_{\delta,q}\|. \tag{3.14}$$

iv) Pela Desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\partial M}\left[\frac{\partial W_{\delta,q}}{\partial \nu} + \frac{n-2}{2}b(x)W_{\delta,q} - f_0\left(W_{\delta,q}\right)\right]\phi_{\delta,q} d\sigma\right| \\ &\leq \int_{\partial M}\left|\frac{\partial W_{\delta,q}}{\partial \nu} + \frac{n-2}{2}b(x)W_{\delta,q} - f_0(W_{\delta,q})\right||\phi_{\delta,q}| d\sigma \\ &\leq \left(\int_{\partial M}\left|\frac{\partial W_{\delta,q}}{\partial \nu} + \frac{n-2}{2}b(x)W_{\delta,q} - f_0(W_{\delta,q})\right|^{\frac{2(n-1)}{n}} d\sigma\right)^{\frac{n}{2(n-1)}} \left(\int_{\partial M}|\phi_{\delta,q}|^{\frac{2(n-1)}{n-2}} d\sigma\right)^{\frac{n-2}{2(n-1)}}.\end{aligned}$$

Pelo Teorema do Traço, temos

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\partial M}\left[\frac{\partial W_{\delta,q}}{\partial \nu} + \frac{n-2}{2}b(x)W_{\delta,q} - f_0\left(W_{\delta,q}\right)\right]\phi_{\delta,q} d\sigma\right| \\ &\leq \left(\int_{\partial M}\left|\frac{\partial W_{\delta,q}}{\partial \nu} + \frac{n-2}{2}b(x)W_{\delta,q} - f_0(W_{\delta,q})\right|^{\frac{2(n-1)}{n}} d\sigma\right)^{\frac{n}{2(n-1)}} \|\phi_{\delta,q}\|.\end{aligned}$$

Pela Desigualdade Triangular, obtemos

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\partial M}\left[\frac{\partial W_{\delta,q}}{\partial \nu} + \frac{n-2}{2}b(x)W_{\delta,q} - f_0\left(W_{\delta,q}\right)\right]\phi_{\delta,q} d\sigma\right| \\ &\leq \left(\int_{\partial M}\left|\frac{\partial W_{\delta,q}}{\partial \nu} - f_0(W_{\delta,q})\right|^{\frac{2(n-1)}{n}} d\sigma\right)^{\frac{n}{2(n-1)}} \|\phi_{\delta,q}\| \\ &+ \frac{n-2}{2}\left(\int_{\partial M}|b(x)W_{\delta,q}|^{\frac{2(n-1)}{n}} d\sigma\right)^{\frac{n}{2(n-1)}} \|\phi_{\delta,q}\|.\end{aligned}$$

Assim, usando as Estimativas (2.49) e (2.51), obtemos

$$\left|\int_{\partial M}\left[\frac{\partial W_{\delta,q}}{\partial\nu}+\frac{n-2}{2}b(x)W_{\delta,q}-f_0\left(W_{\delta,q}\right)\right]\phi_{\delta,q}d\sigma\right|=O(\delta)\|\phi_{\delta,q}\|. \tag{3.15}$$

v) Para o terceiro termo no caso $(P_{-\varepsilon})$ temos pela Desigualdade de Hölder que

$$\begin{aligned}\left|\int_{\partial M}[f_0(W_{\delta,q})-f_\varepsilon(W_{\delta,q})]\phi_{\delta,q}d\sigma\right| &= \int_{\partial M}|f_0(W_{\delta,q})-f_\varepsilon(W_{\delta,q})||\phi_{\delta,q}|d\sigma\\ &\leq \left(\int_{\partial M}|f_\varepsilon(W_{\delta,q})-f_0(W_{\delta,q})|^{\frac{2(n-1)}{n}}d\sigma\right)^{\frac{n}{2(n-1)}}\\ &\quad\times\left(\int_{\partial M}|\phi_{\delta,q}|^{\frac{2(n-1)}{n-2}}d\sigma\right)^{\frac{n-2}{2(n-1)}}.\end{aligned}$$

Pelo Teorema do Traço, ficamos com

$$\left|\int_{\partial M}[f_0(W_{\delta,q})-f_\varepsilon(W_{\delta,q})]\phi_{\delta,q}d\sigma\right|\leq C\left(\int_{\partial M}|f_\varepsilon(W_{\delta,q})-f_0(W_{\delta,q})|^{\frac{2(n-1)}{n}}d\sigma\right)^{\frac{n}{2(n-1)}}\|\phi_{\delta,q}\|.$$

Pela Estimativa (2.63), temos que

$$\left|\int_{\partial M}[f_0(W_{\delta,q})-f_\varepsilon(W_{\delta,q})]\phi_{\delta,q}d\sigma\right|=O(\varepsilon|\ln\varepsilon|)\|\phi_{\delta,q}\|.$$

Já para o caso $(P_{+\varepsilon})$, usando a Desigualdade de Hölder com $p=s_\varepsilon$ e $q=s'_\varepsilon$, ficamos com

$$\begin{aligned}\left|\int_{\partial M}[f_0(W_{\delta,q})-f_\varepsilon(W_{\delta,q})]\phi_{\delta,q}d\sigma\right| &\leq \int_{\partial M}|f_\varepsilon(W_{\delta,q})-f_0(W_{\delta,q})||\phi_{\delta,q}|d\sigma\\ &= \left(\int_{\partial M}|f_\varepsilon(W_{\delta,q})-f_0(W_{\delta,q})|^{s_\varepsilon}d\sigma\right)^{\frac{1}{s_\varepsilon}}\\ &\quad\times\left(\int_{\partial M}|\phi_{\delta,q}|^{s'_\varepsilon}d\sigma\right)^{\frac{1}{s'_\varepsilon}}.\end{aligned}$$

Pelo Teorema do Traço, existe $C>0$ tal que

$$\left|\int_{\partial M}[f_0(W_{\delta,q})-f_\varepsilon(W_{\delta,q})]\phi_{\delta,q}d\sigma\right|\leq C\left(\int_{\partial M}|f_\varepsilon(W_{\delta,q})-f_0(W_{\delta,q})|^{s_\varepsilon}d\sigma\right)^{\frac{1}{s_\varepsilon}}\|\phi_{\delta,q}\|.$$

Utilizando a Estimativa (2.69), visto que $s_\varepsilon=\frac{2(n-1)}{n}+n\varepsilon=\frac{2(n-1)}{n}+O^+(\varepsilon)$ e $s'_\varepsilon=\frac{2(n-1)}{n-2}-O^+(\varepsilon)$, obtemos

$$\left|\int_{\partial M}[f_0(W_{\delta,q})-f_\varepsilon(W_{\delta,q})]\phi_{\delta,q}d\sigma\right|=O(\varepsilon|\ln\varepsilon|)\|\phi_{\delta,q}\|. \tag{3.16}$$

vi) Para estimar o último termo, aplicamos o Teorema do Valor Médio para a função $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(\lambda) = \int_{\partial M} \frac{(n-2)^2}{2n-2 \pm \varepsilon(n-2)} (W_{\delta,q} + \lambda\phi_{\delta,q})^{\frac{2n-2}{n-2} \pm \varepsilon} d\sigma,$$

dem que obtemos $\lambda_1 \in (0, 1)$ tal que

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial M} \frac{(n-2)^2}{2n-2 \pm \varepsilon(n-2)} \left[(W_{\delta,q} + \phi_{\delta,q})^{\frac{2n-2}{n-2} \pm \varepsilon} - W_{\delta,q}^{\frac{2n-2}{n-2} \pm \varepsilon} \right] d\sigma \\
&= \int_{\partial M} (n-2)(W_{\delta,q} + \lambda_1\phi_{\delta,q})^{\frac{n}{n-2} \pm \varepsilon} d\sigma.
\end{aligned}$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial M} \frac{(n-2)^2}{2n-2 \pm \varepsilon(n-2)} \left[(W_{\delta,q} + \phi_{\delta,q})^{\frac{2n-2}{n-2} \pm \varepsilon} - W_{\delta,q}^{\frac{2n-2}{n-2} \pm \varepsilon} \right] - f_\varepsilon\left(W_{\delta,q}\right) \phi_{\delta,q} d\sigma \\
&= \int_{\partial M} (n-2)(W_{\delta,q} + \lambda_1\phi_{\delta,q})^{\frac{n}{n-2} \pm \varepsilon} - (n-2) W_{\delta,q}^{\frac{n}{n-2} \pm \varepsilon} \phi_{\delta,q} d\sigma.
\end{aligned}$$

Novamente, podemos usar o Teorema do Valor Médio para a função $G : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$G(\lambda) = \int_{\partial M} (n-2)(W_{\delta,q} + \lambda\lambda_1\phi_{\delta,q})^{\frac{n}{n-2} \pm \varepsilon} \phi_{\delta,q} d\sigma,$$

dem que obtemos $\lambda_2 \in (0, 1)$ tal que

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial M} (n-2)(W_{\delta,q} + \lambda_1\phi_{\delta,q})^{\frac{n}{n-2} \pm \varepsilon} - (n-2) W_{\delta,q}^{\frac{n}{n-2} \pm \varepsilon} \phi_{\delta,q} d\sigma \\
&= \int_{\partial M} \lambda_1 (n \pm \varepsilon(n-2))(W_{\delta,q} + \lambda_1\lambda_2\phi_{\delta,q})^{\frac{2}{n-2} \pm \varepsilon} \phi_{\delta,q}^2 d\sigma.
\end{aligned}$$

Pondo $\theta = \lambda_1\lambda_2$, temos que

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{\partial M} \frac{(n-2)^2}{2n-2 \pm \varepsilon(n-2)} \left[(W_{\delta,q} + \phi_{\delta,q})^{\frac{2n-2}{n-2} \pm \varepsilon} - W_{\delta,q}^{\frac{2n-2}{n-2} \pm \varepsilon} \right] - f_\varepsilon\left(W_{\delta,q}\right) \phi_{\delta,q} d\sigma \right| \\
&= \left| \int_{\partial M} \lambda_1 (n \pm \varepsilon(n-2))(W_{\delta,q} + \theta\phi_{\delta,q})^{\frac{2}{n-2} \pm \varepsilon} \phi_{\delta,q}^2 d\sigma \right|.
\end{aligned}$$

Pela Desigualdade de Hölder Generalizada com expoentes $p = \frac{s_\varepsilon}{s_\varepsilon - 2}$ e $q = r = s_\varepsilon$ satisfazendo $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$, temos que

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\partial M} \frac{(n-2)^2}{2n-2 \pm \varepsilon(n-2)} \left[(W_{\delta,q} + \phi_{\delta,q})^{\frac{2n-2}{n-2} \pm \varepsilon} - W_{\delta,q}^{\frac{2n-2}{n-2} \pm \varepsilon} \right] - f_\varepsilon \left(W_{\delta,q} \right) \phi_{\delta,q} d\sigma \right| \\ & \leq C_1 \left[\int_{\partial M} |W_{\delta,q} + \theta \phi_{\delta,q}|^{\left(\frac{2}{n-2} \pm \varepsilon \right) \frac{s_\varepsilon}{s_\varepsilon - 2}} d\sigma \right]^{\frac{s_\varepsilon - 2}{s_\varepsilon}} \left[\int_{\partial M} |\phi_{\delta,q}|^{s_\varepsilon} d\sigma \right]^{\frac{2}{s_\varepsilon}} \\ & \leq C_1 \left[\int_{\partial M} |W_{\delta,q} + \theta \phi_{\delta,q}|^{\left(\frac{2}{n-2} \pm \varepsilon \right) \frac{s_\varepsilon}{s_\varepsilon - 2}} d\sigma \right]^{\frac{s_\varepsilon - 2}{s_\varepsilon}} \|\phi_{\delta,q}\|_{\mathcal{H}}^2 \\ & \leq C_2 \left| W_{\delta,q} + \theta \phi_{\delta,q} \right|_{L^{s_\varepsilon}}^{s_\varepsilon - 2} \|\phi_{\delta,q}\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C_3 \|\phi_{\delta,q}\|_{\mathcal{H}}^2 . \end{aligned} \tag{3.17}$$

Assim, substituindo (3.14), (3.15), (3.16) e (3.17) em (3.13), e fazendo $\delta = d\varepsilon$, obtemos constantes $C, \tilde{C} > 0$, tais que

$$|J_\varepsilon(W_{\delta,q} + \phi_{\delta,q}) - J_\varepsilon(W_{\delta,q})| \leq C\|\phi_{\delta,q}\|_{\mathcal{H}}^2 + \tilde{C}\varepsilon|\ln \varepsilon|\|\phi_{\delta,q}\|_{\mathcal{H}}.$$

Mas pela Proposição 2.9, temos que $\|\phi_{\delta,q}\|_{\mathcal{H}} = O(\varepsilon|\ln \varepsilon|)$ e, consequentemente, que

$$|J_\varepsilon(W_{\delta,q} + \phi_{\delta,q}) - J_\varepsilon(W_{\delta,q})| = O(\varepsilon^2|\ln \varepsilon|^2) = o(\varepsilon). \tag{3.18}$$

Passo 2 Provaremos que

$$J_\varepsilon \left(W_{\delta,q} \right) = C(\varepsilon) + \varepsilon \left\{ d\frac{n-2}{4}[b(q) - H(q)] \pm \ln d \frac{(n-2)^3(n-3)}{4(n-2)(2n-2)} \right\} \omega_{n-1} I_{n-2}^{n-2} + o(\varepsilon)$$

uniformemente em C^0 em relação a d em compactos de $(0, +\infty)$ e $q \in \partial M$, em que

$$\begin{aligned} C(\varepsilon) = & \frac{1}{2} \int_{B(0,R) \times [0,R)} |\nabla U_\delta(y)|^2 dy - \frac{(n-2)^2}{2n-2} \int_{B(0,R)} U_\delta^{\frac{2n-2}{n-2}}(z,0) dz \\ & \pm \varepsilon \frac{(n-2)^3}{2n-2} \int_{B(0,R)} U^{\frac{2n-2}{n-2}}(z,0) dz \mp \varepsilon \frac{(n-2)^2}{2n-2} \int_{B(0,R)} U_\delta^{\frac{2n-2}{n-2}}(z,0) \ln U_\delta(z,0) dz \\ & \mp \varepsilon |\ln \varepsilon| \frac{(n-2)^3}{2(2n-2)} \int_{B(0,R)} U_\delta^{\frac{2n-2}{n-2}}(z,0) dz \end{aligned}$$

e

$$I_{n-2}^{n-2} = \int_0^\infty \frac{s^{n-2}}{(1+s^2)^{n-2}} dz,$$

com ω_{n-1} sendo a área da bola unitária de $\mathbb{R}^{n-1}$. Primeiramente temos por definição que

$$\begin{aligned}J_\varepsilon(W_{\delta,q}) =& \frac{1}{2}\int_M \left(|\nabla_g W_{\delta,q}|^2 + a(x)W_{\delta,q}^2\right) d\mu_g + \frac{n-2}{4}\int_{\partial M} b(x) W_{\delta,q}^2 d\sigma \\ & - \frac{(n-2)^2}{2n-2\pm\varepsilon(n-2)}\int_{\partial M} W_{\delta,q}^{\frac{2n-2}{n-2}\pm\varepsilon} d\sigma.\end{aligned} \tag{3.19}$$

Estudemos cada termo separadamente. Temos

$$\int_M |\nabla W_{\delta,q}|^2 \, d\mu_g = \int_M \left(\chi^2|\nabla_g U_\delta|^2 + 2\chi U_\delta \nabla_g\chi\nabla_g U_\delta + U_\delta^2|\nabla_g\chi|^2\right) d\mu_g. \tag{3.20}$$

Pelo Lema (A.1), podemos provar que

$$\int_M \left(2\chi U_\delta \nabla_g\chi\nabla_g U_\delta + U_\delta^2|\nabla_g\chi|^2\right) d\mu_g = o(\delta).$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int_M |\nabla W_{\delta,q}|^2 \, d\mu_g &= \int_M \chi^2|\nabla_g U_\delta|^2 d\mu_g + o(\delta) \\ &\leq \int_M |\nabla_g U_\delta|^2 d\mu_g + o(\delta).\end{aligned} \tag{3.21}$$

Substituindo $\tilde{y} = \delta y$ nas Equações (1.6), (1.7) e (1.8), obtemos

$$g^{ij}(\delta y) = \delta_{ij} + 2h_{ij}(q)\delta y_n + |y|^2 O(\delta^2), \tag{3.22}$$

$$g^{in}(\delta y) = \delta_{in}, \tag{3.23}$$

$$\sqrt{g}(\delta y) = 1 - \delta(n-1)H(q)y_n + |y|^2 O(\delta^2). \tag{3.24}$$

Agora substituindo as expressões (3.22), (3.23) e (3.24) em (3.20), temos

$$\begin{aligned}\int_M |\nabla W_{\delta,q}|^2 d\mu_g \leq& \int_{B(0,R)\times[0,R)} |\nabla U_\delta|^2 dy - (n-1)H(q)\delta \int_{B(0,R)\times[0,R)} y_n |\nabla U_\delta|^2 dy \\ & + 2\delta \sum_{i,j=1}^{n-1} h_{ij}(q) \int_{B(0,R)\times[0,R)} y_n \frac{\partial U_\delta}{\partial y_i}\frac{\partial U_\delta}{\partial y_j} dy + o(\delta).\end{aligned} \tag{3.25}$$

Por simetria, ficamos com

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_M |\nabla W_{\delta,q}|^2 d\mu_g \leq& \frac{1}{2}\int_{B(0,R)\times[0,R)} |\nabla U_\delta|^2 dy - \frac{(n-1)H(q)}{2}\delta \int_{B(0,R)\times[0,R)} y_n |\nabla U_\delta|^2 dy \\ & + \delta \sum_{i=1}^{n-1} h_{ii}(q) \int_{B(0,R)\times[0,R)} y_n \left(\frac{\partial U_\delta}{\partial y_i}\right)^2 dy + o(\delta).\end{aligned} \tag{3.26}$$

Uma vez que $\int_{B(0,R)\times[0,R)} y_n \left(\frac{\partial U_\delta}{\partial y_i}(y)\right)^2 dy = \int_{B(0,R)\times[0,R)} y_n \left(\frac{\partial U_\delta}{\partial y_l}(y)\right)^2 dy$ para todo

$i, j = 1, \dots, n-1$, temos que

$$\sum_{i=1}^{n-1} h_{ii}(q) \int_{B(0,R)\times[0,R)} y_n \left(\frac{\partial U_\delta}{\partial y_i}\right)^2 dy = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} h_{ii}(q) \int_{B(0,R)\times[0,R)} y_n \sum_{l=1}^{n-1} \left(\frac{\partial U_\delta}{\partial y_l}\right)^2 dy$$
$$= \frac{H(q)}{4} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} U_\delta^2(z,0)dz, \tag{3.27}$$

usando (A.19). Agora substituindo (3.27) em (3.26), obtemos

$$\frac{1}{2}\int_M |\nabla W_{\delta,q}|^2 d\mu_g \le \frac{1}{2}\int_{B(0,R)\times[0,R)} |\nabla U_\delta|^2 dy - \frac{(n-1)H(q)}{2}\delta \int_{B(0,R)\times[0,R)} y_n |\nabla U_\delta|^2 dy$$
$$+ \frac{H(q)}{4}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} U_\delta^2(z,0)dz + o(\delta). \tag{3.28}$$

Para o segundo termo, temos

$$\frac{1}{2}\int_M a(x)|W_{\delta,q}|^2 d\mu_g = \frac{1}{2}\int_{B(0,R)\times[0,R)} \sqrt{g}(y)a(y)\chi(y)^2 U_\delta(y)^2 dy$$
$$\le C_1 \int_{B(0,R)\times[0,R)} U_\delta(y)^2 dy,$$

dem que pelo Lema (A.1), obtemos que

$$\frac{1}{2}\int_M a(x)|W_{\delta,q}|^2 d\mu_g = O(\delta^2).$$

Analogamente, temos para o terceiro termo

$$\frac{n-2}{4}\int_{\partial M} b(x)|W_{\delta,q}|^2 d\sigma = \frac{n-2}{4}\int_{B(0,R)} b(z,0)\chi(z,0)^2 U_\delta(z,0)^2 dz$$
$$\le C\int_{B(0,R)} U_\delta(z,0)^2 dz = O(\delta),$$

por conta do Lema (A.3). Para o quarto termo, temos

$$\int_{\partial M} |W_{\delta,q}|^{\frac{2n-2}{n-2}\pm\varepsilon} d\sigma = \int_{B(0,R)} \sqrt{g}(z,0)\chi^{\frac{2n-2}{n-2}\pm\varepsilon}(z,0) U_\delta^{\frac{2n-2}{n-2}}(z,0) U_\delta^{\pm\varepsilon}(z,0)dz$$
$$\le \int_{B(0,R)} \sqrt{g}(z,0) U_\delta^{\frac{2n-2}{n-2}}(z,0) U_\delta^{\pm\varepsilon}(z,0)dz.$$

Por (1.9) e (2.58), temos

$$\int_{\partial M} |W_{\delta,q}|^{\frac{2n-2}{n-2}\pm\varepsilon} d\sigma \le \int_{B(0,R)} \delta^{\mp\varepsilon\frac{n-2}{2}} U_\delta^{\frac{2n-2}{n-2}}(z,0) U_\delta^{\pm\varepsilon}(z,0)dz + o(\delta).$$

Substituindo as expansões de Taylor (2.57) e (2.58), obtemos

$$\int_{\partial M} |W_{\delta,q}|^{\frac{2n-2}{n-2}\pm\varepsilon} d\sigma \leq \int_{B(0,R)} U_\delta^{\frac{2n-2}{n-2}}(z,0)dz \pm \varepsilon \int_{B(0,R)} U_\delta^{\frac{2n-2}{n-2}}(z,0)\ln U_\delta(z,0)$$
$$\mp \frac{n-2}{2}\varepsilon \ln\delta \int_{B(0,R)} U_\delta^{\frac{2n-2}{n-2}}(z,0)dz + o(\delta) + O(\varepsilon^2) + O(\varepsilon^2 \ln\delta).$$

Usando o fato de que $\frac{(n-2)^2}{2n-2\pm\varepsilon(n-2)} = \frac{(n-2)^2}{2n-2} \mp \frac{\varepsilon(n-2)^3}{2n-2}$, obtemos

$$-\frac{(n-2)^2}{2n-2\pm\varepsilon(n-2)} \int_{\partial M} |W_{\delta,q}|^{\frac{2n-2}{n-2}-\varepsilon} d\sigma = -\frac{(n-2)^2}{2n-2} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} U_\delta^{\frac{2n-2}{n-2}}(z,0)dz$$
$$\pm\varepsilon\frac{(n-2)^3}{2n-2} \int_{B(0,R)} U_\delta^{\frac{2n-2}{n-2}}(z,0)dz \mp \varepsilon\frac{(n-2)^2}{2n-2} \int_{B(0,R)} U_\delta^{\frac{2n-2}{n-2}}(z,0)\ln U_\delta(z,0)dz$$
$$\pm \frac{(n-2)^3}{2(2n-2)}\varepsilon\ln\delta \int_{B(0,R)} U_\delta^{\frac{2n-2}{n-2}}(z,0)dz + o(\delta) + O\left(\varepsilon^2\right) + O\left(\varepsilon^2 \ln\delta\right).$$

Fazendo $\delta = d\varepsilon$ e notando que $o(\delta) + O(\varepsilon^2) + O(\varepsilon^2 \ln\delta) = o(\varepsilon)$ e $\varepsilon\ln\delta = \varepsilon\ln(d\varepsilon) = \varepsilon\ln d + \varepsilon\ln\varepsilon = \varepsilon\ln d - \varepsilon|\ln\varepsilon| = o(\varepsilon)$. Desse modo, temos

$$J_\varepsilon\left(W_{\delta,q}\right) = C(\varepsilon) + \varepsilon d\frac{n-2}{4}[b(q) - H(q)] \int_{B(0,R)} U_\delta^2(z,0)dz$$
$$\pm\varepsilon\frac{(n-2)^3}{2(2n-2)}\ln d \int_{B(0,R)} U_\delta^{\frac{2n-2}{n-2}}(z,0)dz + o(\varepsilon|\ln\varepsilon|),$$

já que pelo Lema (A.3), tem-se

$$\int_{B(0,R)} U_\delta^2(z,0)dz \leq \int_{\mathbb{R}^{n-1}} U_\delta^2(z,0)dz = \omega_{n-1} I_{n-2}^{n-2}$$

e

$$\int_{B(0,R)} U_\delta^{\frac{2n-2}{n-2}}(z,0)dz \leq \int_{\mathbb{R}^{n-1}} U_\delta^{\frac{2n-2}{n-2}}(z,0)dz = \omega_{n-1} I_{n-1}^{n-2},$$

em que $I_\beta^\alpha = \int_0^\infty \frac{s^\alpha}{(1+s^2)^\beta} ds$ e usando o fato de que $I_{n-1}^{n-2} = \frac{n-3}{2(n-2)} I_{n-2}^{n-2}$ (Ver prova em [3], Lema 9.4(b)).

3.3 Prova do Teorema Principal

Introduzimos agora a seguinte função

$$\hat{I} : (0,+\infty) \times \partial M \to \mathbb{R}$$
$$(d,q) \mapsto \hat{I}(d,q) = \alpha_n d\varphi(q) - \beta_n \ln d.$$

Seja $q_0 \in \partial M$ um ponto de mínimo local de $\varphi(q)$. Sem perda de generalidade, vamos supor que $\varphi(q_0) > 0$. Desse modo, defina $d_0 = \frac{\beta_n}{\alpha_n \varphi(q_0)} > 0$. Então, (q_0, d_0) é um ponto crítico de $\hat{I}$, pois

$$\frac{\partial \hat{I}}{\partial d}(d, q(y)) = \alpha_n \varphi(q(y)) - \frac{\beta_n}{d}$$

e também

$$\frac{\partial \hat{I}}{\partial y_i}(d, q(y)) = \alpha_n d \frac{\partial \varphi}{\partial y_i}(q(y)).$$

Assim,

$$\frac{\partial \hat{I}}{\partial d}(d_0, 0) = \alpha_n \varphi(q_0) - \frac{\beta_n}{d_0} = 0$$

e

$$\frac{\partial \hat{I}}{\partial y_i}(d_0, 0) = \alpha_n d_0 \frac{\partial \varphi}{\partial y_i}(q_0) = 0,$$

pois q_0 é ponto crítico de $\varphi(q)$. Além do mais, existe uma vizinhança B de q_0 tal que $\varphi(q) > \varphi(q_0)$ para todo $q \in \partial B$. Por um lado, temos

$$d\varphi(q) - d_0\varphi(q_0) > d\varphi(q_0) - d_0\varphi(q_0) = \varphi(q_0)(d - d_0). \tag{3.29}$$

Por outro lado, dado um intervalo compacto $[a, b] \subset (0, +\infty)$, podemos tomar uma vizinhança de $\tilde{B} \subset [a, b] \times \partial B$ de (d_0, q_0) tal que

$$\varphi(q_0)(d - d_0) > \frac{\beta_n}{\alpha_n}(\ln d - \ln d_0). \tag{3.30}$$

Combinando (3.29) e (3.30), obtemos

$$\hat{I}(d, q) > \hat{I}(d_0, q_0)$$

para todo $(d, q) \in \partial\tilde{B}$. Pela Proposição (3.1)-(ii), temos que

$$I_\varepsilon(d, q) = c_n(\varepsilon) + \varepsilon \hat{I}(d, q) + o(\varepsilon).$$

Expressando I_ε da seguinte maneira

$$I_\varepsilon(d, q) = c_n(\varepsilon) + \varepsilon \left(\hat{I}(d, q) + \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} \right),$$

podemos fazer ε suficientemente pequeno de tal maneira que $\hat{I}(d_0, q_0) + \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}$ mantenha o sinal de $\hat{I}(d_0, q_0)$. Portanto, temos que existe $(d^*, q^*) \in \tilde{B}$ tal que $W_{\varepsilon d^*, q^*} + \phi_{\varepsilon d^*, q^*}$ é ponto crítico de J_ε. Assim, pela (3.1)-(ii), temos que $W_{\varepsilon d^*, q^*} + \phi_{\varepsilon d^*, q^*} \in \mathcal{H}$ é solução de $(P^*_{-\varepsilon})$. De maneira análoga, provamos o caso $(P^*_{+\varepsilon})$.

Apêndice A

Integrais auxiliares

Neste apêndice apresentaremos alguns resultados recorrentes ao longo do trabalho. Começamos relembrando duas fórmulas bastantes conhecidas:

$$\int_0^\infty \frac{r^\alpha dr}{(1+r^2)^\beta} = \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2\beta-\alpha-1}{2}\right)}{2\Gamma(\beta)}, \tag{A.1}$$

em que α e β são constantes positivas satisfazendo $2\beta-\alpha>1$ e $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} x^{t-1}e^{-x}dt$ é a função gama, e

$$\int_{\mathbb{R}^m} f(|x|)dx = \omega_{m-1}\int_0^\infty f(r)r^{m-1}dr, \tag{A.2}$$

em que ω_{m-1} é a área da esfera unitária do $\mathbb{R}^{m-1}$.

A.1 Integral da função do tipo bolha na variedade

Lema A.1. Sejam p, q, r, γ constantes positivas satisfazendo

$$2q-\gamma > n-1. \tag{A.3}$$

Então, para cada $\delta>0$, existe uma constante positiva $C=C(p,q,r,\gamma)$ tal que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{\delta^p|x|^\gamma dxdt}{((\delta+t)^2+|x|^2)^q}\right)^{\frac{1}{r}} = C\delta^{\frac{p+\gamma-2q+n}{r}}. \tag{A.4}$$

Demonstração. Colocando em evidência as potências de δ no numerador e denominador do integrando e reescrevendo $|x| = \delta|x/\delta|$ e $t = \delta(t/\delta)$, obtemos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{\delta^p |x|^\gamma dxdt}{((\delta+t)^2+|x|^2)^q}\right)^{\frac{1}{r}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{\delta^{p+\gamma}|x/\delta|^\gamma dxdt}{\delta^{2q}((1+t/\delta)^2+|x/\delta|^2)^q}\right)^{\frac{1}{r}}$$
$$= \delta^{\frac{p+\gamma-2q}{r}} \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{|x/\delta|^\gamma dxdt}{((1+t/\delta)^2+|x/\delta|^2)^q}\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Fazendo a substituição $y = x/\delta$ e $s = t/\delta$, que fornece os respectivos elementos de volume $dy = dx/\delta^{n-1}$ e $ds = dt/\delta$, obtemos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{\delta^p |x|^\gamma dxdt}{((\delta+t)^2+|x|^2)^q}\right)^{\frac{1}{r}} = \delta^{\frac{p+\gamma-2q}{r}} \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{|y|^\gamma \delta^n dyds}{((1+s)^2+|y|^2)^q}\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Reescrevendo $y = (1+s)(y/(1+s))$, ficamos com

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{\delta^p |x|^\gamma dxdt}{((\delta+t)^2+|x|^2)^q}\right)^{\frac{1}{r}} = \delta^{\frac{p+\gamma-2q+n}{r}} \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{(1+s)^\gamma |y/(1+s)|^\gamma dyds}{(1+s)^{2q}(1+|y/(1+s)|^2)^q}\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Agora fazemos a mudança de variável $z = y/(1+s)$, que fornece o elemento de volume $dz = dy/(1+s)$, obtemos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{\delta^p |x|^\gamma dxdt}{((\delta+t)^2+|x|^2)^q}\right)^{\frac{1}{r}} = \delta^{\frac{p+\gamma-2q+n}{r}} \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{(1+s)^{\gamma+1} |z|^\gamma dzds}{(1+s)^{2q}(1+|z|^2)^q}\right)^{\frac{1}{r}}$$
$$= \delta^{\frac{p+\gamma-2q+n}{r}} \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{(1+s)^{\gamma+1-2q} |z|^\gamma dzds}{(1+|z|^2)^q}\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Como o integrando é o produto de duas funções de variáveis diferentes, podemos reexpressar a integral da seguinte maneira:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{\delta^p |x|^\gamma dxdt}{((\delta+t)^2+|x|^2)^q}\right)^{\frac{1}{r}} = \delta^{\frac{p+\gamma-2q+n}{r}} \left(\int_0^{+\infty} (1+s)^{\gamma+1-2q} ds\right)^{\frac{1}{r}} \times \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{|z|^\gamma dz}{(1+|z|^2)^q}\right)^{\frac{1}{r}}, \tag{A.5}$$

em que

$$\left(\int_0^{+\infty}(1+s)^{\gamma+1-2q}ds\right)^{\frac{1}{r}} = \left(\left.\frac{(1+s)^{\gamma+2-2q}}{\gamma+2-2q}\right|_0^{+\infty}\right)^{\frac{1}{r}} = \left(0-\frac{1}{\gamma+2-2q}\right)^{\frac{1}{r}} \\ = \left(\frac{1}{2q-2-\gamma}\right)^{\frac{1}{r}} \tag{A.6}$$

e, pela Fórmula (A.2) pondo $m = n-1$,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\frac{|z|^\gamma dz}{(1+|z|^2)^q}\right)^{\frac{1}{r}} = \left(\omega_{n-2}\int_0^{+\infty}\frac{r^\gamma r^{n-2}dr}{(1+r^2)^q}\right)^{\frac{1}{r}} = \left(\omega_{n-2}\int_0^{+\infty}\frac{r^{\gamma+n-2}dr}{(1+r^2)^q}\right)^{\frac{1}{r}},$$

que pondo $\alpha = \gamma+n-2$ e $\beta = q$ na Fórmula (A.1) fornece

$$\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\frac{|z|^\gamma dz}{(1+|z|^2)^q}\right)^{\frac{1}{r}} = \left(\omega_{n-2}\frac{\Gamma(\frac{\gamma+n-1}{2})\Gamma(\frac{2q-\gamma-n+1}{2})}{2\Gamma(q)}\right)^{\frac{1}{r}}. \tag{A.7}$$

Assim, substituindo (A.6) e (A.7) em (A.5), obtemos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n_+}\frac{\delta^p|x|^\gamma dxdt}{((\delta+t)^2+|x|^2)^q}\right)^{\frac{1}{r}} = \delta^{\frac{p+\gamma-2q+n}{r}}\left(\frac{1}{2q-2-\gamma}\right)^{\frac{1}{r}}\left(\omega_{n-2}\frac{\Gamma(\frac{\gamma+n-1}{2})\Gamma(\frac{2q-\gamma-n+1}{2})}{2\Gamma(q)}\right)^{\frac{1}{r}} \\ = C\delta^{\frac{p+\gamma-2q+n}{r}}.$$

Assim, concluímos a prova. □

Lema A.2. Sejam δ, p, q, r, γ constantes satisfazendo

$$q-\gamma > 1 \tag{A.8}$$

e

$$2q > n-1. \tag{A.9}$$

Então, para cada $\delta > 0$, existe uma constante $C = C(p,q,r,\gamma)$ tal que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n_+}\frac{\delta^p t^\gamma dxdt}{((\delta+t)^2+|x|^2)^q}\right)^{\frac{1}{r}} = C\delta^{\frac{p+\gamma-2q+n}{r}}. \tag{A.10}$$

Demonstração. Também obtemos procedendo de maneira completamente análoga ao Lema A.1, obtemos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n_+}\frac{\delta^p t^\gamma dxdt}{((\delta+t)^2+|x|^2)^q}\right)^{\frac{1}{r}} = \delta^{\frac{p+\gamma-2q+n}{r}}\left(\int_{\mathbb{R}^n_+}\frac{s^\gamma dzds}{(1+s)^{2q-\gamma-1}(1+|z|^2)^q}\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Como o integrando é um produto de funções de variáveis distintas, podemos reexpressar a integral como sendo

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^n_+}\frac{\delta^p t^\gamma dxdt}{((\delta+t)^2+|x|^2)^q}\right)^{\frac{1}{r}} &= \delta^{\frac{p+\gamma-2q+n}{r}}\left(\int_0^{+\infty}\frac{s^\gamma ds}{(1+s)^{2q-\gamma-1}}\right)^{\frac{1}{r}} \\ &\times\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\frac{dz}{(1+|z|^2)^q}\right)^{\frac{1}{r}},\end{aligned} \tag{A.11}$$

em que, fazendo a mudança de variável $\tau = s^{\frac{1}{2}}$, obtemos o elemento de volume e que $d\tau = \frac{1}{2}s^{\frac{-1}{2}}ds$,

$$\begin{aligned}\left(\int_0^{+\infty}\frac{s^\gamma ds}{(1+s)^{2q-\gamma-1}}\right)^{\frac{1}{r}} &= \left(\int_0^{\infty}\frac{\tau^{2\gamma}2\tau d\tau}{(1+\tau^2)^{2q-\gamma-1}}\right)^{\frac{1}{r}} \\ &= 2^{\frac{1}{r}}\left(\int_0^{+\infty}\frac{\tau^{2\gamma+1}d\tau}{(1+\tau^2)^{2q-\gamma-1}}\right)^{\frac{1}{r}} \\ &= 2^{\frac{1}{r}}\left(\frac{\Gamma(\gamma+1)\Gamma(2q-2\gamma-2)}{2\Gamma(2q-\gamma-1)}\right)^{\frac{1}{r}}\end{aligned} \tag{A.12}$$

por conta da Fórmula (A.1), e, pela Fórmula (A.2), temos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\frac{dz}{(1+|z|^2)^q}\right)^{\frac{1}{r}} = \left(\omega_{n-2}\int_0^{+\infty}\frac{r^{n-2}dr}{(1+r^2)^q}\right)^{\frac{1}{r}},$$

dem que usando (A.1), temos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\frac{dz}{(1+|z|^2)^q}\right)^{\frac{1}{r}} = \left(\frac{\omega_{n-2}\Gamma(\frac{n-1}{2})\Gamma(\frac{2q-n+1}{2})}{2\Gamma(q)}\right)^{\frac{1}{r}}. \tag{A.13}$$

Portanto, usando (A.12) e (A.13) em (A.11), concluímos que, de fato, existe C tal que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n_+}\frac{\delta^p t^\gamma dxdt}{((\delta+t)^2+|x|^2)^q}\right)^{\frac{1}{r}} = C\delta^{\frac{p+\gamma-2q+n}{r}}. \tag{A.14}$$

Assim concluímos a demonstração. □

A.2 Integral da função do tipo bolha no bordo da variedade

Lema A.3. Sejam δ, p, q, r, γ constantes satisfazendo

$$2q - \gamma > n - 1. \tag{A.15}$$

Então, para cada $\delta > 0$, existe uma constante positiva $C = C(p, q, r, \gamma)$ tal que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\delta^p |x|^\gamma dx}{(\delta^2 + |x|^2)^q} \right)^{\frac{1}{r}} = C\delta^{\frac{p+\gamma-2q+n-1}{r}}. \tag{A.16}$$

Demonstração. Procedendo como nos lema anterior, obtemos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\delta^p |x|^\gamma dx}{(\delta^2 + |x|^2)^q} \right)^{\frac{1}{r}} = \delta^{\frac{p+\gamma-2q}{r}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{|x/\delta|^\gamma dx}{(1 + |x/\delta|^2)^q} \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Fazendo a mudança de variável $z = x/\delta$, obtemos o elemento de volume $dz = dx/\delta^{n-1}$, logo

$$\begin{aligned} \delta^{\frac{p+\gamma-2q}{r}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{|z|^\gamma \delta^{n-1} dz}{(1 + |z|^2)^q} \right)^{\frac{1}{r}} &= \delta^{\frac{p-2q+\gamma+n-1}{r}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{|z|^\gamma dz}{(1 + |z|^2)^q} \right)^{\frac{1}{r}} \\ &= C\delta^{\frac{p-2q+\gamma+n-1}{r}}. \end{aligned}$$

Assim, concluímos a demonstração. $\square$

A.3 Identidades Auxiliares

Proposição A.4. Se U é solução de (2.12), então são válidas as seguintes identidades:

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} t|\nabla U|^2 dzdt = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} U^2(z, 0) dz \tag{A.17}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} t|\nabla U|^2 dzdt = 2 \int_{\mathbb{R}^n_+} t \left| \frac{\partial U}{\partial t} \right|^2 dzdt \tag{A.18}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} t \sum_{i=1}^{n-1} \left| \frac{\partial U}{\partial z_i} \right|^2 dzdt = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} U^2(z, 0) dz. \tag{A.19}$$

Demonstração. Denotemos primeiramente $\eta = (z, t) \in \mathbb{R}^n_+$, em que $z \in \mathbb{R}^{n-1}$ e $t \in \mathbb{R}_+$. Seja U uma solução de (2.12). Note que

$$\eta_n |\nabla U|^2 = \nabla(\eta_n U)\nabla U - U \frac{\partial U}{\partial \eta_n},$$

em que $\eta_n(z,t) = t$. Logo, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} \eta_n |\nabla U|^2 d\eta = \int_{\mathbb{R}^n_+} \nabla(\eta_n U)\nabla U d\eta - \int_{\mathbb{R}^n_+} U \frac{\partial U}{\partial \eta_n} d\eta.$$

Pela Fórmula de Green, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} \nabla(\eta_n U)\nabla U d\eta = \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} \frac{\partial U}{\partial \nu}(z,0)\eta_n(z,0)U(z,0)dz - \int_{\mathbb{R}^n_+} \eta_n U \Delta U d\eta,$$

em que $\int_{\partial\mathbb{R}^n_+} \frac{\partial U}{\partial \nu}(z,0)\eta_n(z,0)U(z,0)dz = 0$, pois $\eta_n \equiv 0$ em $\partial\mathbb{R}^n_+$ e $\int_{\mathbb{R}^n_+} \eta_n U \Delta U d\eta = 0$, pois $\Delta U = 0$. Logo, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} \eta_n |\nabla U|^2 d\eta = -\int_{\mathbb{R}^n_+} U \frac{\partial U}{\partial \eta_n} d\eta.$$

Mas como vale $-U\frac{\partial U}{\partial \eta_n} = -\frac{1}{2}\frac{\partial [U^2]}{\partial \eta_n}$, então

$$-\int_{\mathbb{R}^n_+} U \frac{\partial U}{\partial \eta_n} d\eta = -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{\partial [U^2]}{\partial \eta_n} d\eta.$$

Usando a Fórmula de Integração por Partes, temos

$$-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{\partial [U^2]}{\partial \eta_n} d\eta = \frac{1}{2}\int_{\partial\mathbb{R}^n_+} U^2(z,0)dz.$$

Para o item (ii), usando o fato de que $\Delta U = 0$, temos pela Fórmula de Green que

$$\begin{aligned} 0 &= -\int_{\mathbb{R}^n_+} \Delta U \eta_n^2 \frac{\partial U}{\partial \eta_n} d\eta \\ &= \int_{\mathbb{R}^n_+} \nabla U \nabla \left(\eta_n^2 \frac{\partial U}{\partial \eta_n}\right) d\eta - \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} \frac{\partial U}{\partial \nu}(z,0)\eta_n^2(z,0)\frac{\partial U}{\partial \eta_n}(z,0)dz. \end{aligned}$$

Mas como $\eta_n \equiv 0$ em $\partial\mathbb{R}^n_+$, então

$$\begin{aligned} 0 &\equiv \int_{\mathbb{R}^n_+} \nabla U \nabla \left(\eta_n^2 \frac{\partial U}{\partial \eta_n}\right) d\eta \\ &= \int_{\mathbb{R}^n_+} \eta_n^2 \nabla U \nabla \left(\frac{\partial U}{\partial \eta_n}\right) d\eta + \int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{\partial U}{\partial \eta_n} \nabla U \nabla(\eta_n^2) d\eta \\ &= \int_{\mathbb{R}^n_+} \eta_n^2 \nabla U \nabla \left(\frac{\partial U}{\partial \eta_n}\right) d\eta + 2\int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{\partial U}{\partial \eta_n} \eta_n \nabla U \nabla \eta_n d\eta \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{l=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n_+} \eta_n^2 \frac{\partial U}{\partial \eta_l} \frac{\partial^2 U}{\partial \eta_l \partial \eta_n} d\eta + 2 \int_{\mathbb{R}^n_+} \eta_n \left| \frac{\partial U}{\partial \eta_n} \right|^2 d\eta \\
&= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n_+} \eta_n^2 \frac{\partial}{\partial \eta_n} \left(\frac{\partial U}{\partial \eta_l} \right)^2 d\eta \\
&= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n_+} \eta_n^2 \frac{\partial}{\partial \eta_n} (|\nabla U|^2) d\eta + 2 \int_{\mathbb{R}^n_+} \eta_n \left| \frac{\partial U}{\partial \eta_n} \right|^2 d\eta.
\end{aligned}
\tag{A.20}
$$

Usando o Teorema da divergência de Gauss, obtemos

$$
\begin{aligned}
0 &= -\frac{1}{2} \int_{\partial \mathbb{R}^n_+} \eta_n^2(z,0) |\nabla U(z,0)|^2 dz \\
&= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{\partial}{\partial \eta_n} (\eta_n^2 |\nabla U|^2) d\eta \\
&= \int_{\mathbb{R}^n_+} \eta_n |\nabla U|^2 d\eta + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n_+} \eta_n^2 \frac{\partial}{\partial \eta_n} (|\nabla U|^2) d\eta.
\end{aligned}
$$

Isto é,

$$
\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n_+} \eta_n^2 \frac{\partial}{\partial \eta_n} (|\nabla U|^2) d\eta = - \int_{\mathbb{R}^n_+} \eta_n |\nabla U|^2 d\eta. \tag{A.21}
$$

Substituindo (A.21) em (A.20), obtemos

$$
0 = 2 \int_{\mathbb{R}^n_+} \eta_n \left| \frac{\partial U}{\partial t} \right|^2 d\eta - \int_{\mathbb{R}^n_+} \eta_n |\nabla U|^2 d\eta.
$$

Ou seja,

$$
\int_{\mathbb{R}^n_+} t |\nabla U|^2 dz dt = 2 \int_{\mathbb{R}^n_+} t \left| \frac{\partial U}{\partial t} \right|^2 dz dt.
$$

Para (iii), temos

$$
\int_{\mathbb{R}^n_+} \eta_n |\nabla U|^2 d\eta = \int_{\mathbb{R}^n_+} \eta_n \sum_{i=1}^{n-1} \left| \frac{\partial U}{\partial \eta_i} \right| d\eta + \int_{\mathbb{R}^n_+} \eta_n \left| \frac{\partial U}{\partial \eta_n} \right|^2 d\eta.
$$

E por (ii), segue que

$$
\int_{\mathbb{R}^n_+} \eta_n |\nabla U|^2 d\eta = \int_{\mathbb{R}^n_+} \eta_n \sum_{i=1}^{n-1} \left| \frac{\partial U}{\partial \eta_i} \right|^2 d\eta + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n_+} \eta_n |\nabla U|^2 d\eta.
$$

Logo,

$$
\int_{\mathbb{R}^n_+} \eta_n \sum_{i=1}^{n-1} \left| \frac{\partial U}{\partial \eta_i} \right|^2 d\eta = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n_+} \eta_n |\nabla U|^2 d\eta.
$$

Usando (i), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} \eta_n \sum_{i=1}^{n-1} \left| \frac{\partial U}{\partial \eta_i} \right|^2 d\eta = \frac{1}{4} \int_{\partial \mathbb{R}^n_+} U^2(z,0) dz,$$

concluindo a prova. □

Referências Bibliográficas

[1] Ahmedou, M., *A Riemannian mapping type theorem in higher dimensions. Part I: the conformally flat case with umbilic boundary*, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., **54** (2003), 1-18.

[2] Almaraz, S., *An existence theorem of conformal scalar-flat metrics on manifolds with boundary*, Pacific J. Math. **248** (2010), no. 1, 1-22.

[3] Almaraz, S., *A compactness theorem for scalar-flat metrics on manifolds with boundary*, Calc. Var. Partial Differ. Equ. **41** (2011), 341-386.

[4] Almaraz, S., de Queiroz, O. S., Wang, S., *A compactness theorem for scalar-flat metrics on 3-manifolds with boundary*, J. Funct. Anal. **277** (2019), 2092-2116.

[5] Aubin, T., *Equations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire*, J. Math. Pures Appl. (9) **55**(3) (1976), 269-296.

[6] Bray, H. L., Neves, A., *Classification of prime 3-manifolds with σ-invariant greater than* $\mathbb{RP}^3$, Annals of Math., **159** (2004), 407-424.

[7] Brendle, S., *Blow-up phenomena for the Yamabe equation*, J. Amer. Math. Soc., **21** (2008), 951-979.

[8] Brendle, S., Chen, S., *An existence theorem for the Yamabe problem on manifolds with boundary* J. Eur. Math. Soc. **16** (2014), no. 5, 991-1016.

[9] Brendle, S., Marques, F. C., *Blow-up phenomena for the Yamabe equation* II, J. Differential Geom., **81** (2009), 225-250.

[10] Brezis, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations* Springer, 2010.

[11] Chen, S., *Conformal deformation to scalar flat metrics with constant mean curvature on the boundary in higher dimensions*, preprint, http://arxiv.org/abs/0912.1302, 2010.

[12] Chen, X., Ruan, Y., Sun, L., *The Han-Li conjecture in constant scalar curvature and constant boundary mean curvature problem on compact manifolds*, Adv. Math. **358** (2019).

[13] Chen, X., Sun, L., *Existence of conformal metrics with constant scalar curvature and constant boundary mean curvature on compact manifolds*, Commun. Contemp. Math. **21** (2019).

[14] Cherrier, P., *Problemes de Neumann non lineaires sur les varietes riemanniennes.* J. Funct. Anal. **57** (1984), no. 2, 154-206.

[15] de Souza, M., *Compactness for a class of Yamabe-type problems on manifolds with boundary*, J. Differential Equations **269** (2020), 3119-3159.

[16] do Carmo, M. P., *Riemannian Geometry*, Birkhäuser, 1992.

[17] Nittka, R., *Regularity of solutions of linear second order elliptic and parabolic boundary value problems on Lipschitz domains,* J. Differential Equations **251** (2011), no. 4-5, 860-880.

[18] Escobar, J. F., *Conformal deformation of a Riemannian metric to a scalar flat metric with constant mean curvature on the boundary.* Ann. of Math. (2) **136** (1992), no. 1, 1-50.

[19] Escobar, J. F., *The Yamabe problem on manifolds with boundary*, J. Differential Geom. **35** (1992), 21-84.

[20] Escobar, J. F., *Conformal metrics with prescribed mean curvature on the boundary*, Calc. Var. Partial Differ. Equ. **4** (1996) 559-592.

[21] Esposito, P., Pistoia, A., Vetois, J., *The effect of linear perturbations on the Yamabe problem*, Math. Ann. **358** (2014), no. 1-2, 511-560.

[22] Disconzi, M. M., Khuri, M., *Compactness and non-compactness for the Yamabe problem on manifolds with boundary*, J. Reine Angew. Math. **724** (2017), 145-201.

[23] Druet, O., *From one bubble to several bubbles: the low-dimensional case.* Journal Differential Geometry, **63(3)** (2003), 399-473.

[24] Druet, O., *Compactness for Yamabe metrics in low dimensions.* Int. Math. Res.Not. **23** (2004), 1143-1191.

[25] Druet, O., Hebey, E., *Blow-up examples for second order elliptic PDEs of critical Sobolev growth,* Trans. Am. Math. Soc. **357** (2005), 1915-1929.

[26] Druet, O., Hebey, E., Robert, F., *Blow-up Theory for Elliptic PDEs in Riemannian Geometry,*, Princeton University Press, 2004.

[27] Evans, L. C., *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, 1997.

[28] Felli, V., Ahmedou, M., *Compactness results in conformal deformations of Riemannian metrics on manifolds with boundaries*, Math. Z. **244** (2003), 175-210.

[29] Ghimenti, M. G., Micheletti, A. M., Pistoia, A., *On Yamabe type problems on Riemannian manifolds with boundary*, Pac. J. Math. **284** (2016), 79-102.

[30] Han, Z. C., Li, Y. Y., *The Yamabe problem on manifolds with boundary: existence and compactness results*, Duke Math. J. **99** (1999), 489-542.

[31] Han, Z. C., Li, Y. Y., *The existence of conformal metrics with constant scalar curvature and constant boundary mean curvature*, Commun. Anal. Geom. **8** (2000) 809-869.

[32] Hebey, E., *Nonlinear analysis on manifolds: Sobolev spaces and inequalities*, Courant Lecture Notes in Mathematics, 1999.

[33] Hebey, E., Vaugon, H., *From best constants to critical functions,* Math. Z. **237** (2001), 737-767.

[34] M.A. Khuri, F.C. Marques, R.M. Schoen, *A compactness theorem for the Yamabe problem*, J. Differential Geom., **81** (2009), 143-196.

[35] Lee, J. M., *Introduction to Smooth Manifolds*, Springer, 2012.

[36] Li, Y. Y.; Zhu, M. *Sharp Sobolev Trace Inequalities on Riemannian Manifolds with Boundaries.* Communications on Pure and Applied Mathematics, **50** (1997), 449-487.

[37] Marques, F. C., *Existence results for the Yamabe problem on manifolds with boundary*, Indiana Univ. Math. J. **54** (2005), 1599-1620.

[38] Marques, F. C., *Conformal deformations to scalar-flat metrics with constant mean curvature on the boundary*, Comm. Anal. Geom. **15** (2007), no. 2, 381-405.

[39] Mayer, M., Ndiaye, C., *Proof of the remaining cases of the boundary Yamabe problem* , preprint, https://arxiv.org/abs/1505.06114, 2015.

[40] Mayer, M., Ndiaye, C., *Barycenter technique and the Riemann mapping problem of Cherrier-Escobar*, J. Differ. Geom. **107** (2017) 519-560.

[41] Schoen, R. M., *A report on some recent progress on nonlinear problems in geometry*, Surveys in Differential Geometry, Lehigh University, Bethlehem, PA, 1991, pp. 201-241.

[42] Schoen, R. M., *Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature*, J. Differ. Geom. **20** (2) (1984), 479-495.

[43] Schoen, R. M., *On the number of constant scalar curvature metrics in a conformal class.* in Differential Geometry: A Symposium in Honor of Manfredo Do Carmo, eds. H. B. Lawson and K. Tenenblat, Wiley, 1991, 311-320.

[44] Struwe, M., *Variational Methods*, Springer, 2007.

[45] Trudinger, N., *Remarks concerning the conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) **22** (1968), 265-274.

[46] Tu, L. W., *An Introduction to Manifolds*, Springer, 2010.

[47] Willem, M., *Minimax Theorems*, Birkhäuser, 1996.

[48] Yamabe, H., *On a deformation of Riemannian structures on compact manifolds.* Osaka Math. J. **12** (1960), 21-37.