

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Doutorado em Matemática

Singularidades de aplicações de reflexão

Milena Barbosa Gama

JOÃO PESSOA – PB
JULHO DE 2025

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Doutorado em Matemática

Singularidades de aplicações de reflexão

por

Milena Barbosa Gama

sob a orientação do

Prof. Dr. Otoniel Nogueira da Silva

e sob a coorientação do

Prof. Dr. Juan José Nuno Ballesteros

João Pessoa – PB
Julho de 2025

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

G185s Gama, Milena Barbosa.

Singularidades de aplicações de reflexão / Milena
Barbosa Gama. - João Pessoa, 2025.

112 f.

Orientação: Otoniel Nogueira da Silva.

Coorientação: Juan José Nuño-Ballesteros.

Tese (Doutorado) - UFPB/CCEN.

1. Geometria. 2. Topologia. 3. Matriz de
apresentação. 4. Aplicação de reflexão. I. Silva,
Otoniel Nogueira da. II. Nuño-Ballesteros, Juan José.
III. Título.

UFPB/BC

CDU 514(043)

Singularidades de aplicações de reflexão

por

Milena Barbosa Gama ¹

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

Área de Concentração: Geometria/Topologia

Aprovada em 30 de Julho de 2025.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Otoniel Nogueira da Silva – UFPB
(Orientador)

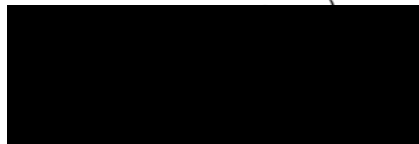
Prof. Dr. Juan José Nuno Ballesteros
(Coorientador)

Prof. Dr. Aldício José Miranda
(Examinador Externo)

Prof. Dr. Aurélio Menegon Neto
(Examinador Interno)

Prof. Dra. Bruna Oréfice Okamoto
(Examinador Externo)

¹A autora foi bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).



Prof. Dr. Guillermo Peñafort Sanchis
(Examinador Externo)



Prof. Dr. Marcelo Escudeiro Hernandez
(Examinador Externo)

Agradecimentos

Aqui deixo meus agradecimentos a todos que me apoiaram e me incentivaram ao longo dos últimos quatro anos. Agradeço imensamente à minha família, em especial aos meus pais, Elionora e Adriano, e às minhas irmãs, Isabele e Maria Helena.

Agradeço também a Álvaro, Jaislayne, Fábio, Yasmin, JP, Diego, Gustavo, Gabriel, Manoel, Natália e aos demais que estiveram comigo nesta vida acadêmica, sempre com boas conversas e apoio. Agradeço aos professores que me ensinaram durante esses quatro anos.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Otoniel, que, ao longo desses anos, compartilhou seu conhecimento com dedicação, cuidado e atenção. Agradeço também ao meu coorientador, Prof. Juan, por todo o conhecimento, atenção e pela acolhida durante o período de doutorado sanduíche em Valência, que foi uma experiência profissionalmente enriquecedora. Agradeço ainda a Guillermo, Bárbara, Raul e aos demais que pude conhecer durante minha estadia em Valência.

Agradeço também aos professores Aldício, Aurélio, Bruna, Guillermo e Marcelo por aceitarem participar da banca.

Por fim, agradeço à Capes pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho, consideramos alguns problemas relacionados aos germes de aplicações de gráfico refletido f , de $(\mathbb{C}^n, 0)$ em $(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$. Uma aplicação de gráfico refletido é um caso particular de aplicação de reflexão, definida como a composição entre a aplicação de órbita de um grupo de reflexão G sobre \mathbb{C}^{n+1} com um mergulho de \mathbb{C}^n em \mathbb{C}^{n+1} . Apresentamos, neste trabalho, uma descrição da matriz de apresentação de $f_*\mathcal{O}_n$ como um \mathcal{O}_{n+1} -módulo via f , em termos da ação do grupo de reflexão G associado. Como consequência, fornecemos também uma equação para a imagem de f , novamente em função da ação de G . Além disso, apresentamos limites superior e inferior para a multiplicidade da imagem de f , acompanhados de algumas aplicações. Por fim, introduzimos uma nova classe de germes de aplicações, denominada “*germes de aplicações 2m-diedrais*” e, aplicamos os resultados obtidos para estudar esta classe de aplicações.

Palavras-chave: Aplicação de reflexão. Grupo de reflexão. Matriz de apresentação.

Abstract

In this work, we consider some problems related to germs of reflected graph maps f , from $(\mathbb{C}^n, 0)$ to $(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$. A reflected graph map is a particular case of a reflection map, defined as the composition of the map induced by the action of a reflection group G on \mathbb{C}^{n+1} with an embedding of \mathbb{C}^n into \mathbb{C}^{n+1} . In this work, we present a description of the presentation matrix of $f_*\mathcal{O}_n$ as an \mathcal{O}_{n+1} -module via f , in terms of the action of the associated reflection group G . As a consequence, we also provide a defining equation for the image of f , again in terms of the action of G . Moreover, we present upper and lower bounds for the multiplicity of the image of f , along with some applications. Finally, we introduce a new class of map germs, called “*2m-dihedral map germs*” and we apply the results obtained to study this class of maps.

Keywords: Reflection map. Reflection group. Presentation matrix.

Sumário

Introdução	1
1 Resultados preliminares	7
1.1 Germes de espaços analíticos	7
1.2 Teoria de Singularidades	10
1.3 O algoritmo de Mond e Pellikaan	14
1.4 O espaço dos pontos duplos	17
2 Grupos e aplicações de reflexão	20
2.1 Grupos de reflexão	21
2.2 Aplicações de reflexão	29
2.3 Teorema de Gutkin	30
3 Matriz de apresentação e a equação da imagem	33
3.1 A matriz de apresentação para aplicações de gráfico refletido	33
3.2 Uma equação para a imagem	40
3.2.1 A imagem de uma aplicação de gráfico refletido	42
4 Cota para a multiplicidade e aplicações	46
4.1 Multiplicidade	46
4.2 Espaço de pontos duplos	53
4.3 Germes de aplicações de reflexão quase homogêneos	59
4.4 Sobre a existência de aplicações de gráfico refletido finitamente determi- nadas de coposto 1 com $p = n + 1$	62
4.5 A topologia de um par de componentes de identificação	63
4.5.1 Exemplo de aplicação que não é \mathcal{A} -equivalente a uma aplicação de reflexão	65
5 Germes de aplicação diedral	67
5.1 A matriz de apresentação de $f_*\mathcal{O}_2$ para germes de aplicação diedral . .	68
5.2 Um estudo sobre a aplicação 6-diedral	73

5.3	Matriz de apresentação para a aplicação 8-diedral	77
5.4	Germes de aplicação diedral finitamente determinados	79
5.5	Problemas de pesquisa futuros	85
Apêndices		89
A	Geradores e aplicações de órbita para grupos de reflexão	89
A.1	Geradores dos grupos $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$, \mathcal{D}_{2m} e G'_i s	89
A.2	Obtendo polinômios invariantes usando os programas Magma e Singular	93
A.3	Aplicações de órbita	95
B	Biblioteca no Singular para aplicações de reflexão	97
Referências Bibliográficas		102

Notações

A seguir, listamos algumas notações utilizadas neste trabalho.

- G denota um grupo de reflexão;
- $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ denota as variáveis na fonte;
- $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n, Z)$ denota as variáveis na meta;
- $S := \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$;
- ρ denota um mergulho;
- w_1, \dots, w_n denota os polinômios invariantes geradores da álgebra de invariantes de G ;
- $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)$ é a aplicação de órbita de G ;
- $F = \langle w_1, \dots, w_n \rangle$ é o ideal gerado pelos invariantes do grupo G ;
- d_i denota os graus dos polinômios invariantes w_i ;
- g_1, g_2, \dots, g_d denota os elementos de G , onde $g_1 = Id$, isto é, g_1 é a matriz identidade;
- ζ é uma raiz m -ésima primitiva da unidade;
- $\lambda = (\alpha - ZId)$ denota a matriz de apresentação de $f_*\mathcal{O}_n$ como um \mathcal{O}_{n+1} -módulo;
- E denota a matriz de autovetores associada a α ;
- A denota a matriz de autovalores associada a α ;
- $A_Z := (A - ZId)$;
- $F(\mathbf{X}, Z)$ denota uma equação para a imagem de uma aplicação de gráfico refletido;
- L_{H_i} denota a equação de um hiperplano refletor H_i de G ;

- $h_i := g_{i\bullet}h$ denota a ação de $g_i \in G$ sobre um polinômio h ;
- q_{d-k} são polinômios simétricos nas variáveis h_1, h_2, \dots, h_d , onde $h_i := g_{i\bullet}h$;
- $D(f)$ denota o espaço de pontos duplos de f ;

Introdução

Neste trabalho, investigamos alguns problemas relacionados a aplicações de reflexão de \mathbb{C}^n em \mathbb{C}^{n+1} . Essas aplicações surgiram recentemente na literatura e têm se mostrado um tema promissor dentro da teoria de singularidades, apresentando propriedades interessantes e problemas desafiadores a serem explorados. As aplicações de reflexão foram introduzidos por Peñafort Sanchis em [34], onde são discutidos diversos problemas relevantes, como a Conjectura de Lê, cruzamentos normais e obstruções para determinação \mathcal{A} -finita e \mathcal{A} -estabilidade. Além disso, essas aplicações foram utilizadas para construir o primeiro contraexemplo conhecido para a conjectura de Ruas ([38], veja também [44]). Para compreender o que é uma aplicação de reflexão, começaremos introduzindo brevemente alguns conceitos e notações preliminares.

Seja $GL(\mathbb{C}^p)$ o grupo de todas as transformações lineares invertíveis de \mathbb{C}^p em \mathbb{C}^p (conhecido como grupo linear geral) e, $U(\mathbb{C}^p)$ o grupo dos automorfismos unitários de \mathbb{C}^p . Uma reflexão em \mathbb{C}^p é uma aplicação linear $g : \mathbb{C}^p \rightarrow \mathbb{C}^p$ que é unitária, possui ordem finita (como elemento de $GL(\mathbb{C}^p)$) e cujo conjunto de pontos fixados pela ação de g tem dimensão $p - 1$. Um subgrupo finito G de $U(\mathbb{C}^p)$ é chamado de grupo de reflexão unitário se é gerado por reflexões. Os grupos cíclicos \mathbb{Z}_d e os grupos diedrais \mathcal{D}_{2m} são exemplos típicos de grupos de reflexão (desde que considerados com representações apropriadas em $GL(\mathbb{C}^p)$). Há uma teoria vasta e bem desenvolvida sobre grupos de reflexão, mas neste trabalho abordaremos apenas os conceitos necessários para a obtenção dos resultados. Uma referência geral sobre o tema é [20] (veja também [17]), onde o leitor poderá encontrar uma descrição detalhada dos grupos de reflexão, bem como a classificação dos grupos de reflexão irredutíveis, realizada por Shephard e Todd em 1954 (veja [42]). Em poucas palavras, uma aplicação de reflexão $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^p$ é definida por Peñafort Sanchis em [34] simplesmente como a composição da aplicação de órbita $w : \mathbb{C}^p \rightarrow \mathbb{C}^p$ de um grupo G com um mergulho $\rho : \mathbb{C}^n \hookrightarrow \mathbb{C}^p$, ou seja, $f = w \circ \rho$ (veja Figura 1).

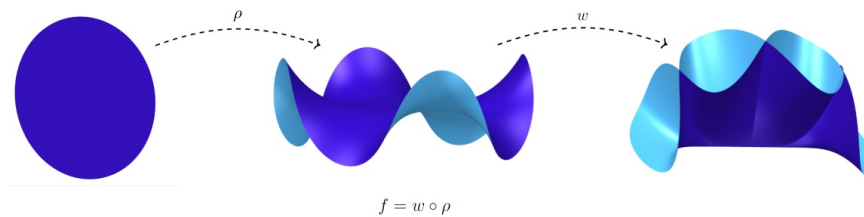


Figura 1: A singularidade C_5 vista como uma aplicação de reflexão

Destacamos que, de acordo com Peñafort Sanchis, a formulação precisa da definição de aplicação de reflexão é atribuída a Fernández de Bobadilla. Uma aplicação de gráfico refletido é um caso particular de aplicação de reflexão. Esse tipo de aplicação também foi introduzido por Peñafort Sanchis em [34] e desempenha um papel fundamental na teoria das aplicações de reflexão. Por exemplo, Peñafort Sanchis demonstra que, sob certas hipóteses, todo germe de aplicação de reflexão é \mathcal{A} -equivalente a um germe de aplicação de gráfico refletido (veja [34, Prop. 3.2]).

Seja $h : \mathbb{C}^p \longrightarrow \mathbb{C}^r$ uma aplicação holomorfa qualquer e G um grupo de reflexão agindo sobre \mathbb{C}^p . Em poucas palavras, uma aplicação de gráfico refletido $(w, h) : \mathbb{C}^p \longrightarrow \mathbb{C}^{p+r}$ é a aplicação de reflexão obtida a partir do mergulho dado pelo gráfico de h , isto é, $x \longmapsto (x, h(x))$, fazendo com que a ação de G seja sobre $\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^r$, agindo de forma trivial no segundo fator.

O objetivo deste trabalho é estudar alguns problemas relacionados a germes de aplicações de gráfico refletido de $(\mathbb{C}^n, 0)$ para $(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$, onde h é um germe de aplicação de $(\mathbb{C}^n, 0)$ para $(\mathbb{C}, 0)$.

Para fundamentar a compreensão dos problemas abordados, o Capítulo 1 deste trabalho apresenta os principais conceitos e definições relacionados à teoria de singularidades, topologia e geometria algébrica, que serão necessários ao longo dos próximos capítulos. No Capítulo 2, abordaremos os grupos e aplicações de reflexão. Antes de introduzirmos os problemas centrais deste estudo, analisaremos alguns casos históricos relevantes.

A classe mais simples de exemplos de aplicações de gráfico refletido são as aplicações de dobra (fold maps). Um exemplo clássico de aplicações de dobra é a singularidade C_5 da lista de Mond (veja [31]), definida por $f(x, y) = (x, y^2, xy^3 - x^5y)$ (veja a Figura 1). Historicamente, as aplicações de dobra são os primeiros exemplos de aplicações de reflexão encontrados na literatura. Os pioneiros no estudo desse tema foram Bruce, em 1984 (veja [1]) e, Mond, em 1985 (veja [30]). Um germe de aplicação de dobra $f : (\mathbb{C}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ é um germe de aplicação de gráfico refletido no qual $\rho : (\mathbb{C}^2, 0) \hookrightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ é dado por $\rho(x, y) = (x, y, h(x, y))$ e $w : (\mathbb{C}^3, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ é a aplicação órbita

do grupo $G_0 \times \mathbb{Z}_2 \times G_0 \simeq \mathbb{Z}_2$, onde G_0 é o grupo trivial, e $w(x, y, Z) = (x, y^2, Z)$.

Mais tarde, em 2008, Marar e Nuño-Ballesteros introduziram, em [24], as aplicações de dobra dupla (double fold maps). Essas aplicações são semelhantes as aplicações de dobra, mas, nessa classe, a aplicação de órbita w correspondente ao grupo $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, é $w(x, y, Z) = (x^2, y^2, Z)$ e a aplicação $f = w \circ \rho$ assume a forma $f(x, y) = (x^2, y^2, h(x, y))$. Um estudo detalhado sobre as aplicações de dobra dupla pode ser encontrado em [35] (veja também [39]). Um exemplo típico de germe de aplicação de dobra dupla é dado por $f(x, y) = (x^2, y^2, x^3 + y^3 + xy)$ (veja a Figura 2).

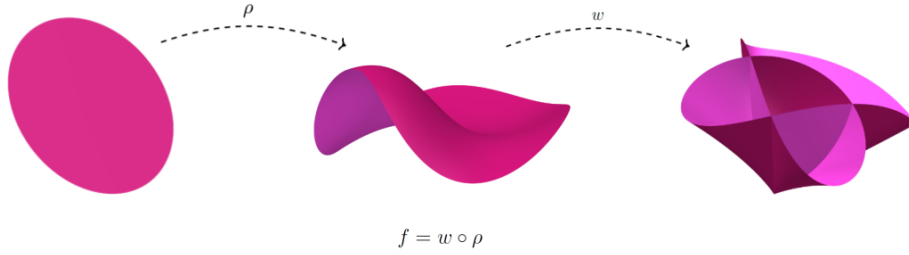


Figura 2: Aplicação de reflexão $f(x, y) = (x^2, y^2, x^3 + y^3 + xy)$.

Note que a imagem da aplicação f acima é uma superfície singular em \mathbb{C}^3 . Se (X, Y, Z) denota um sistema de coordenadas em \mathbb{C}^3 , então uma equação que define a imagem de f é:

$$X^2Y^2 - 2XYZ^2 + Z^4 - 2X^4Y - 2XY^4 - 8X^2Y^2Z - 2X^3Z^2 - 2Y^3Z^2 + X^6 - 2X^3Y^3 + Y^6 = 0. \quad (1)$$

Vale destacar que determinar uma equação para a imagem de um germe de aplicação não é, em geral, uma tarefa simples. Nesse contexto, seja G um grupo de reflexão agindo em $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ de forma trivial no segundo fator, por meio da aplicação de órbita $w = (w_1, \dots, w_n, Z)$. Seja $h : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ uma função holomorfa. Considere um germe de aplicação de gráfico refletido

$$f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0), \quad f(\mathbf{x}) = (w_1(\mathbf{x}), \dots, w_n(\mathbf{x}), h(\mathbf{x})),$$

onde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. A ação de G em $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ induz, por sua vez, uma ação no anel dos polinômios $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n, Z]$. Dessa forma, uma pergunta natural que surge nesse contexto é:

Questão 1: Como podemos descrever uma equação para a imagem de um germe de aplicação de gráfico refletido f de $(\mathbb{C}^n, 0)$ em $(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ em termos da ação de G sobre h ?

Antes de tratarmos uma estratégia para resolver a Questão 1, faremos uma breve descrição do estado da arte relacionado a esse problema. Quando $n = 2$, uma equação para a imagem de uma aplicação de reflexão é descrita em [2] no caso do grupo cíclico \mathbb{Z}_d (com $d \leq 4$) e para o grupo $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Em [44, Cap. 4] são considerados os casos dos grupos $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$ e \mathbb{Z}_4 . No entanto, apesar de equações para a imagem serem descritas nesses trabalhos, nenhum dos métodos utiliza de forma explícita a ação do grupo G sobre h para a descrição de tal equação.

Também no caso em que $n = 2$, Marar e Nuño-Ballesteros apresentam uma equação para a imagem de f no caso do grupo $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ (veja a demonstração de [24, Prop. 3.1]). A técnica utilizada por eles consiste em considerar o fato de que podemos considerar $f_*\mathcal{O}_n$ como um \mathcal{O}_{n+1} -módulo, via f , onde \mathcal{O}_n denota o anel de séries convergentes em uma vizinhança da origem em \mathbb{C}^n . Em seguida, utilizando o algoritmo de Mond-Pellikaan (veja [29]), determinam uma matriz de apresentação para $f_*\mathcal{O}_2$ e, então, encontram uma equação para a imagem como o ideal de Fitting \mathcal{F}_0 de $f_*\mathcal{O}_2$, que é, nesse caso, simplesmente o determinante da matriz de apresentação de $f_*\mathcal{O}_2$. Por exemplo, uma matriz de apresentação para $f_*\mathcal{O}_2$, onde f é definida por $f(x, y) = (x^2, y^2, x^3 + y^3 + xy)$ (em relação à base $1, x, y, xy$) é dada por

$$M = \begin{bmatrix} -Z & X & Y & 1 \\ X^2 & -Z & X & Y \\ Y^2 & Y & -Z & X \\ XY & Y^2 & X^2 & -Z \end{bmatrix}.$$

Note que a equação para $f = (x^2, y^2, x^3 + y^3 + xy)$ descrita na Equação 1 é precisamente o determinante da matriz M acima. Assim, uma questão natural nesse contexto é:

Questão 2: Seja $f(x) = (w(x), h(x))$ um germe de aplicação de gráfico refletido, como na Questão 1. Como podemos descrever a matriz de apresentação para $f_*\mathcal{O}_n$ em termos da ação de G sobre h ?

Note que encontrar a matriz de apresentação para $f_*\mathcal{O}_n$ pode não ser uma tarefa simples. Para os cálculos, pode-se utilizar o software SINGULAR [7] e a implementação do algoritmo de Mond e Pellikaan fornecida por Hernandez, Miranda e Peñafort Sanchis em [16]. No entanto, dependendo da complexidade de f , mesmo com o auxílio de um computador, os cálculos podem levar dias e, em alguns casos, não podem ser concluídos devido à limitação de memória do sistema. Este é o caso, por exemplo, de aplicações cujas funções coordenadas possuem uma multiplicidade elevada.

As respostas para ambas as questões (1 e 2) são apresentadas no Capítulo 3 deste

trabalho. Para a Questão 2, descrevemos a matriz de apresentação de $f_*\mathcal{O}_n$ essencialmente como o produto de três matrizes, cujas entradas dependem da ação de G sobre h (veja Teorema 3.2). Ressaltamos que um fato importante de se obter uma matriz de apresentação de $f_*\mathcal{O}_n$ é o fato de que os ideais de Fitting fornecem uma estrutura analítica conveniente não apenas para a imagem de f , mas também para a imagem dos pontos múltiplos (na fonte) $D^k(f)$ de f (veja [29]).

Para a Questão 1, consideramos um grupo de reflexão G de ordem d e uma aplicação de gráfico refletido $f(\mathbf{x}) = (w(\mathbf{x}), h(\mathbf{x}))$ conforme descrito anteriormente. Assim, apresentamos o seguinte resultado (veja Teorema 3.6).

Teorema 1 *Uma equação $F = 0$ para a imagem de $f(\mathbf{x}) = (w(\mathbf{x}), h(\mathbf{x}))$ (dada pelo ideal de Fitting \mathcal{F}_0 da matriz de apresentação $f_*\mathcal{O}_n$) é fornecida pela seguinte soma alternada:*

$$F(X_1, \dots, X_n, Z) = Z^d - Q_{d-1}Z^{d-1} + Q_{d-2}Z^{d-2} + \dots + (-1)^{d-1}Q_1Z + (-1)^dQ_0. \quad (2)$$

A descrição de Q_{d-k} no Teorema 1 é dada em termos do polinômio G -invariante $q_{d-k}(x_1, \dots, x_n)$ o qual pode ser visto como um polinômio simétrico nas variáveis h_1, h_2, \dots, h_d , onde h_i denota a ação do elemento g_i de G sobre h (veja Lema 3.5). Ressaltamos que outra forma de se obter uma equação para a imagem de uma aplicação de reflexão foi apresentada recentemente em [3], utilizando seções da aplicação órbita, técnica esta distinta da utilizada neste trabalho.

Como corolário do Teorema 1, no Capítulo 4 obtemos uma estimativa superior para a multiplicidade de f , onde f é um germe de aplicação de gráfico refletido. Mais precisamente, escrevemos:

$$F = F_m + F_{m+1} + \dots + F_k + \dots$$

onde cada F_k é um polinômio homogêneo de grau k e $F_m \neq 0$. O inteiro m é chamado de multiplicidade de $\mathbf{V}(F)$ na origem e é denotado por $m(\mathbf{V}(F), 0)$. Se $X = \mathbf{V}(F)$, então $m(X, 0)$ é definida como sendo $m(\mathbf{V}(F), 0)$. Note que, pela Equação (2) no Teorema 1 obtemos como corolário que $m(f(\mathbb{C}^n), 0) \leq d$, onde d é a ordem do grupo de reflexão G . Agora, considere um germe de aplicação de reflexão (não necessariamente de gráfico refletido) $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$. Uma pergunta natural é

Questão 3: Qual pode ser o maior valor da multiplicidade da imagem de f ? Em outras palavras, existe um limite superior para a multiplicidade da imagem de uma aplicação de reflexão?

No Capítulo 4 deste trabalho, apresentamos uma resposta para a Questão 3. Ordenando os graus na forma $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_{n+1}$, mostramos (veja Teorema 4.2) que

$$d_1 d_2 \cdot \dots \cdot d_n \leq m(f(\mathbb{C}^n), 0) \leq d_2 d_3 \cdot \dots \cdot d_{n+1}.$$

Ainda no Capítulo 4, como uma aplicação dos resultados obtidos neste trabalho, no caso de germes de aplicações de gráfico refletido, apresentamos uma nova demonstração de uma equação que define a hipersuperfície de pontos duplos de f , originalmente obtida por Borges Zampiva, Peñafort Sanchis, Oréfica Okamoto e Tomazella em [3, Teo. 5.2].

Em [24, Teo. 3.4], Marar e Nuño-Ballesteros trabalhando com aplicações de reflexão com o grupo de reflexão $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ mostraram que não existem germes de aplicações de dobra dupla finitamente determinados e quasihomogêneos (com pesos distintos). No Capítulo 4 estendemos esse resultado para o grupo $\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s$, com $r, s \geq 2$ (veja Lema 4.6).

Posteriormente, estudamos a existência de aplicações $f : (\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ finitamente determinadas de coposto 1, com $n \geq 3$. Finalmente, na última seção do Capítulo 4 discutimos sobre a topologia de um par de componentes de identificação e construímos um exemplo de aplicação que não é \mathcal{A} -equivalente a uma aplicação de reflexão.

No Capítulo 5 introduzimos uma nova classe de germes de aplicações, denominada “*germes de aplicações 2m-diedrais*”. Apresentamos explicitamente a matriz de apresentação de $f_*\mathcal{O}_2$, bem como uma equação para a imagem de um germe de aplicação 6-diedral e uma equação para a curva de pontos duplos associada a essa classe de aplicações (veja Proposição 5.2). Além disso, incluímos a matriz de apresentação para a aplicação 8-diedral e exemplificamos aplicações finitamente determinadas dentro dessa classe. Concluímos este capítulo com uma breve discussão sobre possíveis desenvolvimentos futuros.

Encerramos este trabalho com dois apêndices, A e B. No Apêndice A, descrevemos os geradores e as aplicações de órbita dos grupos de reflexão, nomeadamente, $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$, D_{2m} e G_i com $i = 4, 5, \dots, 22$. Esses grupos pertencem à classificação de Shephard e Todd (veja [42]). Por fim, no Apêndice B, com base nas matrizes apresentadas no Apêndice A, apresentamos uma implementação dos resultados obtidos no Singular.

Os resultados desta tese foram apresentados em dois artigos [11] e [12], dos quais o primeiro foi submetido para publicação e o segundo está em desenvolvimento.

Capítulo 1

Resultados preliminares

Neste capítulo relataremos conceitos e resultados básicos que serão utilizados ao longo dos próximos capítulos. Dentre eles, destacamos: a noção de germe de uma aplicação f entre espaços topológicos e o algoritmo do Mond e Pellikaan para construção de uma matriz de apresentação, ferramenta essencial no Capítulo 3, onde construiremos uma matriz de apresentação (veja Teorema 3.2) para germes de aplicações de gráfico refletido (veja Definição 2.6). Além disso, introduziremos conceitos e resultados sobre o espaço de pontos duplos que serão relevantes para uma das aplicações discutidas no Capítulo 4 (veja Proposição 4.3). As principais referências que fundamentam este capítulo são [28], [29] e [31].

Cabe ressaltar que assumiremos que o leitor tenha familiaridade com noções básicas de topologia, geometria algébrica e teoria das singularidades.

1.1 Germes de espaços analíticos

Para compreendermos melhor as propriedades locais de aplicações entre espaços topológicos, vamos introduzir a noção de germe de uma aplicação $f : X \rightarrow Y$, considerando um subconjunto $S \subset X$. Como referência, seguimos [28].

Definição 1.1. Sejam X, Y espaços topológicos e seja $S \subset X$.

1. Sejam $f_1 : U \rightarrow Y$ e $f_2 : V \rightarrow Y$ aplicações, onde U e V são vizinhanças abertas de S em X . Dizemos que f_1 e f_2 possuem o mesmo germe em S , se existe um vizinhança $W \subset U \cap V$ de S em X tal que f_1 e f_2 coincidem em W , isto é, $f_1|_W = f_2|_W$.
2. Dizemos que dois subconjuntos X_1 e X_2 tem o mesmo germe em S se existe uma vizinhança U de S em X tal que $X_1 \cap U = X_2 \cap U$. Um germe de um subconjunto de X em S é uma classe de equivalência de subconjuntos sob esta relação.

3. Denotamos um germe em S de uma aplicação $f : U \longrightarrow Y$ por

$$f : (X, S) \begin{cases} \nearrow Y \\ \searrow (Y, T), \text{ se } f(S) \subset T \subset Y \end{cases} \text{ ou}$$

Dado um germe de aplicação $f : (X, S) \longrightarrow Y$, cada aplicação $f : U \longrightarrow Y$ da classe de equivalência correspondente é chamado um representante. Analogamente, o germe em S de um subconjunto X_1 de X é denotado por (X_1, S) e cada X_1 da classe de equivalência correspondente é chamado um representante do germe conjunto.

Apresentamos a seguir um teorema clássico frequentemente utilizado na teoria de singularidades e, pode ser encontrado, por exemplo, em [15].

Teorema 1.1. *O anel \mathcal{O}_n dos germes de funções holomorfas de n variáveis na origem é isomorfo ao anel de séries complexas de potências convergentes em n variáveis $\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}$ centradas na origem.*

Outra noção fundamental na teoria de singularidades é o conceito de espaço analítico.

Definição 1.2. Sejam $U \subset \mathbb{C}^n$, onde U é uma vizinhança aberta de 0 em \mathbb{C}^n .

- (a) Um espaço analítico é um conjunto fechado $X \subset U$ com a propriedade de que para todo ponto $p \in U$, existe uma vizinhança aberta U_p de p em U e um número finito de funções holomorfas f_{p_1}, \dots, f_{p_k} definidas em U_p tais que

$$X \cap U_p := \{x \in U_p : f_{p_1}(x) = \dots = f_{p_k}(x) = 0\}.$$

Usamos a notação $\mathbf{V}(f_{p_1}, \dots, f_{p_k}) := \{x \in U_p : f_{p_1}(x) = \dots = f_{p_k}(x) = 0\}$, para denotar os conjunto de zeros de f_{p_1}, \dots, f_{p_k} em U_p .

- (b) Seja $I = (f_1, \dots, f_s) \subset \mathcal{O}_n$ um ideal, onde cada f_i está definida em U . Definimos o germe de espaço analítico $(X, 0)$ como

$$(X, 0) := (\mathbf{V}(I), 0).$$

Note que $(\mathbf{V}(I), 0) = \bigcap_{i=1}^s (\mathbf{V}(f_i), 0) = \bigcap_{i=1}^s (\{p \in U \mid f_i(p) = 0\}, 0)$.

- (c) Seja $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ um germe de espaço analítico. Definimos o ideal $I(X, 0)$ de $(X, 0)$ como

$$I(X) := \{f \in \mathcal{O}_n \mid (X, 0) \subset (\mathbf{V}(f), 0)\}.$$

- (d) Dizemos que um germe de espaço analítico $(X, 0)$ é irredutível quando para quaisquer germes de espaços analíticos $(X_1, 0)$ e $(X_2, 0)$ tais que $X = X_1 \cup X_2$, então $X = X_1$ ou $X = X_2$.

Proposição 1.2. ([18]) Seja $(X, 0)$ um germe de espaço analítico, então existem um inteiro positivo r e X_1, \dots, X_r germes de espaços analíticos irredutíveis em torno de 0, com X_i não contido em X_j , para todo $i \neq j$, tais que $X = X_1 \cup \dots \cup X_r$. Os germes de espaço analítico $(X_i, 0)$ são unicamente determinados, a menos da ordem, e são chamados de componentes irredutíveis de $(X, 0)$.

Exemplo 1.1. Considere os germes de espaço analítico $(X_1, 0) = \mathbf{V}(xy)$ e $(X_2, 0) = \mathbf{V}(x^2 - y^3)$ onde (x, y) é o sistema de coordenadas canônico de \mathbb{C}^2 . O germe X_1 é um germe de espaço analítico formado por duas retas que se intersectam na origem e X_2 é conhecido como a cúspide. As componentes irredutíveis de X_1 são $\mathbf{V}(x)$ e $\mathbf{V}(y)$.

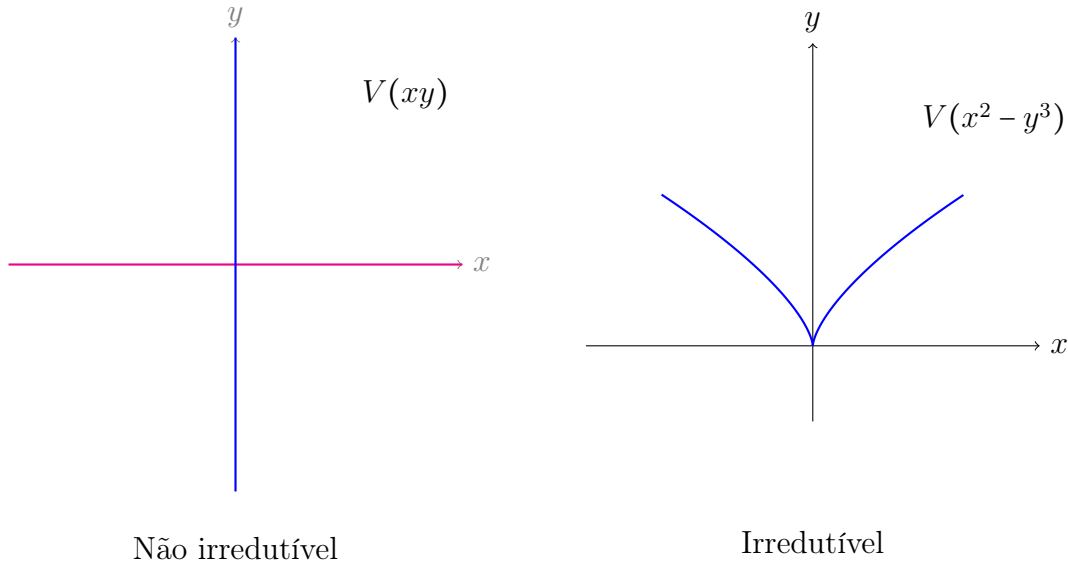


Figura 1.1: Germes de espaços analíticos $\mathbf{V}(xy)$ e $\mathbf{V}(x^2 - y^3)$.

Definição 1.3. Sejam $(X, 0) = \mathbf{V}(I) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ e $(Y, 0) \subset (\mathbb{C}^m, 0)$ germes de espaços analíticos.

- (a) Dizemos que $g : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ é um germe de função analítica se para algum representante $g : A \rightarrow \mathbb{C}$ (que em geral, por abuso de notação também é chamado de g), tem-se que g é a restrição de alguma aplicação analítica $g : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ ao conjunto aberto A .

(b) Dizemos que $\varphi = (f_1, \dots, f_m) : (X, 0) \longrightarrow (Y, 0)$ é um germe de aplicação analítica se cada f_i é um germe de função analítica. A aplicação $\varphi : (X, 0) \longrightarrow (Y, 0)$ é chamada de isomorfismo se φ possui uma inversa analítica.

(c) Definimos o anel local de funções sobre $(X, 0)$ como

$$\mathcal{O}_X := \mathcal{O}_n/I.$$

(d) Definimos o germe de espaço analítico reduzido $(X_{red}, 0)$ como o germe dado por $(X_{red}, 0) := \mathbf{V}(\sqrt{I})$. Assim, o anel local de funções sobre $(X_{red}, 0)$ é dado por

$$\mathcal{O}_{X_{red}} := \mathcal{O}_n/\sqrt{I}.$$

Definição 1.4. Seja $\varphi : (X, 0) \longrightarrow (Y, 0)$ uma aplicação entre germes de espaços analíticos. Dizemos que φ é finita se existe um representante de φ que é uma aplicação fechada e tal que para cada $y \in Y$, o conjunto $\varphi^{-1}(y)$ tem cardinalidade finita.

Exemplo 1.2. Considere a aplicação $\varphi : (\mathbb{C}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ definida por

$$\varphi(x, y) = (x, y^2, xy).$$

Para verificar que φ é um germe de aplicação finita, é suficiente mostrar que o conjunto $\varphi^{-1}(0, 0, 0) = \{(0, 0)\}$ (localmente) (veja [18, Seção 3.4]). De fato,

$$\varphi^{-1}(0, 0, 0) = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x = 0, y^2 = 0, xy = 0\} = \{(0, 0)\},$$

o que implica que φ é finita, pois $\varphi^{-1}(0, 0, 0)$ contém apenas a origem. Por outro lado, consideremos a aplicação $\psi : (\mathbb{C}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ dada por

$$\psi(x, y) = (x, xy^2, xy).$$

Neste caso

$$\psi^{-1}(0, 0, 0) = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x = 0, xy^2 = 0, xy = 0\} = \{(0, y) \in \mathbb{C}^2\},$$

assim $\psi^{-1}(0, 0, 0) = \mathbf{V}(x)$, corresponde ao eixo y , o qual possui uma infinidade de pontos. Assim, ψ não é um germe de aplicação finita.

1.2 Teoria de Singularidades

Nesta seção, daremos continuidade ao estudo dos germes de espaços analíticos, apresentando definições fundamentais para a caracterização da \mathcal{A} -equivalência entre dois

germes. Também abordaremos os critérios que permitem identificar quando um germe de aplicação é \mathcal{A} -finitamente determinado. Posteriormente, enunciaremos o Teorema do Critério geométrico de Mather-Gaffney, o qual fornece um critério geométrico para a noção de determinação finita. Por fim, apresentamos a definição de pontos triplos e do guarda-chuva de Whitney, além de discutir como esses invariantes analíticos podem ser calculados.

Definição 1.5. (a) O grupo \mathcal{A} é o grupo dos pares de germes de difeomorfismo (φ, ψ) , tais que $\varphi : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ e $\psi : (\mathbb{C}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$.

(b) Dois germes $f_1, f_2 : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ são \mathcal{A} -equivalentes se existem germes de difeomorfismos $\varphi : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ e $\psi : (\mathbb{C}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ tais que, o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^n, 0) & \xrightarrow{f_1} & (\mathbb{C}^p, 0) \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\ (\mathbb{C}^n, 0) & \xrightarrow{f_2} & (\mathbb{C}^p, 0) \end{array}$$

comuta.

Definição 1.6. (a) Dizemos que duas aplicações $f_1, f_2 : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^p$ tem o mesmo k -jato em um ponto $x \in \mathbb{C}^n$ se $f_1(x) = f_2(x)$ e as expansões em séries de Taylor até ordem k (para algum sistema de coordenadas locais) $j^k f_1(x)$ e $j^k f_2(x)$ de f_1 e f_2 no ponto x coincidem.

(b) Um germe de aplicação $f_1 : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ é k -determinado se dado qualquer germe $f_2 : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ com o mesmo k -jato de f em $0 \in \mathbb{C}^n$, tem-se que f_2 é \mathcal{A} -equivalente a f_1 . Um germe de aplicação é \mathcal{A} -finitamente determinado se é k -determinado para algum k .

Definição 1.7. Um desdobramento de um multigerme $f : (\mathbb{C}^n, S) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ é um multigerme

$$F : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^r, S \times \{0\}) \rightarrow (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^r, 0)$$

da forma $F(x, s) = (f_s(x), s)$, com $f_0(x) = f(x)$. Dois desdobramentos F_1 e F_2 são \mathcal{A} -equivalentes se existem desdobramentos das aplicações identidades sobre \mathbb{C}^n e \mathbb{C}^p

$$\Phi : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^r, S \times \{0\}) \rightarrow (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^r, S \times \{0\})$$

e

$$\Psi : (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^r, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^r, 0)$$

tais que o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^r, S \times \{0\}) & \xrightarrow{F_1} & (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^r, 0) \\ \Phi \downarrow & & \downarrow \Psi \\ (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^r, S \times \{0\}) & \xrightarrow{F_2} & (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^r, 0) \end{array}$$

comuta.

Definição 1.8. (a) Dizemos que um desdobramento F de f é trivial se F é \mathcal{A} -equivalente ao desdobramento constante $I(x, s) = (f(x), s)$.

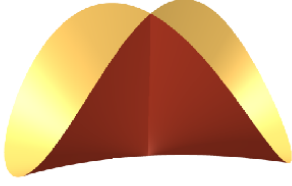
(b) Um multigerme $f : (\mathbb{C}^n, S) \longrightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ é estável se todo desdobramento de f é trivial.

(c) Uma aplicação finita $f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^p$ é \mathcal{A} -estável, se para todo $y \in \mathbb{C}^p$, o multigerme de f em $f^{-1}(y)$ é estável.

Finalmente, estamos em condições de enunciar um resultado clássico da teoria das singularidades, o qual estabelece um critério geométrico fundamental para a caracterização da determinação finita.

Teorema 1.3. (*Critério geométrico de Mather-Gaffney*) Um germe de aplicação $f : (\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ é finitamente determinado se, e somente se, para todo representante f (de f) existe uma vizinhança U de 0 em \mathbb{C}^n e uma vizinhança V de 0 em \mathbb{C}^p , com $f(U) \subset V$, tal que para todo $y \in V - \{0\}$, o conjunto $S = f^{-1}(y) \cap \Sigma(f)$ é finito e $f : (\mathbb{C}^n, S) \longrightarrow (\mathbb{C}^p, y)$ é estável, em que $\Sigma(f)$ denota o conjunto singular de f .

Considere $f : (\mathbb{C}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ um germe de aplicação finita. Pelo resultado de Whitney [46], as singularidades estáveis nessas dimensões são guarda-chuva de Whitney, pontos triplos e pontos duplos transversais (veja a Figura 1.2).



Guarda-chuva de Whitney



Pontos triplos



Pontos duplos transversais

A seguir, apresentamos a definição dos invariantes $C(f)$ e $T(f)$ utilizando uma estabilização da aplicação f . A definição precisa de estabilização pode ser consultada em [28, Definição 5.7].

Definição 1.9. Seja $f : (\mathbb{C}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ um germe de aplicação finitamente determinado. Seja $F(x, s) = (f_s(x), s)$ uma estabilização de um germe de aplicação $f : (\mathbb{C}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ finitamente determinado e seja $F : U \times T \longrightarrow \mathbb{C}^3 \times T$ um bom representante de F no sentido de [23], onde U e T são vizinhanças abertas de 0 em \mathbb{C}^2 e \mathbb{C} , respectivamente, definimos

$$C(f) = \#\{\text{guarda-chuvas de Whitney de } f_s\} \quad \text{e} \quad T(f) = \#\{\text{pontos triplos de } f_s\}$$

para $s \neq 0$.

A seguir, apresentamos o cálculo dos invariantes $C(f)$ e $T(f)$. O resultado utilizado para esse fim pode ser encontrado em [32, Lema 2.4] e [29, Teorema 4.3].

Teorema 1.4. *Os invariantes analíticos $C(f)$ e $T(f)$ podem ser calculados da seguinte forma*

$$C(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{Rf} \quad \text{e} \quad T(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_3}{\mathcal{F}_2(f)},$$

onde Rf é o ideal gerado pelos menores 2×2 da matriz jacobiana de f , conhecido como ideal de ramificação de f e $\mathcal{F}_2(f)$ denota o segundo ideal de Fitting de $f_*\mathcal{O}_2$, como um \mathcal{O}_3 -módulo via f (veja Seção 1.3 a seguir).

Exemplo 1.3. Considere o germe de aplicação $f : (\mathbb{C}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ dado por

$$f(x, y) = (x, y^2, x^3y + y^5).$$

Temos que

$$C(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{\langle 2y, x^3 + 5y^4, 6x^2y^2 \rangle} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{x\}}{\langle x^3 \rangle} = 3.$$

Agora pelo algoritmo de Mond e Pellikaan, temos que a matriz de $f_{\star}\mathcal{O}_2$ é

$$\lambda[X, Y, Z] = \begin{bmatrix} -Z & Y^2 + X^3 \\ Y^3 + X^3Y & -Z \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$T(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_3}{\mathcal{F}_2(f)} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_3}{\mathcal{O}_3} = 0.$$

Portanto, concluímos que $C(f) = 3$ e $T(f) = 0$.

1.3 O algoritmo de Mond e Pellikaan

Esta seção tem como objetivo principal apresentar o algoritmo de Mond e Pellikaan, utilizado para construir uma matriz de apresentação para germes de aplicações finitas. Tal construção será fundamental para os resultados desenvolvidos no Capítulo 3, em especial no Teorema 3.2, onde descrevemos uma matriz de apresentação para aplicações de gráfico refletido, em termos da ação de um grupo de reflexão. Também faremos uma breve definição dos ideais de Fitting [9]. As definições e conceitos abordados nesta seção podem ser encontrados em [29] (veja também [28]).

Inicialmente, definimos o que é uma apresentação de um módulo.

Definição 1.10. Sejam R um anel e B um R -módulo. Uma apresentação de B é uma sequência exata

$$R^h \xrightarrow{\lambda} R^q \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0$$

de R -módulos. Quando esta sequência existe, dizemos que λ é uma matriz de apresentação do módulo e o módulo B é dito módulo de apresentação finita.

Daremos início à construção da matriz de apresentação, conforme a referência [29] (veja também [16]). Seja $(\mathcal{X}, 0)$ um germe de espaço Cohen-Macaulay (veja Seção 6.5 em [18]) de dimensão n , e seja

$$f : (\mathcal{X}, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$$

uma aplicação que satisfaz a seguinte condição adicional: seja $\tilde{f} : (\mathcal{X}, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ o germe obtido pela composição de f com a projeção $(\mathbb{C}^{n+1}, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ que ignora a última coordenada; com isso, \tilde{f} se torna um germe de aplicação finita (algo que é

sempre possível graças ao Teorema da normalização de Noether (veja [8]), após uma mudança de coordenadas).

Seja $A = \mathbb{C}[X, Z]_{(X, Z)}$ a localização no ideal maximal na origem do anel de polinômios nas $n + 1$ variáveis $X = X_1, X_2, \dots, X_n$ e Z . Denotamos por $\tilde{A} = \mathbb{C}[X]_{(X)}$ e por $B = (\mathbb{C}[x]/I)_{(x)}$, onde $(\mathcal{X}, 0) = \mathbf{V}(I)$, com variáveis $x = x_1, \dots, x_\ell$ e assumimos que B é um anel Cohen-Macaulay de dimensão n . A aplicação

$$\Phi : A \longrightarrow B$$

é um morfismo de anel local dado por $X_i \mapsto f_i$, $i = 1, \dots, n$ e $Z \mapsto f_{n+1}$ para algum polinômio $f_j \in \mathbb{C}[x]$. Escreva

$$\tilde{\Phi} : \tilde{A} \longrightarrow B$$

para o morfismo restrito e, suponha que B é minimamente gerado por r_1, \dots, r_d como um \tilde{A} -módulo. Como B é gerado por r_1, \dots, r_d então existe $\alpha_{i,j} \in \tilde{A}$, $1 \leq i, j \leq d$, satisfazendo as equações

$$Zr_i = \sum_{j=1}^d \alpha_{i,j} r_j, \text{ para todo } 1 \leq i \leq d. \quad (1.1)$$

Seja $\lambda : A^d \longrightarrow A^d$ dado pela multiplicação pela matriz λ cujas entradas são

$$\lambda_{i,j} = \alpha_{i,j} - \delta_{i,j} Z.$$

onde $\delta_{i,j}$ representa a função delta de Kronecker.

Se $\psi : A^d \longrightarrow B$ é o epimorfismo dado por $e_i \mapsto r_i$, onde $e_i \in A^d$ é o elemento cuja única entrada diferente de zero é a da posição i , cujo valor é 1, então $\text{Im}(\lambda) \subseteq \text{Ker}(\psi)$ segue da Equação (1.1). Mond e Pellikaan mostraram que, de fato, a sequência

$$A^h \xrightarrow{\lambda} A^h \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0$$

é exata. Portanto, a matriz

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1} - Z & \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,d} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} - Z & \alpha_{2,3} & \cdots & \alpha_{2,d} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} - Z & \cdots & \alpha_{3,d} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \alpha_{d,1} & \alpha_{d,2} & \alpha_{d,3} & \cdots & \alpha_{d,d} - Z \end{bmatrix}$$

é uma matriz de apresentação para B .

A próxima definição é de grande importância para este trabalho, pois trata da noção

dos ideais de Fitting [9].

Definição 1.11. Seja, R um anel e B um R -módulo finitamente apresentado (R um anel comutativo com unidade) e seja

$$R^h \xrightarrow{\lambda} R^q \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0$$

uma apresentação (ou seja, exata). O k -ésimo ideal fitting de B , $\mathcal{F}_k(B)$, é definido como o ideal em R gerado por todos os $(q - k) \times (q - k)$ menores da matriz λ , para $q > k$, $k \geq q - h$. $\mathcal{F}_k(B)$ é definido como igual a R , para $k \geq q$, e 0 para $k < q - h$.

Para ilustrar o algoritmo de Mond e Pellikaan, consideremos o seguinte exemplo.

Exemplo 1.4. Considere f uma aplicação de $(\mathbb{C}^2, 0)$ em $(\mathbb{C}^3, 0)$ dada por

$$f(x, y) = (x^2, y^2, x^3 + y^3 + xy).$$

Seja $A = \mathbb{C}[X, Y, Z]_{\langle X, Y, Z \rangle}$, $\tilde{A} = \mathbb{C}[X, Y]_{\langle X, Y \rangle}$ e por $B = \mathbb{C}[x, y]_{\langle x, y \rangle}$ e, considere o homomorfismos de anéis $A \longrightarrow B$ dado por $X \longmapsto x^2$, $Y \longmapsto y^2$ e $Z \longmapsto x^3 + y^3 + xy$.

Segue do Teorema da preparação de Weierstrass (veja Seção 3.2 em [18]) que \mathcal{O}_2 é um \mathcal{O}_3 -módulo finito via f^* . Assim, as classes de $1 = r_1, x = r_2, y = r_3, xy = r_4$ em $\frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{\langle x^2, y^2 \rangle}$ também geram $f^*\mathcal{O}_2$ como um \mathcal{O}_3 -módulo via f^* . Considere $w = (x^2, y^2)$, assim segue da Equação 1.1 que

$$\begin{aligned} Zr_1 &= (x^3 + y^3 + xy) \cdot 1 &= 0 \cdot r_1 + x^2 \cdot r_2 + y^2 \cdot r_3 + xy \cdot r_4. \\ Zr_2 &= (x^3 + y^3 + xy) \cdot x &= x^4 \cdot r_1 + 0 \cdot r_2 + x^2 \cdot r_3 + y^2 \cdot r_4. \\ Zr_3 &= (x^3 + y^3 + xy) \cdot y &= y^4 \cdot r_1 + y^2 \cdot r_2 + 0 \cdot r_3 + x^2 \cdot r_4. \\ Zr_4 &= (x^3 + y^3 + xy) \cdot xy &= x^2y^2 \cdot r_1 + y^4 \cdot r_2 + x^4 \cdot r_3 + 0 \cdot r_4. \end{aligned}$$

Assim, obtemos que

$$\lambda[X, Y, Z] = \begin{bmatrix} -Z & X & Y & 1 \\ X^2 & -Z & X & Y \\ Y^2 & Y & -Z & X \\ XY & Y^2 & X^2 & -Z \end{bmatrix}$$

é uma matriz de apresentação de $f_*\mathcal{O}_2$.

1.4 O espaço dos pontos duplos

Nesta seção, com base em [31], descrevemos o conjunto de pontos duplos do germe de aplicação $f : (\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$, com $n < p$. Também apresentamos a definição de componente de dobra e de identificação da curva de pontos duplos $D(f)$ associadas a uma aplicação $f : (\mathbb{C}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$.

Seja $f : U \longrightarrow \mathbb{C}^p$ uma aplicação holomorfa, onde $U \subset \mathbb{C}^n$ é um subconjunto aberto e $n < p$. A seguir, definimos o conjunto de pontos duplos de f , denotado por $D^2(f)$. Denotamos por Δ_n e Δ_p as diagonais de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ e $\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^p$, respectivamente, e pelos ideais que definem esses esquemas, $\mathcal{I}_n, \mathcal{I}_p$. Escrevemos os pontos de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ como pares (x, x') . É claro que para cada $i = 1, \dots, p$, temos

$$f_i(x) - f_i(x') \in \mathcal{I}_n,$$

assim existem $\alpha_{i,j}$, $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq n$, tais que numa vizinhança de cada ponto em $U \times U$,

$$f_i(x) - f_i(x') = \sum \alpha_{i,j}(x - x')(x_j - x'_j).$$

Se $f(x) = f(x')$ e $x \neq x'$, então claramente todo menor $n \times n$ da matriz $\alpha = [\alpha_{i,j}]$ deve anular-se em (x, x') . Denotamos por $\mathcal{R}_n(\alpha)$ o ideal em $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{2n}}$ gerado pelos menores $n \times n$ da matriz α .

Com base nas observações anteriores, podemos agora formalizar a definição do espaço de pontos duplos de uma aplicação holomorfa.

Definição 1.12. Seja $f : U \longrightarrow \mathbb{C}^p$ como acima. O espaço de pontos duplos de f é o espaço complexo dado por

$$D^2(f) = \mathbf{V}((f \times f)^* \mathcal{I}_p + \mathcal{R}_n(\alpha)).$$

Note que, para um ponto (x, x') fora da diagonal Δ_n , o ideal

$$\mathcal{I}^2(f) = ((f \times f)^* \mathcal{I}_p + \mathcal{R}_n(\alpha))$$

é gerado pelas funções $f_i(x) - f_i(x')$. Além disso, a restrição de $\mathcal{I}^2(f)$ à diagonal Δ_n coincide com o ideal gerado pelos menores $n \times n$ da matriz Jacobiana de f . Assim, a interseção $\Delta_n \cap D^2(f)$ corresponde ao conjunto singular de f . Vejamos a Definição 1.13 do espaço de pontos duplos $D^2(f)$ no contexto de germes de aplicação.

Definição 1.13. Seja $f : (\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ um germe de aplicação finito, onde $n \leq p$.

(a) Vamos denotar por I_p e $R_n(\alpha)$ os talos do feixe em 0 de \mathcal{I}_p e $\mathcal{R}_n(\alpha)$. Tomando um representante de f definimos o espaço de pontos duplos do germe de aplicação f como o germe do espaço complexo

$$D^2(f) := \mathbf{V}((f \times f)^* I_p + R_n(\alpha)).$$

(b) A projeção $\pi : (D^2(f), 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$, dada por $(x, x') \mapsto x$, é finita. O espaço de pontos duplos $D(f)$ é definido como a imagem de π com a estrutura analítica dada pelo ideal de 0-Fitting de $\pi_* \mathcal{O}_{D^2(f)}$ (veja Definição 1.11), ou seja,

$$D(f) := \mathbf{V}(\mathcal{F}_0(\pi_* \mathcal{O}_{D^2(f)})).$$

Quando consideramos $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ um germe de aplicação finita, genericamente 1-a-1, tem-se de acordo com [25], que $D^2(f)$ é Cohen-Macaulay e possui dimensão $n - 1$. Além disso, $D(f)$ é reduzido se, e somente se, $D^2(f)$ for reduzido e a projeção $p_1 : D^2(f) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ for genericamente 1-a-1.

Apresentamos agora um resultado fundamental para a determinação da equação da hipersuperfície de pontos duplos de germes de aplicações finitos, conforme [36] (veja também [2]).

Teorema 1.5. *Seja $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ um germe de aplicação finito, de modo que a imagem de f seja uma hipersuperfície com equação definidora dada pelos zeros de $F : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$. Suponha ainda que f seja uma imersão de um subconjunto de \mathbb{C}^n de codimensão 2. Então, para algum germe de função holomorfa $\lambda : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ temos $\lambda \Delta_i = \pm \frac{\partial F}{\partial x_i}(f)$, onde Δ_i é o determinante da matriz obtida pela exclusão da i -ésima linha da matriz Jacobiana f . Além disso, $\lambda(x, y) = 0$ é uma equação definidora da hipersuperfície de pontos duplos $D(f) \subset \mathbb{C}^n$.*

Note que, pelo Teorema 1.5 se f é uma aplicação de gráfico refletido, então Δ_i coincide com o determinante da matriz jacobiana da aplicação de órbita. Agora considere $D^k(f)$ o espaço de pontos múltiplos de f . Observamos, a partir do Corolário 1.6 (Teorema 9.5, [28]) que existe uma relação importante entre esses espaços quando f é um germe de coposto 1 e \mathcal{A} -finitamente determinado.

Corolário 1.6. *Seja $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ um germe de aplicação finito de coposto 1. Então os itens a seguir são equivalentes:*

1. f é \mathcal{A} -finitamente determinado.
2. $D^k(f)$ é uma intersecção completa com singularidade isolada (ICIS) de dimensão $p - k(p - n)$, ou vazia, para todos os k tais que $p - k(p - n) \geq 0$, e consiste no máximo em $\{0\}$ se $p - k(p - n) < 0$.

Apresentamos a seguir a definição de componente de dobra e de identificação da curva de pontos duplos $D(f)$ associadas a uma aplicação $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$, onde f é um germe finitamente determinado. Essa definição foi introduzida por Silva em [44].

Definição 1.14. Seja $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ um germe de aplicação finitamente determinado e considere a componente irredutível $D(f)^j$ da curva de pontos duplos $D(f)$ de f .

- (a) Se a restrição $f|_{D(f)^j} : D(f)^j \rightarrow \mathbb{C}^3$ é uma aplicação genericamente 1-a-1, então $D(f)^j$ é uma componente de identificação de $D(f)$.
- (b) Se a restrição $f|_{D(f)^j} : D(f)^j \rightarrow \mathbb{C}^3$ é uma aplicação genericamente 2-a-1, então $D(f)^j$ é uma componente de dobra de $D(f)$.

Em geral, note que se $D(f)^j \subset D(f)$ é de identificação, então existe $D(f)^i \subset D(f)$ com $i \neq j$ que é também de identificação tal que $f(D(f)^i) = f(D(f)^j)$, já que a restrição de f a $D(f)$ é genericamente 2-a-1.

Exemplo 1.5. Considere o germe de aplicação f dado por $f(x, y) = (x, y^2, x^3y - xy^5)$. A curva de pontos duplos $D(f)$ possui três componente irredutíveis, que são

$$D(f)^1 = \mathbf{V}(x), \quad D(f)^2 = \mathbf{V}(x - y^2) \quad \text{e} \quad D(f)^3 = \mathbf{V}(x + y^2).$$

Note que $D(f)^1$ é uma componente de dobra, enquanto $D(f)^2$ e $D(f)^3$ são componente de identificação. Além disso,

$$f(D(f)^1) = \mathbf{V}(Z, X) \quad \text{e} \quad f(D(f)^2) = f(D(f)^3) = \mathbf{V}(Z, X^2 - Y^2).$$

Veja a seguinte ilustração.

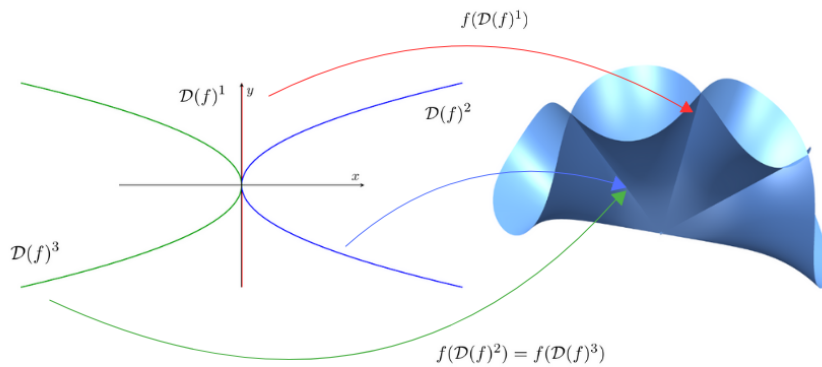


Figura 1.2: Ilustração geométrica da imagem das componentes da $D(f)$

Capítulo 2

Grupos e aplicações de reflexão

Neste capítulo, apresentamos a definição de grupos de reflexão, bem como os principais resultados da teoria das aplicações de reflexão. Os conceitos e definições aqui introduzidos são fundamentais para o desenvolvimento e a compreensão dos conteúdos abordados nos capítulos seguintes. As principais referências que norteiam este capítulo são [20] e [34], também utilizamos em menor grau a referência [40], [17], [19] e [14].

Iniciaremos com a definição de uma forma hermitiana definida positiva (também conhecida como produto interno) em um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo dos números complexos \mathbb{C} . Essa definição servirá de base para introduzirmos os grupos de reflexão unitários, que são grupos gerados por reflexões unitárias.

Formas hermitianas

Seja V um espaço vetorial de dimensão n sobre o corpo dos complexos \mathbb{C} . Recordamos ao leitor que uma forma hermitiana em V é uma aplicação

$$\langle -, - \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$$

tal que

$$\begin{aligned}\langle v_1 + v_2, w \rangle &= \langle v_1, w \rangle + \langle v_2, w \rangle \\ \langle av, w \rangle &= a \langle v, w \rangle \\ \langle v, aw \rangle &= \bar{a} \langle v, w \rangle \\ \overline{\langle v, w \rangle} &= \langle w, v \rangle\end{aligned}$$

para todo $v, w, v_1, v_2 \in V$ e $a \in \mathbb{C}$. A forma hermitiana é positiva definida se $\langle v, v \rangle \geq 0$ e $\langle v, v \rangle = 0$ se, e somente se $v = 0$.

Uma forma hermitiana positiva definida é também conhecida como um produto interno. Por exemplo, se V tem uma base $\{e_1, \dots, e_n\}$, podemos definir uma forma hermitiana positiva definida em V por

$$\langle u, v \rangle := u_1 \bar{v}_1 + u_2 \bar{v}_2 + \dots + u_n \bar{v}_n$$

onde $u = u_1e_1 + u_2e_2 + \cdots + u_ne_n$ e $v = v_1e_1 + v_2e_2 + \cdots + v_ne_n$.

Relembramos que uma base $\{e_1, \dots, e_n\}$ para V é ortogonal se $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ para todo $i \neq j$ e é ortonormal de adicionarmos a hipótese de que $\langle e_i, e_i \rangle = 1$ para todo i .

Seja $GL(V)$ o grupo de todas as transformações lineares invertíveis em V . Um subgrupo G de $GL(V)$ deixa a forma $\langle -, - \rangle$ invariante se

$$\langle g \bullet v, g \bullet w \rangle = \langle v, w \rangle \text{ para todo } g \in G \text{ e para todo } v, w \in V.$$

Também dizemos que $\langle -, - \rangle$ é uma forma G -invariante. E, ainda que $g \in GL(V)$ é unitário (ou uma isometria). Veremos no lema a seguir a relação entre um subgrupo finito de $GL(V)$ e a existência de uma forma G -invariante.

Lema 2.1. [20, Lemma 1.3]. Se G é um subgrupo finito de $GL(V)$, então existe uma forma hermitiana definida positiva G -invariante em V .

Seja M a matriz associada a $g \in GL(V)$ com respeito a uma base ortonormal de V . Então g é unitário se, e somente se, M é uma matriz unitária, isto é, satisfaz $M\overline{M}^t = Id$, onde \overline{M}^t denota a transposta conjugada de M e Id , a matriz identidade.

Introduziremos agora a definição e alguns exemplos de grupos de reflexão.

2.1 Grupos de reflexão

Considere $GL(\mathbb{C}^p)$ o grupo de todas as transformações lineares invertíveis de \mathbb{C}^p . Seja Id o elemento identidade de $GL(\mathbb{C}^p)$. Uma representação linear de dimensão p de um grupo G (onde o espaço de representação é $GL(\mathbb{C}^p)$) é um homomorfismo

$$\psi : G \longrightarrow GL(\mathbb{C}^p).$$

Se ψ é uma representação de G , dizemos que G age em $GL(\mathbb{C}^p)$, e chamamos \mathbb{C}^p de um G -módulo. Dizemos que duas representações $\psi : G \longrightarrow GL(\mathbb{C}^p)$ e $\varphi : G \longrightarrow GL(\mathbb{C}^p)$, ambas de dimensão p são ditas equivalentes, se existe uma matriz invertível $r \in GL(\mathbb{C}^p)$, tal que, para todo $g \in G$

$$\varphi(g) = r^{-1}\psi(g)r.$$

Para o leitor interessado na teoria de representações de grupos, recomendamos a excelente referência [40].

A ação de um elemento $g \in G$ sobre um vetor $v \in \mathbb{C}^p$ é definida por

$$gv := \psi(g)v$$

e, usualmente, denotamos essa ação por $g \bullet v$. Para $g \in GL(\mathbb{C}^p)$, definimos

$$\text{Fix } g := \{v \in \mathbb{C}^p \mid g_{\bullet} v = v\},$$

isto é, $\text{Fix } g$ é o conjunto dos pontos de \mathbb{C}^p fixados pela ação de g .

Apresentamos a seguir a definição de uma reflexão em \mathbb{C}^p .

Definição 2.1. Uma reflexão em \mathbb{C}^p é uma aplicação linear $g : \mathbb{C}^p \rightarrow \mathbb{C}^p$, satisfazendo:

- (i) g é unitária.
- (ii) g tem ordem finita.
- (iii) $\dim \text{Fix } g = p - 1$.

Considere $U(\mathbb{C}^p)$ o grupo de automorfismos unitários de \mathbb{C}^p .

Definição 2.2. Um subgrupo finito G de $U(\mathbb{C}^p)$ é dito ser um grupo de reflexão se for gerado por reflexões.

Se g é uma reflexão, o subespaço $H := \text{Fix } g$ é um hiperplano, chamado de hiperplano refletor de g .

Definição 2.3. Considere G um grupo de reflexão agindo em V e H_1, \dots, H_ℓ seus hiperplanos refletores. Definimos o posto de um grupo de reflexão como a dimensão do complemento ortogonal do subespaço dos pontos fixados por G . Ou seja, dados $r_i \in H_i^\perp$ não nulos para todo $i = 1, \dots, \ell$, o posto de G é a dimensão do subespaço gerado por r_1, r_2, \dots, r_ℓ .

Corolário 2.2. [20, Corolário 1.26] Se V é um G -módulo irredutível¹ e se $(-, -)$ e $[-, -]$ são formas hermitianas G -invariante definidas positivas, então para algum número complexo $c > 0$ temos $(u, v) = c[u, v]$ para todo $u, v \in V$.

Observação 2.1. A frase “ G é um grupo de reflexão unitário em V ”, indicará que G é um grupo finito, gerado por reflexões em V . Do Lema 2.1, existe uma forma hermitiana G -invariante positiva definida em V e segue do Corolário 2.2, que esta forma é única a menos de uma constante positiva c .

É importante mencionar que a hipótese de que G seja finito na Definição 2.2 de fato é necessária. Isto é, um subgrupo G de $U(\mathbb{C}^p)$ gerado por reflexões não é necessariamente finito. Por exemplo, considere o grupo $G = \langle g_k; k \geq 2 \rangle$, onde

$$g_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\frac{2\pi i}{k}} \end{bmatrix},$$

¹Um G -submódulo de V é um subespaço vetorial U tal que $g_{\bullet} u \in U$ para todo $g \in G$ e todo $u \in U$. O G -módulo V é irredutível se 0 e V são seus únicos G -submódulos.

G é um subgrupo infinito de $U(\mathbb{C}^p)$ que é gerado por reflexões.

Vejam os a seguir um exemplo legítimo de um grupo de reflexão em $GL(\mathbb{C}^2)$.

Exemplo 2.1. Considere as seguintes matrizes

$$g_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad g_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Note que g_2 e g_3 são reflexões de ordem 2 e geram um grupo de ordem 4, a saber, o grupo $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$:

$$Id = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad g_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad g_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad g_4 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Observe que a ação de um grupo G em \mathbb{C}^p induz naturalmente uma ação de G em polinômios, como veremos na próxima definição.

Definição 2.4. Sejam $g \in GL(\mathbb{C}^p)$ e $P \in S := \mathbb{C}[X_1, X_2, \dots, X_p]$ um polinômio, definimos a ação de g em P por

$$(g \bullet P)(v) := P(g^{-1}(v)), \text{ para todo } v \in \mathbb{C}^p.$$

Exemplo 2.2. Considere $S := \mathbb{C}[X_1, X_2]$, $P = X_1^i X_2^j$ e

$$g = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad g^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

então a ação de g em S é dada por

$$g \bullet (X_1^i X_2^j) = P \left(g^{-1} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \right) = P \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \right) = P \left(\begin{bmatrix} X_1 - X_2 \\ X_2 \end{bmatrix} \right).$$

Portanto, $g \bullet (X_1^i X_2^j) = (X_1 - X_2)^i X_2^j$.

Dizemos que $P \in S$ é G -invariante se $g \bullet P = P$ para todo $g \in G$. A álgebra de invariantes de G é a álgebra das funções polinomiais G -invariantes, isto é, denotado por J ,

$$J := S^G = \{P \in S \mid g \bullet P = P \text{ para todo } g \in G\}.$$

Agora, consideremos no exemplo a seguir, um grupo finito que não é um grupo de reflexão, seja qual for a representação que consideremos em $GL(\mathbb{C}^p)$.

Exemplo 2.3. Considere o grupo dos quatérnios Q_8 , cujo geradores são

$$g_2 = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad g_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Note que os polinômios $x^4 + y^4$ e x^2y^2 são invariantes sob a ação de Q_8 e, geram a álgebra de polinômios Q_8 -invariantes. Uma forma de obter polinômios invariantes para um determinado grupo finitamente gerado (não necessariamente um grupo de reflexão) é utilizar os programas Magma ou Singular (veja Apêndice A.2). Suponha que Q_8 seja um grupo de reflexão. Pelo Corolário 3.27 de [20], temos:

$$8 = |Q_8| = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{\langle x^4 + y^4, x^2y^2 \rangle} = 16,$$

o que é uma contradição. Portanto, Q_8 não é um grupo de reflexão.

Outra forma de justificar que o grupo Q_8 não é um grupo de reflexão é por meio da classificação de grupos de reflexão de Shephard e Todd (veja [20] Teo. 8.29 e Teo. 1.27). Entre os grupos listados nessa classificação, observamos que Q_8 não pode ser nenhum dos grupos denotados por G_i (veja Apêndice A), pois o grupo de menor ordem nessa família é o G_4 que possui ordem 24.

Dessa forma, resta considerar se Q_8 poderia ser um produto direto de grupos do tipo $G(m, p, n)$ (onde m, n e p são inteiros positivos com $p|m$). Como Q_8 não é um produto direto não trivial, a única possibilidade seria ele coincidir com algum grupo $G(m, p, n)$.

A ordem de $G(m, p, n)$ é dada por $\frac{m^n \cdot n!}{p}$. Como Q_8 tem ordem 8, deve-se ter $\frac{m^n \cdot n!}{p} = 8$, o que implica que $n!|8$. Assim, consideramos as possíveis opções para n :

- Para $n = 1$, obtemos o grupo cíclico de ordem m/p ;
- Para $n = 2$, temos que $\frac{m^2}{p} = 4$, o que admite duas soluções: $G(2, 1, 2)$ e $G(4, 4, 2)$.

No entanto, ambos os grupos são isomorfos ao grupo diedral de ordem 8 (veja Exemplo 2.11 em [20]), e, portanto, não são isomorfos a Q_8 .

O Lema a seguir nos dá uma maneira de obter a ação de uma reflexão de G em um elemento S e pode ser encontrado em [20, Lemma 3.17].

Lema 2.3. Se g é uma reflexão em $GL(\mathbb{C}^p)$ e se $H := \text{Fix } g$ é seu hiperplano refletor (com $H = \text{Ker } L_H$), então para todo $P \in S$ existe $Q \in S$ tal que

$$g \bullet P = P + L_H Q.$$

Essa é uma ação linear que preserva o grau e a estrutura algébrica de S .

Exemplo 2.4. Considere o grupo $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, visto no Exemplo 2.1 e, $P = x^5 - y^3 + xy$. Considere g_2 o seguinte elemento do grupo

$$g_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Observe que g_2 é um elemento de G que é reflexão. Assim, segue do Lema 2.3 que

$$g_{2\bullet}(x^5 + y^3 - xy) = x^5 - y^3 + xy + y \cdot Q.$$

Donde concluímos que $Q = 2(y^2 - x) \in S$.

Segue do Lema 2.3 que se g é uma reflexão, então $\frac{P - g_{\bullet}P}{L_H} = -Q \in S$. Assim, podemos considerar o operador $\Delta_{g_i} : S \longrightarrow S$ dado por

$$\Delta_{g_i}(P) = \frac{P - g_{i\bullet}P}{L_H}$$

onde g_i é uma reflexão de G . Este operador é também conhecido como *Operador Demazure*.

Considere agora o operador $Av : S \longrightarrow J$, dado por

$$Av(P) := \frac{1}{|G|} \left(\sum_{g \in G} g_{\bullet}P \right). \quad (2.1)$$

Este operador é também conhecido como *Operador de Reynolds*. É fácil ver que $Av(P) \in J$ e que $Av(P)$ ou é 0 ou tem o mesmo grau de P . Além disso, para $P \in J$ temos $Av(P) = P$ e portanto $Av^2 = Av$. Assim, Av é uma projeção de S em J . Na verdade, uma afirmação um pouco mais forte é verdadeira, a saber, para $P \in J$ e $Q \in S$ temos $Av(PQ) = PAv(Q)$, assim Av é um homomorfismo de J -módulos.

Vejamos dois exemplos, no primeiro $Av(P) = 0$ e no segundo $Av(P) \neq 0$.

Exemplo 2.5. Considere o grupo $G = \mathbb{Z}_4$ e $P = xy + xy^3 + y^6$. Os elementos do grupo \mathbb{Z}_4 podem ser representados pelas seguintes matrizes

$$Id = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, g_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, g_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}, g_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Observe que $g_2^{-1} = g_3$ e $g_4^{-1} = g_4$. Daí, $g_{2\bullet}(P) = P(g_3(v))$, $g_{3\bullet}(P) = P(g_2(v))$ e $g_{4\bullet}(P) = P(g_4(v))$. Assim, fazendo a ação de cada elemento de G em P , temos

$$Id_{\bullet}(P) = P(x, y) = xy + xy^3 + y^6$$

$$g_{2\bullet}(P) = P(x, iy) = ixy - ixy^3 - y^6$$

$$g_{3\bullet}(P) = P(x, -iy) = -ixy + ixy^3 - y^6$$

$$g_{4\bullet}(P) = P(x, -y) = -xy - xy^3 + y^6$$

$$\text{Assim, } Av(P) = \frac{1}{4} \cdot 0 = 0.$$

Exemplo 2.6. Considere o grupo $G = D_6$ e $P = x + x^2 + y + y^2 + y^3$. Considere os seguintes elementos de D_6 :

$$Id = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, g_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, g_3 = \begin{bmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^2 \end{bmatrix}, g_4 = \begin{bmatrix} \zeta^2 & 0 \\ 0 & \zeta \end{bmatrix},$$

$$g_5 = \begin{bmatrix} 0 & \zeta \\ \zeta^2 & 0 \end{bmatrix}, g_6 = \begin{bmatrix} 0 & \zeta^2 \\ \zeta & 0 \end{bmatrix}.$$

Onde $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ e $\zeta^2 + \zeta + 1 = 0$, isto é, ζ é uma raiz primitiva da unidade de ordem 3.

Assim, fazendo a ação de cada elemento de G em P , temos

$$\begin{aligned} Id_{\bullet}P &= x + x^2 + y + y^2 + y^3. \\ g_{2\bullet}P &= y + y^2 + x + x^2 + x^3. \\ g_{3\bullet}P &= w^2x + wx^2 + wy + w^2y^2 + y^3. \\ g_{4\bullet}P &= wx + w^2x^2 + w^2y + wy^2 + y^3. \\ g_{5\bullet}P &= wy + w^2y^2 + w^2x + wx^2 + x^3. \\ g_{6\bullet}P &= w^2y + wy^2 + wx + w^2x^2 + x^3. \end{aligned}$$

Daí, $Av(P) := \frac{1}{6} (3x^3 + 3y^3) = \frac{1}{2} (x^3 + y^3)$. Onde $x^3 + y^3$ é um dos polinômios invariantes do grupo D_6 .

Agora observemos que para todo l , temos que o polinômio

$$P_l = (g_{1\bullet}P)^l + (g_{2\bullet}P)^l + \dots + (g_{d\bullet}P)^l \quad (2.2)$$

é invariante. De fato, observe que para cada $i \in \{1, \dots, d\}$,

$$(g_{i\bullet}P)^l = \underbrace{(g_{i\bullet}P) \cdot (g_{i\bullet}P) \cdots (g_{i\bullet}P)}_{l\text{-vezes}} = g_{i\bullet} \underbrace{P \cdot P \cdots P}_{l\text{-vezes}} = g_{i\bullet}P^l.$$

Assim, o polinômio da Equação (2.2) é igual ao polinômio

$$g_{1\bullet}P^l + g_{2\bullet}P^l + \cdots + g_{d\bullet}P^l. \quad (2.3)$$

Portanto, $P_l \in J$.

Antes de introduzirmos a definição de aplicação de gráfico refletido, precisamos definir a aplicação de órbita de um grupo G agindo em \mathbb{C}^p .

Aplicação de órbita

Como foi mencionado em [34] a aplicação de órbita w de um grupo G agindo em \mathbb{C}^p determina uma maneira de “dobrar” \mathbb{C}^p , colando uma órbita de G a um ponto.

Na Figura 2.1, apresentamos uma ilustração geométrica da aplicação de órbita, utilizando como exemplo o grupo $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Ao tomarmos a imagem inversa $w^{-1}(w(v))$, obtemos a órbita de G em v . Denotamos essa órbita pelo conjunto $G_v := \{g_\bullet v \mid g \in G\}$.

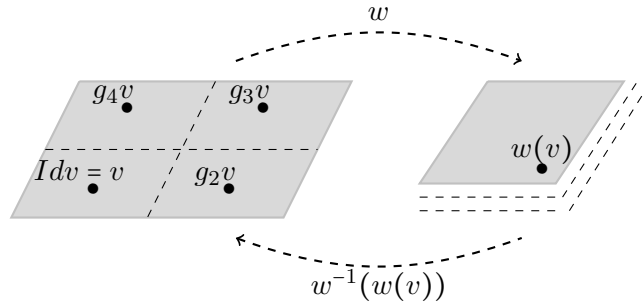


Figura 2.1: Ilustração da aplicação de órbita de um grupo de reflexão.

Se G é um grupo de reflexão agindo sobre \mathbb{C}^p então pelo Teorema de Shephard-Todd (veja [42]) a álgebra das funções polinomiais G -invariantes J pode ser gerada por p polinômios homogêneos.

Definição 2.5. A aplicação de órbita de um grupo de reflexão G é uma aplicação $w : \mathbb{C}^p \longrightarrow \mathbb{C}^p$, cujas funções coordenadas são polinômios homogêneos w_1, w_2, \dots, w_p em S que geram J . Os graus d_1, \dots, d_p de G são os graus de w_1, w_2, \dots, w_p , respectivamente.

A aplicação w é única a menos de transformações polinomiais invertíveis na meta (veja Exemplo 2.8). Como trabalhamos com objetos que são invariantes sob tais transformações, a escolha de w não importa. Desta forma, podemos por abuso de notação chamar w de “a aplicação de órbita” de G . Além disso, é bem conhecido que os graus de G não dependem da escolha do conjunto de geradores w_1, \dots, w_p para J .

Exemplo 2.7. Considere os geradores do grupo diedral \mathcal{D}_{2m} em $GL(\mathbb{C}^2)$,

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad S = \begin{bmatrix} e^{\frac{2\pi i}{m}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{2\pi i}{m}} \end{bmatrix}.$$

A aplicação de órbita $w: \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ de \mathcal{D}_{2m} é dada por

$$(x, y) \longmapsto (x^m + y^m, xy).$$

Exemplo 2.8. Considere no exemplo anterior $m = 4$, ou seja, o grupo diedral \mathcal{D}_8 em $GL(\mathbb{C}^2)$ gerado pelas seguintes matrizes

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad S = \begin{bmatrix} e^{\frac{\pi i}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{\pi i}{2}} \end{bmatrix},$$

cujas aplicação de reflexão é dada por $w(x, y) = (x^4 + y^4, xy)$.

Podemos obter outra representação para o grupo \mathcal{D}_8 , a qual denotaremos por \mathcal{D}'_8 , que é expressa por meio dos elementos a seguir (veja Exemplo 2.2, em [3])

$$\begin{aligned} Id = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad g_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad g_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad g_4 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad g_5 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \\ g_6 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad g_7 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad g_8 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

A aplicação de órbita para o grupo diedral de ordem 8 com a representação acima (\mathcal{D}'_8) é dada por $w(x, y) = (x^2 + y^2, x^2y^2)$. As duas representações de \mathcal{D}_8 são representações equivalentes. De fato, considere a matriz $r \in GL(\mathbb{C}^2)$

$$r = \begin{bmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{bmatrix}$$

é fácil verificar que $g = r^{-1}g_i r$ para todo $g \in \mathcal{D}_8$ e todo $g_i \in \mathcal{D}'_8$.

Um dos resultados mais importantes sobre a aplicação de órbita é o Teorema de Noether [33], o qual nos permite concluir que o conjunto $w^{-1}(w(v))$ é a órbita de G em v , i.e, o conjunto $G_v := \{g \bullet v \mid g \in G\}$.

Teorema 2.4. [Noether] Para qualquer $v \in \mathbb{C}^p$, $w^{-1}(w(v)) = G_v$.

Observação 2.2. É importante mencionar que a definição de grupo de reflexão leva em consideração a representação de G em $GL(\mathbb{C}^p)$. Isto é, não podemos dizer, por

exemplo, que o grupo cíclico \mathbb{Z}_d é de reflexão sem exibir uma representação de \mathbb{Z}_d em $GL(\mathbb{C}^p)$ que o torna um grupo com tal propriedade. Por exemplo, o grupo cíclico \mathbb{Z}_d gerado pela matriz

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\frac{2\pi i}{d}} \end{bmatrix}.$$

é um grupo de reflexão, visto que K é uma reflexão. Por outro lado, o grupo gerado pela matriz

$$K' = \begin{bmatrix} e^{\frac{2\pi i}{d}} & 0 \\ 0 & \left(e^{\frac{2\pi i}{d}}\right)^k \end{bmatrix},$$

com $\text{mdc}(k, d) = 1$, é isomorfo a \mathbb{Z}_d , isto é; $\langle K' \rangle \subset GL(\mathbb{C}^2)$ é uma outra representação de \mathbb{Z}_d em $GL(\mathbb{C}^2)$. Contudo, ele não é gerado por reflexões, portanto, $\langle K' \rangle \simeq \mathbb{Z}_d$ não é um grupo de reflexão.

Seja G um grupo de reflexão agindo em \mathbb{C}^p . Para $i = 1, \dots, \ell$, denotamos por $\text{Fix } g_i := H_i$ todos os hiperplanos refletores de G , onde g_i é uma reflexão de G . Seja e_i a ordem do grupo cíclico que fixa H_i e seja $L_{H_1}, \dots, L_{H_\ell}$ as formas lineares tais que $H_i := \text{Ker } L_{H_i}$. Uma relação importante entre a aplicação de órbita e as equações dos hiperplanos refletores de G é dada pela proposição a seguir.

Proposição 2.5. [20, Th. 9.8] Para alguma constante não nula c temos que

$$\det(jac(w)) = c \prod_{i=1}^{\ell} L_{H_i}^{e_i-1},$$

onde $jac(w)$ denota a matriz jacobiana da aplicação de órbita.

Observe que já definimos grupos de reflexão e aplicação de órbita de um grupo de reflexão G agindo em \mathbb{C}^p , ou seja, temos todos os ingredientes necessários para definir o que são as aplicações de reflexão e seu caso particular que são aplicações de gráfico refletido, nosso principal objeto de estudo.

2.2 Aplicações de reflexão

Definição 2.6. Seja G um grupo de reflexão agindo em \mathbb{C}^p .

(a) Uma aplicação $f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^p$ é dita de reflexão se f for dada pela composição de um mergulho $\rho : \mathbb{C}^n \hookrightarrow \mathbb{C}^p$ com a aplicação de órbita $w : \mathbb{C}^p \longrightarrow \mathbb{C}^p$ de G , i.e., $f = w \circ \rho$.

(b) A aplicação de gráfico refletido é a aplicação $(w, h) : \mathbb{C}^p \longrightarrow \mathbb{C}^{p+r}$, dada por $f(\mathbf{x}) = (w(\mathbf{x}), h(\mathbf{x}))$, com $h : \mathbb{C}^p \longrightarrow \mathbb{C}^r$ uma aplicação holomorfa.

A aplicação de gráfico refletido $f = (w, h)$ é a aplicação obtida tomando como mergulho o gráfico de h , dado por $\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x}, h(\mathbf{x}))$, e deixando G agir em $\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^r$, trivialmente no segundo fator (uma extensão trivial da ação para \mathbb{C}^{p+r}). Ao longo deste trabalho vamos considerar aplicações de gráfico refletido somente no caso onde $r = 1$ e $p = n$.

Exemplo 2.9. Considere a representação do grupo $\mathbb{Z}_2 \subset GL(\mathbb{C}^2)$ dada por

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

A aplicação de órbita desse grupo é dada por $w(x, y) = (x, y^2)$. Assim, a aplicação f de $(\mathbb{C}^2, 0)$ em $(\mathbb{C}^3, 0)$ dada por

$$f(x, y) = (x, y^2, xy^3 - x^5y)$$

é um exemplo de aplicação de gráfico refletido, onde $h(x, y) = xy^3 - x^5y$.

Exemplo 2.10. Considere a representação do grupo de reflexão $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \subset GL(\mathbb{C}^2)$ dada por

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

A aplicação de órbita desse grupo é dada por $w(x, y) = (x^2, y^2)$. Assim, a aplicação f de $(\mathbb{C}^2, 0)$ em $(\mathbb{C}^3, 0)$ dada por

$$f(x, y) = (x^2, y^2, x^3 + y^3 + xy)$$

é um exemplo de aplicação de gráfico refletido, onde $h(x, y) = x^3 + y^3 + xy$.

2.3 Teorema de Gutkin

Esta subseção tem como objetivo apresentar o Teorema de Gutkin, que desempenha um papel fundamental na demonstração de um dos principais resultados deste trabalho (veja Teorema 3.2). Nesse resultado, expressamos a matriz de apresentação para aplicações de gráfico refletido $f = (w, h)$ de $(\mathbb{C}^n, 0)$ em $(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$, em termos da ação do grupo de reflexão G sobre h .

Para introduzir o Teorema de Gutkin, apresentaremos algumas ferramentas preliminares necessárias. Seja $S = \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ e seja $F = \langle w_1, \dots, w_n \rangle$ o ideal gerado pelos polinômios invariantes básicos do grupo de reflexão G .

Suponha que $|G| = d$. Considere os polinômios homogêneos r_1, r_2, \dots, r_k cujos resíduos módulo F formam uma base para o quociente S/F . O corolário a seguir garante que $k = d$.

Corolário 2.6. [20, Corolário 3.27] $\dim_{\mathbb{C}} S/F = |G|$.

Lema 2.7. [20, Lema 3.28] Sejam r_1, r_2, \dots, r_d polinômios homogêneos cujos resíduos módulo F formam uma base para S/F . Então todo polinômio $P \in S$ tem uma expressão única da forma

$$P := U_1 r_1 + U_2 r_2 + \dots + U_d r_d, \quad (2.4)$$

onde $U_i \in J$ para todo i .

Assim, podemos escrever qualquer elemento em S como na expressão (2.4) acima.

Consideremos a seguinte matriz E com entradas dada pela ação do grupo G sobre r_1, r_2, \dots, r_d , isto é,

$$E = \begin{bmatrix} g_{1\bullet} r_1 & g_{2\bullet} r_1 & \cdots & g_{d\bullet} r_1 \\ g_{1\bullet} r_2 & g_{2\bullet} r_2 & \cdots & g_{d\bullet} r_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{1\bullet} r_{d-1} & g_{2\bullet} r_{d-1} & \cdots & g_{d\bullet} r_{d-1} \\ g_{1\bullet} r_d & g_{2\bullet} r_d & \cdots & g_{d\bullet} r_d \end{bmatrix}$$

onde, g_1, g_2, \dots, g_d são elementos do grupo G . Denote $\det(E) = \prod_M$. Vejamos no teorema a seguir uma expressão para o determinante de E em termos das equações dos hiperplanos.

Teorema 2.8. [20, Teorema 10.13] (Teorema de Gutkin) Para qualquer G -módulo M existe uma constante não nula c tal que $\prod_M = c \prod_{i=1}^{\ell} L_{H_i}^{C(H, M)}$, onde $C(H, M) = \frac{1}{2}|G|(e_i - 1)$.

Portanto, o Teorema de Gutkin nos permite concluir que o determinante da matriz E é expresso em termos das equações dos hiperplanos. Isto será útil no Teorema 3.2 deste trabalho.

Exemplo 2.11. Considere o grupo de reflexão $G = \mathbb{Z}_3 \subset GL(\mathbb{C}^2)$. A aplicação de órbita $w : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ de \mathbb{Z}_3 é dada por $w(x, y) = (x, y^3)$. Assim, $r_1 = 1, r_2 = y$ e $r_3 = y^2$.

Os elementos de \mathbb{Z}_3 em $GL(\mathbb{C}^2)$ são dados pelas três matrizes a seguir

$$g_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, g_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \zeta \end{bmatrix} \text{ e } g_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \zeta^2 \end{bmatrix},$$

onde, $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{3}}$. Considere a seguinte matriz

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & \zeta y & \zeta^2 y \\ y^2 & \zeta^2 y^2 & \zeta y^2 \end{bmatrix}.$$

No Capítulo 3 deste trabalho, veremos que esta matriz está relacionada com a matriz de apresentação de uma aplicação finita $f : (\mathbb{C}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$. Também iremos utilizar o Teorema de Gutkin fortemente para calcular determinantes de matrizes dessa forma. Por exemplo,

$$\det(E) = (-6\zeta - 3)y^3.$$

Vale ressaltar que neste exemplo não é difícil calcular o determinante de E , visto que a matriz é de ordem 3×3 , mas nos casos em que a ordem de E é extremamente grande, o Teorema de Gutkin se mostra de grande importância.

Capítulo 3

Matriz de apresentação e a equação da imagem

Neste capítulo, descrevemos a matriz de apresentação de $f_*\mathcal{O}_n$ como um \mathcal{O}_{n+1} -módulo, via composição com f , onde f é um germe de aplicação de gráfico refletido $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$, dado por $f(x) = (w(x), h(x))$. Notamos que nossa maneira de construir a matriz de apresentação de $f_*\mathcal{O}_n$ depende apenas da ação de G sobre h . Além disso, apresentamos uma equação para a imagem do germe de aplicação de gráfico refletido $f = (w, h)$, de $(\mathbb{C}^n, 0)$ para $(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$, expressa em termos da ação do grupo de reflexão G sobre h . Descrevemos os principais resultados deste capítulo também em [11].

Antes de introduzir estes resultados, vamos introduzir algumas notações. Seja $G = \{g_1, \dots, g_d\}$ um grupo de reflexão de ordem d agindo em \mathbb{C}^n . Adotaremos a notação $(w_1, w_2, \dots, w_n, Z) = (\mathbf{w}, Z)$ para a aplicação de órbita de G agindo em $\mathbb{C}^{n+1} = \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ (trivialmente no segundo fator), $(X_1, \dots, X_n, Z) = (\mathbf{X}, Z)$ para as coordenadas de \mathbb{C}^{n+1} (meta) e $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ para as coordenadas de \mathbb{C}^n (fonte). Denotamos por \mathcal{R} o conjunto de todas as reflexões em G .

3.1 A matriz de apresentação para aplicações de gráfico refletido

Recapitulamos que um germe de aplicação de gráfico refletido $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$, $f(\mathbf{x}) = (w(\mathbf{x}), h(\mathbf{x}))$, é obtido como a composição $f = w \circ \rho$, onde ρ é um mergulho $(\mathbf{x}, h(\mathbf{x}))$ e w é a aplicação de órbita de G . Denote $\mathcal{Y} = \rho(\mathbb{C}^n)$ e $\mathcal{X} = w(\mathcal{Y})$.

Note que $\mathcal{X} = f(\mathbb{C}^n) = \mathbf{V}(F(\mathbf{X}, Z))$, onde $F(\mathbf{X}, Z)$ é uma equação para a imagem de f que é obtida como o determinante da matriz de apresentação de $f_*\mathcal{O}_n$. Neste contexto, é clara a existência de uma equação para $(\mathcal{Y}, 0)$ que é

$$Z - h(X_1, \dots, X_n) = 0.$$

Pelo Teorema de Noether (veja Teorema 2.4) temos que $w^{-1}(w(\mathcal{Y})) = \bigcup_{i=1}^d g_{i\bullet} \mathcal{Y}$, i.e., a pré-imagem de \mathcal{X} por w consiste na órbita de \mathcal{Y} sobre a ação de G . Defina $\tilde{\mathcal{Y}} := w^{-1}(w(\mathcal{Y}))$. Mostraremos no seguinte lema que uma equação para $\tilde{\mathcal{Y}}$ é dada por

$$(Z - g_{1\bullet} h(\mathbf{X})) \cdot (Z - g_{2\bullet} h(\mathbf{X})) \cdots (Z - g_{d\bullet} h(\mathbf{X})) = 0 \quad (3.1)$$

O seguinte lema será uma ferramenta fundamental para provar o Teorema 3.6, onde apresentaremos uma equação para a imagem de f . Mostraremos também que a equação $\tilde{\mathcal{Y}}$ descrita em (3.1) coincide com o pullback da equação definidora $F(X, Z)$ de $(\mathcal{X}, 0)$ por w , que será denotado por $F(w_1, \dots, w_n, Z) = F(\mathbf{w}, Z)$.

Lema 3.1. Com as notações anteriores, seja $f : (\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$, $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{w}(\mathbf{x}), h(\mathbf{x}))$ um germe de aplicação de gráfico refletido, então $\tilde{\mathcal{Y}} = w^{-1}(w(\mathcal{Y})) = \mathbf{V}(F(\mathbf{w}, Z))$. Além disso,

$$F(\mathbf{w}, Z) = \prod_{k=1}^d (Z - g_{k\bullet}(h(\mathbf{x}))). \quad (3.2)$$

Demonstração. Note que $(\mathcal{X}, 0) \subset (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ é definido por uma única equação (o determinante da matriz de apresentação $\lambda[\mathbf{X}, Z]$ de $f_* \mathcal{O}_n$ como um \mathcal{O}_{n+1} -módulo via f). Observe que $\tilde{\mathcal{Y}}$ é também definida por uma única equação. Desde que $F(\mathbf{X}, Z)$ é uma equação para \mathcal{X} , segue que o pullback $F(\mathbf{w}, Z)$ de $F(\mathbf{X}, Z)$ por w nos fornece uma equação para $w^{-1}(w(\mathcal{Y}))$. Vamos mostrar que $F(\mathbf{w}, Z)$ pode ser fatorada como em (3.2).

Segue do Corolário 2.6 que

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}}{\langle w_1, w_2, \dots, w_n \rangle} = |G| = d.$$

Sejam $1 = r_1, r_2, \dots, r_d$ os geradores de $\frac{\mathbb{C}\{\mathbf{x}\}}{\langle \mathbf{w} \rangle}$ como um \mathbb{C} -espaço vetorial. Segue do Lema 2.7 que existem p_1, p_2, \dots, p_d em $\mathbb{C}\{\mathbf{x}\}$ tais que

$$h := r_1 p_1(\mathbf{w}) + r_2 p_2(\mathbf{w}) + \dots + r_d p_d(\mathbf{w}),$$

Note que $p_i(\mathbf{w}) = p_i(w_1, \dots, w_n)$ são unicamente determinados por h e a aplicação de órbita w . Agora seguiremos o algoritmo de Mond-Pellikaan (veja Seção 1.3) para construir uma matriz de apresentação $\lambda[\mathbf{X}, Z]$ de $f_* \mathcal{O}_n$ como um \mathcal{O}_{n+1} -módulo via f .

Vamos primeiro considerar a matriz

$$\alpha[\mathbf{X}] = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,d} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} & \cdots & \alpha_{2,d} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} & \cdots & \alpha_{3,d} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \alpha_{d,1} & \alpha_{d,2} & \alpha_{d,3} & \cdots & \alpha_{d,d} \end{bmatrix}_{d \times d},$$

onde $\alpha_{i,j}(\mathbf{X}) \in \mathbb{C}\{\mathbf{X}\}$ e satisfaz a relação

$$r_i \cdot h = \sum_{j=1}^d (\alpha_{i,j}(\mathbf{w})) \cdot r_j, \quad \text{com } i = 1, \dots, d. \quad (3.3)$$

Observe que $\alpha_{i,j}$ são unicamente determinados por h e w . Assim, a matriz de apresentação $\lambda[\mathbf{X}, Z]$ de $f_*\mathcal{O}_n$ tem entradas da forma

$$\lambda_{i,j}(\mathbf{X}, Z) = \alpha_{i,j}(\mathbf{X}) \text{ se } i \neq j \quad \text{e} \quad \lambda_{i,i}(\mathbf{X}, Z) = \alpha_{i,i}(\mathbf{X}) - Z.$$

Em outras palavras,

$$\lambda[\mathbf{X}, Z] = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1} - Z & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} & \cdots & \alpha_{1,d} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} - Z & \alpha_{2,3} & \cdots & \alpha_{2,d} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} - Z & \cdots & \alpha_{3,d} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \alpha_{d,1} & \alpha_{d,2} & \alpha_{d,3} & \cdots & \alpha_{d,d} - Z \end{bmatrix},$$

Definida a matriz de apresentação $\lambda[\mathbf{X}, Z]$ de acordo com o algoritmo de Mond-Pellikaan, agora gostaríamos de fatorar $F(\mathbf{w}, Z)$ como em (3.2). Substituindo \mathbf{X} por \mathbf{w} em $\lambda[\mathbf{X}, Z]$ e $\alpha[\mathbf{X}]$, obtemos as matrizes $\lambda[\mathbf{w}, Z]$ e $\alpha[\mathbf{w}]$, i.e., $\lambda[\mathbf{w}, Z]$ ($\alpha[\mathbf{w}]$, respectivamente) é o pullback de $\lambda[\mathbf{X}, Z]$ ($\alpha[\mathbf{X}]$, respectivamente) por w . Claramente, o determinante de $\lambda[\mathbf{w}, Z]$ é igual a $F(\mathbf{w}, Z)$.

Seja $\mathbb{K} := \text{Frac}(\mathbb{C}\{\mathbf{x}\})$ e considere $\alpha[\mathbf{w}]$ como uma matriz com entradas em \mathbb{K} . Note que $\lambda[\mathbf{w}, Z] = (\alpha[\mathbf{w}] - ZId)$, onde Id é a matriz identidade. Portanto, $F(\mathbf{w}, Z)$ é precisamente o polinômio característico de $\alpha[\mathbf{w}]$. Vamos encontrar os autovalores de $\alpha[\mathbf{w}]$. Considere $Id = g_1, g_2, \dots, g_d$ os elementos do grupo de reflexão G . Para todo $i = 1, \dots, d$ obtemos de (3.3) que

$$\alpha_{i,1}(\mathbf{w}) \cdot r_1 + \cdots + \alpha_{i,d}(\mathbf{w}) \cdot r_d = h \cdot r_i. \quad (3.4)$$

Note que $\alpha_{i,j}(\mathbf{w}) = \alpha_{i,j}(w_1, \dots, w_n)$ é invariante sob a ação de G para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Assim, aplicando a ação de $g_k \in G$ em (3.4), obtemos que

$$\alpha_{i,1}(\mathbf{w}) \cdot g_{k\bullet}(r_1) + \dots + \alpha_{i,d}(\mathbf{w}) \cdot g_{k\bullet}(r_d) = g_{k\bullet}(h) \cdot g_{k\bullet}(r_i)$$

donde concluímos que

$$\begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} & \cdots & \alpha_{1,d} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} & \cdots & \alpha_{2,d} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} & \cdots & \alpha_{3,d} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \alpha_{d,1} & \alpha_{d,2} & \alpha_{d,3} & \cdots & \alpha_{d,d} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g_{k\bullet}(r_1) \\ g_{k\bullet}(r_2) \\ g_{k\bullet}(r_3) \\ \vdots \\ g_{k\bullet}(r_d) \end{bmatrix} = g_{k\bullet}(h) \begin{bmatrix} g_{k\bullet}(r_1) \\ g_{k\bullet}(r_2) \\ g_{k\bullet}(r_3) \\ \vdots \\ g_{k\bullet}(r_d) \end{bmatrix}.$$

Desta forma, para todo $k = 1, \dots, d$ temos que $(g_{k\bullet}(r_1), g_{k\bullet}(r_2), \dots, g_{k\bullet}(r_d))$ é um autovetor de $\alpha[\mathbf{w}]$ com respectivo autovalor $g_{k\bullet}(h)$.

Considere a matriz E onde as colunas são os autovetores $(g_{k\bullet}(r_1), g_{k\bullet}(r_2), \dots, g_{k\bullet}(r_d))$, i.e.

$$E = \begin{bmatrix} g_{1\bullet}r_1 & g_{2\bullet}r_1 & \cdots & g_{d\bullet}r_1 \\ g_{1\bullet}r_2 & g_{2\bullet}r_2 & \cdots & g_{d\bullet}r_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{1\bullet}r_{d-1} & g_{2\bullet}r_{d-1} & \cdots & g_{d\bullet}r_{d-1} \\ g_{1\bullet}r_d & g_{2\bullet}r_d & \cdots & g_{d\bullet}r_d \end{bmatrix}$$

Segue do Teorema 2.8 (Gutkin), (onde a matriz $A_{i,j}$ na Definição 10.6 de [20] é a matriz E em nosso cenário) que o determinante de E é um polinômio não nulo. Consequentemente, o conjunto dos autovetores são linearmente independentes. Portanto,

$$\det \lambda[\mathbf{w}, Z] := F(\mathbf{w}, Z) = \prod_{k=1}^d (Z - g_{k\bullet}(h(x))) \quad (3.5)$$

o que completa a prova. ■

Observação 3.1. (a) Seja $\lambda[\mathbf{X}, Z]$ a matriz de apresentação de $f_*\mathcal{O}_n$ como um \mathcal{O}_{n+1} -módulo e $\lambda[\mathbf{w}, Z]$ como no Lema 3.1. Com as notações anteriores considere as matrizes E e A a seguir

$$E = \begin{bmatrix} g_{1\bullet}r_1 & g_{2\bullet}r_1 & \cdots & g_{d\bullet}r_1 \\ g_{1\bullet}r_2 & g_{2\bullet}r_2 & \cdots & g_{d\bullet}r_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{1\bullet}r_{d-1} & g_{2\bullet}r_{d-1} & \cdots & g_{d\bullet}r_{d-1} \\ g_{1\bullet}r_d & g_{2\bullet}r_d & \cdots & g_{d\bullet}r_d \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} g_{1\bullet}h & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & g_{2\bullet}h & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & g_{d\bullet}h \end{bmatrix}.$$

Como mencionado na demonstração do Lema 3.1, note que E é a matriz dos autovetores de $\lambda[\mathbf{w}, 0]$. Os elementos que aparecem na diagonal da matriz A são os

autovalores de $\lambda[w, 0]$.

(b) Na sequência, dada uma matriz $M = (m_{i,j}(w_1, \dots, w_n))$ onde cada $m_{i,j} \in \mathbb{C}[w_1, \dots, w_n]$ é G -invariante, denotaremos $w^*(M)$ a matriz obtida ao realizar a mudança de w_i para X_i em $m_{i,j}$, isto é, $w^*(M) = (m_{i,j}(X_1, \dots, X_n))$. Note que w_* realiza exatamente o oposto, isto é, $w_*(m_{i,j}(X_1, \dots, X_n)) = (m_{i,j}(w_1, \dots, w_n))$. Isso motiva o seguinte resultado.

Teorema 3.2. *Seja $f : (\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$, $f(\mathbf{x}) = w(\mathbf{x}, h(\mathbf{x}))$, um germe de aplicação de gráfico refletido. Considere as matrizes E e A na Observação 3.1 e a matriz $A_Z := (A - ZId)$. A matriz de apresentação $\lambda[\mathbf{X}, Z]$ de $f_*\mathcal{O}_n$ como um \mathcal{O}_{n+1} -módulo é dada por:*

$$\lambda[\mathbf{X}, Z] = w^*(E \cdot A_Z \cdot E^{-1}).$$

Demonstração. Do Lema 3.1 temos que $E^{-1}\lambda[\mathbf{w}, 0]E = A$. Em outras palavras, a matriz E diagonaliza a matriz $\lambda[\mathbf{w}, 0]$. Assim,

$$\lambda[\mathbf{w}, Z] = EAE^{-1} - ZId = E(A - ZId)E^{-1} = E \cdot A_Z \cdot E^{-1}.$$

Agora o resultado segue do fato que $w^*(\lambda[\mathbf{w}, Z]) = \lambda[\mathbf{X}, Z]$. ■

Definição 3.1. O quociente $\mathcal{O}_n/(w_1, \dots, w_n)$ é chamado de *álgebra coinvariante* do grupo de reflexão G (veja [20, Ch. 3, Sec. 6]).

Outro espaço importante na teoria dos grupos de reflexão é o espaço \mathcal{H} das funções analíticas G -harmônicas (ver [20, Def. 9.35]). Para os propósitos deste trabalho, destacamos o fato de que \mathcal{H} é isomorfo (como um G -módulo) à álgebra dos coinvariantes de G . Assim, no que segue, podemos identificar \mathcal{H} com $\mathcal{O}_n/(w_1, \dots, w_n)$ como G -módulos.

Note que na prova do Lema 3.1 obtemos que o determinante da matriz E é diferente de zero. Na verdade, podemos dizer mais sobre o determinante da matriz E . Primeiro, vamos estabelecer alguma notação. Considere um grupo de reflexão G de ordem d agindo em $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ (trivialmente no segundo fator). Denote por H_1, \dots, H_l os hiperplanos refletores (distintos) de G . Seja L_{H_i} uma forma linear de \mathbb{C}^{n+1} para \mathbb{C} tal que $H_i = \mathbf{V}(L_{H_i})$ para todo i . Seja r_{H_i} o gerador do grupo cíclico que fixa H_i e denote a ordem de r_{H_i} por e_i . A proposição a seguir nos dá uma expressão para o determinante de E .

Proposição 3.3. Sejam G um grupo de reflexão finito e $f : (\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ uma aplicação de gráfico refletido, então para alguma constante não nula c , temos

$$\det(E) = c \prod_{i=1}^{\ell} L_{H_i}^{|G|(e_i-1)/2}.$$

3. Matriz de apresentação e a equação da imagem

Demonstração. Considere a álgebra coinvariante $\mathcal{O}_n/(w_1, \dots, w_n)$ de G . Por [20, Cor. 3.29] temos que

$$\mathcal{O}_n/(w_1, \dots, w_n) \simeq \mathbb{C}^d,$$

as \mathbb{C} -espaço vetorial, onde $d := |G|$. Seja r_1, r_2, \dots, r_d uma base da álgebra dos coinvariantes, em que usualmente se toma $r_1 = 1$. Por [20, Prop. 3.2] podemos ver $M := \mathbb{C}^d$ como um G -módulo, onde a representação de G em $\mathbb{C}^d \simeq \mathcal{O}_n/(w_1, \dots, w_n)$ é a representação regular (veja [40, Sec. 1.2] para a definição de uma representação regular de um grupo finito). Considere a base canônica

$$\{e_{g_1}, e_{g_2}, \dots, e_{g_d}\}$$

de \mathbb{C}^d indexado pelos elementos de G . O dual $M^* = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(M, \mathbb{C})$ tem base dual $\{y_1, \dots, y_d\}$ onde $y_j := e^{g_j}$ é o funcional linear de \mathbb{C}^d para \mathbb{C} definido por $y_j(e_{g_k}) = \delta_{jk}$ (símbolo de Kronecker). Por [20, Cor. 9.37] temos que \mathcal{H} é isomorfo à álgebra coinvariante de G (as G -módulos). Além disso, há um isomorfismo canônico

$$(\mathcal{H} \otimes M^*)^G \cong \text{Hom}_{\mathbb{C}G}(M, \mathcal{H}),$$

enviando $\sum_{\ell} A_{\ell} \otimes \phi_{\ell}$ para o operador linear $v \mapsto \sum_{\ell} \phi_{\ell}(v) A_{\ell}$ (veja [20, Lema 10.2(ii)]). Agora construa explicitamente d morfismos $\varphi_k \in \text{Hom}_{\mathbb{C}G}(M, \mathcal{H})$ (um para cada $k = 1, \dots, d$) como segue:

$$\varphi_k : M \longrightarrow \mathcal{H}, \quad \varphi_k(e_g) := g \cdot r_k.$$

Note que para $g, g' \in G$ temos que

$$\varphi_k(g' \cdot e_g) = \varphi_k(e_{g'g}) = (g'g) \cdot r_k = g' \cdot (g \cdot r_k) = g' \cdot \varphi_k(e_g).$$

Assim $\varphi_k \in \text{Hom}_{\mathbb{C}G}(M, \mathcal{H})$. Portanto, $\varphi_1, \dots, \varphi_d$ gera o espaço $\text{Hom}_{\mathbb{C}G}(M, \mathcal{H})$. Retornando ao lado do tensor, a imagem corresponde a um elemento. $u_k \in (\mathcal{H} \otimes M^*)^G$:

$$u_k = \sum_{j=1}^d A_{kj} \otimes y_j, \quad \text{where } A_{kj} \in \mathcal{H}.$$

Pela definição da correspondência,

$$A_{kj} = \varphi_k(e_{g_j}) = g_j \cdot r_k.$$

Assim, obtemos que:

$$A_{kj} = g_j \cdot r_k, \quad 1 \leq k, j \leq d. \quad (3.6)$$

Assim, neste contexto, a matriz E em Observação 3.1(b) coincide exatamente com a matriz A_{kj} em (3.6) (ver também [20, Def. 10.6]). Lembre-se de que \mathcal{A} é o conjunto de hiperplanos $Fix\ g$, onde g é uma reflexão em G . O Teorema de Gutkin [20, Th. 10.13] afirma que existe uma constante $c \neq 0$ tal que

$$\det(E) = c \cdot \prod_{Fix\ g \in \mathcal{A}} L_g^{C(Fix\ g, M)}.$$

Aqui, $C(Fix\ g, M)$ é determinado pela restrição de M ao estabilizador cíclico $G_{Fix\ g}$. Para a representação regular, obtém-se que:

$$C(Fix\ g, M) = |G| \cdot \left(\frac{ord(g) - 1}{2} \right),$$

(veja por exemplo a prova de [20, Th. 10.13]), isso completa a prova. \blacksquare

Corolário 3.4. Seja $f : (\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$, $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{w}(\mathbf{x}), h(\mathbf{x}))$, um germe de aplicação de gráfico refletido. Então

$$\lambda[\mathbf{X}, Z] = w^* \left(\frac{1}{\prod_{i=1}^{\ell} L_i^{|G|(e_i-1)/2}} E \cdot A_Z \cdot Adj(E) \right)$$

onde $Adj(E)$ denota a matriz adjunta de E (a transposta da matriz dos cofatores de E).

Exemplo 3.1. Vamos considerar $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Considere um germe de aplicação de dobra dupla $f : (\mathbb{C}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ dado por $(x, y) \longmapsto (x^2, y^2, h(x, y))$. Podemos escrever $h(x, y) = xp_1 + yp_2 + xyp_3$, onde $p_i = p_i(x^2, y^2)$. Note que

$$r_1 = 1, r_2 = x, r_3 = y \text{ e } r_4 = xy$$

geram $\mathbb{C}[x, y]/(x^2, y^2)$ como um \mathbb{C} -espaço vetorial complexo. As matrizes E , A_Z e $Adj(E)$ são

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & -x & x & -x \\ y & y & -y & -y \\ xy & -xy & -xy & xy \end{bmatrix}, \quad Adj(E) = \begin{bmatrix} 4x^2y^2 & 4xy^2 & 4x^2y & 4xy \\ 4x^2y^2 & -4xy^2 & 4x^2y & -4xy \\ 4x^2y^2 & 4xy^2 & -4x^2y & -4xy \\ 4x^2y^2 & -4xy^2 & -4x^2y & 4xy \end{bmatrix},$$

e

$$A_Z = \begin{bmatrix} h_1 - Z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 - Z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 - Z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_4 - Z \end{bmatrix},$$

onde

$$\begin{aligned} h_1 &= xp_1 + yp_2 + xyp_3 \\ h_2 &= -xp_1 + yp_2 - xyp_3 \\ h_3 &= xp_1 - yp_2 - xyp_3 \\ h_4 &= -xp_1 - yp_2 + xyp_3 \end{aligned}$$

O grupo $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ tem dois hiperplanos refletorados dados por $L_{H_1} = V(x)$ e $L_{H_2} = V(y)$. Todas as reflexões de G tem ordem 2, portanto $e_1 = e_2 = 2$. Segue da Proposição 3.3 que $\det(E) = cx^2y^2$ para alguma constante c . Na verdade, $\det(E) = 16x^2y^2$.

Fazendo o produto $E \cdot A_Z \cdot \text{Adj}(E)$ e multiplicando as entradas da matriz resultante por $1/16x^2y^2$ obtemos a seguinte matriz

$$\lambda[w, Z] = \begin{bmatrix} -Z & p_1 & p_2 & p_3 \\ x^2p_1 & -Z & x^2p_3 & p_2 \\ y^2p_2 & y^2p_3 & -Z & p_1 \\ x^2y^2p_3 & y^2p_2 & x^2p_1 & -Z \end{bmatrix}.$$

Agora, fazendo a mudança de variáveis de x^2 por X e y^2 por Y em $\lambda[w, Z]$ obtemos a matriz de apresentação

$$\lambda[X, Y, Z] = \begin{bmatrix} -Z & p_1 & p_2 & p_3 \\ Xp_1 & -Z & Xp_3 & p_2 \\ Yp_2 & Yp_3 & -Z & p_1 \\ XYp_3 & Yp_2 & Xp_1 & -Z \end{bmatrix}.$$

que é exatamente a mesma matriz $\lambda[X, Y, Z]$ que aparece em [24].

3.2 Uma equação para a imagem

Apresentaremos agora uma equação que define a imagem de um germe de aplicações de gráfico refletido $f = (w, h)$, de $(\mathbb{C}^n, 0)$ para $(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$, expressa em termos da ação do grupo de reflexão G sobre h . Antes de enunciar esse resultado, introduziremos um exemplo motivador.

Considere o grupo de reflexão $G = \mathbb{Z}_4$ agindo em $\mathbb{C}^3 \simeq \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ (trivialmente no primeiro e terceiro fator) com aplicação de órbita $w = (x, y^4, Z)$. Seja f um germe de aplicação de gráfico refletido de $(\mathbb{C}^2, 0)$ em $(\mathbb{C}^3, 0)$, dado por

$$f(x, y) = (x, y^4, yp_1 + y^2p_2 + y^3p_3),$$

onde $p_i = p_i(x, y^4)$. Note que $r_1 = 1$, $r_2 = y$, $r_3 = y^2$ and $r_4 = y^3$ geram $\mathbb{C}[x, y]/(x, y^4)$

como \mathbb{C} -espaço vetorial. Aplicando o Teorema 3.2 obtemos uma matriz de apresentação de $f_*\mathcal{O}_2$ como um \mathcal{O}_3 -módulo via f dado por

$$\lambda[X, Z] = \begin{bmatrix} -Z & p_1 & p_2 & p_3 \\ Yp_3 & -Z & p_1 & p_2 \\ Yp_2 & Yp_3 & -Z & p_1 \\ Yp_1 & Yp_2 & Yp_3 & -Z \end{bmatrix}.$$

Portanto, calculando o determinante de $\lambda[X, Z]$, uma equação definidora para a imagem de f é dada por

$$F(X, Y, Z) = Z^4 + Q_2 Z^2 - Q_1 Z + Q_0$$

onde

$$\begin{aligned} Q_2 &= -4Yp_1p_3 - 2Yp_2^2. \\ Q_1 &= 4Yp_1^2p_2 + 4Y^2p_2p_3^2. \\ Q_0 &= Y^2(p_2^4 - 4p_1p_2^2p_3 + 2p_1^2p_3^2) - Y^3p_3^4 - Yp_1^4. \end{aligned}$$

Agora, defina $q_i(x, y) := w_*(Q_i) = Q_i(x, y^4)$. Assim obtemos que

$$\begin{aligned} q_2(x, y) &= -4y^4p_1p_3 - 2y^4p_2^2. \\ q_1(x, y) &= 4y^4p_1^2p_2 + 4y^8p_2p_3^2. \\ q_0(x, y) &= y^8(p_2^4 - 4p_1p_2^2p_3 + 2p_1^2p_3^2) - y^{12}p_3^4 - y^4p_1^4. \end{aligned}$$

onde agora temos $p_i = p_i(x, y^4)$.

Um fato curioso é que podemos expressar cada q_i em termos de polinômios simétricos nas “variáveis” h_i , mais precisamente:

$$\begin{aligned} q_2(x, y) &= h_1h_2 + h_1h_3 + h_1h_4 + h_2h_3 + h_3h_4. \\ q_1(x, y) &= h_1h_2h_3 + h_1h_2h_4 + h_1h_3h_4 + h_2h_3h_4. \\ q_0(x, y) &= h_1h_2h_3h_4. \end{aligned}$$

onde, $h_i = g_{i\bullet}(xp_1 + y^2p_2 + y^3p_3)$, mais precisamente,

$$\begin{aligned} h_1 &= yp_1 + y^2p_2 + y^3p_3 \\ h_2 &= -yp_1 + y^2p_2 - y^3p_3 \\ h_3 &= iyp_1 - y^2p_2 - iy^3p_3 \\ h_4 &= -iyp_1 - y^2p_2 + iy^3p_3 \end{aligned}$$

Observe que em particular, os polinômios q_i são invariantes sob a ação de G . Mostraremos na próxima seção que esse mesmo comportamento acontece para qualquer germe de aplicação de gráfico refletido.

3.2.1 A imagem de uma aplicação de gráfico refletido

Estamos agora em condições de apresentar uma equação para a imagem de uma aplicação de gráfico refletido.

Lema 3.5. Sejam G um grupo de reflexão e h um polinômio em $S = \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Seja d a ordem de G e denote por $g_1 = Id, g_2, \dots, g_d$ os elementos de G . Denote $h_i := g_{i\bullet}h$, isto é, h_i é definida pela ação de g_i em h . Então para todo $k \in \{1, 2, \dots, d\}$ o polinômio

$$q_{d-k} := \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} h_{i_1} h_{i_2} \dots h_{i_k}$$

é invariante sob a ação de G . Em particular, $q_{d-k} \in \mathbb{C}[w_1, \dots, w_d]$.

Demonstração. Considere $h_i := g_{i\bullet}h$ e para todo $k \in \{1, 2, \dots, d\}$ o polinômio

$$q_{d-k} := \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} h_{i_1} h_{i_2} \dots h_{i_k}.$$

Observe que, ao tratarmos os h_i como variáveis, os polinômios q_{d-k} se apresentam como polinômios simétricos nessas variáveis. Para todo $l \geq 1$ considere a soma das potências de polinômios simétricos $m_l = h_1^l + h_2^l + \dots + h_d^l \in S$. Considere o anel $A := \mathbb{C}[h_1, h_2, \dots, h_d]$ e seja $Sym(A)$ o conjunto dos polinômios simétricos nas variáveis h_1, h_2, \dots, h_d . Note que por definição $q_{d-k} \in Sym(A)$ para cada k . O Teorema fundamental dos polinômios simétricos afirma que qualquer polinômio simétrico em h_1, \dots, h_d pode ser expresso como uma expressão polinomial com coeficientes racionais nos polinômios simétricos de soma de potências m_1, \dots, m_d . Em outras palavras, os m'_l s são os geradores da álgebra polinomial simétrica $Sym(A)$, ou seja,

$$Sym(A) = \mathbb{C}[m_1, \dots, m_d].$$

Desde que $q_{d-k} \in Sym(A)$, existe $Q_{d-k} \in \mathbb{C}[m_1, m_2, \dots, m_d]$, tal que $q_{d-k} = Q_{d-k}(m_1, m_2, \dots, m_d)$. Do operador de Reynolds (veja Equação 2.1, na Seção 2.1), segue que cada m_i é invariante sob a ação de G . Portanto, q_{d-k} é também invariante sob a ação de G . ■

Agora, desde que cada q_{d-k} é invariante sob a ação de G , i.e, podemos pensar $q_{d-k}(w_1, \dots, w_d)$ em $\mathbb{C}[w_1, \dots, w_d]$. Portanto, tudo o que precisamos fazer agora é simplesmente trocar a “variável” w_i pela nova X_i , e assim como na Observação 3.1 item (b), denotaremos esta mudança por $w^*(q_{d-k}(w_1, \dots, w_d)) := Q_{d-k}(X_1, \dots, X_d)$. Agora podemos apresentar uma equação para a imagem de um germe de aplicação de gráfico refletido.

Teorema 3.6. *Seja G um grupo de reflexão de ordem d . Seja $f = (w_1, w_2, \dots, w_n, h)$ um germe de aplicação de gráfico refletido de $(\mathbb{C}^n, 0)$ para $(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$. A imagem de f é dada como o conjunto dos zeros de F (que é o determinante da matriz de apresentação $f_*(\mathcal{O}_n)$) onde F é descrito como a seguinte soma alternada*

$$F(X_1, \dots, X_n, Z) = Z^d - Q_{d-1}Z^{d-1} + Q_{d-2}Z^{d-2} + \dots + (-1)^{d-1}Q_1Z + (-1)^dQ_0, \quad (3.7)$$

onde $Q_{d-k} = q_{d-k}(X_1, \dots, X_n)$, e q_{d-k} é descrito no Lema 3.5.

Demonstração. Considere a imagem de f dada pelo conjunto dos zeros de $F(\mathbf{X}, Z)$, onde F denota o determinante da matriz de apresentação $\lambda[\mathbf{X}, Z]$ de $f_*\mathcal{O}_n$ como um \mathcal{O}_{n+1} -módulo via f . Considere o pullback $F(\mathbf{w}, Z)$ de $F(\mathbf{X}, Z)$ por w . Segue do Lema 3.1 que

$$F(\mathbf{w}, Z) = \prod_{k=1}^d (Z - g_{k\bullet}(h(\mathbf{x}))). \quad (3.8)$$

Considerando $h_k := g_{k\bullet}h$ como no Lema 3.5, temos que

$$F(\mathbf{w}, Z) = (Z - h_1)(Z - h_2)\dots(Z - h_d). \quad (3.9)$$

Expandindo a expressão (3.9) obtemos que

$$F(\mathbf{w}, Z) = Z^d - q_{d-1}Z^{d-1} + q_{d-2}Z^{d-2} + \dots + (-1)^{d-1}q_1Z + (-1)^dq_0.$$

Como os polinômios q_{d-k} são invariantes, podemos definir $Q_{d-k}(X_1, \dots, X_d) := w^*(q_{d-k}(w_1, \dots, w_d))$, portanto

$$F(\mathbf{X}, Z) = Z^d - Q_{d-1}Z^{d-1} + Q_{d-2}Z^{d-2} + \dots + (-1)^{d-1}Q_1Z + (-1)^dQ_0, \quad (3.10)$$

como desejado. ■

Observação 3.2. Note que

$$\det(\lambda[w, Z]) = \det(\alpha - ZId) = F(w, Z).$$

Da álgebra linear obtemos que

$$\det(\alpha - ZId) = (-1)^dZ^d + (-1)^{d-1}Tr(\alpha)Z^{d-1} + \dots + \det(\alpha). \quad (3.11)$$

Note que de (3.11) e (3.10) podemos concluir que

$$Tr(\alpha) = -(h_1 + h_2 + \dots + h_d) \text{ e } \det(\alpha) = (-1)^dh_1h_2 \cdot \dots \cdot h_d.$$

3. Matriz de apresentação e a equação da imagem

Ao considerarmos G como sendo o grupo de reflexão $\mathbb{Z}_{d_1} \times \mathbb{Z}_{d_2}$, segue de [44] (veja Proposição 4.29) que a soma dos elementos da diagonal principal da matriz α é igual a zero. Consequentemente,

$$0 = \alpha_{1,1} + \alpha_{2,2} + \cdots + \alpha_{d,d} = \text{Tr}(\alpha) = -(h_1 + \cdots + h_d)$$

Assim, $q_{d-1} = 0$, quando G é $\mathbb{Z}_{d_1} \times \mathbb{Z}_{d_2}$.

Observação 3.3. Sejam h_1, \dots, h_d variáveis. Considerando as notações do Lema 3.5, e que $m_\ell(h_1, \dots, h_d)$ é a ℓ -ésima soma de potência, isto é,

$$m_\ell = \sum_{i=1}^d h_i^\ell = h_1^\ell + h_2^\ell + \cdots + h_d^\ell, \quad \forall \ell \geq 1, \quad (3.12)$$

e para $k \geq 0$, $q_{d-k}(h_1, \dots, h_d)$ é o polinômio simétrico elementar

$$\begin{aligned} q_k(x, y) &= 0, \quad \forall k > d \\ q_d(x, y) &= 1 \\ q_{d-1}(x, y) &= h_1 + h_2 + \cdots + h_d. \\ q_{d-2}(x, y) &= \sum_{1 \leq i \leq j \leq d} h_i h_j. \\ &\vdots \\ q_0(x, y) &= h_1 h_2 \cdots h_d. \end{aligned}$$

Então podemos usar as identidades de Newton que são definidas por

$$k q_{d-k}(h_1, \dots, h_d) = \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} q_{d-k+i}(h_1, \dots, h_d) m_i(h_1, \dots, h_d),$$

onde $d \geq k \geq 1$. No exemplo a seguir, veremos como reescrever q_{d-k} em termos dos polinômios m_ℓ 's considerando o grupo $G = \mathbb{Z}_4$, introduzido no início desta seção.

De (3.12), segue que

$$\begin{aligned} q_3 &= m_1 \\ 2q_2 &= q_3 m_1 - m_2 \\ 3q_1 &= q_2 m_1 - q_3 m_2 + m_3 \\ 4q_0 &= q_1 m_1 - q_2 m_2 + q_3 m_3 - m_4 \end{aligned}$$

Da Observação 3.2 temos que $m_1 = 0$, consequentemente $q_3 = 0$. Então,

$$q_3 = 0, \quad q_2 = -\frac{m_2}{2}, \quad q_1 = \frac{m_3}{3} \quad \text{and} \quad q_0 = \frac{m_2^2}{8} - \frac{m_4}{4}.$$

Dai,

$$\begin{aligned} q_3 &= 0 \\ q_2 &= -2y^4p_2^2 - 4y^4p_1p_3 \\ q_1 &= 4y^4p_1^2p_2 + 4y^8p_2p_3^2 \\ q_0 &= -y^4p_1^4 + y^8p_2^4 - 4y^8p_1p_2^2p_3 + 2y^8p_1^2p_3^2 - y^{12}p_3^4. \end{aligned}$$

Agora trocando y^4 por Y obtemos que os Q'_i s são exatamente os polinômios expressados no exemplo dado no início desta seção.

Exemplo 3.2. (Grupo $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$). Considere um germe de aplicação de dobra dupla $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ dado por $(x, y) \rightarrow (x^2, y^2, x^3 + y^5 + xy)$. Segue do Teorema 3.6 que a imagem de f é da forma

$$f(\mathbb{C}^2) = Z^4 - Q_3Z^3 + Q_2Z^2 - Q_1Z + Q_0,$$

como

$$\begin{aligned} h_1 &= x^3 + y^5 + xy \\ h_2 &= -x^3 + y^5 - xy \\ h_3 &= x^3 - y^5 - xy \\ h_4 &= -x^3 - y^5 + xy \end{aligned}$$

segue da Observação 3.2 que $q_3 = 0$, e do Lema 3.5 que

$$\begin{aligned} q_2 &= -2x^2y^2 - 2x^6 - 2y^{10} \\ q_1 &= 8x^4y^6 \\ q_0 &= x^4y^4 - 2x^8y^2 + x^{12} - 2x^2y^{12} - 2x^6y^{10} + y^{20} \end{aligned}$$

Assim, uma equação para a imagem dessa aplicação é

$$f(\mathbb{C}^2) = Z^4 + (-2XY - 2X^3 - 2Y^5)Z^2 - (8X^2Y^3)Z + X^2Y^2 - 2X^4Y + X^6 - 2XY^6 - 2X^3Y^5 + Y^{10}.$$

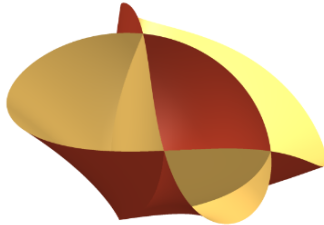


Figura 3.1: Ilustração da imagem da aplicação $f(x, y) = (x^2, y^2, x^3 + y^5 + xy)$.

Capítulo 4

Cota para a multiplicidade e aplicações

Neste capítulo descrevemos uma cota para a multiplicidade da imagem de aplicações de reflexão e também apresentamos algumas aplicações dos resultados dos capítulos anteriores. Na primeira parte, apresentamos um limite superior (e também inferior) para a multiplicidade da imagem de uma aplicação de reflexão (em geral, não necessariamente uma aplicação de gráfico refletido) genericamente 1-a-1 de $(\mathbb{C}^n, 0)$ em $(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ (veja Teorema 4.2). Na segunda parte, descrevemos uma equação para o espaço de pontos duplos $D(f)$ na fonte em termos da ação de G sobre h . Recentemente, a equação para $D(f)$ foi apresentada por Borges Zampiva, Peñafort Sanchis, Oréface Okamoto e Tomazella em um contexto mais geral (veja [3, Th. 5.2]). No caso de germes de aplicações de gráfico refletido, aplicaremos o Lema 3.1 para apresentar uma prova alternativa da equação apresentada em [3].

Na terceira parte, estendemos um resultado dado por Marar e Nuño-Ballesteros (veja [24, Th. 3.4]) sobre a não existência de germes de aplicações de reflexão finitamente determinados quasihomogêneos (com pesos distintos), para alguns grupos de reflexão (veja Teorema 4.6). Na quarta parte, estudamos a existência de aplicações $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ finitamente determinadas de coposto 1, com $n \geq 3$. Finalmente, na última parte discutimos sobre a topologia de um par de componentes de identificação e construímos um exemplo de aplicação que não é \mathcal{A} -equivalente a uma aplicação de reflexão. Descrevemos também boa parte desses resultados em [12].

4.1 Multiplicidade

Iniciaremos essa subseção lembrando a noção de multiplicidade, e para maiores detalhes deixamos como sugestão o livro de Chirka [6]. Assim, considere um germe de

função analítica $F : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ reduzido na origem com $F \neq 0$. Seja $(\mathbf{V}(F), 0)$ o germe do conjunto dos zeros de F na origem. Escreva

$$F = F_m + F_{m+1} + \cdots + F_k + \cdots$$

onde cada F_k é um polinômio homogêneo de grau k e $F_m \neq 0$. O inteiro m é chamado de multiplicidade de $\mathbf{V}(F)$ em 0 e é denotado por $m(\mathbf{V}(F), 0)$. Claramente a multiplicidade de $m(\mathbf{V}(F), 0)$ é maior ou igual a 1. Uma propriedade importante da multiplicidade é que $m(\mathbf{V}(F), 0) = 1$ se e somente se $(\mathbf{V}(F), 0)$ é não singular.

Uma vez que temos a noção de multiplicidade em mãos, considere um germe de aplicação de reflexão $f : (\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$. Se $f = (\mathbf{w}, h)$ é um germe de aplicação de gráfico refletido singular genericamente 1-a-1, então pelo Teorema 3.6 temos que

$$F(\mathbf{X}, Z) = Z^d - Q_{d-1}Z^{d-1} + Q_{d-2}Z^{d-2} + \cdots + (-1)^{d-1}Q_1Z + (-1)^dQ_0 \quad (4.1)$$

é uma equação para a imagem de f , i.e, $f(\mathbb{C}^n) = \mathbf{V}(F)$. Se f é genericamente 1-a-1, temos que F é reduzida (veja [29, Prop. 3.1]). Consequentemente, obtemos que

$$2 \leq m(f(\mathbb{C}^n), 0) \leq d = |G|. \quad (4.2)$$

Além disso, se f é um germe de aplicação de reflexão (não necessariamente um germe de aplicação de gráfico refletido), não está claro quão grande pode ser a multiplicidade da imagem. Apresentaremos no Teorema 4.2 um limite superior (e também um limite inferior) que generaliza o dado em (4.2). Primeiro, vamos apresentar um lema auxiliar.

Relembrando a notação, se $f : (\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$, $f = w \circ \rho$ é uma aplicação de reflexão, então $\rho : (\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ denota um mergulho e $w = (w_1, \dots, w_{n+1})$ denota a aplicação de órbita do grupo de reflexão G de ordem d . A imagem de ρ é denotada por $(\mathcal{Y}, 0) = (\rho(\mathbb{C}^n), 0)$, a imagem de f (e também w) é denotada por $(\mathcal{X}, 0) = (w(\mathcal{Y}), 0) = (f(\mathbb{C}^n), 0)$. Denotamos o grau de uma aplicação g por $\deg(g)$.

Observação 4.1. Sejam $(X, 0)$ e $(Y, 0)$ germes de conjuntos analíticos irredutíveis. Seja $f : (X, 0) \rightarrow (Y, 0)$ um germe de aplicação analítica finita e sobrejetiva. Denotamos o grau de uma aplicação f por $\deg(f)$. Em termos gerais, o grau de f é o número de pré-imagens de um valor genérico na imagem de f . A definição precisa é dada, por exemplo, em [28, Def. D.2]. Um fato importante sobre o conceito de grau de uma aplicação é sua propriedade multiplicativa. Suponha que $g : (Y, 0) \rightarrow (W, 0)$ seja um germe de aplicação analítica finita e sobrejetiva, onde $(W, 0)$ é um conjunto analítico irredutível, então, $\deg(g \circ f) = \deg(g) \cdot \deg(f)$.

Suponha que $(X, 0)$ seja de dimensão n e $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$. Sejam $l_1, l_2, \dots, l_n :$

$(\mathbb{C}^{n+1}, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ formas lineares genéricas (reduzidas). Seja $\pi : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$, $\pi = (l_1, \dots, l_n)$, a restrição a X da projeção linear (genérica) π de \mathbb{C}^{n+1} em \mathbb{C}^n . Aqui, “*projeção linear genérica*” significa que $\text{Ker}(\pi) := \pi^{-1}(0)$ é uma reta genérica em \mathbb{C}^{n+1} tal que $\text{Ker}(\pi) \cap X = 0$.

Para um x genérico suficientemente próximo de 0, $\pi^{-1}(x)$ é um subespaço paralelo a $\text{Ker}(\pi)$ que intersecta X em um número finito de pontos; esse número é precisamente $m(X, 0)$ (veja, por exemplo, [28, Sec. D.3]). Em outras palavras, a multiplicidade pode ser vista como o número de interseção local em 0 de X com uma reta genérica em \mathbb{C}^{n+1} . Notamos que esse número de interseção local é independente da escolha da reta genérica (veja [28, Sec. D.3]).

Lema 4.1. Considere um germe de aplicação de reflexão $f : (\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$, $f = w \circ \rho$. Como na Observação 4.1, seja $\pi = (l_1, \dots, l_n)$ uma projeção linear genérica de $(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ para $(\mathbb{C}^n, 0)$. Considere a imagem de f com a estrutura de Fitting, isto é, $(f(\mathbb{C}^n), 0) = (\mathbf{V}(\mathcal{F}_0(f_*\mathcal{O}_n)), 0)$ e $L : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ um função analítica (não singular) tal que $(\rho(\mathbb{C}^n), 0) = (\mathbf{V}(L), 0)$. Se f é genericamente 1-a-1 então

$$m(f(\mathbb{C}^n), 0) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{n+1}}{\langle L, l_1 \circ w, \dots, l_n \circ w \rangle}.$$

Demonstração. Seja $\pi : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ uma projeção linear genérica, $\pi(\mathbf{x}, x_{n+1}) = (l_1(\mathbf{x}, x_{n+1}), \dots, l_n(\mathbf{x}, x_{n+1}))$. Segue da Observação 4.1 que

$$\deg(\pi \circ w|_{\mathcal{Y}}) = \deg(w|_{\mathcal{Y}}) \cdot \deg(\pi|_{\mathcal{X}}) \quad \text{e} \quad m(f(\mathbb{C}^n), 0) = \deg(\pi|_{\mathcal{X}}).$$

Além disso,

$$1 = \deg(f) = \deg(\rho \circ w|_{\mathcal{Y}}) = \deg(\rho) \cdot \deg(w|_{\mathcal{Y}}) = \deg(w|_{\mathcal{Y}}).$$

Consequentemente, $\deg(\pi \circ w|_{\mathcal{Y}}) = \deg(\pi|_{\mathcal{X}})$. Portanto, $m(f(\mathbb{C}^n)_{red}) = \deg(\pi \circ w|_{\mathcal{Y}})$. Finalmente, de [28] temos que

$$\deg(\pi \circ w|_{\mathcal{Y}}) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{\mathcal{Y}, 0}}{\langle l_1(w), \dots, l_n(w) \rangle} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{n+1}}{\langle L, l_1 \circ w, \dots, l_n \circ w \rangle}. \quad (4.3)$$

o que conclui a prova. ■

Sejam $(\mathcal{Y}_1, 0), \dots, (\mathcal{Y}_{n+1}, 0)$ germes de hipersuperfícies em $(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$. Sejam L_1, \dots, L_{n+1} germes de funções analíticas de $(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ para $(\mathbb{C}, 0)$ tais que $(\mathcal{Y}_i, 0) = (\mathbf{V}(L_i), 0)$. Denotamos a multiplicidade de interseção de $(\mathcal{Y}_1, 0), \dots, (\mathcal{Y}_{n+1}, 0)$ em 0 por $i(\mathcal{Y}_1, \dots, \mathcal{Y}_{n+1})$. Se a interseção $(\mathcal{Y}_1, 0) \cap \dots \cap (\mathcal{Y}_{n+1}, 0)$ for apenas a origem, então a multiplicidade de interseção é um número finito e pode ser calculada por (veja [10])

$$i(\mathcal{Y}_1, \dots, \mathcal{Y}_{n+1}) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{n+1}}{\langle L_1, L_2, \dots, L_{n+1} \rangle}$$

Observação 4.2. Observamos que a multiplicidade de interseção de n hipersuperfícies é maior ou igual ao produto de suas multiplicidades, ou seja,

$$i(\mathcal{Y}_1, \dots, \mathcal{Y}_{n+1}) \geq m(\mathcal{Y}_1, 0) \cdot m(\mathcal{Y}_2, 0) \cdots m(\mathcal{Y}_{n+1}, 0) \quad (4.4)$$

com igualdade se e somente se a interseção $(\mathcal{Y}_1, 0) \cap \dots \cap (\mathcal{Y}_{n+1}, 0)$ for transversal, ou seja, a interseção dos cones tangentes de $(\mathcal{Y}_j, 0)$ também for apenas a origem. Veja [10, Ch. 7] para detalhes sobre a multiplicidade de interseção de hipersuperfícies.

Teorema 4.2. *Seja $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$, $f = w \circ \rho$, um germe de aplicação de reflexão genericamente 1-a-1, G um grupo de reflexão agindo em \mathbb{C}^{n+1} . Sejam $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_{n+1}$ os graus de G . Então,*

$$d_1 d_2 \cdot \dots \cdot d_n \leq m(f(\mathbb{C}^n), 0) \leq d_2 d_3 \cdot \dots \cdot d_{n+1} \leq |G|. \quad (4.5)$$

Demonstração. Denote por $(\mathbf{X}) = (X_1, \dots, X_{n+1})$ as coordenadas de \mathbb{C}^{n+1} (na meta de f).

Seja $L : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ uma função analítica não singular (reduzida) tal que $(\rho(\mathbb{C}^n), 0) = (\mathbf{V}(L), 0)$. Temos que $\rho : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ e $w : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$, com $w = (w_1, \dots, w_{n+1})$. Para evitar confusão com a notação, sejam $(\mathbf{x}) = (x_1, \dots, x_n)$ as coordenadas de \mathbb{C}^n (na fonte de ρ), $(\mathbf{y}) = (y_1, \dots, y_{n+1})$ as coordenadas de \mathbb{C}^{n+1} (na fonte de w , equivalentemente na meta de ρ). Seja $\pi : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ uma projeção linear genérica,

$$\pi(\mathbf{X}) = (l_1(\mathbf{X}), \dots, l_n(\mathbf{X})),$$

no sentido de Observação 4.1, onde para $i = 1, \dots, n$, $l_i(\mathbf{X}) := b_{i,1}X_1 + b_{i,2}X_2 + \dots + b_{i,n+1}X_{n+1}$, $b_{i,j} \in \mathbb{C}$, e

$$\text{Ker}(\pi) \cap f(\mathbb{C}^n) = \{0\}.$$

Assim, $l_i \circ w = \sum_{j=1}^{n+1} b_{i,j} w_j$. Pela genericidade de π , podemos assumir que todas as $b_{i,j}$ são constantes complexas não nulas. Pelo Lema 4.1, temos que

$$m(f(\mathbb{C}^n), 0) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{n+1}}{\langle L, \sum_{j=1}^{n+1} b_{1,j} w_j, \sum_{j=1}^{n+1} b_{2,j} w_j, \dots, \sum_{j=1}^{n+1} b_{n,j} w_j \rangle}. \quad (4.6)$$

Após equivalências no anel quociente em (4.6) e pela genericidade de π , podemos

encontrar constantes complexas não nulas $\widetilde{b_{i,j}}$ tais que

$$m(f(\mathbb{C}^n), 0) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{n+1}}{\langle L, \sum_{j=1}^{n+1} \widetilde{b_{1,j}} w_j, \sum_{j=2}^{n+1} \widetilde{b_{2,j}} w_j, \sum_{j=3}^{n+1} \widetilde{b_{3,j}} w_j, \dots, \sum_{j=n}^{n+1} \widetilde{b_{n,j}} w_j \rangle}. \quad (4.7)$$

Observe que o lado direito de (4.7) pode ser visto como uma multiplicidade de interseção de $n+1$ hipersuperfícies em \mathbb{C}^{n+1} . Usando a notação $\mathcal{Y} = V(L)$, obtemos que

$$m(f(\mathbb{C}^n), 0) = i \left(\mathcal{Y}, \mathbf{V} \left(\sum_{j=1}^{n+1} \widetilde{b_{1,j}} w_j \right), \mathbf{V} \left(\sum_{j=2}^{n+1} \widetilde{b_{2,j}} w_j \right), \dots, \mathbf{V} \left(\sum_{j=n}^{n+1} \widetilde{b_{n,j}} w_j \right) \right). \quad (4.8)$$

Note que $d_i = m(\mathbf{V}(w_i), 0)$ por definição e $m(\mathcal{Y}, 0) = 1$. Por (4.4) na Observação 4.2 e (4.8) concluímos que

$$m(f(\mathbb{C}^n), 0) \geq d_1 d_2 \cdot \dots \cdot d_n.$$

Agora, precisamos obter um limite superior para a multiplicidade da imagem de f . Como w é finito, então $\mathcal{O}_{n+1}/\langle w_1(\mathbf{y}), \dots, w_{n+1}(\mathbf{y}) \rangle < \infty$. Portanto, se y_i é um fator de w_j , então y_i não é um fator de w_s para todo $s \neq j$. Após uma mudança de coordenadas em $(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$, podemos assumir sem perda de generalidade que y_{n+1} não divide w_2, \dots, w_{n+1} . Como ρ é um mergulho, podemos escrever ρ como

$$\rho(\mathbf{x}) = (\hat{l}_1(\mathbf{x}) + g_1(\mathbf{x}), \hat{l}_2(\mathbf{x}) + g_2(\mathbf{x}), \dots, \hat{l}_{n+1}(\mathbf{x}) + g_{n+1}(\mathbf{x})),$$

onde $g_i \in \mathbf{m}^2$, para todo $i = 1, \dots, n+1$, \mathbf{m} denota o ideal maximal de $\mathbb{C}\{\mathbf{x}\}$ e $\hat{l}_i(\mathbf{x}) = a_{i,1}x_1 + \dots + a_{i,n}x_n$. Note que os $n+1$ vetores $v_j := (a_{1,j}, \dots, a_{n+1,j})$ em \mathbb{C}^{n+1} (com $j = 1, \dots, n+1$) gera o espaço tangente de $(\mathcal{Y}, 0)$ (na verdade, apenas n vetores são necessários). Até uma mudança de coordenadas em \mathbb{C}^{n+1} , podemos assumir que

$$\rho(\mathbf{x}) = (x_1 + g_1(\mathbf{x}), x_2 + g_2(\mathbf{x}), \dots, x_n + g_n(\mathbf{x}), \hat{l}_{n+1}(\mathbf{x}) + g_{n+1}(\mathbf{x})), \quad (4.9)$$

e portanto,

$$f(\mathbf{x}) = (w_1(x_1 + g_1(\mathbf{x}), \dots, \hat{l}_{n+1}(\mathbf{x}) + g_{n+1}(\mathbf{x})), \dots, w_{n+1}(x_1 + g_1(\mathbf{x}), \dots, \hat{l}_{n+1}(\mathbf{x}) + g_{n+1}(\mathbf{x}))). \quad (4.10)$$

Observe que em (4.9) y_{n+1} (a última coordenada de \mathbb{C}^{n+1}) não é afetada pela última mudança de coordenada. Portanto, ainda podemos assumir que y_{n+1} não divide w_2, \dots, w_{n+1} . Seja $\pi_1 : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ a projeção linear definida por

$$\pi_1(X_1, X_2, \dots, X_{n+1}) = (X_2, \dots, X_{n+1}).$$

Afirmção: O germe de aplicação $(\pi_1 \circ f) : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ é finito.

Por (4.10) e [28, Th. D.5], é suficiente mostrar que

$$\frac{\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}}{\langle w_2(x_1 + g_1(\mathbf{x}), \dots, \hat{l}_{n+1}(\mathbf{x}) + g_{n+1}(\mathbf{x})), \dots, w_{n+1}(x_1 + g_1(\mathbf{x}), \dots, \hat{l}_{n+1}(\mathbf{x}) + g_{n+1}(\mathbf{x})) \rangle} \quad (4.11)$$

é um espaço vetorial de dimensão finita sobre \mathbb{C} .

Note que o anel quociente em (4.11) é isomorfo ao seguinte anel quociente.

$$\frac{\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n, u\}}{\langle \hat{l}_{n+1}(\mathbf{x}) + g_{n+1}(\mathbf{x}) - u, w_2(x_1, \dots, x_n, u) + \dots, \dots, w_{n+1}(x_1, \dots, x_n, u) + \dots \rangle} \quad (4.12)$$

onde \dots que aparece em $w_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u) + \dots$ consiste em termos de grau maior que o grau de w_i . Em outras palavras, $w_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u) + \dots$ é apenas a expansão de $w_i(x_1 + g_1(\mathbf{x}), \dots, x_n + g_n(\mathbf{x}), u)$, e u é uma nova variável.

Como o anel $\mathcal{O}_{n+1}/\langle w_2(\mathbf{y}), \dots, w_{n+1}(\mathbf{y}) \rangle$ é puro (trata-se de um anel de Cohen-Macaulay), obtemos que os divisores de zero de

$$R := \frac{\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n, u\}}{\langle w_2(x_1, \dots, x_n, u), \dots, w_{n+1}(x_1, \dots, x_n, u) \rangle}. \quad (4.13)$$

são precisamente os elementos na união de primos minimal de R .

Como y_{n+1} não divide $w_i(y_1, \dots, y_n, y_{n+1})$ para todo $i \neq 1$, então u não divide $w_i(x_1, \dots, x_n, u)$ para todo $i \neq 1$. Assim, u não pode estar contido em nenhum primo minimal de R . Segue que u não é um divisor de zero de R . Por uma versão adequada do Teorema do Ideal Principal de Krull, obtemos que

$$\frac{R}{\langle u \rangle} \simeq \frac{\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n, u\}}{\langle u, w_2(x_1, \dots, x_n, u), \dots, w_{n+1}(x_1, \dots, x_n, u) \rangle}. \quad (4.14)$$

tem dimensão zero, portanto é um espaço vetorial de dimensão finita sobre \mathbb{C} . Isso implica que a interseção em (4.12) (e também em (4.11)) é transversal. Pela Observação 4.2, concluímos que a dimensão, como espaço vetorial sobre \mathbb{C} , do anel quociente em (4.11) é precisamente $d_2 \cdot d_3 \cdots d_{n+1}$, o que prova a afirmação.

Para concluir a demonstração, no algoritmo de Mond-Pellikaan (ver Seção 2.2), considere a projeção π_1 acima. Pelo enunciado, temos que $\pi_1 \circ f$ é finito. Assim, a matriz de apresentação λ de $f_*(\mathcal{O}_n)$ em relação a π_1 tem a seguinte forma:

$$\lambda[X_1, \dots, X_{n+1}] = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1} - X_1 & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} & \cdots & \alpha_{1,d'} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} - X_1 & \alpha_{2,3} & \cdots & \alpha_{2,d'} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} - X_1 & \cdots & \alpha_{3,d'} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \alpha_{d',1} & \alpha_{d',2} & \alpha_{d',3} & \cdots & \alpha_{d',d'} - X_1 \end{bmatrix}.$$

onde $\alpha_{i,j} \in \mathbb{C}\{X_2, \dots, X_{n+1}\}$ e $d' = d_2 \cdot d_3 \cdots d_{n+1}$.

Como consequência, obtemos que o termo $X_1^{d'}$ aparece na equação definidora de $f(\mathbb{C}^n)$ dada pelo determinante de λ . Portanto, $m(f(\mathbb{C}^n), 0) \leq d_2 \cdots d_{n+1}$. A última desigualdade em (4.5) decorre do fato de que $d_1 \cdot d_2 \cdots d_{n+1} = |G|$, uma vez que G é um grupo de reflexão ([42], veja também [20, Th. 4.19]). ■

Observação 4.3. Seja $f : (\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ um germe de aplicação de gráfico refletido com respeito ao grupo de reflexão G agindo em $\mathbb{C}^{n+1} = \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$. Como G age trivialmente no segundo fator, a aplicação de órbita $w : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ é $w(\mathbf{y}) = (w_1(\mathbf{y}), \dots, w_n(\mathbf{y}), y_{n+1})$. Em outras palavras, se d_1, \dots, d_{n+1} são os graus de G , então $d_{n+1} = 1$. Após uma reordenação dos graus restantes de G , podemos assumir que $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$. Do Teorema 4.2 obtemos que

$$d_1 d_2 \cdots d_{n-1} \leq m(f(\mathbb{C}^n), 0) \leq d_1 \cdots d_n = d = |G|.$$

Ao trabalhar com uma aplicação de gráfico refletido, para evitar notações desnecessárias, podemos pensar em G agindo de forma não trivial apenas em \mathbb{C}^n (o primeiro fator de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$, e não em todos os \mathbb{C}^{n+1}). Nesse caso, podemos considerar apenas d_1, \dots, d_n como “graus não triviais” de G e ignorar o grau $d_{n+1} = 1$. Sempre que não houver perigo de confundir a notação, usaremos essa simplificação.

A seguir, veremos exemplos de aplicações de reflexão nas quais a multiplicidade atinge sua cota inferior e superior.

Exemplo 4.1. Considere $G = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2$ e o germe de aplicação f definido por

$$f(x, y) = (x^3, y^5, (x - 2y)^2(x - 3y)^2(x - 5y)^2(x - 7y)^2)$$

A equação da imagem de f é dada pelos zeros de $F(X, Y, Z)$, onde

$$F(X, Y, Z) = -Z^{15} - 855510XYZ^{14} - 305608201815X^2Y^2Z^{13} + 5X^8Z^{12} + \dots$$

Onde, “+...” refere-se aos termos de maior grau que a multiplicidade. Como a multiplicidade da imagem de f é dada pelo menor expoente em $F(X, Y, Z)$, obtemos

$$m(f(\mathbb{C}^2), 0) = 15,$$

que coincide exatamente com o valor da cota superior.

Vejamos, a seguir, um exemplo no qual a cota inferior também é atingida.

Exemplo 4.2. Considere o germe de aplicação f definido por

$$f(x, y) = (x^3, y^5, (x - 2y)^2).$$

Note que f é uma aplicação de reflexão com grupo $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2$. A equação da imagem de f é dada pelos zeros de $F(X, Y, Z)$, onde

$$\begin{aligned} F(X, Y, Z) = & -Z^{15} + 5X^2Z^{12} - 6720XYZ^{11} + 3072Y^2Z^{10} - 10XZ^9 - \\ & 103680X^3YZ^8 - 7219200X^2Y^2Z^7 + 10X^6Z^6 - 23920640XY^3Z^6 - 124992X^5YZ^5 - \\ & 3145728Y^4Z^5 + 16481280X^4Y^2Z^4 - 5X^8Z^3 - 269025280X^3Y^3Z^3 - 13440X^7YZ^2 + \\ & 1226833920X^2Y^4Z^2 - 168960X^6Y^2Z - 2013265920XY^5Z + X^{10} - 65536X^5Y^3 + \\ & 1073741824Y^6. \end{aligned}$$

Assim, $m(f(\mathbb{C}^2), 0) = 6$, que é exatamente o valor da cota inferior.

4.2 Espaço de pontos duplos

Quando estudamos uma aplicação finita f de $(\mathbb{C}^n, 0)$ em $(\mathbb{C}^p, 0)$ com $n \leq p$, os espaços de pontos múltiplos de f desempenham um papel importante no estudo de sua geometria. Quando $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ é uma aplicação de gráfico refletido, uma primeira questão natural é se podemos descrever uma equação para o espaço de pontos duplos $D(f)$ na fonte em termos da ação de G sobre h .

Recentemente, Borges Zampiva, Peñafort Sanchis, Oréfce Okamoto e Tomazella apresentaram uma resposta a esta questão em um contexto mais geral. Eles apresentam uma equação para $D(f)$ que depende apenas da ação de G sobre h (veja [3, Th. 5.2]). No caso de germes de aplicações de gráfico refletido, como nossa segunda aplicação, aplicaremos o Lema 3.1 para apresentar uma prova alternativa do resultado apresentado em [3].

Lembramos que \mathcal{R} denota o conjunto de todas as reflexões de G e Δ_{g_k} denota o operador Demazure (veja a Seção 2.1).

Proposição 4.3. ([3]) *Seja $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$, $f(\mathbf{x}) = (w(\mathbf{x}), h(\mathbf{x}))$ um germe de aplicação de gráfico refletido, então*

$$D(f) = \mathbf{V} \left(\left(\prod_{g_k \in \mathcal{R}} \Delta_{g_k}(h) \right) \left(\prod_{Id \neq g_k \notin \mathcal{R}} (h - g_{k\bullet} h) \right) \right). \quad (4.15)$$

Demonstração. Denote por $g_1 = Id, g_2, \dots, g_d$ os elementos de G . Do Teorema 3.6 obte-

mos que uma equação para a imagem de f é dada por

$$F(\mathbf{X}, Z) = Z^d - Q_{d-1}Z^{d-1} + Q_{d-2}Z^{d-2} + \dots + (-1)^{d-1}Q_1Z + (-1)^dQ_0. \quad (4.16)$$

Note que substituir \mathbf{X} por \mathbf{w} em (4.16) e então derivar a expressão resultante com relação à variável Z é equivalente a derivar (4.16) com relação à variável Z e então substituir \mathbf{X} por \mathbf{w} , ou seja, a ordem de execução dessas operações não importa. Pelo Lema 3.1 temos que

$$F(\mathbf{w}, Z) = \prod_{k=1}^d (Z - g_{k\bullet}(h(\mathbf{x}))).$$

Portanto,

$$\frac{\partial F(\mathbf{w}, Z)}{\partial Z} = \frac{\partial (Z - g_{1\bullet}h(\mathbf{x}))}{\partial Z} \left[\prod_{k=2}^d (Z - g_{k\bullet}(h(\mathbf{x}))) \right] + (Z - g_{1\bullet}h(\mathbf{x})) \frac{\partial [\prod_{k=2}^d (Z - g_{k\bullet}(h(\mathbf{x})))]}{\partial Z},$$

Note que $g_{1\bullet}h(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x})$, substituindo Z por h obtemos que

$$\frac{\partial F(\mathbf{w}, h)}{\partial Z} = (1 - h(\mathbf{x})) \left[\prod_{k=2}^d (h(\mathbf{x}) - g_{k\bullet}(h(\mathbf{x}))) \right]. \quad (4.17)$$

Por [36] (veja também [2, Prop. 2.5]) obtemos que

$$(D(f), 0) = \left(\mathbf{V} \left(\frac{\prod_{k=2}^d (h(\mathbf{x}) - g_{k\bullet}h(\mathbf{x}))}{\det(Jac(\mathbf{w}))} \right), 0 \right).$$

Sejam H_1, H_2, \dots, H_l os hiperplanos refletores de G , $Fixg$, onde g percorre as reflexões de G . Para cada i , seja e_i a ordem do grupo cíclico G_{H_i} , fixando H_i pontualmente e sejam $L_{H_1}, L_{H_2}, \dots, L_{H_l}$ formas lineares tais que $H_i = Ker L_{H_i}$. Temos que

$$\frac{\prod_{g_k \in \mathcal{R}} (h(\mathbf{x}) - g_{k\bullet}h(\mathbf{x}))}{\det(Jac(\mathbf{w}))} = \frac{\prod_{g_k \in \mathcal{R}} (h(\mathbf{x}) - g_{k\bullet}h(\mathbf{x}))}{c \prod_{i=1}^l L_{H_i}^{e_i-1}} = \prod_{g_k \in \mathcal{R}} \Delta_{g_k}(h).$$

onde \mathcal{R} denota o conjunto de todas as reflexões de G (ver por exemplo [20, Lema 9.7]).

Portanto,

$$D(f) = \mathbf{V} \left(\left(\prod_{g_k \in \mathcal{R}} \Delta_{g_k}(h) \right) \left(\prod_{Id \neq g_k \notin \mathcal{R}} (h - g_{k\bullet}h) \right) \right),$$

o que conclui a prova. ■

Exemplo 4.3. Considere $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ e $f(x, y) = (x^2, y^2, h(x, y))$, onde

$$h(x, y) = xp_1(x^2, y^2) + yp_2(x^2, y^2) + xyp_3(x^2, y^2).$$

Note que os elementos de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ podem ser representado em $GL_2(\mathbb{C})$ pelas seguintes

matrizes

$$Id = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad g_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad g_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad g_4 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, obtemos que

$$\begin{aligned} h(x, y) - g_{2\bullet} h(x, y) &= 2(xp_1 + yp_2). \\ h(x, y) - g_{3\bullet} h(x, y) &= 2y(p_2 + xp_3). \\ h(x, y) - g_{4\bullet} h(x, y) &= 2x(p_1 + yp_3). \end{aligned}$$

Note que $\det(Jac(x^2, y^2)) = 4xy$. Assim, da Proposição 4.3, obtemos que

$$D(f) = \mathbf{V}((yp_3 + p_1)(xp_3 + p_2)(xp_1 + yp_2)). \quad (4.18)$$

Observamos que a equação que aparece em (4.18) para $D(f)$ é exatamente a mesma apresentada em [24, Prop. 3.1].

Corolário 4.4. Com a notação usada na Proposição 4.3, seja $f = (\mathbf{w}, h)$ um germe de aplicação de gráfico refletido $(\mathbb{C}^n, 0)$ to $(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$. Suponha que h é regular, isto é,

$$h(\mathbf{x}) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + R(\mathbf{x}),$$

com $m(R(\mathbf{x}), 0) > 1$ ou $R = 0$. Seja H o hiperplano definido por $H := \mathbf{V}(\sum_{i=1}^n a_i x_i)$. Suponha que, para toda reflexão $g \in G$, H não seja o hiperplano de reflexão de g (equivalentemente $H \cap (V(Jac(w))) \neq H$ como conjunto). Então,

$$D(f) = \mathbf{V}\left(\prod_{g_k \notin \mathcal{R}, g_k \neq Id} (h(\mathbf{x}) - g_{k\bullet} h(\mathbf{x}))\right).$$

Demonstração. Pela Proposição 4.3 temos que

$$D(f) = \mathbf{V}\left(\left(\prod_{g_k \in \mathcal{R}} \Delta_{g_k}(h(\mathbf{x}))\right)\left(\prod_{g_k \notin \mathcal{R}, g_k \neq Id} (h(\mathbf{x}) - g_{k\bullet} h(\mathbf{x}))\right)\right). \quad (4.19)$$

Precisamos apenas mostrar que $\Delta_g(h(\mathbf{x}))$ é um elemento invertível no anel de séries analíticas $\mathbb{C}\{\mathbf{x}\}$ para todo $g \in \mathcal{R}$. Se $g \in \mathcal{R}$ e $Fix\ g$ é o seu hiperplano de reflexão, com $Fix\ g = Ker\ L_g$, então, pela definição do operador de Demazure e pelo Lema 2.3, obtemos que

$$\Delta_g(h(\mathbf{x})) = \frac{h(\mathbf{x}) - g_{\bullet} h(\mathbf{x})}{L_g} = Q(\mathbf{x}), \quad (4.20)$$

para algum $Q(\mathbf{x}) \in \mathbb{C}\{\mathbf{x}\}$.

A ação de G em $\mathbb{C}\{\mathbf{x}\}$ tem a propriedade de que se $P \in \mathbb{C}\{\mathbf{x}\}$ é homogêneo de grau d , então $g_{\bullet}P$ também é homogêneo de grau d (veja [20, Ch. 3, Sec. 2]). Além disso, recorde que $g_{\bullet}(P_1 + P_2) = g_{\bullet}(P_1) + g_{\bullet}(P_2)$ para todo $P_1, P_2 \in \mathbb{C}\{\mathbf{x}\}$. Pela hipótese, H não é um hiperplano de g . Portanto,

$$g_{\bullet}(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n) \neq a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n,$$

ou seja, a equação definidora de H não é invariante sob a ação de g . Desta forma, podemos escrever

$$h(\mathbf{x}) - g_{\bullet}h(\mathbf{x}) = b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n + Q'(\mathbf{x}),$$

onde $m(Q'(\mathbf{x}), 0) > 1$ ou $Q' = 0$. Além disso, $b_i \in \mathbb{C}$ para todo i , com pelo menos um b_i sendo diferente de zero.

Por (4.20), temos que L_g (que é uma forma linear) divide $h(\mathbf{x}) - g_{\bullet}h(\mathbf{x})$. Isso implica que $Q(0) \neq 0$ e, portanto, $Q(\mathbf{x})$ deve necessariamente ser um elemento invertível em $\mathbb{C}\{\mathbf{x}\}$. ■

Exemplo 4.4. Seja $f : (\mathbb{C}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ um germe de aplicação de gráfico refletido, dado por

$$f(x, y) = (x^2, y^2, x - 3y + y^3).$$

Usando a notação do Exemplo 4.3, pelo Corolário 4.4 obtemos que

$$D(f) = \mathbf{V}(h(x, y) - g_{2\bullet}h(x, y)) = \mathbf{V}(x - 3y + y^3).$$

Note que neste caso, como o coposto de f é 1, não precisamos considerar todos os elementos de G para calcular uma equação para $D(f)$, apenas aqueles que não são reflexões (excluindo, é claro, a identidade do grupo).

Considere D_{g_i} uma componente da $D(f)$. Se g_i não é reflexão, então

$$D_{g_i} = \mathbf{V}(h - g_{i\bullet}h).$$

Analogamente, se g_i é reflexão então

$$D_{g_i} = \mathbf{V}\left(\frac{h - g_{i\bullet}h}{L_{H_{g_i}}}\right).$$

No resultado a seguir, sugerido por Peñafort Sanchis bem como passos da demonstração, veremos que se $D_{g_i} \subset D(f)$, então $f(D_{g_i}) = f(D_{g_i^{-1}})$.

Proposição 4.5. Seja f uma aplicação de gráfico refletido de $(\mathbb{C}^n, 0)$ em $(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$, então

$$f(D_{g_i}) = f(D_{g_i^{-1}}).$$

Demonstração. Vamos separar a prova em dois casos. O primeiro em que g_i não é reflexão e o segundo em que g_i é reflexão.

Caso 1: g_i não é reflexão.

Seja g_i um elemento de G , se g_i não é reflexão temos $f(D_{g_i}) = f(\mathbf{V}(h - g_{i\bullet}h, Z - h))$. Observe que

$$\mathbf{V}(h - g_{i\bullet}h, Z - h) = g_{i\bullet}\mathbf{V}(h - g_i^{-1}\bullet h, Z - h).$$

Assim, $f(D_{g_i}) = f(g_{i\bullet}(D_{g_i^{-1}}))$.

Sendo f uma aplicação de reflexão segue que

$$w(D_{g_i}) = f(D_{g_i}) = f(g_{i\bullet}(D_{g_i^{-1}})) = w(g_{i\bullet}(D_{g_i^{-1}})).$$

Assim, para provarmos obtemos que $f(D_{g_i}) = f(D_{g_i^{-1}})$, basta provar que $f(g_{i\bullet}(D_{g_i^{-1}})) = f(D_{g_i^{-1}})$.

Do Teorema de Noether (veja Teorema 2.4) segue que

$$w^{-1}(w(g_{i\bullet}(D_{g_i^{-1}}))) = G_{g_{i\bullet}(D_{g_i^{-1}})} = \bigcup g_{j\bullet}(g_{i\bullet}(D_{g_i^{-1}})) = \bigcup g_{k\bullet}D_{g_i^{-1}} = G_{D_{g_i^{-1}}},$$

isto é as órbitas de G em $D_{g_i^{-1}}$ e em $g_{i\bullet}(D_{g_i^{-1}})$ coincidem. E, como w é sobrejetiva segue $w(g_{i\bullet}(D_{g_i^{-1}})) = w(D_{g_i^{-1}})$. Portanto,

$$f(D_{g_i}) = w(D_{g_i}) = w(g_{i\bullet}D_{g_i^{-1}}) = w(D_{g_i^{-1}}) = f(D_{g_i^{-1}}).$$

Caso 2: g_i é reflexão.

Note que

$$f(D_{g_i}) = \mathbf{V}\left(\frac{h - g_{i\bullet}h}{L_{H_{g_i}}}, Z - h\right) = g_{i\bullet}\mathbf{V}\left(\frac{h - g_i^{-1}\bullet h}{L_{H_{g_i^{-1}}}}, Z - h\right) = f(g_{i\bullet}(D_{g_i^{-1}})).$$

De fato, temos que $g_{i\bullet}(\text{Fix } g_i) = (\text{Fix } g_i)$ e, desde que $L_{H_{g_i}} = L_{H_{g_i^{-1}}}$, segue a igualdade acima. Procedendo de maneira análoga ao caso 1, segue do Teorema de Noether que

$$w^{-1}(w(g_{i\bullet}(D_{g_i^{-1}}))) = G_{g_{i\bullet}(D_{g_i^{-1}})} = G_{D_{g_i^{-1}}},$$

assim, $w(g_{i\bullet}(D_{g_i^{-1}})) = w(D_{g_i^{-1}})$. Portanto,

$$f(D_{g_i}) = w(D_{g_i}) = w(g_{i\bullet}D_{g_i^{-1}}) = w(D_{g_i^{-1}}) = f(D_{g_i^{-1}})$$

como queríamos. ■

Exemplo 4.5. Considere o grupo $G = \mathbb{Z}_4$. Observe que os elementos de \mathbb{Z}_4 podem ser representados em $GL_2(\mathbb{C})$ pelas seguintes matrizes

$$Id = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad g_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \zeta \end{bmatrix}, \quad g_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \zeta^2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad g_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \zeta^3 \end{bmatrix},$$

onde ζ é uma raiz 4-primitiva da unidade e g_2, g_3, g_4 são reflexões. Considere f uma aplicação de gráfico refletido de $(\mathbb{C}^2, 0)$ em $(\mathbb{C}^3, 0)$ dada por $f(x, y) = (x, y^4, h(x, y))$ onde

$$h = yp_1(x, y^4) + y^2p_2(x, y^4) + y^3p_3(x, y^4).$$

Por simplificação, utilizaremos que

$$I_{g_i} = \left\langle \frac{h - g_{i\bullet}h}{L_{H_{g_i}}}, Z - h \right\rangle.$$

Daí,

$$\begin{aligned} I_{g_2} &= \langle Z - yp_1 - y^2p_2 - y^3p_3, (1 - \zeta^3)p_1 + (1 - \zeta^2)yp_2 + (1 - \zeta)y^2p_3 \rangle. \\ I_{g_3} &= \langle Z - yp_1 - y^2p_2 - y^3p_3, (1 - \zeta^2)p_1 + (1 - \zeta^2)y^2p_3 \rangle. \\ I_{g_4} &= \langle Z - yp_1 - y^2p_2 - y^3p_3, (1 - \zeta)p_1 + (1 - \zeta^2)yp_2 + (1 - \zeta^3)y^2p_3 \rangle. \end{aligned}$$

Observe que $\bigcup_{k=1}^4 g_{k\bullet} \mathbf{V}(I_{g_i}) = \mathbf{V}(\bigcap_{k=1}^4 I_{g_i})$, calculando $\bigcap_{k=1}^4 I_{g_i}$, obtemos

$$\begin{aligned} \bigcap g_{i\bullet} I_{g_2} &= \langle p_1^2 + y^4p_3^2 + 2Zp_2, Z^2 + y^4p_2^2 - 2y^4p_1p_3 \rangle \\ \bigcap g_{i\bullet} I_{g_3} &= \langle p_1p_2 + Zp_3, p_1^2 - y^4p_3^2, Zp_1 + y^4p_2p_3, Z^2 - y^4p_2^2 \rangle. \\ \bigcap g_{i\bullet} I_{g_4} &= \langle p_1^2 + y^4p_3^2 + 2Zp_2, Z^2 + y^4p_2^2 - 2y^4p_1p_3 \rangle. \end{aligned}$$

Note que $g_2 = g_4^{-1}$ e que $\bigcap g_{i\bullet} I_{g_2} = \bigcap g_{i\bullet} I_{g_4}$. Assim,

$$\bigcup_{k=1}^4 g_{k\bullet} \mathbf{V}(I_{g_2}) = \mathbf{V}(\bigcap_{k=1}^4 I_{g_2}) = \mathbf{V}(\bigcap_{k=1}^4 I_{g_4}) = \bigcup_{k=1}^4 g_{k\bullet} \mathbf{V}(I_{g_4}).$$

Daí, $f(I_{g_2}) = f(I_{g_4})$, ou seja, a imagem pela f das componentes da $D(f)$ que são dadas pelas ações de g_2 e g_4 são iguais, isso segue da Proposição 4.5 visto que $g_2 = g_4^{-1}$. Por outro lado, como $g_3 = g_3^{-1}$, a imagem $f(I_{g_3})$ não é igual a nenhuma outra imagem de I_{g_i} com $i \neq 3$.

4.3 Germes de aplicações de reflexão quase homogêneos

Outra aplicação dos nossos resultados é sobre germes de aplicações quase homogêneos. Um polinômio $p(x_1, \dots, x_n)$ é *quase homogêneo* se existem inteiros positivos b_1, \dots, b_n , com $\text{mdc}(b_1, \dots, b_n) = 1$ e um inteiro d tal que $p(k^{b_1}x_1, \dots, k^{b_n}x_n) = k^d p(x_1, \dots, x_n)$. O número b_i é chamado de peso da variável x_i e d é chamado de grau pesado de p . Neste caso, dizemos que p é do tipo $(d; b_1, \dots, b_n)$. Esta definição se estende aos germes de aplicações polinomiais $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ apenas exigindo que cada função de coordenadas f_i seja quase homogênea do tipo $(d_i; b_1, \dots, b_n)$, para pesos fixos b_1, \dots, b_n . Em particular, para um germe de aplicação quase homogêneo $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ dizemos que ele é quase homogêneo do tipo $(d_1, d_2, d_3; b_1, b_2)$.

Marar e Nuño-Ballesteros estudaram em [24] o caso onde $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ é um germe de aplicação de coposto 2 quase homogêneo e finitamente determinado. Eles mencionam que a mera existência desse tipo de aplicação é uma surpresa. De fato, os três adjetivos criam restrições tremendas e encontrar exemplos é uma tarefa difícil. Eles mostraram que se $f = (x^2, y^2, h(x, y))$ é finitamente determinado e quase homogêneo, então f é de fato homogêneo, ou seja, $b_1 = b_2 = 1$ (veja [24, Th. 3.4]). Em particular, se $b_1 = b_2 = 1$, de fato não há germe de aplicação de dobra dupla quase homogêneo finitamente determinado com pesos distintos. Por outro lado, existem exemplos na literatura de germes de aplicação de gráfico refletido homogêneos finitamente determinados (onde $b_1 = b_2 = 1$), veja por exemplo [24, Exemplo 3.6] e [34, Exemplo 16]. Assim, podemos considerar a seguinte questão:

Questão: *Existe algum germe de aplicação de gráfico refletido $f = (w_1, w_2, h)$ de $(\mathbb{C}^2, 0)$ para $(\mathbb{C}^3, 0)$ de coposto 2 tal que f seja finitamente determinado, quase homogêneo e com pesos distintos?*

Como as funções coordenadas w_1 e w_2 para a aplicação de órbita $w = (w_1, w_2)$ de G são sempre homogêneas (veja [20, Ch. 9]), nos restringiremos a estudar esta questão apenas para o grupo $\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s$, onde a aplicação de órbita $w = (x^r, y^s)$ de $\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s$ pode ser considerada também como uma aplicação quase homogênea. Se $f(x, y) = (x^r, y^s, h(x, y))$, então a hipótese de coposto 2 implica que $r, s \geq 2$ e $h \in \mathfrak{m}^2$, onde \mathfrak{m} denota o ideal maximal de \mathcal{O}_2 . O lema a seguir pode ser visto como uma extensão de [24, Th. 3.4] para o grupo de reflexão $\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s$. Consideraremos $\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s$ como um subgrupo de $GL_2(\mathbb{C})$ gerado pelas reflexões

$$R' = \begin{bmatrix} \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \xi \end{bmatrix}.$$

onde θ (respectivamente ξ) é uma raiz \mathbf{r} -primitiva da unidade (respectivamente, \mathbf{s} -primitiva).

Denote os elementos de $\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s$ por $g_{i,j}$ onde $i \in \{1, \dots, r\}$ e $j \in \{1, \dots, s\}$, com $g_{1,1} = Id$, a matriz identidade. Note que após uma eventual reordenação dos índices i, j temos que $g_{i,j_\bullet}(x, y) = (\theta^i x, \xi^j y)$.

Teorema 4.6. *Seja $f : (\mathbb{C}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ um germe de aplicação de gráfico refletido dado por $f(x, y) = (x^r, y^s, h(x, y))$ com $r, s \geq 2$. Se f é quase homogêneo e finitamente determinado, então f é homogêneo.*

Demonstração. O caso em que $r, s = 2$ foi considerado em [24, Th. 3.4]. Portanto, podemos supor que $(r, s) \neq (2, 2)$. Denote o peso de x por a e o peso de y por b . Por hipótese, temos que f é quase homogêneo, portanto, podemos escrever h na forma

$$h(x, y) = x^\alpha y^\beta (c_k (x^b)^k + c_{k-1} (x^b)^{k-1} y^a + \dots + c_1 x^b (y^a)^{k-1} + c_0 (y^a)^k) \quad (4.21)$$

para alguns inteiros não negativos α, β, k , onde $c_0, \dots, c_k \in \mathbb{C}$ e $c_0, c_k \neq 0$. Mostraremos que $\alpha, \beta = 0$.

Suponha que $\beta \neq 0$, então a restrição de f a $\mathbf{V}(y)$ é r -a-1 (veja [38, Lema 6.1]). Como f é finitamente determinado, segue-se que $1 \leq r \leq 2$. Se supusermos que $\alpha \neq 0$, obtemos com um argumento semelhante que $1 \leq s \leq 2$. Portanto, se $r, s \geq 3$ então $\alpha = \beta = 0$. Vamos considerar os seguintes casos restantes:

Caso a.1: $r = 2$ e $s \geq 3$.

Como $s \geq 3$, temos que $\alpha = 0$. Suponha que $\beta \geq 1$, então pela Proposição 4.3 e pela Equação (4.21) obtemos que

$$D(f) = \mathbf{V}(y^{\beta(2s-1)-(s-1)} \lambda_1(x, y))$$

para algum $\lambda_1(x, y)$ em \mathcal{O}_2 . Agora, note que $3 \leq \beta s + \beta(s-1) - (s-1) = \beta(2s-1) - (s-1)$. Portanto, $D(f)$ não é reduzida, assim segue por [25, Cor. 3.5] que f não é finitamente determinada, uma contradição. Consequentemente, obtemos que $\beta = 0$.

Caso a.2: $s = 2$ e $r \geq 3$. A prova deste caso é semelhante à dada para mostrar o Caso a.1.

Finalmente, mostraremos que os pesos de f são iguais, ou seja, $a = b = 1$. Pela Proposição 4.3 e 4.21 novamente obtemos

$$D(f) = \mathbf{V}(x^{b(r-1)-(r-1)}y^{a(s-1)-(s-1)}\lambda_2(x, y))$$

para algum $\lambda_2(x, y)$ em \mathcal{O}_2 . Portanto, como f é finitamente determinado, segue que

$$0 \leq (r-1)(b-1) \leq 1 \quad e \quad 0 \leq (s-1)(a-1) \leq 1. \quad (4.22)$$

De (4.22), obtemos que se $r \geq 3$ então $b = 1$. Por outro lado, se $s \geq 3$ então obtemos que $a = 1$. Portanto, se $r, s \geq 3$ então $a = b = 1$. Vamos considerar os seguintes casos restantes:

Caso b.1: $r = 2$ e $s \geq 3$.

Note que neste caso $f = (f_1, f_2, f_3) = (x^2, y^s, c_k(x^b)^k + \dots + c_0(y^a)^k)$ com $c_0, c_k \neq 0$. De (4.22) obtemos que $a = 1$ e $1 \leq b \leq 2$. Suponha que $b = 2$, então o grau ponderado de f_1, f_2 e f_3 são $2, 2s$ e $2k$. Segue de [27] que o número $C(f)$ de guarda-chuvas de Whitney de f é dado por

$$C(f) = \frac{1}{2}((2s-1)(2k-2) + (2s-1)). \quad (4.23)$$

Note que $C(f)$ não é um número inteiro, já que o numerador de (4.23) é um número inteiro ímpar. Em particular, isso implica que f não é finitamente determinado, uma contradição. Portanto, obtemos que $a = b = 1$.

Caso b.2: $s = 2$ e $r \geq 3$. A prova deste caso é semelhante à dada para mostrar o Caso b.1. ■

Notamos que para o grupo $\mathbb{Z}_1 \times \mathbb{Z}_d$, onde \mathbb{Z}_1 denota o grupo trivial, não é difícil encontrar germes de aplicações finitamente determinados quase homogêneos que não são homogêneos. Por exemplo, $f(x, y) = (x, y^4, y^6 + xy)$ é um exemplo de um germe de aplicação finitamente determinado de coposto 1 que é quase homogêneo do tipo $(5, 4, 6; 1, 5)$, isto é, com pesos distintos.

4.4 Sobre a existência de aplicações de gráfico refletido finitamente determinadas de coposto 1 com

$$p = n + 1$$

Em ([34], Th. 8.5) Peñafort Sanchis provou que para $p < 2n - 1$ não existem germes de aplicações de reflexão finitamente determinados $f : (\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ de coposto ≥ 2 , e todos os germes de aplicações essenciais finitamente determinados de coposto 1 são as aplicações de dobra. Peñafort Sanchis também provou que f é uma aplicação de reflexão essencial se, e somente se é \mathcal{A} -equivalente a uma aplicação de gráfico refletido com $h \in \mathfrak{m}^2$, onde \mathfrak{m}^2 é o quadrado do ideal maximal de \mathcal{O}_n .

Nesta seção, provaremos que se $G \neq \mathbb{Z}_2$ ou $G \neq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, então não existem aplicações de gráfico refletido finitamente determinadas $f : (\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ de coposto 1, com $n \geq 3$. Antes de apresentar a prova deste resultado, demonstraremos que se $G \neq \mathbb{Z}_n$ e $G \neq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, então existem $g_2, g_3 \in G$, tais que $g_2, g_3 \neq Id$ não são reflexões de G .

Lema 4.7. Seja G um grupo de reflexão tal que $G \neq \mathbb{Z}_n$ e $G \neq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Então existem $g_2, g_3 \in G$ tais que $g_2, g_3 \neq Id$ e g_2, g_3 não são reflexões de G .

Demonstração. Da teoria de classificação de grupos finitos, podemos assumir que $|G| \geq 5$, uma vez que \mathbb{Z}_2 , \mathbb{Z}_3 e \mathbb{Z}_4 são cíclicos e $G \neq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Já que $G \neq \mathbb{Z}_n$, pela classificação de Shephard e Todd para grupos de reflexão (veja Cap. 8 em [20]), segue que o posto de G é maior ou igual a 2. Logo, se d_1, d_2, \dots, d_n são os graus de G , existem d_i, d_j com $i \neq j$ tais que $d_i, d_j \geq 2$. Segue de ([42], veja também Teorema 4.14 de [20]) que o número de reflexões \mathcal{R} de G é dado por

$$\mathcal{R} = \sum_{i=1}^n (d_i - 1) \geq 2. \quad (4.24)$$

Assim, $|G| - \mathcal{R} \geq 3$, portanto $|G \setminus \{Id\}| - \mathcal{R} \geq 2$, como queríamos demonstrar. ■

No Corolário 4.4, demonstramos que, no caso em que h é regular, os pontos duplos das aplicações de gráfico refletido dependem unicamente dos elementos de $G \setminus Id$ que não são reflexões.

Note que, se $g_2, g_3 \neq Id$ não são reflexões em G , então existem, no mínimo, dois elementos $f_1, f_2 \in \mathbb{C}\{\mathbf{x}\}$ tais que

$$D(f) \supset V(f_1 \cdot f_2).$$

Portanto, segue do Lema 4.7 que se $G \neq \mathbb{Z}_n$ e $G \neq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, o conjunto $D(f)$ não é irredutível.

Tendo estabelecido o resultado anterior, estamos agora em posição de apresentar a seguinte Proposição.

Proposição 4.8. Seja $f : (\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ um germe de aplicação de gráfico refletido de coposto 1, com $n \geq 3$. Se $G \neq \mathbb{Z}_2$ ou $G \neq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, então f não é finitamente determinada.

Demonstração. Suponha que f seja finitamente determinada. Assim, como f tem coposto 1, segue do Corolário 1.6 que $D^2(f)$ é uma ICIS (interseção completa com singularidade isolada) de dimensão $n - 1$. Portanto, $D^2(f)$ é Cohen-Macaulay, assim satisfaz o critério de Serre S_{n-1} (veja [41], Teorema IV.D.11). Como $n \geq 3$, em particular satisfaz o critério S_2 . E, por $D^2(f)$ ter singularidade isolada satisfaz o critério de Serre R_1 .

Agora, como $D^2(f)$ satisfaz S_2 e R_1 , então $D^2(f)$ é um espaço analítico normal e, sendo um espaço analítico normal é portanto irredutível (veja [18] ou [15]).

Por outro lado, existe uma projeção $p_1 : D^2(f) \longrightarrow D(f)$ que é genericamente 1-a-1. O que implica que $D(f)$ é irredutível.

Se $G = \mathbb{Z}_n$, então f é essencial e portanto $G = \mathbb{Z}_2$ (veja [34], Th. 8.5). Podemos supor então que $G \neq \mathbb{Z}_2$ e $G \neq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Assim, pelo Lema 4.7 existem $g_2, g_3 \in G$ tais que $g_2, g_3 \neq Id$ e g_2, g_3 não são reflexões de G , o que implica que $D^2(f)$ (e também $D(f)$) não são irredutíveis, uma contradição.

Portanto, concluímos que se $G \neq \mathbb{Z}_2$ ou $G \neq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, então f não é finitamente determinada. ■

Exemplo 4.6. Considere $f : (\mathbb{C}^3, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^4, 0)$ dada por

$$f(x, y, z) = (x^2, y^2, x + 2y, y + 3z).$$

Note que $D^2(f)$ é suave de dimensão 2 e $D^3(f) = D^4(f) = \emptyset$. Então, pelo Corolário 1.6 segue que f é finitamente determinada (mais do que isso, f é estável).

4.5 A topologia de um par de componentes de identificação

Vamos relembrar a definição de componente de identificação. Considere f um germe de aplicação de $(\mathbb{C}^2, 0)$ em $(\mathbb{C}^3, 0)$ finitamente determinado. Denotemos por $D(f)^1, D(f)^2, \dots, D(f)^r$ as componentes irredutíveis da curva de pontos duplos $D(f)$ de f . Suponha que $(D(f)^i, D(f)^j)$ é um par de componente de identificação, ou seja, $f(D(f)^i) = f(D(f)^j)$.

Se f é uma aplicação de reflexão finitamente determinada e $(D(f)^i, D(f)^j)$ é um par de componente de identificação, então $D(f)^i$ e $D(f)^j$ têm a mesma topologia [3, Prop. 4.14], no sentido de que $D(f)^i$ e $D(f)^j$ possuem os mesmos expoentes característicos e multiplicidades de interseção (veja [13], Cap. 1, seção 3.4).

Não é difícil demonstrar que se $f : (\mathbb{C}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ é finitamente determinada, de coposto 1 e quase homogênea (não necessariamente uma aplicação de reflexão), então a mesma propriedade ocorre para um par de identificação de componentes de $D(f)$ (veja Lema 3.7 em [43]).

Isto leva à seguinte questão:

Questão: Seja $f : (\mathbb{C}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ um germe de aplicação finitamente determinado com pelo menos um par de componentes de identificação $(D(f)^i, D(f)^j)$ de $D(f)$. É verdade que as curvas planas $D(f)^i$ e $D(f)^j$ tem a mesma topologia?

No Exemplo a seguir, veremos que a resposta para essa questão é negativa, em geral.

Exemplo 4.7. Considere a aplicação $f : (\mathbb{C}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ definida por

$$f(x, y) = (x - x^2 + y^3 - y^4, xy, -x^3 + xy^3 + x^2y^4 - y^7).$$

A curva de pontos duplos $D(f)$ de f possui um par de componentes de identificação $(D(f)^1, D(f)^2)$ tal que $D(f)^1$ é singular e $D(f)^2$ é suave.

Seja f uma aplicação definida por

$$f(x, y) = (x - x^2 + y^3 - y^4, xy, -x^3 + xy^3 + x^2y^4 - y^7).$$

Utilizando a biblioteca presmatrix.lib no programa Singular (veja [37]), obtemos que a equação da $D(f)$ tem a seguinte fatoração

$$D(f)^1 = \mathbf{V}(-x^2 + y^3)$$

$$D(f)^2 = \mathbf{V}(-x + y^4)$$

$$D(f)^3 = \mathbf{V}(-x + x^2 + 3xy - 3x^2y - y^3 - x^4 + 3x^3y - 4x^2y^2 + y^4 + x^5 + 4x^3y^2 + x^2y^3 - 3xy^4 - 4x^4y^2 - 3x^3y^3 + 3xy^5 + 2x^3y^4 + 4x^2y^5 + xy^6 + x^4y^4 - 4x^2y^6 - 2xy^7 + 2x^2y^7 - x^2y^8 - y^{10} + y^{11})$$

$$D(f)^4 \cup D(f)^5 =$$

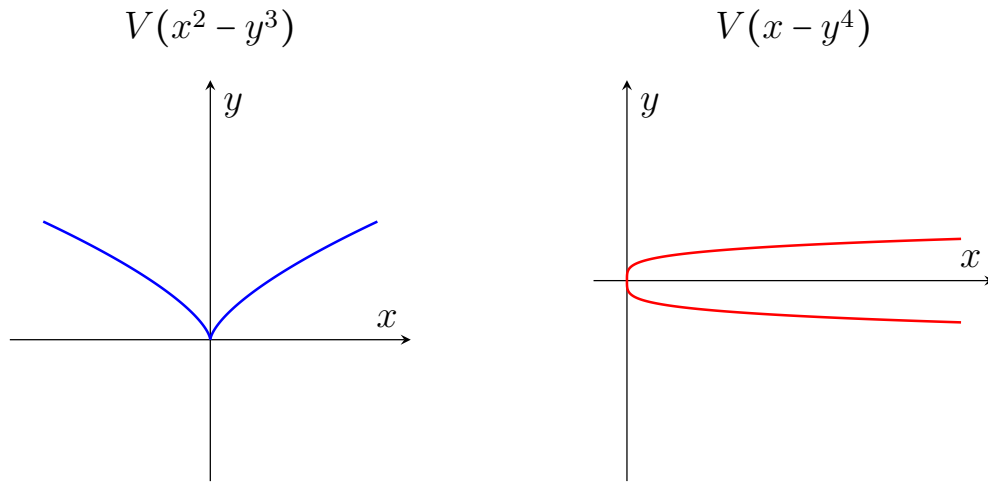
$$\mathbf{V}(x^2 - 3x^3y - xy^4 + 4x^4y^2 + x^7 + x^2y^5 - 6x^5y^3 + y^8 + 4x^3y^6 - 3xy^9 + 2x^4y^7 - 2x^2y^{10} + y^{13})$$

Portanto, segue de [25] que f é finitamente determinada. Vamos mostrar que duas dessas componentes são de identificação, nomeadamente $D(f)^1$ e $D(f)^2$. Considere

$\psi(t) = (t^3, t^2)$ e $\varphi(t) = (t^4, t)$ como parametrizações de $D(f)^1$ e $D(f)^2$, respectivamente. Note que

$$f(D(f)^1) = (t^3 - t^8, t^5, 0) = f(D(f)^2).$$

Assim, $D(f)^1$ e $D(f)^2$ constituem um par de componentes de identificação $D(f)$. Finalmente, observe que $D(f)^1$ corresponde a uma curva singular, enquanto $D(f)^2$ é uma curva suave, conforme ilustrado a seguir.



Portanto, concluímos que f possui um par de componentes de identificação, a saber, $(D(f)^1, D(f)^2)$, sendo que $D(f)^1$ é singular e $D(f)^2$ é suave. Em particular $D(f)^1$ e $D(f)^2$ não têm a mesma topologia.

Observe que esse exemplo será útil para construirmos uma aplicação que não é de reflexão.

4.5.1 Exemplo de aplicação que não é \mathcal{A} -equivalente a uma aplicação de reflexão

Np Exemplo 4.7, apresentamos uma aplicação cujas componentes de identificação possuem topologias distintas. Contudo, vale ressaltar que não foi especificado se tal aplicação é do tipo reflexão. Uma questão que pode surgir, à luz da teoria exposta neste trabalho, é a seguinte: “*Existe alguma aplicação f de $(\mathbb{C}^2, 0)$ em $(\mathbb{C}^3, 0)$ finitamente determinada, que não seja \mathcal{A} -equivalente a uma aplicação de reflexão?*”

Como já mencionamos anteriormente, na literatura, sabe-se, por exemplo, que se f for uma aplicação de reflexão e, se caso $D(f)^i$ e $D(f)^j$ formarem um par de componentes de identificação, então $D(f)^i$ e $D(f)^j$ possuem a mesma topologia [3, Prop. 4.14]. Portanto, obtemos como corolário da Proposição 4.7 uma resposta para a pergunta acima.

Corolário 4.9. Considere a aplicação $f : (\mathbb{C}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ definida pela mesma expressão apresentada no Exemplo 4.7, ou seja, f é dada por

$$f(x, y) = (x - x^2 + y^3 - y^4, xy, -x^3 + xy^3 + x^2y^4 - y^7).$$

Portanto, f é uma aplicação finitamente determinada que não é \mathcal{A} -equivalente a nenhuma aplicação de reflexão.

Demonstração. O resultado segue do Exemplo 4.7 e [3, Prop. 4.14]. ■

Capítulo 5

Germes de aplicação diedral

Inspirados no trabalho de Marar e Nuño-Ballesteros em [24], onde foram introduzidos os germes de aplicações de dobra dupla, nesta seção introduzimos o conceito de “*germe de aplicação diedral*”. Esses germes correspondem a aplicações de gráfico refletido cujo grupo de reflexão agindo em \mathbb{C}^2 é o grupo diedral de ordem $2m$, o qual denotamos por \mathcal{D}_{2m} . Consideraremos os geradores do grupo diedral \mathcal{D}_{2m} em $GL(\mathbb{C}^2)$ conforme descrito no Exemplo 2.7, isto é,

$$g_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad g_3 = \begin{bmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^{m-1} \end{bmatrix}, \quad (5.1)$$

onde $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{m}}$ é uma raiz m -ésima primitiva da unidade.

Observe que \mathcal{D}_{2m} com a representação dada em (5.1) acima, é de fato um grupo de reflexão isomorfo a \mathcal{D}_{2m} . A aplicação de órbita associada à ação de \mathcal{D}_{2m} em \mathbb{C}^2 é dada por $w(x, y) = (x^m + y^m, xy)$. O grupo \mathcal{D}_{2m} possui m reflexões, cujos hiperplanos refletores são:

$$L_{H_1} = x - y, \quad L_{H_2} = x - \zeta y, \quad \dots, \quad L_{H_{m-1}} = x - \zeta^{m-2}y \quad \text{e} \quad L_{H_m} = x - \zeta^{m-1}y.$$

Dizemos que um germe de aplicação $f : (\mathbb{C}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ é um *germe de aplicação $2m$ -diedral*, ou simplesmente um “*germe de aplicação diedral*”, se for um germe de aplicação de gráfico refletido, dado da seguinte forma:

$$f(x, y) = (x^m + y^m, xy, h(x, y)).$$

Note que $r_1 = 1, r_2 = x, r_3 = x^2, \dots, r_m = x^{m-1}$ e $r_{m+k} = y^k$ com $k \in \{1, \dots, m\}$ é uma base para $\mathcal{O}_2/(x^m + y^m, xy)$ como um \mathbb{C} -espaço vetorial. Fazendo mudanças nas coordenadas e usando o teorema da preparação de Malgrange, podemos escrever h na forma

$$h(x, y) = \sum_{j=1}^{m-1} x^j p_j + \sum_{k=1}^m y^k p_{m-1+k}$$

onde $p_i = p_i(x^m + y^m, xy)$ e $h(0, 0) = 0$.

A seguir, veremos como determinar a matriz de apresentação de $f_*\mathcal{O}_2$ para qualquer germe de aplicação diedral.

5.1 A matriz de apresentação de $f_*\mathcal{O}_2$ para germes de aplicação diedral

Em 2008, Marar e Nuño-Ballesteros apresentaram a matriz de apresentação de $f_*\mathcal{O}_2$ para as aplicações de dobra dupla, expressa em termos dos polinômios $p_i(x^2, y^2)$ (veja [24], Proposição 3.1). Posteriormente, em 2017, Silva estudou aplicações da forma $f(x, y) = (x^n, y^m, h(x, y))$ e também descreveu a matriz de $f_*\mathcal{O}_2$ utilizando os polinômios $p_i(x^n, y^m)$ (veja [44], Proposição 4.29). Nesta seção apresentamos uma descrição para a matriz de apresentação de $f_*\mathcal{O}_2$, onde f é um germe de aplicação diedral.

Recorde que, se f é um germe de aplicação diedral, então f é definida por

$$f(x, y) = (x^m + y^m, xy, h(x, y)),$$

onde

$$h(x, y) = \sum_{j=1}^{m-1} x^j p_j + \sum_{k=1}^m y^k p_{m-1+k}$$

e $p_i = p_i(x^m + y^m, xy)$. A seguir, utilizaremos o Teorema 3.2 para descrever a matriz de apresentação de $f_*\mathcal{O}_2$,

Proposição 5.1. Seja $f : (\mathbb{C}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ um germe de aplicação diedral- \mathcal{D}_{2m} . Então uma matriz de apresentação de $f_*(\mathcal{O}_2)$ como um \mathcal{O}_3 -módulo é dado por

$$\lambda[X, Y, Z] = \begin{bmatrix} A_1[X, Y] - Id_Z & A_2 \\ A_3 & A_4[X, Y] - Id_Z \end{bmatrix}.$$

Onde

$$A_1[X, Y] = \begin{bmatrix} 0 & p_1 & p_2 & \cdots & p_{m-2} & p_{m-1} \\ p_{m-1}X + p_m Y & 0 & p_1 & \cdots & p_{m-3} & p_{m-2} \\ p_{m-2}X + p_{m+1}Y^2 & p_{m-1}X + p_m Y & 0 & \cdots & p_{m-4} & p_{m-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ p_2X + p_{2m-3}Y^{m-2} & p_3X + p_{2m-4}Y^{m-3} & p_4X + p_{2m-5}Y^{m-4} & \cdots & 0 & p_1 \\ p_1X + p_{2m-2}Y^{m-1} & p_2X + p_{2m-3}Y^{m-2} & p_3X + p_{2m-4}Y^{m-3} & \cdots & p_{m-1}X + p_m Y & 0 \end{bmatrix}_{m \times m}$$

$$A_2[X, Y] = \begin{bmatrix} p_m & p_{m+1} & p_{m+2} & \cdots & p_{d-3} & p_{d-2} & p_{d-1} \\ p_{m+1}Y & p_{m+2}Y & p_{m+3}Y & \cdots & p_{d-2}Y & p_{d-1}Y & -p_{m-1} \\ p_{m+2}Y^2 & p_{m+3}Y^2 & p_{m+4}Y^2 & \cdots & p_{d-1}Y^2 & -p_{m-1}Y & -p_{m-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ p_{d-2}Y^{m-2} & p_{d-1}Y^{m-2} & -p_{m-1}Y^{m-2} & \cdots & -p_4Y^2 & -p_3xy & -p_2 \\ p_{d-1}Y^{m-1} & -p_{m-1}Y^{m-2} & -p_{m-2}Y^{m-3} & \cdots & -p_3Y^2 & -p_2Y & -p_1 \end{bmatrix}_{m \times m}$$

$$A_3[X, Y] = \begin{bmatrix} p_1Y & p_2Y & p_3Y & \cdots & p_{m-2}Y & p_{m-1}Y & p_{d-1}Y \\ p_2Y^2 & p_3Y^2 & p_4Y^2 & \cdots & p_{m-1}Y^2 & -p_{d-1}Y^2 & -p_{d-2}Y \\ p_3Y^3 & p_4Y^3 & p_5Y^3 & \cdots & -p_{d-1}Y^3 & -p_{d-2}Y^2 & -p_{d-3}Y \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{m-1}Y^{m-1} & -p_{d-1}Y^{m-1} & -p_{d-2}Y^{m-2} & \cdots & -p_{m+3}Y^3 & -p_{m+2}Y^2 & -p_{m+1}Y \\ -p_{d-1}Y^m & -p_{d-2}Y^{m-1} & -p_{d-3}Y^{m-2} & \cdots & -p_{m+2}Y^3 & -p_{m+1}Y^2 & -p_mY \end{bmatrix}_{m \times m}$$

$$A_4[X, Y] = \begin{bmatrix} p_{d-1}X & p_m & \cdots & p_{d-1} & p_{d-2} \\ p_1Y + p_{d-2}X & p_{d-1}X & \cdots & p_{d-2} & p_{d-3} \\ p_2Y^2 + p_{d-3}X & p_1Y + p_{d-2}X & \cdots & p_{d-3} & p_{d-4} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ p_{m-2}Y^{m-2} + p_{m+1}X & p_{m-3}Y^{m-3} + p_{m+2}X & \cdots & p_{d-1}X & p_m \\ p_{m-1}Y^{m-1} + p_{m+2}X & p_{m-2}Y^{m-2} + p_{m+1}X & \cdots & p_1Y + p_{d-2}X & p_{d-1}X \end{bmatrix}_{m \times m}$$

com $p_i = p_i(X, Y)$.

Demonstração. Seguindo a notação da Observação 3.1, podemos escrever a matriz de autovetores E para qualquer germe de aplicação diedral da seguinte forma

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x & y & \zeta x & \zeta^2 x & \cdots & \zeta^{m-1} x & \zeta y & \cdots & \zeta^{m-1} y \\ x^2 & y^2 & \zeta^2 x^2 & \zeta^4 x^2 & \cdots & \zeta^{2(m-1)} x^2 & \zeta^2 y^2 & \cdots & \zeta^{2(m-1)} y^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x^{m-2} & y^{m-2} & \zeta^{m-2} x^{m-2} & \zeta^{2(m-2)} x^{m-2} & \cdots & \zeta^{(m-1)(m-2)} x^{m-2} & \zeta^{m-2} y^{m-2} & \cdots & \zeta^{(m-1)(m-2)} y^{m-2} \\ x^{m-1} & y^{m-1} & \zeta^{m-1} x^{m-1} & \zeta^{2(m-1)} x^{m-1} & \cdots & \zeta^{(m-1)^2} x^{m-1} & \zeta^{m-1} y^{m-1} & \cdots & \zeta^{(m-1)^2} y^{m-1} \\ y & x & \zeta^{m-1} y & \zeta^{m-2} y & \cdots & \zeta y & \zeta^{m-1} x & \cdots & \zeta x \\ y^2 & x^2 & \zeta^{2(m-1)} y^2 & \zeta^{2(m-2)} y^2 & \cdots & \zeta^2 y^2 & \zeta^{2(m-1)} x^2 & \cdots & \zeta^2 x^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y^{m-1} & x^{m-1} & \zeta^{(m-1)^2} y^{m-1} & \zeta^{(m-2)(m-1)} y^{m-1} & \cdots & \zeta^{m-1} y^{m-1} & \zeta^{(m-1)^2} x^{m-1} & \cdots & \zeta^{m-1} x^{m-1} \\ y^m & x^m & y^m & y^m & \cdots & y^m & x^m & \cdots & x^m \end{bmatrix}$$

onde ζ é uma raiz m -ésima da unidade. Sua matriz inversa é expressa como $E^{-1} = \frac{1}{m(x^m - y^m)} E_1$, onde E_1 é a matriz:

$$E_1 = \begin{bmatrix} x^m & x^{m-1} & x^{m-2} & \cdots & x & -y^{m-1} & \cdots & -y & -1 \\ -y^m & -y^{m-1} & -y^{m-2} & \cdots & -y & x^{m-1} & \cdots & x & 1 \\ x^m & \zeta^{m-1}x^{m-1} & \zeta^{m-2}x^{m-2} & \cdots & \zeta x & -\zeta^{(m-1)^2}y^{m-1} & \cdots & -\zeta^{m-1}y & -1 \\ x^m & \zeta^{2(m-1)}x^{m-1} & \zeta^{2(m-2)}x^{m-2} & \cdots & \zeta^2x & -\zeta^{(m-1)(m-2)}y^{m-1} & \cdots & -\zeta^{m-2}y & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x^m & \zeta^{(m-1)^2}x^{m-1} & \zeta^{(m-1)(m-2)}x^{m-2} & \cdots & \zeta^{m-1}x & -\zeta^{m-1}y^{m-1} & \cdots & -\zeta y & -1 \\ -y^m & -\zeta^{m-1}y^{m-1} & -\zeta^{m-2}y^{m-2} & \cdots & -\zeta y & \zeta^{(m-1)^2}x^{m-1} & \cdots & \zeta^{m-1}x & 1 \\ -y^m & -\zeta^{2(m-1)}y^{m-1} & -\zeta^{2(m-2)}y^{m-2} & \cdots & -\zeta^2y & \zeta^{(m-1)(m-2)}x^{m-1} & \cdots & \zeta^{m-2}x & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -y^m & -\zeta^{(m-1)^2}y^{m-1} & -\zeta^{(m-1)(m-2)}y^{m-2} & \cdots & -\zeta^{m-1}y & \zeta^{m-1}x^{m-1} & \cdots & \zeta x & 1 \end{bmatrix}$$

Considere a matriz de autovalores A descrita na Observação 3.1. Segue do Teorema 3.2, que $\lambda[w, 0] = E \cdot A \cdot E^{-1}$. Assim, realizando produtos dessas matrizes, obtemos que

$$E \cdot A \cdot E^{-1} = \frac{1}{m(x^m - y^m)} \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}$$

onde, A_1, A_2, A_3 e A_4 são as matrizes (de ordem $m \times m$) a seguir

$$A_1 = \begin{bmatrix} x^m u_0 - y^m v_0 & x^{m-1} u_{m-1} - y^{m-1} v_{m-1} & \cdots & x^2 u_2 - y^2 v_2 & x u_1 - y v_1 \\ x^{m+1} u_1 - y^{m+1} v_1 & x^m u_0 - y^m v_0 & \cdots & x^3 u_3 - y^3 v_3 & x^2 u_2 - y^2 v_2 \\ x^{m+2} u_2 - y^{m+2} v_2 & x^{m+1} u_1 - y^{m+1} v_1 & \cdots & x^4 u_4 - y^4 v_4 & x^3 u_3 - y^3 v_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x^{2m-2} u_{m-2} - y^{2m-2} v_{m-2} & x^{2m-3} u_{m-3} - y^{2m-3} v_{m-3} & \cdots & x^m u_0 - y^m v_0 & x^{m-1} u_1 - y^{m-1} v_1 \\ x^{2m-1} u_{m-1} - y^{2m-1} v_{m-1} & x^{2m-2} u_{m-2} - y^{2m-2} v_{m-2} & \cdots & x^{m+1} u_1 - y^{m+1} v_1 & x^m u_0 - y^m v_0 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} x^{m-1} v_1 - y^{m-1} u_1 & x^{m-2} v_2 - y^{m-2} u_2 & \cdots & x v_{m-1} - y u_{m-1} & v_0 - u_0 \\ y x^{m-1} v_2 - x y^{m-1} u_2 & y x^{m-2} v_3 - x y^{m-2} u_3 & \cdots & y x v_0 - x y u_0 & y v_1 - x u_1 \\ y^2 x^{m-1} v_3 - x^2 y^{m-1} u_3 & y^2 x^{m-2} v_4 - x^2 y^{m-2} u_4 & \cdots & y^2 x v_1 - x^2 y u_1 & y^2 v_2 - x^2 u_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y^{m-2} x^{m-1} v_{m-1} - x^{m-2} y^{m-1} u_{m-1} & y^{m-2} x^{m-2} v_0 - x^{m-2} y^{m-2} u_0 & \cdots & y^{m-2} x v_{m-3} - x^{m-2} y u_{m-3} & y^{m-2} v_{m-2} - x^{m-2} u_{m-2} \\ y^{m-1} x^{m-1} v_0 - x^{m-1} y^{m-1} u_0 & y^{m-1} x^{m-2} v_1 - x^{m-1} y^{m-2} u_1 & \cdots & y^{m-1} x v_{m-2} - x^{m-1} y u_{m-2} & y^{m-1} v_{m-1} - x^{m-1} u_{m-1} \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} y x^m u_{m-1} - x y^m v_{m-1} & y x^{m-1} u_{m-2} - x y^{m-1} v_{m-2} & \cdots & y x^2 u_1 - x y^2 v_1 & y x u_0 - x y v_0 \\ y^2 x^m u_{m-2} - x^2 y^m v_{m-2} & y^2 x^{m-1} u_{m-3} - x^2 y^{m-1} v_{m-3} & \cdots & y^2 x^2 u_0 - x^2 y^2 v_0 & y^2 x u_{m-1} - x^2 y v_{m-1} \\ y^3 x^m u_{m-3} - x^3 y^m v_{m-3} & y^3 x^{m-1} u_{m-4} - x^3 y^{m-1} v_{m-4} & \cdots & y^3 x^2 u_{m-1} - x^2 y^2 v_{m-1} & y^3 x u_{m-2} - x^3 y v_{m-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y^{m-1} x^m u_1 - x^{m-1} y^m v_1 & y^{m-1} x^{m-1} u_0 - x^{m-1} y^{m-1} v_0 & \cdots & y^{m-1} x^2 u_3 - x^{m-1} y^2 v_3 & y^{m-1} x u_2 - x^{m-1} y v_2 \\ y^m x^m u_0 - x^m y^m v_0 & y^m x^{m-1} u_{m-1} - x^m y^{m-1} v_{m-1} & \cdots & y^m x^2 u_2 - x^m y^2 v_2 & y^m x u_1 - x^m y v_1 \end{bmatrix}$$

e

$$A_4 = \begin{bmatrix} x^m v_0 - y^m u_0 & x^{m-1} v_1 - y^{m-1} u_1 & \cdots & x^2 v_{m-2} - y^2 u_{m-2} & x v_{m-1} - y u_{m-1} \\ x^{m+1} v_{m-1} - y^{m+1} u_{m-1} & x^m v_0 - y^m u_0 & \cdots & x^3 v_{m-3} - y^3 u_{m-3} & x^2 v_{m-2} - y^2 u_{m-2} \\ x^{m+2} v_{m-2} - y^{m+2} u_{m-2} & x^{m+1} v_{m-1} - y^{m+1} u_{m-1} & \cdots & x^4 v_{m-4} - y^4 u_{m-4} & x^3 v_{m-3} - y^3 u_{m-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x^{2m-2} v_2 - y^{2m-2} u_2 & x^{2m-3} v_3 - y^{2m-3} u_3 & \cdots & x^m v_0 - y^m u_0 & x^{m-1} v_1 - y^{m-1} u_1 \\ x^{2m-1} v_1 - y^{2m-1} u_0 & x^{2m-2} v_2 - y^{2m-2} u_2 & \cdots & x^{m+1} v_{m-1} - y^{m+1} u_{m-1} & x^m v_0 - y^m u_0 \end{bmatrix}$$

onde,

$$\begin{aligned}
u_0 &= h_1 + h_3 + h_4 + \dots h_m + h_{m+1} \\
v_0 &= h_2 + h_{m+2} + h_{m+3} + \dots + h_{d-1} + h_d \\
u_1 &= h_1 + \zeta h_3 + \zeta^2 h_4 + \dots \zeta^{m-2} h_m + \zeta^{m-1} h_{m+1} \\
v_1 &= h_2 + \zeta h_{m+2} + \zeta^2 h_{m+3} + \dots \zeta^{m-2} h_{d-1} + \zeta^{m-1} h_d \\
u_2 &= h_1 + \zeta^2 h_3 + \zeta^4 h_4 + \dots \zeta^{2(m-2)} h_m + \zeta^{2(m-1)} h_{m+1} \\
v_2 &= h_2 + \zeta^2 h_{m+2} + \zeta^4 h_{m+3} + \dots \zeta^{2(m-2)} h_{d-1} + \zeta^{2(m-1)} h_d \\
&\vdots \\
u_j &= h_1 + \zeta^j h_3 + \zeta^{2j} h_4 + \dots \zeta^{(m-2)j} h_m + \zeta^{(m-1)j} h_{m+1} \\
v_j &= h_2 + \zeta^j h_{m+2} + \zeta^{2j} h_{m+3} + \dots \zeta^{(m-2)j} h_{d-1} + \zeta^{(m-1)j} h_d \\
&\vdots \\
u_{m-1} &= h_1 + \zeta^{m-1} h_3 + \zeta^{2(m-1)} h_4 + \dots + \zeta^{(m-2)(m-1)} h_m + \zeta^{(m-1)^2} h_{m+1} \\
v_{m-1} &= h_2 + \zeta^{m-1} h_{m+2} + \zeta^{2(m-1)} h_{m+3} + \dots \zeta^{(m-2)(m-1)} h_{d-1} + \zeta^{(m-1)^2} h_d
\end{aligned}$$

Fazendo as substituições dos polinômios h_i nas equações u_k e v_k com $k \in \{0, \dots, m-1\}$ acima, obtemos que

$$\begin{aligned}
u_0 &= my^m p_{d-1} \\
v_0 &= mx^m p_{d-1} \\
u_1 &= mx^{m-1} p_{m-1} + my p_m \\
v_1 &= my^{m-1} p_{m-1} + mx p_m \\
u_2 &= mx^{m-2} p_{m-2} + my^2 p_{m+1} \\
v_2 &= my^{m-2} p_{m-2} + mx^2 p_{m+1} \\
&\vdots \\
u_j &= mx^{m-j} p_{m-j} + my^j p_{m-1+j}, \text{ com } 1 \leq j \leq m-1. \\
v_j &= my^{m-j} p_{m-j} + mx^j p_{m-1+j} \\
&\vdots \\
u_{m-1} &= mx p_1 + my^{m-1} p_{d-2} \\
v_{m-1} &= my p_1 + mx^{m-1} p_{d-2}
\end{aligned}$$

Substituindo u_k e v_k nas matrizes $A_i[w_1, w_2]$, obtemos

$$A_1 = \begin{bmatrix}
0 & p_1 & \dots & p_{m-2} & p_{m-1} \\
p_{m-1}(x^m + y^m) + p_m xy & 0 & \dots & p_{m-3} & p_{m-2} \\
p_{m-2}(x^m + y^m) + p_{m+1} x^2 y^2 & p_{m-1}(x^m + y^m) + p_m xy & \dots & p_{m-4} & p_{m-3} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
p_2(x^m + y^m) + p_{2m-3} x^{m-2} y^{m-2} & p_3(x^m + y^m) + p_{2m-4} x^{m-3} y^{m-3} & \dots & 0 & p_1 \\
p_1(x^m + y^m) + p_{2m-2} x^{m-1} y^{m-1} & p_2(x^m + y^m) + p_{2m-3} x^{m-2} y^{m-2} & \dots & p_{m-1}(x^m + y^m) + p_m xy & 0
\end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} p_m & p_{m+1} & p_{m+2} & \cdots & p_{d-3} & p_{d-2} & p_{d-1} \\ p_{m+1}xy & p_{m+2}xy & p_{m+3}xy & \cdots & p_{d-2}xy & p_{d-1}xy & -p_{m-1} \\ p_{m+2}x^2y^2 & p_{m+3}x^2y^2 & p_{m+4}x^2y^2 & \cdots & p_{d-1}x^2y^2 & -p_{m-1}xy & -p_{m-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ p_{d-2}x^{m-2}y^{m-2} & p_{d-1}x^{m-2}y^{m-2} & -p_{m-1}x^{m-3}y^{m-3} & \cdots & -p_4x^2y^2 & -p_3xy & -p_2 \\ p_{d-1}x^{m-1}y^{m-1} & -p_{m-1}x^{m-2}y^{m-2} & -p_{m-2}x^{m-3}y^{m-3} & \cdots & -p_3x^2y^2 & -p_2xy & -p_1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} p_1xy & p_2xy & p_3xy & \cdots & p_{m-2}xy & p_{m-1}xy & -p_{d-1}xy \\ p_2x^2y^2 & p_3x^2y^2 & p_4x^2y^2 & \cdots & p_{m-1}x^2y^2 & -p_{d-1}x^2y^2 & -p_{d-2}xy \\ p_3x^3y^3 & p_4x^3y^3 & p_5x^3y^3 & \cdots & -p_{d-1}x^3y^3 & -p_{d-2}x^2y^2 & -p_{d-3}xy \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{m-1}x^{m-1}y^{m-1} & -p_{d-1}x^{m-1}y^{m-1} & -p_{d-2}x^{m-2}y^{m-2} & \cdots & -p_{m+3}x^3y^3 & -p_{m+2}x^2y^2 & -p_{m+1}xy \\ -p_{d-1}x^my^m & -p_{d-2}x^{m-1}y^{m-1} & -p_{d-3}x^{m-2}y^{m-2} & \cdots & -p_{m+2}x^3y^3 & -p_{m+1}x^2y^2 & -p_mxy \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} p_{d-1}(x^m + y^m) & p_m & \cdots & p_{d-1} & p_{d-2} \\ p_1xy + p_{d-2}(x^m + y^m) & p_{d-1}(x^m + y^m) & \cdots & p_{d-2} & p_{d-3} \\ p_2x^2y^2 + p_{d-3}(x^m + y^m) & p_1xy + p_{d-2}(x^m + y^m) & \cdots & p_{d-3} & p_{d-4} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ p_{m-2}x^{m-2}y^{m-2} + p_{m+1}(x^m + y^m) & p_{m-3}x^{m-3}y^{m-3} + p_{m+2}(x^m + y^m) & \cdots & p_{d-1}(x^m + y^m) & p_m \\ p_{m-1}x^{m-1}y^{m-1} + p_{m+2}(x^m + y^m) & p_{m-2}x^{m-2}y^{m-2} + p_{m+1}(x^m + y^m) & \cdots & p_1xy + p_{d-2}(x^m + y^m) & p_{d-1}(x^m + y^m) \end{bmatrix}$$

Considere o homomorfismo de anéis $\mathbb{C}[X, Y] \longrightarrow \mathbb{C}[x, y]$ dado por $X \mapsto x^m + y^m$, $Y \mapsto xy$. Vamos trocar $x^m + y^m$ por X e xy por Y em $A_i[w_1, w_2]$. Assim, obtemos que a matriz $\lambda[X, Y, 0]$ é tal que

$$\lambda[X, Y, 0] = \begin{bmatrix} A_1[X, Y] & A_2[X, Y] \\ A_3[X, Y] & A_4[X, Y] \end{bmatrix},$$

Por fim, para obtermos $f_*\mathcal{O}_2$ faremos $\lambda[X, Y, 0] - Id_Z$. Portanto, a matriz de apresentação de $f_*\mathcal{O}_2$ é dada da seguinte forma

$$\lambda[X, Y, Z] = \begin{bmatrix} A_1[X, Y] - Id_Z & A_2 \\ A_3 & A_4[X, Y] - Id_Z \end{bmatrix},$$

como desejado. ■

Exemplo 5.1. Seja $f : (\mathbb{C}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ um germe de aplicação, dado por

$$f(x, y) = (x^4 + y^4, xy, h(x, y)), \quad (5.2)$$

onde $h(x, y) = xp_1 + x^2p_2 + x^3p_3 + yp_4 + y^2p_5 + y^3p_6 + y^4p_7$ e $p_i = p_i(x^4 + y^4, xy)$.

Segue da Proposição 5.1, que a matriz de apresentação de $f_*(\mathcal{O}_2)$ como um \mathcal{O}_3 -

módulo é dada por

$$\begin{bmatrix} -Z & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 & p_7 \\ B_1 & -Z & p_1 & p_2 & p_5Y & p_6Y & p_7Y & -p_3 \\ B_2 & B_1 & -Z & p_1 & p_6Y^2 & p_7Y^2 & -p_3Y & -p_2 \\ B_3 & B_2 & B_1 & -Z & p_7Y^3 & -p_3Y^2 & -p_2Y & -p_1 \\ p_1Y & p_2Y & p_3Y & -p_7Y & p_7X - Z & p_4 & p_5 & p_6 \\ p_2Y^2 & p_3Y^2 & -p_7Y^2 & -p_6Y & B_4 & p_7X - Z & p_4 & p_5 \\ p_3Y^3 & -p_7Y^3 & -p_6Y^2 & -p_5Y & B_5 & B_4 & p_7X - Z & p_4 \\ -p_7Y^4 & -p_6Y^3 & -p_5Y^2 & -p_4Y & B_6 & B_5 & B_4 & p_7X - Z \end{bmatrix}$$

onde

$$\begin{aligned} B_1 &= p_3X + p_4Y & B_4 &= p_1Y + p_6X \\ B_2 &= p_2X + p_5Y^2 & B_5 &= p_2Y^2 + p_5X \\ B_3 &= p_1X + p_6Y^3 & B_6 &= p_3Y^3 + p_4X \end{aligned}$$

Como aplicação dos resultados dos capítulos anteriores, apresentaremos a seguir um breve estudo sobre a aplicação 6-diedral, no qual calculamos a matriz de apresentação de $f_*\mathcal{O}_2$ como um \mathcal{O}_3 -módulo, uma equação para a imagem de f , uma equação para o espaço de pontos duplos de f e estimativas superior e inferior para a multiplicidade de f .

5.2 Um estudo sobre a aplicação 6-diedral

Consideremos a seguinte representação em $GL(\mathbb{C}^2)$ do grupo diedral \mathcal{D}_6 :

$$\begin{aligned} g_1 = Id &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, g_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, g_3 = \begin{bmatrix} \zeta^2 & 0 \\ 0 & \zeta \end{bmatrix}, g_4 = \begin{bmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^2 \end{bmatrix}, \\ g_5 &= \begin{bmatrix} 0 & \zeta \\ \zeta^2 & 0 \end{bmatrix}, g_6 = \begin{bmatrix} 0 & \zeta^2 \\ \zeta & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

onde $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{3}}$.

A aplicação de órbita para o grupo \mathcal{D}_6 agindo em \mathbb{C}^2 é $w(x, y) = (x^3 + y^3, xy)$. Assim, a aplicação de gráfico refletido $f : (\mathbb{C}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ para o grupo diedral \mathcal{D}_6 é dado por $f(x, y) = (x^3 + y^3, xy, h(x, y))$, onde $h(x, y) = xp_1 + x^2p_2 + yp_3 + y^2p_4 + y^3p_5$.

Note que

$$\begin{aligned}
 h_1 &:= g_{1\bullet}h = h. \\
 h_2 &:= g_{2\bullet}h = yp_1 + y^2p_2 + xp_3 + x^2p_4 + x^3p_5. \\
 h_3 &:= g_{3\bullet}h = \zeta xp_1 + \zeta^2x^2p_2 + \zeta^2yp_3 + \zeta y^2p_4 + y^3p_5. \\
 h_4 &:= g_{4\bullet}h = \zeta^2xp_1 + \zeta x^2p_2 + \zeta yp_3 + \zeta^2y^2p_4 + y^3p_5. \\
 h_5 &:= g_{5\bullet}h = \zeta yp_1 + \zeta^2y^2p_2 + \zeta^2xp_3 + \zeta x^2p_4 + x^3p_5. \\
 h_6 &:= g_{6\bullet}h = \zeta^2yp_1 + \zeta y^2p_2 + \zeta xp_3 + \zeta^2x^2p_4 + x^3p_5.
 \end{aligned}$$

Lembre-se do Lema 3.5, que nos permite definir

$$\begin{aligned}
 q_5(xy, x^3 + y^3) &:= h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5 + h_6. \\
 q_4(xy, x^3 + y^3) &:= h_1h_2 + h_1h_3 + h_1h_4 + \cdots + h_5h_6. \\
 q_3(xy, x^3 + y^3) &:= h_1h_2h_3 + h_1h_2h_4 + \cdots + h_4h_5h_6. \\
 q_2(xy, x^3 + y^3) &:= h_1h_2h_3h_4 + h_1h_2h_3h_5 + \cdots + h_3h_4h_5h_6. \\
 q_1(xy, x^3 + y^3) &:= h_1h_2h_3h_4h_5 + h_1h_2h_3h_4h_6 + \cdots + h_2h_3h_4h_5h_6. \\
 q_0(xy, x^3 + y^3) &:= h_1h_2h_3h_4h_5h_6.
 \end{aligned}$$

Proposição 5.2. Seja $f : (\mathbb{C}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ um germe de aplicação 6-diedral e escreva f na forma

$$f(x, y) = (x^3 + y^3, xy, xp_1 + x^2p_2 + yp_3 + y^2p_4 + y^3p_5).$$

onde $p_i = p_i(x^3 + y^3, xy)$. Então

(a) A matriz de apresentação de $f_*\mathcal{O}_2$ como um \mathcal{O}_3 -módulo via f é dada por

$$\lambda[X, Y, Z] = \begin{bmatrix} -Z & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 \\ p_2X + p_3Y & -Z & p_1 & p_4Y & p_5Y & -p_2 \\ p_1X + p_4Y^2 & p_2X + p_3Y & -Z & p_5Y^2 & -p_2Y & -p_1 \\ p_1Y & p_2Y & -p_5Y & p_5X - Z & p_3 & p_4 \\ p_2Y^2 & -p_5Y^2 & -p_4Y & p_4X + p_1Y & p_5X - Z & p_3 \\ -p_5Y^3 & -p_4Y^2 & -p_3Y & p_3X + p_2Y^2 & p_4X + p_1Y & p_5X - Z \end{bmatrix}.$$

onde $p_i = p_i(X, Y)$.

(b) Uma equação para a imagem de f é

$$F(X, Y, Z) = Z^6 - Q_5Z^5 + Q_4Z^4 - Q_3Z^3 + Q_2Z^2 - Q_1Z + Q_0.$$

onde $Q_{6-k}(X, Y) := w^*(q_{6-k}(x^3 + y^3, xy))$, i.e, simplesmente trocamos as “variáveis” $x^3 + y^3$ e xy pelas variáveis X e Y em q_{6-k} descritas logo acima desta proposição.

(c) Uma equação para a curva de pontos duplos $D(f)$ de f é

$$D(f) = \mathbf{V}(f_1 f_2 f_3)$$

onde

$$\begin{aligned} f_1 &= -p_1 + p_3 - p_2x + p_4x - p_2y + p_4y + p_5x^2 + p_5xy + p_5y^2. \\ f_2 &= p_1^2 + p_1p_3 + p_3^2 + 2p_1p_2x + p_2p_3x + p_1p_4x - p_3p_4x - p_1p_2y + p_2p_3y + p_1p_4y \\ &\quad + 2p_3p_4y + p_2^2x^2 + p_2p_4x^2 + p_4^2x^2 - 2p_1p_5x^2 - p_3p_5x^2 - p_2^2xy - p_2p_4xy - p_4^2xy \\ &\quad + p_1p_5xy - p_3p_5xy + p_2^2y^2 + p_2p_4y^2 + p_4^2y^2 + p_1p_5y^2 + 2p_3p_5y^2 - 2p_2p_5x^3 - p_4p_5x^3 \\ &\quad + 2p_2p_5x^2y + p_4p_5x^2y - p_2p_5xy^2 - 2p_4p_5xy^2 + p_2p_5y^3 + 2p_4p_5y^3 + p_5^2x^4 \\ &\quad - p_5^2x^3y - p_5^2xy^3 + p_5^2y^4. \\ f_3 &= p_1^2x^2 + p_1p_3xy + p_3^2y^2 + p_1p_2x^3 + 2p_2p_3x^2y + 2p_1p_4xy^2 + p_3p_4y^3 + p_2^2x^4 + p_2p_4x^2y^2 \\ &\quad + p_4^2y^4. \end{aligned}$$

(d) A multiplicidade da imagem de f satisfaz

$$2 \leq m(f(\mathbb{C}^2, 0)) \leq 6.$$

Demonstração. Segue da Proposição 5.1 que a matriz de apresentação de $f_*(\mathcal{O}_2)$ como um \mathcal{O}_3 -módulo via f é dada por

$$\lambda[X, Y, Z] = \begin{bmatrix} -Z & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 \\ p_2X + p_3Y & -Z & p_1 & p_4Y & p_5Y & -p_2 \\ p_1X + p_4Y^2 & p_2X + p_3Y & -Z & p_5Y^2 & -p_2Y & -p_1 \\ p_1Y & p_2Y & -p_5Y & p_5X - Z & p_3 & p_4 \\ p_2Y^2 & -p_5Y^2 & -p_4Y & p_4X + p_1Y & p_5X - Z & p_3 \\ -p_5Y^3 & -p_4Y^2 & -p_3Y & p_3X + p_2Y^2 & p_4X + p_1Y & p_5X - Z \end{bmatrix}$$

como queríamos.

(b) Segue pelo Teorema 3.6. Para provar (c), podemos aplicar a Proposição 4.3 para obter

$$D(f) = \mathbf{V}\left(\frac{(h - g_{2\bullet}h)(h - g_{3\bullet}h)(h - g_{4\bullet}h)(h - g_{5\bullet}h)(h - g_{6\bullet}h)}{3(x - y)(x - \zeta y)(x - \zeta^2 y)}\right).$$

Note que

$$\begin{aligned}
 h - g_{2\bullet}h &= (y - x)(-p_1 + p_3 - p_2(x + y) + p_4(x + y) + p_5(x^2 + xy + y^2)). \\
 h - g_{3\bullet}h &= p_1(x - \zeta x) + p_2(x^2 - \zeta^2 x^2) + p_3(y - \zeta^2 y) + p_4(y^2 - \zeta y^2). \\
 h - g_{4\bullet}h &= p_1(x - \zeta^2 x) + p_2(x^2 - \zeta x^2) + p_3(y - \zeta y) + p_4(y^2 - \zeta^2 y^2). \\
 h - g_{5\bullet}h &= p_1(x - \zeta y) + p_2(x^2 - \zeta^2 y^2) + p_3(y - \zeta^2 x) + p_4(y^2 - \zeta x^2) + p_5(y^3 - x^3). \\
 h - g_{6\bullet}h &= p_1(x - \zeta^2 y) + p_2(x^2 - \zeta y^2) + p_3(y - \zeta x) + p_4(y^2 - \zeta^2 x^2) + p_5(y^3 - x^3).
 \end{aligned}$$

Portanto, um cálculo mostra que $D(f) = \mathbf{V}(f_1 f_2 f_3)$. A prova de (d) segue pelo Corolário 4.3. \blacksquare

Observação 5.1. Um cálculo direto (mas tedioso) pode ser feito para apresentar explicitamente os coeficientes de $Q'_i s$ na Proposição 5.2(b). Por exemplo,

$$\begin{aligned}
 q_5 &= h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5 + h_6 = 3p_5(x^3 + y^3), \text{ e} \\
 q_4 &= -6xyp_1p_3 - 3p_1p_2(x^3 + y^3) - 3p_3p_4(x^3 + y^3) - 6x^2y^2p_2p_4 + 3p_5^2(x^3 + y^3)^2 + 3p_5^2x^3y^3
 \end{aligned}$$

portanto $Q_5(X, Y) = 3Xp_5$ e $Q_4(X, Y) = -6Yp_1p_3 - 3Xp_1p_2 - 3Xp_3p_4 - 6Y^2p_2p_4 + 3X^2p_5^2 + 3Y^3p_5^2$. Da mesma forma, obtemos de q_3, q_2, q_1 e q_0 que

$$\begin{aligned}
 Q_3(X, Y) &= -X(-p_1^3 - p_3^3 - Xp_2^3 - Xp_4^3 + 9Xp_1p_2p_5 + 3Xp_3p_4p_5 - X^2p_5^3) - XY(-3p_2^2p_3 - \\
 &3p_1p_4^2 + 12p_1p_3p_5 + 12Y^2p_2p_4p_5 - 6Y^2p_5^3) - Y^2(-6p_2p_3^2 - 6p_1^2p_4 + 2Yp_2^3 + 2Yp_4^3 - 12Yp_1p_2p_5 + \\
 &12Yp_3p_4p_5).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_2(X, Y) &= 9XYp_1^2p_2p_3 + 9Y^2p_1^2p_3^2 + 9X^2p_1p_2p_3p_4 + 9XYp_1p_3^2p_4 + 3X^2p_1^3p_5 + 9Y^3p_1^2p_2^2 + \\
 &9XY^2p_1p_2^2p_4 + 9XY^2p_2p_3p_4^2 + 9Y^3p_3^2p_4^2 - 6Y^3p_1^3p_5 + 3X^3p_2^3p_5 + 9X^2Yp_2^2p_3p_5 + 9XY^2p_2p_3^2p_5 + \\
 &6Y^3p_3^3p_5 + 9XY^2p_1^2p_4p_5 - 9X^3p_1p_2p_5^2 - 9X^2Yp_1p_3p_5^2 + 9Y^4p_2^2p_4^2 - 9XY^3p_2^3p_5 - 18Y^4p_2^2p_3p_5 + \\
 &18Y^4p_1p_4^2p_5 + 3XY^3p_4^3p_5 + 18XY^3p_1p_2p_5^2 - 9X^2Y^2p_2p_4p_5^2 - 18XY^3p_3p_4p_5^2 + 3X^2Y^3p_5^4 + 3Y^6p_5^4.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_1(X, Y) &= -[3XYp_1^4p_3 + 3X^2p_1p_2p_3^3 + 3XYp_1p_3^4 + 3X^2p_1^3p_3p_4 + 6Y^3p_1^4p_2 + 3X^2Yp_1p_2^3p_3 + \\
 &18XY^2p_1p_2^2p_3^2 + 12Y^3p_1p_2p_3^3 + 12XY^2p_1^3p_2p_4 + 12Y^3p_1^3p_3p_4 + 3X^3p_2^3p_3p_4 + 9X^2Yp_2^2p_3^2p_4 + \\
 &12XY^2p_2p_3^3p_4 + 6Y^3p_3^4p_4 + 9X^2Yp_1^2p_2p_4^2 + 18XY^2p_1^2p_3p_4^2 + 3X^3p_1p_2p_4^3 + 3X^2Yp_1p_3p_4^3 \\
 &- 9X^2Yp_1^2p_2p_3p_5 - 9XY^2p_1^2p_3^2p_5 - 9X^3p_1p_2p_3p_4p_5 - 9X^2Yp_1p_3^2p_4p_5 - 3X^3p_1^3p_5^2 + 3XY^3p_1p_2^4 + \\
 &12Y^4p_1p_2^3p_3 + 3X^2Y^2p_2^4p_4 + 12Y^4p_1p_3p_4^3 + 3X^2Y^2p_2p_4^4 + 3XY^3p_3p_4^4 - 9XY^3p_1^2p_2^2p_5 \\
 &- 9X^2Y^2p_1p_2^2p_4p_5 - 9X^2Y^2p_2p_3p_4^2p_5 - 9XY^3p_3^2p_4^2p_5 + 9XY^3p_1^3p_5^2 - 3X^4p_2^3p_5^2 - 9X^3Yp_2^2p_3p_5^2 - \\
 &9X^2Y^2p_2p_3^2p_5^2 - 3XY^3p_3^3p_5^2 - 9X^2Y^2p_1^2p_4p_5^2 + 3X^4p_1p_2p_5^3 + 3X^3Yp_1p_3p_5^3 - 6Y^5p_2^4p_4 - 6Y^5p_2p_4^4 - \\
 &9XY^4p_2^2p_4^2p_5 + 12X^2Y^3p_2^3p_5^2 + 27XY^4p_2^2p_3p_5^2 - 9XY^4p_1p_4^2p_5^2 - 3X^2Y^3p_1p_2p_5^3 + 3X^3Y^2p_2p_4p_5^3 + \\
 &3X^2Y^3p_3p_4p_5^3 - 6Y^6p_2^3p_5^2 - 6Y^6p_4^3p_5^2 - 12Y^6p_1p_2p_5^3 + 12Y^6p_3p_4p_5^3 - 3XY^6p_5^5 + 18Y^5p_2p_3^2p_5^2 + \\
 &18Y^5p_1^2p_4p_5^2].
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 Q_0(X, Y) = & X^2 p_1^3 p_3^3 + Y^3 p_1^6 + 3XY^2 p_1^3 p_2 p_3^2 - 2Y^3 p_1^3 p_3^3 + X^3 p_2^3 p_3^3 + 3X^2 Y p_2^2 p_3^4 + 3XY^2 p_2 p_3^5 + \\
 & Y^3 p_3^6 + 3XY^2 p_1^5 p_4 + 3XY^2 p_1^2 p_3^3 p_4 + 3X^2 Y p_1^4 p_4^2 + X^3 p_1^3 p_4^3 - 3X^2 Y p_1^4 p_3 p_5 - 3X^3 p_1^3 p_3 p_4 p_5 + \\
 & XY^3 p_1^3 p_3^2 + 6Y^4 p_1^3 p_2^2 p_3 + 3X^2 Y^2 p_2^4 p_3^2 + 6XY^3 p_2^3 p_3^3 + 3Y^4 p_2^2 p_3^4 + 3X^2 Y^2 p_1^2 p_3^3 p_4 + 9XY^3 p_1^2 p_2^2 p_3 p_4 + \\
 & 18Y^4 p_1^2 p_2 p_3^2 p_4 + 3Y^4 p_1^4 p_4^2 + 3X^3 Y p_1 p_2^3 p_4^2 + 9X^2 Y^2 p_1 p_2^2 p_3 p_4^2 + 9XY^3 p_1 p_2 p_3^3 p_4^2 + 6Y^4 p_1 p_3^3 p_4^2 + \\
 & 6XY^3 p_1^3 p_4^3 + X^4 p_2^3 p_4^3 + 3X^3 Y p_2^2 p_3 p_4^3 + 3X^2 Y^2 p_2 p_3^2 p_4^3 + XY^3 p_3^3 p_4^3 + 3X^2 Y^2 p_1^2 p_4^4 - 3XY^3 p_1^4 p_2 p_5 + \\
 & 6Y^4 p_1^4 p_3 p_5 - 3X^3 Y p_1 p_2^3 p_3 p_5 - 9X^2 Y^2 p_1 p_2^2 p_3^2 p_5 - 12XY^3 p_1 p_2 p_3^3 p_5 - 6Y^4 p_1 p_3^4 p_5 - \\
 & - 3X^2 Y^2 p_1^3 p_2 p_4 p_5 - 3X^4 p_2^3 p_3 p_4 p_5 - 9X^3 Y p_2^2 p_3^2 p_4 p_5 - 9X^2 Y^2 p_2 p_3^3 p_4 p_5 - 3XY^3 p_3^4 p_4 p_5 - \\
 & - 9X^2 Y^2 p_1^2 p_3 p_4^2 p_5 + X^4 p_1^3 p_5^3 + 3XY^4 p_2^5 p_3 + 3Y^5 p_2^4 p_3^2 - 6Y^5 p_1^2 p_2^2 p_4 - 9XY^4 p_1 p_2^2 p_4^2 - 18Y^5 p_1 p_2^2 p_3 p_4^2 - \\
 & 4X^2 Y^3 p_2^3 p_4^3 - 9XY^4 p_2^2 p_3 p_4^3 - 6Y^5 p_2 p_3^2 p_4^3 + 3Y^5 p_1^2 p_4^4 + 3XY^4 p_1 p_4^5 - 3X^2 Y^3 p_1 p_2^4 p_5 - 12Y^5 p_1^3 p_2 p_4 p_5 - \\
 & 3X^3 Y^2 p_2^4 p_4 p_5 + 3X^2 Y^3 p_2^3 p_3 p_4 p_5 + 18XY^4 p_2^2 p_3^2 p_4 p_5 + 12Y^5 p_2 p_3^3 p_4 p_5 - 18XY^4 p_1^2 p_2 p_4^2 p_5 - \\
 & 3X^2 Y^3 p_1 p_2 p_3^3 p_5 - 12XY^4 p_1 p_3 p_4^3 p_5 + 9XY^4 p_1^2 p_2 p_3 p_5^2 + 9Y^5 p_1^2 p_3^2 p_5^2 + 9X^2 Y^3 p_1 p_2 p_3 p_4 p_5^2 + \\
 & + 9XY^4 p_1 p_3 p_4 p_5^2 - 4X^2 Y^3 p_1^3 p_5^3 + X^5 p_2^3 p_5^3 + 3X^4 Y p_2^2 p_3 p_5^3 + 3X^3 Y^2 p_2 p_3^2 p_5^3 + X^2 Y^3 p_3^3 p_5^3 + \\
 & 3X^3 Y^2 p_1^2 p_4 p_5^3 + Y^6 p_2^6 + 2Y^6 p_2^3 p_4^3 + Y^6 p_4^6 + 6Y^6 p_1 p_2^4 p_5 + 9XY^5 p_2^4 p_4 p_5 + 12Y^6 p_2^3 p_3 p_4 p_5 - \\
 & - 12Y^6 p_1 p_2 p_3^3 p_5 - 3XY^5 p_2 p_4^4 p_5 - 6Y^6 p_3 p_4^4 p_5 + 9Y^6 p_1^2 p_2^2 p_5^2 + 9XY^5 p_1 p_2^2 p_4 p_5^2 + 9XY^5 p_2 p_3 p_4^2 p_5^2 + \\
 & 9Y^6 p_2^2 p_4^2 p_5^2 + 2Y^6 p_1^3 p_5^3 - 5X^3 Y^3 p_2^3 p_5^3 - 12X^2 Y^4 p_2^2 p_3 p_5^3 - 9XY^5 p_2 p_3^2 p_5^3 - 2Y^6 p_3^3 p_5^3 - 9XY^5 p_1^2 p_4 p_5^3 + \\
 & 3X^2 Y^4 p_1 p_2^4 p_5^3 - 3X^3 Y^3 p_1 p_2 p_5^4 - 3X^2 Y^4 p_1 p_3 p_5^4 + 9Y^7 p_2^2 p_4^2 p_5^2 + 5XY^6 p_2^3 p_5^3 + 6Y^7 p_2^2 p_3 p_5^3 - \\
 & 6Y^7 p_1 p_2^4 p_5^3 + XY^6 p_3^3 p_5^3 + 9XY^6 p_1 p_2 p_5^4 + 6Y^7 p_1 p_3 p_5^4 - 3X^2 Y^5 p_2 p_4 p_5^4 - 3XY^6 p_3 p_4 p_5^4 + 6Y^8 p_2 p_4 p_5^4 + \\
 & Y^9 p_5^6.
 \end{aligned}$$

5.3 Matriz de apresentação para a aplicação 8-diedral

No Capítulo 2 deste trabalho, vimos que é possível obter mais de uma representação para um mesmo grupo. Para ilustrar isso, nesta seção mostraremos que diferentes representações de um mesmo grupo de reflexão podem levar a matrizes de apresentação distintas.

Faremos isso por meio de um exemplo com o grupo diedral \mathcal{D}_8 , utilizando as duas representações apresentadas no Exemplo 2.8. Para tanto, considere a aplicação 8-diedral f de $(\mathbb{C}^2, 0)$ em $(\mathbb{C}^3, 0)$ definida por

$$f(x, y) = (x^4 + y^4, xy, xp_1 + x^2 p_2 + x^3 p_3 + yp_4 + y^2 p_5 + y^3 p_6 + y^4 p_7),$$

onde $p_i = p_i(x^4 + y^4, xy)$. Segue do Exemplo 5.1 que a matriz de apresentação de $f_*(\mathcal{O}_2)$

como um \mathcal{O}_3 -módulo é dada por

$$\begin{bmatrix} -Z & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 & p_7 \\ B_1 & -Z & p_1 & p_2 & p_5 Y & p_6 Y & p_7 Y & -p_3 \\ B_2 & B_1 & -Z & p_1 & p_6 Y^2 & p_7 Y^2 & -p_3 Y & -p_2 \\ B_3 & B_2 & B_1 & -Z & p_7 Y^3 & -p_3 Y^2 & -p_2 Y & -p_1 \\ p_1 Y & p_2 Y & p_3 Y & -p_7 Y & p_7 X - Z & p_4 & p_5 & p_6 \\ p_2 Y^2 & p_3 Y^2 & -p_7 Y^2 & -p_6 Y & B_4 & p_7 X - Z & p_4 & p_5 \\ p_3 Y^3 & -p_7 Y^3 & -p_6 Y^2 & -p_5 Y & B_5 & B_4 & p_7 X - Z & p_4 \\ -p_7 Y^4 & -p_6 Y^3 & -p_5 Y^2 & -p_4 Y & B_6 & B_5 & B_4 & p_7 X - Z \end{bmatrix}$$

onde

$$\begin{aligned} B_1 &= p_3 X + p_4 Y & B_4 &= p_1 Y + p_6 X \\ B_2 &= p_2 X + p_5 Y^2 & B_5 &= p_2 Y^2 + p_5 X \\ B_3 &= p_1 X + p_6 Y^3 & B_6 &= p_3 Y^3 + p_4 X \end{aligned}$$

Agora vamos construir a matriz de apresentação com a representação de \mathcal{D}'_8 , a qual a aplicação de órbita é dado por $w = (x^2 + y^2, x^2 y^2)$ (veja [3]).

Considere o germe de aplicação $\psi : (\mathbb{C}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ dado por

$$\psi(x, y) = (x^2 + y^2, x^2 y^2, xp_1 + yp_2 + xyp_3 + y^2 p_4 + xy^2 p_5 + y^3 p_6 + xy^3 p_7), \quad (5.3)$$

onde $p_i = p_i(x^2 + y^2, x^2 y^2)$.

A matriz de apresentação de $\psi_* \mathcal{O}_2$ como um \mathcal{O}_3 -módulo é dada por

$$\begin{bmatrix} -Z & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 & p_7 \\ Xp_1 + Yp_5 & -Z & Xp_3 + Yp_7 & p_2 & -p_1 & p_4 & -p_3 & p_6 \\ -Yp_6 & -Yp_7 & -Z & p_1 & p_2 + Xp_6 & p_3 + Xp_7 & p_4 & p_5 \\ Yp_3 & -Yp_6 & Xp_1 + Yp_5 & -Z & Yp_7 & p_2 + Xp_6 & -p_1 & p_4 \\ -Yp_4 & -Yp_5 & -Yp_6 & -Yp_7 & p_4 X - Z & p_1 + Xp_5 & p_2 + Xp_6 & p_3 + Xp_7 \\ Yp_1 & -Yp_4 & Yp_3 & -Yp_6 & Yp_5 & p_4 X - Z & Yp_7 & p_2 + Xp_6 \\ S_1 & S_2 & -Yp_4 & -Yp_5 & S_3 & S_4 & p_4 X - Z & p_1 + Yp_5 \\ -Y^2 p_7 & S_1 & Yp_1 & -Yp_4 & -S_2 & S_3 & Yp_5 & p_4 X - Z \end{bmatrix}$$

onde

$$\begin{aligned} S_1 &= -Yp_2 - XYp_6 \\ S_2 &= -Yp_3 - XYp_7 \\ S_3 &= Yp_2 + (X^2 - Y)p_6 \\ S_4 &= Yp_3 + (X^2 - Y)p_7 \end{aligned}$$

Concluimos, portanto, com este exemplo, que a matriz de apresentação de $f_* \mathcal{O}_n$ de-

pende da representação escolhida para o grupo G . No entanto, vale a pena ressaltar que os ideias de Fitting, em particular $\mathcal{F}_0(f, \mathcal{O}_2)$, não dependem da matriz de apresentação considerada.

5.4 Germes de aplicação diedral finitamente determinados

No contexto de aplicações de reflexão, Peñafort Sanchis, em [34], demonstrou que, para inteiros m_i coprimos dois a dois, os seguintes germes são finitamente determinados:

$$\begin{aligned} x &\longmapsto (x^{m_1}, x^{m_2}). \\ (x_1, x_2) &\longmapsto (x_1^{m_1}, x_2^{m_2}, (x_1 + x_2)^{m_3}). \\ (x_1, x_2) &\longmapsto (x_1^{m_1}, x_2^{m_2}, (x_1 + x_2)^{m_3}, (x_1 - x_2)^{m_4}). \\ (x_1, x_2, x_3) &\longmapsto (x_1^{m_1}, x_2^{m_2}, x_3^{m_3}, (x_1 + x_2 + x_3)^{m_4}, (x_1 - x_2 + 2x_3)^{m_5}, (x_1 + 2x_2 - x_3)^{m_6}). \end{aligned}$$

Nesta seção, apresentaremos uma nova classe de aplicações de reflexão que são finitamente determinadas. Essencialmente, provaremos que, se $f(x, y) = (x^m + y^m, xy, h(x, y))$ é um germe de aplicação diedral com m ímpar e $h(x, y) = (ax + by)^k$, sendo a e b genéricos, então f é finitamente determinada se, e somente se, m e k são coprimos.

Para isso, considere $f : (\mathbb{C}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ um “germe de aplicação diedral” dado da seguinte forma

$$f(x, y) = (x^m + y^m, xy, (ax + by)^k).$$

Como f é uma aplicação de gráfico refletido, a curva de pontos duplos é dada da seguinte forma

$$D(f) = \mathbf{V} \left(\frac{\prod_{j=2}^{2m} (h(x, y) - g_j \bullet h(x, y))}{(x - y)(x - \zeta y)(x - \zeta^2 y) \cdots (x - \zeta^{m-1} y)} \right).$$

Sejam η_r com $r \in \{2, 3, \dots, 2m\}$ as componentes de $D(f)$.

- Considere $j \in \{1, 2, \dots, m-1\}$. Sejam η_{j+1} as componentes de $D(f)$ cujos elementos $g_j \in G$, ao agirem sobre $(ax + by)^k$, não são reflexões. Então:

$$\eta_{j+1} = (ax + by)^k - (a\zeta^j x + b\zeta^{m-j} y)^k$$

- Considere agora as componentes η_{j+m} e η_{2m} , correspondentes aos elementos de

$g_j \in G$ que, ao agirem sobre $(ax + by)^k$ são reflexões. Assim, temos:

$$\eta_{j+m} = \frac{(ax + by)^k - (a\zeta^j y + b\zeta^{m-j} x)^k}{(x - \zeta^j y)}.$$

e

$$\eta_{2m} = \frac{(ax + by)^k - (ay + bx)^k}{(x - y)}.$$

Agora considere os seguintes polinômios

$$\begin{aligned} q_1 &= ax + by \\ q_{j+1} &= a\zeta^j x + b\zeta^{m-j} y \\ q_{j+m} &= a\zeta^j y + b\zeta^{m-j} x \\ q_{2m} &= ay + bx, \end{aligned}$$

e seja $\xi = e^{\frac{2\pi i}{k}}$ uma raiz k -ésima primitiva da unidade. Assim,

$$\begin{aligned} \eta_{j+1} &= (q_1 - q_{j+1})(q_1 - \xi q_{j+1})(q_1 - \xi^2 q_{j+1}) \cdots (q_1 - \xi^{k-2} q_{j+1})(q_1 - \xi^{k-1} q_{j+1}) \\ \eta_{j+m} &= \frac{(q_1 - q_{j+m})(q_1 - \xi q_{j+m})(q_1 - \xi^2 q_{j+m}) \cdots (q_1 - \xi^{k-2} q_{j+m})(q_1 - \xi^{k-1} q_{j+m})}{(x - \zeta^j y)} \\ \eta_{2m} &= \frac{(q_1 - q_{2m})(q_1 - \xi q_{2m})(q_1 - \xi^2 q_{2m}) \cdots (q_1 - \xi^{k-2} q_{2m})(q_1 - \xi^{k-1} q_{2m})}{(x - y)} \end{aligned}$$

Observe que

$$q_1 - q_{j+m} = (ax + by) - (a\zeta^j y + b\zeta^{m-j} x) = a(x - \zeta^j y) - b\zeta^{m-j}(x - \zeta^j y).$$

Dessa forma, $q_1 - q_{j+m} = (a - b\zeta^{m-j})(x - \zeta^j y)$. E, $q_1 - q_{2m} = (a - b)(x - y)$. Então,

$$\begin{aligned} \eta_{j+1} &= (q_1 - q_{j+1})(q_1 - \xi q_{j+1})(q_1 - \xi^2 q_{j+1}) \cdots (q_1 - \xi^{k-2} q_{j+1})(q_1 - \xi^{k-1} q_{j+1}) \\ \eta_{j+m} &= (q_1 - \xi q_{j+m})(q_1 - \xi^2 q_{j+m}) \cdots (q_1 - \xi^{k-2} q_{j+m})(q_1 - \xi^{k-1} q_{j+m}) \\ \eta_{2m} &= (q_1 - \xi q_{2m})(q_1 - \xi^2 q_{2m}) \cdots (q_1 - \xi^{k-2} q_{2m})(q_1 - \xi^{k-1} q_{2m}) \end{aligned}$$

A observação a seguir mostra que, se m é par e $h = (ax + by)^k$, então existem germes finitamente determinados apenas para $k = 1$.

Observação 5.2. Considere $f(x, y) = (x^m + y^m, xy, (ax + by)^k)$. Note que, se m é par, existe um elemento g do grupo diedral \mathcal{D}_{2m} , tal que $g_\bullet(x, y) = (\zeta^{\frac{m}{2}} x, \zeta^{\frac{m}{2}} y)$, onde ζ é

uma raiz m -ésima primitiva da unidade. Logo:

$$h(x, y) - g_{\bullet} h(x, y) = (ax + by)^k - \zeta^{\frac{mk}{2}} (ax + by)^k.$$

Desde que $\zeta^m = 1$, segue que $\zeta^{\frac{m}{2}} = -1$. Assim,

$$h(x, y) - g_{\bullet} h(x, y) = (ax + by)^k - (-1)^k (ax + by)^k.$$

Se k é par, segue que $h(x, y) - g_{\bullet} h(x, y) = 0$. Logo f não é finitamente determinada. Suponha que k seja ímpar, então

$$h(x, y) - g_{\bullet} h(x, y) = 2(ax + by)^k.$$

Portanto, se $k > 1$, f não é finitamente determinada

Vejamos agora, no resultado a seguir, que se f é um germe de aplicação $2m$ -diedral finitamente determinada com m ímpar, então m e k são coprimos.

Proposição 5.3. Seja $f(x, y) = (x^m + y^m, xy, (ax + by)^k)$ um germe de aplicação $2m$ -diedral m ímpar. Se f é finitamente determinada, então m e k são coprimos.

Demonstração. Suponha que m e k não sejam coprimos. Então, existe um inteiro $c > 1$ tal que $c \mid m$ e $c \mid k$. Consequentemente, existem inteiros positivos m_1 e k_1 tais que $m = cm_1$ e $k = ck_1$. Observe que:

$$\xi^{k_1} = \left(e^{\frac{2\pi i}{k}} \right)^{k_1} = \left(e^{\frac{2\pi i}{ck_1}} \right)^{k_1} = e^{\frac{2\pi i}{c}} = \left(e^{\frac{2\pi i}{cm_1}} \right)^{m_1} = \left(e^{\frac{2\pi i}{m}} \right)^{m_1} = \zeta^{m_1}. \quad (5.4)$$

Assim, existe um fator em f_{j+1} com $j = m_1$, tal que

$$q_1 - \xi^{k_1} q_{m_1+1} = (ax + by) - \zeta^{m_1} (a\zeta^{m_1} x + b\zeta^{m-m_1} y) = x(a - a\zeta^{2m_1}).$$

Desde que m é ímpar segue que $c \neq 2$. Então, temos que $c > 2$, consequentemente $2m_1 \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ e da igualdade em (5.4) segue que $\omega^{2k_1} = \zeta^{2m_1}$. Assim, existe um fator em f_{j+1} com $j = 2m_1$, tal que

$$q_1 - \xi^{2k_1} q_{2m_1+1} = (ax + by) - \zeta^{2m_1} (a\zeta^{2m_1} x + b\zeta^{m-2m_1} y) = x(a - a\zeta^{4m_1}).$$

Daí, obtemos que

$$(q_1 - \zeta^{m_1} q_{m_1+1}) (q_1 - \zeta^{2m_1} q_{2m_1+1}) = x^2 (a - \zeta^{2m_1}) (a - \zeta^{4m_1})$$

O que implica que f não é finitamente determinada. Portanto, se f é finitamente

determinada, então k e m são coprimos. ■

Proposição 5.4. Seja $f(x, y) = (x^m + y^m, xy, (ax + by)^k)$ um germe de aplicação $2m$ -diedral, com m ímpar e a, b genéricos. Se m e k são coprimos, então f é finitamente determinada.

Demonstração. Suponha que f não é finitamente determinada e que m e k são coprimos. Suponha ainda que $m = cm_1$ com $c > 1$. Então, temos três casos para analisar:

- **Caso 1:** podem existir $c_1, c_2 \in \mathbb{C} - \{0\}$ tais que

$$q_1 - \xi^s q_{r_1} = xc_1 \quad \text{e} \quad q_1 - \xi^r q_{r_2} = xc_2,$$

isto é, existem pelo menos dois fatores em $D(f)$ que compartilham um termo em comum.

- **Caso 2:** $q_1 = \xi^s q_r$ com $r \in \{2, 3, \dots, 2m\}$; isto é, $\prod_{r=2}^{2m} f_r = 0$.
- **Caso 3:** $(q_1 - \xi^{s_1} q_{r_1}) = (q_1 - \xi^{s_2} q_{r_2})$, com $r_1, r_2 \neq 1$. Isto é, existem pelo menos dois fatores iguais em $D(f)$.

Vamos para o **Caso 1:** Como f não é finitamente determinada podem existir $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{C} - \{0\}$ tal que

$$q_1 - \xi^s q_{r_1} = xc_1 \quad \text{e} \quad q_1 - \xi^r q_{r_2} = xc_2.$$

- **(1.1)** Se $s = 0$, temos

$ax + by - (ay + bx) = xc_1$	\implies	$a = b$
$ax + by - (a\zeta^j y + b\zeta^{m-j} x) = xc_1$	\implies	$b = \zeta^j a$
$ax + by - (a\zeta^j x + b\zeta^{m-j} y) = xc_1$	\implies	$\zeta^{m-j} = 1$ (contradição!)

- **(1.2)** Se $s \neq 0$, temos

$ax + by - \xi^s (ay + bx) = xc_1$	\implies	$b = \xi^s a$
$ax + by - \xi^s (a\zeta^j y + b\zeta^{m-j} x) = xc_1$	\implies	$b = \xi^s \zeta^j a$
$ax + by - \xi^s (a\zeta^j x + b\zeta^{m-j} y) = xc_1$	\implies	$\xi^s = \zeta^j$

Em particular, se $j = m_1$, da última implicação temos que $\xi^s = \zeta^{m_1}$. E, dado que $m = cm_1$, com m ímpar e $c > 1$, segue que $2m_1 \in \{1, 2, \dots, m\}$, consequentemente,

temos que $\omega^{2s} = \zeta^{2m_1}$. Agora, observe que

$$\left(e^{\frac{2\pi i}{k}}\right)^s = \xi^s = \zeta^{m_1} = \left(e^{\frac{2\pi i}{cm_1}}\right)^{m_1} = e^{\frac{2\pi i}{c}}. \quad (5.5)$$

Donde concluímos que $k = cs$. Isso implica que m e k não são coprimos (contradição!).

Faremos agora o **Caso 2**. Suponha que $q_1 = w^s q_r$ com $r \in \{2, 3, \dots, 2m\}$.

- **(2.1)** se q_r é dado pela ação de um elemento do grupo que não é reflexão, temos que

$$ax + by = \xi^s(a\zeta^r x + b\zeta^{m-r}y) \implies x(a - a\xi^s\zeta^r) + y(b - b\xi^s\zeta^{m-r}) = 0$$

daí, $\xi^s\zeta^r = 1$ e $\xi^s\zeta^{m-r} = 1$. Assim,

$$ax + by = \xi^s(a\zeta^r x + b\zeta^{m-r}y) \implies \xi^s = \zeta^{m-r} \text{ e } \xi^s = \zeta^r \text{ (contradição!)}$$

- **(2.2)** se q_r é dado pela ação de um elemento do grupo que é reflexão, temos que

$$ax + by = \xi^s(a\zeta^r y + b\zeta^{m-r}x) \quad \text{ou} \quad ax + by = \xi^s(ay + bx).$$

Assim,

$$\text{Se } ax + by = \xi^s(a\zeta^r y + b\zeta^{m-r}x) \implies a = b\zeta^{m-r} \text{ e } \xi^s = -1.$$

$$\text{Se } ax + by = \xi^s(ay + bx) \implies a = -b \text{ e } \xi^s = -1.$$

Por fim, vamos analisar o **Caso 3**. Suponha que

$$(q_1 - \xi^{s_1}q_{r_1}) = (q_1 - \xi^{s_2}q_{r_2}).$$

Isso implica que $\xi^{s_1}q_{r_1} = \xi^{s_2}q_{r_2}$, e, portanto $q_{r_1} = \xi^{s_2-s_1}q_{r_2}$. Seja $s_2 - s_1 = s$. Iremos considerar três subcasos

- **Caso 3.1:** $s = 0$;
 - **Caso 3.2** $s \neq 0$ e $q_{j+1} = \xi^s q_{r_2}$;
 - **Caso 3.3** $s \neq 0$ e $q_{j+m} = \xi^s q_{r_2}$.
- **Caso 3.1:** Suponha que se $s = 0$, então $s_2 = s_1$. Nesse caso temos que $q_{r_1} = q_{r_2}$, o que implica

$$g_{r_1 \bullet}(ax + by) = g_{r_2 \bullet}(ax + by).$$

Contudo, $r_1 \neq r_2$, caso contrário, isso indicaria que a componente f_{r_1} aparece mais de uma vez em $D(f)$.

$$\begin{array}{ll}
 \text{Se } a\zeta^{r_1}x + b\zeta^{m-r_1}y = a\zeta^{r_2}x + b\zeta^{m-r_2}y & \implies r_1 = r_2 \text{ (contradição!)} \\
 \text{Se } a\zeta^{r_1}y + b\zeta^{m-r_1}x = a\zeta^{r_2}y + b\zeta^{m-r_2}x & \implies r_1 = r_2 \text{ (contradição!)} \\
 \text{Se } a\zeta^{r_1}x + b\zeta^{m-r_1}y = a\zeta^{r_2}y + b\zeta^{m-r_2}x & \implies b = a\zeta^{r_1+r_2} \\
 \text{Se } a\zeta^{r_1}x + b\zeta^{m-r_1}y = ay + bx & \implies b = a\zeta^{r_1} \\
 \text{Se } a\zeta^{r_1}y + b\zeta^{m-r_1}x = ay + bx & \implies \zeta^{r_1} = 1 \text{ e } \zeta^{m-r_1} = 1 \text{ (contradição!)}
 \end{array}$$

• **Caso 3.2:** $q_{j+1} = \xi^s q_{r_2}$; isto é, $(a\zeta^j x + b\zeta^{m-j} y) = \xi^s q_{r_2}$.

$$\begin{array}{ll}
 \text{Se } q_{r_2} = a\zeta^{r_2}x + b\zeta^{m-r_2}y & \implies \xi^s = 1 \text{ e } j = r_2 \text{ (contradição, visto que } \xi^s \neq 1) \\
 \text{Se } q_{r_2} = a\zeta^{r_2}y + b\zeta^{m-r_2}x & \implies \xi^s = -1 \text{ e } b = -a\zeta^{j+r_2} \\
 \text{se } q_{r_2} = ay + bx & \implies \xi^s = -1 \text{ e } b = -a\zeta^j
 \end{array}$$

• **Caso 3.3:** $q_{j+m} = w^s q_{r_2}$; isto é, $(a\zeta^j y + b\zeta^{m-j} x) = \xi^s q_{r_2}$.

$$\begin{array}{ll}
 \text{Se } q_{r_2} = a\zeta^{r_2}x + b\zeta^{m-r_2}y & \implies \xi^s = -1 \text{ e } b = -a\zeta^{j+r_2} \\
 \text{Se } q_{r_2} = a\zeta^{r_2}y + b\zeta^{m-r_2}x & \implies \xi^s = 1 \text{ e } j = r_2 \text{ (contradição, visto que } \xi^s \neq 1) \\
 \text{Se } q_{r_2} = ay + bx & \implies \xi^s - \zeta^j \text{ e } \xi^s = \zeta^{m-j} \text{ (contradição!)}
 \end{array}$$

Portanto, concluímos que, se f é uma aplicação $2m$ -diedral com m ímpar e, se $h = (ax + by)^k$, com a e b genéricos e m coprimo com k , então f é finitamente determinada.

■

Proposição 5.5. Seja $f(x, y) = (x^m + y^m, xy, (ax + by)^k)$ um germe de aplicação $2m$ -diedral, com m ímpar e a, b genéricos. Então, f é finitamente determinada se, e somente se, m e k são coprimos.

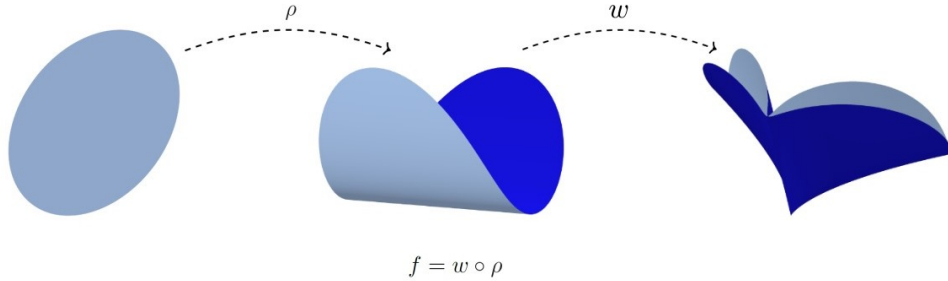
Demonstração. Segue das Proposições (5.3) e (5.4). ■

Exemplo 5.2. Considere o germe de aplicação diedral f de $(\mathbb{C}^2, 0)$ para $(\mathbb{C}^3, 0)$ dado por

$$f(x, y) = (x^3 + y^3, xy, (2x - 3y)^2).$$

Segue da Proposição 5.5 que f é finitamente determinado. Uma equação para a curva de pontos duplos de f é

$$D(f) = \mathbf{V}((x+y)(x^2-xy+y^2)(4x^2-6xy+9y^2)(4x^2+6xy+9y^2)).$$



E, a equação da imagem é

$$F(X, Y, Z) = Z^6 + 72YZ^5 + 1944Y^2Z^4 + (25778Y^3 - 793X^2)Z^3 + (193176Y^4 - 28548X^2Y)Z^2 + (793800Y^5 - 256932X^2Y^2)Z + 46656X^4 + 1500625Y^6 - 529200X^2Y^3$$

5.5 Problemas de pesquisa futuros

Esta seção é dedicada à discussão de problemas de pesquisa futuros. O primeiro problema a ser abordado diz respeito à matriz de apresentação apresentada no Capítulo 3 (veja Teorema 3.2). Considera-se, aqui, a possibilidade de estender esse resultado para aplicações de reflexão mais gerais, bem como para casos em que f seja uma aplicação de reflexão de $(\mathbb{C}^n, 0)$ em $(\mathbb{C}^p, 0)$ satisfazendo $p > (n+1)$. O segundo problema consiste em determinar equações que descrevam o ideal de Fitting \mathcal{F}_1 em termos da ação do grupo.

A seguir, faremos breves comentários sobre o que a literatura atual apresenta a respeito desses problemas.

Problema 1: Matriz de apresentação para aplicações de reflexão de $(\mathbb{C}^n, 0)$ em $(\mathbb{C}^p, 0)$ satisfazendo $p > n + 1$

Tendo em vista o Teorema 3.2, Peñafort Sanchis, Oréfica Okamoto e Tomazella propuseram estendê-lo para o caso de aplicações de reflexão em geral. Vamos apresentar o que encontramos na literatura.

Denote S para $(X \times \mathbb{C}, (x_0, 0))$ e T para $(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$. Considere $F : (S, 0) \longrightarrow (T, 0)$ finita com \mathcal{O}_S livre sobre \mathcal{O}_T e seja $F : S \longrightarrow T$ um representante. Para $b \in \mathcal{O}_S$, seja $[b]_G^{\mathcal{C}}$ a matriz do endomorfismo \mathcal{O}_T -linear de \mathcal{O}_S dada pela multiplicação por b .

Lema 5.6. ([28], Lema 11.6) Seja $b \in \mathcal{O}_S$. Suponha que $y_0 \in T$ é um valor regular de F e seja x_0, \dots, x_m sua pré imagem em S . Então, $b(x_0), \dots, b(x_m)$ são autovalores da matriz $[b]_G^G(y_0)$.

Em poucas palavras, a ideia consiste em utilizar o Lema 5.6 para provar que os autovalores para as aplicações de reflexão são dados em termos da ação do grupo. Então a prova seria análoga a demonstração do Teorema 3.2.

Para o caso de determinar uma matriz de apresentação para aplicações de $(\mathbb{C}^n, 0)$ em $(\mathbb{C}^p, 0)$, com $p > n$, existe uma generalização feita por Silva, Miranda e Peñafort Sanchis do algoritmo de Mond e Pellikaan ainda não publicada. As ideias assim que disponíveis podem ser úteis para tratar o problema em que $p > n + 1$.

Problema 2: Determinar o ideal de Fitting \mathcal{F}_1 em termos da ação do grupo de reflexão

Considere o grupo de reflexão $G = \mathbb{Z}_3$ agindo em $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}$ (trivialmente no segundo fator) com aplicação de órbita $w = (x, y^3, z)$. Seja $f : (\mathbb{C}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ um germe de aplicação de gráfico refletido, dado por

$$f(x, y) = (x, y^3, yp_1 + y^2p_2),$$

onde $p_i = p_i(x, y^3)$. Note que $r_1 = 1$, $r_2 = y$ e $r_3 = y^2$ geram $\mathbb{C}[x, y]/(x, y^3)$ como \mathbb{C} -espaço vetorial. Aplicando o Teorema 3.2 obtemos uma matriz de apresentação de $f_*(\mathcal{O}_2)$ como um \mathcal{O}_3 -módulo via f dado por

$$\lambda[X, Y, Z] = \begin{bmatrix} -Z & p_1 & p_2 \\ Yp_2 & -Z & p_1 \\ Yp_1 & Yp_2 & -Z \end{bmatrix}.$$

Note que, o ideal de Fitting \mathcal{F}_1 é dado pelos menores 2×2 da matriz $\lambda[X, Y, Z]$, ou seja,

$$\mathcal{F}_1(X, Y, Z) = \langle p_1^2 + Zp_2, Zp_1 + Yp_2^2, Z^2 - Yp_1p_2 \rangle. \quad (5.6)$$

Considere o homomorfismo de anéis $\mathbb{C}[X, Y, Z] \longrightarrow \mathbb{C}[x, y]$ dado por $X \longmapsto x$, $Y \longmapsto y^3$ e $Z \longmapsto yp_1 + y^2p_2$. Temos que

$$\begin{aligned} f_*\mathcal{F}_1 &= \langle p_1^2 + yp_1p_2 + y^2p_2^2, yp_1^2 + y^2p_1p_2 + y^3p_2^2, y^2p_1^2 + y^3p_1p_2 + y^4p_2^4 \rangle. \\ &= \langle p_1^2 + yp_1p_2 + y^2p_2^2, y(p_1^2 + yp_1p_2 + y^2p_2^2), y^2(p_1^2 + yp_1p_2 + y^2p_2^2) \rangle. \end{aligned}$$

Ao considerarmos $\gamma = p_1^2 + yp_1p_2 + y^2p_2^2$, temos:

$$f_*\mathcal{F}_1 = \langle 1 \cdot \gamma, y \cdot \gamma, y^2 \cdot \gamma \rangle = \langle r_1 \cdot \gamma, r_2 \cdot \gamma, r_3 \cdot \gamma \rangle.$$

Uma questão natural que surge é:

Pergunta 1: É possível determinar γ em termos da ação do grupo sobre h ?

A resposta é: sim! De fato, γ corresponde à equação que descreve os pontos duplos de f , isto é,

$$D(f) = \mathbf{V}\left(\frac{(h - g_{2\bullet}h)(h - g_{3\bullet}h)}{y^2}\right) = \mathbf{V}(p_1^2 + yp_1p_2 + y^2p_2^2)$$

Fazendo uma análise do grupo cíclico \mathbb{Z}_d , surge naturalmente o seguinte problema.

Pergunta 2: Seja f uma aplicação finita definida por $(x, y) \mapsto (x, y^d, h(x, y))$. Então, $f_*\mathcal{F}_1$ é dada por

$$f_*\mathcal{F}_1 = \langle r_1 \cdot \gamma, r_2 \cdot \gamma, \dots, r_d \cdot \gamma \rangle, \quad (5.7)$$

onde γ é uma equação para a curva de pontos duplos de f e $r_1 = 1$, $r_2 = y$, $r_3 = y^2, \dots$, $r_d = y^{d-1}$?

Vejamos, agora, o que já foi estabelecido na literatura a respeito desse problema. Em [28], encontramos o seguinte corolário, que afirma que $f_*\mathcal{F}_1(f)$ é um ideal principal em \mathcal{O}_{X, x_0} .

Corolário 5.7. ([28], Corolário 11.9) Seja $f : (X, x_0) \longrightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ finita e genericamente 1-a-1, onde (X, x_0) é um espaço de germe de Gorenstein de dimensão n . Então $f_*\mathcal{F}_1(f)$ é um ideal principal em \mathcal{O}_{X, x_0} .

É importante ressaltar que na prova do Corolário 5.7 a matriz de apresentação λ de $f_*\mathcal{O}_2$ deve ser uma matriz simétrica. Essa exigência não é uma obstrução forte, veja o teorema a seguir.

Teorema 5.8. ([28], Teorema 11.8) Suponha que (X, x_0) é um espaço de germe de Cohen-Macaulay e, $f : (X, x_0) \longrightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ é uma aplicação finita de dimensão n . Se (X, x_0) é um anel Gorenstein, então (X, x_0) admite uma matriz de apresentação simétrica sobre \mathcal{O}_{n+1} .

Sabemos que $f_*\mathcal{F}_1(f)$ é gerado por $f_*(\gamma)$. Com a demonstração do Corolário 5.7, podemos afirmar algo mais: na verdade $f_*\mathcal{F}_1(f)$ é gerado por $f_*(r_1\gamma)$, $f_*(r_2\gamma)$, ..., $f_*(r_d\gamma)$, sendo λ uma matriz simétrica. Observe também que, no exemplo dado no início desta seção, ao trocar a primeira e a terceira linha, obtemos uma matriz simétrica. Vejamos:

$$\lambda[X, Y, Z] = \begin{bmatrix} -Z & p_1 & p_2 \\ Yp_2 & -Z & p_1 \\ Yp_1 & Yp_2 & -Z \end{bmatrix} \implies \lambda[X, Y, Z] = \begin{bmatrix} Yp_1 & Yp_2 & -Z \\ Yp_2 & -Z & p_1 \\ -Z & p_1 & p_2 \end{bmatrix}.$$

De maneira geral, para qualquer grupo cíclico, é possível realizar uma troca adequada de linhas de modo que a matriz associada a λ se torne simétrica. Isso nos conduz a uma nova pergunta: o que acontece quando o grupo de reflexão não é um grupo cíclico? Por exemplo, no caso do grupo diedral D_6 , será que o mesmo procedimento ainda nos permite obter uma matriz de apresentação simétrica?

Na Proposição 5.2 deste trabalho, obtemos uma matriz de apresentação para a aplicação 6-diedral. Ao analisá-la, observamos que, diferentemente do caso do grupo cíclico, não é tão direto obter uma matriz simétrica utilizando as mesmas operações aplicadas anteriormente. Diante disso, surge um outra pergunta:

Pergunta 3: Seja f uma aplicação de gráfico refletido de $(\mathbb{C}^n, 0)$ em $(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$. Como podemos obter uma matriz de apresentação λ de $f_*\mathcal{O}_n$ como um \mathcal{O}_{n+1} -módulo via f em termos da ação do grupo de forma que λ seja simétrica?

Na literatura temos o seguinte resultado:

Teorema 5.9. ([28], Teorema 11.6) *Seja $f : (X, x_0) \longrightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ finita, onde (X, x_0) é uma interseção completa de dimensão n . Então a matriz de apresentação λ de $\mathcal{O}_{X,x}$ sobre \mathcal{O}_{n+1} pode ser escolhida simétrica.*

Esse resultado nos permite concluir que sempre é possível obter uma matriz simétrica. Assim, uma possível direção a seguir é tentar escrever as matrizes E e A_Z do Teorema 3.2, de forma que a matriz λ resultante seja simétrica. O que, à primeira vista, não parece ser uma tarefa trivial.

Apêndice A

Geradores e aplicações de órbita para grupos de reflexão

Neste apêndice, descrevemos os geradores e as aplicações de órbita dos grupos $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$, \mathcal{D}_{2m} e os grupos G_i com $i \in \{4, 5, \dots, 22\}$. Esses grupos fazem parte da classificação de Shephard e Todd. Adotamos a notação ζ_j^k , para indicar que ζ é uma raiz primitiva j -ésima da unidade, elevada à potência k .

A.1 Geradores dos grupos $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$, \mathcal{D}_{2m} e G'_i s

Grupo $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$

$$\begin{bmatrix} \zeta_r^m & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \zeta_r^n \end{bmatrix},$$

onde $r = \text{mmc}(n, m)$.

Grupo \mathcal{D}_{2m}

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \zeta_m \\ \zeta_m^{m-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

Grupo G_4

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\zeta_{12}^2 + \zeta_{12} + 1 & \zeta_{12}^2 + \zeta_{12} - 1 \\ -\zeta_{12}^2 + \zeta_{12} + 1 & -\zeta_{12}^2 - \zeta_{12} + 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\zeta_{12}^2 + \zeta_{12} + 1 & -\zeta_{12}^2 - \zeta_{12} + 1 \\ \zeta_{12}^2 - \zeta_{12} - 1 & -\zeta_{12}^2 - \zeta_{12} + 1 \end{bmatrix}.$$

Grupo G_5

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\zeta_{12}^2 + \zeta_{12} + 1 & \zeta_{12}^2 + \zeta_{12} - 1 \\ -\zeta_{12}^2 + \zeta_{12} + 1 & -\zeta_{12}^2 - \zeta_{12} + 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\zeta_{12}^2 - \zeta_{12} + 1 & \zeta_{12}^2 + \zeta_{12} - 1 \\ -\zeta_{12}^2 + \zeta_{12} + 1 & -\zeta_{12}^2 + \zeta_{12} + 1 \end{bmatrix}.$$

Grupo G_6

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\zeta_{12}^2 + \zeta_{12} + 1 & \zeta_{12}^2 + \zeta_{12} - 1 \\ -\zeta_{12}^2 + \zeta_{12} + 1 & -\zeta_{12}^2 - \zeta_{12} + 1 \end{bmatrix}.$$

Grupo G_7

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\zeta_{12}^2 + \zeta_{12} + 1 & \zeta_{12}^2 + \zeta_{12} - 1 \\ -\zeta_{12}^2 + \zeta_{12} + 1 & -\zeta_{12}^2 - \zeta_{12} + 1 \end{bmatrix},$$

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\zeta_{12}^2 - \zeta_{12} + 1 & -\zeta_{12}^2 - \zeta_{12} + 1 \\ \zeta_{12}^2 - \zeta_{12} - 1 & -\zeta_{12}^2 + \zeta_{12} + 1 \end{bmatrix}.$$

Grupo G_8

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \zeta_4 \end{bmatrix}, \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \zeta_4 & -1 + \zeta_4 \\ -1 + \zeta_4 & 1 + \zeta_4 \end{bmatrix}.$$

Grupo G_9

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \zeta_8 + \zeta_8^7 & -\zeta_8 - \zeta_8^7 \\ -\zeta_8 - \zeta_8^7 & -\zeta_8 - \zeta_8^7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \zeta_8^2 \end{bmatrix}.$$

Grupo G_{10}

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\zeta_{12}^2 + \zeta_{12} + 1 & \zeta_{12}^2 + \zeta_{12} - 1 \\ -\zeta_{12}^2 + \zeta_{12} + 1 & -\zeta_{12}^2 - \zeta_{12} + 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \zeta_{12}^3 & -1 + \zeta_{12}^3 \\ -1 + \zeta_{12}^3 & 1 + \zeta_{12}^3 \end{bmatrix}.$$

Grupo G_{11}

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \zeta_{24}^6 \end{bmatrix}, \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \zeta_{24}^3 + \zeta_{24}^{21} & -\zeta_{24}^3 - \zeta_{24}^{21} \\ -\zeta_{24}^3 - \zeta_{24}^{21} & -\zeta_{24}^3 - \zeta_{24}^{21} \end{bmatrix}, \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\zeta_{24}^4 + \zeta_{24}^2 + 1 & \zeta_{24}^4 + \zeta_{24}^2 - 1 \\ -\zeta_{24}^4 + \zeta_{24}^2 + 1 & -\zeta_{24}^4 - \zeta_{24}^2 + 1 \end{bmatrix}.$$

Grupo G_{12}

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \zeta_8 + \zeta_8^7 & -\zeta_8 - \zeta_8^7 \\ -\zeta_8 - \zeta_8^7 & -\zeta_8 - \zeta_8^7 \end{bmatrix}, \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \zeta_8 + \zeta_8^7 & \zeta_8 + \zeta_8^7 \\ \zeta_8 + \zeta_8^7 & -\zeta_8 - \zeta_8^7 \end{bmatrix}, \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \zeta_8 \\ -\zeta_8^3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Grupo G_{13}

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \zeta_8 + \zeta_8^7 & -\zeta_8 - \zeta_8^7 \\ -\zeta_8 - \zeta_8^7 & -\zeta_8 - \zeta_8^7 \end{bmatrix}, \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \zeta_8 \\ -\zeta_8^3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Grupo G_{14}

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\zeta_{24}^4 + \zeta_{24}^2 + 1 & \zeta_{24}^4 + \zeta_{24}^2 - 1 \\ -\zeta_{24}^4 + \zeta_{24}^2 + 1 & -\zeta_{24}^4 - \zeta_{24}^2 + 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \zeta_{24}^3 + \zeta_{24}^{21} & \zeta_{24}^3 + \zeta_{24}^{21} \\ \zeta_{24}^3 + \zeta_{24}^{21} & -\zeta_{24}^3 - \zeta_{24}^{21} \end{bmatrix}.$$

Grupo G_{15}

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\zeta_{24}^4 + \zeta_{24}^2 + 1 & \zeta_{24}^4 + \zeta_{24}^2 - 1 \\ -\zeta_{24}^4 + \zeta_{24}^2 + 1 & -\zeta_{24}^4 - \zeta_{24}^2 + 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \zeta_{24}^3 + \zeta_{24}^{21} & -\zeta_{24}^3 - \zeta_{24}^{21} \\ -\zeta_{24}^3 - \zeta_{24}^{21} & -\zeta_{24}^3 - \zeta_{24}^{21} \end{bmatrix}.$$

Grupo G_{16}

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\zeta_{20}^6 - \zeta_{20}^3 + 1 & -\zeta_{20}^4 + \zeta_{20}^2 \\ \zeta_{20}^4 - \zeta_{20}^2 & -\zeta_{20}^6 + \zeta_{20}^3 + 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\zeta_{20}^6 - \zeta_{20}^3 + 1 & \zeta_{20}^4 - \zeta_{20}^2 \\ -\zeta_{20}^4 + \zeta_{20}^2 & -\zeta_{20}^6 + \zeta_{20}^3 + 1 \end{bmatrix}.$$

Grupo G_{17}

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\zeta_{20}^6 - \zeta_{20}^3 + 1 & -\zeta_{20}^4 + \zeta_{20}^2 \\ \zeta_{20}^4 - \zeta_{20}^2 & -\zeta_{20}^6 + \zeta_{20}^3 + 1 \end{bmatrix}.$$

Grupo G_{18}

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\zeta_{60}^{18} - \zeta_{60}^9 + 1 & -\zeta_{60}^{12} + \zeta_{60}^6 \\ \zeta_{60}^{12} - \zeta_{60}^6 & -\zeta_{60}^{18} + \zeta_{60}^9 + 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\zeta_{60}^{15} + \zeta_{60}^{10} + \zeta_{60}^5 & -\zeta_{60}^{15} + \zeta_{60}^{10} + \zeta_{60}^5 \\ -\zeta_{60}^{15} - \zeta_{60}^{10} + \zeta_{60}^5 & \zeta_{60}^{15} + \zeta_{60}^{10} - \zeta_{60}^5 \end{bmatrix}.$$

Grupo G_{19}

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\zeta_{60}^{10} + \zeta_{60}^5 + 1 & \zeta_{60}^{10} + \zeta_{60}^5 - 1 \\ -\zeta_{60}^{10} + \zeta_{60}^5 + 1 & -\zeta_{60}^{10} - \zeta_{60}^5 + 1 \end{bmatrix},$$

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\zeta_{60}^{18} - \zeta_{60}^9 + 1 & -\zeta_{60}^{12} + \zeta_{60}^6 \\ \zeta_{60}^{12} - \zeta_{60}^6 & -\zeta_{60}^{18} + \zeta_{60}^9 + 1 \end{bmatrix}.$$

Grupo G_{20}

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\zeta_{60}^{10} + \zeta_{60}^5 + 1 & \zeta_{60}^{10} + \zeta_{60}^5 - 1 \\ -\zeta_{60}^{10} + \zeta_{60}^5 + 1 & -\zeta_{60}^{10} - \zeta_{60}^5 + 1 \end{bmatrix},$$

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\zeta_{60}^{15} - \zeta_{60}^{13} + \zeta_{60}^{11} - \zeta_{60}^{10} + \zeta_{60}^9 + \zeta_{60}^7 + \zeta_{60}^5 - \zeta_{60} + 1 & -\zeta_{60}^{15} - \zeta_{60}^{13} + \zeta_{60}^{11} + \zeta_{60}^9 + \zeta_{60}^7 - \zeta_{60} \\ -\zeta_{60}^{15} - \zeta_{60}^{13} + \zeta_{60}^{11} + \zeta_{60}^9 + \zeta_{60}^7 - \zeta_{60} & \zeta_{60}^{15} + \zeta_{60}^{13} - \zeta_{60}^{11} - \zeta_{60}^{10} - \zeta_{60}^9 - \zeta_{60}^7 - \zeta_{60}^5 + \zeta_{60} + 1 \end{bmatrix}.$$

Grupo G_{21}

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\zeta_{60}^{15} - \zeta_{60}^{13} + \zeta_{60}^{11} - \zeta_{60}^{10} + \zeta_{60}^9 + \zeta_{60}^7 + \zeta_{60}^5 - \zeta_{60} + 1 & -\zeta_{60}^{15} - \zeta_{60}^{13} + \zeta_{60}^{11} + \zeta_{60}^9 + \zeta_{60}^7 - \zeta_{60} \\ -\zeta_{60}^{15} - \zeta_{60}^{13} + \zeta_{60}^{11} + \zeta_{60}^9 + \zeta_{60}^7 - \zeta_{60} & \zeta_{60}^{15} + \zeta_{60}^{13} - \zeta_{60}^{11} - \zeta_{60}^{10} - \zeta_{60}^9 - \zeta_{60}^7 - \zeta_{60}^5 + \zeta_{60} + 1 \end{bmatrix}.$$

Grupo G_{22}

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\zeta_{20}^6 + \zeta_{20}^4 + 1 & \zeta_{20}^7 - \zeta_{20}^5 + \zeta_{20}^3 + 1 \\ -\zeta_{20}^7 + \zeta_{20}^5 - \zeta_{20}^3 + 1 & \zeta_{20}^6 - \zeta_{20}^4 - 1 \end{bmatrix}.$$

A.2 Obtendo polinômios invariantes usando os programas Magma e Singular

No Capítulo 2 deste trabalho, observamos que um mesmo grupo de reflexão pode admitir diferentes representações. Com o auxílio do programa Magma ([4]; veja também [5]), é possível obter outro conjunto de geradores para esses grupos. A título de curiosidade, faremos aqui um breve comentário sobre como o Magma pode ser utilizado para encontrar tais geradores alternativos. Para isso, tomaremos o grupo G_4 como exemplo.

Na interface do Magma (veja [21]), digitamos o seguinte código para obter um conjunto de geradores para o grupo G_4 :

```
G:=ShephardTodd(4);
G;
S:=[g : g in G];
```

Ao submeter esse código, obtemos um conjunto de geradores para o grupo G_4 , apresentado da seguinte forma:

MatrixGroup(2, Cyclotomic Field of order 3 and degree 2) Generators:

$$\begin{bmatrix} \zeta_3 & 0 \\ -\zeta_3 - 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \zeta_3 + 1 \\ 0 & \zeta_3 \end{bmatrix}$$

Também é possível obter os polinômios invariantes do grupo G_4 a partir desses geradores. Para isso, utilizamos o seguinte código:

```
G:=ShephardTodd(4);
R:=InvariantRing(G);
InvariantsOfDegree(R,4);
```

O primeiro “4” em ShephardTodd(4) refere-se ao índice do grupo G_i na lista de Shephard e Todd, ou seja, ao grupo G_4 . Já o segundo “4” corresponde ao grau do polinômio invariante que estamos consultando.

Resultando em:

$$x^4 + \frac{1}{3}(8\zeta_3 + 4)x^3y - 2x^2y^2 + \frac{1}{3}(-8\zeta_3 - 4)xy^3 + y^4$$

Calculando agora o polinômio invariante de grau 6, obtemos:

```
InvariantsOfDegree(R,6);
```

$$x^6 + (4\zeta_3 + 2)x^5y - 5x^4y^2 - 5x^2y^4 + (-4\zeta_3 - 2)xy^5 + y^6.$$

Portanto, o Magma mostra-se uma ferramenta útil para, de forma prática, obter os geradores dos grupos de reflexão G_i e seus respectivos polinômios invariantes.

Cabe destacar que também é possível utilizar o programa Singular para determinar os polinômios invariantes do grupo G_4 , por meio da biblioteca `finvar.lib`. A seguir, apresentamos dois exemplos: o primeiro referente ao grupo G_4 e o segundo ao grupo G_8 .

Inicialmente, carregamos a biblioteca `finvar.lib`, e em seguida definimos o anel e o polinômio minimal.

```
> ring r=(0,a),(x,y),ds;
> minpoly=rootofUnity(12);
```

Agora precisamos explicitar os geradores do grupo G_4 que são dados por:

```
> matrix r1[2][2]=(-a2+a+1)/2,(a2+a-1)/2,(-a2+a+1)/2,(-a2-a+1)/2;
> matrix r2[2][2]=(-a2+a+1)/2,(-a2-a+1)/2,(a2-a-1)/2,(-a2-a+1)/2;
```

Por fim, escrevemos o seguinte comando

```
list L=primary_invariants(r1,r2);
```

O qual nos fornece três entradas, mas apenas o `L[1]` apresenta os polinômios invariantes do grupo, que são::

```
L[1];
_[1,1]=x4+(4a2-2)*x2y2+y4
_[1,2]=x5y-xy5
```

Portanto, $x^4 + (4a^2 - 2)x^2y^2 + y^4$ e $x^5y - xy^5$ são polinômios invariantes do grupo G_4 . De maneira análoga, podemos aplicar o mesmo procedimento para qualquer outro grupo. A seguir, ilustramos o caso do grupo G_8 .

```
ring r=(0,a),(x,y),ds;
minpoly=rootofUnity(4);
matrix j1[2][2]=1,0,0,a;
matrix j2[2][2]=(1+a)/2,(-1+a)/2,(-1+a)/2,(1+a)/2;
```

```
list L=primary_invariants(j1,j2);
L[1];
_[1,1]=x8+14*x4y4+y8
_[1,2]=x12-33*x8y4-33*x4y8+y12
```

Portanto, $x^8 + 14x^4y^4 + y^8$ e $x^{12} - 33x^8y^4 - 33x^4y^8 + y^{12}$ são polinômios invariantes do grupo G_8 . Dessa forma, concluímos que os programas Magma e Singular se mostram ferramentas úteis para a obtenção dos polinômios invariantes de um grupo. Dando continuidade, na próxima seção apresentamos duas tabelas que contêm as aplicações de órbita e as ordens dos grupos de reflexão abordados nesta seção.

A.3 Aplicações de órbita

Nesta seção, nas tabelas A.1 e A.2, descrevemos as aplicações de órbita dos grupos de reflexão de posto 2, a saber: $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$, \mathcal{D}_{2m} e os grupos G_i com $i \in \{4, 5, \dots, 22\}$. Esses grupos pertencem à classificação de Shephard-Todd.

Na tabela (A.1), apresentamos as aplicações de órbita correspondentes aos grupos $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$, \mathcal{D}_{2m} e G_i com $i \in \{4, 5, \dots, 14, 15\}$.

Tabela A.1: Aplicação de órbita dos grupos de reflexão.

Grupo	Aplicação de órbita	Ordem
$\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$	(x^n, y^m)	mn
\mathcal{D}_{2m}	$(xy, x^m + y^m)$	$2m$
G_4	$(x^4 + 2i\sqrt{3}x^2y^2 + y^4, x^5y - xy^5)$	24
G_5	$((x^4 + 2i\sqrt{3}x^2y^2 + y^4)^3, x^5y - xy^5)$	72
G_6	$(x^4 + 2i\sqrt{3}x^2y^2 + y^4, (x^5y - xy^5)^2)$	48
G_7	$((x^4 + 2i\sqrt{3}x^2y^2 + y^4)^3, (x^5y - xy^5)^2)$	144
G_8	$(x^8 + 14x^4y^4 + y^8, x^{12} - 33x^8y^4 - 33x^4y^8 + y^{12})$	96
G_9	$(x^8 + 14x^4y^4 + y^8, (x^{12} - 33x^8y^4 - 33x^4y^8 + y^{12})^2)$	192
G_{10}	$((x^8 + 14x^4y^4 + y^8)^3, x^{12} - 33x^8y^4 - 33x^4y^8 + y^{12})$	288
G_{11}	$((x^8 + 14x^4y^4 + y^8)^3, (x^{12} - 33x^8y^4 - 33x^4y^8 + y^{12})^2)$	576
G_{12}	$(x^5y - xy^5, x^8 + 14x^4y^4 + y^8)$	48
G_{13}	$((x^5y - xy^5)^2, x^8 + 14x^4y^4 + y^8)$	96
G_{14}	$(x^5y - xy^5, (x^{12} - 33x^8y^4 - 33x^4y^8 + y^{12})^2)$	144
G_{15}	$((x^5y - xy^5)^2, (x^{12} - 33x^8y^4 - 33x^4y^8 + y^{12})^2)$	288

Agora, na Tabela A.2, descrevemos as aplicações de órbita dos grupos G_i com $i \in \{16, 17, \dots, 21, 22\}$. Para isso consideramos os seguintes polinômios:

$$f := x^{12} + \frac{22}{\sqrt{5}}x^{10}y^2 - 33x^8y\frac{44}{\sqrt{5}}x^6y^6 - 33x^4y^8 + \frac{22}{\sqrt{5}}x^2y^{10+y^{12}},$$

$$h := x^{20} - \frac{38}{3}\sqrt{5}x^{18}y^2 - 19x^{16}y^4 - 152\sqrt{5}x^{14}y^6 - 494x^{12}y^8 + \frac{988}{3}\sqrt{5}x^{10}y^{10} \\ - 494x^8y^{12} - 152\sqrt{5}x^6y^{14} - 19x^4y^{16} - \frac{38}{3}\sqrt{5}x^2y^{18} + y^{20}.$$

e

$$t := x^{29}y - \frac{116}{9\sqrt{5}}x^{27}y^3 + \frac{1769}{25}x^{25}y^5 + \frac{464}{\sqrt{5}}x^{23}y^7 + \frac{2001}{5}x^{21}y^9 - \frac{2668}{3\sqrt{5}}x^{19}y^{11} + \frac{12673}{5}x^{17}y^{13} \\ - \frac{12673}{5}x^{13}y^{17} + \frac{2668}{3\sqrt{5}}x^{11}y^{19} - \frac{2001}{\sqrt{5}}x^9y^{21} - \frac{464}{\sqrt{5}}x^7y^{23} - \frac{1769}{25}x^5y^{25} + \frac{116}{9\sqrt{5}}x^3y^{27} - xy^{29}.$$

Assim,

Tabela A.2: Aplicação de órbita dos grupos de reflexão.

Grupo	Aplicação de órbita	Ordem
G_{16}	(h, t)	600
G_{17}	(h, t^2)	1200
G_{18}	(h^3, t)	1800
G_{19}	(h^3, t^2)	3600
G_{20}	(f, t)	360
G_{21}	(f, t^2)	720
G_{22}	(f, h)	240

Para maiores detalhes sobre as aplicações de órbita de grupos de reflexão, consulte [20].

Apêndice B

Biblioteca no Singular para aplicações de reflexão

Neste apêndice, apresentamos uma biblioteca que está em desenvolvimento no programa Singular para calcular a curva dos pontos duplos de aplicações de gráfico refletido de $(\mathbb{C}^2, 0)$ para $(\mathbb{C}^3, 0)$. Agradecemos ao professor Dr. Aldício Miranda pela ajuda no desenvolvimento dessa biblioteca no singular.

Vamos considerar o grupo G_6 , com o objetivo de ilustrar o funcionamento do código. Inicialmente, é necessário carregar algumas bibliotecas do Singular, a saber: `finvar.lib`, `poly.lib`, `hnoether.lib` e `ring.lib`. Recordemos que os geradores do grupo G_6 são expressos em termos de uma raiz primitiva 12^a da unidade. Por esse motivo, é preciso também incluir seu polinômio minimal. De modo geral, isso pode ser feito com o comando `minpoly=rootofUnity(a)`, onde a representa uma raiz primitiva a -ésima da unidade. No caso do G_6 , temos $a = 12$.

```
proc DfG6(poly h)

    option(noredefine);
    LIB "finvar.lib";
    LIB "polylib.lib";
    LIB "hnoether.lib";
    LIB "ring.lib";
    string RingNameUser=nameof(basering);
    execute("int E=ord\_test(\"+RingNameUser+\")");

    if (E!=-1)
    \{
```

```
print("//No local order ring!"); mensagem de erro se o anel não for
local.
\}
execute("setring "+RingNameUser);
ring r1=(0,a),(x,y),ds;
minpoly = rootofUnity(12);
```

Dando continuidade à construção do ambiente no Singular, após definir o anel e o polinômio minimal, passamos à inserção dos geradores do grupo G_6 . Vale lembrar que, na equação dos pontos duplos, é necessário considerar todos os elementos do grupo, exceto a matriz identidade. Para isso, solicitamos ao Singular que gere todos os elementos do grupo por meio do comando `list g=group_reynolds(A,B)`, onde A e B são os geradores do grupo G_6 .

```
\noindent matrix A[2][2]=(1+a-a2)/2, (-1+a+a2)/2,(1+a-a2)/2,(1-a-a2)/2;
matrix B[2][2]=1,0,0,-1;
list g=group\_reynolds(A,B);
```

Em seguida, é necessário remover a matriz identidade da lista de elementos do grupo. Para isso, utilizamos os seguintes comandos:

```
list g1=delete(g,1);
int sg1 = size(g1);
matrix Matrix\_Id2[2][2]=1,0,0,1;
list G;

for(int k=1; k <= sg1; k++)

\{
if (g1[k]==Matrix\_Id2)
\{
G=delete(g1,k);
\}
\}
```

Agora, é necessário definir um novo anel, no qual possamos descrever a ação do grupo G sobre o polinômio h .

```

ring r2=(0,a),(x,y,u,v),ds;
minpoly = rootofUnity(12);

\noindent execute("poly h= imap("+RingNameUser+",h)");
list G=imap(r1,G);
int sG = size(G);
matrix V[2][1]=u,v;
poly haux=subst(h,x,u,y,v);
for(int i=1; i <=sG; i++)
\{

matrix GiV=G[i]*V;

poly h(i)=subst(h,x,GiV[1,1],y,GiV[2,1]);

poly hk(i)=haux-h(i);
\}

poly aux =1; poly Prod;

for(int i=1; i <= sG; i++)
\{

Prod = (h-h(i))*aux;
aux  = Prod;

\}

```

Por fim, substituímos em Prod as variáveis u e v por x e y . Em seguida, criamos um novo anel e formamos o quociente desse novo Prod pelo jacobiano da aplicação de órbita. Vejamos:

```

ideal Df1=subst(Prod,u,x,v,y);

ring RDf=(0,a),(x,y),ds;
minpoly = rootofUnity(12);
ideal Df1=imap(r2,Df1);
ideal jac = x13y+(-8a2+4)*x11y3-11*x9y5+11*x5y9+(8a2-4)*x3y11-xy13;

```

```
ideal Df= quotient(Df1,jac);
print("");
print("//The defining equation of D(f), where
$f(x,y)=((x5y-xy5)^2, x4+(4a2-2)*(x2y2)+y4, h(x,y))$, is given by:");
print("");
print(Df);
print("");
print("//The factorization of the equation of D(f) is:");
print("");
factorize(Df[1]);
execute("setring "+RingNameUser);
//volta para o anel definido inicialmente pelo usuário
exportto(Top, RingNameUser);
```

A seguir, apresentaremos um exemplo utilizando a biblioteca construída.

Exemplo B.1. No prompt do Singular, digitamos a biblioteca, ou seja, LIB “G6example.lib”;

Após carregar o pacote colocamos os seguintes comandos:

```
ring r=0,(x,y),ds;
DfG6(x+2y);
```

```
Milena Gama@DESKTOP-QRGJ0LB ~
$ singular
SINGULAR
A Computer Algebra System for Polynomial Computations
by: W. Decker, G.-M. Greuel, G. Pfister, H. Schoenemann
FB Mathematik der Universitaet, D-67653 Kaiserslautern
> LIB "G6example.lib";
// ** loaded /usr/local/bin/./share/singular/LIB/G6example.lib (2024-12-22,$")
> ring r=0,(x,y),ds;
> DfG6(x+2y);
// ** loaded /usr/local/bin/./share/singular/LIB/finvar.lib (4.3.0.1,Feb_2022)
// ** loaded /usr/local/bin/./share/singular/LIB/algebra.lib (4.2.0.1,Mar_2021)
// ** loaded /usr/local/bin/./share/singular/LIB/ring.lib (4.1.2.0,Feb_2019)
// ** loaded /usr/local/bin/./share/singular/LIB/primdec.lib (4.2.1.1,Jul_2021)
// ** loaded /usr/local/bin/./share/singular/LIB/absfact.lib (4.1.2.0,Feb_2019)
// ** loaded /usr/local/bin/./share/singular/LIB/triang.lib (4.1.2.0,Feb_2019)
// ** loaded /usr/local/bin/./share/singular/LIB/random.lib (4.1.2.0,Feb_2019)
// ** loaded /usr/local/bin/./share/singular/LIB/polylib.lib (4.2.0.0,Dec_2020)
// ** loaded /usr/local/bin/./share/singular/LIB/inout.lib (4.1.2.0,Feb_2019)
// ** loaded /usr/local/bin/./share/singular/LIB/general.lib (4.1.2.0,Feb_2019)
// ** loaded /usr/local/bin/./share/singular/LIB/elim.lib (4.1.2.0,Feb_2019)
// ** loaded /usr/local/bin/./share/singular/LIB/matrix.lib (4.1.2.0,Feb_2019)
// ** loaded /usr/local/bin/./share/singular/LIB/nctools.lib (4.1.2.0,Feb_2019)
// ** loaded /usr/local/bin/./share/singular/LIB/polylib.lib (4.2.0.0,Dec_2020)
// ** loaded /usr/local/bin/./share/singular/LIB/hnoether.lib (4.1.2.0,Feb_2019)
// ** loaded /usr/local/bin/./share/singular/LIB/sing.lib (4.2.0.2,May_2021)
// ** loaded /usr/local/bin/./share/singular/LIB/primitiv.lib (4.1.2.0,Feb_2019)
// ** loaded /usr/local/bin/./share/singular/LIB/ring.lib (4.1.2.0,Feb_2019)
```

Assim, obtemos uma equação para a curva de pontos duplos $D(f)$ de f .

B. Biblioteca no Singular para aplicações de reflexão

```
//The defining equation of D(f), where  $f(x,y)=(x^5y-xy^5)^2$ ,  $x^4+(4a^2-2)*(x^2y^2)+y^4$ ,  $h(x,y)$ , is given by:
```

49665417931935*x33+(-391459426375680a2+1301605049190186)*x32y+(-9712401879818568a2+15030430268800884)*x31y2+(-98125143021488688a2+97401317080751928)*x30y3+(-601187333869377664a2+389819113475524559)*x29y4+(-2669216066683283712a2+966032081076522170)*x28y5+(-9337977713346047648a2+1183505101309444322)*x27y6+(-24585947056585879616a2+331027029017694080)*x26y7+(-35069119372579158272a2+2926538668403497203)*x25y8+(64459823644212785664a2+51490130077250639426)*x24y9+(650929236967462159320a2+195045738500496236388)*x23y10+(2602263019412574597648a2+137323276317455289624)*x22y11+(7102252514497520794240a2-1827212743633771420877)*x21y12+(13962725870664239339776a2-10243271879876054168718)*x20y13+(-17786161896925903710208a2-31700271369581056866128)*x19y14+(4297380977319702393600a2-66990178947808159480352)*x18y15+(-45280436798399269524992a2-95375226932625320094723)*x17y16+(-13190057659590903348224a2-65198271070656696202626)*x16y17+(-202129151647194683732760a2+80984423039268231174524)*x15y18+(-132294542037129193298704a2+337367505411505875024104)*x14y19+(215024051538192881802368a2+57438626612891034448381)*x13y20+(860116570059599712938240a2+58088596574167047220686)*x12y21+(160471919082765262460342a2+203893451227339930278912)*x11y22+(2101476485416303651337280a2-36144839533580645443584)*x10y23+(2093806868616268999180032a2-884507216122854194878847)*x9y24+(-1618632804105571157705216a2-1068903512493071024925834)*x8y25+(-964157142833015339938952a2-892383662589858671428180)*x7y26+(429341632666782934059824a2-54907992311340577053416)*x6y27+(-13329271134065777828224a2-250676957362347856028735)*x5y28+(2358181025032892786432a2-830437371608131831477722)*x4y29+(-95960151883005769344a2-18994038825871295530416)*x3y30+(-1126809363748975316736a2-2738588562369027749472)*x2y31+(-239425935912347258880a2-207909421105132058832)*xy32+(-17148595610992435200a2-5095658071757092320)*v33

E também a fatoração da $D(f)$.

```
//The factorization of the equation of D(f) is:
```

[illegible]

A livreria para a matriz de apresentação, baseada nos resultados deste trabalho, está em desenvolvimento em colaboração com Peñafof Sanchis, Aldício Miranda e demais colaboradores.

Referências Bibliográficas

- [1] Bruce, J. W.: *Projections and reflections of generic surface in \mathbb{R}^3* . Math. Scand., **54** 262-278, (1984).
- [2] Bruce, J. W. and Marar, W. L.: *Images and varieties*. Topology, 3. J. Math. Sci. **82** 3633-3641, (1996).
- [3] Borges Zampiva, J.R., Penafort-Sanchis, G., Oréface-Okamoto, B., João Tomazella, J.N.: *Double points and image of reflection maps*, preprint arXiv:2312.06792v1.
- [4] Bosma, W., Cannon, J. and Playoust, C.: *The Magma algebra system. I. The user language, J.*, Symbolic Comput., 25, p. 235-265, (1997).
- [5] Bosma, W., Cannon, J. J., Fieker, C. and Steel, A. (eds): *Handbook of Magma functions*, Edition 2.16, 5017 pages, (2010).
- [6] Chirka, E. M.: *Complex Analytic sets*. Translated from the Russian by R. A. M. Hoksbergen. Mathematics and its Applications (Soviet Series), 46. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, (1989).
- [7] Decker, W.; Greuel, G.-M.; Pfister, G.; Schönemann, H.: SINGULAR 4-0-2, *A computer algebra system for polynomial computations*, <http://www.singular.uni-kl.de>, (2019).
- [8] Eisenbud, D.: *Commutative Algebra: with a View Toward Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics, 510. Springer (1995).
- [9] Fitting, H.: *Die Determinantenideale einer Moduls*, Jahresber. Deutscher Math. Verein. 46, p. 195-220, (1936).
- [10] Fulton, W.: *Intersection Theory*, Springer Science & Business Media, (2013).
- [11] Gama, M.B., Silva, O. N.: *On reflection maps from n -space to $n+1$ -space*, preprint arXiv:2408.11669v1.

- [12] Gama, M.B., Silva, O. N.: *Answers to some questions on the double point curve of a map germ*.
- [13] Greuel, G.-M.; Lossen, C; Shustin, E.: *Introduction to singularities and deformations*, Springer Monographs in Mathematics. Springer, Berlin, (2007).
- [14] Grove, L.C., Benson, C.T.: *Finite Reflection Groups*. Graduate Texts in Mathematics, vol. 99. Springer, New York (1985)
- [15] Gunning, R. C.: *Introduction to Holomorphic Functions of Several Variables*, v. II, Belmont: Wadsworth, 218 p, (1990).
- [16] Hernandez, M. E.; Miranda, A. J.; Peñafort-Sanchis, G.: *A presentation matrix algorithm for $f_*\mathcal{O}_{X,x}$* . Topology and its Applications, **234**, 440–451, (2018).
- [17] Humphreys, J.: *Reflection Groups and Coxeter Groups*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **29** (1990).
- [18] De Jong, T and Pfister, G.: *Local analytic geometry: Basic theory and applications.*, In: Advanced Lectures in Mathematics. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 328 p., (2000).
- [19] Kane, R. M.: *Reflection groups and invariant theory*. New York: Springer, (2001).
- [20] Lehrer, G. I. and Taylor, D. E.: *Unitary reflection groups*. Cambridge University Press **20** (2009).
- [21] Magma, <https://magma.maths.usyd.edu.au/calc/>.
- [22] Marar, W. L. and Mond, D. *Multiple point schemes for corank 1 maps* J. London Math. Soc. sér. 2, v. 39, n. 3, p. 553-567, (1989).
- [23] Marar, W. L. *Mapping fibrations and multiple point schemes* Tese (Doutorado em Filosofia) Instituto de Matemática da Universidade de Warwick (1989).
- [24] Marar, W. L. and Nuño-Ballesteros, J.J.: *A note on finite determinacy for corank 2 map germs from surfaces to 3-space*. Math. Proc. Camb. Philos. Soc.. Cambridge University Press **145** 153-163, (2008).
- [25] Marar, W. L., Nuño-Ballesteros, J.J. and Peñafort-Sanchis, G.: *Double point curves for corank 2 map germs from \mathbb{C}^2 to \mathbb{C}^3* . Topology Appl. **159** 526-536 (2012).
- [26] Matsumura, H.: *Commutative ring Theory*. Cambridge University Press, Cambridge (1989).

- [27] Mond, D.: *The number of vanishing cycles for a quasihomogeneous mapping from \mathbb{C}^2 to \mathbb{C}^3* ; Quart. J. Math. Oxford **42** (2), (1991) 335–345.
- [28] Mond, D., Nuño-Ballesteros, J.J.: *Singularities of Mappings*. volume 357 of Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag, New York, first edition, (2020).
- [29] Mond, D. and Pellikaan, R.: *Fitting ideals and multiple points of analytic mappings*, Separata de: E. R. de Arellano (Ed.) Algebraic Geometry and Complex Analysis, Pátzcuaro 1987. Springer-Verlag, Lecture Notes in Math., sér. 1414, 107-161, (1989).
- [30] Mond, D.: *On the classification of germs of maps from \mathbb{R}^2 to \mathbb{R}^3* . Proc. Lond. Math. Soc. **3** 333-369, (1985).
- [31] Mond, D.: *Some remarks on the geometry and classification of germs of maps from surfaces to 3-space*. Topology **26** 361-383, (1987).
- [32] Mond, D.: *Vanishing cycles for analytic maps* Separata de: D. Mond; J. Montaldi (Eds). Singularity Theory and its Applications: Warwick 1989 Parte I: Geometric Aspects of Singularities. Springer-Verlag, Lectures Notes in Math., sér. 1462, p. 221-234, (1991).
- [33] Noether, E.: *Der endlichkeitssatz der invarianten endlicher gruppen*. Math. Ann. **77** 89-93, (1916).
- [34] Peñafort Sanchis, G.: *Reflection maps*. Math. Ann., **378** 559-598, (2020).
- [35] Peñafort Sanchis, G.: *The Geometry of double fold maps* Jour. Sing., **10** 250-263, (2014).
- [36] Piene, R. *Ideals associated to a desingularization*. Lecture Notes in Math. Springer, **732** 503–517, (1979).
- [37] presmatrix.txt (*Biblioteca para Software Singular*). Disponível em: <https://sites.google.com/site/aldicio/home>. Acesso em: 12 Maio (2025).
- [38] Ruas, M.A.S.; Silva, O.N.: *Whitney equisingularity of families of surfaces in \mathbb{C}^3* , Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **166**, no. 2, (2019) 353–369.
- [39] Sanchis, G. P.: *Multiple point spaces of finite holomorphic maps*. Tese de Doutorado. Universitat de València. Facultat de Matemàtiques, (2015).

- [40] Serre, J. P.: *Linear representations of finite groups*. New York: Springer, **42**, (1977).
- [41] Serre, J. P.: *Local algebra*. Springer Monographs in Mathematics, SpringerVerlag, Berlin, (2000).
- [42] Shephard, G., Tood, J. A.: *Finite unitary reflection groups*. Can. J. Math. **6** 274-304, (1954).
- [43] Silva, O.N.: *On the topology of the transversal slice of a quasi-homogeneous map germ.*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 176(2): 339?359, (2024).
- [44] Silva, O.N.: *Surfaces with non-isolated singularities*, PhD thesis, São Carlos, Universidade de São Paulo, (2017), available on <http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/55/55135/tde-10052017-085440/pt-br.php> Accessed 14 June (2024).
- [45] Surfer, <https://imaginary.org/program/surfer>.
- [46] Whitney, H. *The Singularities of a Smooth n -Manifolds $(2n-1)$ -space*. Ann. Math. sér. 2, v.45, n. 2, p. 247-293, (1944).