



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Física
Programa de Pós-Graduação em Física

GRAVITAÇÃO INVARIANTE DE WEYL: TEORIA E APLICAÇÕES

MAURO PARNAIBA DUARTE

João Pessoa, 2025

MAURO PARNAIBA DUARTE

GRAVITAÇÃO INVARIANTE DE WEYL: TEORIA E
APLICAÇÕES

*Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física, do
Departamento de Física da Universidade Federal da Paraíba, como
requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Física, na
área de concentração: Gravitação e Cosmologia.*

Orientador: Prof. Dr. Carlos Augusto Romero Filho

2025

João Pessoa, PB

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

D812g Duarte, Mauro Parnaíba.

Gravitação Invariante de Weyl : teoria e aplicações
/ Mauro Parnaíba Duarte. - João Pessoa, 2025.
130 f. : il.

Orientação: Carlos Augusto Romero Filho.
Tese (Doutorado) - UFPB/CCEN.

1. Gravitação. 2. Ondas gravitacionais. 3. Teoria de Weyl. 4. Invariância de gauge. 5. Campo vetorial massivo. 6. Matéria escura. I. Romero Filho, Carlos Augusto. II. Título.

UFPB/BC


CDU 531.5(043)




Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Física

Ata da Sessão Pública da Defesa de tese de Doutorado do aluno
Mauro Parnaíba Duarte, candidato ao Título de Doutor em
Física na Área de Concentração Gravitação de Cosmologia.


Aos vinte e dois dias do mês de agosto do ano de dois mil e vinte e cinco, às 15h00, na sala virtual meet.google.com/suj-qmpe-vik, reuniram-se os membros da Banca Examinadora constituída para avaliar a tese de Doutorado, na área de Gravitação de Cosmologia, de **Mauro Parnaíba Duarte**. A banca foi composta pelos(as) professores(as) doutores(as): Carlos Augusto Romero Filho (PPGF/UFPB), orientador e presidente da banca examinadora, Valdir Barbosa Bezerra (PPGF/UFPB), Albert Petrov (PPGF/UFPB), Mario Novello (CBPF) e Eduardo Henrique Silva Bittencourt (UNIFEI). Dando início aos trabalhos, o Prof. Carlos Augusto Romero Filho comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a palavra para o candidato, para que o mesmo fizesse, oralmente, a exposição da pesquisa de tese intitulada “*Gravitação Invariante de Weyl: Teoria e Aplicações*”. Concluída a exposição, o candidato foi arguido pela Banca Examinadora, que emitiu o parecer “**aprovado**”. Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba expedir o respectivo diploma de Doutor em Física na forma da lei. E para constar, Ana Beatriz Cândido Vieira, Assistente em Administração, redigiu a presente ata que vai assinada pelos membros da Banca Examinadora. João Pessoa, Paraíba, **22 de agosto de 2025**.

Documento assinado digitalmente
 **CARLOS AUGUSTO ROMERO FILHO**
Data: 25/08/2025 13:31:06-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>


Prof. Dr. Carlos Augusto Romero Filho
Orientador - PPGF/UFPB

Documento assinado digitalmente
 **VALDIR BARBOSA BEZERRA**
Data: 25/08/2025 21:36:19-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>


Prof. Dr. Valdir Barbosa Bezerra
PPGF/UFPB

Documento assinado digitalmente
 **ALBERT PETROV**
Data: 28/08/2025 21:27:44-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Albert Petrov
PPGF/UFPB

Documento assinado digitalmente
 **MARIO NOVELLO**
Data: 03/09/2025 11:01:42-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Mario Novello
CBPF

Documento assinado digitalmente
 **EDUARDO HENRIQUE SILVA BITTENCOURT**
Data: 27/08/2025 11:00:18-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Eduardo Henrique Silva Bittencourt
UNIFEI

Aos meus pais, Adelaide Quaresma Parnaíba e Vicente Quaresma Duarte,
com amor.

AGRADECIMENTOS

“Vou instruir você, indicando o caminho a seguir. Com os olhos sobre você, eu serei o seu conselheiro.” (Salmos 32:8)

Neste versículo, encontrei a certeza do cuidado de Deus ao longo da minha jornada, que, mesmo nas incertezas do caminho, me instruiu e conduziu. Desse modo, agradeço primeiramente ao meu Deus, que tem me sustentado com graça, sabedoria e direção, especialmente nos momentos mais desafiadores. Certamente, nenhuma palavra poderá expressar tamanha gratidão que sinto.

À minha família, em especial ao meu pai, Vicente, e à minha mãe, Adelaide, sou profundamente grato pelo apoio incondicional e pelas incontáveis palavras de encorajamento que me impulsionaram a seguir em frente.

À Liviane Farias, minha amada, expresso minha gratidão mais afetuosa. Seu amor e cuidado foram meu refúgio. Obrigado por me fazer voltar a sonhar e por me trazer paz e inspiração.

Ao Professor Dr. Carlos Augusto Romero Filho, minha sincera gratidão por acreditar em meu potencial e por sua generosa dedicação ao longo de todo o desenvolvimento deste trabalho.

Ao Professor Dr. Fábio Dahia, que, embora não oficialmente coorientador, atuou com grande generosidade. Sou profundamente grato pelas experiências compartilhadas, pelas observações precisas e por todo o apoio prestado.

À Dra. Thais Sanomiya, sou grato pela amizade e pelos preciosos conhecimentos compartilhados.

Aos meus amigos, Alisson de Lima, Ewerton Jeferson, Jesriel Matias, Jabes de Almeida, Willames Magalhães, Fabiano Oliveira, Emanuel Wallison e Jefferson Luan, agradeço pela amizade e pelos momentos felizes compartilhados.

Agradeço aos irmãos da Igreja ADCR-Castelo Branco, pelos momentos de imensurável júbilo e refrigério espiritual, que tantas vezes me fizeram estar mais próximo de Deus, ao ouvir e meditar na sua linda, verdadeira e poderosa Palavra.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Física da UFPB, em especial aos Professores Dr. Jorge Gabriel, Dr. Sérgio Azevedo, Dr. Jansen Formiga e Dr. Albert Petrov, agradeço pelas contribuições significativas à minha formação.

Por fim, agradeço à FAPESQ pelo apoio institucional e financeiro, por meio do projeto nº 07/2021.

*“ Uma é a glória do sol, outra, a glória da lua, e outra, a das estrelas;
porque até entre estrela e estrela há diferenças de esplendor.”*
(1 Coríntios 15:41)

RESUMO

A presente tese é dedicada ao estudo da Teoria Gravitacional Invariante de Weyl, uma modificação e reinterpretação da teoria original proposta por Hermann Weyl. Inicialmente, apresentamos de forma detalhada a construção da teoria de Weyl. Em seguida, desenvolvemos uma formulação invariante de gauge para a teoria unificada de Weyl. Essa formulação consiste em uma proposta que torna tanto o tensor métrico quanto o campo de Weyl grandezas invariantes sob transformações de gauge. Com isso, é possível construir uma definição de tempo-próprio invariante de gauge, além de possibilitar descrever o acoplamento dos campos geométricos com a matéria. Dessa forma, obtemos uma nova teoria alternativa da gravitação. Um aspecto importante enfatizado na tese é que a 1-forma geométrica de Weyl pode ser formalmente interpretada como um campo vetorial massivo, o que nos remete à teoria proposta em 1936 pelo físico romeno Alexandru Proca, que pretendia descrever a interação e a dinâmica de bósons massivos de spin-1. Como aplicação das equações de campo da teoria invariante de Weyl, investigamos uma solução no regime de campo fraco. Além disso, estudamos em detalhes a propagação de ondas gravitacionais nessa nova teoria de gravidade modificada. Por fim, propomos uma abordagem alternativa para o problema da origem da matéria escura. Mostramos que, para valores apropriados do parâmetro livre do modelo adotado, o campo de Weyl, durante a era dominada pela matéria, apresenta o comportamento esperado para um candidato à matéria escura.

Palavras-chave: Teoria de Weyl, Invariância de gauge, Campo vetorial massivo, Ondas gravitacionais, Matéria escura.

ABSTRACT

The present thesis is dedicated to the study of the Weyl Invariant Gravitational Theory, a modification and reinterpretation of the original theory proposed by Hermann Weyl. Initially, we present in detail the construction of Weyl's theory. Next, we develop a gauge-invariant formulation for the unified theory of Weyl. This formulation consists of a proposal that renders both the metric tensor and the Weyl field invariant quantities under gauge transformations. With this, it is possible to construct a gauge-invariant proper time definition, in addition to allowing the description of the coupling between geometric fields and matter. In this way, we obtain a new alternative theory of gravitation. An important aspect emphasized in the thesis is that the Weyl geometric 1-form can be formally interpreted as a massive vector field, which refers us to the theory proposed in 1936 by the Romanian physicist Alexandru Proca, who aimed to describe the interaction and dynamics of massive spin-1 bosons. As an application of the field equations of the Weyl invariant theory, we investigate a solution in the weak-field regime. Furthermore, we study in detail the propagation of gravitational waves in this new modified theory of gravity. Finally, we propose an alternative approach to the problem of the origin of dark matter. We show that, for appropriate values of the free parameter of the adopted model, the Weyl field, during the matter-dominated era, exhibits the expected behavior for a dark matter candidate.

Keywords: Weyl theory, Gauge invariance, Massive vector field, Gravitational waves, Dark matter.

Sumário

Resumo	iv
Abstract	v
Lista de Figuras	ix
Lista de Abreviações e Siglas	x
Introdução	1
1 Teoria unificada de Weyl	7
1.1 Geometria de Weyl	8
1.2 Transformações de calibre	12
1.2.1 Invariantes na geometria de Weyl	14
1.3 Geometria de Weyl integrável	16
1.4 Geometria de Weyl não-integrável	17
1.4.1 Propriedades do tensor $F_{\mu\nu}$	18

1.5	O eletromagnetismo na geometria de Weyl	19
1.5.1	Equações de campo no gauge natural	24
1.5.2	Gauge de Lorentz	28
1.5.3	Equações de campo em um gauge qualquer	28
1.6	O segundo efeito do relógio	33
2	Teoria Gravitacional Invariante de Weyl	36
2.1	O tempo próprio na teoria de Weyl	37
2.2	Tempo próprio invariante e o acoplamento com a matéria	39
2.2.1	Equações de Campo completas	42
2.2.2	A geometrização do campo de Proca	43
2.3	As geodésicas de Weyl	45
2.3.1	Condições de Helmholtz na geometria de Weyl	46
2.4	Equação de conservação do tensor momento-energia	49
3	Solução das equações de campo da Teoria Gravitacional Invariante de Weyl	51
3.1	Solução com simetria esférica	53
3.2	Solução aproximada no regime de campo fraco	57
4	Ondas gravitacionais na Teoria Gravitacional Invariante de Weyl	64
4.1	Equações de campo linearizadas	64
4.1.1	A equação linearizada do campo métrico	67
4.1.2	A equação linearizada do campo de Weyl	68
4.2	Solução da equação do campo de Weyl	69
4.2.1	Polarização das ondas de Weyl	70
4.3	Solução da equação do campo métrico no vácuo	72

5 O campo geométrico de Weyl-Proca como um candidato à matéria escura	77
5.1 O campo de Weyl no contexto cosmológico	78
5.2 Solução particular: o condensado de Bose-Einstein	79
5.2.1 A condição WKB	81
5.3 O tensor eletromagnético para a solução particular	84
5.4 O tensor momento-energia para a solução particular	86
5.4.1 A densidade de energia	88
5.4.2 A pressão isotrópica	89
5.4.3 O fluxo de energia	91
5.4.4 O tensor de estresse e a pressão anisotrópica	91
5.5 Massa e abundância das partículas de Weyl-Proca	98
Conclusões	100
Lista de Publicações	103
Referências Bibliográficas	103

Lista de Figuras

1	"A matéria (a grande pedra) diz ao espaço-tempo como se curvar; o espaço-tempo diz à matéria (a pedrinha) como se mover"(tradução livre). Fonte: WHEELER, J. A.; FORD, K. [6], 1998, p. 272.	2
1.1	Transporte paralelo de um vetor V ao longo de uma curva fechada. Fonte: SANOMIYA, T. [49], 2020, p. 67.	8
1.2	O segundo efeito do relógio. Fonte: Adaptação de LOBO, I.P.; ROMERO, C. [67], 2018, p. 308.	35

Lista de Abreviações e Siglas

CDM Cold Dark Matter

CMB Cosmic Microwave Background

FRW Sigla associada aos autores Friedmann, Robertson e Walker

LIGO Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory

WIMPs Weakly Interacting Massive Particles

WKB Sigla associada aos autores Wentzel, Kramers e Brillouin

Introdução

A teoria da Relatividade Geral, formulada por Albert Einstein em 1915, é uma das teorias de maior sucesso na física moderna. Nessa teoria, Einstein conseguiu descrever a interação gravitacional sob uma perspectiva inteiramente geométrica, associando o potencial gravitacional ao tensor métrico $g_{\alpha\beta}$. A ideia de que a gravidade é uma manifestação da modificação da geometria do espaço-tempo, devido à presença de matéria e energia, permitiu substituir o conceito newtoniano de uma força gravitacional atuando sobre uma partícula livre por uma descrição em que a trajetória dessa partícula é uma geodésica em uma geometria riemanniana [1,2,4].

Uma célebre citação que sintetiza de maneira brilhante a relação entre matéria, energia e geometria é a do físico americano John A. Wheeler:

O espaço-tempo diz à matéria como se mover, e a matéria diz ao espaço-tempo como se curvar. – WHEELER, J. A. [5]

Essa ideia é ilustrada na Figura 1, em um desenho feito pelo próprio Wheeler. Vale notar que, nessa afirmação, obviamente "matéria" engloba a energia, já que, como sabemos da relatividade especial, massa e energia são equivalentes. Assim, tanto massa quanto energia devem causar curvatura do espaço-tempo [7].

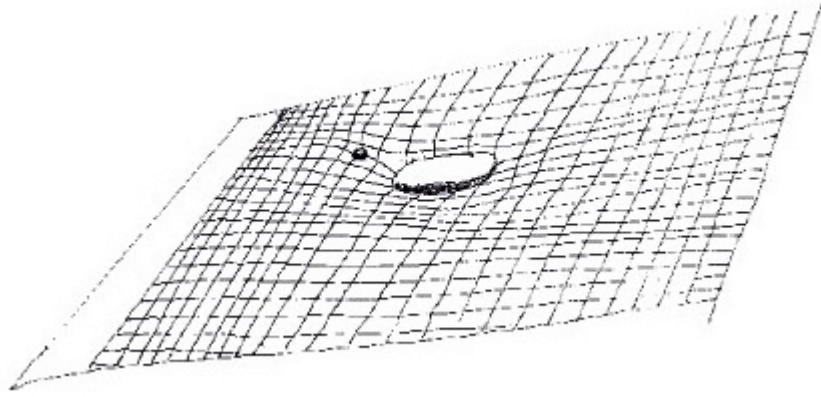


Figura 1: "A matéria (a grande pedra) diz ao espaço-tempo como se curvar; o espaço-tempo diz à matéria (a pedrinha) como se mover" (tradução livre). Fonte: WHEELER, J. A.; FORD, K. [6], 1998, p. 272.

A dinâmica dessa interação é determinada por um sistema de equações de campo, conhecidas como equações de Einstein, que estabelecem uma relação entre a curvatura, representada pelo tensor de Ricci $R_{\alpha\beta}$, e o conteúdo material e energético, descrito pelo tensor momento-energia $T_{\alpha\beta}$, na forma:

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} = -\kappa T_{\alpha\beta}. \quad (1)$$

onde $\kappa = 8\pi G/c^4$ é uma constante de acoplamento gravitacional.

Isso só foi possível graças ao *princípio da equivalência*, introduzido por Einstein, segundo o qual os efeitos de um campo gravitacional são localmente equivalentes aos efeitos produzidos por um referencial uniformemente acelerado. Essa ideia levou à generalização da Relatividade Especial, que, mais tarde, culminou na formulação da teoria da gravitação de Einstein, a famosa Relatividade Geral. Sobre esse princípio, em uma palestra realizada na Universidade de Kyoto, no Japão, em 1922, Einstein referiu-se a essa ideia como sendo - "a ideia mais feliz de minha vida" [1]. Esta hipótese levou à generalização do princípio da relatividade, passando a englobar também a classe de referenciais não inerciais. A formulação matemática correspondente a isso é o que se costuma chamar de *princípio da covariância geral*, que pode ser entendida como significando que as equações da Física devem ter uma forma tensorial, o que garante a sua invariância sob qualquer transformação de coordenadas

[9].

A Teoria da Relatividade Geral de Einstein tem sido extraordinariamente bem-sucedida em suas previsões e testes observacionais. As primeiras confirmações vieram com a explicação do deslocamento anômalo do periélio da órbita de Mercúrio e, em seguida, com a deflexão da luz por corpos massivos, observada por Arthur Eddington e colaboradores [10] durante o eclipse solar de 1919 em expedições realizadas em Sobral, no Ceará, e na ilha do Príncipe, na costa da África [1]. Outros testes confirmaram previsões adicionais da Relatividade Geral, como o fenômeno das lentes gravitacionais, o desvio gravitacional para o vermelho e a dilatação temporal gravitacional, observada em experimentos com relógios atômicos [11–17]. Além disso, uma das previsões mais formidáveis da teoria da Relatividade Geral, também confirmada, é a existência de buracos negros. Sua comprovação marcante se deu em 2019 com a divulgação da imagem capturada pela colaboração Event Horizon Telescope do buraco negro supermassivo do centro da galáxia elíptica conhecida como M87 [18]. Para maiores detalhes sobre os testes da Relatividade Geral, veja especificamente [13, 15].

Outra previsão importante da Relatividade Geral é a existência de ondas gravitacionais. Einstein mostrou que as equações do campo gravitacional podem ser linearizadas quando admitimos pequenas perturbações da métrica de Minkowski, resultando em ondas que se propagam à velocidade da luz. A primeira detecção direta dessas ondas ocorreu em 2015, quando o observatório LIGO registrou um sinal de ondas gravitacionais produzidas pela fusão de dois buracos negros, evento denominado GW150914 [19]. Posteriormente, em 2017, a rede de detectores LIGO-Virgo observou o evento denominado GW170817 [20], consistente com a fusão de duas estrelas de nêutrons. Observações quase simultâneas da emissão de raios gama (GRB 170817A) foram obtidas por telescópios ópticos apontados na mesma direção do evento GW170817 [21]. Essa coincidência quase exata no tempo de chegada das ondas gravitacionais e eletromagnéticas foi interpretada como evidência de que a velocidade de propagação das ondas gravitacionais é a mesma que a velocidade da luz. Além de impulsionar o estudo dos multimessageiros.

Ao estudar a dinâmica do Universo em larga escala, utilizando como base conceitual

¹Ressaltamos aqui a importância da expedição realizada em Sobral para essa comprovação, fato que marcou a história da ciência e de todos os físicos brasileiros.

a teoria da Relatividade Geral e o chamado *princípio cosmológico*². Einstein deu início ao estudo da cosmologia moderna [4]. O primeiro modelo cosmológico, proposto por ele, descrevia um Universo estático. Esse modelo o levou a modificar suas equações de campo, introduzindo uma constante fundamental representada pela letra grega Λ , a qual seria responsável por um efeito repulsivo que equilibraria a gravidade, mantendo o Universo estático [22-25]. Assim, as equações de campo passaram a ser escritas como:

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta} = -\kappa T_{\alpha\beta}. \quad (2)$$

A constante Λ , denominada *constante cosmológica*, possui dimensões de comprimento⁻². O modelo cosmológico proposto por Einstein estava em conformidade com as ideias da época. Por outro lado, era instável sob pequenas perturbações [2]. Posteriormente, Hubble observou, em 1929, que o Universo encontra-se em expansão [26], em concordância com os modelos cosmológicos propostos por Friedmann e Eddington-Lemaître [27-29].

Atualmente, o modelo cosmológico padrão, conhecido como Λ CDM, pressupõe a existência de duas componentes exóticas que preenchem o Universo, denominadas de energia escura e matéria escura. Segundo observações recentes [30], essas componentes exóticas correspondem aproximadamente a 95,1% da densidade total de energia do Universo, com cerca de 68,6% composta por energia escura e 26,5% por matéria escura [32]. Assim, apenas 4,9% é atribuído à matéria bariônica que conhecemos.

O modelo mais simples para explicar a energia escura consiste na constante cosmológica Λ , que atua como um fluido de pressão negativa responsável pela expansão acelerada do Universo [33]. Por outro lado, o problema desse modelo está na discrepância entre o valor estimado dessa constante pela física de partículas e seu valor observado, que corresponde a uma diferença de aproximadamente 120 ordens de grandeza [32,34,35].

Já a matéria escura praticamente não interage com a radiação eletromagnética, sendo sua existência inferida apenas a partir dos efeitos gravitacionais que causa, os quais não podem ser explicados pela relatividade geral, tendo em vista que as equações de Einstein

²Esse princípio postula a homogeneidade e isotopia do Universo em larga escala [139].

envolvem o tensor momento-energia associado à matéria bariônica comum. Muitas tentativas de explicar a matéria escura surgiram nas últimas duas décadas, entre elas, podemos citar WIMPs, buracos negros primordiais e áxions. Em particular, alguns físicos têm argumentado a favor de modificações da teoria padrão de Einstein [37–39, 43].

Nesta perspectiva, destacamos a Teoria Invariante de Weyl [9, 44, 45] como uma proposta alternativa da gravitação. Essa teoria consiste em uma modificação e reinterpretação da teoria original de Weyl, seguindo estritamente o Princípio de Invariância de Gauge.

Em 1918, o matemático alemão Hermann Weyl propôs uma modificação da geometria do espaço-tempo com o objetivo de unificar o eletromagnetismo e a gravitação em uma única estrutura geométrica. Essa modificação permitia a variação do comprimento de vetores durante o transporte paralelo e uma possível maneira de geometrização do campo eletromagnético. Weyl acrescentou um grau de liberdade a mais à geometria riemanniana, dotando o espaço-tempo de uma nova grandeza geométrica além do tensor métrico. Essa grandeza consiste em um campo de 1-forma, diretamente relacionado com a lei de transporte paralelo de vetores. Por outro lado, Einstein identificou uma consequência indesejável dessa proposta, associada à não invariância do comprimento, concluindo que a teoria de Weyl estava em contradição com os dados experimentais da época. Essa consequência ficou conhecida como “*o segundo efeito do relógio*”³ [46].

Revisitando a teoria de Weyl, apresentamos uma proposta para tornar tanto o tensor métrico quanto o campo de Weyl grandezas invariantes em relação a transformações de gauge [9, 44, 45], desenvolvendo, assim, uma formulação invariante de gauge da teoria unificada de Weyl. Essa formulação nos permite construir uma definição de tempo-próprio invariante de gauge, resolvendo o problema do segundo efeito do relógio. Além disso, ela possibilita a descrição do acoplamento dos campos geométricos com a matéria. É importante ressaltar que, de acordo com essa nova formulação, a 1-forma geométrica de Weyl pode ser formalmente interpretada como um campo vetorial massivo, cuja dinâmica é dada pelas chamadas *equações de Proca* [47].

Este trabalho tem como principal objetivo desenvolver uma discussão aprofundada

³Sabemos hoje que, na verdade, a existência desse efeito não pode ser garantida dentro do limite de precisão dos instrumentos de medida atuais [67].

sobre a Teoria Invariante de Weyl, apresentando-a como uma nova teoria alternativa à relatividade geral.

A presente tese está organizada em cinco capítulos. No Capítulo 1 apresentamos de forma detalhada a maneira como a teoria e a geometria de Weyl foram construídas. O Capítulo 2 é dedicado ao desenvolvimento da Teoria Invariante de Weyl, no qual propomos uma definição para o tempo-próprio invariante de gauge e descrevemos as equações de campo completas, considerando o acoplamento com a matéria. Além disso, mostramos que a 1-forma geométrica de Weyl pode ser formalmente interpretada como um campo vetorial massivo. No Capítulo 3, apresentamos uma possível solução das equações de campo no regime de campo fraco, considerando uma distribuição estática e esfericamente simétrica na ausência de matéria. O Capítulo 4 trata da propagação de ondas gravitacionais no contexto da Teoria Gravitacional Invariante de Weyl, no qual derivamos uma versão linearizada das equações de campo. No Capítulo 5, propomos uma abordagem alternativa para investigar o problema da matéria escura, apresentando o campo geométrico de Weyl como um potencial candidato. Por fim, nas conclusões, esboçamos os principais resultados obtidos.

CAPÍTULO 1

Teoria unificada de Weyl

Na teoria da Relatividade Geral, Einstein formulou uma descrição geométrica da gravitação, na qual o espaço-tempo é descrito por uma geometria riemanniana, caracterizada por um tensor métrico $g_{\mu\nu}$ [52, 53]. Uma característica importante dessa geometria é que, ao se transportar paralelamente um vetor ao longo de uma curva fechada, sua direção é alterada, enquanto seu comprimento é preservado. Isso, por outro lado, difere do que ocorre na geometria euclidiana, onde tanto a direção quanto a norma do vetor são preservadas sob transporte paralelo.

Pouco tempo após a formulação da Relatividade Geral, o matemático alemão Hermann Weyl propôs uma teoria mais geral, com o objetivo de unificar a gravitação e o eletromagnetismo em uma mesma estrutura geométrica [48]. Essa nova estrutura concebida por Weyl se constitui numa generalização da geometria riemanniana, acrescentando um novo ente geométrico, isto é, um campo de 1-formas σ , cujas propriedades são muito semelhantes às do quadripotencial eletromagnético [9].

1.1 Geometria de Weyl

A geometria de Weyl pressupõe uma generalização do conceito de transporte paralelo de vetores. Nesta estrutura, ao realizarmos o transporte paralelo de um vetor ao longo de uma curva fechada, a sua norma não é mais preservada.

Para ilustrar esse efeito, consideramos a situação apresentada na Figura 1.1. Observe que, após o transporte paralelo do vetor V ao longo de uma curva fechada, o vetor resultante, representado por V_W , apresenta alterações tanto em sua direção quanto em sua norma [49]. Isso, em contraposição ao que ocorre na geometria riemanniana, onde apenas a direção do vetor é modificada, resultando, neste caso, no vetor V_R .

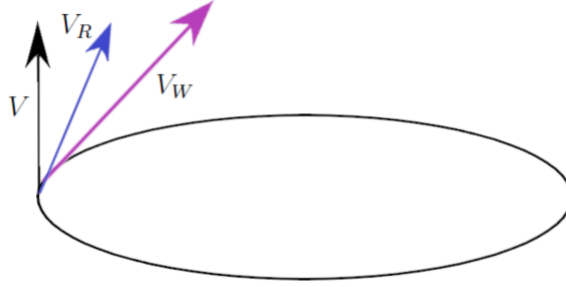


Figura 1.1: Transporte paralelo de um vetor V ao longo de uma curva fechada. Fonte: SANOMIYA, T. [49], 2020, p. 67.

Portanto, segundo Weyl, tanto a direção quanto a norma de um vetor transportado paralelamente deixam de ser invariantes. Essa característica permitiu que Weyl introduzisse o eletromagnetismo a partir de uma perspectiva inteiramente geométrica e o fez em um contexto de unificação com o campo gravitacional [9].

Na geometria riemanniana, o postulado sobre o transporte paralelo está associado à chamada condição de compatibilidade entre a conexão e a métrica [52, 54]. Já na geometria de Weyl, a versão correspondente dessa condição pode ser enunciada da seguinte forma:

Definição 1.1.1. *Seja M uma variedade diferenciável dotada de uma conexão afim ∇ , um tensor métrico g e um campo de 1-forma σ , globalmente definido sobre M . Diz-se que a*

conexão ∇ é compatível com g se satisfaz a seguinte condição:

$$V[g(U, W)] = g(\nabla_V U, W) + g(U, \nabla_V W) + \sigma(V)g(U, W), \quad (1.1)$$

onde o campo de 1-forma σ é denominado campo de Weyl, e V, U, W são campos vetoriais arbitrários definidos sobre M . [49, 55].

É interessante notar que, quando o campo de Weyl se anula sobre a variedade M , recuperamos imediatamente a condição de compatibilidade riemanniana. Por esse motivo, a definição acima pode ser interpretada como uma generalização da condição de compatibilidade riemanniana.

Naturalmente, trata-se de uma versão mais geral do teorema de Levi-Civita para a geometria de Weyl. Sabemos que na geometria riemanniana, esse teorema garante a existência de uma única conexão dada em termos da métrica e de suas derivadas. A extensão desse teorema para a geometria de Weyl é:

Teorema de Levi-Civita estendido. *Em uma variedade diferenciável M , dotada de uma métrica g e um campo de 1-forma diferenciável σ definido sobre M , existe uma única conexão afim ∇ , tal que [49, 56]:*

(a) ∇ é simétrica;

(b) ∇ obedece a condição de compatibilidade de Weyl.

Podemos demonstrar a unicidade da conexão ∇ a partir da condição de compatibilidade de Weyl (1.1). Fazendo permutações cíclicas dos campos vetoriais V , U e W , obtemos as seguintes expressões:

$$V[g(U, W)] = g(\nabla_V U, W) + g(U, \nabla_V W) + \sigma(V)g(U, W), \quad (1.2)$$

$$W[g(V, U)] = g(\nabla_W V, U) + g(V, \nabla_W U) + \sigma(W)g(V, U), \quad (1.3)$$

$$U[g(W, V)] = g(\nabla_U W, V) + g(W, \nabla_U V) + \sigma(U)g(W, V). \quad (1.4)$$

Somando as equações (1.2) e (1.3) e subtraindo (1.4), obtemos:

$$\begin{aligned} V[g(U, W)] + W[g(V, U)] - U[g(W, V)] &= g(\nabla_V U, W) + g(U, \nabla_V W) + \sigma(V)g(U, W) \\ &\quad + g(\nabla_W V, U) + g(V, \nabla_W U) + \sigma(W)g(V, U) \\ &\quad - g(\nabla_U W, V) - g(W, \nabla_U V) - \sigma(U)g(W, V) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Usando o item (a), a simetria da conexão, temos que ¹:

$$\nabla_V U - \nabla_U V = [V, U] \quad \implies \quad \nabla_V U = \nabla_U V + [V, U] \quad (1.6)$$

Assim, podemos escrever:

$$g(\nabla_V U, W) = g(\nabla_U V, W) + g([V, U], W) \quad (1.7)$$

$$g(\nabla_W V, U) = g(\nabla_V W, U) + g([W, V], U), \quad (1.8)$$

$$g(\nabla_U W, V) = g(\nabla_W U, V) - g([W, U], V). \quad (1.9)$$

Nesta última relação, consideramos a mudança de sinal segundo a identidade $[U, W] = -[W, U]$. Com isso, o lado direito da expressão (1.5) pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} &= [(\nabla_U V, W) + g([V, U], W) + g(U, \nabla_V W) + \sigma(V)g(U, W)] \\ &\quad + [g(\nabla_V W, U) + g([W, V], U)] + g(V, \nabla_W U) + \sigma(W)g(V, U) \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$-g(\nabla_W U, V) + g([W, U], V) - g(W, \nabla_U V) - \sigma(U)g(W, V), \quad (1.11)$$

Observe que, usando a simetria da métrica g , isto é, $g(\nabla_W U, V) = g(V, \nabla_W U)$, podemos cancelar alguns termos. Com isso, isolando o termo $g(\nabla_V W, U)$, obtemos a seguinte expressão:

¹Isso significa que estamos admitindo que a conexão não possui torção [52].

$$g(\nabla_V W, U) = \frac{1}{2} \{ V[g(U, W)] + W[g(V, U)] - U[g(W, V)] - g([V, U], W) - g([W, V], U) - g([W, U], V) + \sigma(U)g(W, V) - \sigma(V)g(U, W) - \sigma(W)g(V, U) \}, \quad (1.12)$$

Essa expressão corresponde a uma extensão da relação conhecida como *fórmula de Koszul* [52], mostrando que a conexão é unicamente determinada pela métrica g e pelo campo σ . Portanto, se existe, será única. Em outras palavras, isso revela que a conexão é compatível com a métrica e com o campo de Weyl, além de ser sem torção.

Para provar a existência, definamos ∇ a partir da expressão (1.1). Escolhendo um sistema de coordenadas locais x^α , com $\alpha = 1, \dots, n$, pode-se mostrar que a condição de compatibilidade de Weyl pode ser expressa da seguinte forma [56]:

$$\nabla_\gamma g_{\mu\nu} = \sigma_\gamma g_{\mu\nu} \quad (1.13)$$

É imediato ver que, quando $\sigma_\gamma = 0$, essa condição se reduz à condição de compatibilidade riemanniana, a qual postula que a derivada covariante da métrica g seja identicamente nula, ou seja, $\nabla_\gamma g_{\mu\nu} = 0$.

Expandindo (1.13), podemos escrever:

$$g_{\mu\nu} \sigma_\gamma = g_{\mu\nu,\gamma} - g_{\eta\nu} \Gamma_{\mu\gamma}^\eta - g_{\mu\eta} \Gamma_{\nu\gamma}^\eta \quad (1.14)$$

onde o símbolo "," representa a derivada parcial [2]. Fazendo uma permutação cíclica dos índices, obtemos três equações, que são:

$$(i) \quad g_{\mu\nu} \sigma_\gamma = g_{\mu\nu,\gamma} - g_{\eta\nu} \Gamma_{\mu\gamma}^\eta - g_{\mu\eta} \Gamma_{\nu\gamma}^\eta$$

$$(ii) \quad g_{\gamma\mu} \sigma_\nu = g_{\gamma\mu,\nu} - g_{\eta\mu} \Gamma_{\gamma\nu}^\eta - g_{\gamma\eta} \Gamma_{\mu\nu}^\eta$$

²Ao longo da presente tese, adotamos a notação padrão da literatura, em que “,” indica derivada parcial ∂_μ , enquanto “;” representa a derivada covariante ∇_μ .

$$(iii) \quad g_{\nu\gamma} \sigma_\mu = g_{\nu\gamma,\mu} - g_{\eta\gamma} \Gamma_{\nu\mu}^\eta - g_{\nu\eta} \Gamma_{\gamma\mu}^\eta$$

Fazendo (i) + (ii) - (iii) e considerando a simetria da métrica e da conexão pela troca de índices, vamos obter:

$$(g_{\mu\nu} \sigma_\gamma + g_{\gamma\mu} \sigma_\nu - g_{\nu\gamma} \sigma_\mu) = (g_{\mu\nu,\gamma} + g_{\gamma\mu,\nu} - g_{\nu\gamma,\mu}) - 2 g_{\mu\eta} \Gamma_{\nu\gamma}^\eta$$

Multiplicando essa equação por $g^{\mu\alpha}$ e contraindo μ , tem-se:

$$\delta_\eta^\alpha \Gamma_{\nu\gamma}^\eta = \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} (g_{\mu\nu,\gamma} + g_{\gamma\mu,\nu} - g_{\nu\gamma,\mu}) - \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} (g_{\mu\nu} \sigma_\gamma + g_{\gamma\mu} \sigma_\nu - g_{\nu\gamma} \sigma_\mu)$$

Portanto, os coeficientes da *conexão de Weyl*, em um sistema de coordenadas, são dados por:

$$\Gamma_{\nu\gamma}^\alpha = \{\alpha_{\nu\gamma}\} - \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} (g_{\mu\nu} \sigma_\gamma + g_{\gamma\mu} \sigma_\nu - g_{\nu\gamma} \sigma_\mu) \quad (1.15)$$

onde $\{\alpha_{\nu\gamma}\} = \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} (g_{\mu\nu,\gamma} + g_{\gamma\mu,\nu} - g_{\nu\gamma,\mu})$, são conhecidos como *símbolos de Christoffel de segundo tipo*. Observe que a *conexão de Weyl* se reduz naturalmente à conexão riemanniana quando o campo de 1-formas σ é nulo.

Pode-se verificar que (1.15) satisfaz as propriedades de uma conexão afim e as propriedades de simetria e compatibilidade [49, 52].

1.2 Transformações de calibre

As propriedades do campo σ^α levaram Weyl a interpretá-lo como sendo o quadripotencial eletromagnético A^α . Dessa forma, para a formulação de uma teoria consistente com o eletromagnetismo, ou seja, que obedeça à Invariância de Calibre, é natural exigir que σ^α se transforme da mesma maneira que o potencial eletromagnético, isto é, segundo a transformação de calibre $A^\alpha \rightarrow A'^\alpha = A^\alpha + \partial_\alpha f$. Assim, a teoria na totalidade deve ser invariante sob tal transformação.

Weyl descobriu que, ao introduzir a transformação conforme,

$$\bar{g}_{\alpha\beta} = e^{f(x)} g_{\alpha\beta}, \quad (1.16)$$

onde $f(x)$ é uma função arbitrária definida sobre M , e exigir que a condição de compatibilidade (1.13) seja invariante, o campo σ^α deve transformar-se como o potencial eletromagnético. Para demonstrar isso, substituímos (1.16) em:

$$\bar{\nabla}_\mu \bar{g}_{\alpha\beta} = \bar{\sigma}_\mu \bar{g}_{\alpha\beta}. \quad (1.17)$$

:

Desenvolvendo o lado esquerdo dessa expressão, temos:

$$\nabla_\mu (e^{f(x)} g_{\alpha\beta}) = \nabla_\mu (e^{f(x)}) g_{\alpha\beta} + e^{f(x)} \nabla_\mu g_{\alpha\beta} = \partial_\mu f(x) e^{f(x)} g_{\alpha\beta} + e^{f(x)} \sigma_\mu g_{\alpha\beta}. \quad (1.18)$$

Agora, igualando com o lado direito de (1.17), obtemos:

$$\partial_\mu f(x) e^{f(x)} g_{\alpha\beta} + e^{f(x)} g_{\alpha\beta} \sigma_\mu = \bar{g}_{\alpha\beta} \bar{\sigma}_\mu = e^{f(x)} g_{\alpha\beta} \bar{\sigma}_\mu. \quad (1.19)$$

Cancelando o fator comum $e^{f(x)} g_{\alpha\beta}$, temos que:

$$\bar{\sigma}_\mu = \sigma_\mu + f(x)_{,\mu} \quad (1.20)$$

ou seja, de fato, o campo σ_μ se transformará conforme o potencial eletromagnético para que a condição de compatibilidade de Weyl seja invariante sob a transformação conforme de $g_{\alpha\beta}$.

O conjunto de transformações (1.16) e (1.20), chamadas de *transformações de Weyl* ou *transformações de calibre*³, é de fundamental importância na geometria de Weyl [9]. Essa nova simetria foi chamada por Weyl de “*simetria de calibre*”, e sua descoberta é atualmente considerada pelos historiadores como o nascimento das teorias de calibre modernas [57, 58, 137].

³Ou ainda, como é mais comum na literatura, *transformações de gauge*.

1.2.1 Invariantes na geometria de Weyl

A formulação da teoria de Weyl tem como princípio fundamental a invariância das quantidades físicas e geométricas sob as transformações de Weyl apresentadas acima, ou seja, consistentes com o *Princípio de Invariância de Gauge*⁴ postulado por Weyl [57]. Assim, é importante definirmos aqui as grandezas invariantes de calibre, indispensáveis em sua teoria para a geometrização do eletromagnetismo.

É fácil ver que a conexão de Weyl descrita em (1.15) é invariante sob tais transformações. Podemos demonstrar isso, substituindo as transformações $\bar{g}_{\mu\nu} = e^f g_{\mu\nu}$ e $\bar{\sigma}_\mu = \sigma_\mu + f_{,\mu}$ em:

$$\bar{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} \bar{g}^{\lambda\alpha} (\bar{g}_{\beta\lambda,\gamma} + \bar{g}_{\lambda\gamma,\beta} - \bar{g}_{\gamma\beta,\lambda}) - \frac{1}{2} (\delta^\alpha_\beta \bar{\sigma}_\gamma + \delta^\alpha_\gamma \bar{\sigma}_\beta - \bar{g}_{\beta\gamma} \bar{\sigma}^\alpha)$$

onde, obtemos:

$$\bar{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} = \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} + \frac{1}{2} (\delta^\alpha_\beta f_{,\gamma} + \delta^\alpha_\gamma f_{,\beta} - g^{\lambda\alpha} g_{\gamma\beta} f_{,\lambda}) - \frac{1}{2} (\delta^\alpha_\beta f_{,\gamma} + \delta^\alpha_\gamma f_{,\beta} - g_{\gamma\beta} g^{\lambda\alpha} f_{,\lambda}).$$

Como os dois últimos termos se anulam, concluímos que:

$$\bar{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} = \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}. \quad (1.21)$$

Assim, como a conexão de Weyl é invariante de calibre, o tensor de curvatura $R^\alpha_{\beta\gamma\eta}$ e o tensor de Ricci $R_{\beta\eta}$, que dependem apenas da conexão e de suas derivadas, também são invariantes de calibre.

Por outro lado, o escalar de curvatura R definido por uma contração com a métrica g , não é invariante, já que,

$$\bar{R} = \bar{g}^{\beta\eta} \bar{R}_{\beta\eta} = e^{-f} g^{\beta\eta} \bar{R}_{\beta\eta} = e^{-f} R \quad (1.22)$$

Para facilitar a identificação das quantidades invariantes de calibre, Weyl introduziu o conceito de *peso de um tensor* em relação às transformações de calibre (ou de Weyl) [49, 50].

⁴Esse princípio afirma que todas as grandezas físicas devem ser invariantes sob as transformações de gauge.

De modo geral, um tensor $\xi^{\alpha\dots\beta}$ tem peso n se a seguinte transformação é válida:

$$\bar{\xi}^{\alpha\dots\beta} = e^{nf(x)} \xi^{\alpha\dots\beta}. \quad (1.23)$$

Segundo essa definição, um tensor de peso nulo ($n = 0$) é invariante sob transformações de Weyl.

É imediato observar que o tensor métrico $g_{\mu\nu}$, ao ser submetido a uma transformação de Weyl, possui peso $n = 1$. Por outro lado, é possível atribuir um peso à densidade tensorial $\sqrt{-g}$.

O determinante da métrica, no caso de uma matriz quadrada com n linhas, obedece à seguinte transformação:

$$\bar{g} = e^{nf} g \quad (1.24)$$

Portanto, o determinante g tem peso n em relação à transformação de calibre (1.16), sendo n a dimensão da variedade.

Se considerarmos o fator de densidade tensorial $\sqrt{-g}$ para um espaço-tempo quadridimensional ($n = 4$), verifica-se que ele possui peso 2 sob uma transformação de calibre, ou seja:

$$\sqrt{-\bar{g}} = e^{2f} \sqrt{-g}. \quad (1.25)$$

É interessante notar que podemos construir uma quantidade invariante de calibre utilizando a densidade tensorial $\sqrt{-g}$. A partir do escalar de curvatura de Weyl R , é possível formar uma grandeza invariante de calibre considerando a seguinte expressão:

$$R^2 \sqrt{-g} \quad (1.26)$$

Portanto, o conceito de peso desempenha um papel importante na geometria de Weyl, pois indica quais quantidades são invariantes de Weyl.

1.3 Geometria de Weyl integrável

A geometria de Weyl é caracterizada pela condição de não-metricidade (1.13), a qual implica que, no transporte paralelo ao longo de um caminho, o comprimento de um vetor arbitrário varia [2].

Segundo Weyl, a variação das componentes e do comprimento de um vetor V , transportado paralelamente, ocorre da seguinte forma [56]:

$$dV^\alpha = \Gamma_{\mu\beta}^\alpha dx^\mu V^\beta. \quad (1.27)$$

$$dL = \sigma_\mu dx^\mu L \quad (1.28)$$

onde V^α representa as componentes do vetor V e L o seu comprimento. Observe que o campo de Weyl σ altera o comprimento do vetor, desempenhando, de certa forma, o papel de uma conexão para o comprimento. Esta propriedade possui consequências indesejáveis, pelo fato de que qualquer medida de comprimento dependeria da trajetória anterior do aparelho de medida, o que levou ao abandono da proposta original de Weyl de geometrização do eletromagnetismo. Por outro lado, existe um caso particular em que essa dificuldade pode ser eliminada [2].

Integrando a equação (1.28) ao longo de uma curva fechada, obtemos:

$$L = L_0 \exp\left(\oint \sigma_\mu dx^\mu\right), \quad (1.29)$$

onde L_0 é o comprimento inicial. Utilizando o *teorema de Stokes*, temos que:

$$L = L_0 \exp\left(\int_s (\sigma_{\mu,\nu} - \sigma_{\nu,\mu}) dx^\mu \wedge dx^\nu\right) \quad (1.30)$$

Quando o rotacional de σ_μ é nulo em toda parte, ou seja,

$$(\sigma_{\mu,\nu} - \sigma_{\nu,\mu}) = 0, \quad (1.31)$$

então o comprimento do vetor não muda, isto é, $L = L_0$. Neste caso, podemos afirmar que existe pelo menos uma função escalar ϕ tal que $\sigma_\mu = \partial_\mu \phi = \phi_{,\mu}$.

Essa escolha, $\sigma = d\phi$ para a forma do campo de Weyl, caracteriza a chamada *geometria de Weyl integrável*. Esse caso, corresponde a dizer que, pelo *Lema de Poincaré*, a 1-forma σ é uma 1-forma exata [9, 55, 59]. Tal estrutura geométrica é utilizada na geometrização de um campo escalar e, nesse contexto, é conhecida como *espaço-tempo de Weyl integrável* (WIST)⁵.

1.4 Geometria de Weyl não-integrável

Naturalmente, podemos definir uma 2-forma $F = 2d\sigma$ ⁶, de maneira análoga à definição do tensor campo eletromagnético, cujas componentes são dadas por:

$$F_{\mu\nu} = \sigma_{\mu,\nu} - \sigma_{\nu,\mu}. \quad (1.32)$$

Assim, a partir de (1.30), temos que:

$$L = L_0 \exp\left(\int_s F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu\right) \quad (1.33)$$

Portanto, a presença do campo $F_{\mu\nu}$ altera o comprimento do vetor. Weyl interpretou geometricamente $F_{\mu\nu}$ como uma espécie de curvatura, a que ele chamou de "curvatura de comprimento" (*Streckenkrümmung*), em contraste com a curvatura de direção (*Richtungs-krümmung*), associada ao tensor de Riemann [9].

Assim, o caso em que $F_{\mu\nu}$ é não-nulo caracteriza a chamada *geometria de Weyl não-integrável*.

⁵Para mais detalhes sobre o espaço-tempo de Weyl integrável (WIST), ver [60-63] e [65].

⁶Onde $d\sigma$ representa a derivada exterior da 1-forma σ .

1.4.1 Propriedades do tensor $F_{\mu\nu}$

O campo tensorial $F_{\mu\nu}$ possui algumas propriedades importantes, as quais apresentamos a seguir:

(1) $F_{\mu\nu}$ é antissimétrico:

$$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu} \quad (1.34)$$

Demonstração: Da expressão (1.32) é imediato ver que:

$$F_{\mu\nu} = \sigma_{\mu,\nu} - \sigma_{\nu,\mu} = -(\sigma_{\nu,\mu} - \sigma_{\mu,\nu}) = -F_{\nu\mu}.$$

(2) $F_{\mu\nu}$ obedece à identidade:

$$\{F_{\alpha\beta,\gamma}\} = 0; \quad (1.35)$$

Demonstração: De fato:

$$\begin{aligned} \{F_{\alpha\beta,\gamma}\} &= \frac{1}{6} (F_{\alpha\beta,\gamma} - F_{\beta\alpha,\gamma} + F_{\gamma\alpha,\beta} - F_{\alpha\gamma,\beta} + F_{\beta\gamma,\alpha} - F_{\gamma\beta,\alpha}) = \frac{1}{3} (F_{\alpha\beta,\gamma} + F_{\gamma\alpha,\beta} + F_{\beta\gamma,\alpha}) \\ &= \frac{1}{3} (\sigma_{\alpha,\beta,\gamma} - \sigma_{\beta,\alpha,\gamma} + \sigma_{\gamma,\alpha,\beta} - \sigma_{\alpha,\gamma,\beta} + \sigma_{\beta,\gamma,\alpha} - \sigma_{\gamma,\beta,\alpha}) = 0. \end{aligned}$$

(3) $F_{\mu\nu}$ é invariante sob transformações de Weyl:

$$\bar{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}, \quad (1.36)$$

Demonstração: Considere:

$$\bar{F}_{\mu\nu} = \bar{\sigma}_{\mu,\nu} - \bar{\sigma}_{\nu,\mu}.$$

Utilizando a transformação de calibre para o campo de Weyl, (1.20), obtemos:

$$\overline{F}_{\mu\nu} = (\sigma_\mu + f_{,\mu})_{,\nu} - (\sigma_\nu + f_{,\nu})_{,\mu} = \sigma_{\mu,\nu} - \sigma_{\nu,\mu} = F_{\mu\nu}.$$

É interessante notar que, a forma contravariante do campo tensorial $F_{\mu\nu}$ é não invariante de calibre [9]. Podemos verificar isso facilmente considerando as transformação de calibre de $g^{\mu\nu}$:

$$\overline{F}^{\alpha\beta} = \overline{g}^{\alpha\mu}\overline{g}^{\beta\nu} F_{\mu\nu} = e^{-2f} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} F_{\mu\nu} :$$

Portanto, $F^{\alpha\beta}$ tem peso $n = -2$. Por outro lado, podemos construir um tensor invariante multiplicando $F^{\alpha\beta}$ pela densidade tensorial $\sqrt{-g}$, isto é:

$$F^{\alpha\beta} \sqrt{-g} \tag{1.37}$$

1.5 O eletromagnetismo na geometria de Weyl

É extremamente fascinante a forma natural com que o formalismo do eletromagnetismo é incorporado à geometria de Weyl. Nesta teoria, o tensor $F_{\mu\nu}$ definido em (1.32) pode ser naturalmente interpretado como o tensor campo eletromagnético, enquanto o campo σ_μ corresponde ao quadripotencial eletromagnético.

Essa interpretação permite obter, de maneira análoga ao eletromagnetismo clássico, o primeiro par das equações de Maxwell a partir da identidade:

$$\{F_{\alpha\beta,\gamma}\} = 0 \quad . \tag{1.38}$$

O segundo par das equações de Maxwell aparece nesta teoria na forma [49, 50]:

$$\mathcal{F}^{\alpha\beta}_{,\beta} = \mathcal{J}^\alpha \tag{1.39}$$

onde definimos,

$$\mathcal{F}^{\alpha\beta} = \sqrt{-g} F^{\alpha\beta} \quad \text{e} \quad \mathcal{J}^\alpha = (\sqrt{-g} F^{\alpha\beta})_{;\beta}.$$

Essas expressões representam densidades tensoriais de peso zero na teoria de Weyl. Nesse contexto, \mathcal{J}^α em (1.39) representa a densidade de corrente, de modo análogo ao que se tem no eletromagnetismo.

Buscaremos agora descrever a interação entre os campos eletromagnético e gravitacional na teoria de Weyl. Para isso, é necessário determinar as equações de campo nesta teoria.

Para descrever o eletromagnetismo no contexto da relatividade geral, Einstein propôs a seguinte ação:

$$S = \int \left[R + \frac{1}{16\pi} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right] \sqrt{-g} \, d^4x. \quad (1.40)$$

Por outro lado, essa ação não pode ser utilizada na teoria de Weyl, pois o termo $R\sqrt{-g}$ tem peso 1 sob uma mudança de calibre, ou seja, não é invariante de calibre.

A forma mais simples que se aproxima dessa ação e que satisfaz a condição de invariância de calibre é:

$$S = \int [R^2 + \omega F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}] \sqrt{-g} \, d^4x. \quad (1.41)$$

onde ω é uma constante arbitrária e R o escalar de curvatura calculado com a conexão de Weyl. Para encontrarmos as equações de campo, realizamos a variação dessa ação em relação à métrica $g_{\alpha\beta}$ e ao campo σ_α de maneira independente.

Considerando a variação da ação S , temos:

$$\delta S = \delta \int [R^2 + \omega F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}] \sqrt{-g} \, d^4x = 0 \quad (1.42)$$

Aqui, realizaremos o cálculo por partes. Para o primeiro termo, obtemos:

$$\delta(R^2\sqrt{-g}) = 2R\delta R\sqrt{-g} + R^2\delta(\sqrt{-g})$$

Essa expressão pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\delta(R^2\sqrt{-g}) = 2R\delta(R\sqrt{-g}) - 2R^2\delta(\sqrt{-g}) + R^2\delta(\sqrt{-g})$$

Portanto,

$$\Rightarrow \delta(R^2\sqrt{-g}) = 2R\delta(R\sqrt{-g}) - R^2\delta(\sqrt{-g}) \quad (1.43)$$

Substituindo a equação (1.43) em (1.42), obtemos:

$$\delta S = \int \left[2R\delta(R\sqrt{-g}) - R^2\delta(\sqrt{-g}) + \omega\delta(F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}) \right] \sqrt{-g} \, d^4x = 0 \quad (1.44)$$

Para simplificar essa ação, Weyl propôs a adoção do chamado *gauge natural* (ou *gauge de Weyl*), no qual o escalar de curvatura R é considerado constante localmente⁷. Ou seja:

$$R = \Lambda \quad (1.45)$$

sendo Λ uma constante que corresponde à curvatura do espaço⁸ [50]. Podemos, então, reescrever a equação (1.44) no *gauge natural*, na forma:

$$\delta S = \int \left[2\Lambda\delta(R\sqrt{-g}) - \Lambda^2\delta(\sqrt{-g}) + \omega\delta(F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}) \right] \sqrt{-g} \, d^4x = 0$$

Ou ainda,

⁷Esse gauge, em particular, introduz a constante Λ nas equações de campo, interpretada como a constante cosmológica que surge aqui de forma natural e, por esse motivo, é conhecido como *gauge natural*.

⁸Em geral, $\delta R \neq 0$ e por esse motivo o *gauge natural* só pode ser aplicado após a variação, e não antes.

$$\delta S = \delta \int \left[R - \frac{\Lambda}{2} + \frac{\omega}{2\Lambda} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right] \sqrt{-g} d^4x = 0. : \quad (1.46)$$

Antes de efetuarmos a variação dessa ação em relação ao campo métrico $g_{\alpha\beta}$ e ao campo σ_α , é necessário substituir a forma explícita do escalar de curvatura de Weyl, R , o qual é definido a partir da conexão de Weyl e, portanto, está diretamente relacionado com o campo σ_α .

A definição riemanniana do escalar de curvatura é:

$$\tilde{R} = g^{\beta\lambda} \Gamma_{\beta\alpha,\lambda}^\alpha - (g^{\beta\lambda} \Gamma_{\beta\lambda}^\alpha)_{,\alpha} + g^{\beta\lambda} \Gamma_{\beta\alpha}^\tau \Gamma_{\tau\lambda}^\alpha - g^{\beta\lambda} \Gamma_{\beta\lambda}^\tau \Gamma_{\tau\alpha}^\alpha, \quad (1.47)$$

onde estamos representando as quantidades riemannianas com “ \sim ”. Para expressar R na geometria de Weyl, é necessário reescrever os elementos da equação (1.47) em termos da conexão de Weyl (1.15). Como o escalar de curvatura R é uma quantidade escalar e, portanto, invariante sob mudanças de coordenadas, podemos adotar, para simplificar os cálculos, um sistema de coordenadas geodésico riemanniano [49,50], no qual os símbolos de Christoffel se anulam em um ponto. Nesse sistema, a conexão de Weyl assume a forma:

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = -\frac{1}{2}(\delta_\beta^\alpha \sigma_\gamma + \delta_\gamma^\alpha \sigma_\beta - g_{\beta\gamma} \sigma^\alpha) \quad (1.48)$$

Portanto, para o primeiro termo da equação (1.47), temos:

$$\Gamma_{\beta\alpha}^\alpha = (\delta_\beta^\alpha \sigma_\alpha + \delta_\alpha^\alpha \sigma_\beta - g_{\beta\alpha} \sigma^\alpha) = -\frac{1}{2}(\sigma_\beta + n\sigma_\beta - \sigma_\beta)$$

$$\Gamma_{\beta\alpha}^\alpha = -\frac{n}{2}\sigma_\beta \quad (1.49)$$

sendo n a dimensão da variedade. Já o termo entre parênteses na expressão (1.47) pode ser reescrito como:

$$g^{\beta\lambda} \Gamma_{\beta\lambda}^\alpha = -\frac{1}{2} g^{\beta\lambda} (\delta_\beta^\alpha \sigma_\lambda + \delta_\lambda^\alpha \sigma_\beta - g_{\beta\lambda} \sigma^\alpha) = -\frac{1}{2} (\sigma^\alpha + \sigma^\alpha - n\sigma^\alpha),$$

$$g^{\beta\lambda}\Gamma_{\beta\lambda}^{\alpha} = \frac{1}{2}(n-2)\sigma^{\alpha}. \quad (1.50)$$

O termo $g^{\beta\lambda}\Gamma_{\beta\alpha}^{\tau}\Gamma_{\tau\lambda}^{\alpha}$ da expressão (1.47) pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} g^{\beta\lambda}\Gamma_{\beta\alpha}^{\tau}\Gamma_{\tau\lambda}^{\alpha} &= \frac{1}{4}g^{\beta\lambda}(\delta_{\beta}^{\tau}\sigma_{\alpha} + \delta_{\alpha}^{\tau}\sigma_{\beta} - g_{\beta\alpha}\sigma^{\tau})(\delta_{\tau}^{\alpha}\sigma_{\lambda} + \delta_{\lambda}^{\alpha}\sigma_{\tau} - g_{\tau\lambda}\sigma^{\alpha}) \\ &= \frac{1}{4}g^{\beta\lambda}(\delta_{\beta}^{\alpha}\sigma_{\alpha}\sigma_{\lambda} + \delta_{\beta}^{\tau}\delta_{\lambda}^{\alpha}\sigma_{\alpha}\sigma_{\tau} - g_{\beta\lambda}\sigma_{\alpha}\sigma^{\alpha} + n\sigma_{\beta}\sigma_{\lambda} + \delta_{\lambda}^{\tau}\sigma_{\tau}\sigma_{\beta} - g_{\alpha\lambda}\sigma_{\beta}\sigma_{\alpha} \\ &\quad - g_{\beta\tau}\sigma^{\tau}\sigma_{\lambda} - g_{\beta\lambda}\sigma^{\tau}\sigma_{\tau} + g_{\beta\alpha}g_{\tau\lambda}\sigma^{\tau}\sigma^{\alpha}). \end{aligned}$$

Logo,

$$g^{\beta\lambda}\Gamma_{\beta\alpha}^{\tau}\Gamma_{\tau\lambda}^{\alpha} = -\frac{1}{4}(n-2)\sigma_{\alpha}\sigma^{\alpha}. \quad (1.51)$$

Analogamente, o último termo da expressão (1.47) pode ser reescrito como:

$$g^{\beta\lambda}\Gamma_{\beta\lambda}^{\tau}\Gamma_{\tau\alpha}^{\alpha} = -\frac{1}{4}n(n-2)\sigma_{\alpha}\sigma^{\alpha} \quad (1.52)$$

Portanto, ao substituírmos as equações (1.49)–(1.52) em (1.47), considerando a geometria de Weyl, e lembrando que as derivadas dos símbolos de Christoffel não se anulam neste sistema de coordenadas, obtemos a seguinte forma para o escalar de curvatura:

$$R = g^{\beta\lambda}\left(\tilde{\Gamma}_{\beta\alpha}^{\alpha} - \frac{n}{2}\sigma_{\beta}\right)_{,\lambda} - \left(g^{\beta\lambda}\tilde{\Gamma}_{\beta\lambda}^{\alpha} + \frac{1}{2}(n-2)\sigma^{\alpha}\right)_{,\alpha} - \frac{1}{4}(n-2)\sigma_{\alpha}\sigma^{\alpha} + \frac{1}{4}n(n-2)\sigma_{\alpha}\sigma^{\alpha}$$

Portanto,

$$R = \tilde{R} + \frac{1}{4}(n-1)(n-2)\sigma_{\alpha}\sigma^{\alpha} - \frac{(n-1)}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}\sigma^{\alpha})_{,\alpha}. \quad (1.53)$$

onde, no último termo, acrescentamos o fator $\sqrt{-g}$ de maneira a ter uma expressão escalar, uma vez que $(\sqrt{-g})_{,\alpha} = 0$. Como estamos trabalhando com uma variedade quadridimensional ($n = 4$), a expressão (1.53) assume a forma:

$$R = \tilde{R} + \frac{3}{2}\sigma_\alpha\sigma^\alpha - \frac{3}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}\sigma^\alpha)_{,\alpha}. \quad (1.54)$$

Podemos ainda reescrever o último termo em termos da quadridivergência riemanniana do vetor contravariante σ^α , ou seja:

$$\tilde{\nabla}_\alpha\sigma^\alpha = \frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}\sigma^\alpha)_{,\alpha} \quad (1.55)$$

Assim, temos:

$$R = \tilde{R} + \frac{3}{2}\sigma_\alpha\sigma^\alpha - 3\tilde{\nabla}_\alpha\sigma^\alpha. \quad (1.56)$$

Como todos os termos de (1.56) são escalares, essa expressão é válida em qualquer sistema de coordenadas, e não apenas naquele que foi adotado para a demonstração.

Finalmente, substituindo a expressão do escalar de curvatura (1.56) em (1.46), obtemos:

$$\delta \int \left(\tilde{R} + \frac{3}{2}\sigma_\alpha\sigma^\alpha - \frac{\Lambda}{2} + \frac{\omega}{2\Lambda}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \right) \sqrt{-g}d^4x = 0. \quad (1.57)$$

onde o termo $\int \delta(\sqrt{-g}\sigma^\alpha)_{,\alpha}d^4x$ foi descartado por se tratar de um termo de fronteira.

A partir da expressão (1.57), podemos obter as equações de campo da teoria de Weyl por meio de duas variações independentes, uma em relação ao campo de Weyl σ_μ e outra em relação ao campo métrico $g_{\mu\nu}$.

1.5.1 Equações de campo no gauge natural

Primeiro, consideramos a variação da expressão (1.57) em relação ao campo de Weyl. Para isso, é necessário determinar a forma das variações dos termos $(\sigma_\alpha\sigma^\alpha\sqrt{-g})$ e $(F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\sqrt{-g})$, que são os únicos termos que dependem de σ_μ .

A variação do primeiro termo resulta em:

$$\delta(\sigma_\alpha \sigma^\alpha \sqrt{-g}) = 2\sqrt{-g} \sigma^\alpha \delta(\sigma_\alpha). \quad (1.58)$$

Por outro lado, a variação do segundo termo pode ser obtida considerando a forma:

$$\delta(F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \sqrt{-g}) = \sqrt{-g} F^{\alpha\beta} \delta(F_{\alpha\beta}) + \sqrt{-g} F_{\alpha\beta} \delta(F^{\alpha\beta}). \quad (1.59)$$

Utilizando a relação $F^{\alpha\beta} \delta(F_{\alpha\beta}) = F_{\alpha\beta} \delta(F^{\alpha\beta})$, obtemos:

$$\begin{aligned} \delta(F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \sqrt{-g}) &= 2\sqrt{-g} F^{\alpha\beta} \delta(F_{\alpha\beta}) = 2\sqrt{-g} F^{\alpha\beta} [(\delta\sigma_\alpha)_{,\beta} - (\delta\sigma_\beta)_{,\alpha}] \\ \Rightarrow \delta(F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \sqrt{-g}) &= 4\sqrt{-g} F^{\alpha\beta} [(\delta\sigma_\alpha)_{,\beta} \end{aligned} \quad (1.60)$$

Essa expressão pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\delta(F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \sqrt{-g}) = (4\sqrt{-g} F^{\alpha\beta} \delta\sigma_\alpha)_{,\beta} - 4(\sqrt{-g} F^{\alpha\beta})_{,\beta} \delta\sigma_\alpha \quad (1.61)$$

Substituindo (1.58) e (1.61) na variação da ação (1.57), obtemos:

$$\int \left[3\sqrt{-g} \sigma^\alpha \delta\sigma_\alpha + \frac{\omega}{2\Lambda} (4\sqrt{-g} F^{\alpha\beta} \delta\sigma_\alpha)_{,\beta} - \frac{2\omega}{\Lambda} (\sqrt{-g} F^{\alpha\beta})_{,\beta} \delta\sigma_\alpha \right] d^4x = 0 \quad (1.62)$$

Note que os termos \tilde{R} e $\Lambda/2$ não aparecem nessa variação, pois não dependem de σ_μ . Além disso, o segundo termo dentro da integral corresponde a um termo de fronteira e, portanto, não contribui para a variação da ação. Assim, essa expressão se reduz a seguinte forma:

$$\int \left[3\sqrt{-g} \sigma^\alpha - \frac{2\omega}{\Lambda} (\sqrt{-g} F^{\alpha\beta})_{,\beta} \right] \delta\sigma_\alpha d^4x = 0. \quad (1.63)$$

Como a variação $\delta\sigma_\alpha$ é arbitrária, obtemos a seguinte equação de campo:

$$(\sqrt{-g}F^{\alpha\beta})_{,\beta} = \frac{3\Lambda}{2\omega}\sqrt{-g}\sigma^\alpha. \quad (1.64)$$

Analisemos agora a variação da ação (1.57) em relação ao campo métrico, considerando individualmente cada termo da ação. Começamos pelo termo $\tilde{R}\sqrt{-g}$.

Utilizando a identidade $\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}$, obtemos:

$$\begin{aligned} \delta(\tilde{R}\sqrt{-g}) &= \delta(\tilde{R})\sqrt{-g} + \tilde{R}\delta(\sqrt{-g}) = \delta(\dot{R}_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta})\sqrt{-g} + \tilde{R}\delta(\sqrt{-g}) \\ &= \left(\tilde{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\tilde{R}g_{\alpha\beta}\right)\sqrt{-g}\delta(g^{\alpha\beta}) + \delta(\tilde{R}_{\alpha\beta})g^{\alpha\beta}\sqrt{-g} \end{aligned} \quad (1.65)$$

Esse resultado é o mesmo encontrado na Relatividade Geral. Agora, vamos analisar os termos adicionais que envolvem o campo de Weyl. Para o termo $\sigma_\alpha\sigma^\alpha\sqrt{-g}$, temos:

$$\begin{aligned} \delta(\sigma_\alpha\sigma^\alpha\sqrt{-g}) &= \delta(\sigma_\alpha\sigma_\beta g^{\alpha\beta})\sqrt{-g} + \sigma_\mu\sigma^\mu\delta(\sqrt{-g}) = \sigma_\alpha\sigma_\beta\sqrt{-g}\delta(g^{\alpha\beta}) - \frac{1}{2}\sigma_\mu\sigma^\mu g_{\alpha\beta}\sqrt{-g}\delta(g^{\alpha\beta}) \\ &= \left(\sigma_\alpha\sigma_\beta - \frac{1}{2}\sigma_\mu\sigma^\mu g_{\alpha\beta}\right)\sqrt{-g}\delta(g^{\alpha\beta}) \end{aligned} \quad (1.66)$$

Para o termo $\delta(F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\sqrt{-g})$, temos:

$$\begin{aligned} \delta(F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\sqrt{-g}) &= F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\delta(\sqrt{-g}) + F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta(g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}) \\ &= -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\alpha\beta}\delta(g^{\alpha\beta})F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \sqrt{-g}F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}g^{\beta\nu}\delta(g^{\alpha\mu}) + \sqrt{-g}F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}g^{\alpha\mu}\delta(g^{\beta\nu}) \\ &= -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\alpha\beta}\delta(g^{\alpha\beta})F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \sqrt{-g}F_{\alpha\mu}F_{\beta\nu}g^{\mu\nu}\delta(g^{\alpha\beta}) + \sqrt{-g}F_{\nu\beta}F_{\mu\alpha}g^{\nu\mu}\delta(g^{\beta\alpha}) \\ &= -2\left(g^{\mu\nu}F_{\alpha\mu}F_{\nu\beta} + \frac{1}{4}g_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right)\sqrt{-g}\delta(g^{\alpha\beta}). \end{aligned} \quad (1.68)$$

Portanto,

$$\delta(F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\sqrt{-g}) = -2T_{\alpha\beta}\sqrt{-g}\delta(g^{\alpha\beta}) \quad (1.69)$$

onde $T_{\alpha\beta} = g^{\mu\nu} F_{\alpha\mu} F_{\nu\beta} + \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ pode ser identificado como o tensor momento-energia associado ao campo de Weyl. Substituindo as expressões (1.65), (1.66) e (1.69) em (1.57), vamos obter:

$$\delta S = \int \left[\tilde{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \tilde{R} g_{\alpha\beta} + \frac{3}{2} \left(\sigma_{\alpha} \sigma_{\beta} - \frac{1}{2} \sigma_{\mu} \sigma^{\mu} g_{\alpha\beta} \right) + \frac{\Lambda}{4} g_{\alpha\beta} - \frac{\omega}{\Lambda} T_{\alpha\beta} \right] \sqrt{-g} \delta(g^{\alpha\beta}) d^4 x$$

onde utilizamos o resultado conhecido da relatividade geral de que $\int g^{\alpha\beta} \sqrt{-g} \delta \tilde{R}_{\alpha\beta} d^4 x = 0$ [49, 50]. Assim, dado que a variação $\delta(g^{\alpha\beta})$ é arbitrária, obtemos como resultado final a seguinte equação de campo:

$$\tilde{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \tilde{R} g_{\alpha\beta} + \frac{3}{2} \left(\sigma_{\alpha} \sigma_{\beta} - \frac{1}{2} \sigma_{\mu} \sigma^{\mu} g_{\alpha\beta} \right) + \frac{\Lambda}{4} g_{\alpha\beta} = \frac{\omega}{\Lambda} T_{\alpha\beta} \quad (1.70)$$

Aqui, a constante Λ pode ser entendida como sendo a constante cosmológica, que surge de forma natural. Note que, se o campo de Weyl é nulo, ou seja, $\sigma_{\mu} = 0$, recupera-se imediatamente a equação de campo da Relatividade Geral com constante cosmológica, para o caso de espaço-tempo vazio, isto é:

$$\tilde{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \tilde{R} g_{\alpha\beta} + \frac{\Lambda}{4} g_{\alpha\beta} = 0, \quad (1.71)$$

Portanto, as equações de campo da Teoria Unificada de Weyl são:

$$\tilde{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \tilde{R} g_{\alpha\beta} + \frac{3}{2} \left(\sigma_{\alpha} \sigma_{\beta} - \frac{1}{2} \sigma_{\mu} \sigma^{\mu} g_{\alpha\beta} \right) + \frac{\Lambda}{4} g_{\alpha\beta} = \frac{\omega}{\Lambda} T_{\alpha\beta} \quad (1.72)$$

$$(\sqrt{-g} F^{\alpha\beta})_{,\beta} = \frac{3\Lambda}{2\omega} \sqrt{-g} \sigma^{\alpha} . \quad (1.73)$$

É importante ressaltar que essas equações são válidas apenas no *gauge natural*, em que $R = \Lambda$.

1.5.2 Gauge de Lorentz

Observe que, aplicando o operador ∂_α em ambos os lados da equação (1.73), temos:

$$\partial_\alpha \partial_\beta (\sqrt{-g} F^{\alpha\beta}) = \frac{3\Lambda}{2\omega} \partial_\alpha (\sqrt{-g} \sigma^\alpha). \quad (1.74)$$

Como $F^{\alpha\beta}$ é antissimétrico e $\partial_\alpha \partial_\beta$ é simétrico nos índices, o lado esquerdo da equação anula-se. Assim, obtemos a identidade:

$$\partial_\alpha (\sqrt{-g} \sigma^\alpha) = 0, \quad (1.75)$$

que pode ser reescrita de forma equivalente à condição de divergência nula para σ^α :

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\alpha (\sqrt{-g} \sigma^\alpha) = 0 \Rightarrow \tilde{\nabla}_\alpha \sigma^\alpha = 0, \quad (1.76)$$

Essa expressão mostra que o campo de Weyl satisfaz uma condição análoga ao chamado *gauge de Lorentz*. Note que essa condição não é imposta por uma escolha de gauge, mas surge naturalmente da própria dinâmica do campo.

1.5.3 Equações de campo em um gauge qualquer

Podemos reescrever as equações de campo de forma que elas sejam válidas em qualquer gauge. Para isso, precisamos determinar qual deve ser a transformação de gauge necessária para passarmos do gauge onde $R = \Lambda$, isto é, $(M, g, \sigma, R = \Lambda)$, para um gauge arbitrário $(M, \bar{g}, \bar{\sigma}, \bar{R})$ [49].

Considere as transformações de Weyl:

$$g_{\alpha\beta} = e^{f(x)} \bar{g}_{\alpha\beta},$$

$$\sigma_\mu = \bar{\sigma}_\mu + f(x)_{,\mu},$$

Pela definição do escalar de curvatura, temos:

$$R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} = e^{-f} \bar{g}^{\alpha\beta} \bar{R}_{\alpha\beta} = e^{-f} \bar{R} \Rightarrow R = e^{-f} \bar{R}$$

Portanto,

$$e^f = \frac{\bar{R}}{\Lambda} \quad (1.77)$$

onde utilizamos a transformação da métrica inversa $g^{\alpha\beta} e^{-f} \bar{g}^{\alpha\beta}$ e o fato do tensor de Ricci na geometria de Weyl ser invariante de calibre, isto é, $R_{\alpha\beta} = \bar{R}_{\alpha\beta}$.

Substituindo (1.77) nas transformações de Weyl, podemos reescrevê-las como:

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\bar{R}}{\Lambda} \bar{g}_{\alpha\beta} \quad (1.78)$$

$$\sigma_\mu = \bar{\sigma}_\mu + \frac{1}{\bar{R}} \partial_\mu \bar{R} \quad (1.79)$$

Agora, aplicando essas transformações aos termos $\sqrt{-g} \sigma^\alpha$ e $\sqrt{-g} F^{\alpha\beta}$ que aparecem na equação (1.73), obtemos:

$$\begin{aligned} \sqrt{-g} g^{\alpha\mu} \sigma_\mu &= \sqrt{-\bar{g}} e^{2f} e^{-f} \bar{g}^{\alpha\mu} \left[\bar{\sigma}_\mu + \frac{1}{\bar{R}} \partial_\mu \bar{R} \right] = \sqrt{-\bar{g}} e^f \bar{g}^{\alpha\mu} \left[\bar{\sigma}_\mu + \frac{1}{\bar{R}} \partial_\mu \bar{R} \right] \\ &= \frac{\bar{R}}{\Lambda} \sqrt{-\bar{g}} \bar{g}^{\alpha\mu} \left[\bar{\sigma}_\mu + \frac{1}{\bar{R}} \partial_\mu \bar{R} \right] \end{aligned} \quad (1.80)$$

Lembrando que $\sqrt{-g} \bar{F}_{\mu\nu} = \sqrt{-g} F_{\mu\nu}$, temos:

$$(\sqrt{-g} F^{\alpha\beta})_{,\beta} = (\sqrt{-\bar{g}} \bar{F}^{\alpha\beta})_{,\beta}. \quad (1.81)$$

Portanto, substituindo (1.80) e (1.81) em (1.73), teremos:

$$(\sqrt{-g} \bar{F}^{\alpha\beta})_{,\beta} = \frac{3}{2\omega} \sqrt{-\bar{g}} \bar{g}^{\alpha\mu} [\bar{R} \bar{\sigma}_\mu + \partial_\mu \bar{R}] \quad (1.82)$$

Essa é a equação para o campo $\bar{\sigma}_\mu$, válida em qualquer gauge. Vale destacar que uma forma equivalente dessa equação já havia sido obtida por Weyl em 1918 [50].

Analogamente, pode-se escrever a equação para o campo métrico $g_{\mu\nu}$ em uma forma válida para qualquer escolha de gauge. Para isso, reescrevemos convenientemente a equação (1.72) em termos das quantidades invariantes sob transformações de Weyl, como o tensor $R_{\mu\nu}$ de Weyl.

O tensor de Ricci weylano pode ser decomposto da seguinte forma [9, 59]:

$$R_{(\alpha\beta)} = \tilde{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}(\tilde{\nabla}_\beta \sigma_\alpha + \tilde{\nabla}_\alpha \sigma_\beta + g_{\alpha\beta} \tilde{\nabla}_\mu \sigma^\mu) - \frac{1}{2}(\sigma_\alpha \sigma_\beta - g_{\alpha\beta} \sigma_\mu \sigma^\mu) \quad (1.83)$$

onde $R_{(\alpha\beta)}$ representa a parte simétrica do tensor $R_{\alpha\beta}$ de Weyl⁹. Feitas essas considerações, podemos reescrever o tensor de Ricci riemanniano como:

$$\tilde{R}_{\alpha\beta} = R_{(\alpha\beta)} + \frac{1}{2}(\tilde{\nabla}_\beta \sigma_\alpha + \tilde{\nabla}_\alpha \sigma_\beta + g_{\alpha\beta} \tilde{\nabla}_\mu \sigma^\mu) + \frac{1}{2}(\sigma_\alpha \sigma_\beta - g_{\alpha\beta} \sigma_\mu \sigma^\mu), \quad (1.84)$$

Contraindo (1.84) com $g^{\alpha\beta}$, obtemos:

$$\tilde{R} = R - \frac{3}{2} \sigma_\mu \sigma^\mu + 3 \tilde{\nabla}_\mu \sigma^\mu, \quad (1.85)$$

Observe que a expressão do escalar de curvatura é a mesma obtida em (1.56) pelo método de coordenadas geodésicas. As expressões (1.84) e (1.85) podem ser simplificadas ao considerar o seguinte resultado:

$$\tilde{\nabla}_\alpha \sigma^\alpha = 0, \quad (1.86)$$

Como discutido anteriormente, essa condição aparece naturalmente quando tomamos a derivada em relação à x^α em ambos os lados da equação para o campo σ_α no *gauge natural*, a saber, (1.76). Com essas considerações, as expressões (1.84) e (1.85) são simplificadas, assumindo as formas:

$$\tilde{R}_{\alpha\beta} = R_{(\alpha\beta)} + \frac{1}{2}(\tilde{\nabla}_\beta \sigma_\alpha + \tilde{\nabla}_\alpha \sigma_\beta) + \frac{1}{2}(\sigma_\alpha \sigma_\beta - g_{\alpha\beta} \sigma_\mu \sigma^\mu), \quad (1.87)$$

⁹Isto é $R_{(\alpha\beta)} = \frac{1}{2}(R_{\alpha\beta} + R_{\beta\alpha})$.

$$\tilde{R} = R - \frac{3}{2}\sigma_\mu\sigma^\mu. \quad (1.88)$$

Substituindo (1.87) e (1.88) na equação de campo gravitacional no *gauge natural* (1.72), temos:

$$\begin{aligned} R_{(\alpha\beta)} + \frac{1}{2}(\tilde{\nabla}_\beta\sigma_\alpha + \tilde{\nabla}_\alpha\sigma_\beta) + \frac{1}{2}(\sigma_\alpha\sigma_\beta - g_{\alpha\beta}\sigma_\mu\sigma^\mu) - \frac{1}{2}(R - \frac{3}{2}\sigma_\mu\sigma^\mu)g_{\alpha\beta} \\ + \frac{3}{2}(\sigma_\alpha\sigma_\beta - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\sigma^\mu\sigma_\mu) + \frac{\Lambda}{4}g_{\alpha\beta} = \frac{\omega}{\Lambda}T_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (1.89)$$

Agora, substituindo a derivada covariante riemanniana pela derivada covariante weylana, definida por:

$$\nabla_\alpha\sigma_\beta = \tilde{\nabla}_\alpha\sigma_\beta + \sigma_\alpha\sigma_\beta - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\sigma_\mu\sigma^\mu$$

Desse modo, podemos reescrever (1.89) como:

$$R_{(\alpha\beta)} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R + \frac{\Lambda}{4}g_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}(\nabla_\beta\sigma_\alpha + \nabla_\alpha\sigma_\beta) + \sigma_\alpha\sigma_\beta = \frac{\omega}{\Lambda}T_{\alpha\beta} \quad (1.90)$$

Aplicando as transformações (1.78) e (1.79) em (1.90), teremos:

$$\begin{aligned} \bar{R}_{(\alpha\beta)} - \frac{1}{2}\bar{g}_{\alpha\beta}\bar{R} + \frac{\Lambda}{4}\left(\frac{\bar{R}}{\Lambda}\bar{g}_{\alpha\beta}\right) + \frac{1}{2}\left[\nabla_\beta\left(\bar{\sigma}_\alpha + \frac{1}{\bar{R}}\partial_\alpha\bar{R}\right) + \nabla_\alpha\left(\bar{\sigma}_\beta + \frac{1}{\bar{R}}\partial_\beta\bar{R}\right)\right] \\ + (\bar{\sigma}_\alpha + \frac{1}{\bar{R}}\partial_\alpha\bar{R})(\bar{\sigma}_\beta + \frac{1}{\bar{R}}\partial_\beta\bar{R}) = \frac{\omega}{\Lambda}\left(\frac{\Lambda}{\bar{R}}\bar{T}_{\alpha\beta}\right), \end{aligned} \quad (1.91)$$

onde $T_{\alpha\beta} = e^{-f}\bar{T}_{\alpha\beta} = \frac{\Lambda}{\bar{R}}\bar{T}_{\alpha\beta}$. Finalmente, ao expandirmos os termos do lado esquerdo da equação, obtemos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \left[\bar{R}_{(\alpha\beta)} - \frac{1}{4}\bar{g}_{\alpha\beta}\bar{R}\right] + \frac{1}{2}(\nabla_\beta\bar{\sigma}_\alpha + \nabla_\alpha\bar{\sigma}_\beta) + \frac{1}{\bar{R}}\nabla_{(\beta}\nabla_{\alpha)}\bar{R} + \bar{\sigma}_\alpha\bar{\sigma}_\beta \\ + \frac{1}{\bar{R}}(\bar{\sigma}_\alpha\partial_\beta\bar{R} + \bar{\sigma}_\beta\partial_\alpha\bar{R}) = \frac{\omega}{\bar{R}}\bar{T}_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (1.92)$$

Essa expressão pode ser escrita de forma mais compacta como:

$$\bar{R} \left[\bar{R}_{(\alpha\beta)} - \frac{1}{4} \bar{g}_{\alpha\beta} \bar{R} \right] + M_{(\alpha\beta)} = \omega \bar{T}_{\alpha\beta} \quad (1.93)$$

onde definimos o tensor simétrico $M_{(\alpha\beta)}$ por:

$$M_{(\alpha\beta)} = \nabla_{(\beta} \nabla_{\alpha)} \bar{R} + \frac{1}{2} \bar{R} (\nabla_{\beta} \bar{\sigma}_{\alpha} + \nabla_{\beta} \nabla_{\alpha} \bar{R}) + \bar{R} \bar{\sigma}_{\alpha} \bar{\sigma}_{\beta} + (\bar{\sigma}_{\alpha} \partial_{\beta} \bar{R} + \bar{\sigma}_{\beta} \partial_{\alpha} \bar{R}), \quad (1.94)$$

A equação (1.93) corresponde à equação para o campo métrico na teoria de Weyl, e é válida para qualquer escolha de gauge.

Portanto, as equações de campo da teoria de Weyl, válidas para qualquer gauge, são:

$$(\sqrt{-\bar{g}} \bar{F}^{\alpha\beta})_{,\beta} = \frac{3}{2\omega} \sqrt{-\bar{g}} \bar{g}^{\alpha\mu} [\bar{R} \bar{\sigma}_{\mu} + \partial_{\mu} \bar{R}] \quad (1.95)$$

$$\bar{R} \left[\bar{R}_{(\alpha\beta)} - \frac{1}{4} \bar{g}_{\alpha\beta} \bar{R} \right] + M_{(\alpha\beta)} = \omega \bar{T}_{\alpha\beta} \quad (1.96)$$

Pode-se demonstrar que essas equações de campo se reduzem às equações da Relatividade Geral ao se considerar um gauge em que o campo de Weyl σ é nulo. Neste gauge, da equação (1.83), temos:

$$R_{(\alpha\beta)} = \tilde{R}_{\alpha\beta}$$

Além disso, segue que $\bar{F}^{\alpha\beta} = 0$ e, assim, da equação (1.95), temos que:

$$\partial_{\mu} R = 0 \Rightarrow R = \tilde{R} = \Lambda = Constante \quad (1.97)$$

Como \bar{R} é constante, o termo $M_{(\alpha\beta)}$ em (1.94) se anula, assim como o termo $\bar{T}_{\alpha\beta}$.

Consequentemente, a equação (1.96) admite duas soluções possíveis:

$$(i) \quad \tilde{R} = 0 \quad (1.98)$$

$$(ii) \quad \tilde{R}_{(\alpha\beta)} = \frac{1}{4}g_{\alpha\beta}\Lambda \quad (1.99)$$

A primeira solução indica que as equações de Weyl correspondem exatamente às equações de Einstein no vácuo, isto é, $\tilde{R}_{\alpha\beta} = 0$. Por outro lado, a segunda solução descreve espaços com curvatura de Ricci constante. Neste caso, para $\Lambda > 0$, o espaço-tempo é identificado como sendo o espaço de Sitter. Dessa forma, a Relatividade Geral é obtida da teoria de Weyl para o caso particular que corresponde ao gauge em que σ^α é nulo. Além disso, note que, na teoria de Weyl, a constante cosmológica surge naturalmente nas equações de campo.

1.6 O segundo efeito do relógio

A teoria original de Weyl, como vimos, propõe uma possível maneira de unificar o eletromagnetismo e a gravitação através de uma modificação da geometria do espaço-tempo [9]. Tal modificação permite a variação do comprimento de vetores ao serem transportados paralelamente. Einstein logo identificou uma consequência indesejável dessa proposta, associada à não invariância do comprimento. Essa consequência ficou conhecida como “o segundo efeito do relógio” [46].

Para entender melhor isto, considere o caso particular de um campo gravitacional estático com simetria radial, assumindo também que o campo de Weyl presente é independente do tempo e possui a mesma simetria radial. Nesse caso, a única componente diferente de zero do campo σ é $\sigma_0 = \varphi(\vec{r})$. Em seguida, considere um relógio em repouso no instante $x^0 = 0$. Para esse relógio em repouso, o tempo próprio entre dois eventos infinitamente próximos coincide com a seguinte quantidade [50]:

$$d\tau = \frac{1}{c}L, \quad (1.100)$$

onde $L = \sqrt{g(V, V)}$. Por outro lado, na teoria de Weyl, de acordo com (1.29), após um tempo

$x^0 = ct$ teremos:

$$L = L_0 \exp\left(\int_0^{x^0} \sigma_0 dt\right) \quad (1.101)$$

onde L_0 é o comprimento inicial. No momento $x^0 = 0$, associamos o comprimento inicial L_0 ao período inicial τ_0 . Assim, no decorrer do tempo $x^0 = ct$ o período do relógio será dado por:

$$\tau = \tau_0 \exp\left(\int_0^{x^0} \sigma_0 dx^0\right) \Rightarrow \tau = \tau_0 \exp(\varphi t) \quad (1.102)$$

Esse resultado mostra, em particular, que se tivéssemos dois relógios atômicos idênticos¹⁰, localizados em regiões onde o campo de Weyl assume valores distintos, mediriam diferentes tempos próprios ao longo do tempo, mesmo que tenham sido sincronizados em um instante inicial. Isso implica que a frequência da radiação emitida, ou seja, as linhas espectrais, dependeriam da localização e da história passada dos átomos, o que contradiz o fato de que o espectro atômico é bem definido. Com isso, Einstein concluiu que a teoria de Weyl estava em contradição com os dados experimentais da época. [50].

Para ilustrar esse ponto, considere dois relógios c_1 e c_2 sincronizados no ponto P , como mostra a figura 1.2. Eles seguem juntos ao longo da linha de Universo de P até Q . A partir de Q , eles seguem por trajetórias distintas até R , sendo que ao longo do caminho de um deles o campo de Weyl é diferente de zero. Ao se reencontrarem em R , os relógios indicarão tempos próprios diferentes. Mesmo após seguirem juntos de R a S , os dois relógios continuarão marcando o tempo com uma variação devido à influência do campo de Weyl ao longo do caminho distinto percorrido por um deles.

A objeção feita por Einstein é fundamentada na ideia de associar o período de um relógio, isto é, seu "tique-taque", ao comprimento $L = \sqrt{g(V, V)}$ de um certo vetor γ do tipo-tempo. Além disso, assume-se que um relógio viajando ao longo de uma curva $\alpha = \alpha(\lambda)$ mede um tempo próprio $\Delta\tau$ dado pela expressão riemanniana:

$$\Delta\tau = \frac{1}{c} \int [g(V, V)]^{1/2} d\lambda = \frac{1}{c} \int [g_{\mu\nu} V^\mu V^\nu]^{1/2} d\lambda, \quad (1.103)$$

¹⁰Como é bem estabelecido, o "tique-taque" de um relógio atômico corresponde à frequência da radiação emitida na transição entre estados atômicos específicos.

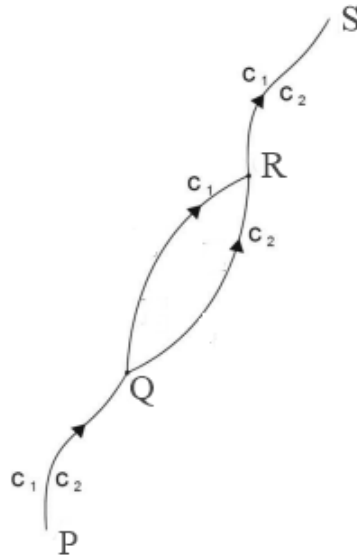


Figura 1.2: *O segundo efeito do relógio.* Fonte: Adaptação de LOBO, I.P.; ROMERO, C. [67], 2018, p. 308.

onde V é o vetor tangente à linha de Universo do relógio e c a velocidade da luz. No entanto, tanto essa definição de tempo próprio quanto o comprimento $L = \sqrt{g(V, V)}$ não são invariantes sob transformações de Weyl, ou seja, não satisfazem o princípio da invariância de calibre. Por esse motivo, pode-se argumentar que são incompatíveis com a teoria de Weyl.

No próximo capítulo, portanto, apresentamos uma definição de tempo próprio compatível com a teoria de Weyl e descrevemos uma possível modificação e reinterpretação dessa teoria¹¹.

¹¹Uma abordagem detalhada sobre a geometria de Weyl pode ser encontrada em [68].

Teoria Gravitacional Invariante de Weyl

Como discutido anteriormente, a formulação original da teoria unificada de Weyl, apesar de sua elegância matemática, apresenta limitações conceituais importantes. Uma análise cuidadosa revela que essa teoria não fornece uma descrição da interação da gravitação e do campo eletromagnético com a matéria [45]. Em outras palavras, pode-se dizer que a formulação original de Weyl estava, de certo modo, incompleta.

Neste sentido, apresentamos aqui uma discussão de uma possível modificação e reinterpretação da teoria, com o objetivo de torná-la mais completa e compatível com o espírito e filosofia de Weyl. Essa modificação consiste em uma proposta que torna tanto o tensor métrico quanto o campo de Weyl grandezas invariantes em relação a transformações de gauge [9, 44], desenvolvendo, assim, uma formulação invariante de gauge da teoria unificada de Weyl. Dessa forma, obtemos uma nova teoria alternativa da gravitação.

2.1 O tempo próprio na teoria de Weyl

É importante destacar algumas considerações fundamentais para uma definição de tempo próprio $\Delta\tau$ que seja compatível com a teoria de Weyl. Essa definição deve satisfazer as seguintes condições [69]:

- (i) $\Delta\tau$ deve ser invariante sob as transformações de Weyl;
- (ii) $\Delta\tau$ deve depender tanto da métrica $g_{\mu\nu}$ quanto do campo de gauge σ_μ ;
- (iii) No limite em que $\sigma_\mu = 0$, $\Delta\tau$ deve se reduzir à expressão dada por (1.103);
- (iv) A definição de $\Delta\tau$ deve ser escrita na forma:

$$\Delta\tau = \int \mathcal{F}(V, g, \sigma) d\lambda,$$

sendo \mathcal{F} uma função homogênea de primeiro grau em V , garantindo a invariância sob reparametrizações [70].

Uma definição de tempo próprio consistente com essas condições pode ser construída a partir de uma formulação axiomática do espaço-tempo.

Na abordagem axiomática proposta por Ehlers, Pirani e Schild [72], a estrutura do espaço-tempo é construída com base no movimento de partículas livres e pelas trajetórias dos raios luminosos. A partir desses princípios, mostra-se que a geometria resultante não é riemanniana, mas sim weylana, caracterizada pelo tripleto (M, g, σ) , onde M é uma variedade diferenciável, g uma métrica semi-riemanniana, e σ um campo de 1-forma definido sobre M . Para que essa estrutura represente um espaço-tempo de Weyl, assume-se que M é dotada de uma conexão ∇ , sem torção, que satisfaz a condição de compatibilidade:

$$\nabla g = g \otimes \sigma, \tag{2.1}$$

Nesta estrutura, o movimento de uma partícula livre é descrito por uma curva $\gamma(u)$ que corresponde a uma pre-geodésica se:

$$\frac{D\gamma'(u)}{du} = f(\gamma(u))\gamma'(u). \quad (2.2)$$

Assim, se $\gamma(\tau)$ é uma curva tipo-tempo que representa o movimento de uma partícula livre sob a ação da gravidade, ela será reparametrizada pelo tempo próprio se, e somente se,

$$g\left(\gamma'(\tau), \frac{D\gamma'(\tau)}{d\tau}\right) = 0. \quad (2.3)$$

ou seja, ela obedece a uma condição de ortogonalidade entre o vetor tangente e sua derivada covariante ao longo da curva, a qual é invariante sob transformações de Weyl [\[1\]](#). Isso conduz à definição de um relógio padrão:

Definição 2.1.1. *Uma curva tipo-tempo $\gamma : T \mapsto M$, $u \mapsto \gamma(u)$, é chamada de relógio padrão se $\frac{D\gamma'}{du}$ é ortogonal a $\gamma'(u)$.*

Sem entrar nos detalhes da dedução, é possível mostrar que qualquer curva tipo-tempo $\gamma(t)$ pode ser reparametrizada em um relógio padrão, ou seja, de modo a satisfazer essa condição. A reparametrização de γ que torna [\(2.2\)](#) uma geodésica é o que chamamos de tempo próprio.

Considerando $\tilde{\gamma}'$ como sendo a reparametrização de γ' , de modo que:

$$\gamma'(t) = \frac{d\mu}{dt} \tilde{\gamma}'(\mu), \quad (2.4)$$

e utilizando a condição de compatibilidade de Weyl, pode-se então escrever, a partir de [\(2.3\)](#), a expressão geral para o tempo próprio entre os instantes t_0 e t :

$$\Delta\tau(t) = \frac{\frac{d\tau(t_0)}{dt}}{\sqrt{-g(\gamma'(t_0), \gamma'(t_0))}} \int_{t_0}^t e^{-\frac{1}{2} \int_{t_0}^u \sigma(\gamma'(s)) ds} \sqrt{-g(\gamma'(u), \gamma'(u))} du. \quad (2.5)$$

Essa expressão é invariante sob transformações de Weyl e depende tanto da métrica g quanto do campo de Weyl σ . No caso em que $\sigma = 0$, recupera-se a expressão riemanniana do tempo próprio [\(1.103\)](#).

¹Para mais detalhes ver [\[71\]](#)

Na verdade, essa definição de tempo próprio já havia sido proposta por Perlick [76] e, posteriormente, demonstrou-se que existia uma relação entre a sua definição e a abordagem axiomática introduzida por Ehlers, Pirani e Schild.²

Vale destacar que, embora a definição de tempo próprio de Perlick seja invariante sob transformações de Weyl, ela não elimina o chamado “segundo efeito do relógio”, ou seja, a passagem do tempo em um relógio local ainda depende da trajetória seguida pelo observador. Por outro lado, sabemos hoje que, na verdade, a existência desse efeito não pode ser garantida dentro do limite de precisão dos instrumentos de medida atuais [67].

Outra definição de tempo próprio, que também satisfaz as condições acima, aparece no contexto da teoria escalar-tensorial geométrica. Nesse caso, a estrutura geométrica corresponde a uma variedade de Weyl integrável, na qual $\sigma = d\phi$, conhecida como espaço-tempo de Weyl integrável (WIST).

A definição invariante de tempo próprio nesta estrutura WIST é expressa por:

$$\Delta\tau = \int_a^b \left(e^{-\frac{\phi}{2}} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} d\lambda, \quad (2.6)$$

onde se adota a métrica invariante $\bar{g}_{\mu\nu} = e^{-\frac{\phi}{2}} g_{\mu\nu}$.

2.2 Tempo próprio invariante e o acoplamento com a matéria

Seguindo rigorosamente o Princípio de Invariância de Gauge, definimos um novo tensor métrico no gauge $R = \Lambda$. Essa métrica possibilita um procedimento invariante para considerar o acoplamento entre a geometria e a matéria.

Seja $\mathcal{M} = \{M(g, \nabla, \sigma)\}$ o conjunto de todas as variedades de Weyl, em que todas as variedades M estão relacionadas por uma transformação conforme. Assim, duas variedades $M = (g, \nabla, \sigma)$ e $\bar{M} = (\bar{g}, \nabla, \bar{\sigma})$ pertencentes a \mathcal{M} estão relacionadas por:

²Para mais detalhes sobre esta relação, ver [71].

$$\bar{g}_{\mu\nu} = e^f g_{\mu\nu}, \quad (2.7)$$

$$\bar{\sigma}_\mu = \sigma_\mu + \partial_\mu f.$$

Adotando o *gauge natural* de Weyl em \bar{M} teremos,

$$\bar{R} = \bar{g}^{\mu\nu} \bar{R}_{\mu\nu} = \Lambda$$

Assim, utilizando o fato de que $R_{\mu\nu}$ é um invariante de gauge e a expressão (2.7), obtemos:

$$e^{-f} = \frac{\Lambda}{R}. \quad (2.8)$$

Com isso, podemos definir um novo tensor métrico invariante sob transformações de Weyl, dado por:

$$\gamma_{\mu\nu} = \frac{R}{\Lambda} g_{\mu\nu}, \quad (2.9)$$

onde $\Lambda > 0$. Para verificar que essa métrica efetiva é invariante sob transformações de Weyl, considere:

$$\bar{\gamma}_{\mu\nu} = \frac{\bar{R}}{\Lambda} \bar{g}_{\mu\nu}. \quad (2.10)$$

Substituindo $\bar{R} = \bar{g}^{\mu\nu} \bar{R}_{\mu\nu} = \bar{g}^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = e^{-f} R$ e utilizando (2.7), obtemos:

$$\bar{\gamma}_{\mu\nu} = \frac{\bar{R}}{\Lambda} \bar{g}_{\mu\nu} = \frac{e^{-f} R}{\Lambda} \cdot e^f g_{\mu\nu} = \frac{R}{\Lambda} g_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu}.$$

Dessa forma, todas as quantidades construídas a partir dessa nova métrica também serão invariantes sob transformações de gauge.

De posse dessa métrica invariante $\gamma_{\mu\nu}$, podemos agora definir um tempo próprio invariante de gauge análogo à definição riemanniana (1.103), ou seja:

$$\Delta\tau = \frac{1}{c} \int \gamma[(V, V)]^{1/2} d\lambda. \quad (2.11)$$

Além disso, podemos derivar as equações de campo completas no contexto da Teoria Invariante de Weyl. Para isso, consideramos a definição de uma ação invariante para descrever a interação com a matéria. Isso é realizado por meio da definição invariante do tensor momento-energia da matéria, utilizando o procedimento padrão da relatividade geral. Portanto, definimos a seguinte variação da ação da matéria:

$$\delta S_{(m)} = \delta \left(\chi \int \sqrt{|\gamma|} L_M(\psi, \nabla\psi) d^4x \right) = \chi \int \sqrt{|\gamma|} T_{\alpha\beta}^{(m)} \delta\gamma^{\alpha\beta} d^4x, \quad (2.12)$$

onde L_M denota a densidade lagrangiana da matéria, ψ representa os campos de matéria, ∇ é o operador de derivada covariante em relação a $\gamma_{\mu\nu}$, e χ é uma constante de acoplamento. É importante observar que a forma de $L_M(\psi, \nabla\psi)$ é derivada da aplicação do mesmo princípio de mínima ação adotado na relatividade geral.

De maneira semelhante, podemos definir uma 1-forma invariante para o campo de Weyl, dada por:

$$\xi = \sigma + d(\ln R). \quad (2.13)$$

Para demonstrar que essa 1-forma é invariante de Weyl substituindo $\bar{R} = e^{-f(x)} R$ e $\bar{\sigma}_\alpha = \sigma_\alpha + f(x)_{,\alpha}$ na expressão:

$$\bar{\xi}_\alpha = \bar{\sigma}_\alpha + (\ln \bar{R})_{,\alpha} \quad (2.14)$$

Desenvolvendo o lado direito dessa expressão, temos:

$$= \sigma_\alpha + f(x)_{,\alpha} + [\ln(e^{-f(x)} R)]_{,\alpha} = \sigma_\alpha + (\ln R)_{,\alpha}$$

Portanto, a 1-forma ξ definida em (2.13) é invariante sob transformações de Weyl.

$$\bar{\xi}_\alpha = \xi_\alpha$$

2.2.1 Equações de Campo completas

Pelas considerações feitas acima, a variação da ação total S_T , será dada por:

$$\delta S_T = \delta \int \left[R^2 + \frac{\omega}{2\Lambda} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - \frac{\Lambda}{2} \right] \sqrt{|\gamma|} d^4x + \delta \int \chi L_M(\psi, \nabla\psi) \sqrt{|\gamma|} d^4x \quad (2.15)$$

Ao realizarmos o cálculo por partes e aplicar o *gauge de Weyl* ($R = \Lambda$)³ a expressão acima é reescrita como:

$$\delta S_T = 2\Lambda\delta \int \left[R - \frac{\Lambda}{2} + \frac{\omega}{2\Lambda} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + \frac{\chi}{2\Lambda} L_M \right] \sqrt{-g} d^4x$$

Seguindo o mesmo procedimento que realizamos anteriormente, ao substituirmos o escalar de curvatura R de Weyl (expresso em termos do escalar riemanniano \tilde{R}) e descartarmos os termos de fronteira, obtemos:

$$\delta S_T = 2\Lambda\delta \int \left[\tilde{R} + \frac{3}{2}\sigma_\alpha\sigma^\alpha - \frac{\Lambda}{2} + \frac{\omega}{2\Lambda} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + \frac{\chi}{2\Lambda} L_M \right] \sqrt{-g} d^4x$$

A variação dessa ação em relação à métrica $g_{\mu\nu}$ e ao campo σ_α , impondo $\delta S_T = 0$, leva às equações de campo completas:

$$\tilde{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\tilde{R}g_{\alpha\beta} + \frac{\Lambda}{4}g_{\alpha\beta} = \frac{\omega}{\Lambda}T_{\alpha\beta} - \kappa T_{\alpha\beta}^{(m)}, \quad (2.16)$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}F^{\alpha\beta})_{,\beta} = \frac{3\Lambda}{2\omega}\sigma^\alpha \quad (2.17)$$

onde identificamos $T_{\alpha\beta} = g^{\mu\nu}F_{\alpha\mu}F_{\nu\beta} + \frac{1}{4}g_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{3\Lambda}{2\omega}(\sigma_\alpha\sigma_\beta - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\sigma_\mu\sigma^\mu)$ como o tensor momento-energia do campo de Weyl, $T_{\alpha\beta}^{(m)}$ é o tensor momento-energia da matéria e $\kappa = \frac{\chi}{2\Lambda}$ como sendo uma constante de acoplamento.

³Observe que, neste *gauge*, a métrica invariant $\gamma_{\mu\nu}$ e a 1-forma ξ_α assumem respectivamente, as formas $g_{\mu\nu}$ e σ_α .

2.2.2 A geometrização do campo de Proca

A teoria original de Weyl tinha como objetivo principal a unificação do eletromagnetismo com a gravitação em uma única estrutura geométrica. Sua elegante proposta permitia incorporar o eletromagnetismo por meio da identificação do campo σ_μ com o quadripotencial eletromagnético A_μ .

No entanto, analisando as equações de campo, nota-se que as equações (2.16) e (2.17) revelam diferenças conceituais em relação às equações de Maxwell. A equação (2.17), em particular, indica que o campo σ_μ atua como sendo sua própria fonte, ao contrário das equações de Maxwell em que a fonte consiste na quadricorrente elétrica J^μ . Além disso, a equação (2.16) possui termos não lineares em σ , característica típica de teorias não lineares da eletrodinâmica.

Outro ponto importante é que não temos uma equação que descreva o movimento de partículas carregadas. Na teoria de Weyl, as únicas curvas invariantes sob as transformações de Weyl são as geodésicas afins, as quais não trazem nenhuma informação quanto ao movimento de partículas que são influenciadas tanto pelo campo gravitacional quanto pelo campo eletromagnético, que seria o análogo à equação contendo a força de Lorentz.

Por outro lado, ao analisar a ação de Weyl no gauge natural ($R = \Lambda$), escrita como:

$$S = \int d^4x, \sqrt{-g} \left(\tilde{R} + \frac{\omega}{2\Lambda} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{3}{2} \sigma_\mu \sigma^\mu - \frac{\Lambda}{2} \right). \quad (2.18)$$

nota-se que essa expressão é notavelmente semelhante à da ação do campo de Proca no espaço-tempo curvo com constante cosmológica [89]. A equação de Proca descreve a dinâmica de um bóson massivo de spin-1 [91]. A equação de Proca no espaço-tempo curvo e na ausência de fonte é expressa como [94]:

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} + \mu^2 \sigma^\nu = 0, \quad (2.19)$$

ou, de forma equivalente,

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} F^{\mu\nu}) + \mu^2 \sigma^\nu = 0. \quad (2.20)$$

A lagrangiana de matéria que descreve a dinâmica de um campo vetorial massivo no espaço-tempo curvo é dada por:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} + \frac{1}{8\pi} \mu^2 \sigma_\mu \sigma_\nu g^{\mu\nu}, \quad (2.21)$$

onde,

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu \sigma_\nu - \nabla_\nu \sigma_\mu. \quad (2.22)$$

Essa lagrangiana de matéria é semelhante à lagrangiana de Maxwell, a menos do último termo que introduz uma massa efetiva μ para o fóton [92].

Nota-se diretamente que a equação para o campo de Weyl, dada por (2.17) é formalmente equivalente à equação de Proca no vácuo. Além disso, percebemos que o tensor momento-energia do campo de Weyl também possui uma estrutura equivalente à do campo de Proca.

Nesse sentido, propomos interpretar o campo de Weyl não como um campo eletromagnético geométrico, como originalmente proposto por Weyl, mas sim como um campo de Proca geométrico. Assim, a teoria invariante de Weyl pode ser compreendida como uma teoria de gravidade modificada que incorpora um campo vetorial massivo de natureza puramente geométrica. Doravante, passaremos a nos referir a essa teoria como Teoria Gravitacional Invariante de Weyl.

Ao compararmos a equação (2.17) com a equação de Proca (2.20), é possível identificar diretamente o termo de massa:

$$m^2 = -\frac{3\Lambda}{2\omega} \quad (2.23)$$

Neste caso, é necessário que $\left(\frac{3\Lambda}{2\omega}\right)$ seja negativo, pois o termo m^2 na equação de Proca

está relacionado à massa real do campo. Assim, admitindo $\Lambda > 0$ (uma vez que estamos interpretando Λ como uma constante cosmológica positiva), concluímos que o parâmetro ω deve ser necessariamente negativo ($\omega < 0$). Portanto, para que o campo de Weyl possa ser interpretado como um campo vetorial massivo, isto é, um campo de Proca geométrico, é necessário que $\omega < 0$. Caso contrário, com $\omega > 0$, resultaria em uma massa imaginária, como explorado por [93].

A partir deste ponto, expressaremos as equações de campo da Teoria Gravitacional Invariante de Weyl incluindo o termo m^2 explicitamente, o qual é interpretado aqui como sendo a contribuição associada à massa do campo de Weyl. Assim, as equações de campo completas da teoria passam a ser escritas como:

$$\tilde{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\tilde{R} + \frac{\Lambda}{4}g_{\alpha\beta} = \frac{\omega}{\Lambda}T_{\alpha\beta}^{(P)} - \kappa T_{\alpha\beta}^{(m)} \quad (2.24)$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\beta(\sqrt{-g}F^{\alpha\beta}) = -m^2\sigma^\alpha, \quad (2.25)$$

$$\text{com } T_{\alpha\beta}^{(P)} = g^{\mu\nu}F_{\alpha\mu}F_{\nu\beta} + \frac{1}{4}g_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + m^2\left(\sigma_\alpha\sigma_\beta - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\sigma^\mu\sigma_\mu\right).$$

2.3 As geodésicas de Weyl

Na relatividade geral, a trajetória das partículas, ou seja, a equação geodésica, pode ser obtida diretamente da extremização do funcional de tempo próprio, dado por (1.103). No entanto, na teoria de Weyl o movimento das partículas livres não coincide com as geodésicas afins de Weyl (ou autoparalelas). Em outras palavras, na teoria de Weyl, o movimento das partículas não pode, em princípio, ser deduzido de um processo variacional [49].

Esse problema é conhecido na literatura como *o problema variacional inverso do cálculo das variações* [80], em que, dado um sistema de equações diferenciais, investiga-se se esse conjunto pode ser obtido a partir das equações de Euler-Lagrange para algum funcional lagrangiano.

Seja a lagrangiana de um determinado sistema, dada por:

$$\mathcal{L}(x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n, t)$$

então, as equações de movimento do mesmo podem ser obtidas através das equações de Euler-Lagrange. Por outro lado, dado um conjunto de equações de movimento, nem sempre é possível encontrar uma lagrangiana que as originou por um processo variacional [49].

Em 1887, Helmholtz [81] provou que, se tivermos um sistema de n equações diferenciais de segunda ordem, escritas na forma geral:

$$F_\mu = (\ddot{x}, \dot{x}, x) = 0, \quad (2.26)$$

com $\mu = 1, \dots, n$, esse sistema de equações só pode ser derivado de um funcional lagrangiano \mathcal{L} se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:

$$\frac{\partial F_\mu}{\partial \ddot{x}^\nu} = \frac{\partial F_\nu}{\partial \ddot{x}^\mu} \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial F_\mu}{\partial \dot{x}^\nu} + \frac{\partial F_\nu}{\partial \dot{x}^\mu} = 2 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F_\mu}{\partial \dot{x}^\nu} \right) \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial F_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial F_\nu}{\partial x^\mu} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F_\mu}{\partial \dot{x}^\nu} - \frac{\partial F_\nu}{\partial \dot{x}^\mu} \right) \quad (2.29)$$

Esse conjunto de equações é conhecido como as *condições de Helmholtz* [80, 82].

2.3.1 Condições de Helmholtz na geometria de Weyl

Na relatividade geral, o espaço-tempo é descrito por uma geometria riemanniana, na qual as partículas livres seguem geodésicas. Nesse contexto, as equações geodésicas podem ser diretamente obtidas da variação do funcional,

$$\mathcal{L} = \sqrt{g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}, \quad (2.30)$$

onde \dot{x}^μ e \dot{x}^ν são os vetores tangentes à trajetória da partícula. A equação geodésica resultante da variação tem a seguinte forma:

$$\ddot{x}^\alpha + \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0. \quad (2.31)$$

onde $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha$ são os símbolos de Christoffel associados à métrica riemanniana.

Sem entrar em detalhes, é possível demonstrar que a equação (2.31) satisfaz as condições de Helmholtz. Isso significa que existe um funcional lagrangiano \mathcal{L} tal que as equações de Euler-Lagrange de \mathcal{L} correspondem ao conjunto de equações (2.31) [49]. De fato, é bem conhecido que na relatividade geral as equações geodésicas podem ser obtidas diretamente da extremização do funcional (2.30).

Com isso, é razoável pensar que na geometria de Weyl, sendo uma generalização da geometria riemanniana, o movimento de partículas livres também corresponda às geodésicas afins (ou autoparalelas de Weyl) e que as mesmas podem ser obtidas diretamente de um princípio variacional.

Na geometria de Weyl, as equações geodésicas afins são dadas por:

$$\ddot{x}^\alpha + \Gamma_{\beta\lambda}^\alpha \dot{x}^\beta \dot{x}^\lambda = 0, \quad (2.32)$$

onde as componentes da conexão $\Gamma_{\beta\lambda}^\alpha$ de Weyl são dadas por:

$$\Gamma_{\beta\lambda}^\alpha = \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\lambda \end{matrix} \right\} - \frac{1}{2} g^{\alpha\nu} (g_{\nu\beta} \sigma_\lambda + g_{\nu\lambda} \sigma_\beta - g_{\beta\lambda} \sigma_\nu) \quad (2.33)$$

Para verificar se (2.32) satisfaz as condições de Helmholtz, devemos inicialmente reescrevê-la na forma covariante [80]. Para isso, multiplicamos ambos os lados de (2.32) pelo fator $\phi(x)g_{\mu\alpha}$, onde $\phi(x)$ é uma função arbitrária. Assim, a equação geodésica assume a forma:

$$F_\mu = \phi(x)g_{\mu\alpha} \left(\ddot{x}^\alpha + \Gamma_{\beta\lambda}^\alpha \dot{x}^\beta \dot{x}^\lambda \right). \quad (2.34)$$

Calculando a derivada de F_μ em relação a \ddot{x}^ν , obtemos:

$$\frac{\partial F_\mu}{\partial \ddot{x}^\nu} = \phi g_{\mu\nu} \quad (2.35)$$

Como o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ é simétrico, concluímos que a primeira condição de Helmholtz (2.27) é automaticamente satisfeita.

Para a condição (2.28), temos que:

$$\frac{\partial F_\mu}{\partial \dot{x}^\nu} = 2\phi g_{\mu\alpha} \Gamma_{\beta\nu}^\alpha \dot{x}^\beta = 2\phi \dot{x}^\beta [g_{\mu\alpha} \{\}_{\beta\nu}^\alpha] - \frac{1}{2} g_{\mu\alpha} (\delta_\beta^\alpha \sigma_\nu + \delta_\nu^\alpha \sigma_\beta - g_{\nu\beta} \sigma^\alpha) \quad (2.36)$$

o que resulta em,

$$\frac{\partial F_\mu}{\partial \dot{x}^\nu} = \phi \dot{x}^\beta (\partial_\beta g_{\mu\nu} + \partial_\nu g_{\mu\beta} - \partial_\mu g_{\beta\nu} - g_{\mu\beta} \sigma_\nu - g_{\mu\nu} \sigma_\beta + g_{\beta\nu} \sigma_\mu). \quad (2.37)$$

De maneira análoga, obtemos:

$$\frac{\partial F_\nu}{\partial \dot{x}^\mu} = \phi \dot{x}^\beta (\partial_\beta g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu\beta} - \partial_\nu g_{\beta\mu} - g_{\nu\beta} \sigma_\mu - g_{\mu\nu} \sigma_\beta + g_{\beta\mu} \sigma_\nu). \quad (2.38)$$

Somando (2.37) e (2.38), tem-se:

$$\frac{\partial F_\mu}{\partial \dot{x}^\nu} + \frac{\partial F_\nu}{\partial \dot{x}^\mu} = 2\phi \dot{x}^\beta (\partial_\beta g_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} \sigma_\beta). \quad (2.39)$$

Por outro lado, temos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F_\mu}{\partial \dot{x}^\nu} \right) = \dot{x}^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta} (\phi g_{\mu\nu}) = \dot{x}^\beta (g_{\mu\nu} \partial_\beta \phi + \phi \partial_\beta g_{\mu\nu}). \quad (2.40)$$

Substituindo (2.39) e (2.40) na condição de Helmholtz (2.28), obtemos a seguinte relação:

$$\sigma_\beta = -\partial_\beta \ln \phi = \partial_\beta \varphi, \quad (2.41)$$

com $\varphi = -\ln \phi$. A condição (2.41) significa que σ é uma 1-forma exata, ou seja, $\sigma = d\varphi$.

Portanto, as condições de Helmholtz só são satisfeitas se a geometria for Weyl integrável. Isso implica que não é possível derivar as equações de movimento de partículas livres a partir de um princípio variacional se não estivermos em uma geometria de Weyl integrável.

Esse resultado traduz a observação feita por Weyl de que: “[a geodésica] não pode, é claro, ser interpretada como a linha de menor comprimento porque o conceito de comprimento ao longo de uma curva não tem significado” [66]. Em outras palavras, a segunda definição da geodésica, como sendo uma linha entre dois pontos de menor comprimento, que é usada na geometria riemanniana, não pode mais ser considerada na geometria de Weyl, pois o comprimento de uma curva não é uma quantidade invariante de gauge.

2.4 Equação de conservação do tensor momento-energia

Sabemos que todas as fontes de matéria nas equações de campo de Einstein satisfazem automaticamente a equação:

$$\nabla_\beta T_{(m)}^{\alpha\beta} = 0, \quad (2.42)$$

que é uma consequência direta da segunda identidade de Bianchi. Essa é, na verdade, a equação de conservação do tensor momento-energia da matéria. É possível demonstrar que essa equação especifica equações únicas de movimento para uma partícula em um campo gravitacional, e que a trajetória resultante corresponde a uma geodésica da métrica correspondente [3].

Na Teoria Invariante de Weyl, a equação (2.42) também deve ser satisfeita. Isso requer que:

$$\nabla_\beta T_{(P)}^{\alpha\beta} = 0, \quad (2.43)$$

Para verificar essa propriedade, tomemos a derivada covariante riemanniana do tensor momento-energia associado ao campo de Weyl $T_{(P)}^{\alpha\beta}$:

$$\nabla_\beta T_{(P)}^{\alpha\beta} = \nabla_\beta \left[F^{\alpha\nu} F_\nu^\beta + \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + m^2 \left(\sigma^\alpha \sigma^\beta - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \sigma_\mu \sigma^\mu \right) \right]. \quad (2.44)$$

Expandindo os termos e utilizando diretamente a condição de Lorenz $\nabla_\mu \sigma^\mu = 0$, obtemos:

$$\begin{aligned}\nabla_\beta T_{(P)}^{\alpha\beta} &= F^{\alpha\nu} \nabla_\beta F_\nu^\beta + F_\nu^\beta \nabla_\beta F^{\alpha\nu} + \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} \nabla_\beta (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) + m^2 \left(\sigma^\beta \nabla_\beta \sigma^\alpha + \sigma^\alpha \nabla_\beta \sigma^\beta - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \nabla_\beta (\sigma^\mu \sigma_\mu) \right) \\ &= F^{\alpha\nu} \nabla_\beta (F_\nu^\beta) + F_{\nu\mu} \left[F^{\alpha\nu;\mu} + \frac{1}{2} F^{\nu\mu;\alpha} \right] + m^2 \sigma^\mu (\nabla_\mu \sigma^\alpha - \nabla^\alpha \sigma_\mu)\end{aligned}$$

Como $F^{\alpha\nu}$ é um tensor antissimétrico, o segundo termo pode ser anulado utilizando a identidade de Bianchi:

$$F_{\nu\mu} \left[F^{\alpha\nu;\mu} + \frac{1}{2} F^{\nu\mu;\alpha} \right] = \frac{1}{2} F_{\nu\mu} [F^{\mu\nu;\alpha} + F^{\alpha\mu;\nu} + F^{\nu\alpha;\mu}] = 0$$

Assim, a derivada covariante do tensor momento-energia se reduz à seguinte forma:

$$\nabla_\beta T_{(P)}^{\alpha\beta} = F_\mu^\alpha [\nabla_\beta F^{\mu\beta} + m^2 \sigma^\mu]. \quad (2.45)$$

Note que a expressão entre colchetes é exatamente a equação do campo de Weyl (2.25), logo:

$$\nabla_\beta T_{(P)}^{\alpha\beta} = 0. \quad (2.46)$$

Portanto, a equação de conservação do tensor momento-energia de matéria é satisfeita. Assim, quando aplicada a uma distribuição de poeira, isto é, $T_{(m)}^{\alpha\beta} = \rho U^\alpha U^\beta$, onde U^α é o quadrivetor velocidade, essa equação implica que cada partícula que compõe o fluido segue uma geodésica riemanniana. Dessa forma, postulamos que, na Teoria Gravitacional Invariante de Weyl, as partículas livres seguem geodésicas riemannianas, da mesma forma que na relatividade geral.

Deve-se notar que tanto o tensor momento-energia do campo de Proca geométrico, $T_{\alpha\beta}^{(P)}$, quanto o tensor da matéria, $T_{\alpha\beta}^{(m)}$, são conservados separadamente, o que significa que o campo de Proca não interage diretamente com a matéria. Este simples fato sugere que o campo de Proca geométrico pode ser um possível candidato à matéria escura.

Solução das equações de campo da Teoria Gravitacional Invariante de Weyl

A primeira solução exata das equações de campo da teoria da gravitação formulada por Einstein foi apresentada pelo alemão Karl Schwarzschild [101], em 1916, no contexto de um campo gravitacional no vácuo associado a uma distribuição de massa esfericamente simétrica. Essa solução possui importantes aplicações, como, por exemplo, na descrição do movimento planetário em torno do Sol. Posteriormente, extensões dessa solução foram obtidas, como a solução de Hans Reissner e Gunnar Nordström [102][103] que descreve uma distribuição de massa eletricamente carregada. Essa solução é conhecida como métrica de Reissner-Nordström.

No presente trabalho, as equações de campo obtidas da Teoria Gravitacional Invariante de Weyl possuem uma estrutura formalmente análoga àquelas que descrevem o sistema Einstein-Proca na relatividade geral. Em outras palavras, a dinâmica que obtemos é equivalente àquela que caracteriza o campo gravitacional na presença de um campo vetorial massivo. Esse sistema, conhecido como Einstein-Proca, tem sido objeto de notável atenção na literatura.

tura recente [105–111], tanto pelo interesse em suas soluções quanto por suas potenciais aplicações, principalmente em contextos cosmológicos [43].

No capítulo anterior, desenvolvemos os principais aspectos da Teoria Gravitacional Invariante de Weyl, bem como as respectivas equações de campo. Neste capítulo, encontramos uma possível solução dessas equações, assumindo uma distribuição estática e esfericamente simétrica, de modo análogo à solução de Schwarzschild na relatividade geral [1].

No regime de vácuo, ou seja, onde o tensor momento-energia da matéria $T_{\alpha\beta}^{(m)}$ é nulo, a equação de campo métrica se reduz à forma:

$$\tilde{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\tilde{R} + \frac{\Lambda}{4}g_{\alpha\beta} = \frac{\omega}{\Lambda}T_{\alpha\beta}^{(P)}, \quad (3.1)$$

onde, $T_{\alpha\beta}^{(P)} = F_{\alpha\mu}F_{\beta}^{\mu} + \frac{1}{4}g_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + m^2(\sigma_{\alpha}\sigma_{\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\sigma^{\mu}\sigma_{\mu})$. A presença desse tensor sugere que o campo de Weyl atua como uma fonte de curvatura, mesmo na ausência de matéria. De fato, ao contrair essa equação com a métrica inversa $g^{\alpha\beta}$, obtemos a expressão para o escalar de curvatura:

$$\tilde{R} = \Lambda - \frac{\omega}{\Lambda}T^{(P)}. \quad (3.2)$$

onde $T^{(P)} = g^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta}^{(P)}$ é o traço do tensor momento-energia associado ao campo. Isso evidencia que o campo de Weyl modifica a curvatura do espaço-tempo.

Substituindo a expressão para o escalar de curvatura, dada em (3.2), na equação de campo (3.1), podemos reescrevê-la convenientemente na forma:

$$\tilde{R}_{\alpha\beta} = \frac{\Lambda}{4}g_{\alpha\beta} + \frac{\omega}{\Lambda}\left(T_{\alpha\beta}^{(P)} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}T^{(P)}\right) \quad (3.3)$$

Esta será a equação métrica com a qual trabalharemos ao longo deste capítulo. Além dessa, é necessário considerar a equação para o campo de Weyl σ_{α} , dada por:

$$\partial_{\beta}(\sqrt{-g}F^{\alpha\beta}) = -m^2\sqrt{-g}\sigma^{\alpha}. \quad (3.4)$$

¹Resultado a ser submetido para publicação.

Portanto, o sistema de equações que vamos analisar é constituído pelas equações (3.3) e (3.4), que descrevem a dinâmica do campo métrico e do campo de Weyl, respectivamente.

3.1 Solução com simetria esférica

Para o caso de uma distribuição estática e com simetria esférica, de modo análogo à solução de Schwarzschild, o elemento de linha é convenientemente expresso da seguinte forma:

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (3.5)$$

onde $\nu = \nu(r)$ e $\lambda = \lambda(r)$.

Por outro lado, diferentemente do caso da solução de Schwarzschild, o sistema aqui considerado inclui a presença do campo de Weyl, σ_α , de natureza puramente geométrica. Como a simetria esférica e estática é herdada pelo campo σ_α , ele será estático e dependerá apenas da coordenada radial r , isto é:

$$\sigma_\alpha = (\varphi(r), 0, 0, 0). \quad (3.6)$$

Devido à simetria do sistema, as únicas componentes do tensor $F_{\alpha\beta}$ não-nulas são $F_{10} = -\partial_r \sigma_0 = -\varphi'(r)$, onde o apóstrofo (') indica a derivada em relação à coordenada radial r . É importante destacar, neste ponto, a semelhança formal do campo de Weyl com o quadripotencial eletromagnético. Assim, podemos fazer a seguinte identificação:

$$E(r) = -\varphi'(r) \quad (3.7)$$

Portanto, utilizando a definição do tensor $F_{\mu\nu}$, dada por $F_{\alpha\beta} = \partial_\beta \sigma_\alpha - \partial_\alpha \sigma_\beta$, obtém-se a seguinte representação matricial:

$$F_{\mu\nu} = E(r) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad F^{\mu\nu} = \frac{E(r)}{e^{(\nu+\lambda)}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

Da equação do campo de Weyl, temos:

$$\partial_1 (\sqrt{-g} F^{01}) = -m^2 \sqrt{-g} g^{00} \sigma_0 \quad (3.9)$$

Sendo,

$$g = -r^4 \sin^2 \theta e^{\nu+\lambda} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{-g} = r^2 \sin \theta e^{\frac{\nu+\lambda}{2}} \quad (3.10)$$

Portanto, a equação (3.9) pode ser expressa como:

$$-\partial_1 \left[r^2 \sin \theta e^{-\frac{\nu+\lambda}{2}} E(r) \right] + m^2 r^2 \sin \theta e^{\frac{\lambda-\nu}{2}} \sigma_0 = 0. \quad (3.11)$$

Desenvolvendo essa expressão, podemos reescrever a equação para o campo de Weyl na forma:

$$\sigma_0'' + \left(\frac{2}{r} - \frac{\nu'}{2} - \frac{\lambda'}{2} \right) \sigma_0' - m^2 e^\lambda \sigma_0 = 0. \quad (3.12)$$

Agora, para resolver o sistema de equações (3.3), é necessário calcular as componentes do tensor de Ricci a partir do elemento de linha (3.5), cujos resultados já são bem conhecidos, a saber:

$$\tilde{R}_{00} = e^{\nu-\lambda} \left[-\frac{\nu''}{2} + \frac{\lambda' \nu'}{4} - \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'}{r} \right] \quad (3.13)$$

$$\tilde{R}_{11} = \left[\frac{\nu''}{2} - \frac{\lambda' \nu'}{4} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\lambda'}{r} \right] \quad (3.14)$$

$$\tilde{R}_{22} = e^{-\lambda} \left[1 + \frac{r\nu'}{2} - \frac{r\lambda'}{2} \right] - 1 \quad (3.15)$$

$$\tilde{R}_{33} = (\sin^2 \theta) \tilde{R}_{22} \quad (3.16)$$

Feito isso, é necessário também determinar as componentes não-nulas do tensor momento-energia associado ao campo de Weyl, dadas por:

$$T_{00} = \frac{e^{-\lambda}}{2} \sigma_0'^2 + \frac{m^2}{2} \sigma_0^2 \quad (3.17)$$

$$T_{11} = -\frac{e^{-\nu}}{2} \sigma_0'^2 + \frac{m^2}{2} e^{\lambda-\nu} \sigma_0^2 \quad (3.18)$$

$$T_{22} = \frac{r^2}{2} e^{-(\nu+\lambda)} \sigma_0'^2 + \frac{r^2}{2} m^2 \sigma_0^2 e^{-\nu}. \quad (3.19)$$

E, finalmente,

$$T_{33} = (\sin^2 \theta) T_{22}. \quad (3.20)$$

Podemos representar o tensor momento-energia associado ao campo de Weyl na forma matricial:

$$T_{\alpha\beta} = \frac{\sigma_0'^2}{2} \begin{pmatrix} e^{-\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-\nu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 e^{-(\nu+\lambda)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta e^{-(\nu+\lambda)} \end{pmatrix} + \frac{m^2 \sigma_0^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda-\nu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 e^{-\nu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta e^{-\nu} \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

O traço desse tensor será, então:

$$T = -m^2 \sigma_0^2 e^{-\nu} \quad (3.22)$$

Finalmente, podemos analisar o sistema de equações (3.3). Notamos que as equações não triviais correspondem aos casos em que os índices assumem os valores $\alpha = \beta = 0, 1, 2, 3$, sendo:

$$e^{\nu-\lambda} \left[-\frac{\nu''}{2} + \frac{\lambda' \nu'}{4} - \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'}{r} \right] - \frac{\Lambda}{4} e^\nu = \frac{\omega}{\Lambda} \left[\frac{e^{-\lambda}}{2} \sigma_0'^2 + m^2 \sigma_0^2 \right] \quad (3.23)$$

$$\left[\frac{\nu''}{2} - \frac{\lambda' \nu'}{4} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\lambda'}{r} \right] + \frac{\Lambda}{4} e^\lambda = -\frac{\omega}{\Lambda} \frac{e^{-\nu}}{2} \sigma_0'^2 \quad (3.24)$$

$$e^{-\lambda} \left[1 + \frac{r \nu'}{2} - \frac{r \lambda'}{2} \right] - 1 - r^2 \frac{\Lambda}{4} = \frac{\omega}{\Lambda} \frac{r^2}{2} e^{-(\nu+\lambda)} \sigma_0'^2 \quad (3.25)$$

onde omitimos a equação para $\alpha = \beta = 3$, uma vez que esta é idêntica à equação (3.24), a menos de uma constante.

Se multiplicarmos a equação (3.23) por $e^{-\nu+\lambda}$ e somarmos com (3.24), vamos obter:

$$\left(\frac{\nu'}{r} + \frac{\lambda'}{r} \right) = -\frac{\omega}{\Lambda} m^2 \sigma_0^2 e^{-\nu+\lambda}, \quad (3.26)$$

Da qual podemos obter:

$$\lambda' = -\frac{\omega}{\Lambda} r m^2 \sigma_0^2 e^{-\nu+\lambda} - \nu'. \quad (3.27)$$

Por outro lado, da equação (3.25) podemos definir uma expressão para e^λ apenas em termos de ν e σ . Multiplicando a equação (3.25) por e^λ , obtemos:

$$1 + \frac{r \nu'}{2} - \frac{r \lambda'}{2} - e^\lambda - r^2 \frac{\Lambda}{4} e^\lambda = \frac{\omega}{\Lambda} \frac{r^2}{2} e^{-\nu} \sigma_0'^2 \quad (3.28)$$

Substituindo agora a expressão de λ' dada por (3.27), e após algumas manipulações algébricas, obtemos:

$$e^\lambda \left[1 + r^2 \frac{\Lambda}{4} - \frac{\omega}{\Lambda} \frac{r^2}{2} e^{-\nu} \sigma_0'^2 \right] = 1 + r\nu' - \frac{\omega}{\Lambda} \frac{r^2}{2} e^{-\nu} \sigma_0'^2 \quad (3.29)$$

Portanto, isolando e^λ , temos que:

$$e^\lambda = \frac{1 + r\nu' - \frac{\omega}{\Lambda} \frac{r^2}{2} e^{-\nu} \sigma_0'^2}{1 + r^2 \frac{\Lambda}{4} - \frac{\omega}{\Lambda} \frac{r^2}{2} e^{-\nu} \sigma_0'^2} \quad (3.30)$$

Por fim, substituindo as expressões de e^λ e λ' nas equações (3.24) e (3.12), podemos reescrevê-las, respectivamente, nas seguintes formas:

$$\nu'' + \nu'^2 + \frac{2\nu'}{r} = -\frac{\omega}{\Lambda} e^{-\nu} \sigma_0'^2 + \left[\left(2 + \frac{r\nu'}{2} \right) \frac{\omega}{\Lambda} m^2 \sigma_0^2 e^{-\nu} + \frac{\Lambda}{2} \right] \left(\frac{1 + r\nu' - \frac{\omega}{\Lambda} \frac{r^2}{2} e^{-\nu} \sigma_0'^2}{1 + r^2 \frac{\Lambda}{4} - \frac{\omega}{\Lambda} \frac{r^2}{2} e^{-\nu} \sigma_0'^2} \right) \quad (3.31)$$

$$\sigma_0'' + \frac{2}{r} \sigma_0'^2 + m^2 \sigma_0 \left(\frac{\omega}{2\Lambda} r \sigma_0 \sigma_0' e^{-\nu} - 1 \right) \left[\frac{1 + r\nu' - \frac{\omega}{\Lambda} \frac{r^2}{2} e^{-\nu} \sigma_0'^2}{1 + r^2 \frac{\Lambda}{4} - \frac{\omega}{\Lambda} \frac{r^2}{2} e^{-\nu} \sigma_0'^2} \right] = 0. \quad (3.32)$$

Assim, obtemos um sistema de equações diferenciais não lineares e acopladas para as funções desconhecidas ν e σ_0 . Esse sistema de equações corresponde ao sistema de equações de Einstein-Proca² [111] com constante cosmológica.

Como o sistema de equações resultante é não linear e acoplado, uma solução analítica seria extremamente difícil de obter. Por essa razão, na seção seguinte, buscaremos encontrar uma solução aproximada para o problema.

3.2 Solução aproximada no regime de campo fraco

Neste estudo, admitimos a métrica com simetria esférica na forma aproximada:

$$ds^2 = (1 + \varepsilon\nu)dt^2 - (1 + \varepsilon\lambda)dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (3.33)$$

²Vale ressaltar que, até o presente momento, uma solução exata para o sistema Einstein-Proca ainda não foi encontrada.

onde ν e λ são funções de r e $\varepsilon \ll 1$.

A partir desse elemento de linha, podemos calcular as componentes do tensor de Ricci riemanniano. Considerando apenas os termos de primeira ordem em ε , as componentes não-nulas do tensor de Ricci são:

$$\tilde{R}_{00} = -\frac{\varepsilon}{2}\nu'' - \frac{\varepsilon}{r}\nu', \quad (3.34)$$

$$\tilde{R}_{11} = \frac{\varepsilon}{2}\nu'' - \frac{\varepsilon}{r}\lambda', \quad (3.35)$$

$$\tilde{R}_{22} = \frac{1}{2}r\varepsilon\nu' - \frac{1}{2}r\varepsilon\lambda' - \varepsilon\lambda, \quad (3.36)$$

$$\tilde{R}_{33} = (\sin^2 \theta)\tilde{R}_{22}. \quad (3.37)$$

Observe que todas as componentes do tensor de Ricci são de ordem ε para essa métrica aproximada. Portanto, pela equação de campo (3.3), assumimos que a constante cosmológica Λ e o tensor momento-energia $T_{\alpha\beta}^{(P)}$ também devem ser de ordem ε . Isso implica que o campo de Weyl deve possuir um valor pequeno, da ordem de $\sqrt{\varepsilon}$. Dessa forma, devido à simetria esférica e estática da métrica, o campo σ pode ser escrito na forma:

$$\sigma_\mu = (\sqrt{\varepsilon}\varphi(r), 0, 0, 0) \quad (3.38)$$

Assim, todas as componentes do tensor momento-energia associado ao campo de Weyl serão de ordem ε .

Pelas considerações apresentadas acima, a única componente não-trivial da equação de campo (3.4), será para $\alpha = 0$ e $\beta = 1$. Portanto:

$$\partial_1(\sqrt{-g} F^{01}) = -m^2 \sigma^0 \sqrt{-g}. \quad (3.39)$$

Dada a forma da métrica, é possível ver facilmente que, na aproximação de primeira ordem em ε , temos:

$$\sqrt{-g} = r^2 \sin \theta \left[1 + \frac{\varepsilon}{2}(\nu + \lambda) \right] \quad (3.40)$$

Assim, a equação do campo σ fica:

$$-\frac{d}{dr} \left(r^2 \sin \theta \left[1 + \frac{\varepsilon}{2}(\nu + \lambda) \right] \sqrt{\varepsilon} \varphi'(r) [1 - \varepsilon(\lambda + \nu)] \right) = -m^2 r^2 \sin \theta \left[1 + \frac{\varepsilon}{2}(\nu + \lambda) \right] (1 - \varepsilon\nu) \sqrt{\varepsilon} \varphi(r),$$

É importante ressaltar que, para manter o termo de massa do campo de Weyl, (uma vez que assumimos que Λ é da ordem de ε e m é proporcional a $\Lambda/|\omega|$), admitimos que o parâmetro livre ω possui uma magnitude adequada para calibrar a pequenez de Λ , assegurando assim a consistência da expressão para a massa. Portanto, desprezando os termos de ordem $\varepsilon^{3/2}$, por serem de ordem superior a ε e, conseqüentemente, irrelevantes nesta aproximação, a expressão acima é reescrita como:

$$-\frac{d}{dr} \left(r^2 \sqrt{\varepsilon} \varphi'(r) \right) = -m^2 r^2 \sqrt{\varepsilon} \varphi(r),$$

e, finalmente:

$$\varphi''(r) + \frac{2}{r} \varphi'(r) - m^2 \varphi(r) = 0,$$

cuja solução é dada na forma:

$$\varphi(r) = \frac{C_1}{r} e^{-mr} + \frac{C_2}{r} e^{mr}.$$

Definindo as constantes como sendo $C_2 = 0$ e $C_1 = q_g$, onde q_g é uma espécie de *carga geométrica*, obtemos para o campo de Weyl a expressão final:

$$\varphi(r) = \frac{q_g}{r} e^{-mr}. \quad (3.41)$$

Podemos observar que o campo de Weyl apresenta um comportamento idêntico ao potencial de Yukawa, semelhante ao campo de Proca na Relatividade Geral. Por fim, o potencial vetor de Weyl, na aproximação de campo fraco, será dado por:

$$\sigma_\mu = \sqrt{\varepsilon} \frac{qg}{r} e^{-mr} \delta_{0\mu}. \quad (3.42)$$

Agora, vamos analisar a equação (3.3) para essa aproximação. Para isso, é necessário determinar as componentes não-nulas do tensor momento-energia de Weyl nessa aproximação de campo fraco.

As componentes não-nulas do tensor momento-energia de Weyl são dadas por:

$$T_{00} = \frac{1}{2} \varepsilon \varphi'(r)^2 + \frac{m^2}{2} \varepsilon \varphi(r)^2,$$

$$T_{11} = -\frac{1}{2} \varepsilon \varphi'(r)^2 + \frac{m^2}{2} \varepsilon \varphi(r)^2,$$

$$T_{22} = \frac{1}{2} r^2 \varepsilon \varphi'(r)^2 + \frac{m^2}{2} \varepsilon r^2 \varphi(r)^2,$$

$$T_{33} = \sin^2 \theta T_{22}.$$

Assim, a partir da equação de campo (3.3) obtemos para os casos $\alpha = \beta = 0$ e $\alpha = \beta = 1$, respectivamente, as seguintes equações:³

$$-\frac{\nu''\varepsilon}{2} - \frac{\nu'\varepsilon}{r} = \frac{\Lambda}{4} + \frac{\omega}{\Lambda} \left(\frac{1}{2} \varepsilon \varphi'(r)^2 + \frac{m^2}{2} \varepsilon \varphi(r)^2 + \frac{m^2}{2} \varepsilon \varphi(r)^2 \right) \quad (3.43)$$

$$\frac{\nu''\varepsilon}{2} - \frac{\lambda'\varepsilon}{r} = -\frac{\Lambda}{4} + \frac{\omega}{\Lambda} \left(-\frac{1}{2} \varepsilon \varphi'(r)^2 + \frac{m^2}{2} \varepsilon \varphi(r)^2 - \frac{m^2}{2} \varepsilon \varphi(r)^2 \right), \quad (3.44)$$

³Lembrando que assumimos que Λ é da ordem de ε .

Somando essas equações, obtemos:

$$-\frac{\varepsilon}{r}\nu' - \frac{\varepsilon}{r}\lambda' = \frac{\omega}{\Lambda}m^2\varepsilon\varphi(r)^2$$

da qual podemos extrair a seguinte relação para a função $\nu(r)$ da métrica:

$$\nu' = -\lambda' - \frac{\omega}{\Lambda}m^2r\varphi(r)^2 \quad (3.45)$$

Agora, a equação remanescente de (3.3) para o caso $\alpha = \beta = 2$, é:

$$\frac{1}{2}r\nu'\varepsilon - \frac{1}{2}r\lambda'\varepsilon - \lambda\varepsilon = -\frac{\Lambda}{4}r^2 + \frac{\omega}{\Lambda}\frac{1}{2}r^2\varepsilon\varphi'(r)^2$$

Substituindo nesta equação a expressão anteriormente obtida para ν' , dada por (3.45), obtemos:

$$-r\lambda'\varepsilon - \lambda\varepsilon - \frac{\omega}{2\Lambda}m^2r^2\varepsilon\varphi(r)^2 = -\frac{\Lambda}{4}r^2 + \frac{\omega}{2\Lambda}r^2\varepsilon\varphi'(r)^2,$$

Por fim, encontramos a seguinte equação para a função $\lambda(r)$ da métrica:

$$-(r\lambda)' = -\frac{\Lambda}{4\varepsilon}r^2 + \frac{\omega}{2\Lambda}\frac{q_g^2}{r^2}e^{-2mr} + \frac{\omega}{\Lambda}m\frac{q_g^2}{r}e^{-2mr} + \frac{\omega}{\Lambda}m^2q_g^2e^{-2mr}$$

Integrando ambos os lados dessa equação em relação a r , obtemos a seguinte solução para a função métrica λ :

$$\lambda(r) = \frac{C_3}{r} + \frac{\Lambda}{12\varepsilon}r^2 + \frac{\omega}{\Lambda}\frac{q_g^2}{r^2}e^{-2mr} + \frac{\omega}{2\Lambda}m\frac{q_g^2}{r}e^{-2mr} \quad (3.46)$$

onde C_3 é uma constante de integração. Dessa forma, ao utilizarmos a relação (3.45), a função métrica $\nu(r)$ será dada por:

$$\nu(r) = -\frac{C_3}{r} - \frac{\Lambda}{12\varepsilon}r^2 - \frac{\omega}{\Lambda}\frac{q_g^2}{r^2}e^{-2mr} - \frac{\omega}{2\Lambda}m\frac{q_g^2}{r}e^{-2mr} - \frac{\omega}{\Lambda}m^2q_g^2 \int \frac{e^{-2mr}}{r}dr \quad (3.47)$$

ou, de forma equivalente,

$$\nu(r) = -\frac{C_3}{r} - \frac{\Lambda}{12\varepsilon}r^2 - \frac{\omega}{\Lambda}\frac{q_g^2}{r^2}e^{-2mr} + \frac{\omega}{2\Lambda}mq_g^2 \int \frac{e^{-2mr}}{r^2}dr$$

Logo, a solução no regime de campo fraco, considerando a aproximação de primeira ordem em ε , na Teoria Invariante de Weyl, é dada por:

$$\begin{aligned} ds^2 = & \left(1 - \frac{2m_g}{r} - \frac{\Lambda}{12}r^2 - \frac{\varepsilon\omega}{\Lambda}\frac{q_g^2}{r^2}e^{-2mr} - \frac{\varepsilon\omega}{2\Lambda}m\frac{q_g^2}{r}e^{-2mr} - \frac{\varepsilon\omega}{\Lambda}m^2q_g^2 \int_r^\infty \frac{e^{-2mr}}{r}dr \right) dt^2 \\ & - \left(1 + \frac{2m_g}{r} + \frac{\Lambda}{12}r^2 + \frac{\varepsilon\omega}{\Lambda}\frac{q_g^2}{r^2}e^{-2mr} + \frac{\varepsilon\omega}{2\Lambda}m\frac{q_g^2}{r}e^{-2mr} \right) dr^2 \\ & - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \end{aligned} \quad (3.48)$$

onde identificamos $C_3 = \frac{2m_g}{\varepsilon}$, sendo m_g a *massa geométrica* e m corresponde ao que interpretamos como o termo referente à massa do campo de Weyl.

Ao considerarmos $\Lambda = 0$, esse resultado torna-se equivalente à solução aproximada obtida por [111] por meio de análise perturbativa no contexto da Relatividade Geral, ao estudar a dinâmica do espaço-tempo determinada pela presença de um campo de Proca. Além disso, esse resultado também é semelhante ao obtido por [110], que analisou os efeitos de um campo de Proca na dinâmica do espaço-tempo Reissner–Nordström-de Sitter. Aqui, diferentemente, o campo vetorial massivo é geométrico. Dessa forma, nota-se uma forte semelhança entre o campo de Weyl e o que poderíamos chamar de campo de Proca geométrico. Neste sentido, podemos dizer que, de certo modo, o campo de Weyl na Teoria Invariante de Weyl efetivamente se comporta como um campo de Proca geométrico.

Para o caso em que a massa m do campo de Weyl é muito pequena⁴, sendo $m \sim \sqrt{\varepsilon}$, é imediato perceber que o potencial vetor de Weyl assume a forma do potencial Coulombiano para a ordem do campo $\sqrt{\varepsilon}$, isto é:

⁴Sendo $m^2 = \frac{3\Lambda}{2|\omega|}$, onde assumimos que $\Lambda \sim \varepsilon$, podemos considerar o caso em que m é da ordem de $\sqrt{\varepsilon}$, deixando ω livre.

$$\sigma_\mu = \sqrt{\varepsilon} \frac{q_g}{r} \delta_{0\mu}.$$

Além disso, a solução para a métrica, assumindo que $m \sim \sqrt{\varepsilon}$ e desprezando os termos de ordem superior a ε , se reduz à forma:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m_g}{r} - \frac{\Lambda}{12} r^2 - \frac{\varepsilon \omega}{2\Lambda} \frac{q_g^2}{r^2} \right) dt^2 - \left(1 + \frac{2m_g}{r} + \frac{\Lambda}{12} r^2 + \frac{\varepsilon \omega}{2\Lambda} \frac{q_g^2}{r^2} \right) dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (3.49)$$

que corresponde à soluç ao que se conhece na literatura como espaço-tempo de Reissner-Nordström-de Sitter [99].

Para recuperar a solução de Schwarzschild-de Sitter, poderíamos admitir que a carga q_g seja nula ou suficientemente pequena, de modo que seu quadrado possa ser desprezado. Além disso, note que no limite assintótico em que $r \rightarrow \infty$, o espaço-tempo tende naturalmente ao espaço-tempo de Sitter.

Ondas gravitacionais na Teoria Gravitacional Invariante de Weyl

As ondas gravitacionais foram previstas teoricamente por Einstein em 1918, a partir da análise de uma versão linearizada das equações de campo da Relatividade Geral [114]. Um tratamento mais completo e matematicamente rigoroso do assunto foi desenvolvido posteriormente por Choquet-Bruhat, na década de 1950, fundamentando-se nos conceitos de *hiperbolicidade global*, estabelecidos por Leray [115].

Neste capítulo, buscamos investigar a propagação de ondas gravitacionais no contexto da Teoria Gravitacional Invariante de Weyl, derivando uma versão linearizada das equações de campo [116].

4.1 Equações de campo linearizadas

Adotamos aqui um tratamento baseado na aproximação de campo fraco, em que a métrica do espaço-tempo é expressa como uma perturbação de primeira ordem da métrica de Minkowski em torno de um pequeno parâmetro adimensional ε , isto é:

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + \varepsilon h_{\alpha\beta}, \quad (4.1)$$

onde $\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ é a métrica de Minkowski e $h_{\alpha\beta}$ é um campo tensorial simétrico. Nessa aproximação, manteremos apenas os termos de primeira ordem em ε . Como veremos, a linearização das equações de campo, por meio dessa aproximação, leva a equações de onda para os campos $g_{\mu\nu}$ e σ_μ .

Um cálculo direto fornece as expressões linearizadas para a conexão de Levi-Civita $\tilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}$, o tensor de Ricci $\tilde{R}_{\alpha\beta}$ e o escalar de Ricci \tilde{R} .

Para a conexão riemanniana, obtemos:

$$\tilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}\varepsilon (h^\alpha_{\beta,\gamma} + h^\alpha_{\gamma,\beta} - h_{\beta\gamma,\alpha}), \quad (4.2)$$

Adotando a seguinte convenção para o tensor de Riemann:

$$\tilde{R}^\alpha_{\beta\gamma\eta} = \Gamma^\alpha_{\gamma\beta,\eta} - \Gamma^\alpha_{\eta\beta,\gamma} + \Gamma^\alpha_{\delta\eta}\Gamma^\delta_{\gamma\beta} - \Gamma^\alpha_{\delta\gamma}\Gamma^\delta_{\eta\beta}, \quad (4.3)$$

obtemos, conseqüentemente, as seguintes expressões linearizadas para o tensor de Ricci e para o escalar de Ricci:

$$\tilde{R}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon (\square h_{\alpha\beta} + h_{,\alpha\beta} - h^\gamma_{\alpha,\beta\gamma} - h^\gamma_{\beta,\alpha\gamma}), \quad (4.4)$$

$$\tilde{R} = \frac{1}{2}\varepsilon (\square h - h^{\gamma\beta}_{,\beta\gamma}), \quad (4.5)$$

onde $\square = \eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta$ é o operador D'Alembertiano definido no espaço-tempo de Minkowski. Nesta aproximação, os índices são levantados e abaixados utilizando a métrica $\eta_{\alpha\beta}$ [50].

Neste ponto, vamos relembrar alguns aspectos fundamentais da abordagem de aproximação de campo fraco. Sob uma transformação de coordenadas infinitesimal do tipo:

$$\bar{x}^\alpha = x^\alpha + \varepsilon \xi^\alpha(x) \quad (4.6)$$

é fácil demonstrar que o tensor métrico se transforma como:

$$\bar{g}_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + \varepsilon h_{\alpha\beta} - \varepsilon \xi_{\alpha,\beta} - \varepsilon \xi_{\beta,\alpha}, \quad (4.7)$$

levando à seguinte lei de transformação para a perturbação métrica $h_{\alpha\beta}$:

$$\bar{h}_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha}, \quad (4.8)$$

Essa transformação é conhecida na literatura como uma *transformação de calibre*, onde as funções ξ_α são arbitrárias. Um ponto importante a ser destacado é que o tensor de curvatura $\tilde{R}_{\alpha\beta\gamma\eta}$, o tensor de Ricci $\tilde{R}_{\alpha\beta}$ (4.4) e o escalar de curvatura \tilde{R} (4.5) são invariantes de calibre. Isso significa que suas formas não se alteram sob a transformação infinitesimal de coordenadas descrita por (4.6).

Introduzimos agora um novo tensor, $\psi_{\alpha\beta}$, definido por:

$$\psi_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}h, \quad (4.9)$$

Esse tensor, conhecido como *tensor de perturbação métrico de traço reverso*, é bastante útil, pois permite eliminar termos que envolvem o traço de $h_{\alpha\beta}$ nas expressões de (4.4) e (4.5). O tensor de Ricci, o escalar de curvatura e o tensor de Einstein, escritos em termos de $\psi_{\alpha\beta}$ tornam-se, respectivamente:

$$\tilde{R}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon \left(\square h_{\alpha\beta} - \psi^\gamma_{\alpha,\beta\gamma} - \psi^\gamma_{\beta,\alpha\gamma} \right), \quad (4.10)$$

$$\tilde{R} = \frac{1}{2}\varepsilon \left(\square h - 2\psi^{\gamma\beta}_{,\beta\gamma} \right). \quad (4.11)$$

$$\tilde{G}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon \left(\square h_{\alpha\beta} + \eta_{\alpha\beta}\psi^{\gamma\delta}_{,\gamma\delta} - \psi^\gamma_{\alpha,\beta\gamma} - \psi^\gamma_{\beta,\alpha\gamma} \right) \quad (4.12)$$

onde $\tilde{G}_{\alpha\beta} = \tilde{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\tilde{R}$. Por outro lado, no estudo das ondas gravitacionais, é comum adotar

o chamado *gauge de Einstein* (ou *gauge de Donder*)¹ [4]. Esse gauge permite simplificar consideravelmente as equações de campo linearizadas, sendo ele definido pela condição:

$$\partial_\alpha \psi^\alpha{}_\beta = 0, \quad (4.13)$$

Aplicando (4.13), em (4.10) e (4.11), obtemos:

$$\tilde{R}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon \square h_{\alpha\beta}, \quad \tilde{R} = \frac{1}{2}\varepsilon \square h. \quad (4.14)$$

Portanto, teremos:

$$\frac{1}{2}\varepsilon \square \psi_{\alpha\beta} = -\frac{\Lambda}{4}\eta_{\alpha\beta} + \frac{\omega}{\Lambda}T_{\alpha\beta}^{(P)} - \kappa T_{\alpha\beta}^{(m)} \quad (4.15)$$

Considerando a transformação de coordenadas infinitesimal dada por (4.6), a quantidade $\psi^\alpha{}_\beta$ transforma-se da seguinte forma:

$$\partial_\alpha \bar{\psi}^\alpha{}_\beta = \partial_\alpha \psi^\alpha{}_\beta - \square \xi_\beta = 0. \quad (4.16)$$

Assim, a condição do *gauge de Einstein* (4.13) é preservada sob transformações de coordenadas do tipo (4.6), desde que ξ_β satisfaça a equação de onda homogênea:

$$\square \xi_\beta = 0. \quad (4.17)$$

4.1.1 A equação linearizada do campo métrico

Para que a equação de campo (4.15) seja consistente, o lado direito da igualdade deve apresentar a mesma ordem de aproximação assumida para o campo métrico. Neste caso, consideramos que o campo de Weyl seja dado por:

¹Também chamado de *gauge de Lorentz*.

$$\sigma^\alpha = \sqrt{\varepsilon} A^\alpha, \quad (4.18)$$

o que garante que os componentes do tensor momento-energia associado ao campo de Weyl $T_{\alpha\beta}^{(P)}$ sejam da ordem de ε . Além disso, para simplificar a análise da equação de campo, assumiremos que a constante cosmológica é um termo de ordem superior em ε e, portanto, pode ser desprezada nesta aproximação. Assim, a equação do campo métrico (4.15) torna-se

$$\square\psi_{\alpha\beta} = 2\frac{\omega}{\Lambda}\theta_{\alpha\beta}^{(P)} - 2\kappa T_{\alpha\beta}^{(m)}, \quad (4.19)$$

onde $\theta_{\alpha\beta}^{(P)}$ representa a forma linearizada do tensor momento-energia $T_{\alpha\beta}^{(P)}$ após a substituição de (4.18).

A equação (4.19) descreve como as perturbações do campo métrico $\psi_{\alpha\beta}$ se propagam no espaço-tempo. É importante observar a presença do termo representando o tensor momento-energia do campo de Weyl em sua forma linearizada $\theta_{\alpha\beta}^{(P)}$, que também é responsável pelas perturbações gravitacionais. Em outras palavras, mesmo no caso em que a matéria está ausente, permanece o tensor momento-energia do campo de Weyl que atua como fonte do campo métrico. Se o campo de Weyl for zero e a constante cosmológica for mantida, a equação (4.19) se reduz à conhecida equação linearizada de Einstein com constante cosmológica (caso estudado por [117] e [118]).

4.1.2 A equação linearizada do campo de Weyl

A equação do Campo de Weyl (2.25), no regime de campo fraco, assume a forma:

$$\left(1 - \frac{\varepsilon h}{2}\right) \left\{ \partial_\beta \partial^\beta \sigma^\alpha - \partial^\alpha \partial_\beta \sigma^\beta + \partial_\beta \left[\frac{\varepsilon h}{2} (\partial^\beta \sigma^\alpha - \partial^\alpha \sigma^\beta) \right] \right\} = -m^2 \sigma^\alpha.$$

Por outro lado, não é difícil verificar que, na aproximação de ordem inferior em ε , a “*condição de Lorenz*” para o campo de Weyl, isto é, $\partial_\beta \sigma^\beta = 0$, é satisfeita. Além disso,

²Por conveniência, absorvemos o parâmetro ε redefinindo $\psi_{\alpha\beta} \rightarrow \varepsilon\psi_{\alpha\beta}$.

nesta aproximação de campo fraco, o campo de Weyl é dado por (4.18), o que leva à seguinte equação:

$$\square A^\alpha + m^2 A^\alpha = 0, \quad (4.20)$$

onde $\square = \eta^{\mu\beta} \partial_\mu \partial_\beta = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$ é, novamente, o operador d'Alembertiano no espaço-tempo de Minkowski³. Essa equação revela que, no regime de campo fraco, o campo de Weyl se comporta como uma onda massiva no vácuo, análoga às ondas descritas pela teoria de Proca e, portanto, não se propaga com a velocidade da luz. Pode-se especular que essas ondas tenham sido geradas durante o período inflacionário e que, por analogia com a radiação cósmica de fundo, espera-se que elas permeiem o Universo.

Portanto, segundo a Teoria Gravitacional Invariante de Weyl, as equações linearizadas (4.19) e (4.20) tomadas em conjunto descrevem a propagação de perturbações na geometria do espaço-tempo.

4.2 Solução da equação do campo de Weyl

Na seção anterior, obtivemos as equações (4.19) e (4.20), resultantes da linearização das equações de campo da Teoria Gravitacional Invariante de Weyl. Neste ponto, buscamos encontrar soluções para essas equações, bem como discutir possíveis interpretações físicas.

Começamos com a equação (4.20), que descreve a dinâmica do campo de Weyl. A solução geral dessa equação é bem conhecida e pode ser expressa como uma superposição de ondas planas:

$$A^\alpha(x^\mu) = \frac{1}{2\pi^4} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{A}^\alpha(k_\mu) e^{ik_\mu x^\mu} d^4k \quad (4.21)$$

onde \mathcal{A}^α representa a amplitude associada a cada onda caracterizada pelo vetor de onda $k^\alpha = (\omega_0, \vec{k})$, que descreve a direção de propagação e a frequência da onda.

Seguindo o procedimento usual, substituímos a solução (4.21) na equação (4.20), ob-

³Aqui, estamos adotando $c = 1$.

tendo a relação de dispersão $k_\alpha k^\alpha = m^2$, ou seja,

$$-\omega_0^2 + k^2 + m^2 = 0, \quad (4.22)$$

onde denotamos $k = |\vec{k}|$. Para um pacote de ondas de Weyl, a velocidade de fase de cada onda será dada por:

$$v_f = \frac{\omega_0}{k} = \left(1 - \frac{m^2}{\omega_0^2}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

enquanto a velocidade de grupo, ou seja, a velocidade com que o envelope se propaga, será dada por:

$$v_g = \frac{d\omega_0}{dk} = \left(1 - \frac{m^2}{\omega_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

As equações acima fornecem as expressões para a velocidade de fase e a velocidade de grupo em termos da frequência angular ω_0 , da velocidade da luz (aqui adotada como $c = 1$) e da massa m do campo de Weyl. Note que, assim como na teoria de Proca, essas velocidades são diferentes. À medida que a frequência angular aumenta, a velocidade de fase também aumenta, enquanto a velocidade de grupo diminui. Isso implica que teremos dispersão do pacote de ondas.

Essas equações mostram também que essas ondas de Weyl se propagam com uma velocidade menor que a da luz. Por outro lado, uma onda com uma frequência muito alta tende a se propagar com uma velocidade próxima à velocidade da luz.

4.2.1 Polarização das ondas de Weyl

Na teoria de Proca, as ondas admitem, além das polarizações transversais, uma polarização longitudinal. Isto difere do eletromagnetismo de Maxwell, que, devido à liberdade de gauge e à ausência de massa do campo, admite apenas dois estados de polarização transversal. A presença do termo de massa na lagrangiana de Proca quebra a invariância por transformações de gauge, o que impede a eliminação da componente longitudinal por uma

escolha de calibre [89, 119].

Analisemos agora as possíveis polarizações para as ondas associadas ao campo de Weyl. Considere uma onda plana de Weyl propagando-se na direção z . O vetor de onda é dado por:

$$k^\mu = (\omega, 0, 0, k) \quad \Rightarrow \quad k_\mu = (\omega, 0, 0, -k).$$

onde identificamos k_3 apenas como k . A partir da equação de movimento, obtemos a condição:

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \tag{4.23}$$

onde \mathcal{A}^μ representa o vetor de polarização. Assim, temos:

$$\begin{aligned} \partial_\mu A^\mu &= k_\mu \mathcal{A}^\mu = \omega \mathcal{A}^0 - k \mathcal{A}^3 = 0, \\ \Rightarrow \mathcal{A}^0 &= \frac{k}{\omega} \mathcal{A}^3. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Usando a relação de dispersão $k^2 = \omega^2 - m^2$, obtemos:

$$\mathcal{A}^0 = \pm \sqrt{1 - \frac{m^2}{\omega^2}} \mathcal{A}^3.$$

Essa relação mostra que a componente \mathcal{A}^0 e a componente longitudinal \mathcal{A}^3 não são independentes, o que implica na eliminação de um grau de liberdade do campo. Assim, as componentes que possuem significado físico são as componentes transversais \mathcal{A}^1 e \mathcal{A}^2 , e a componente longitudinal \mathcal{A}^3 .

Portanto, as ondas associadas ao campo de Weyl, assim como as ondas da teoria de Proca, apresentam dois modos de polarização transversais, oscilando nas direções perpendiculares à propagação x e y , e um modo longitudinal, oscilando na direção z de propagação da onda [120].

4.3 Solução da equação do campo métrico no vácuo

Nesta seção, investigamos a propagação das perturbações do campo gravitacional no vácuo, ou seja, na ausência de matéria que, neste caso, é dada pela equação:

$$\square \psi_{\alpha\beta} = 2 \frac{\omega}{\Lambda} \theta_{\alpha\beta}^{(P)}, \quad (4.25)$$

onde $\theta_{\alpha\beta}^{(P)}$ é o tensor momento-energia do campo de Weyl A^α que aparece aqui como uma fonte de perturbação da métrica. Por outro lado, como discutido anteriormente, o campo de Weyl A^α se propaga como ondas dispersivas no espaço-tempo. A origem dessas ondas poderia ser atribuída ao campo que gerou a inflação, portanto, de certa forma, seria apropriado chamá-las de "ondas primordiais de Weyl". Em analogia com a radiação cósmica de fundo, essas ondas de Weyl devem permear todo o Universo.

Nesta seção, consideramos um modelo bastante simplificado no qual essas "ondas primordiais de Weyl" poderiam gerar uma perturbação no campo métrico. Consideramos, então, uma solução particular da equação (4.20) em que o campo de Weyl corresponde a uma onda plana:

$$A^\alpha = \xi^\alpha \cos(k_\rho x^\rho), \quad (4.26)$$

onde a condição de Lorenz $\partial_\alpha A^\alpha = 0$ implica que $k_\alpha \xi^\alpha = 0$, ou seja, isso significa que o vetor de polarização ξ^α do campo de Weyl é ortogonal ao vetor de onda.

O tensor momento-energia para a primeira ordem em ε , é dado por:

$$\theta_{\alpha\beta}^{(P)} = F_{\alpha\mu} F_{\beta}^{\mu} + \frac{1}{4} \eta_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + m^2 \left(A_\alpha A_\beta - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} A^\mu A_\mu \right), \quad (4.27)$$

sendo $F_{\alpha\mu} = (\partial_\mu A_\alpha - \partial_\alpha A_\mu)$. Da expressão (4.26), obtemos para o tensor momento-energia linearizado $\theta_{\alpha\beta}^{(P)}$ associado à onda plana de Weyl, a seguinte expressão:

$$\theta_{\alpha\beta}^{(P)} = -\frac{1}{2} k_\alpha k_\beta \xi_\mu \xi^\mu + \cos(2k_\rho x^\rho) \left[\frac{1}{2} k_\alpha k_\beta \xi_\mu \xi^\mu + m^2 \left(\xi_\alpha \xi_\beta - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \xi_\mu \xi^\mu \right) \right].$$

onde utilizamos a relação de dispersão $k_\alpha k^\alpha = m^2$ e a condição de Lorenz $k_\alpha \xi^\alpha = 0$ para obter esse resultado. Além disso, com essas considerações, é fácil verificar que esse tensor satisfaz a condição de divergência nula, isto é:

$$\begin{aligned}\partial_\alpha \theta_\beta^{\alpha(P)} &= \partial_\alpha \left\{ -\frac{1}{2} k^\alpha k_\beta \xi_\mu \xi^\mu + \cos(2k_\rho x^\rho) \left[\frac{1}{2} k^\alpha k_\beta \xi_\mu \xi^\mu + m^2 \left(\xi^\alpha \xi_\beta - \frac{1}{2} \delta_\beta^\alpha \xi_\mu \xi^\mu \right) \right] \right\} \\ &= \left[-m^2 k_\beta \xi_\mu \xi^\mu + m^2 k_\alpha \delta_\beta^\alpha \xi_\mu \xi^\mu \right] \sin(2k_\rho x^\rho) \\ \partial_\alpha \theta_\beta^{\alpha(P)} &= 0\end{aligned}$$

A expressão para o tensor $\theta_{\alpha\beta}^{(P)}$ pode ser escrita de maneira compacta como:

$$\theta_{\alpha\beta}^{(P)} = -\frac{1}{2} k_\alpha k_\beta \xi_\mu \xi^\mu + \frac{1}{2} M_{\alpha\beta} \cos(2k_\rho x^\rho), \quad (4.28)$$

onde definimos $M_{\alpha\beta} = k_\alpha k_\beta \xi_\mu \xi^\mu + 2m^2 \left(\xi_\alpha \xi_\beta - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \xi_\mu \xi^\mu \right)$.

Portanto, a equação para o campo métrico torna-se:

$$\square \psi_{\alpha\beta} = -\frac{\omega}{\Lambda} k_\alpha k_\beta \xi^2 + \frac{\omega}{\Lambda} M_{\alpha\beta} \cos(2k_\rho x^\rho).$$

A solução geral desta equação pode ser separada em três componentes:

$$\psi_{\alpha\beta} = \psi_{\alpha\beta}^{(\mathbf{H})} + \psi_{\alpha\beta}^{(\mathbf{P1})} + \psi_{\alpha\beta}^{(\mathbf{P2})}, \quad (4.29)$$

onde $\psi_{\alpha\beta}^{(\mathbf{H})}$ é a solução da equação homogênea, $\psi_{\alpha\beta}^{(\mathbf{P1})}$ é uma solução particular da equação associada ao termo constante $\frac{\omega}{\Lambda} k_\alpha k_\beta \xi^2$ e $\psi_{\alpha\beta}^{(\mathbf{P2})}$ resolve a equação associada ao termo oscilante $\frac{\omega}{\Lambda} M_{\alpha\beta} \cos(2k_\rho x^\rho)$. Em outras palavras, estamos considerando separadamente as seguintes três equações:

$$\square \psi_{\alpha\beta}^{(\mathbf{H})} = 0, \quad (4.30)$$

$$\square \psi_{\alpha\beta}^{(\mathbf{P1})} = -\frac{\omega}{\Lambda} k_\alpha k_\beta \xi^2, \quad (4.31)$$

$$\square \psi_{\alpha\beta}^{(\mathbf{P2})} = \frac{\omega}{\Lambda} M_{\alpha\beta} \cos(2k_\rho x^\rho). \quad (4.32)$$

A equação homogênea (4.30) descreve a propagação de ondas gravitacionais no vácuo. Uma solução clássica para essa equação é:

$$\psi_{\alpha\beta}^{(\mathbf{H})} = S_{\alpha\beta} \cos(\bar{k}_\mu x^\mu) \quad (4.33)$$

onde $\bar{k}_\mu = (\bar{\omega}_0, \bar{k}_i)$ é o quadrivetor de onda, que obedece à relação de dispersão $\bar{k}_\alpha \bar{k}^\alpha = 0$. Essa solução pode descrever a propagação de ondas gravitacionais no vácuo produzidas por uma fonte astrofísica, como, por exemplo, um sistema binário composto por estrelas massivas.

Os efeitos diretos da onda plana de Weyl na geometria são obtidos pelas equações (4.31) e (4.32). Uma solução para (4.31), que satisfaz a condição de gauge de Einstein, é dada por:

$$\psi_{\alpha\beta}^{(\mathbf{P1})} = -\frac{\omega}{\Lambda} k_\alpha k_\beta \left(\frac{(\xi_\mu x^\mu)^2}{2} \right), \quad (4.34)$$

onde usamos a relação $\xi_\alpha k^\alpha = 0$ para garantir a consistência com a condição de Lorenz.

Finalmente, a solução para (4.32), pode ser escrita como:

$$\psi_{\alpha\beta}^{(\mathbf{P2})} = C_{\alpha\beta} \cos(2k_\rho x^\rho), \quad (4.35)$$

onde $C_{\alpha\beta} = -\frac{\omega}{\Lambda} \frac{M_{\alpha\beta}}{4m^2}$. Como $m^2 = -\frac{3\Lambda}{2\omega}$, essa expressão pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\psi_{\alpha\beta}^{(\mathbf{P2})} = \frac{3}{8m^4} M_{\alpha\beta} \cos(2k_\rho x^\rho).$$

Portanto, a solução geral (4.29) será dada por:

$$\psi_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta} \cos(\bar{k}_\mu x^\mu) + \frac{3}{4m^2} k_\alpha k_\beta (\xi_\mu x^\mu)^2 + \frac{3}{8m^4} M_{\alpha\beta} \cos(2k_\rho x^\rho),$$

lembrando que $M_{\alpha\beta} = k_\alpha k_\beta \xi^2 + 2m^2 (\xi_\alpha \xi_\beta - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \xi^2)$.

Note que os termos oscilatórios nesta solução possuem frequências diferentes. Esse comportamento é esperado, pois correspondem a fontes distintas. O primeiro termo oscilatório está associado a fontes astrofísicas clássicas, enquanto o segundo decorre das oscilações do campo de Weyl.

Além disso, observe que o *gauge de Einstein* implica que:

$$\partial_\alpha \psi_\beta^\alpha = \partial_\alpha \left\{ S_\beta^\alpha \cos(\bar{k}_\mu x^\mu) + \frac{3}{4m^2} k^\alpha k_\beta (\xi_\mu x^\mu)^2 + \frac{3}{8m^4} M_\beta^\alpha \cos(2k_\rho x^\rho) \right\} = 0,$$

Expandindo essa derivada e utilizando as relações $k_\alpha k^\alpha = m^2$ e $k_\alpha \xi^\alpha = 0$, conclui-se que:

$$\bar{k}_\alpha S_\beta^\alpha = 0 \quad (4.36)$$

Esse resultado mostra que o primeiro termo da solução satisfaz a condição de transversalidade, uma característica típica das ondas gravitacionais na relatividade geral.

Sendo ψ o traço de $\psi_{\alpha\beta}$, temos que:

$$\psi = S \cos(\bar{k}_\mu x^\mu) + \frac{3}{4} (\xi_\mu x^\mu)^2 - \frac{3}{8m^2} \xi^2 \cos(2k_\rho x^\rho), \quad (4.37)$$

Assim, a perturbação na métrica expressa em termos do tensor $h_{\alpha\beta} = \psi_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \psi$, é dada por:

$$h_{\alpha\beta} = \zeta_{\alpha\beta} \cos(\bar{k}_\mu x^\mu) + \frac{3}{8m^2} k_\alpha k_\beta (\xi_\mu x^\mu)^2 + \frac{3}{8m^4} D_{\alpha\beta} \cos(2k_\rho x^\rho), \quad (4.38)$$

onde definimos:

$$\zeta_{\alpha\beta} = \left(S_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} S \right) \quad (4.39)$$

$$D_{\alpha\beta} = \left[k_\alpha k_\beta \xi^2 + m^2 \left(2\xi_\alpha \xi_\beta - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \xi^2 \right) \right] \quad (4.40)$$

Os termos adicionais na perturbação da métrica $h_{\alpha\beta}$ estão associados à presença da

onda plana do campo de Weyl. Em outras palavras, eles mostram como as ondas de Weyl, neste modelo simplificado, influenciam a geometria do espaço-tempo. Cabe investigar se o termo oscilante associado ao campo de Weyl poderia produzir uma radiação gravitacional. Apesar da simplicidade do modelo adotado, ele pode servir de base para o desenvolvimento de estudos futuros.

O campo geométrico de Weyl-Proca como um candidato à matéria escura

O modelo cosmológico padrão, chamado de Λ CDM¹, pressupõe a existência de duas componentes exóticas que preenchem o Universo, denominadas de energia escura e matéria escura [129]. Estimativas, com base em dados recentes, indicam que aproximadamente 68,6% da densidade de energia do Universo é atribuída à energia escura e cerca de 26,5% à matéria escura. Apenas 4,9% da densidade de energia do Universo é composta de matéria bariônica [30].

A origem da chamada matéria escura tem sido o foco de muitas pesquisas em cosmologia teórica e astrofísica. Essa matéria misteriosa praticamente não interage com a radiação eletromagnética, tendo sua existência inferida apenas por meio dos efeitos gravitacionais que causa. Esses efeitos não podem ser explicados satisfatoriamente pela relatividade geral. Nesse sentido, diversas propostas têm sido formuladas para explicar a natureza da matéria escura, que vão desde partículas massivas que interagem fracamente (WIMPs), buracos

¹Onde CDM significa matéria escura fria e Λ se refere à constante cosmológica.

negros primordiais, áxions, fótons escuros e também extensões da relatividade geral, como teorias de gravidade modificada. Em particular, modelos recentes consideram a possibilidade de descrever a matéria escura por meio do campo vetorial massivo de Proca [43, 130–136].

Neste contexto, a Teoria Gravitacional Invariante de Weyl, discutida ao longo deste trabalho, permite desenvolver modelos que abordam o problema da matéria escura de uma maneira puramente geométrica. Como discutido anteriormente, a 1-forma geométrica de Weyl se comporta efetivamente como um campo de Proca geométrico.

Assim, neste capítulo propomos uma abordagem alternativa para investigar o problema da matéria escura, apresentando o campo geométrico de Weyl como um potencial candidato. Para isso, assumimos a existência de um gás de partículas Weyl–Proca em um estado de condensado análogo ao de Bose–Einstein e investigamos seu comportamento em um cenário cosmológico [137].

5.1 O campo de Weyl no contexto cosmológico

Considere a métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) em termos do tempo conforme η , para um Universo com seções espaciais planas $k = 0$:

$$ds^2 = a^2(\eta) (d\eta^2 - d\Sigma^2). \quad (5.1)$$

Relembrando, a dinâmica do campo de Weyl σ é dada pela equação:

$$\partial_\mu (\sqrt{-g} F^{\nu\mu}) = -m^2 \sqrt{-g} \sigma^\nu, \quad (5.2)$$

onde, para (5.1), podemos escrever:

$$F^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta} = \frac{1}{a^4} \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} F_{\alpha\beta} = \frac{1}{a^4} \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} (\partial_\beta \sigma_\alpha - \partial_\alpha \sigma_\beta), \quad (5.3)$$

sendo $\eta^{\mu\alpha}$ a métrica de Minkowski. Como $\sqrt{-g} = a^4$, a equação de campo (5.2) pode ser

reescrita como:

$$\partial_\nu (\eta^{\mu\alpha} \partial_\mu \sigma_\alpha) - \square \sigma_\nu = m^2 a^2 \sigma_\nu. \quad (5.4)$$

em que $\square \equiv \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$ é o operador d'Alembert no espaço plano.

Multiplicando a equação (5.4) por $\eta^{\nu\beta} \partial_\beta$, obtemos a relação:

$$\eta^{\nu\beta} \partial_\beta \sigma_\nu = -2\sigma_0 \frac{a'}{a} = -2H\sigma_0. \quad (5.5)$$

onde $H(\eta) = a'/a$ é o parâmetro de Hubble em função do tempo conforme η , e o apóstrofo ($'$) indica derivada em relação a essa coordenada temporal. Usando o resultado (5.5) na equação (5.4), encontramos a expressão final:

$$2\partial_\nu \left(\sigma_0 \frac{a'}{a} \right) + \square \sigma_\nu = -m^2 a^2 \sigma_\nu. \quad (5.6)$$

Essa equação descreve a dinâmica do campo de Weyl em um contexto cosmológico.

5.2 Solução particular: o condensado de Bose-Einstein

Considerando a homogeneidade e isotropia do Universo em grandes escalas, vamos supor uma solução cosmológica na qual o campo de Weyl depende apenas da coordenada temporal η . Feitas essas considerações, da equação de campo (5.2), para $\nu = 0$, obtemos:

$$m^2 \sqrt{-g} \sigma^0 = 0$$

Portanto, a componente temporal do campo é nula ($\sigma_0 = 0$), já que o campo possui uma massa não nula. Assim, a equação (5.6) se reduz à seguinte equação para as componentes espaciais do campo de Weyl:

$$\frac{\partial^2 \sigma_i(\eta)}{\partial \eta^2} = -m^2 a^2 \sigma_i(\eta), \quad (5.7)$$

Note que essa equação é semelhante à equação de Schrödinger para um oscilador

harmônico quântico. Assim, para resolvê-la, podemos adotar o método proposto por G. Wentzel, H. A. Kramers e L. Brillouin, conhecido como *aproximação WKB* [138].

Consideramos uma solução particular na qual admitimos que os modos de Fourier das funções dependentes do tempo σ_i representam um gás de partículas de Weyl-Proca com momento nulo no sistema de coordenadas co-móveis. Como o campo de Weyl não está diretamente acoplado à matéria, o gás não está em equilíbrio térmico com a matéria bariônica. Assim, podemos assumir que o gás é constituído por partículas livres encontradas no estado fundamental, ou seja, sem energia cinética. Este é um estado acessível ao sistema, pois este campo é macroscópico e, portanto, as partículas associadas podem ser encontradas em repouso em um determinado referencial. Portanto, nesse estado, essas partículas formam uma espécie de condensado, análogo ao condensado de Bose-Einstein que consiste em um estado em que um grande número de bósons ocupa o mesmo estado quântico fundamental.

Partindo dessa suposição, escrevemos o campo de Weyl como:

$$\sigma_j = b_j(\eta)e^{i\theta(\eta)} \quad (5.8)$$

onde a solução do campo de Weyl corresponde à parte real dessa função complexa.

Substituindo (5.8) em (5.7), obtemos:

$$(b'' - b\theta'^2) + i(\theta''b + 2b'\theta') = -m^2a^2b. \quad (5.9)$$

onde o apóstrofo (') indica derivada em relação ao tempo conforme η . Aqui, omitimos o índice j por simplificação da notação. Considerando que a amplitude b e a fase θ são funções reais, a equação acima pode ser dividida em duas equações independentes:

$$b'' - b\theta'^2 = -m^2a^2b, \quad (5.10)$$

$$\theta''b + 2b'\theta' = 0. \quad (5.11)$$

Adotando a *aproximação WKB*, onde assumimos que a amplitude $b(\eta)$ varia mais lentamente do que a oscilação da fase $\theta(\eta)$, ou seja:

$$|b''/b| \ll \theta'^2 \quad (5.12)$$

Assim, a equação (5.10) se reduz a:

$$\theta'^2 = m^2 a^2, \quad (5.13)$$

cuja solução é dada por:

$$\theta(\eta) = m \int a d\eta = mt, \quad (5.14)$$

onde t é o tempo cosmológico ($dt = a d\eta$). Substituindo (5.14) na equação (5.11), obtemos:

$$\frac{b'}{b} = -\frac{1}{2} \frac{\theta''}{\theta'}$$

logo,

$$b(\eta) = \frac{B}{a^{1/2}}, \quad (5.15)$$

onde B é uma constante de integração. Portanto, a solução segundo o método de aproximação WKB é dada por:

$$\sigma_j^{WKB} = \frac{m C_j}{a^{1/2}} \exp\left(im \int a d\eta\right), \quad (5.16)$$

onde C_j é uma constante complexa adimensional arbitrária, e o fator m foi adicionado para garantir a dimensão correta do campo. Nas próximas seções, investigaremos o comportamento dessa solução particular no contexto cosmológico.

5.2.1 A condição WKB

Nesta seção, verificamos a condição sob a qual a aproximação WKB é válida. Considerando a condição:

$$(b''/b) \ll \theta'^2 \quad (5.17)$$

ao calcularmos o lado esquerdo desta desigualdade, utilizando a expressão obtida para a amplitude $b(\eta)$ na equação (5.15), obtemos:

$$\frac{b''}{b} = -\frac{1}{2} \frac{a''}{a} + \frac{3}{4} \left(\frac{a'}{a} \right)^2$$

Por outro lado, da equação (5.14), temos que $\theta' = ma$. Portanto, a condição (5.17) exige que:

$$\left| -\frac{1}{2} \frac{a''}{a} + \frac{3}{4} \left(\frac{a'}{a} \right)^2 \right| \ll m^2 a^2 \quad (5.18)$$

No caso de um Universo dominado por matéria, com seção espacial plana ($k = 0$), onde o fator de escala é dado por $a(\eta) = a_* \eta^2$ (139), a condição (5.18) implica que:

$$\left| -\frac{1}{\eta^2} + \frac{3}{4} \left(\frac{2}{\eta} \right)^2 \right| \ll m^2 a_*^2 \eta^4$$

$$\frac{2}{\eta^2} \ll m^2 a_*^2 \eta^4$$

ou seja,

$$\bar{\eta}^3 \gg \frac{\sqrt{2}}{ma_*} \quad (5.19)$$

Portanto, a condição WKB é satisfeita para tempos conformes superiores a $\sqrt{2}/(ma_*)$. Podemos reescrever essa condição de validade da aproximação WKB (5.18) em termos do tempo cosmológico t . Como $dt = a d\eta$, temos:

$$a' = \frac{dt}{d\eta} \dot{a} = a \dot{a} \quad (5.20)$$

e,

$$a'' = a \dot{a}^2 + a^2 \ddot{a} \quad (5.21)$$

onde o ponto denota a derivada em relação ao tempo cosmológico t . Assim, a condição (5.18) pode ser expressa como:

$$\left| \frac{1}{4} \dot{a}^2 - \frac{1}{2} a \ddot{a} \right| \ll m^2 a^2 \quad (5.22)$$

ou, de forma equivalente:

$$\frac{1}{4} \left| H^2 - 2 \frac{\ddot{a}}{a} \right| \ll m^2, \quad (5.23)$$

onde $H = \dot{a}/a$ é o parâmetro de Hubble em termos do tempo cosmológico t .

Portanto, a restrição para a massa geométrica depende da época inicial a partir da qual desejamos que a aproximação WKB seja válida. Aqui, examinamos a era dominada por matéria. Nessa era, das equações de Friedmann para um Universo espacialmente plano, temos que $\ddot{a}/a = -H^2/2$ e H é uma função decrescente no tempo. Assim, para que a solução WKB seja válida desde o início da era da matéria até os dias atuais, a massa deve satisfazer:

$$m \gg H \quad (5.24)$$

Para fazer uma estimativa desse limite inferior para a massa m , examinando a era dominada por matéria, onde o conteúdo do Universo em escala cosmológica é modelado como um fluido de poeira. Sob essa condição, o parâmetro de Hubble em função do redshift é dado por $H(z) \simeq H_0(1+z)^{3/2}$.

Considerando o redshift do início da era dominada por matéria, $z_m \sim 3400$, e tomando o valor atual do parâmetro de Hubble como $H_0 = 70 \text{ km/s/Mpc} \approx 10^{-18} \text{ s}^{-1}$, obtemos:

$$H(z_m) \simeq H_0(1+z_m)^{3/2} \approx 10^{-13} \text{ s}^{-1}.$$

Portanto, a restrição para m não é muito rigorosa, ou seja, a massa não precisa ser extremamente grande. Em unidades de energia, deveríamos ter:

$$m \gg \hbar \times 10^{-13} \text{ s}^{-1} \approx 10^{-28} \text{ eV}/c^2, \quad (5.25)$$

onde usamos $\hbar \simeq 6.58 \times 10^{-16} \text{ eV}\cdot\text{s}$.

Como vimos anteriormente, a fase $\theta(\eta)$ da solução oscila com uma frequência proporcional à massa m . Assim, a condição WKB implica que essa frequência de oscilação deve ser

no mínimo 10^6 vezes maior que a taxa de expansão atual do Universo H_0 .

5.3 O tensor eletromagnético para a solução particular

Com a solução obtida na seção anterior pelo método WKB, podemos agora calcular o tensor eletromagnético $F_{\alpha\beta}$, o qual será importante na próxima seção ao estudarmos as componentes do tensor momento-energia. Devido à condição de que o campo depende apenas da coordenada temporal, as únicas componentes não-nulas de $F_{\mu\nu}$ correspondem aos componentes do campo elétrico, $E_i = F_{0i}$. Assim, utilizando a solução (5.16), encontramos:

$$E_j = \left[-\frac{1}{2} \frac{a'}{a} + ima \right] \frac{mC_j}{a^{1/2}} \exp\left(im \int a d\eta\right), \quad (5.26)$$

ou, equivalentemente,

$$E_j = \left[-\frac{1}{2} \frac{a'}{a} + ima \right] \sigma_j. \quad (5.27)$$

Note que, considerando a condição $m \gg H$, que é equivalente a $ma \gg a'/a$, a expressão acima se simplifica para:

$$E_j \approx ma \sigma_j, \quad (5.28)$$

onde o número imaginário foi absorvido por uma redefinição da constante C_j . Por outro lado, na próxima seção precisaremos avaliar especificamente E^2 . Assim, antes de aplicar essa simplificação, é importante calcularmos detalhadamente a intensidade do campo elétrico. Para isso, consideramos a parte real do campo E_j , dada por:

$$E_j = -\frac{mC_j}{a^{1/2}} \left[\frac{1}{2} \frac{a'}{a} \cos \theta(\eta) + ma \sin \theta(\eta) \right], \quad (5.29)$$

onde $\theta(\eta)$ inclui uma fase constante absorvida da constante complexa original C_j , que, por sua vez, agora é apenas um número real.

Portanto, o quadrado do campo elétrico é dado por:

$$E_j^2 = \frac{m^2 C_j^2}{a} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{a'}{a} \right)^2 \cos^2 \theta(\eta) + m^2 a^2 \sin^2 \theta(\eta) + a' m \cos \theta(\eta) \sin \theta(\eta) \right]. \quad (5.30)$$

Para o campo σ_j , considerando apenas a parte real, obtemos:

$$\sigma_j = \frac{C_j m}{a^{1/2}} \cos \theta(\eta) \quad (5.31)$$

Assim, o quadrado do campo é dado por:

$$\sigma_j^2 = \frac{C_j^2 m^2}{a} \cos^2 \theta(\eta) \quad (5.32)$$

Observe que as grandezas E_j^2 e σ_j^2 oscilam com uma frequência proporcional a m , que, como discutido anteriormente, é muito maior do que a taxa de expansão H do Universo durante a era dominada pela matéria (5.24). Assim, a influência desses campos na evolução cósmica depende basicamente de seus valores médios no tempo. Calculamos a média temporal dessas expressões em um intervalo correspondente a várias oscilações completas da fase θ , que corresponde a um intervalo de tempo muito pequeno. Nesse intervalo, o fator de escala a e suas derivadas permanecem praticamente constantes. Portanto, de (5.30), ao se tomar a média temporal, obtemos:

$$\langle E_j^2 \rangle = \frac{m^2 C_j^2}{2a} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{a'}{a} \right)^2 + m^2 a^2 \right], \quad (5.33)$$

ou, de forma equivalente,

$$\langle E_j^2 \rangle = \frac{C_j^2 a m^4}{2} \left[1 + \frac{1}{4} \frac{H^2}{m^2} \right], \quad (5.34)$$

onde H é o parâmetro de Hubble em termos do tempo cosmológico t . Para o campo σ_j^2 , o seu valor médio, neste intervalo, é dado por:

$$\langle \sigma_j^2 \rangle = \frac{C_j^2 m^2}{2a}. \quad (5.35)$$

Com base nesses resultados, podemos agora analisar a distribuição de energia, pressão e tensão associadas ao campo de Weyl no estado condensado.

5.4 O tensor momento-energia para a solução particular

Em cosmologia, a história do Universo é caracterizada por diferentes eras, cada uma associada a uma distribuição particular de matéria-energia predominante. Essa componente dominante, naquele período, é a principal responsável pela curvatura do espaço-tempo. Em particular, durante a era dominada por matéria, a distribuição energética do Universo era bem descrita por um fluido de poeira, que tem como principal característica a ausência de pressão.

De modo geral, a distribuição de energia de um fluido é representada pelo tensor momento-energia $T_{\alpha\beta}$. A decomposição desse tensor por um observador com velocidade própria V^μ é caracterizada pelas seguintes componentes [2]:

1. *Densidade de energia do fluido:*

$$\rho = T_{\alpha\beta} V^\alpha V^\beta;$$

2. *Pressão isotrópica do fluido:*

$$p = -\frac{1}{3} T_{\alpha\beta} h^{\alpha\beta},$$

3. *Vetor de fluxo de energia:*

$$q_\mu = -h_\mu^\alpha T_{\alpha\beta} V^\beta;$$

4. *Pressão anisotrópica e tensor de estresse:*

$$\pi_{\mu\nu} = T_{\alpha\beta} h_\mu^\alpha h_\nu^\beta + p h_{\mu\nu}.$$

onde

$$h^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} - V^\alpha V^\beta, \quad \pi_{\mu\nu} = \pi_{\nu\mu}, \quad \pi_{\mu\nu} V^\mu = 0.$$

Aqui, $h^{\alpha\beta}$ é o tensor de projeção no subespaço ortogonal à quadrivelocidade V^α asso-

ciada ao observador. Neste ponto, buscamos analisar se o tensor momento-energia associado à solução particular do campo de Weyl pode ser interpretado como o de um fluido de poeira para um observador co-móvel e verificar em que condições essa solução pode ser considerada um possível candidato à matéria escura.

O tensor momento-energia do campo de Weyl pode ser escrito como a soma de dois tensores:

$$T_{\alpha\beta}^{(P)} = T_{\alpha\beta}^{EM} + m^2\theta_{\alpha\beta}, \quad (5.36)$$

onde $T_{\mu\nu}^{EM}$ é formalmente idêntico ao tensor momento-energia simétrico do campo eletromagnético, e $\theta_{\mu\nu}$ representa o termo adicional associado à massa do campo.

Para o tensor eletromagnético, escrito em termos da coordenada de tempo conforme, temos:

$$T_{\alpha\beta}^{EM} = \frac{1}{a^2} \left(\eta^{\lambda\mu} F_{\alpha\mu} F_{\lambda\beta} + \frac{1}{4} \eta_{\alpha\beta} \eta^{\mu\lambda} \eta^{\nu\kappa} F_{\mu\nu} F_{\lambda\kappa} \right). \quad (5.37)$$

Já o tensor adicional associado à massa do campo é dado por:

$$\theta_{\alpha\beta} = \left[\sigma_\alpha \sigma_\beta - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} (\eta^{\mu\nu} \sigma_\mu \sigma_\nu) \right] \quad (5.38)$$

Antes de calcularmos cada uma das partes do tensor momento-energia associado à solução particular do campo de Weyl, dado em (5.36), é importante observar que esse tensor tem dimensão de (comprimento)⁻⁴ e, portanto, a densidade de energia associada, a pressão e o estresse terão essa mesma dimensão. Assim, para compará-las com os dados disponíveis sobre a densidade de matéria escura, é necessário realizar uma conversão apropriada para as unidades dessas quantidades. Essa conversão será feita apenas na próxima seção.

5.4.1 A densidade de energia

A densidade de energia desse fluido, conforme medida por um observador em movimento com quadrivelocidade $V^\mu = \frac{1}{a}\delta_0^\mu$ neste sistema de coordenadas, é dada por:

$$\rho_W = T_{\alpha\beta}^{(P)} V^\alpha V^\beta \quad (5.39)$$

Vamos calcular separadamente cada uma das contribuições para a densidade de energia associada aos tensores $T_{\alpha\beta}^{EM}$ e $\theta_{\alpha\beta}$, que compõem o tensor momento-energia de Weyl. Para o componente $T_{\mu\nu}^{EM}$, a densidade é dada por $\rho_{EM} = T_{\alpha\beta}^{EM} V^\alpha V^\beta$. Assim, temos:

$$\begin{aligned} \rho_{EM} &= \frac{1}{a^2} T_{00} \\ \rho_{EM} &= \frac{1}{a^4} \left(\eta^{\lambda\mu} F_{0\lambda} F_{\mu 0} + \frac{1}{4} \eta^{\mu\lambda} \eta^{\nu\kappa} F_{\mu\nu} F_{\lambda\kappa} \right) \\ \rho_{EM} &= \frac{1}{a^4} \left(\delta^{ij} F_{i0} F_{j0} + \frac{1}{4} \eta^{\mu\lambda} \eta^{\nu\kappa} F_{\mu\nu} F_{\lambda\kappa} \right) \\ \rho_{EM} &= \frac{1}{2a^4} (E^2 + B^2) \end{aligned}$$

Agora, a contribuição da densidade de energia associada ao termo de massa é dada por $\rho_m = \theta_{\alpha\beta} V^\alpha V^\beta$. Logo, obtemos:

$$\begin{aligned} \rho_m &= \frac{1}{a^2} \theta_{00} \\ \rho_m &= \frac{1}{a^2} \sigma_0 \sigma_0 - \frac{1}{2a^2} (\sigma_0 \sigma_0 - \sigma_j \sigma_j) \\ \rho_m &= \frac{1}{2a^2} (\sigma_0^2 + \sum \sigma_j^2). \end{aligned}$$

Somando as duas contribuições, obtemos a densidade de energia do tensor momento-energia de Weyl:

$$\begin{aligned} \rho_W &= \rho_{EM} + m^2 \rho_m \\ \rho_W &= \frac{1}{2a^4} (E^2 + B^2) + \frac{m^2}{2a^2} (\sigma_0^2 + \sum \sigma_j^2) \end{aligned}$$

Para a solução particular em que o campo de Weyl depende apenas do tempo t , a densidade de energia pode ser escrita em termos do campo elétrico e do campo de Weyl da seguinte forma:

$$\rho_W = \frac{1}{2a^4} E^2 + \frac{m^2}{2a^2} \sigma^2, \quad (5.40)$$

onde $E^2 = \sum E_j^2$ e $\sigma^2 = \sum \sigma_j^2$.

Tomando a média temporal e utilizando as expressões (5.34) e (5.35), obtemos:

$$\langle \rho_W \rangle = \frac{m^4 C^2}{2a^3} \left[1 + \frac{1}{8} H^2 / m^2 \right], \quad (5.41)$$

onde $C^2 = C_1^2 + C_2^2 + C_3^2$. Note que, na era dominada por matéria, em que a condição $m \gg H$ é satisfeita, temos:

$$\langle \rho_W \rangle \sim \frac{m^4}{2a^3} C^2 \propto a^{-3} \quad (5.42)$$

o que corresponde à densidade de energia característica da matéria não relativística em um Universo em expansão. Portanto, o campo de Weyl neste estado de condensado apresenta o comportamento esperado para a matéria escura durante essa era, pelo menos na ordem abaixo de H^2/m^2 .

5.4.2 A pressão isotrópica

A pressão isotrópica é obtida a partir do tensor momento-energia (5.36), pela definição:

$$p_W = -\frac{1}{3} T_{\alpha\beta}^P (g^{\alpha\beta} - V^\alpha V^\beta)$$

Para o componente $T_{\alpha\beta}^{EM}$, a pressão é dada por $p_{EM} = -\frac{1}{3} T_{\alpha\beta}^{EM} (g^{\alpha\beta} - V^\alpha V^\beta)$. Assim, obtemos:

$$p_{EM} = \frac{1}{3} \frac{1}{2a^4} (E^2 + B^2), \quad (5.43)$$

Agora, para determinar a contribuição da pressão associada ao tensor $\theta_{\alpha\beta}$, é necessário calcular o traço do tensor $\theta_{\alpha\beta}$:

$$\theta = \theta_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} = \frac{1}{a^2} \eta^{\alpha\beta} \left[\sigma_\alpha \sigma_\beta - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} (\eta^{\mu\nu} \sigma_\mu \sigma_\nu) \right] = -\frac{1}{a^2} (\eta^{\mu\nu} \sigma_\mu \sigma_\nu) = \frac{1}{a^2} (-\sigma_0^2 + \sum \sigma_i^2). \quad (5.44)$$

Portanto, para o termo de massa, obtemos:

$$p_m = -\frac{1}{3a^2} \left[(-\sigma_0^2 + \sum \sigma_i^2) - \frac{1}{2} (\sigma_0^2 + \sum \sigma_i^2) \right], \quad (5.45)$$

$$p_m = \frac{1}{2a^2} \left[\sigma_0^2 - \frac{1}{3} \sum \sigma_i^2 \right]. \quad (5.46)$$

Assim, a pressão isotrópica total associada à solução particular é dada por:

$$p_W = \frac{1}{3} \frac{1}{2a^4} E^2 - \frac{1}{3} \frac{m^2}{2a^2} \sigma^2. \quad (5.47)$$

Calculando a média temporal dessa grandeza, encontramos:

$$\begin{aligned} \langle p_W \rangle &= \frac{1}{3} \frac{1}{2a^4} \langle E^2 \rangle - \frac{1}{3} \frac{m^2}{2a^2} \langle \sigma^2 \rangle \\ &= \frac{1}{6} \left(\frac{1}{a^4} \frac{C^2 a m^4}{2} \left[1 + \frac{1}{4} \frac{H^2}{m^2} \right] - \frac{m^4}{a^2} \frac{C^2}{2a} \right) \\ &= \frac{1}{24} \left(\frac{C^2 m^4}{2a^3} \right) [H^2/m^2] \end{aligned} \quad (5.48)$$

Logo, a pressão do condensado é dada por:

$$\langle p_W \rangle = \frac{1}{24} \left(\frac{C^2 m^4}{2a^3} \right) [H^2/m^2]. \quad (5.49)$$

Portanto, em comparação com a densidade de energia obtida em (5.42), temos:

$$\frac{\langle p_W \rangle}{\langle \rho_W \rangle} = \frac{1}{24} [H^2/m^2].$$

Considerando a condição $m \gg H$, podemos verificar que, neste estado de condensado, o campo de Weyl não gera pressão significativa. Em outras palavras, o campo de Weyl satisfaz uma equação de estado característica de um fluido de Poeira, como se espera de um candidato à matéria escura.

$$\frac{\langle p_W \rangle}{\langle \rho_W \rangle} \sim 0$$

5.4.3 O fluxo de energia

Analisemos agora as componentes não diagonais de $T_{\mu\nu}^{(P)}$, considerando a solução particular em que o campo de Weyl depende apenas do tempo η . Pelas considerações feitas, é imediato ver que $T_{i0}^{(P)} = 0$. Isso significa que, no estado condensado do campo de Weyl, não há fluxo de energia em relação aos observadores co-móveis, ou seja:

$$q_\mu = 0 \tag{5.50}$$

5.4.4 O tensor de estresse e a pressão anisotrópica

Considerando agora o tensor $\pi_{\mu\nu}$, que contém informações sobre a pressão anisotrópica e o estresse de cisalhamento do fluido. Esse tensor é definido por:

$$\pi_{\mu\nu} = T_{\alpha\beta}^{(P)} h_\mu^\alpha h_\nu^\beta + p h_{\mu\nu}. \tag{5.51}$$

Para a métrica de FRW, nas coordenadas padrão, temos $h_j^i = \delta_j^i$ para as componentes

espaiais-espaiais, e $h_{\mu 0} = 0$ para as componentes mistas. Assim, temos:

$$\begin{aligned}\pi_{\mu 0} &= \pi_{0\mu} = 0, \\ \pi_{ij} &= T_{ij}^{(P)} - p(a^2 \delta_{ij}).\end{aligned}\tag{5.52}$$

Tensão de cisalhamento

Primeiro, consideremos as componentes espaciais do tensor (5.52) para o caso em que $i \neq j$. Neste caso, temos:

$$\pi_{ij} = T_{ij}^{(P)}\tag{5.53}$$

onde o tensor momento-energia assume a forma $T_{ij}^{(P)} = g^{\lambda\mu} F_{i\lambda} F_{\mu j} + m^2 \sigma_i \sigma_j$. Como o campo de Weyl depende apenas do tempo, temos:

$$T_{ij}^{(P)} = -g^{00} F_{i0} F_{j0} + m^2 \sigma_i \sigma_j,$$

isto é,

$$T_{ij}^{(P)} = -\frac{1}{a^2} E_i E_j + m^2 \sigma_i \sigma_j.\tag{5.54}$$

A média temporal dessa expressão é dada por:

$$\langle T_{ij}^{(P)} \rangle = -\frac{1}{a^2} \langle E_i E_j \rangle + m^2 \langle \sigma_i \sigma_j \rangle,\tag{5.55}$$

Vamos analisar a média temporal de cada termo separadamente. Começamos com o produto das componentes do campo "elétrico" de Weyl em direções diferentes. A partir da expressão para o campo elétrico (5.29), obtemos:

$$E_i E_j = \frac{m^2 C_i C_j}{a} \left[\frac{1}{2} \frac{a'}{a} \cos \theta_i(\eta) + m a \sin \theta_i(\eta) \right] \left[\frac{1}{2} \frac{a'}{a} \cos \theta_j(\eta) + m a \sin \theta_j(\eta) \right],\tag{5.56}$$

Essa expressão tem a seguinte média no tempo:

$$\langle E_i E_j \rangle = \frac{m^2 C_i C_j}{a} \left[\begin{array}{l} \frac{1}{4} \left(\frac{a'}{a} \right)^2 \langle \cos \theta_i \cos \theta_j \rangle + \frac{1}{2} a' m \langle \cos \theta_i \sin \theta_j \rangle + \\ + \frac{1}{2} a' m \langle \sin \theta_i \cos \theta_j \rangle + m^2 a^2 \langle \sin \theta_i \sin \theta_j \rangle \end{array} \right] \quad (5.57)$$

Por sua vez, a média no tempo do produto dos componentes do campo de Weyl em diferentes direções, utilizando (5.31), é:

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle = \frac{m^2 C_i C_j}{a} \langle \cos \theta_i \cos \theta_j \rangle. \quad (5.58)$$

Aqui, vamos calcular explicitamente a média das funções trigonométricas. Escrevendo $\cos \theta_i \cos \theta_j = \cos(wt + \phi_i) \cos(wt + \phi_j)$ e utilizando a identidade trigonométrica $\cos(A + B) = [\cos A \cos B - \sin A \sin B]$, obtemos:

$$\begin{aligned} \cos \theta_i \cos \theta_j &= \cos(wt + \phi_i) \cos(wt + \phi_j) \\ &= (\cos wt \cos \phi_i - \sin wt \sin \phi_i) (\cos wt \cos \phi_j - \sin wt \sin \phi_j) \\ &= \cos^2 wt \cos \phi_i \cos \phi_j + \sin^2 wt \sin \phi_i \sin \phi_j - \cos wt \sin wt (\cos \phi_i \sin \phi_j + \sin \phi_i \cos \phi_j) \\ &= \cos^2 wt \cos \phi_i \cos \phi_j + \sin^2 wt \sin \phi_i \sin \phi_j - \cos wt \sin wt \sin(\phi_i + \phi_j) \end{aligned}$$

Assim, ao fazer a média temporal sobre um período completo, obtemos:

$$\begin{aligned} \langle \cos \theta_i \cos \theta_j \rangle &= \frac{1}{2} \cos \phi_i \cos \phi_j + \frac{1}{2} \sin \phi_i \sin \phi_j \\ &= \frac{1}{2} \cos(\phi_i - \phi_j) \end{aligned}$$

Agora, consideremos:

$$\begin{aligned} \sin \theta_i \sin \theta_j &= \sin(wt + \phi_i) \sin(wt + \phi_j) \\ &= (\sin wt \cos \phi_i + \cos wt \sin \phi_i) (\sin wt \cos \phi_j + \cos wt \sin \phi_j) \\ &= \sin^2 wt \cos \phi_i \cos \phi_j + \cos^2 wt \sin \phi_i \sin \phi_j + \cos wt \sin wt (\cos \phi_i \sin \phi_j + \sin \phi_i \cos \phi_j) \end{aligned}$$

Fazendo a média no tempo:

$$\langle \sin \theta_i \sin \theta_j \rangle = \frac{1}{2} \cos(\phi_i - \phi_j) \quad (5.59)$$

Para $\cos \theta_i \sin \theta_j$, temos :

$$\begin{aligned} \cos \theta_i \sin \theta_j &= \cos(wt + \phi_i) \sin(wt + \phi_j) \\ &= (\cos wt \cos \phi_i - \sin wt \sin \phi_i) (\sin wt \cos \phi_j + \cos wt \sin \phi_j) \\ &= \cos^2 wt \cos \phi_i \sin \phi_j - \sin^2 wt \sin \phi_i \cos \phi_j + \cos wt \sin wt (\cos \phi_i \cos \phi_j - \sin \phi_i \sin \phi_j) \end{aligned}$$

Portanto, a média temporal é:

$$\begin{aligned} \langle \cos \theta_i \sin \theta_j \rangle &= \frac{1}{2} \cos \phi_i \sin \phi_j - \frac{1}{2} \sin \phi_i \cos \phi_j \\ \langle \cos \theta_i \sin \theta_j \rangle &= \frac{1}{2} \sin(\phi_i - \phi_j) \end{aligned} \quad (5.60)$$

De maneira semelhante, para $\sin \theta_i \cos \theta_j$, temos:

$$\langle \sin \theta_i \cos \theta_j \rangle = -\frac{1}{2} \sin(\phi_i - \phi_j) \quad (5.61)$$

Utilizando estes resultados, podemos reescrever (5.57) e (5.58) como:

$$\langle E_i E_j \rangle = \frac{m^2 C_i C_j}{a} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{a'}{a} \right)^2 + m^2 a^2 \right] \frac{1}{2} \cos(\phi_i - \phi_j), \quad (5.62)$$

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle = \frac{m^2 C_i C_j}{a} \frac{1}{2} \cos(\phi_i - \phi_j). \quad (5.63)$$

Portanto, substituindo (5.62) e (5.63) em (5.55), obtemos a seguinte forma para o tensor de anisotropia:

$$\langle \pi_{ij} \rangle = -\frac{m^2 C_i C_j}{a^3} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{a'}{a} \right)^2 + m^2 a^2 \right] \frac{1}{2} \cos(\phi_i - \phi_j) + \frac{m^4 C_i C_j}{a} \frac{1}{2} \cos(\phi_i - \phi_j). \quad (5.64)$$

Podemos reescrever (5.64), lembrando que $a' = \dot{a}a$, como:

$$\begin{aligned}\langle \pi_{ij} \rangle &= -\frac{m^4 C_i C_j}{2a^3} \left[\frac{1}{4} \dot{a}^2 \cos \delta \phi_{ij} \right], \\ \langle \pi_{ij} \rangle &= -\frac{m^4 C_i C_j}{2a} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{H}{m} \right)^2 \cos \delta \phi_{ij} \right],\end{aligned}\quad (5.65)$$

onde escrevemos $\delta \phi_{ij} = \phi_i - \phi_j$ e $H = \dot{a}/a$ é o parâmetro de Hubble.

A tensão de cisalhamento medida pelos observadores comóveis é obtida a partir do tensor π_{ij} pela contração com os vetores espaciais $e_I = e_I^\mu \partial_\mu = \frac{1}{a} \delta_I^\mu \partial_\mu$ da tétrada associado ao observador co-móvel. Assim, os elementos não diagonais ($I \neq J$) são dados por:

$$\pi_{IJ} = \pi_{ij} e_I^i e_J^j = -\frac{m^4 C_I C_J}{2a^3} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{H}{m} \right)^2 \cos \delta \phi_{IJ} \right] \quad (5.66)$$

Agora, comparamos o estresse de cisalhamento com a densidade de energia do campo de Weyl no estado de condensado. Das equações (5.42) e (5.66), obtemos:

$$\frac{|\pi_{IJ}|}{\langle \rho_W \rangle} \simeq \frac{C_I C_J}{C^2} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{H}{m} \right)^2 \cos \delta \phi_{IJ} \right]. \quad (5.67)$$

De acordo com esse resultado, o estresse de cisalhamento é máximo se as oscilações do campo de Weyl ao longo de direções ortogonais estiverem em fase, ou seja, quando ($\phi_I = \phi_J$). Um estresse não-nulo poderia ser um desafio potencial para o modelo, uma vez que esse tipo de estresse alimenta o cisalhamento do fluido cosmológico, induzindo, conseqüentemente, desvios de uma evolução isotrópica. Por outro lado, a condição $m \gg H$ pode atenuar o problema na era dominada por matéria.

Podemos destacar aqui duas outras possibilidades nas quais o estresse de cisalhamento será zero [137]. A primeira consiste em considerar que o condensado pode ser encontrado em um estado não polarizado. Neste caso, tratando σ_μ como um campo quântico, podemos assumir que ele esteja em um estado com número bem definido de partículas com momento nulo, igualmente distribuídas nos três modos de polarização desse campo massivo. Ou seja, se n for o número total de partículas, então, nesta solução, um terço delas ($n/3$) está oscilando em cada uma das três direções espaciais ($I = 1, 2$ e 3). Assim, como cada modo possui um

número bem definido de partículas, o estado correspondente pode ser representado por um fasor clássico com módulo bem definido C_I (proporcional a $\sqrt{(n/3) + 1/2}$) e fase aleatória ϕ_I , uniformemente distribuída entre 0 e 2π (ver [142]). Em outras palavras, a fase é indeterminada quando o estado tem um número bem definido de partículas. Dessa forma, a média das componentes não dimensionais do tensor de estresse é nula, o que significa que, nesse estado, o condensado não tem estresse de cisalhamento.

Outra possibilidade para eliminar a polarização do condensado é considerar que as partículas de Weyl-Proca com momento nulo estão em um estado quase-clássico, produzido por processos aleatórios em um intervalo finito do Universo primordial. Nesse cenário, é razoável assumir a hipótese de fases aleatórias, ou seja, que as fases do campo que descreve os modos produzidos em instantes diferentes não possuem correlação entre si. Assim, o estado do campo de Weyl pode ser descrito como uma mistura incoerente de modos de momento nulo com fases diferentes. Sob essa suposição, a média no ensemble correspondente satisfaz:

$$\langle \pi_{IJ} \rangle = 0,$$

para $I \neq J$.

Pressão anisotrópica

Analisemos agora os elementos diagonais do tensor π_{ij} , que nos fornecem a pressão anisotrópica do fluido. Neste caso, o tensor (5.52), para $i = j$, é escrito como:

$$\pi_{ii} = T_{ii}^{(P)} - p a^2 \quad (5.68)$$

sendo as componentes diagonais do tensor momento-energia de Weyl dadas por:

$$T_{ii}^{(P)} = -\frac{1}{a^2} E_i^2 + \frac{1}{2a^2} E^2 + m^2 \left[\sigma_i^2 - \frac{1}{2} \sigma^2 \right]$$

A média temporal dessa expressão é:

$$\langle T_{ii}^{(P)} \rangle = -\frac{1}{a^2} \langle E_i^2 \rangle + \frac{1}{2a^2} \langle E^2 \rangle + m^2 \left[\langle \sigma_i^2 \rangle - \frac{1}{2} \langle \sigma^2 \rangle \right],$$

Sendo,

$$\langle E_i^2 \rangle = \frac{C_i^2 a m^4}{2} \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{H}{m} \right)^2 \right];$$

$$\langle E^2 \rangle = \frac{C^2 a m^4}{2} \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{H}{m} \right)^2 \right];$$

$$\langle \sigma_i^2 \rangle = \frac{m^2 C_i^2}{2a};$$

e,

$$\langle \sigma^2 \rangle = \frac{m^2 C^2}{2a}.$$

onde $C^2 = C_1^2 + C_2^2 + C_3^2$ é a soma dos quadrados das constantes reais associadas às componentes do campo de Weyl, e C_i^2 representa o quadrado da constante associada à componente i .

Assim, obtemos:

$$\begin{aligned} \langle T_{ii}^{(P)} \rangle &= -\frac{1}{a} \frac{C_i^2 m^4}{2} \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{H}{m} \right)^2 \right] + \frac{1}{2a} \frac{C^2 m^4}{2} \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{H}{m} \right)^2 \right] + m^2 \left[\frac{m^2 C_i^2}{2a} - \frac{1}{2} \frac{m^2 C_i^2}{2a} \right] \\ &= -\frac{C_i^2 m^4}{a} \frac{1}{8} \left[\frac{H^2}{m^2} \right] + \frac{C^2 m^4}{2a} \frac{1}{8} \left[\frac{H^2}{m^2} \right] \end{aligned}$$

que resultando em,

$$\langle T_{ii}^{(P)} \rangle = \left(-C_i^2 + \frac{C^2}{2} \right) \frac{m^4}{8a} \left[\frac{H^2}{m^2} \right]$$

Agora, considerando a expressão (5.49) para a pressão isotrópica do condensado, os elementos diagonais do tensor (5.68) são dados por:

$$\langle \pi_{ii} \rangle = \left(-C_i^2 + \frac{C^2}{2} \right) \frac{m^4}{8a} \left[\frac{H^2}{m^2} \right] - \frac{C^2 m^4}{3} \frac{1}{8a} \left[\frac{H^2}{m^2} \right]$$

Portanto,

$$\langle \pi_{ii} \rangle = \left(-C_i^2 + \frac{C^2}{6} \right) \frac{m^2}{8a} \left[\frac{H^2}{m^2} \right] \quad (5.69)$$

Para determinar a pressão anisotrópica medida pelos observadores co-móveis, utilizamos novamente os vetores espaciais de projeção $e_I = e_I^\mu \partial_\mu = \frac{1}{a} \delta_I^\mu \partial_\mu$. Assim, as componentes do tensor π_{ij} , para $I = J$ são dadas por:

$$\langle \pi_{(I)(I)} \rangle = \pi_{ii} \frac{1}{a^2} \delta_I^i = \left(-C_i^2 + \frac{C^2}{6} \right) \frac{m^2}{8a^3} \left[\frac{H^2}{m^2} \right]$$

Comparando a pressão anisotrópica com a densidade de energia do campo de Weyl no estado de condensado (5.42), obtemos:

$$\frac{\langle \pi_{(I)(I)} \rangle}{\langle \rho_W \rangle} \simeq \left(-\frac{C_I^2}{C^2} + \frac{1}{3} \right) \frac{1}{8} \left[\frac{H^2}{m^2} \right].$$

Note que a pressão anisotrópica é atenuada pelo fator H^2/m^2 na era dominada por matéria. Além disso, se tivermos o mesmo número de partículas em cada modo, ou seja, $C_I^2 = C^2/3$ então, o condensado não tem pressão anisotrópica e, portanto, será exatamente compatível com o modelo cosmológico padrão em todas as épocas de evolução do Universo [137].

5.5 Massa e abundância das partículas de Weyl-Proca

Se o campo de Weyl for capaz de explicar o efeito gravitacional atribuído à componente de matéria escura do Universo em escala cosmológica, é de se esperar que a sua densidade de energia seja igual à densidade observada de matéria escura, ou seja:

$$\rho_W = \rho_{DM}$$

Para fazer essa comparação, é necessário, primeiramente, converter o tensor $T_{\alpha\beta}^{(P)}$ para as dimensões apropriadas, utilizando a seguinte transformação:

$$\bar{T}_{\alpha\beta}^{(P)} = -\frac{1}{\kappa} \frac{\omega}{\Lambda} T_{\alpha\beta}^{(P)} = \frac{c^4}{8\pi G} \frac{3}{2m^2} T_{\alpha\beta}^{(P)},$$

Assim, de acordo com a equação (5.42), a densidade de energia do campo de Weyl no presente momento é dada por:

$$\langle \bar{\rho}_W \rangle = \frac{3}{2} \frac{c^4}{8\pi G} \frac{m^2 C^2}{2a_0^3}. \quad (5.70)$$

Dividindo essa expressão pela densidade crítica no presente momento ($\rho_{c,0} = \frac{3H_0^2 c^2}{8\pi G}$), obtemos o parâmetro de densidade do campo Weyl no estado de condensado:

$$\Omega_{W,0} = \frac{m^2 c^2 C^2}{4a_0^3 H_0^2}, \quad (5.71)$$

onde, H_0 está em unidades de s^{-1} . Se o condensado Weyl corresponder à totalidade da matéria escura do Universo, então $\Omega_{W,0}$ deve ser igual ao parâmetro de densidade da matéria escura, cujo valor presente é $\Omega_{DM,0} = 0.264$.

$$\Omega_{W,0} = \Omega_{DM,0}$$

Essa suposição, evidentemente, impõe restrições para a massa e a constante C^2 . A amplitude C^2 está relacionada à abundância de partículas de Weyl-Proca produzidas no Universo primordial. Naturalmente, essa abundância depende do mecanismo responsável pela geração dessas partículas. É importante fazer uma estimativa dessa quantidade em trabalhos futuros.

Conclusões

A teoria de gravitação tratada neste trabalho consiste em uma modificação e reinterpretação da teoria unificada de Weyl. Em sua proposta original, Weyl desenvolveu aquela que representa a primeira tentativa de unificação relativista da gravitação com o eletromagnetismo, a qual deu origem às modernas teorias gauge [58]. Por outro lado, como discutido anteriormente, devido à objeção levantada por Einstein, a sua elegante proposta não teve seu mérito reconhecido até recentemente.

Revisitando a teoria de Weyl, desenvolvemos uma nova versão, mas em conformidade com o espírito e filosofia inicial de Weyl, a qual denominamos Teoria Gravitacional Invariante de Weyl. Nesta nova versão, é possível implementar o acoplamento da geometria com a matéria, levando ao conjunto completo de equações de campo. Como vimos, isso é realizado utilizando um novo conceito de métrica invariante. Além disso, argumentamos que a eletrodinâmica obtida originalmente por Weyl não coincide com a eletrodinâmica de Maxwell, mas sim uma eletrodinâmica de Proca, na qual o campo vetorial massivo passa a ser entendido como possuindo uma natureza puramente geométrica.

Investigamos, como uma aplicação das equações de campo da Teoria Gravitacional Invariante de Weyl, uma solução aproximada no regime de campo fraco, que apresenta uma grande semelhança com o estudo realizado por [110] ao investigar a interação gravitacional

do campo de Proca no espaço-tempo de Reissner-Nordström-de Sitter. Portanto, de certa forma, podemos dizer que a 1-forma de Weyl efetivamente se comporta como um campo de Proca. Em outras palavras, a descrição do campo de Proca geométrico na teoria invariante de Weyl mostra-se, de certo modo, consistente com a teoria de Proca no contexto da relatividade geral. O grande diferencial é que, neste caso, esse campo passa a ter uma origem puramente geométrica.

Seguindo ainda a perspectiva de análise de campo fraco, investigamos a propagação de ondas gravitacionais no contexto dessa nova teoria de gravidade modificada. No âmbito dessa teoria, as equações linearizadas (4.19) e (4.20), tomadas em conjunto, descrevem a propagação de perturbações na geometria do espaço-tempo. Em particular, a equação (4.20) revela que, no regime de campo fraco, o campo de Weyl se comporta como uma onda de Proca que se propaga livremente. Esse campo não interage diretamente com os campos da matéria, exceto gravitacionalmente e de maneira indireta, deixando um traço na métrica via equação de campo (4.19). Assim, uma possível maneira de detectar esse campo seria por meio do estudo do seu efeito gravitacional (semelhante à matéria escura). Esse efeito pode ser melhor compreendido em análises futuras da equação (4.19), dada a presença do tensor momento-energia de Weyl que funciona como uma fonte para as perturbações do campo métrico, mesmo no vazio.

Gostaríamos de ressaltar que, no contexto da teoria aqui examinada, a detecção quase simultânea de ondas gravitacionais e ondas de Weyl-Proca não ocorreria, em princípio, a menos que houvesse frequências muito grandes destas últimas. Isso se deve ao fato de que as ondas do tipo Proca não se propagam à velocidade da luz, devido à presença do termo de massa em sua equação de movimento.

Deve-se notar também que tanto o tensor momento-energia $T_{\alpha\beta}^{(P)}$ do campo de Weyl-Proca quanto o tensor momento-energia da matéria $T_{\alpha\beta}^{(m)}$ são conservados separadamente, o que significa que o campo de Weyl-Proca não interage com a matéria. Esta é uma característica interessante para um candidato à matéria escura.

Nesta perspectiva, por fim, investigamos as condições sob as quais o campo de Weyl poderia ser responsável pela matéria escura observada no Universo. Para isso, assumimos

a existência de um gás de partículas de Weyl-Proca em um estado de condensado de Bose-Einstein e investigamos seu comportamento em larga escala. Os resultados obtidos mostram que o modelo com a presença do campo Weyl é compatível com o modelo cosmológico padrão até a ordem de H^2/m^2 na era dominada por matéria.

Verificamos que, para uma massa suficientemente alta, o estresse de cisalhamento e a pressão anisotrópica tornam-se desprezíveis, mesmo quando o campo está em um estado clássico com polarização bem definida, sendo compatível com o baixo grau de anisotropia observado na radiação cósmica de fundo (CMB), $\delta T/T \sim 10^{-5}$ [139]. Além disso, encontramos que, sob a condição $m \gg H$, o condensado de Weyl-Proca se comporta como um fluido sem pressão, como se espera de um candidato à matéria escura. Por outro lado, a suposição de que o condensado de Weyl-Proca corresponde a todo o conteúdo de matéria escura do Universo impõe restrições para essa proposta. Nesse caso, é necessário que a massa e a amplitude presente do campo satisfaçam determinadas condições. A amplitude está relacionada à abundância das partículas de Weyl-Proca produzidas no Universo primordial, que, por sua vez, está conectada com o processo de geração das partículas Weyl nas primeiras fases do Universo. Estimar essas quantidades constitui um aspecto importante para esta proposta, exigindo, portanto, investigações adicionais.

Lista de Publicações

1. ROMERO, C.; DUARTE, M. P. *The Coming Back of the Proca Field*. Space Time Fundamentals and Interactions, v. 3-4, p. 247-250, 2023.
2. DUARTE, M.; DAHIA, F.; ROMERO, C. *On the Propagation of Gravitational Waves in the Weyl Invariant Theory of Gravity*. Universe, v. 10, p. 361, 2024.
3. DUARTE, M.; DAHIA, F.; ROMERO, C. *The Geometric Proca-Weyl Field as a Candidate for Dark Matter*. Universe, v. 11, p. 34, 2025.

Referências Bibliográficas

- [1] DAHMEN, S. R. *Relatividade geral: teoria e aplicações*. Porto Alegre: Instituto de Física, UFRGS, 2022.
- [2] NOVELLO, M. *Cosmologia*, Coleção Tópicos em Física, Editora Livraria da Física, São Paulo, 2010.
- [3] D'INVERNO, R. *introducing Einstein's Relativity*, Oxford University Press, Oxford, 1992.
- [4] D'INVERNO, R.; VICKERS, J. *Introducing Einstein's Relativity: A deeper Understanding*. 2. ed. Oxford: Oxford University Press, 2022.
- [5] WHEELER, J. A. *A journey into gravity and spacetime*, Scientific American Library, n.31. 1991.
- [6] WHEELER, J. A.; FORD, K. *Geons, Black Holes, and Quantum Foam: A Life in Physics*. New York: W. W. Norton & Company, 1998.
- [7] SOARES, D. *Os primeiros passos na cosmologia relativista*. Belo Horizonte, 2012. Disponível em: <http://lilith.fisica.ufmg.br/dsoares/ensino/cosmrel/ppcosmrel.htm>. Acesso em: 12 nov. 2024.

- [8] SOARES, D. *Tópicos em cosmologia relativista* [livro eletrônico] / Domingos Soares. - 1. ed. - Belo Horizonte, MG : Ed. do Autor, 2020.
- [9] DUARTE, M. P. *Gravitação e o campo de Proca*, dissertação de mestrado, João Pessoa, Universidade Federal da Paraíba, 2021.
- [10] DYSON, F.W.; EDDINGTON, A.S.; DAVIDSON, C. *A Determination of the Deflection of Light by the Sun's Gravitational Field, from Observations Made at the Total Eclipse of May 29, 1919*. Philosophical Transactions of the Royal Society A, v.220, p.291–333, 1920.
- [11] TRESCHMAN, K.J.E. *Astronomical Tests of General Relativity: The anomalous advance in the perihelion of Mercury and gravitational redshift*. Asian Journal of Physics, v.23, n.^o1-2, p.171–188, 2014.
- [12] WILL, C.M. *The Confrontation between General Relativity and Experiment*, Living Reviews in Relativity, v.17, n.^o4, 2014. DOI:10.12942/lrr-2014-4.
- [13] WILL, C.M. *Theory and Experiment in Gravitational Physics*. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2018.
- [14] PIATTELLA, O. F. *Introdução à relatividade geral*. Cadernos de Astronomia, v.1, p.30–39, jul. 2020. DOI:10.47083/Cad.Astro.v1n1.30827.
- [15] RICCI, F.; BASSAN, M. *Experimental Gravitation*. Lecture Notes in Physics, Springer, Cham (Suíça), 2022.
- [16] SOARES, D. S. L. *História de Sobral*, Jornal da Ciência/SBPC, n.^o558, p.2, 19 de agosto de 2005. Departamento de Física, ICEx, UFMG, Belo Horizonte, Brasil.
- [17] PACHECO, A.; ANJOS, J. dos (orgs.). *O Eclipse de Sobral*. Rio de Janeiro: MAST, 2021.
- [18] EVENT HORIZON TELESCOPE COLLABORATION; ET AL. *First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole*. Astrophysical Journal Letters, v.875, p.L1, 2019.

- [19] ABBOTT, B.P. et al. (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration). *Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger*. Physical Review Letters, v. 116, n. 6, p. 061102, 2016.
- [20] ABBOTT, B.P. et al. (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration). *GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral*. Physical Review Letters, v. 119, n. 16, p. 161101, 2017.
- [21] ABBOTT, B.P. et al. (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration). *Multi-messenger Observations of a Binary Neutron Star Merger*. The Astrophysical Journal Letters, v. 848, n. 2, p. L12, 2017.
- [22] WEINBERG, S. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. Wiley, 1972.
- [23] CARROLL, S. M. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Cambridge University Press, 2019.
- [24] RINDLER, W. *Relativity: Special, General, and Cosmological*. 2nd ed. Oxford University Press, 2006.
- [25] WALD, Robert M. *General relativity*. University of Chicago press, 2010.
- [26] HUBBLE, E. *A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae*. Proceedings of the National Academy of Sciences, v.15, n.3, 1929, p.168–173.
- [27] FRIEDMANN, A. *Über die Krümmung des Raumes*. Zeitschrift für Physik, v.10, p.377–386, 1922.
- [28] LEMAÎTRE, G. *Un univers homogène de masse constante et de rayon croissant, rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extragalactiques*. Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, v.47A, p.49–59, 1927.
- [29] A. S. EDDINGTON, *On the Instability of Einstein's Spherical World*. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 90, 668, 1930.

- [30] COLLABORATION, Planck, et al. *Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters*. Astronomy & Astrophysics, 641, A6. 2020.
- [31] TRISTRAM, M. et al. *Cosmological parameters derived from the final Planck data release (PR4)*. Astronomy & Astrophysics, v. 682, p. A37, 2024.
- [32] ADLER, R. J. (2021). *General Relativity and Cosmology*. Graduate Texts in Physics.
- [33] PEEBLES, P. J. E.; RATRAC, B. *The cosmological constant and dark energy*. Reviews of Modern Physics, v.75, 2003, p.559–606.
- [34] WEINBERG, S. *The cosmological constant problem*, Rev. Mod. Phys., v. 61, p. 1-23, 1989.
- [35] CARROLL, S. M. *The cosmological constant*. arXiv:astro-ph/0107571, 2001.
- [36] SCHUTZ, B. *A first course in general relativity*. Cambridge University Press, 2022.
- [37] BULL, P. et al. *Beyond Λ CDM: Problems, solutions, and the road ahead*. Physics of the Dark Universe, v. 12, p. 56-99, 2016.
- [38] PETROV, A.; NASCIMENTO, J.R.; PORFIRIO, P. *Introduction to modified gravity*. Springer Nature, 2023.
- [39] AGUILAR, J.E.M.; ROMERO, C. *Inducing the cosmological constant from five-dimensional Weyl space*. Foundations of Physics, v. 39, p. 1205-1216, 2009.
- [40] RUBIN, V. C.; FORD JR., W. K. *Rotation of the Andromeda nebula from a spectroscopic survey of emission regions*. Astrophysical Journal, v. 159, p. 379-403, 1970.
- [41] VON MARTTENS, R.; CASARINI, L.; MOTA, D. F.; ZIMDAHL, W. *Cosmological constraints on parametrized interacting dark energy*. Physics of the Dark Universe, v. 23, p. 100248, 2019.
- [42] STRAUMANN, N. *Hermann Weyl's space-time geometry and the origin of gauge theory 100 years ago*. In: One Hundred Years of Gauge Theory: Past, Present and Future Perspectives. Cham: Springer International Publishing, p. 3-23, 2020.

- [43] TUCKER, R. W.; WANG, C. *An Einstein-Proca-fluid model for dark matter gravitational interactions*. Nuclear Physics B - Proceedings Supplements, v. 57, p. 259-262, 1997.
- [44] SANOMIYA, T. A. T., LOBO, I. P., FORMIGA, J. B., DAHIA, F., ROMERO, C. (2020). *Invariant approach to Weyl's unified field theory*. Physical Review D, 102(12). doi:10.1103/physrevd.102.12403.
- [45] ROMERO, C.; DUARTE, M.P. *The Coming Back of the Proca Field*. Space Time Fundam. Interact. 2023, 3-4, 247-250.
- [46] BROWN, H. R.; POOLEY, O. (1999). *The origin of the spacetime metric: Bell's 'Lorentzian pedagogy' and its significance in general relativity*. To appear in: Physics Meets Philosophy at the Planck Length, Cambridge University Press. arXiv:gr-qc/9908048.
- [47] PROCA, A. L. *Sur la théorie ondulatoire des électrons positifs et négatifs*. Journal de Physique et le Radium, v. 7, n. 8, p. 347-353, 1936.
- [48] WEYL, H. *Gravitation und Elektrizität*, Sitzungsber Deutsch. Akad. Wiss. Berlin, 465, 1918.
- [49] SANOMIYA, T. A. T. *Reinterpretação e extensão da teoria unificada de Weyl*. 2020. Tese (Doutorado em Física) – Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2020.
- [50] ADLER, A.; BAZIN, M.; SCHIFFER, M. *Introduction to General Relativity*, Ch. 15, McGraw-Hill, 1975.
- [51] W. GREINER, *Relativistic Quantum Mechanics Wave Equations*. (Springer), 2000.
- [52] CARMO, M. P. *Riemannian Geometry*, Birkhäuser, Boston, 1992.
- [53] MANFIO, F. *Geometria Riemanniana*. Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – USP. Disponível em: <<https://sites.icmc.usp.br/manfio/Riemanniana.pdf>>. Acesso em: 7 de junho de 2024.
- [54] ROMERO NETO, C. A. *Uma Introdução à Geometria Riemanniana e a Equação de Yamabe*. João Pessoa, Universidade Federal da Paraíba, 2019.

- [55] PUCHEU, M. L. *Teorias da gravitação e geometria de Weyl*, tese de doutorado, João Pessoa, Universidade Federal da Paraíba, 2013.
- [56] ALVES JÚNIOR, F. A. P. *Modelos cosmológicos numa teoria geométrica escalar-tensorial da gravitação: aspectos clássicos e quânticos*, tese de doutorado, João Pessoa, Universidade Federal da Paraíba, 2016.
- [57] O'RAIFEARTAIGH, L. *The Dawning of Gauge Theory*. Princeton: Princeton University Press, 1997. (Princeton Series in Physics). ISBN 0-691-02978-4.
- [58] O'RAIFEARTAIGH, L.; STRAUMANN, N. *Gauge theory: Historical origins and some modern developments*. Reviews of Modern Physics, v. 72, n. 1, p. 1-23, 2000.
- [59] LIMA, R. G. *Teoria da gravitação num espaço-tempo de Weyl não-integrável*, dissertação de mestrado, João Pessoa, Universidade Federal da Paraíba, 2016.
- [60] NOVELLO, M.; OLIVEIRA, L. A. R.; SALIM, J. M.; ELBAZ, E. *Geometrized instatons and the creation of the universe*, International Journal of Modern Physics 1, 3, 641-677, 1993.
- [61] NOVELLO, M. *Os construtores do Cosmos*. Compilado por R. Petronio. São Paulo, Editora Gaia, 2023.
- [62] SALIM, J. M.; SAUTÚ, S. L. *Gravitational theory in Weyl integrable spacetime*, Classical and Quantum Gravity, 13, 353-360, 1996.
- [63] MIRITZIS, J. *Isotropic cosmologies in Weyl geometry*, Classical and Quantum Gravity, 21, 3043, 2004.
- [64] LOBO, I. P. *Singularidades do espaço-tempo em variedades de Weyl*, dissertação de mestrado, João Pessoa, Universidade Federal da Paraíba, 2013.
- [65] LOBO, I. P.; BARRETO, A. B.; ROMERO, C. *Space-time singularities in Weyl manifolds*, Europhysics Journal, C75, 448, 2015.
- [66] LORENTZ, A. et al. *The principle of relativity*, New York: Dover publications, 1952.

- [67] LOBO, I.P.; ROMERO, C. *Experimental Constraints on the Second Clock Effect*. *Phys. Lett. B* 2018, 783, 306-310. doi.org/10.1016/j.physletb.2018.07.019.
- [68] ROMERO, C. Geometria de Weyl e Teorias da Gravitação. In: NOVELLO, M.; BITTENCOURT, E.; FABRIS, J.; JORAS, S.; MOSCHELLA, U.; ROMERO, C. *Escola de Cosmologia e Gravitação*. Rio de Janeiro: LF Editorial, 2024.
- [69] ROMERO, C.; LIMA, R. G; SANOMIYA, T. A. T. *One hundred years of Weyl's (unfinished) unified field theory*, *Studies in history and philosophy of modern physics*, 66, p. 019.02.005, 2019.
- [70] BAO, D.; CHERN, S. S; CHEN, Z. *An introduction to Riemann-Finsler geometry*, Springer, 1991.
- [71] AVALOS, R.; DAHIA, F.; ROMERO, C. *A note on the problem of proper time in Weyl spacetime*, *Foundations of Physics*, 48, 253, 2018.
- [72] EHLERS, J.; PIRANI, F.; SCHILD, A. *Republication of: The geometry of free fall and light propagation*, *Gen. Rel.Grav.* 44, Issue 6, 1587, 2012.
- [73] HOBSON, M.P.; LASENBY, A.N. *Weyl gauge theories of gravity do not predict a second clock effect*. *Physical Review D*, v. 102, p. 084040, 19 out. 2020.
- [74] PALA, C.; SERT, O.; ADAK, M. *Weyl covariance, second clock effect and proper time in theories of symmetric teleparallel gravity*. *European Physical Journal*, v.83, n.1, p.17, jan.2023. DOI:10.1140/epjc/s10052-023-11171-0.
- [75] O'NEILL, B. *Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity*. Academic Press., 1983.
- [76] PERLICK., V., *Characterization of standard clocks by means of light rays and freely falling particles*, *Gen. Relativ. Gravit.*, 19:1059-1073, 1987.
- [77] ALMEIDA, T. S.; PUCHEU, L. M.; ROMERO, C; FORMIGA, J. B. *From Brans-Dicke gravity to a geometrical scalar-tensor theory*, *Phys. Rev. D*, 89, 064047, 2014.

- [78] ATIYAH, M. *Einstein and geometry*, Current Science, 89, 25, 2041-2044, 2005.
- [79] LINDSTRÖM, U. *The Palatini variational principle and class of scalar-tensor theories*, Nuovo Cimento B 35, 1976.
- [80] DMITRY, V. Z., *The Inverse Problem of the Calculus of Variations*, Springer, 2015.
- [81] HELMHOLTZ, H. *Ueber die physikalische bedeutung des prinicips der Kleinsten wirkung*, Journal für die reine and angewandte Mathematik, 100, 137, 1887.
- [82] LOPUSZANSKI, Jan. *The inverse variational problem in classical mechanics*. World Scientific, 1999.
- [83] ALVAREZ, Enrique; GONZALEZ-MARTIN, Sergio. *Weyl gravity revisited*. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, v. 2017, n. 02, p. 011, 2017.
- [84] GOMES, Cláudio; BERTOLAMI, Orfeu. *Nonminimally coupled Weyl gravity*. Classical and Quantum Gravity, v. 36, n. 23, p. 235016, 2019.
- [85] KOUNIATALIS, G.; SARIDAKIS, E.N. *Modified gravity from Weyl connection and the $f(R, \mathcal{A})$ extension*. The European Physical Journal C, v. 85, n. 3, p. 1-11, 2025.
- [86] MOHAMMEDI, N. *A note on Weyl gauge symmetry in gravity*. Classical and Quantum Gravity, v. 41, n. 19, p. 195021, 2024.
- [87] SCHOLZ, E. *The unexpected resurgence of Weyl geometry in late 20th-century physics*. Beyond Einstein: Perspectives on geometry, gravitation, and cosmology in the twentieth century, p. 261-360, 2018.
- [88] STRAUB, W. O. *Weyl's theory of the combined gravitational-electromagnetic field*. v. 13907890, 2005.
- [89] GREINER, W.; REINHARDT, J. *Field Quantization*; Springer: Berlin/Heidelberg, Germany, 1996.
- [90] A. O. Barut, *Electrodynamics and Classical Theory of Fields & Particles*, General Publishing Company, 1980.

- [91] POENARU, D. N. *Proca equations of a massive vector boson field*. In: Twenty Fifth International Workshop on Nuclear Theory, Rila Mountains, Bulgaria. 2006.
- [92] POENARU, D. N.; CALBOREANU, A. *Alexandru Proca (1897-1955) and his equation of the massive vector boson field*. Europhysics News, v. 37, n. 5, p. 24-26, 2006.
- [93] DE AQUINO, F. *Proca Equations and the Photon Imaginary Mass*. AIDS. Official journal of the international AIDS Society, v. 2020, p. 70, 2011.
- [94] TAUBER, G. E. *Proca Field in Curved Spacetime*. J. Math. Phys, v. 10, p. 633, 1968.
- [95] BABICHEV, E.; CHARMOUSIS, C.; HASSAINE, M. *Black holes and solitons in an extended Proca theory*. Journal of High Energy Physics, v. 2017, n. 5, p. 1-24, 2017.
- [96] V.RUBAKOV, V.; WILSON, S. S. *Classical Theory of Gauge Fields*. (Graduate Texts in Physics), 2019.
- [97] AVALOS, R.; Lobo, I. P.; Sanomiya, T.; Romero, C. *On the Cauchy problem for Weyl-geometric scalar-tensor theories of gravity*. Journal of Mathematical Physics, v. 59, n. 6, 2018.
- [98] KOSYAKOV, B. *Introduction to the classical theory of particles and fields*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [99] BHATTACHARYA, S. *Black holes and the positive cosmological constant*. arXiv preprint arXiv:1302.1399, 2013.
- [100] LANDAU, L.D.; LIFSHITZ, E. M. *The classical theory of fields*. Oxford: Pergamon, 1971.
- [101] SCHWARZSCHILD, K. S. *On the gravitational field of a mass point according to Einstein's theory*, Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.), 189, 1916. Tradução para o inglês disponível em <http://arxiv.org/abs/physics/9905030>.
- [102] REISSNER, H. *Über die Eigengravitation des elektrischen Feldes nach der Einstein'schen Theorie*, Annalen der Physik 50: 106-120, 1916.

- [103] NORDSTRÖM, G. *On the Energy of the Gravitational Field in Einstein's Theory*, Verhandl. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap., Afdel. Natuurk., Amsterdam 26: 1201-1208, 1918.
- [104] TAYLOR, E.F.; WHEELER, J.A. *Exploring Black Holes, Introduction to General Relativity*, Addison Wesley Longman, San Francisco (2000)
- [105] GONZALES, B. V.; LINARES, R.; MACEDA, M.; S'ANCHEZ-SANTOS, O. *Non-commutative Einstein-Proca Space-time*. arXiv: High Energy Physics - Theory, 2014.
- [106] NARIAI, H. *On Some Static Solutions of Einstein's Gravitational Field Equations in a Spherically Symmetric Case*. General Relativity and Gravitation, 31: 951-961, 1999.
- [107] BUCHBINDER, I. L.; NETTO, T. D.; SHAPIRO, I. L. *Massive vector field on curved background: Nonminimal coupling, quantization, and divergences*. Physical Review D, 95: 085009, 2017.
- [108] LI, G.; ZHANG, Y.; ZHANG, L. et al. *Strong Gravitational Lensing in the Einstein-Proca Theory*. International Journal of Theoretical Physics, 54: 1245-1252, 2015.
- [109] OBUKHOV, Y. N.; VLACHYNSKY, E. J. *Einstein-Proca model: spherically symmetric solutions*. Annalen der Physik, 8(6): 497-509, 1999.
- [110] SHI, C.; LIU, Z. *Proca Effect in Reissner-Nordstrom de Sitter Metric*. International Journal of Theoretical Physics, 44(3): 303-308, 2005.
- [111] VUILLE, C.; IPSER, J.; GALLAGHER, J. *Einstein-Proca Model, Micro Black Holes, and Naked Singularities*. General Relativity and Gravitation, 34: 689-696, 2002.
- [112] DERELI, T. et al. *Non-Riemannian gravity and the Einstein-Proca system*. Classical and Quantum Gravity, v. 13, n. 8, p. L103, 1996.
- [113] TOUSSAINT, M. *A numeric solution for Einstein's gravitational theory with Proca matter and metric-affine gravity*. General Relativity and Gravitation, v. 32, p. 1689-1709, 2000.

- [114] A. EINSTEIN, "Über Gravitationswellen", *Königlich Preußische Akademie der Wissenschaften Sitzungsberichte*, 154-167, 1918.
- [115] Y. CHOQUET-BRUHAT, "The Cauchy Problem." In: *Gravitation: an introduction to current research*. Ed. by L. Witten. New J. Wiley, New York, 1962.
- [116] DUARTE, M.; DAHIA, F.; ROMERO, C. *On the Propagation of Gravitational Waves in the Weyl Invariant Theory of Gravity*. Universe, 2024, 10, 361.
- [117] BERNABEU, J.; ESPRIU, D.; PUIGDOMENECH, D. *Gravitational waves in the presence of a cosmological constant*. Physical Review D—Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology, v. 84, n. 6, p. 063523, 2011.
- [118] BERNABÉU, José; ESPINOZA, Catalina; MAVROMATOS, Nick E. *Cosmological constant and local gravity*. Physical Review D-Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology, v. 81, n. 8, p. 084002, 2010.
- [119] SILVA, J. P. da. *Proca Electrodynamics Approach to the Massive Photon*. Journal of Education and Science, 2024.
- [120] TU, Liang-Cheng; LUO, Jun; GILLIES, George T. *The mass of the photon*. Reports on Progress in Physics, v. 68, n. 1, p. 77–130, 2005.
- [121] PEREIRA, R. M. *A Lagrangiana de Proca e uma Aplicação na Teoria da Supercondutividade* — Trabalho apresentado para o curso de Eletromagnetismo da Pós-Graduação. Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2008.
- [122] KOSYAKOV, B. P. *Introduction to the Classical Theory of Particles and Fields*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007.
- [123] SMOLKOVIĆ, A. *Photon mass and electron decay*. University of Ljubljana, Faculty of Mathematics and Physics, 2016.
- [124] R. AVALOS, J. H. LIRA, *The Einstein constraint equations*. IMPA: Rio de Janeiro, Brazil, 2021.

- [125] GUTH, A. H. *Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems*. Physical Review D, v. 23, p. 347-356, 1981.
- [126] A.R. LIDDLE; D. LYTH, *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure* (Cambridge, 2000).
- [127] R. TAILLET, *The Young Universe: Primordial Cosmology* (Wiley, 2022).
- [128] FORD, L. H. *Inflation driven by a vector field*. Physical Review D, v. 40, n. 4, p. 967, 1989.
- [129] CARROLL, S. *Dark Matter, Dark Energy: The Dark Side of the Universe*; The Teaching Company, LLC: Chantilly, VA, USA, 2007; ISBN 978-1598033519.
- [130] BURIKHAM, P.; HARKO, T.; PIMSAMARN, K.; SHAHIDI, S. *Dark Matter as a Weyl Geometric Effect*. Phys. Rev. D 2023, 107, 064008. DOI: 10.1103/PhysRevD.107.064008.
- [131] CUZINATTO, R. R.; DE MORAIS, E. M.; MEDEIROS, L. G.; NALDONI DE SOUZA, C.; PIMENTEL, B. M. *De Broglie-Proca and Bopp-Podolsky Massive Photon Gases in Cosmology*. Europhys. Lett. 2017, 118 (1), 19001.
- [132] GÓMEZ, L. G.; RODRÍGUEZ, Y. *Coupled Multi-Proca Vector Dark Energy*. Physics of the Dark Universe 2021, 31, 100759. DOI: 10.1016/j.dark.2020.100759.
- [133] BARKER, W.; ZELL, S. *Einstein-Proca Theory from the Einstein-Cartan Formulation*. Phys. Rev. D 2024, 109, 024007. DOI: 10.1103/PhysRevD.109.024007.
- [134] JOCKEL, C.; SAGUNSKI, L. *Fermion Proca Stars: Vector-Dark-Matter-Admixed Neutron Stars*. Particles, 2024, 7, 52-79.
- [135] BRITO, R.; CARDOSO, V.; HERDEIRO, C. A. R.; RADU, E. *Proca Stars: Gravitating Bose-Einstein Condensates of Massive Spin 1 Particles*. Phys. Lett. B 2016, 752, 291-295.
- [136] LOEB, A.; WEINER, N. *Cores in Dwarf Galaxies from Dark Matter with a Yukawa Potential*. Physical Review Letters 2011, 106 (17). DOI: 10.1103/PhysRevLett.106.171302.

- [137] DUARTE, M.; DAHIA, F.; ROMERO, C. *The Geometric Proca-Weyl Field as a Candidate for Dark Matter*. Universe, 2025, 11, 34.
- [138] MILLER JR, Stanley C.; GOOD JR, R. H. A WKB-type approximation to the Schrödinger equation. Physical Review, v. 91, n. 1, p. 174, 1953.
- [139] MUKHANOV, V. *Physical Foundations of Cosmology*. Cambridge University Press: Cambridge, U.K., 2005.
- [140] NOVELLO, M., *Theoretical Cosmology Proceedings of VII Brazilian School of Cosmology and Gravitation*, pag. 344, 1972.
- [141] NOVELLO, M. *O universo inacabado: a nova face da ciência*. São Paulo, N-1 Edições, 2018.
- [142] GILBERT, G.; ASPECT, A.; FABRE, C. *Introduction to Quantum Optics*; Cambridge University Press: Cambridge, UK, 2010.
- [143] GRIFFITHS, D.J. *Introduction to Elementary Particles*; 1st ed.; Wiley-VCH: Hoboken, NJ, USA, 1987; ISBN 978-0471603863.
- [144] VIEIRA, R. S. S. *Geometria de Weyl e matéria escura*. Campinas, SP: s.n., 2010.
- [145] FABBRICHESI, M.; GABRIELLI, E.; LANFRANCHI, G. *The physics of the dark photon: a primer*. Cham, Switzerland: Springer, 2021.
- [146] GRAHAM, P.W.; MARDON, J.; RAJENDRAN, S. *Vector dark matter from inflationary fluctuations*. Physical Review D, v. 93, n. 10, p. 103520, 2016.
- [147] AGRAWAL, P. et al. *Relic abundance of dark photon dark matter*. Physics Letters B, v. 801, p. 135136, 2020.
- [148] PROCA, A. *Sur la théorie ondulatoire des électrons positifs et négatifs*. J. Phys. Radium. 1936, 7, 347–353.
- [149] HOLDOM, B. *Two $U(1)$'s and epsilon charge shifts*. Phys. Lett. B; (Netherlands), v. 166, n. 2, 1986.

- [150] FAYET, P. *Extra $U(1)$'s and new forces*. Nuclear Physics B, v. 347, n. 3, p. 743-768, 1990.
- [151] CHANGSHENG, S.; Liu, Z. *Quantum Proca Fields in Expanding Universes*. Int. J. Theor. Phys. 2005, 44, 303.
- [152] CHUNG, D.-Y. *A Unifying Theory of Dark Energy, Dark Matter, and Baryonic Matter in the Positive-Negative Mass Universe Pair: Protogalaxy and Galaxy Evolutions*. Journal of Modern Physics, 11, 1091-1122, 2020.