Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Problemas do tipo Alt-Phillips: explorando geometrias em fronteiras livres

por

Aureliana Belém Tavares

João Pessoa - PB

Fevereiro de 2025

Problemas do tipo Alt-Phillips: explorando geometrias em fronteiras livres

por

Aureliana Belém Tavares

sob a orientação do

Prof. Dr. Damião Júnio Gonçalves Araújo

Dissertação apresentada à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

João Pessoa – PB

Fevereiro de 2025

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

T231p Tavares, Aureliana Belém.
Problemas do tipo Alt-Phillips : explorando geometrias em fronteiras livres / Aureliana Belém Tavares. - João Pessoa, 2025.
69 f. : il.

Orientação: Damião Júnio Gonçalves Araújo.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Operadores não-lineares. 2. Problema de Alt-Phillips. 3. Problemas de fronteira livre. 4. Regularidade de soluções. I. Araújo, Damião Júnio Gonçalves. II. Título.

UFPB/BC CDU 517.988.5(043)

Elaborado por RUSTON SAMMEVILLE ALEXANDRE MARQUES DA SILVA - CRB-15/0386

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
CAMPUS I – DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ATA DE DEFESA DE MESTRADO JUNTO AO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA, REALIZADA NO DIA 20 DE FEVEREIRO DE 2025.

Ao vigésimo dia de fevereiro de dois mil e vinte e cinco, às 17:00 horas, no Auditório do Departamento de Matemática/CCEN da Universidade Federal da Paraíba, foi aberta a sessão pública de Defesa de Dissertação intitulada "**Problemas do tipo Alt-Phillips: explorando geometrias em fronteiras livres**", da aluna **Aureliana Belém Tavares**, que havia cumprido, anteriormente, todos os requisitos para a obtenção do grau de Mestra em Matemática, na área de **Análise**, sob a orientação do Prof. Dr. Damião Júnio Gonçalves Araújo. A Banca Examinadora, indicada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática, foi composta pelos professores: Dr. Damião Júnio Gonçalves Araújo (Orientador), Dr. Flank David Morais Bezerra (membro interno), Dr. Erwin Topp Paredes (membro externo/UFRJ) e Dr. João Vitor da Silva (membro externo/Unicamp). O professor Damião Júnio Gonçalves Araújo, em virtude da sua condição de orientador, presidiu os trabalhos e, depois das formalidades de apresentação, convidou a aluna a discorrer sobre o conteúdo da dissertação. Concluída a explanação, a candidata foi arguida pela banca examinadora que, em seguida, sem a presença da aluna, finalizando os trabalhos, reuniu-se para deliberar tendo concedido à candidata a menção: **aprovada.** E, para constar, foi lavrada a presente ata que será assinada pelos membros da Banca Examinadora.

João Pessoa, 20 de fevereiro de 2025.

gov.br Documento assinado digitalmente
DAMIAO JUNIO GONCALVES ARAUJO
Data: 24/02/2025 10:18:45-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Damião Júnio Gonçalves Araújo

gov.br Documento assinado digitalmente
FLANK DAVID MORAIS BEZERRA
Data: 24/02/2025 11:16:57-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Flank David Morais Bezerra

[redacted]

Erwin Topp Paredes

gov.br Documento assinado digitalmente
JOAO VITOR DA SILVA
Data: 26/02/2025 10:21:33-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

João Vitor da Silva

À minha mãe, Cicera.
À meu pai, Antônio.
À minha irmã, Aline.

Agradecimentos

- Primeiramente, agradeço a Deus por me dar forças ao longo de toda essa jornada.

- À minha mãe, Cicera Belém Tavares, pelo seu amor incondicional.

- Aos meus pais, Cicera Belém Tavares e Antonio Samuel Morais Tavares, por terem sido pilares essenciais em toda a minha trajetória.

- À minha irmã, Aline Belém Tavares, por ter sido minha primeira fonte de admiração.

- À minha irmã de graduação, Jucy Saraiva Sindeaux, por ser minha melhor amiga e ter acreditado em mim.

- Ao professor José Tiago Nogueira Cruz, por ter me motivado a continuar na carreira acadêmica.

- Aos meus colegas de pós-graduação, Aurilio Rodrigues Machado Filho e Francisco Jonatã Chaves de Lima, sem a amizade de vocês, eu provavelmente teria desistido no primeiro semestre.

- Ao grupo "Bolo de Morango", por compartilharem comigo os desafios e as responsabilidades do mestrado.

- A Anderson Felipe de Souza Barbosa, por ter sido meu apoio e meu refúgio.

- Meu sincero agradecimento ao Professor Damião Júnio Gonçalves Araújo pela orientação durante o desenvolvimento deste trabalho. Sou grata, não só pela sua disponibilidade e atenção, mas também pelas enriquecedoras experiências e aprendizados compartilhados, os quais foram essenciais para a realização dessa etapa tão significativa na minha trajetória.

- Aos professores do Departamento de Matemática da UFPB pelos valiosos ensinamentos ao longo de minha trajetória acadêmica. Em especial, agradeço ao Professor Uberlândio Batista Severo, ao Professor Flank David Morais Bezerra, ao Professor Marcio Silva Santos e ao Professor Otoniel Nogueira da Silva, por sua dedicação e empenho no processo de ensino, sempre com comprometimento e excelência.

- À CAPES, expresso meu sincero agradecimento pelo apoio financeiro fornecido durante este período.

Resumo

Neste trabalho, com base no artigo *On the Fully Nonlinear Alt–Phillips Equation* de Yijing Wu e Hui Yu [17], investigamos a versão totalmente não-linear do problema de Alt-Phillips no caso não-singular. Apresentamos uma análise detalhada sobre aspectos de regularidade ótima para soluções não-negativas dessa equação, bem como para as fronteiras livres formadas por essas soluções. É observado que essas fronteiras livres são superfícies $(n-1)$-dimensionais com suavidade C^1 nas proximidades dos pontos regulares da fronteira livre.

Palavras-chave: Problema de Alt-Phillips; Operadores totalmente não-lineares; Problemas de fronteira livre; Regularidade de soluções.

Abstract

In this work, based on the article *On the Fully Nonlinear Alt–Phillips Equation* by Yijing Wu and Hui Yu [17], we investigate the fully nonlinear version of the Alt-Phillips problem in the non-singular case. We present a detailed analysis of the optimal regularity aspects for non-negative solutions of this equation, as well as for the free boundaries formed by these solutions. It is observed that these free boundaries are $(n-1)$-dimensional surfaces with C^1 smoothness in the neighborhoods of regular points of the free boundary.

Keywords: Alt-Phillips problem; Fully nonlinear operators; Free boundary problems; Regularity of solutions.

Sumário

Notações

Aqui estão algumas notações adotadas ao longo do texto:

- Seja $u : B \to \mathbb{R}$ uma função real definida em um conjunto $B \subseteq \mathbb{R}^n$. A notação $\sup_B u$ representa o menor número real que é maior ou igual a todos os valores de $u(x)$ para $x \in B$. Analogamente, $\inf_B u$ é o maior número real que é menor ou igual a todos os valores de $u(x)$ com $x \in B$;
- $O \in M_d$ matriz nula do espaço M_d das matrizes quadráticas $d \times d$;
- $C^2(\Omega)$ espaço das funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ que possuem todas as derivadas parciais de primeira e segunda ordem contínuas em Ω.
- $(x \cdot y)$ - produto interno entre $x \in \mathbb{R}^d$ e $y \in \mathbb{R}^d$;
- $P \geq 0$ - P é uma matriz definida não-negativa, isto é, sua forma quadrática $(P\xi \cdot \xi) \geq 0$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^d$;
- $[X, Y] = \{(1-t)X + tY; t \in [0,1]\}$;
- $DF(X) \cdot Y$ - Derivada de F aplicada no ponto X na direção Y;
- $F \circ \lambda$ - Composição entre as aplicações F e λ;
- $\left(\frac{dF\circ\lambda}{dt}(t_0)\right)^+ = \lim\limits_{t \longrightarrow 0^+} \dfrac{F \circ \lambda(t_0 + t) - F \circ \lambda(t_0)}{t}$;
- Q^T - Indica a matriz transposta da matriz Q;
- Du - Gradiente da função u;
- D^2u - Hessiana da função u;

- I - Matriz identidade;

- M^{-1} indica a matriz inversa de uma determinada matriz M quadrática;

- $\mathrm{Sym}(n;\mathbb{R})$ representa o espaço das matrizes simétricas reais de ordem n;

- $\nu \otimes \nu$ - Matriz quadrática formada pela produto da matriz $\nu_{d\times 1}$ com sua transposta $\nu^T_{1\times d}$;

- $\{u > 0\} = \{x; u(x) > 0\}$

- $\partial \{u > 0\}$ representa o conjunto formado pelos pontos da fronteira do conjunto $\{u > 0\}$;

- $|\{u > 0\}|$ - Volume $(n-1)-$dimensional do conjunto $\{u > 0\}$;

- $\|u\|_{C^{2,\alpha}(B)}$ é a norma de Hölder $C^{2,\alpha}$ de uma função u em um conjunto $B \subset \mathbb{R}^n$;

- $D_e u(x) = (Du(x) \cdot e)$;

- $D_{ee} u(x) = (D^2 u(x) e \cdot e)$;

- $H^1_g(\Omega)$ é o espaço das funções que pertencem a $H^1(\Omega)$ e coincidem com a função g sobre $\partial\Omega$;

- Seja $v = (v_1, \cdots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, então $v \otimes v$ é a matriz $n \times n$ em que o elemento que está na i-ésima linha e j-ésima coluna será $v_i v_j$.

Introdução

Esta dissertação tem como base o trabalho de Yijing Wu e Hui Yu [17]. Procurou-se, ao longo deste estudo, abordar de maneira mais detalhada eventuais omissões ou pontos pouco explorados no artigo [17], com o intuito de tornar o conteúdo mais claro e diminuir a necessidade de consultas complementares. Todas as afirmações consideradas evidentes foram cuidadosamente analisadas, verificadas e incorporadas a esta dissertação, visando facilitar a compreensão do problema Alt-Phillips totalmente não-linear, descrito pela seguinte equação:

$$\begin{cases} F(D^2u) = u^{\gamma-1} & \text{em } \Omega \\ u \geq 0 & \text{em } \Omega \end{cases} \tag{1}$$

em que, são considerados $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ aberto e limitado, $\gamma \in (1,2)$ e F é um operador diferenciável, convexo e uniformemente elíptico.

É importante destacar que o caso $F(M) = \text{trace}(M)$ é considerado clássico, pois se reduz ao operador Laplaciano. Nesse contexto, a equação correspondente é dada por

$$\Delta u = u^{\gamma-1}. \tag{2}$$

Esse problema está relacionado ao comportamento de sistemas de reação-difusão em que a difusão de reagentes dentro de um catalisador permeável pode limitar a taxa de reação. Esse fenômeno é precisamente abordado no livro The Mathematical Theory of Diffusion and Reaction in Permeable Catalysts de R. Aris [4], onde o autor desenvolve uma teoria matemática para descrever como a difusão e as reações químicas interagem em sistemas porosos. Aris [4] utiliza modelos baseados em equações diferenciais para analisar o transporte de massa e a cinética das reações, destacando como a velocidade de difusão pode afetar a distribuição de reagentes e a eficiência da reação no interior do catalisador. No contexto do problema Alt-Philips, essas limitações na difusão podem resultar em regiões do catalisador onde a reação não ocorre, o que é um aspecto crucial para entender o desempenho desses sistemas e otimizar processos catalíticos.

Outro estudo relacionado à aplicação do problema Alt-Philips é o de Bandle e Stakgold [5] sobre a formação do dead-core $\{u = 0\}$ em sistemas de reação-difusão. O problema Alt-Philips e o estudo de Bandle e Stakgold [5] estão ambos ligados à interação entre difusão e reação, onde a difusão limitada pode impedir a reação em determinadas regiões. No caso do Alt-Philips, a difusão insuficiente nos catalisadores permeáveis pode levar a áreas inativas, semelhantes as dead-core $\{u = 0\}$ descrito por Bandle e Stakgold [5], onde a reação é suprimida devido à falta de reagentes, comprometendo a eficiência do sistema.

Iremos observar na seção 1.3 que o minimizante do funcional Alt-Phillips

$$u \mapsto \int_{\Omega} |Du|^2 + \frac{2}{\gamma} u^{\gamma} dx$$

é solução para a equação (2).

Quando $\gamma \to 0$ essa energia degenera para o funcional Alt-Caffarelli [1], também chamado de problema de Bernoulli,

$$u \mapsto \int_{\Omega} |Du|^2 + 2\chi_{\{u>0\}} dx$$

em que χ_E indica a função característica de um certo conjunto E. Para obter informações mais completas, consulte o livro "A geometric approach to free boundary problems" de Luis Caffarelli e Sandro Salsa, [7]. O caso $\gamma = 1$ o funcional Alt-Phillips torna-se a energia no problema do obstáculo

$$u \mapsto \int_{\Omega} |Du|^2 + 2u,$$

para mais detalhes sobre esta classe de problemas veja o livro "*Regularity of Free Boundaries in Obstacle-Type Problems*" de Arshak Petrosyan, Henrik Shahgholian e Nina Uraltseva, [14].

As comparações entre (1) e os problemas de Bernoulli, com $\gamma \in (0, 1)$, e o problema do obstáculo, com $\gamma = 1$, tornam-se interessantes, considerando que, ao definir o parâmetro

$$\beta = \frac{2}{2-\gamma} \in (1, +\infty) \text{ onde } \gamma \in (1, 2), \tag{3}$$

reescalonamentos do tipo

$$u_r(x) := \frac{u(rx)}{r^\beta}$$

são soluções de (2) em $B_{1/r}$. Isto sugere comportamentos do tipo $|x|^\beta$ próximos à fronteira livre $\partial\{u > 0\}$, enquanto soluções para o problema de Bernoulli e do obstáculo crescem, respectivamente, de forma linear e quadrática. Vale ressaltar que, para o parâmetro β definido em (3), não é possível, de forma rigorosa, tomar o limite $\gamma \to 0$ para "recuperar" o problema singularmente perturbado ou o de Bernoulli, nem $\gamma \to 1$ para "recuperar" o problema do obstáculo. Isso se deve ao fato de que as estimativas podem não ser uniformes em relação a γ, além de os problemas apresentarem naturezas distintas.

No presente contexto desta dissertação, o foco recai sobre a variação do parâmetro γ no intervalo $(1, 2)$. Contudo, para leitores com maior interesse, os casos $\gamma = 0$, $\gamma \in (0, 1)$ e $\gamma = 1$ são estudados, respectivamente, nos seguintes trabalhos: Ricarte-Texeixa [15]; Araújo-Texeira [3] e Lee [13].

Após a definição clara do problema proposto, o presente trabalho foi estruturado em cinco capítulos:

O primeiro capítulo é dedicado ao estabelecimento das preliminares relacionadas ao operador F, bem como às definições e resultados aplicáveis ao problema (1).

O segundo capítulo trata da estimativa de Harnack e suas consequências, com destaque para os seguintes teoremas:

Teorema A *Suponha que F seja um operador convexo e uniformemente elíptico, com $F(O) = 0$. Seja u uma solução de (1) em B_R para algum $R > 0$. Então,*

$$\sup_{B_{\frac{R}{2}}} u \leq C\left(u(0) + R^\beta\right)$$

em que $\beta = \frac{2}{2-\gamma}$, C uma constante universal e $\gamma \in (1, 2)$.

Uma constante é chamada universal se, e somente se, depender unicamente da dimensão d, do parâmetro γ e da constante de elipticidade do operador, que será devidamente definida no capítulo 1.

Essa estimativa para o problema clássico (2) está apresentada no Corolário 1.11 de [2].

Ainda neste capítulo, são apresentadas diversas consequências relacionadas ao **Teorema A**, como, por exemplo:

Teorema B *Seja u solução de (1) com F nas condições do* ***Teorema A****. Então $u \in C^{2,\alpha}_{loc}(\Omega)$ para algum $\alpha \in (0,1)$. Além disso, se $B_1 \subset \Omega$, então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(B_{1/2})} \leq C(u(0)+1).$$

A regularidade $C^{2,\alpha}$ decorre do teorema 8.1, apresentado em [8], enquanto a limitação universal é uma implicação do **Teorema A**. De fato, o **Teorema A** estabelece um controle uniforme sobre certas quantidades invariantes por escala, como por exemplo

$$\left| \frac{D^2 u}{u^{\gamma-1}} \right|,$$

mesmo próximo a fronteira livre $\partial\{u > 0\}$, o que sugere comportamentos indefinidos nesta região. Isso possibilita a realização de uma análise detalhada do limite de soluções reescalonadas, denominadas de blow-up, nas proximidades da fronteira livre.

A classificação dos blow-ups é abordada no capítulo três, onde, em pontos regulares da fronteira livre $\partial\{u > 0\}$, obtêm-se informações geométricas suficientes para deduzir um resultado sobre a regularidade dessa fronteira como superfície $(d-1)-$*dimensional*.

No capítulo quatro, conclui-se a abordagem deste trabalho, com a conclusão do resultado abaixo.

Teorema C *Juntamente com as hipóteses do* ***Teorema A****, assuma que F é diferenciável no ponto $O \in S_d$ ou que F é homogênea. Se u é solução de (1), então a parte regular da fronteira livre é relativamente aberta em $\partial\{u > 0\}$ e é localmente uma hiperfície de classe C^1.*

Capítulo 1

Preliminares

O leitor já familiarizado com este tema, pode seguir para os capítulos seguintes. Este capítulo está organizado em quatro seções tendo como principais referências [17] e [8]. Na primeira, são abordadas algumas das definições fundamentais para a compreensão deste trabalho: Operadores uniformemente elíptico; operadores convexo e o conceito de sub-diferencial. Além de algumas propriedades, como, por exemplo, invariância de rotação do operador de maneira a obter o laplaciano como sub-diferencial. Na segunda seção, o objetivo é apresentar as ferramentas que serão essenciais para a obtenção dos resultados desejados. A terceira seção, trata do caso variacional do operador Alt-Philips. Por fim, na quarta seção, são introduzidas as definições relacionadas ao problema Alt-Phillips não-variacional, juntamente com algumas propriedades intermediárias da solução.

1.1 Hipóteses e definições

Definição 1.1 *Sejam S_d o espaço das matrizes $d \times d-$simétricas e Λ uma constante maior que ou igual a 1. A função*

$$F : S_d \longrightarrow \mathbb{R}$$

é dita ser um operador uniformemente elíptico com constante de elipticidade Λ se satisfaz

$$\frac{1}{\Lambda}\|P\| \leq F(M + P) - F(M) \leq \Lambda\|P\| \tag{1.1}$$

para toda $M, P \in S_d$ em que $P \geq 0$.

É necessário destacar algumas equivalências na definição de operador uniformemente elíptico. Como por exemplo, dada $P \in S_d$ definida não-negativa, então,

$$\|P\| \leq Tr(P) \;\text{ e }\; Tr(P) \leq d\|P\| \tag{1.2}$$

em que $\|\cdot\|$ representa a norma espectral definida como o maior valor absoluto de seus valores próprios. De (1.1), daí

$$\frac{1}{d\Lambda}Tr(P) \leq F(M+P) - F(M) \leq \Lambda Tr(P)$$

Reciprocamente, se F satisfazer

$$\lambda Tr(P) \leq F(M+P) - F(M) \leq \Lambda Tr(P)$$

com $0 < \lambda < \Lambda$ e $P \geq 0$, por (1.2),

$$\lambda\|P\| \leq F(M+P) - F(M) \leq d\Lambda\|P\|$$

o que garante que F é um operador uniformemente elíptico.

Além disso, em certos casos, é necessário lidar com a diferença $F(M+P)-F(P)$ sem se preocupar com o sinal definido da matriz P. Nesses casos, é importante ter uma definição equivalente de operador uniformemente elíptico que dispense a exigência $P \geq 0$.

Para essa finalidade, a matriz $P \in S_d$ pode ser decomposta da seguinte maneira,

$$P = P^+ - P^- \text{ em que } P^+, P^- \geq 0.$$

Sendo F uniformemente elíptica com constante Λ, então

$$F(M-P^-+P^+)-F(M-P^-) \leq \Lambda\|P^+\| \Longrightarrow F(M-P^-+P^+) \leq \Lambda\|P^+\|+F(M-P^-)$$

por outro lado,

$$\frac{1}{\Lambda}\|P^-\| \leq F(M-P^-+P^-) - F(M-P^-) \Longrightarrow F(M-P^-) \leq F(M) - \frac{1}{\Lambda}\|P^-\|$$

e portanto,

$$F(M+P) - F(M) \leq \Lambda\|P^+\| - \frac{1}{\Lambda}\|P^-\|. \tag{1.3}$$

Reciprocamente, se F satisfaz (1.3) para $M, P \in S_d$, então, para $P \geq 0$ tem-se $P^+ = P$ e $P^- = O$, daí,

$$F(M+P) - F(M) \leq \Lambda\|P\|$$

e por outro lado,

$$F(M+P-P)-F(M+P) \leq -\frac{1}{\Lambda}\|-P\| \Longrightarrow \frac{1}{\Lambda}\|P\| \leq F(M+P)-F(M)$$

o que retorna F a definição inicial (1.1).

Com base no que foi feito acima, podemos afirmar que a definição (1.1) é equivalente às seguintes definições:

Definição 1.2 *Considere as constantes* $0<\lambda<\Lambda$. *A função*

$$F: S_d \longrightarrow \mathbb{R}$$

é dita ser um operador uniformemente elíptico com constantes de elipticidade λ *e* Λ *se satisfaz*

$$\lambda Tr(P) \leq F(M+P)-F(M) \leq \Lambda Tr(P)$$

para toda $M, P \in S_d$ *em que* $P \geq 0$ *e* $Tr: S_d \longrightarrow \mathbb{R}$ *simboliza o operador traço de uma matriz.*

Definição 1.3 *Seja* Λ *uma constante maior que ou igual a* 1. *A função*

$$F: S_d \longrightarrow \mathbb{R}$$

é dita ser um operador uniformemente elíptico com constante de elipticidade Λ *se satisfaz*

$$F(M+P)-F(M) \leq \Lambda\|P^{+}\|-\frac{1}{\Lambda}\|P^{-}\|$$

para toda $M, P \in S_d$.

Soluções para estes operadores são comumente estudados no conceito de solução de viscosidade, conforme Definição 2.3 em [8].

Definição 1.4 (Solução de viscosidade) *Considere* u *e* f *funções contínuas em* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$,

$$F(D^2u) = f \text{ em } \Omega \tag{1.4}$$

em que F *é um operador uniformemente elíptico. Dizemos que* u *é:*

Sub-solução de Viscosidade *de (1.4) em* Ω, *quando a seguinte condição é satisfeita:*

Se $x_0 \in \Omega$, $\phi \in C^2(\Omega)$ *e* $u-\phi$ *tem um máximo local em* x_0, *então*

$$F(D^2\phi(x_0)) \geq f(x_0);$$

Super-solução de Viscosidade *de (1.4) em* Ω*, quando a seguinte condição é satisfeita:*

Se $x_0 \in \Omega$*,* $\phi \in C^2(\Omega)$ *e* $u - \phi$ *tem um mínimo local em* x_0*, então*

$$F(D^2\phi(x_0)) \leq f(x_0).$$

Por fim, u *é uma* ***solução de viscosidade*** *de (1.4) quando é sub-solução e super-solução.*

Neste contexto, vale ressaltar a Proposição 4.11 em [8], sobre estabilidade de limites de soluções.

Proposição 1.1 *Sejam* $\{F_h\}_{h\geq 1}$ *uma sequência de operadores uniformemente elípticos com mesma constante de elipticidade* λ *e* $\{u_h\}_{h\geq 1}$ *uma família de soluções de viscosidade uniformemente contínuas ou equicontínuas para*

$$F_h(D^2u_h) = f \text{ em } \Omega.$$

Assumindo que $\{F_k\}_{k\geq 1}$ *converge uniformemente para uma* F *no compacto* $S \times \Omega$ *e que* $\{u_h\}_{h\geq 1}$ *é uniformemente limitada em um subconjunto compacto* ω *de* Ω*. Então:*

- *Existe* $u \in C(\Omega)$ *e uma subsequência de* $\{u_k\}_{k\geq 1}$*, tal que*

$$u_k \longrightarrow u \text{ uniformemente em } \Omega;$$

- $F(D^2u) = f$ *em* Ω *no sentido de solução de viscosidade.*

As soluções para esses operadores são compreendidas no sentido da viscosidade. No entanto, neste trabalho, consideraremos $u \in C^2(\Omega)$, pois em breve, veremos que a solução para o problema (1) é, na verdade, uma solução clássica.

Definição 1.5 *Dizemos que o operador linear* $S_A : S_d \longrightarrow \mathbb{R}$ *é um sub-diferencial de* F *para a matriz* $A \in S_d$ *se satisfaz*

$$S_A(P) \leq F(A+P) - F(A) \text{ para toda } P \in S_d. \tag{1.5}$$

Note que S_A é um operador uniformemente elíptico com mesma constante de elipticidade de F, pois

$$S_A(-P) \leq F(A-P) - F(A)$$

e pela linearidade de S_A temos

$$S_A(P) \geq F(A) - F(A-P) = F((A-P)+P) - F(A-P) \geq \frac{1}{\Lambda}\|P\|$$

para todo $P \geq 0$.

Definição 1.6 *Dizemos que uma aplicação $F : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação convexa quando para todos $X, Y \in \mathbb{R}^d$ tem-se que a reta secante que passa pelos pontos $(X, F(X))$ e $(Y, F(Y))$ está por cima do gráfico da aplicação F no seguimento $[X, Y]$. Em outras palavras, para $t \in [0, 1]$, tem-se que*

$$F(X + t(Y - X)) \leq (1 - t)F(X) + tF(Y).$$

Note que a estimativa acima implica em

$$\frac{F(X + t(Y - X)) - F(X)}{t} \leq F(Y) - F(X).$$

Segue daí que se F for diferenciável no ponto $X \in \mathbb{R}^d$, então

$$DF(X) \cdot (Y - X) \leq F(Y) - F(X)$$

ou seja, a sua derivada no ponto $X \in S_d$ é um sub-diferencial de F.

Caso F não seja diferenciável em tal ponto, então pelo fato do caminho $\lambda : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ dado por $\lambda(t) = X + t(Y - X)$ ser contínuo e $F \circ \lambda$ ser uma função real convexa, temos que para todo $t_0 \in (-1, 1)$ pelo menos um dos limites $\left(\frac{dF\circ\lambda}{dt}(t_0)\right)^+$ ou $\left(\frac{dF\circ\lambda}{dt}(t_0)\right)^-$ existe, assim garantindo a existência de um sub-diferencial de F que será um hiper-plano $(d-1)$-dimensional por baixo do gráfico de F, cujo normal é ortogonal a reta que passa pelo ponto $F \circ \lambda(t_0)$ e tem como coeficiente angular o limite $\left(\frac{dF\circ\lambda}{dt}(t_0)\right)^+$ se existir, caso contrário será ortogonal a $\left(\frac{dF\circ\lambda}{dt}(t_0)\right)^+$ e está contido no plano que contém $F \circ \lambda$, conforme a figura 1.1.

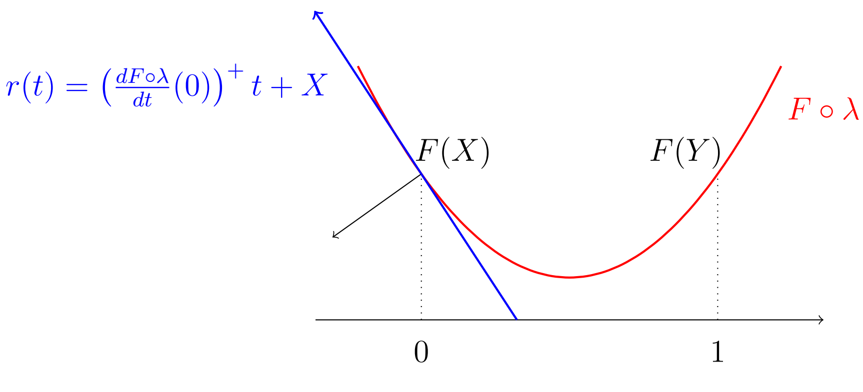

Figura 1.1: Sub-diferencial de F no ponto $X \in \mathbb{R}^d$.

Proposição 1.2 *Seja $Tr : S_d \longrightarrow \mathbb{R}$ o operador traço de cada matriz $M \in S_d$. Se $F : S_d \longrightarrow \mathbb{R}$ é um operador convexo e uniformemente elíptico com constante de elipticidade Λ, então:*

a) *Para todo $A \in S_d$ existe uma matriz invertível B tal que o operador $\tilde{F}(M) = F(BM + A) - F(A)$ possui Tr como um sub-diferencial no ponto $O \in S_d$;*

b) *$\tilde{F}$ é um operador uniformemente elíptico e convexo.*

Demonstração:

a) Sendo S_A um sub-diferencial de F no ponto $A \in S_d$, então para todo $M = (M_{ij})_{d\times d} \in S_d$ tem-se pela simetria de M,

$$S_A(M) = \sum_{i,j}^{d} a_{ij}M_{ij} = \sum_{i,j}^{d} a_{ij}M_{ij} = S_A(M^T) \text{ com } a_{ij} = S_A(e_{ij})$$

em que $\{e_{ij}\}_{i,j=1}^{d}$ é a base canônica do espaço das matrizes $d \times d$. Tome $\tilde{A} = \left(\frac{a_{ij}+a_{ji}}{2}\right)_{d\times d}$ e veja que,

$$\begin{aligned}
Tr(\tilde{A}M) \quad &= \sum_{i=1}^{d}(\tilde{A}M)_{ii} \\
&= \sum_{i=1}^{d}\left(\sum_{j=1}^{d}\frac{a_{ij}+a_{ji}}{2}M_{ji}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{i,j}^{d}a_{ij}M_{ji} + \sum_{i,j}^{d}a_{ji}M_{ji}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(S_A(M^T) + S_A(M))\right) \\
&= S_A(M).
\end{aligned}$$

Além disso, note que $\tilde{A}$ é uma matriz invertível, isso segue pelas seguintes observações;

i) S_A é injetiva no conjunto das matrizes simétricas definidas não-negativas, pois

$$\tfrac{1}{\Lambda}\|M\| \leq S_A(M) \leq \Lambda\|M\| \text{ se } M \geq 0.$$

ii) Se $\tilde{A}$ não for invertível, então o núcleo do operador $\tilde{A} : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$, definido pela matriz $\tilde{A}$, é não trivial, isto é, existe $v \in \mathbb{R}^d - \{0\}$ tal que

$$\tilde{A}v = 0 \Longrightarrow \tilde{A}(v \otimes v) = (\tilde{A}v) \otimes v = 0 \otimes v = O.$$

Note que $(v \otimes v) \in S_d - \{O\}$ é definida não-negativa e

$$S_A(v \otimes v) = Tr(\tilde{A}(v \otimes v)) = Tr(O) = 0$$

contrariando assim o item anterior.

Por fim, sendo

$$\tilde{F}(M) = F(BM + A) - F(A) \geq S_A(BM) = Tr(\tilde{A}BM)$$

com $\tilde{A}M = M\tilde{A}$ para toda $M \in S_d$ tem-se,

$$M\tilde{A}^{-1} = \tilde{A}^{-1}M \Longrightarrow \tilde{A}^{-1}M \text{ é simétrica.}$$

Portanto, podemos tomar $B = \tilde{A}^{-1}$ e obter

$$\tilde{F}(M + O) - \tilde{F}(O) = \tilde{F}(M) \geq Tr(\tilde{A}BM) = Tr(M)$$

isto é, o traço é um sub-diferenciál de $\tilde{F}$ no ponto $O \in S_d$.

b) Veja que fixado $A \in S_d$, tem-se que $\tilde{F}$ é convexa e uniformemente elíptica, pois dados $X, Y \in S_d$;

$$\begin{aligned}
\tilde{F}((1-t)X + tY) &= F(B((1-t)X + tY) + A) - F(A) \\
&= F((1-t)(BX + A) + t(BY + A)) - F(A) \\
&\leq (1-t)F(BX + A) + tF(BY + A) - F(A) \\
&= (1-t)[F(BX - A) - F(A)] + t[F(BY + A) - F(A)] \\
&= (1-t)\tilde{F}(X) + t\tilde{F}(Y)
\end{aligned}$$

o que prova a convexidade do operador $\tilde{F}$.

Por fim, considere $M, P \in S_d$ com $P \geq 0$, então

$$\tilde{F}(M + P) - \tilde{F}(M) = F(B(M + P) + A) - F(BM + A). \tag{1.6}$$

Agora são necessárias algumas informações sobre o produto $BP \in S_d$, primeiramente, note que

- $B \in S_d$:

  De fato, sendo $B^{-1} = \tilde{A} \in S_d$, então

$$\begin{cases} \tilde{A} = \tilde{A}^T \\ \tilde{A}B = B\tilde{A} = I \end{cases} \Longrightarrow (\tilde{A}B)^T = I^T = I \Longrightarrow B^T\tilde{A}^T = B\tilde{A} \Longrightarrow B^T = B$$

- $BP \geq 0$:

  Para verificar isto é necessário analisar o sinal da forma quadrática de BP, ou seja, o sinal de
  $$x^T BPx \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^d.$$
  Sendo B e P simétricas com $BP = PB$, então B e P são simultânea mente diagonalizáveis, isto é, existem matrizes Q ortogonal, D^* e D diagonais, tais que,
  $$B = Q^T DQ \text{ e } P = Q^T D^* Q.$$
  Além disso, temos que,
  $$(Q^T D^{\frac{1}{2}} Q)(Q^T D^{\frac{1}{2}} Q) = Q^T DQ = B$$
  portanto $B^{\frac{1}{2}} = Q^T D^{\frac{1}{2}} Q$, segue daí que,
  $$B^{\frac{1}{2}} P = Q^T D^{\frac{1}{2}} QP = Q^T D^{\frac{1}{2}} D^* Q = Q^T D^* D^{\frac{1}{2}} Q = PB^{\frac{1}{2}}.$$
  Note que $P \geq 0$, implica em
  $$(B^{\frac{1}{2}} x)^T P(B^{\frac{1}{2}} x) \geq 0 \Longrightarrow x^T B^{\frac{1}{2}} PB^{\frac{1}{2}} x \geq 0$$
  logo, pela comutatividade entre P e $B^{\frac{1}{2}}$ temos,
  $$x^T BPx \geq 0.$$

Por fim, sabendo que $BP \geq 0$, podemos usar a hipótese de F ser um operador uniformemente elíptico (1.1) juntamente com (1.6), para obter,
$$\frac{1}{\Lambda}\|BP\| \leq \tilde{F}(M+P) - \tilde{F}(M) \leq \Lambda\|BP\|. \tag{1.7}$$
Se considerarmos $\|\cdot\|$ como sendo a norma de Frobenius ou qualquer norma satisfazendo
$$\|BP\| \leq \|B\|\|P\|$$
e se $\|\cdot\|_\infty$ for a norma $\infty - espectral$, então
$$\|B\|_\infty \|P\|_\infty \leq \|BP\|_\infty.$$

Pela equivalência entre as normas, existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\|B\| \leq c\|B\|_\infty.$$

Aplicando estas informações em (1.7), tem-se,

$$\frac{1}{c^2\Lambda}\|B\|\|P\| \leq \tilde{F}(M+P) - \tilde{F}(M) \leq \Lambda\|B\|\|P\|.$$

Portanto, $\tilde{F}$ é um operador uniformemente elíptico com constante de elipticidade dependendo de Λ.

■

Considerando a proposição anterior, ganha-se sentido, a partir deste ponto, impormos certas condições ao operador uniformemente elíptico $F : S_d \longrightarrow \mathbb{R}$. São elas:

$$\begin{cases} F \text{ convexa,} \\ F(O) = 0, \\ \text{O traço do operador é um sub-diferencial de } F \text{ no ponto } O. \end{cases} \tag{1.8}$$

E em alguns casos adicionar uma ou ambas as hipóteses:

$$\text{F diferenciável no ponto } O \in S_d \tag{1.9}$$

ou

$$\text{F homogênea } \Longrightarrow F(\lambda M) = \lambda F(M) \text{ para todo } \lambda > 0 \text{ e } M \in S_d. \tag{1.10}$$

Note que, F sendo homogênea e satisfazendo (1.8), então

$$F(M) = -F(O-M) + F(O) \leq S_O(M) = tr(M) \leq F(O+M) - F(O),$$

consequentemente

$$Tr(M) = F(M)$$

e adicionando a hipóteses de diferenciabilidade no ponto $O \in S_d$

$$DF(O)(M) = \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{F(O+tM) - F(O)}{t} = F(M) = Tr(M). \tag{1.11}$$

A seguir, apresentamos um exemplo de operador que satisfaz essas hipóteses:

Exemplo 1: Seja $F : \mathrm{Sym}(n;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definido por

$$F(A) := \log\det(A)$$

onde $A > 0$. Considere $g(t) = F(A + tM)$, assim

$$\begin{aligned} g(t) &= \log\det(A + tM) \\ &= \log\det(A(I + tA^{-1}M)) \\ &= \log(\det(A)\det(I + tA^{-1}M)) \\ &= \log(\det(A)) + \log\det(I + tA^{-1}M)) \\ &= \log(\det(A)) + \sum_{i=1}^{n}\log(1 + t\lambda_i), \end{aligned}$$

sendo λ_i os autovalores de $A^{-1}M$. Daí,

$$\begin{aligned} DF(A)(M) &= \lim_{t\to 0}\frac{F(A + tM) - F(A)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{g(t) - g(0)}{t} \\ &= g'(0) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\lambda_i \\ &= Tr(A^{-1}M). \end{aligned}$$

Ademais,

$$g''(t) = -\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i^2}{(1 + t\lambda_i)^2} \Longrightarrow D2_{MM}F(A) = g''(0) = -\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 < 0$$

provando assim que F é um operador diferenciável no espaço das matrizes definidas positivas e côncava (será verificado a posteriori no Teorema 1.3 que a condição (1.12) é suficiente para garantir a concavidade da função), assim temos que $-F$ é convexo e diferenciável. Resta verificar a uniformidade elíptica de tal operador, com efeito, sejam $l, L > 0$ tais que

$$lI \leq A \leq LI,$$

isto é, todos os autovalores de A estão no intervalo $[l, L]$.

Então,

$$\frac{1}{L}I \leq A^{-1} \leq \frac{1}{l}I.$$

Dessa forma, temos

$$D^2_{MM}F(A) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 = \mathrm{tr}(A^{-1}MA^{-1}M) = \|A^{-1/2}MA^{-1/2}\|_F^2,$$

onde $\|\cdot\|_F$ é a norma de Frobenius.

Como $A^{-1/2} \geq \frac{1}{\sqrt{L}} I$ e $A^{-1/2} \leq \frac{1}{\sqrt{l}} I$, segue que

$$\frac{1}{L}\|M\|_F^2 \leq D^2_{MM}F(A) \leq \frac{1}{l}\|M\|_F^2.$$

Logo, $G(A) = -F(A) = -\log\det A$ é um operador *uniformemente elíptico* em conjuntos compactos de matrizes definidas positivas. Segue da Proposição 1.2 que a partir do operador F definido neste exemplo é possível construir um operador $\tilde{G}$ satisfazendo as hipótese de diferenciabilidade na origem e (1.8).

1.2 Preliminares técnicas

Apresentam-se, a seguir, os resultados relevantes que serão utilizados adiante.

Teorema 1.1 (Princípio do Mínimo) *Seja $L : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ o operador linear*

$$L(h) = S(D^2h) + (Dv \cdot b(x)) + c(x)h$$

para $h \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$. Assumindo que $S : S_d \longrightarrow \mathbb{R}$ é um operador linear e $b, c : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ são limitadas e contínuas. Supondo que $L(h) \leq 0$ e $c(x) \leq 0$ em Ω. Se h admitir mínimo não-positivo, então

$$\inf_{\partial\Omega} h \leq \inf_{\Omega} h$$

isto é, o mínimo não-positivo de h é atingido em sua fronteira.

Uma consequência imediata do princípio do mínimo é o princípio da comparação, conforme enunciado a seguir.

Corolário 1.1 (Princípio da Comparação) *Seja $h \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ satisfazendo $L(h) \leq 0$ com $c(x) \leq 0$ em Ω. Se $h \geq 0$ em $\partial\Omega$, então $h \geq 0$ em Ω.*

Ambos os resultados acima estão apresentados em [11] como teorema 2.3 e corolário 2.8, respectivamente.

Teorema 1.2 (Arzelá-Ascoli) *Seja K um compacto do espaço $\mathbb{R}^d$. Toda sequência de funções $f_h : K \longrightarrow \mathbb{R}$ equicontínua e uniformemente limitada possui uma subsequência uniformemente convergente.*

Para mais detalhes, veja o Teorema 3.4 em [16].

Teorema 1.3 *Seja $u \in C^2(\mathbb{R}^d)$ uma função tal que, $D_{ee}u \geq 0$ para todo $e \in \mathbb{R}^d$. Então, u é convexa.*

Demonstração: Primeiramente, veja que

$$D_e u = (Du \cdot e) \Longrightarrow D_{ee}u = (D_e(Du) \cdot e),$$

onde

$$D_e(Du) = (D_e(D_1 u), D_e(D_2 u), \cdots \ D_e(D_d u)) \text{ e } D_e(D_i u) = (D(D_i u) \cdot e) = \sum_{j=1}^{d} D_{ij} u e_j.$$

Logo,

$$0 \leq D_{ee}u = \sum_{i=1}^{d} D_e(D_i u) e_i = \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} D_{ij} u e_j e_i = \sum_{i,j=1}^{d} D_{ij} u e_i e_j = (D^2 u e \cdot e)$$

e portanto u é convexa, pois sua hessiana é definida não-negativa. ∎

Teorema 1.4 *Sejam F um operador convexo, $f \in C^{0,\alpha}$ e u uma solução de viscosidade da equação $F(D^2u) - f(x) = 0$ em B_1. Então, $u \in C^{2,\alpha_0}(B_{1/2})$ e*

$$\|u\|_{C^{2,\alpha_0}(B_{1/2})} \leq C(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + |F(O)|)$$

em que $\alpha_0 \in (0,1)$ e C são constantes universais.

O resultado acima mencionado corresponde ao Teorema 6.6 apresentado em [8].

Para operadores convexos, as soluções apresentam uma boa regularidade. Precisamos apenas da seguinte versão simples, que é uma combinação das estimativas de Caffarelli [6] e de um teorema de Evans [9] e Krylov [12].

Teorema 1.5 *Seja F um operador uniformemente elíptico e convexo com constante de elipticidade Λ, satisfazendo $F(O) = 0$. Suponha que u é solução de*

$$F(D^2u) = f \text{ em } B_1 \subset \mathbb{R}^d,$$

então:

1) *Se f é limitada, então $u \in C^{1,\alpha}(B_{1/2})$ para todo $\alpha \in (0,1)$ com*

$$\|u\|_{C^{1,\alpha}(B_{1/2})} \leq C\left(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{L^\infty(B_1)}\right)$$

para alguma constante C dependendo somente de d, Λ e α.

2) *Se* $f \in C^{0,\alpha}(B_1)$ *para algum* $\alpha \in (0,1)$, *então* $u \in C^{2,\min\{\alpha_0,\alpha\}}(B_{1/2})$ *com*

$$\|u\|_{C^{2,\min\{\alpha_0,\alpha\}}(B_{1/2})} \leq C\left(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{C^\alpha(B_1)}\right)$$

para alguma constante $C = C(d, \Lambda, \alpha)$.

Definição 1.7 (Operadores Pucci) *Considere os seguintes operadores*

$$P_\Lambda^+,\ P_\Lambda^- : S_d \longrightarrow \mathbb{R},$$

definidos por

$$P^+(M) = \Lambda Tr(M^+) - \frac{1}{\Lambda}Tr(M^-);\ e\ P^-(M) = \frac{1}{\Lambda}Tr(M^+) - \Lambda Tr(M^-).$$

Sendo F um operador uniformemente elíptico, pela Definição 1.3

$$F(M+O) - F(O) \leq \Lambda\|M^+\| - \frac{1}{\Lambda}\|M^-\| = P^+(M),$$

e por (1.2)

$$F(M) - F(O) \leq \Lambda Tr(M^+) - \frac{1}{d\Lambda}Tr(M^-) = P^+(M)$$

sendo $F(O) = 0$, então

$$F(M) \leq P^+(M). \tag{1.12}$$

Nós iremos concluir está subseção com o seguinte princípio do máximo local. Veja o Teorema 4.8 em [8].

Teorema 1.6 *Suponha que*

$$P^+(D^2u) \geq 0\ em\ B_1 \subset \mathbb{R}^d$$

então

$$\sup_{B_{1/2}} u \leq C\|u\|_{L^1(B_1)}$$

para alguma contante C *dependendo somente de* d *e* Λ.

1.3 O caso variacional

Sejam Ω um domínio conexo e limitado do espaço euclidiano $d-$*dimensional* e $F : H_g^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional tal que

$$F(u) = \int_\Omega \left(|Du|^2 + f(u)\right) dx, \tag{1.13}$$

em que $u, f \in H^1_g(\Omega)$ e $f \circ u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

A existência do minimizante $v \in H^1_g(\Omega)$ tal que $F(v) \leq F(u)$ para toda $u \in H^1_g(\Omega)$, pode ser verificada no capítulo 8 do livro [10].

Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz $d \times d$ tal que $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ sejam coeficientes uniformemente elípticos (i, é. $a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2$ para todo $x \in \Omega$ e $\xi \in \mathbb{R}^d$). Então dizemos que $v \in H^1(\Omega)$ é solução fraca de

$$div(A \cdot Dv) = f$$

se, e somente se, é solução de

$$\int_\Omega a_{ij} D_i v D_j \phi dx = \int_\Omega f \cdot \phi dx, \text{ para toda } \phi \in H^1_0.$$

Teorema 1.7 *Seja $v \in H^1_g(\Omega)$ minimizante de (1.13) e f diferenciável em $\mathbb{R}$. Então v satisfaz (no sentido fraco) a equação*

$$\begin{cases} \Delta v &= f'(v) \quad \text{em } \Omega \\ \quad v &= g \qquad \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Demonstração: Considere $t \in \mathbb{R}$, $\phi \in H^1_0(\Omega)$ e tome $u = v + t\phi \in H^1_g(\Omega)$. Por definição temos que

$$g(0) = F(v) \leq F(v + t\phi) = g(t) \text{ para todo } t \in \mathbb{R}$$

isto é, $t = 0$ é ponto de mínimo de $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Daí segue que,

$$0 = \frac{dg}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}F(v + t\phi)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(\int_\Omega |D(v + t\phi)|^2 + f(v + t\phi)\right)\Big|_{t=0}. \tag{1.14}$$

Como a derivada é linear iremos calcular separadamente. Primeiro note que

$$\begin{aligned} I = \frac{d}{dt}\int_\Omega |D(v + t\phi)|^2\Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt}\left(\int_\Omega D(v + t\phi) \cdot D(v + t\phi)\right)\Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\left(\int_\Omega |Dv|^2 + 2tDv \cdot D\phi + t^2|D\phi|^2\right)\Big|_{t=0} \\ &= \int_\Omega \frac{d}{dt}\left(|Dv|^2 + 2tDv \cdot D\phi + t^2|D\phi|^2\right)\Big|_{t=0} \\ &= \int_\Omega \left(2Dv \cdot D\phi + 2t|D\phi|^2\right)\Big|_{t=0} \\ &= 2\int_\Omega Dv \cdot D\phi. \end{aligned}$$

$$II = \int_\Omega \frac{d}{dt}f(v + t\phi)\Big|_{t=0} = \int_\Omega f'(v + t\phi) \cdot \phi\Big|_{t=0} = \int_\Omega f'(v) \cdot \phi$$

substituindo I e II em (1.14) temos

$$\int_\Omega Dv \cdot D\phi = \frac{1}{2}\int_\Omega f'(v)\cdot\phi$$

para qualquer $\frac{1}{2}\phi \in H_0^1(\Omega)$. Portanto,

$$\Delta v = div(I \cdot Dv) = f'(v).$$

■

1.4 O problema não-variacional

Definição 1.8 *Assuma que F é um operador satisfazendo (1.1), (1.8), (1.9) e (1.10). Diremos que*

$$u \in S^F(\Omega) \iff \begin{cases} F(D^2u) = u^{\gamma-1} & em\ \Omega \\ u \geq 0 & em\ \Omega. \end{cases}$$

Agora, dado $R > 0$ e $x_0 \in \mathbb{R}^d$, defina

$$u \in P_R^F(x_0) \iff u \in S^F(B_R(x_0))\ com\ x_0 \in \partial\{u > 0\}. \tag{1.15}$$

E por fim,

$$u \in P_\infty^F(x_0) \iff u \in S^F(\mathbb{R}^d)\ com\ x_0 \in \partial\{u > 0\}.$$

Observação 1.4.1 *Quando o operador F coincidir com o traço, é comumente utilizada a notação $S^\Delta(\Omega)$ e $P_R^\Delta(x_0)$ em vez de $S^{Tr}(\Omega)$ e $P_R^{Tr}(x_0)$, respectivamente.*

Proposição 1.3 *[**Reescalonamento de solução**] Seja $u \in P_R^F(x_0)$ e $0 < r < R$, um reescalonamento da solução u é uma função*

$$v(x) = u_{x_0,r}(x) = \frac{1}{r^\beta}u(rx + x_0) \tag{1.16}$$

para

$$\beta = \frac{2}{2-\gamma}. \tag{1.17}$$

Então

$$v \in S^{F_r}(B_{R/r}(0)).$$

Demonstração: Note que,

$$D_iv(x) = \frac{1}{r^{\beta-1}}D_iu(rx + x_0) \quad \text{e} \quad D_{ij}v(x) = \frac{1}{r^{\beta-2}}D_{ij}u(rx + x_0).$$

Logo,

$$D^2v(x) = \frac{1}{r^{\beta-2}} D^2u(rx+x_0) \implies D^2u(rx+x_0) = r^{\beta-2}D^2v(x)$$
$$\implies F(r^{\beta-2}D^2v(x)) = F(D^2u(rx+x_0))$$

sendo $u \in S^F(B_R(x_0))$ tem-se $F(D^2u(rx+x_0)) = (u(rx+x_0))^{\gamma-1}$, daí

$$F(r^{\beta-2}D^2v(x)) = (u(rx+x_0))^{\gamma-1} = r^{\beta(\gamma-1)}v(x)^{\gamma-1}.$$

Por (1.17), tem-se $\beta(\gamma-1) = \beta - 2$ e portanto

$$\frac{1}{r^{\beta-2}} F(r^{\beta-2}D^2v(x)) = v(x)^{\gamma-1}$$

para todo $x \in B_{R/r}(0)$, pois u está definida em $B_R(x_0)$, então

$$rx + x_0 \in B_R(x_0) \iff \|rx\| = \|(rx+x_0) - x_0\| < R \iff \|x\| < R/r.$$

Portanto, definindo

$$F_r(M) = \frac{1}{r^{\beta-2}} F(r^{\beta-2}M) \tag{1.18}$$

temos que v é uma solução não negativa de $F_r(D^2v) = v^{\gamma-1}$ em $B_{R/r}(0)$, isto é,

$$v \in S^{F_r}(B_{R/r}(0)).$$

■

Observação 1.4.2 *Vale ressaltar algumas observações sobre F_r definida em (1.18):*

a) Seja $P \in S_d$ definida não negativa, então $r^{\beta-2}P \geq 0$ desde que $r > 0$, logo por F ser uniformemente elíptica (1.1)

$$\frac{1}{\Lambda}\|r^{\beta-2}P\| \leq F(r^{\beta-2}P + r^{\beta-2}A) - F(r^{\beta-2}A) \leq \Lambda\|r^{\beta-2}P\|$$

$$\implies \frac{1}{\Lambda}\|P\| \leq F_r(P+A) - F_r(A) \leq \Lambda\|P\|$$

para todo $A \in S_d$, ou seja, F_r é um operador uniformemente elíptico com mesma constante de elipticidade de F.

b) Se $F(O) = 0$, então $F_r(O) = \frac{1}{r^{\beta-2}}F(r^{\beta-2}O) = \frac{1}{r^{\beta-2}}F(O) = 0$;

c) *Sendo F convexa e $X, Y \in S_d$, tem-se*

$$
\begin{aligned}
F_r((1-t)X+tY) &= \frac{1}{r^{\beta-2}}F(r^{\beta-2}((1-t)X+tY)) \\
&= \frac{1}{r^{\beta-2}}F((1-t)r^{\beta-2}X+tr^{\beta-2}Y) \\
&\leq \frac{1}{r^{\beta-2}}\left[(1-t)F(r^{\beta-2}X)+tF(r^{\beta-2}Y)\right] \\
&= (1-t)F_r(X)+tF_r(Y)
\end{aligned}
$$

portanto F_r também é convexa;

d) *Seja o operador traço um subdiferencial de F no ponto $O \in S_d$, então*

$$F_r(M) = \frac{1}{r^{\beta-2}}F(r^{\beta-2}M) \geq \frac{1}{r^{\beta-2}}Tr(r^{\beta-2}M) = Tr(M)$$

o que garante que o traço é um subdiferencial de F_r no ponto $O \in S_d$;

e) *Note que,*

$$
\begin{aligned}
DF_r(O)(X) &= \lim_{t\longrightarrow 0}\frac{F_r(O+tX)-F_r(O)}{t} \\
&= \lim_{t\longrightarrow 0}\frac{F_r(tX)}{t} \\
&= \lim_{t\longrightarrow 0}\frac{F(r^{\beta-2}tX)}{r^{\beta-2}t} \\
&= \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{F(hX)}{h} = DF(O)(X)
\end{aligned}
$$

em que $h(t) = r^{\beta-2}t$.

f) *Se F for homogênea, então $F_r(M) = \frac{1}{r^{\beta-2}}F(r^{\beta-2}M) = \frac{r^{\beta-2}}{r^{\beta-2}}F(M) = F(M)$ para todo $M \in S_d$.*

Definição 1.9 *Dada $u \in S^F(\Omega)$, defina o operador linear*

$$L_u(w) = S_{D^2u}(D^2w) - (\gamma-1)u^{\gamma-1}w \text{ em } \{u>0\}\cap\Omega. \quad (1.19)$$

Observação 1.4.3 *Note que se $u \in S^F(\Omega)$, então u é solução de*

$$F(D^2u) = u^{\gamma-1} \text{ em } \Omega.$$

Como Ω é um domínio compacto, o lado direito da igualdade acima é limitado. Assim, pelo item a) do Teorema 1.5, a solução admite regularidade $C^{1,\alpha}$. Consequentemente, podemos aplicar o item b) do mesmo teorema e concluir que u pertence a C^2. Portanto, as soluções da equação acima são, na verdade, soluções clássicas de classe C^2, o que garante que o operador definido em (1.9) está bem definido.

Proposição 1.4 *Dada $u \in S^F(\Omega)$ e um vetor $e \in \mathbb{S}^{d-1}$ a esfera unitária do $\mathbb{R}^d$, então*

$$L_u(D_e u) \leq 0 \ e \ L_u(D_{ee}u) \leq 0 \ em \ \{u > 0\} \cap \Omega.$$

Ou seja, $D_e u$ e $D_{ee}u$ são super-soluções do operador linear L_u.

Demonstração: Para um número real $t > 0$ e considerando $P = D^2u(x+te) - D^2u(x)$ e $A = D^2u(x)$ na definição de sub-diferencial em (1.5) temos

$$\frac{F(D^2u(x+te)) - F(D^2u(x))}{t} \geq S_{D^2u(x)}\left(\frac{D^2u(x+te) - D^2u(x)}{t}\right)$$

em que

$$\frac{F(D^2u(x+te)) - F(D^2u(x))}{t} = \frac{(u(x+te))^{\gamma-1} - (u(x))^{\gamma-1}}{t}$$

que converge para $(\gamma - 1)u^{\gamma-1}(x)D_e u(x)$ quando $t \longrightarrow 0$ e por conta da linearidade de S_{D^2u}, segue que

$$S_{D^2u(x)}\left(\frac{D^2u(x+te) - D^2u(x)}{t}\right) \longrightarrow S_{D^2u(x)}(D^2(D_e u(x)))$$

o que nos dá a primeira desigualdade.

Analogamente, temos

$$\frac{F(D^2u(x+te)) + F(D^2u(x-te)) - 2F(D^2u(x))}{t^2} \geq S_{D^2u(x)}\left(\frac{D^2u(x+te) + D^2u(x-te) - 2D^2u(x)}{t^2}\right).$$

Utilizando o polinômio de Taylor de grau 2 e fazendo $t \longrightarrow 0$ a desigualdade acima nos dá que,

$$S_{D^2u}(D^2(D_{ee}u)) \leq (\gamma - 1)u^{\gamma-2}D_{ee}u + (\gamma - 1)(\gamma - 2)u^{\gamma-3}(D_e u)^2 \text{ em } \{u > 0\} \cap \Omega.$$

Como $\gamma \in (1, 2)$ o último termo é não-positivo, o que implica na segunda inequação.

■

Proposição 1.5 *Seja $u \in S^F(\Omega)$, então*

$$L_u(u) \geq (2 - \gamma)u^{\gamma-1} \ em \ \{u > 0\} \cap \Omega,$$

e

$$\Delta u \leq u^{\gamma-1} \ em \ \Omega.$$

Demonstração: Sendo S_{D^2u} o sub-diferencial de F no ponto $D^2u \in S_d$ definido em (1.5), por (1.8) temos que

$$S_{D^2u}(-D^2u) \leq F(D^2u - D^2u) - F(D^2u) \Longrightarrow S_{D^2u}(D^2u) \geq F(D^2u) = u^{\gamma-1}, \quad (1.20)$$

logo,

$$\begin{aligned} S_{D^2u}(D^2u) \geq u^{\gamma-1} \quad &\Longrightarrow \quad L_u(u) = S_{D^2u}(D^2u) - (\gamma-1)u^{\gamma-1} \geq u^{\gamma-1} - (\gamma-1)u^{\gamma-1} \\ &\Longrightarrow \quad L_u(u) \geq (2-\gamma)u^{\gamma-1} \end{aligned}$$

o que nos dá a primeira desigualdade. Por outro lado, como o traço é um subdiferencial da F no ponto $O \in S_d$, segue de (1.20) que

$$S_{D^2u}(D^2u) \geq F(D^2u) = u^{\gamma-1} \geq S_O(D^2u) = Tr(D^2u) = \Delta u \text{ em } \Omega$$

assim obtendo a segunda desigualdade. ■

Capítulo 2

Estimativa de Não-Degenerescência

Neste capítulo, é apresentada uma estimativa da não degenerescência da solução na fronteira livre, ou seja, um controle sobre o crescimento da solução nesses pontos.

Lema 2.1 *Suponha que $u \in S^F(\Omega)$ e $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Seja β a constante definida em (1.17). Então existe uma constante universal a_0 dependendo somente de Λ, d e γ, tal que para todo $a \geq a_0$, tem-se*

$$L_u(au - |x - x_0|^\beta) \geq 0 \ \ em \ \ \{u > 0\} \cap \Omega.$$

Demonstração: Para simplificar a notação defina $\rho = \rho(x) = |x - x_0|$. Inicialmente veja que as seguintes igualdades são verdadeiras

$$D_i\rho = \tfrac{(x_i-(x_0)_i)}{|x-x_0|} = \tfrac{(x_i-(x_0)_i)}{\rho}$$
$$D_i\rho^\beta = \beta\rho^{\beta-1}D_i\rho = \beta\rho^{\beta-2}(x_i - (x_0)_i)$$
$$D_{ij}\rho^\beta = \beta(\beta-2)\rho^{\beta-3}D_j\rho(x_i - (x_0)_i) = \beta(\beta-2)\rho^{\beta-2}D_j\rho D_i\rho + \delta_{ij}\beta\rho^{\beta-2}.$$

Portanto,

$$D^2\rho^\beta = \beta(\beta-2)\rho^{\beta-2}D\rho \otimes D\rho + \beta\rho^{\beta-2}I.$$

Sendo S_{D^2u} é o sub-diferencial do operador uniformemente elíptico F no ponto $D^2u \in S_d$, então

$$S_{D^2u}(D^2\rho^\beta) = \beta(\beta-2)\rho^{\beta-2}S_{D^2u}(D\rho \otimes D\rho) + \beta\rho^{\beta-2}S_{D^2u}(I)$$

como $D\rho \otimes D\rho \geq 0$ e S_{D^2u} é um operador uniformemente elíptico com mesma constante de elipticidade da F, tem-se

$$S_{D^2u}(D^2\rho^\beta) \leq \beta(\beta-2)\rho^{\beta-2}\Lambda\|D\rho \otimes D\rho\| + \beta\rho^{\beta-2}\Lambda|I|. \tag{2.1}$$

Note que,

$$\begin{aligned}
\|D\rho \otimes D\rho\|^2 &= \sum_{ij}^{d} (D_i\rho D_j\rho)^2 \\
&= \sum_{ij}^{d} \left(\frac{(x_i - (x_0)_i)(x_j - (x_0)_j)}{\rho^2} \right)^2 \\
&= \frac{1}{\rho^4} \sum_{ij}^{d} (x_i - (x_0)_i)^2 (x_j - (x_0)_j)^2 \\
&= \frac{1}{\rho^4} \sum_{j}^{d} \left(\left(\sum_{i}^{d} (x_i - (x_0)_i)^2 \right) (x_j - (x_0)_j)^2 \right) \\
&= \frac{1}{\rho^4} \sum_{j}^{d} \left(|x - x_0|^2 (x_j - (x_0)_j)^2 \right) \\
&= \frac{1}{\rho^4} \sum_{j}^{d} \rho^2 (x_j - (x_0)_j)^2 \\
&= \frac{1}{\rho^2} \sum_{j}^{d} (x_j - (x_0)_j)^2 \\
&= \frac{1}{\rho^2} |x - x_0|^2 \\
&= \frac{1}{\rho^2} \rho^2 = 1.
\end{aligned}$$

Utilizando este fato juntamente com (2.1), tem-se

$$S_{D^2u}(D^2\rho^\beta) \le \beta(\beta - 2)\rho^{\beta-2}\Lambda + \beta\rho^{\beta-2}\Lambda|I| = C\rho^{\beta-2}$$

em que $C = \beta(\beta - 2)\Lambda + \beta\Lambda|I| \ge 0$ é uma constante dependendo de Λ, γ e da dimensão d. Logo,

$$L_u(\rho^\beta) = S_{D^2u}(D^2\rho^\beta) - (\gamma - 1)u^{\gamma-2}\rho^\beta \le C\rho^{\beta-2} - (\gamma - 1)u^{\gamma-2}\rho^\beta$$

em $\{u > 0\} \cap \Omega$.

Note que pela **proposição 1.5** tem-se que $L_u(u) \ge 0$, logo

$$\begin{aligned}
L_u(au - |x - x_0|^\beta) = L_u(au - \rho^\beta) = aL_u(u) - L_u(\rho^\beta) &\ge -L_u(\rho^\beta) \\
&\ge -C\rho^{\beta-2} + (\gamma - 1)u^{\gamma-2}\rho^\beta \\
&\ge 0
\end{aligned}$$

se e somente se,

$$(\gamma - 1)u^{\gamma-2}\rho^\beta \ge C\rho^{\beta-2} \Longrightarrow \frac{C}{\gamma - 1}u^{2-\gamma} \le \rho^2$$

isto é, $L_u(au - |x-x_0|^\beta) \geq 0$ em $\Omega \cap \{u>0\} \cap \left\{\frac{1}{\gamma-1}u^{2-\gamma} \leq \rho^2\right\}$.

Por outro lado, utilizando a desigualdade da **Proposição 1.5** em $\Omega \cap \{u>0\} \cap \left\{\frac{C}{\gamma-1}u^{2-\gamma} > \rho^2\right\}$ temos que

$$L_u(au - |x-x_0|^\beta) \geq a(2-\gamma)u^{\gamma-1} - C\rho^{\beta-2} + (\gamma-1)u^{\gamma-2}\rho^\beta$$

e sendo $\gamma \in (1,2)$, então $(\gamma-1)u^{\gamma-2}\rho^\beta \geq 0$. Daí,

$$\begin{aligned} L_u(au - |x-x_0|^\beta) \quad & \geq a(2-\gamma)u^{\gamma-1} - C\rho^{\beta-2} \\ & \geq a(2-\gamma)u^{\gamma-1} - C\left(\sqrt{\frac{C}{\gamma-1}}\right)^{\beta-2} u^{\frac{\beta-2}{\beta}} \\ & = u^{\gamma-1}\left[a(2-\gamma) - C\left(\sqrt{\frac{C}{\gamma-1}}\right)^{\beta-2}\right] \end{aligned}$$

tomando $k = C\left(\sqrt{\frac{C}{\gamma-1}}\right)^{\beta-2} \geq 0$ e por $u \geq 0$ tem-se

$$L_u(au - |x-x_0|^\beta) \geq a(2-\gamma) - k \geq 0$$

desde que, se tome a_0 suficientemente grande satisfazendo $a_0 \geq \frac{k}{2-\gamma}$. Em particular, temos que a constante universal a_0 depende unicamente da constante de elipticidade do operador F, do parâmetro γ, pois $\beta = \frac{2}{2-\gamma}$ e da dimensão d. ■

Corolário 2.1 *Para $u \in P_R(x_0)$, tem-se*

$$\sup_{\partial B_r(x_0)} u \geq Cr^\beta$$

para uma constante universal C e $0 < r < R$.

Demonstração: Tome $y_0 \in \{u>0\}$ com $|x_0 - y_0| < \frac{1}{2}r$ e $\rho = |x - y_0|$. Para a constante universal a_0 do **Lema 2.1**, defina

$$h(x) = a_0 u(x) - \rho^\beta(x)$$

em $\Omega = B_r(x_0) \cap \{u > 0\}$.

Como $h(y_0) > 0$ e $L_u(u) \geq 0$ (veja a **Proposição 1.5**) em Ω, pelo princípio do máximo temos que $\sup_{\partial\Omega} h > 0$.

Note que

$$\partial\Omega = (\partial\{u>0\} \cap B_r(x_0)) \cup (\partial B_r(x_0) \cap \{u>0\}).$$

e que $h \leq 0$ em $\partial \{u > 0\} \cap B_r(x_0)$, isto implica

$$\sup_{\partial B_r(x_0) \cap \{u>0\}} h = \sup_{\partial \Omega} h > 0.$$

Como para todo $x \in \partial B_r(x_0)$ tem-se $\rho(x) = |x - y_0| < r$, então

$$h(x) > a_0 u(x) - r^\beta \quad \forall x \in \Omega^+ = \partial B_r(x_0) \cap \{u > 0\}$$

daí segue que,

$$\sup_{\Omega^+} h \geq \sup_{\Omega^+} (a_0 u - r^\beta) = a_0 \sup_{\Omega^+} u - r^\beta > 0 \Longrightarrow \sup_{\Omega^+} u > \frac{1}{a_0} r^\beta$$

e como $\Omega^+ \subset \partial B_r(x_0)$ tem-se

$$\sup_{\partial B_r(x_0)} u > \frac{1}{a_0} r^\beta.$$

■

A seguir, iremos estabelecer o seguinte lema de positividade do gradiente.

Lema 2.2 *Suponha que* $u \in S^F(B_1)$. *Seja* a_0 *a constante do* ***Lema 2.1*** *e* $\beta = \frac{2}{2-\lambda}$. *Suponha que para alguma direção* $e \in \mathbb{S}^{d-1}$, *e alguma constante* $k > 0$ *e* $0 < \eta \leq \frac{1}{2^{\beta+1} a_0}$, *tenha-se*

$$D_e u \geq k \text{ em } \{u \geq \eta\}.$$

Se existe $\epsilon > 0$, *dependendo somente de* k, *tal que*

$$D_e u \geq -\epsilon \text{ em } B_1,$$

então

$$D_e u \geq 0 \text{ em } B_{\frac{1}{2}}.$$

Demonstração: Tome $\epsilon = k$. Note que por hipótese $D_e u \geq 0$ em $\{u \geq \eta\}$ e por $0 \leq u \in C^2(B_1)$ segue que no conjunto $\{u = 0\}$ estão os pontos de mínimo da função u o que implica $D_e u = 0$ em $\{u = 0\}$. Portanto, é suficiente provar que $D_e u \geq 0$ em $B_{\frac{1}{2}} \cap \{0 < u < \eta\}$.

Para isto, iremos tomar um ponto $x_0 \in B_{\frac{1}{2}} \cap \{0 < u < \eta\}$. Defina,

$$\Omega = B_1 \cap \{0 < u < \eta\}$$

$$\rho(x) = |x - x_0|$$

e

$$h = D_e u - 2^{\beta+1} k (a_0 u - \rho^\beta).$$

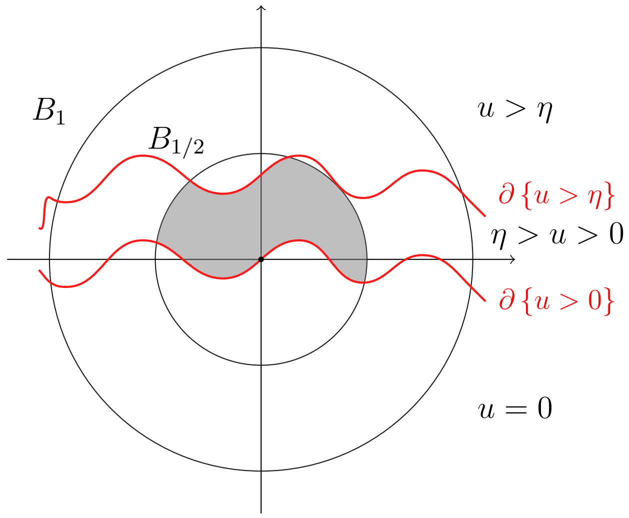

Figura 2.1: Análise da região entre $\partial \{u > \eta\} \cap B_{1/2}$ e $\partial \{u > 0\} \cap B_{1/2}$

Primeiramente iremos investigar o comportamento da função h sobre $\partial\Omega = (\partial B_1 \cap \{0 < u < \eta\}) \cup (\partial \{u > 0\} \cap B_1) \cup (\partial \{u < \eta\} \cap B_1)$, veja a figura 2.

- $\partial B_1 \cap \{0 < u < \eta\}$;

  Note que $\rho \geq \frac{1}{2}$ em $\partial B_1 \cap \{0 < u < \eta\}$ e como por hipótese $D_e u \geq -\epsilon$ em B_1. Temos

$$h \geq -\epsilon - 2^{\beta+1} k \left(a_0 \eta - \frac{1}{2^\beta} \right).$$

  Como $\eta \leq \frac{1}{2^{\beta+1} a_0}$ e $\epsilon = k$, tem-se $h \geq 0$ em $\partial B_1 \cap \{0 < u < \eta\}$

- $\partial \{u > 0\} \cap B_1$;

  Em que $u = 0$ e $D_e u = 0$, logo

$$h = 2^{\beta+1} k \rho^\beta \geq 0.$$

- $\partial \{u < \eta\} \cap B_1$;

  Temos que $u = \eta$ e $D_e u \geq K$, consequentemente,

$$h \geq k - 2^{\beta+1} k (a_0 \eta) \geq 0$$

  utilizando a hipótese $\eta \leq \frac{1}{2^{\beta+1}} a_0$.

Portanto,

$$h \geq 0 \text{ sobre } \partial\Omega.$$

Pelo **Lema 2.1** e a **Proposição 1.4** tem-se

$$L_u(h) = L_u(D_e u) - 2^{\beta+1} k L_u(a_0 u - \rho^\beta) \leq 0$$

e

$$L_u(h) = S_{D^2 u}(D^2 h) + (Dh \cdot 0) - (\gamma - 1)u^{\gamma-2} h$$

considerando que $-(\gamma - 1)u^{\gamma-2} \leq 0$, conclui-se que h satisfaz as condições exigidas pelo princípio da comparação (**Teorema 1.1**), e, assim, temos que

$$h \geq 0 \text{ em } \Omega \Longrightarrow D_e u \geq 2^{\beta+1} k(a_0 u - \rho^\beta) \text{ em } \Omega$$

como $x_0 \in \Omega$ então

$$D_e u(x_0) \geq 2^{\beta+1} k(a_0 u) \geq 0.$$

■

Capítulo 3

Estimativa de Harnack e Consequências

Neste capítulo, iremos abordar estimativas do tipo Harnack, veja **Teorema A**. Como consequência, obtemos a estimativa de regularidade universal do **Teorema B**, bem como o controle sobre quantidades invariantes de escala. Estes são úteis para estudar os perfis de blow-ups, tratados no capítulo seguinte.

O teorema 1.1 segue diretamente do seguinte lema.

Lema 3.1 *Seja $u \in S^F(B_1)$. Então*

$$\sup_{B_{\frac{1}{2}}} u \leq C(u(0) + 1)$$

em que C é uma constante universal.

Demonstração: A demonstração do lema será dividida em cinco partes:

I) Primeiramente considere $v \in C^2(B_1) \cap C^0(\bar{B}_1)$ solução da EDP

$$\begin{cases} \Delta v = v_+^{\gamma-1} & \text{em } B_1, \\ v = u \geq 0 & \text{sobre } \partial B_1. \end{cases}$$

Note que $v \geq 0$ em B_1, pois se existir $y \in B_1$ tal que $v(y) < 0$ então, por conta da continuidade de v no compacto $\bar{B}_1$, segue que v admite mínimo interior negativo, isto é, existe $x \in B_1$ tal que

$$v(x) = \inf_{B_1} v < 0.$$

Novamente pela continuidade de v tem-se que existe $r \in (0,1)$ tal que $v < 0$ em $B_r(x)$. Daí,

$$\Delta v = 0 \text{ em } B_r(x).$$

Pelo Princípio do Máximo v não admite ponto de mínimo interior a $B_r(x)$, uma contradição.

$II)$ **Afirmação 3.1** *Existe uma constante $A > 0$ universal, tal que*

$$\fint_{\partial B_1} v \geq A \Longrightarrow v(0) \geq \frac{1}{2}\fint_{\partial B_1} v.$$

Prova: Segue da proposição 1.22, em [11], que a função de Green G em B_1 no ponto 0, é igual a,

$$G(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\left(\log|x-y| - \log\left|\dfrac{x}{|x|} - |x|y\right|^{2-d}\right) & \text{se } d = 2 \\ \dfrac{1}{(2-d)\omega_d}\left(|x-y|^{2-d} - \left|\dfrac{x}{|x|} - |x|y\right|\right) & \text{se } d \geq 3. \end{cases}$$

Em que $G(x,y) = G(y,x)$ e ω_d é a área da casca esférica de B_1. Daí,

$$\fint_{\partial B_1} v - v(0) = \fint_{\partial B_1} v - \int_{B_1} G(0,y)\Delta v - \int_{\partial B_1} v\frac{\partial G}{\partial n_y}(0,y)$$

onde, pelo corolário 1.23 de [11], tem-se

$$\frac{\partial G}{\partial n_y} = \frac{1}{\omega_d}\frac{1-|x|^2}{|x-y|^d} \text{ para } d \geq 3.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \fint_{\partial B_1} v - v(0) &= \fint_{\partial B_1} v - \int_{B_1} G(y,0)v_+^{\gamma-1} - \frac{1}{\omega_d}\int_{\partial B_1} v\frac{1}{|y|^d} \\ &= \fint_{\partial B_1} v - \int_{B_1} G(y,0)v_+^{\gamma-1} - \frac{1}{\omega_d}\int_{\partial B_1} v \\ &= \fint_{\partial B_1} v - \int_{B_1} G(y,0)v_+^{\gamma-1} - \fint_{\partial B_1} v \\ &= -\int_{B_1} G(y,0)v_+^{\gamma-1} \\ &= -\int_0^1\int_{\partial B_r} G(y,0)v_+^{\gamma-1}. \end{aligned}$$

Consequentemente, utilizando a inequação de Holder para $p = \frac{1}{\gamma-1}$ obtemos

$$\fint_{\partial B_1} v - v(0) \quad \leq -\int_0^1\left(\int_{\partial B_r} |G(y,0)|^{\frac{1}{2-\gamma}}\right)^{2-\gamma}\left(\int_{\partial B_r} |v_+^{\gamma-1}|^{\frac{1}{\gamma-1}}\right)^{\gamma-1}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq -\int_0^1 \left(\int_{\partial B_r} |G(y,0)|^{\frac{1}{2-\gamma}}\right)^{2-\gamma} \left(\int_{\partial B_r} |v_+|\right)^{\gamma-1} \\
&\leq -\int_0^1 \left(\int_{\partial B_r} |G(y,0)|^{\frac{1}{2-\gamma}}\right)^{2-\gamma} \left(\int_{\partial B_r} v\right)^{\gamma-1} \\
&\leq -\int_0^1 \left(\int_{\partial B_r} |G(y,0)|^{\frac{1}{2-\gamma}}\right)^{2-\gamma} \left(\omega_d r^{d-1} \fint_{\partial B_r} v\right)^{\gamma-1} \\
&\leq -\omega_d^{\gamma-1} \int_0^1 r^{(d-1)(\gamma-1)} \left(\int_{\partial B_r} |G(y,0)|^{\frac{1}{2-\gamma}}\right)^{2-\gamma} \left(\fint_{\partial B_r} v\right)^{\gamma-1}.
\end{aligned}
$$

Por $\fint_{\partial B_r} v$ ser não decrescente, temos

$$
\fint_{\partial B_1} v - v(0) \leq -\omega_d^{\gamma-1} \int_0^1 r^{(d-1)(\gamma-1)} \left(\int_{\partial B_r} |G(y,0)|^{\frac{1}{2-\gamma}}\right)^{2-\gamma} \left(\fint_{\partial B_1} v\right)^{\gamma-1}.
$$

Como $G \in L^\infty(B_1)$

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 r^{(d-1)(\gamma-1)} \left(\int_{\partial B_r} |G(y,0)|^{\frac{1}{2-\gamma}}\right)^{2-\gamma} \\
&\quad \leq \int_0^1 r^{(d-1)(\gamma-1)} \left(\int_{\partial B_r} (\|G(y,0)\|_{L^\infty(B_1)})^{\frac{1}{2-\gamma}}\right)^{2-\gamma} \\
&\quad \leq \int_0^1 r^{(d-1)(\gamma-1)} \left(|\partial B_r| (\|G(y,0)\|_{L^\infty(B_1)})^{\frac{1}{2-\gamma}}\right)^{2-\gamma} \\
&\qquad = \int_0^1 r^{(d-1)(\gamma-1)} \left(\omega_d r^{d-1}\right)^{2-\gamma} \|G(y,0)\|_{L^\infty(B_1)} \\
&\qquad = \omega_d^{2-\gamma} \int_0^1 r^{d-1} \|G(y,0)\|_{L^\infty(B_1)} \\
&\qquad = \omega_d^{2-\gamma} \|G(y,0)\|_{L^\infty(B_1)} \int_0^1 r^{d-1} \\
&\qquad = \omega_d^{2-\gamma} \|G(y,0)\|_{L^\infty(B_1)} \frac{1}{d}
\end{aligned}
$$

pois $d \geq 3$, logo

$$
\begin{aligned}
\fint_{\partial B_1} v - v(0) &\leq -\frac{\omega_d}{d} \|G(y,0)\|_{L^\infty(B_1)} \left(\fint_{\partial B_1} v\right)^{\gamma-1} \\
&= C \left(\fint_{\partial B_r} v\right)^{\gamma-1}
\end{aligned}
$$

o que implica

$$
\fint_{\partial B_1} v - v(0) \leq C \left(\fint_{\partial B_r} v\right)^{\gamma-2} \fint_{\partial B_r} v.
$$

Desde que $\gamma - 2 < 0$, então para A suficientemente grande tal que

$$
A^{\gamma-2} \leq \frac{1}{2C} \Longrightarrow \left(\fint_{\partial B_1} v\right)^{\gamma-2} \leq A^{\gamma-2} \leq \frac{1}{2C}
$$

Daí,

$$\fint_{\partial B_1} v - v(0) \leq \frac{1}{2} \fint_{\partial B_r} v \Longrightarrow \frac{1}{2} \fint_{\partial B_r} v \leq v(0).$$

$III)$ **Afirmação 3.2** *Existe uma constante $A > 0$, tal que*

$$\fint_{\partial B_1} u \geq A \Longrightarrow u(0) \geq \frac{1}{2} \fint_{\partial B_1} u.$$

Note que é suficiente provar que

$$u \geq v \text{ em } B_1$$

em que v é a solução da afirmação 3.1. Para esta finalidade, considere $t_0 = \min_{\bar{B}_1}(u - v) = (u - v)(x_0)$ para alguma $x_0 \in \bar{B}_1$. Nós precisamos mostrar que $t_0 \geq 0$.

Se $x_0 \in \partial B_1$ então $t_0 = 0$. Por outro lado, $x_0 \in B_1$ é um ponto de mínimo local de $(u - v)$, logo $\Delta(u - v)(x_0) \geq 0$, então

$$\Delta u(x_0) \geq \Delta v(x_0).$$

A segunda parte da proposição 2.3 nos dá

$$F(D^2 u(x_0)) = u^{\gamma-1}(x_0) \geq \Delta u(x_0) \geq \Delta v(x_0) = v_+^{\gamma-1}(x_0)$$

o que implica $t_0 = u(x_0) - v(x_0) \geq 0$.

$IV)$ **Afirmação 3.3** *Para todo $0 < r < 1$, tem-se*

$$ou\ u(0) \geq \frac{1}{2} \fint_{\partial B_r} u \ \ ou\ \ \fint_{\partial B_r} u \leq A r^{\beta}.$$

Seja u_r o reescalonamento da u no ponto $x_0 = 0$, tem-se

$$u \in S^F(B_1) \Longrightarrow u_r \in S^{F_r}(B_{\frac{1}{r}}) \Longrightarrow u_r \in S^{F_r}(B_1).$$

Portanto, pela afirmação 3.2

$$\fint_{\partial B_1} u_r \geq A \Longrightarrow u_r(0) \geq \frac{1}{2} \fint_{\partial B_1} u_r$$

onde,

$$\frac{1}{2} \fint_{\partial B_1} u_r \ = \ \frac{1}{2|\partial B_1|} \int_{\partial B_1} u_r$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\omega_d r^\beta}\int_{\partial B_1} u(xr)\\
&= \frac{1}{2\omega_d r^\beta}\int_{\partial B_r} \frac{u(y)}{r^{d-1}}\\
&= \frac{1}{2r^\beta|\partial B_r|}\int_{\partial B_r} u\\
&= \frac{1}{2r^\beta}⨍_{\partial B_r} u
\end{aligned}
$$

logo,

$$\frac{u(0)}{r^\beta} = u_r(0) \geq \frac{1}{2}⨍_{\partial B_1} u_r = \frac{1}{2r^\beta}⨍_{\partial B_r} u \Longrightarrow u(0) \geq \frac{1}{2}⨍_{\partial B_r} u.$$

No entanto, se tivermos

$$⨍_{\partial B_1} u_r < A \Longrightarrow \frac{1}{r^\beta}⨍_{\partial B_r} u < A \Longrightarrow ⨍_{\partial B_r} u < r^\beta A.$$

Por fim, veja que,

$$\int_{B_1} u = \int_0^1 \int_{\partial B_r} u = \int_0^1 \omega_d r^{d-1} ⨍_{\partial B_r} u = \omega_d \int_0^1 r^{d-1} ⨍_{\partial B_r} u$$

$V)$ Pela afirmação 3.3 temos

$$⨍_{\partial B_r} u \leq Ar^\beta + 2u(0).$$

Daí, segue que

$$\int_{B_1} u \leq \omega_d \int_0^1 r^{d-1}\left(Ar^\beta + 2u(0)\right) = \omega_d\left(\frac{A}{d+\beta} + \frac{2u(0)}{d}\right) \leq \omega_d\left(\frac{A}{d} + \frac{2u(0)}{d}\right)$$

Portanto,

$$\int_{B_1} u \leq C(d,\gamma)(u(0)+1).$$

Por fim, como $P^+_\Lambda(D^2u) \geq F(D^2u) = u^{\gamma-1} \geq 0$, então pelo **Teorema 1.6**

$$\sup_{B_{\frac{1}{2}}} u \leq C(\Lambda,d)\|u\|_{L^1(B_1)} = C(\Lambda,d)\int_{B_1}|u| = C(\Lambda,d)\int_{B_1} u \leq C(d,\gamma,\Lambda)(u(0)+1).$$

■

Segue abaixo as demonstrações dos teoremas A e B, respectivamente.

Teorema 3.1 *Se $u \in S^F(B_R)$, então*

$$\sup_{B_{\frac{R}{2}}} u \leq C\left(u(0) + R^\beta\right).$$

Demonstração: Temos que

$$u \in S^F(B_R) \Longrightarrow u_R \in S^{F_R}(B_1)$$

e pelo lema anterior

$$\sup_{B_{\frac{1}{2}}} u_R \leq C(u_R(0) + 1)$$

multiplicando ambos os lados por R^β,

$$\sup_{B_{\frac{1}{2}}} u(Rx) \leq C(u(0) + R^\beta) \Longrightarrow \sup_{B_{\frac{R}{2}}} u \leq C(u(0) + R^\beta).$$

■

Teorema 3.2 *Seja $u \in S^F(\Omega)$ com $u \in C^{2,\alpha}_{loc}(\Omega)$ para algum $\alpha \in (0,1)$. Supondo que $B_1 \subset \Omega$, então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(B_{1/8})} \leq C(u(0) + 1).$$

Demonstração: Pelo **Teorema 3.1** temos que u é limitada em $B_{\frac{1}{2}}$ consequentemente $F(D^2u) = u^{\gamma-1}$ é limitada em $B_{1/2}$ e pela primeira parte do **Teorema 1.5**, temos que $u \in C^{1,\alpha}(B_{\frac{1}{4}})$. Além disso, como $\gamma - 1 \in (0,1)$ temos que

$$\|u^{\gamma-1}(x) - u^{\gamma-1}(y)\| \leq \|u(x) - u(y)\|^{\gamma-1} \leq (K\|x-y\|^\alpha)^{(\gamma-1)}$$

em $B_{1/4}$. Logo,

$$F(D^2u) = u^{\gamma-1} \in C^{\alpha(\gamma-1)}(B_{\frac{1}{4}}).$$

Pela segunda parte do **Teorema 1.5** tem-se $u \in C^{2,\alpha_0}(B_{\frac{1}{8}})$ para algum $\alpha_0 \in (0,1)$ com

$$\begin{aligned}
\|u\|_{C^{2,\alpha}(B_{1/8})} &\leq C_1(\|u\|_{L^\infty(B_{1/4})} + \|u^{\gamma-1}\|_{L^\infty(B_{1/4})}) \\
&\leq C_1(2\|u\|_{L^\infty(B_{1/4})}) \\
&\leq C(u(0) + 1)
\end{aligned}$$

pois, pelo **Lema 2.1** existe uma constante universal C_2, tal que

$$\sup_{B_{\frac{1}{2}}} u \leq C_2(u(0) + 1).$$

■

Corolário 3.1 *Seja $u \in P_R^F(x_0)$. Então*

$$\sup_{B_r(x_0)} u \leq Cr^\beta$$

para todo $0 < r \leq \frac{1}{2}R$ em que C é uma constante universal.

Demonstração: Note que $u \in P_R^F(x_0)$ implica que o reescalonamento

$$v(x) = u_{x_0,2r}(x) = \frac{1}{(2r)^\beta} u(x2r + x_0) \in P_{R/2r}^{F_{2r}}(0) \subset P_1^{F_{2r}}(0),$$

pois $1 \leq R/2r$. Agora, utilizando o **Teorema 3.1** temos que existe uma constante universal C tal que,

$$\begin{aligned} \sup_{B_{1/2}} v \leq C\,(v(0)+1) = C \quad &\Longrightarrow \quad \sup_{B_{1/2}} u(x2r + x_0) \leq 2^\beta C r^\beta \\ &\Longrightarrow \quad \sup_{B_r(x_0)} u \leq 2^\beta C r^\beta \end{aligned}$$

o que encerra a demonstração.

■

Corolário 3.2 *Seja $u \in P_R(x_0)$. Então*

$$\sup_{B_{R/2}(x_0)\cap\{u>0\}} \left| \frac{D^2 u}{u^{\gamma-1}} \right| \leq C$$

para alguma constante universal C.

Demonstração: Note que é suficiente provar para $u \in P_1^F(0)$.

Tome $y_0 \in B_{1/2} \cap \{u > 0\}$, pelo **Corolário 3.1** existe uma constante universal M tal que

$$u(y_0) \leq \sup_{B_{1/2}} u \leq M \frac{1}{2^\beta}$$

assim,

$$r := \left(\frac{u(y_0)}{M} \right)^{\frac{1}{\beta}} \leq \frac{1}{2}. \tag{3.1}$$

Em particular $u \in S^F(B_r(y_0))$ pois $B_r(y_0) \subset B_1$. Consequentemente, o reescalonamento $u_{y_0,r}$ definido em (1.16), nos dá que $u_{y_0,r} \in S^{F_r}(B_1)$.

Pelo **Lema 3.1** segue que

$$\sup_{B_{1/2}} u_{y_0,r} \leq C(u_{y_0,r}(0) + 1) = C\left(\frac{u(y_0)}{r^\beta} + 1 \right) = C(M+1). \tag{3.2}$$

Aplicando a primeira parte do **Teorema 1.5** com $f = u_{y_0,r}^{\gamma-1}$ limitada em $B_{1/2}$ temos $u_{y_0,r} \in C^{1,\alpha}(B_{1/4})$, daí existe uma constante C_1 tal que

$$|Du_{y_0,r}(x) - Du_{y_0,r}(y)| \leq C_1|x-y|^\alpha \leq C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha.$$

Fixado $y \in B_{1/4}$ tem-se $|Du_{y_0,r}(x)| \leq C_1 \frac{1}{2^\alpha} + |Du_{y_0,r}(y)| = const.$ para todo $x \in B_{1/4}$. Logo,

$$\begin{aligned} \lim_{z\to 0} \frac{|u_{y_0,r}(x) - u_{y_0,r}(z)|}{|x-z|} = |Du_{y_0,r}(x)| \leq const. \quad &\Longrightarrow \quad |u_{y_0,r}(x) - u_{y_0,r}(z)| \leq const.|x-z| \\ &\Longrightarrow \quad u_{y_0,r} \in C^{0,1} \end{aligned}$$

para todo z suficientemente próximo de x. Tomando $x = 0$, existe $\rho > 0$ suficientemente pequeno, tal que $u_{y_0,r} \in C^{0,1}(B_\rho)$, assim implicando em, $f = u_{y_0,r}^{\gamma-1} \in C^{0,\gamma-1}(B_\rho)$. Daí, pela segunda parte do **Teorema 1.5** tem-se $u_{y_0,r} \in C_{loc}^{2,\min\{\gamma-1,\alpha_0\}}(B_{\rho/2})$. Portanto, existe uma constante C_2, tal que para $z \in B_{\rho/2}$

$$|D^2u_{y_0,r}(0) - D^2u_{y_0,r}(z)| \leq C_2|0-z|^{\min\{\gamma-1,\alpha_0\}} = const.$$

Assim, fixando $z \in B_{\rho/2}$, obtemos que

$$|D^2u_{y_0,r}(0)| \leq const. \tag{3.3}$$

Por fim, note que pela definição de r (3.1)

$$D^2u_{y_0,r}(0) = r^{2-\beta}D^2u(y_0) = \left(\frac{u(y_0)}{M}\right)^{1-\gamma} D^2u(y_0),$$

pois

$$2 - \beta = 2 - \frac{2}{2-\gamma} = \frac{4-2\gamma-2}{2-\gamma} = \frac{2}{2-\gamma}(1-\gamma) = \beta(1-\gamma).$$

Por (3.3) segue que $|Du_{y_0,r}(0)|$ é limitado, logo

$$\left|\frac{D^2u(y_0)}{u_{y_0,r}^{\gamma-1}(y_0)}\right| \leq const.$$

■

Capítulo 4

Classificação de Blow-ups

Este capítulo é dedicado a analisar o comportamento de blow-ups em pontos regulares da fronteira livre. Para isso, se faz necessário, não somente investigar as propriedades dos blow-ups em pontos regulares, mas também examinar a geometria do conjunto de contato formado por esses blow-ups. Esse estudo visa obter informações sobre o comportamento da solução em pontos próximos aos pontos regulares da fronteira livre.

Definição 4.1 *Seja $u \in P_R^F(x_0)$. Dizemos que x_0 é um ponto regular da fronteira livre quando*

$$\limsup_{r \longrightarrow 0} \frac{|B_r(x_0) \cap \{u = 0\}\,|}{r^d} > 0 \tag{4.1}$$

e utiliza-se a notação $x_0 \in Reg(u)$, caso contrário, x_0 é considerado um ponto singular da fronteira livre.

Suponha que $u \in P_1^F(0)$ com $0 \in Reg(u)$ (Definição 1.15 e 4.1) para alguma F satisfazendo (1.1) e (1.8) juntamente com (1.9) ou (1.10).

O reescalonamento $u_r(x) = \frac{1}{r^\beta} u(rx)$ satisfaz

$$u_r \in P_{\frac{1}{r}}^{F_r}(0),$$

com F_r definida em (1.18). Resulta do capítulo anterior que está família é localmente uniformemente limitada em $C^{2,\alpha}$, **Teorema 3.1**, o qual nos proporciona, para uma constante C universal, a seguinte desigualdade,

$$\sup_{B_{\frac{r}{2}}} u \leq C \left(u(0) + r^\beta \right).$$

Uma vez que, $0 \in \partial\{u > 0\} \subset \{u = 0\}$, tem-se

$$\sup_{B_{\frac{r}{2}}} u \leq Cr^{\beta} \Longrightarrow \sup_{B_{\frac{r}{2}}} \frac{u}{r^{\beta}} \leq C \Longrightarrow \sup_{B_{\frac{1}{2}}} \frac{u(rx)}{r^{\beta}} \leq C \Longrightarrow \sup_{B_{\frac{1}{2}}} u_r \leq C.$$

Vale ressaltar que $u \in P_r^F(0)$ para $r \in (0,1)$.

Em suma, dada uma sequência $r_h \longrightarrow 0$, tem-se $u \in P_{r_h}^F(0)$ para h suficientemente grande e pela **Proposição 1.1**

$$\sup_{B_{\frac{1}{2}}} u_r \leq C$$

isto é, o reescalonamento u_{r_h} da u é localmente limitado por uma constante universal C.

Além disso, pelo **Teorema 1.5** item 1), temos que $u \in C^{1,\alpha}(B_{1/2})$ com $\alpha \in (0,1)$, então existe uma contante $k > 0$, tal que,

$$|u(r_h x) - u(r_h y)| \leq k r_h^{\alpha}|x-y|^{\alpha} \leq k r_h^{\beta}|x-y|^{\alpha}$$

pois $\beta = \frac{2}{2-\gamma} > 2$. Daí,

$$|u_{r_h}(x) - u_{r_h}(y)| \leq k|x-y|^{\alpha} \text{ em } B_{1/2}.$$

Em razão disso, temos que $\{u_{r_h}\}_{h\geq 1}$ é um sequência equicontínua.

Então, pelo Teorema de Arzelá-Ascoli (**Teorema 1.2**), a menos de uma subsequência, existe uma função v contínua, tal que

$$u_{r_h} \longrightarrow v \tag{4.2}$$

uniformemente.

A convergência acima, implica que o operador uniformemente elíptico $F_{r_h} - u_{r_h}^{\gamma-1}$ converge uniformemente para $Tr - v$, pois se F for homogênea (1.10), então $F_{r_h} = F = Tr$, veja (1.18), por outro lado se F for diferenciável no ponto $O \in S_d$ (1.9), então por (1.11) e (1.8), tem-se

$$Tr(M) = \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{F(tM)}{t} = \lim_{r_h \longrightarrow 0} \frac{F(r_h^{\beta-2}M)}{r_h^{\beta-2}} = \lim_{h\in\mathbb{N}} F_{r_h}(M).$$

Portanto, em ambos os casos (1.10) ou (1.9), obtemos que

$$F_{r_h}(D^2 u_{r_h}) - u_{r_h}^{\gamma-1} \longrightarrow \Delta v - v^{\gamma-1}$$

tendo em vista que a hipótese de homogeneidade implica que F coincide com o operador traço.

Recapitulando o que foi feito até agora, temos que $\left\{F_{r_h} - u_{r_h}^{\gamma-1}\right\}_{h\geq 1}$ é uma sequência de operadores uniformemente elípticos, tal que $\{u_{r_h}\}_{h\geq 1}$ é solução clássica de $F_{r_h}(D^2 u_{r_h}) - u_{r_h}^{\gamma-1} = 0$. Além disso, $F_{r_h} - u_{r_h}^{\gamma-1}$ converge uniformemente para $Tr - v^{\gamma-1}$ com $\{u_{r_h}\}_{h\geq 1}$ uniformemente limitada em $B_{1/2}$, segue da **Proposição 1.1** que,

$$Tr(D^2 v) = v^{\gamma-1} \Longrightarrow v \in P_\infty^\Delta(0). \tag{4.3}$$

Sendo v solução contínua de $Tr(D^2 v) = \Delta v = v^{\gamma-1} = f$ em $\mathbb{R}^d$, temos pelo **Teorema 1.5** que $v \in C^2(\mathbb{R}^d)$.

Este resultado é particularmente interessante, pois, no caso em que F é homogênea, ele se reduz ao problema clássico (2), e, de forma intuitiva, temos

$$F_{r_h}(D^2 u_{r_h}) - u_{r_h}^{\gamma-1} \to \Delta v - v^{\gamma-1}.$$

No entanto, ao remover a hipótese de homogeneidade da F e introduzir a hipótese (1.9), ampliam-se as possibilidades de equações diferenciais parciais (EDPs) consideradas, sem comprometer o limite acima.

É necessário, agora, realizar uma análise sobre o conjunto de contato $\{v > 0\}$. Contudo, antes disso, torna-se indispensável provarmos propriedades de convexidade para v.

Lema 4.1 *Seja $u \in P_\infty^F(0)$, para alguma F satisfazendo (1.1), (1.8) e (1.10) ou (1.9). Então u é convexa.*

Demonstração: Pelo **Teorema 1.3** temos que para provar a convexidade de u, basta verificar que para todo $i \in \{1, \cdots, n\}$ tem-se

$$D_{ii} u \geq 0 \text{ em } \mathbb{R}^d. \tag{4.4}$$

Com $u \geq 0$ em $\mathbb{R}^d$, é suficiente provar (4.4) em $\{u > 0\}$.

Supondo que tal estimativa não seja verdadeira, temos

$$-l := \inf_{\{u>0\}} \frac{D_{ii} u}{u^{\gamma-1}} < 0 \tag{4.5}$$

Note que pelo **Corolário 3.2** existe uma constate universal C tal que

$$\left|\frac{D^2u}{u^{\gamma-1}}\right| \leq C \text{ em } \{u>0\},$$

o que garante a existência do ínfimo (4.5).

i) Considere (x_h) uma sequência em $\{u>0\}$ satisfazendo

$$\frac{D_{ii}u(x_h)}{u^{\gamma-1}(x_h)} \to -l \tag{4.6}$$

e

$$r_h = u^{\frac{1}{\beta}}(x_h),$$

então a menos de uma subsequência o reescalonamento

$$v_h(x) = \frac{1}{r_h^{\beta}}u(r_hx+x_h) \to v \in P_\infty^{\Delta}(0)$$

uniformemente. Portanto, $Tr(D^2v) = \Delta v = v^{\gamma-1}$ em $\mathbb{R}^d$.

ii) Note que

$$D_{ii}v_h = \frac{1}{r_h^{\beta-2}}D_{ii}u(r_hx+x_h) = \frac{u^{\gamma-1}(r_hx+x_h)}{r_h^{\beta-2}}\frac{D_{ii}u(r_hx+x_h)}{u^{\gamma-1}(r_hx+x_h)},$$

como $\beta-2=\beta(\gamma-1)$, tem-se por (4.5),

$$D_{ii}v_h \geq \frac{u^{\gamma-1}(r_hx+x_h)}{r_h^{\beta-2}}(-l) = -l\left(\frac{1}{r_h^{\beta}}u(r_hx+x_h)\right)^{\gamma-1} = -lv_h^{\gamma-1}$$

para todo $x\in\mathbb{R}^d$. Aplicando o limite temos

$$D_{ii}v \geq -lv^{\gamma-1} \text{ em } B_1.$$

Por outro lado,

$$D_{ii}v_h(0) = \frac{1}{r_h^{\beta-2}}D_{ii}u(x_h) = \frac{1}{r_h^{\beta(\gamma-1)}}D_{ii}u(x_h) = \frac{D_{ii}u(x_h)}{u^{\gamma-1}(x_h)}$$

pela definição de r_h. Portanto, (4.6) nos dá que

$$D_{ii}v(0) = -l = -lv^{\gamma-1}(0).$$

Agora defina

$$g = D_{ii}v + lv^{\gamma-1},$$

então $g\geq 0$ em B_1 e $g(0)=0$, isto é, g admite mínimo interior em B_1.

iii) Note que a equação

$$D_i(v^{\gamma-1}) = (\gamma-1)v^{\gamma-2}D_iv$$

implica que,

$$D_{ij}(v^{\gamma-1}) = (\gamma-1)v^{\gamma-2}D_{ij}v + (\gamma-1)(\gamma-2)v^{\gamma-3}D_jvD_iv.$$

Daí,

$$D^2(v^{\gamma-1}) = (\gamma-1)v^{\gamma-2}D^2v + (\gamma-1)(\gamma-2)v^{\gamma-3}Dv\otimes Dv,$$

sendo $\gamma\in(1,2)$ temos que último termo determina uma matriz não-positiva em $B_1\cap\{v>0\}$. Logo,

$$D^2(v^{\gamma-1}) \leq (\gamma-1)v^{\gamma-2}D^2v.$$

Sendo o blow-up $v\in P_\infty^\Delta(0)$, então

$$S_{D^2v}(D^2v^{\gamma-1}) = Tr(D^2v^{\gamma-1}) \leq (\gamma-1)v^{\gamma-2}Tr(D^2v) = (\gamma-1)v^{2\gamma-3}.$$

Portanto, em $B_1\cap\{w>0\}$

$$\begin{aligned} L_v(v^{\gamma-1}) &= S_{D^2v}(D^2(v^{\gamma-1})) - (\gamma-1)v^{\gamma-2}v^{\gamma-1} \\ &\leq (\gamma-1)v^{2\gamma-3} - (\gamma-1)v^{2\gamma-3} = 0, \end{aligned}$$

onde L_w é o operador linear definido em (1.9).

Agora note que a **Proposição 1.4** implica em

$$L_v(D_{ii}v) \leq 0 \text{ em } B_1\cap\{v>0\}.$$

Como $l>0$, temos

$$L_v(g) = L_v(D_{ii}v + lv^{\gamma-1}) = L_v(D_{ii}v) + lL_v(v^{\gamma-1}) \leq 0 \text{ em } B_1\cap\{v>0\}.$$

Sendo $0\in B_1$ o ponto de mínimo global de g e $v\in C^0$ com $v(0)=1$, segue que g admite mínimo interior em $B_1\cap\{v>0\}$. Logo, pelo princípio do máximo $g\equiv 0$, isto implicaria em,

$$D_{ii}v \equiv -lv^{\gamma-1}, \tag{4.7}$$

um absurdo, pois isto implica na seguinte igualdade

$$v^{\gamma-1} = Tr(D^2v) = -lv^{\gamma-1}d.$$

■

Observação 4.0.1 *Note que o* ***Lema 4.1*** *implica que* $\{u=0\}$ *é um conjunto convexo, pois dados* $x, y \in \{u=0\}$ *e* $t \in (0,1)$ *pela convexidade de* u *tem-se*

$$0 \leq u((1-t)x+ty) \leq (1-t)u(x)+tu(y) = 0 \Longrightarrow (1-t)x+ty \in \{u=0\}\,.$$

Observação 4.0.2 *Retomando a análise do conjunto de contato* $\{v=0\}$*, veja (4.2). Considere* $0 \in Reg(u)$*, então por (4.1), tem-se que para* r *suficientemente pequeno*

$$\frac{|B_r \cap \{u=0\}\,|}{r^d} > 0 \Longrightarrow |B_r \cap \{u=0\}\,| > 0 \Longrightarrow |B_1 \cap \{u=0\}\,| > 0 \tag{4.8}$$

pois $B_r \subset B_1$.

Por outro lado, se $x \in B_1 \cap \{u=0\} - \{0\}$*, então pela convexidade de* $\{u=0\}$ *e por* $0 \in \{u=0\}$*, obtemos que* $r_h x \in \{u=0\}$ *para todo* $0 < r_h \leq 1$*, ou seja,*

$$u_{r_h}(x) = \frac{1}{r_h^{\beta}} u(r_h x) = 0 \Longrightarrow x \in \{u_{r_h}=0\} \Longrightarrow B_1 \cap \{u=0\} \subset \{u_{r_h}=0\}\,.$$

Segue de (4.8) que,

$$|\,\{u_{r_h}=0\}\,| > |B_1 \cap \{u=0\}\,| > 0\ .$$

para todo h *suficientemente grande satisfazendo* $0 < r_h \leq 1$.

Aplicando o limite $h \longrightarrow \infty$*, obtemos*

$$|\,\{v=0\}\,| > 0.$$

Pode ter passado despercebido, mas também obtivemos o resultado de que $\{v=0\}$ é convexo, conforme indicado pela equação (4.3), pelo **lema 4.1** e pela Observação 4.0.1.

Para concluir os estudos relacionados ao conjunto de contado da função (4.2), será demonstrado a seguir que $\{v=0\}$ é um cone.

Proposição 4.1 *Seja* $u \in P_1^F(0)$*, com* F *satisfazendo (1.1), (1.8) e (1.10) ou (1.9). Então o conjunto de contato do blow-up (4.2) é igual a um cone.*

Demonstração: Defina $\Omega = \{u=0\}$ e $\Omega_{r_h} = \{u_{r_h}=0\} = \big\{x \in \mathbb{R}^d; r_h x \in \Omega\big\}$. Segue da observação 4.0.1 que $\Omega = \{u=0\}$ é convexo, logo as seguintes afirmações são verdadeiras;

Afirmação 4.1 *A convexidade de* Ω*, implica na convexidade de* Ω_{r_h}.

Dados $x, y \in \Omega_{r_h}$, então $r_h x, r_h y \in \Omega$, pela convexidade de Ω, obtemos

$$(1-t)r_h x + t r_h y \in \Omega \Longrightarrow (1-t)x+ty \in \Omega_{r_h},$$

para todo $t \in [0,1]$.

Afirmação 4.2 *$\{v = 0\}$ é um cone.*

Considere $x \in \partial B_1 \cap \Omega$, então $\frac{1}{r_h}x \in \partial B_{1/r_h} \cap \Omega_{r_h}$, pela convexidade de Ω_{r_h}, obtemos que o segmento de reta $\left[0, \frac{1}{r_h}x\right]$ está completamente contido em Ω_{r_h}. Agora "abra" um cone de rotação C_h em volta da direção x, tal que a reta geratriz do cone seja à reta $l(t) = ta$ para todo $t \in \mathbb{R}$, para um centro $a \in \Omega_{r_h}$ satisfazendo

$$d\left(\frac{1}{r_h}x; \partial\Omega_{r_h}\right) = \left|\frac{1}{r_h}x - a\right|.$$

Claramente, por causa da convexidade de Ω_{r_h}, o cone é um subconjunto de Ω_{r_h} em B_{1/r_h}.

Assim, encontramos uma sequência de cones $C_h \cap B_{1/r_h} \subset \Omega_{r_h}$ convergindo para um cone C contido em $\{v = 0\}$. Para facilitar a compreensão da construção desses cones, consulte a Figura 4.1.

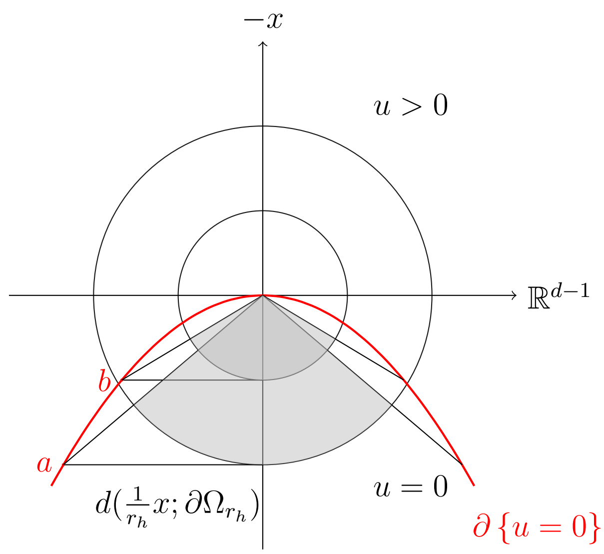

Figura 4.1: Cones em $\{u = 0\}$.

Além disso, a convexidade de Ω também implica que para $h < k$,

$$y \in \Omega_{r_h} \Longrightarrow r_h y \in \Omega \Longrightarrow r_k y \in \Omega \Longrightarrow y \in \Omega_{r_k} \text{ ou seja, } \Omega_{r_h} \subset \Omega_{r_k}$$

e, consequentemente, $C_h \subset C_k$, pois

$$C_h \subset \Omega_{r_h} \subset \Omega_{r_k} \Longrightarrow d\left(\frac{1}{r_k}x; \partial C_h\right) \leq d\left(\frac{1}{r_k}x; \partial\Omega_{r_k}\right) \Longrightarrow C_h \subset C_k. \tag{4.9}$$

Assim, $\{C_h\}_{h\geq 1}$ também é uma sequência não-decrescente.

Para concluir a demonstração, provaremos que $|\Omega_{r_h} \setminus C_h| \longrightarrow 0$, uma vez que isso implica que:

$$C = \lim_{h\in\mathbb{N}} C_h = \lim_{h\in\mathbb{N}} \Omega_{r_h} = \{v = 0\}.$$

Primeiramente, note que, se Ω for um cone, então Ω_{r_h} é um cone para todo $h \in \mathbb{N}$. Neste caso já teríamos que $\{v = 0\}$ é um cone, caso contrário a convexidade de Ω, implicaria em

$$|\Omega \setminus C_h| \longrightarrow 0.$$

Por sua vez, o mesmo argumento pode ser aplicado para Ω_{r_h} com $h \in \mathbb{N}$ fixo, isto é,

$$\lim_{k\in\mathbb{N}} |\Omega_{r_h} \setminus C_k|$$

Logo, dado $\epsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\Omega_{r_h} \setminus C_{k_0}| < \epsilon.$$

Por (4.9), segue que, para todo $h \geq k_0$, tem-se

$$\Omega_{r_h} \setminus C_h \subset \Omega_{r_h} \setminus C_{k_0} \Longrightarrow |\Omega_{r_h} \setminus C_h| < \epsilon.$$

Com isso, conclui-se a demonstração.

$\blacksquare$

Lema 4.2 *Seja $u \in P_\infty^F(0)$ com F satisfazendo (1.1), (1.8) e homogênea. Suponha que o conjunto de contato $\{u = 0\}$ é um cone com $|\{u = 0\}| > 0$, então*

$$u(x) = c_{\gamma,\vec{e}} \left[(x \cdot \vec{e})_+\right]^\beta,$$

em que $(x \cdot \vec{e})_+$ defina a parte positiva do produto interno entre x pertencente ao domínio da u e $\vec{e} \in \mathbb{S}^{d-1}$. Além disso, $c_{\gamma,\vec{e}} \in \mathbb{R}$ é uma constante satisfazendo $0 < c \leq c_{\gamma,\vec{e}} \leq C$ para constantes universais c e C.

Demonstração: Pelo **Lema 4.1** e a Observação 4.0.1, obtemos que u é convexa e consequentemente $\{u = 0\}$ também.

Afirmação 4.3 *Dado $-e \in \mathbb{S}^{d-1} \cap \partial \{u = 0\}$, então $e \in \{u = 0\}$.*

Usando em particular que $-e \in \{u = 0\}$ e que $\{u = 0\}$ é um cone, tem-se

$$u(-te) = 0 \text{ para todo } t > 0.$$

Desde que $u \geq 0$ e convexa, então para todo $x \in \mathbb{R}^d$

$$D_e u(x) = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{u(x+te) - u(x)}{t} \geq 0.$$

De fato, note que tomando $t \in (0,1)$, então $x \in [x + te - e, x + te]$ com

$$x = (1-t)(x+te) + t(x+te-e),$$

logo pela convexidade de u

$$u(x) \leq (1-t)u(x+te) + tu(x+te-e)$$

implicando em,

$$\frac{u(x+te) - u(x)}{t} \geq u(x+te) - u(x+te-e) \longrightarrow u(x) - u(x-e).$$

Em que, sendo $1 - t \leq 1$ e $\frac{1}{t} > 0$ temos

$$\begin{aligned} u(x+te) \geq (1-t)u(x+te) &= (1-t)u(x+te) + tu\left(-\frac{1}{t}e\right) \\ &\geq u((1-t)(x+te) - e)) = u(x+te-t(x-te)-e) \\ &= u(x+te-e-t(x+te)). \end{aligned}$$

Aplicando o limite com $t \to 0$ obtemos que,

$$u(x) \geq u(x-e)$$

e portanto, $D_e u \geq 0$ em $\mathbb{R}^d$.

Com a **Proposição 1.4** temos que $L_u(D_e u) \leq 0$. Assim, pelo princípio do máximo temos que:

$$\text{ou } D_e u \equiv 0 \text{ em } \mathbb{R}^d, \text{ ou } D_e u > 0 \text{ em } \mathbb{R}^d. \tag{4.10}$$

Suponha que o segundo caso seja verdadeiro, então existe um $k > 0$ tal que

$$D_e u \geq 2k > 0 \text{ em } \mathbb{R}^d, \text{ o mesmo vale em } B_2 \cap \left\{u \geq \frac{1}{2^{\beta+1}a_0}\right\} \tag{4.11}$$

com a_0 sendo a constante universal do **Lema 2.1**.

Note que, sendo $u \in C^2_{loc}(\mathbb{R}^d)$, então existe uma constante L tal que

$$|Du(x)| \leq L \text{ para todo } x \in B_2.$$

Assim, fixado $x \in B_2$ e dados $\omega, \nu \in \mathbb{R}^d$ temos

$$\begin{aligned} |D_\omega u(x) - D_\nu u(x)| = |(Du(x)\cdot\omega) - (Du(x)\cdot\nu)| = |(Du(x)\cdot\omega-\nu)| &\leq |Du(x)||\omega-\nu| \\ &\leq L|\omega-\nu|. \end{aligned}$$

Portanto, $D_\omega u(x)$ é contínua em relação a ω. Logo, existe $\bar{\delta} > 0$ dependendo de k, satisfazendo;

$$\begin{aligned} |\nu - e| < \bar{\delta} \Longrightarrow |D_\nu u(x)| &\leq L|\nu-e| + |D_e u(x)| \\ &\leq L\bar{\delta} + |Du(x)||-e| \\ &\leq L(\bar{\delta}+1) \\ &\leq k + L. \end{aligned}$$

Daí, temos

$$D_\nu u \geq -(k+L) \text{ em } B_2. \tag{4.12}$$

Por outro lado, sendo

$$D_e u \geq 2k > 0 \text{ em } B_2 \cap \left\{ u \geq \frac{1}{2^{\beta+1}a_0} \right\}.$$

Pela continuidade de $D_\nu u(x)$ em relação a direção v, tem-se que,

$$\forall x \in B_2 \cap \left\{ u \geq \frac{1}{2^{\beta+1}a_0} \right\} \text{ existe } \delta_x > 0,$$

tal que

$$|\nu - e| < \delta_x \Longrightarrow D_\nu u(x) \geq k$$

e pela continuidade de $D_\nu u(\cdot)$, temos que existe ϵ_{δ_x} satisfazendo

$$|y - x| < \epsilon_{\delta_x} \Longrightarrow D_\nu u(y) \geq k.$$

Sendo,

$$B_2 \cap \left\{ u \geq \frac{1}{2^{\beta+1}a_0} \right\} \subset \bigcup_{x\in B} B_{\epsilon_{\delta_x}}(x),$$

com $B = B_2 \cap \left\{ u \geq \frac{1}{2^{\beta+1}a_0} \right\}$ compacto, segue que existem $x_1, x_2, \cdots, x_n \in B_2 \cap \left\{ u \geq \frac{1}{2^{\beta+1}a_0} \right\}$ tais que,

$$B_2 \cap \left\{ u \geq \frac{1}{2^{\beta+1}a_0} \right\} \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_{\epsilon_{\delta_{x_i}}}(x_i).$$

Portanto, tomando $\delta = \min\left\{\bar{\delta}, \delta_{x_1}, \delta_{x_2}, \cdots, \delta_{x_n}\right\} > 0$, tem-se que,

$$|\nu - e| < \delta \Longrightarrow D_\nu u \geq k \text{ em } B_2 \cap \left\{u \geq \frac{1}{2^{\beta+1}a_0}\right\}. \tag{4.13}$$

Note que, (4.12) e (4.13) colocam $D_\nu u$ com $|\nu - e| < \delta$ nas condições do **Lema 2.2**, segue daí, que

$$D_\nu u \geq 0 \text{ em } B_1$$

ou seja, u não decresce na direção ν em B_1, isto é, sendo $0 \leq t \leq 1$, então

$$u(0 - t\nu) \leq u(0) \leq u(0 + t\nu).$$

Com $0 \in \{u = 0\}$ e $u \geq 0$, isto implica

$$-\nu \in \{u = 0\} \text{ para todo } \nu \in B_\delta(e) \Longrightarrow B_\delta(-e) \subset \{u = 0\}$$

contrariando a hipótese de $-e \in \partial\{u = 0\}$.

Portanto, $D_e u \equiv 0$ em $\mathbb{R}^d$. Segue daí, que $\{u = 0\}$ é um cone convexo que corta do espaço $\mathbb{R}^d$ ao "meio", conjuntos com tal propriedade são comumente chamados de *half-space*.

Sendo $\{u = 0\}$ um cone não tivial e um half-space, então existe $\vec{e} \in S^{d-1}$ tal que

$$\{(x \cdot \vec{e}) \leq 0\} = \{u = 0\} \tag{4.14}$$

em que $\{(x \cdot \vec{e}) \leq 0\}$ exprime os pontos do cone.

Daí, segue que u depende diretamente da direção $\vec{e} \in S^{d-1}$, pois dado $x \in \mathbb{R}^d$ e uma direção $e_i \in \mathbb{R}^d$ ortogonal a $\vec{e}$, então um dos itens abaixo ocorre

i) $(x \cdot \vec{e}) \leq 0 \Longrightarrow ((x + te_j) \cdot \vec{e}) = (x \cdot \vec{e}) \leq 0 \Longrightarrow u(x + te_j) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$;

ii) $(x \cdot \vec{e}) > 0 \Longrightarrow (-x \cdot \vec{e}) < 0 \Longrightarrow u(-x + te_j) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$;

em que, em ambos os casos

$$D_j u(x) = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{u(x + te_j) - u(x)}{t} = 0$$

pois ou $u(x) = 0$ (caso i) ou $u(-x) = 0$ (caso ii) e sendo $u \in C^2$, temos

$$D_j u(x) = -D_j u(-x) = 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^d.$$

Sendo e_j uma direção arbitrária ortogonal a $\vec{e}$, temos que, dada uma base ortonormal $\{e_i\}_{i=1}^{d}$ contendo $\vec{e}$, considere $\vec{e} = e_1$ para facilitar a notação, temos que $D_j u \equiv 0$ em $\mathbb{R}^d$, com $j \neq 1$, o que implica

$$D_{ij} u \equiv 0 \text{ em } \mathbb{R}^d,$$

desde que i e j não sejam simultaneamente iguais a 1.

Portanto, para todo $x \in \mathbb{R}^d$, tem-se $D^2 u(x) = D_{11} u(x) e_1 \otimes e_1$ o que implica pela homogeneidade da F

$$F\left(D^2 u(x)\right) = D_{11} u(x) F(e_1 \otimes e_1).$$

Por $u \in P_\infty^F(0)$ tem-se $F(D^2 u(x)) = u^{\gamma-1}$, logo

$$u(x)^{\gamma-1} = D_{11} u(x) F(e_1 \otimes e_1)$$

o que reduz o nosso problema a uma equação diferencial ordinária do tipo

$$y^{\gamma-1} = c y'' \text{ em que } c = F(e_1 \otimes e_1), \tag{4.15}$$

cuja solução geral é dada por $y = A x^\sigma$ com A e σ a serem determinados, note que

$$y' = A\sigma x^{\sigma-1} \Longrightarrow y\text{''} = A\sigma(\sigma-1)x^{\sigma-2} \Longrightarrow (x^\sigma)^{\gamma-1}\frac{1}{c} = A\sigma(\sigma-1)x^{\sigma-2}.$$

Daí, segue que

$$\sigma - 2 = \sigma(\gamma-1) \Longrightarrow \sigma = \frac{2}{2-\gamma} = \beta \text{ e } A = \frac{1}{c\sigma(\sigma-1)} = \frac{1}{c\beta(\beta-1)} = c_{\gamma,e_1}.$$

Portanto, $y = c_{\gamma,e_1} x^\beta$ é solução da equação diferencial ordinária (4.15) com

$$c_{\gamma,e_1}\beta(\beta-1)F(e_1 \otimes e_1) = 1.$$

A partir de (4.14) tem-se

$$u(x) = c_{\gamma,\vec{e}}[(x \cdot \vec{e})_+]^\beta.$$

■

Proposição 4.2 *Suponha que $u \in P_\infty^F(0)$ com $|\{u = 0\}| > 0$ para alguma F satisfazendo (1.1), (1.8) e (1.10).*

Então, a menos de uma rotação, tem-se:

Para todo $\delta > 0$, existe $r = r_\delta > 0$ tal que

$$\begin{cases} D_e u \geq 0 & \text{em } B_r, \\ D_e u \geq c_0 \delta r^{\beta-1} & \text{em } B_r \cap \left\{u \geq \frac{1}{2^{\beta+1} a_0} r^\beta\right\} \end{cases} \tag{4.16}$$

para todo $e \in \mathbb{S}^{d-1}$ com $(e \cdot e_1) \geq \delta$.

*Em que c_0 é uma constante universal, a_0 é a constante do **lema** 2.1 e β como definido em (1.17).*

Demonstração: Tome uma sequencia de valores reais $r_h \longrightarrow 0$ e defina para cada $h \in \mathbb{N}$ o reescalonamento

$$u_h(x) = \frac{1}{r_h^\beta} u(r_h x).$$

Então, a menos de uma subsequência,

$$u_h \longrightarrow v \text{ localmente uniforme em } C^2(\mathbb{R}^d)$$

para alguma $v \in P_\infty^F(\mathbb{R}^d)$.

Pela **Proposição 4.1** o conjunto de contato $\{v = 0\}$ é um cone. Aplicando o **Lema 4.2**, a menos de uma rotação, tem-se

$$v = c_\gamma (x_1)_+^\beta.$$

Em que,

- $x_1 > 0$

$$D_e v = D_e c_\gamma [(x \cdot e_1)]^\beta = c_\gamma \beta [(x \cdot e_1)]^{\beta - 1} [(e \cdot e_1)] \geq 0 \Longleftrightarrow (e \cdot e_1) \geq 0$$

- $x_1 < 0$

$$D_e v \equiv 0$$

- $x_1 = 0$ como $v \in C^2_{loc}(\mathbb{R}^d)$, então pela continuidade da derivada, segue que,

$$D_e v \equiv 0.$$

Assim, temos que v satisfaz

$$D_e v \geq 0 \text{ para todo } e \in \mathbb{S}^{d-1} \text{ desde que } (e \cdot e_1) \geq 0.$$

Além disso, existe uma constante universal, $c > 0$, tal que

$$D_e v \geq 2c\delta \text{ em } \left\{ v \geq \frac{1}{2^\beta a_0} \right\} \cap B_2 \text{ desde que } (e \cdot e_1) \geq \delta$$

basta observar que para $x \in \left\{v \geq \frac{1}{2^\beta a_0}\right\} \cap B_2$, tem-se

$$\begin{aligned} D_e v &= c_\gamma \beta[(x \cdot e_1)]^{\beta-1}[(e \cdot e_1)] \\ &= \beta v x_1^{-1}(e \cdot e_1) \\ &\geq \beta \frac{1}{2^\beta a_0}\frac{1}{2}\delta \\ &= 2\frac{1}{2^{\beta+2}a_0}\delta. \end{aligned}$$

Pela convergência $u_h \to v$, tem-se que, para h suficientemente grande,

$$\left\{u_h \geq \frac{1}{2^{\beta+1}a_0}\right\} \cap B_2 \subset \left\{v \geq \frac{1}{2^\beta a_0} > \frac{1}{2^{\beta+1}a_0}\right\} \cap B_2.$$

Juntamente com a convergência das derivadas, temos, para h suficientemente grande

$$D_e u_h \geq c\delta \text{ em } \left\{u_h \geq \frac{1}{2^{\beta+1}a_0}\right\} \cap B_2 \tag{4.17}$$

em que $(e \cdot e_1) \geq \delta$.

Desde que $D_e u_h \longrightarrow D_e v$ uniformemente em B_2 e $D_e v \geq 0 > -\epsilon$ para todo $e \in \mathbb{S}^{d-1}$ satisfazendo $(e \cdot e_1) \geq 0$, tem-se, para h suficientemente grande

$$D_e u_h \geq -\epsilon \text{ em } B_2. \tag{4.18}$$

Note que, (4.18) e (4.17) implicam que $u_h \in P_\infty^F(\mathbb{R}^d)$, satisfaz as condições do **Lema 2.2**, portanto,

$$D_e u_h \geq 0 \text{ em } B_1$$

para h suficientemente grande e $(e \cdot e_1) \geq \delta$.

■

Observação 4.0.3 *Em suma, acabamos de mostrar que, para h_0 fixo e suficientemente grande, temos:*

$$\begin{cases} D_e u_{h_0} \geq 0 & \text{em } B_1 \\ D_e u_{h_0} \geq c\delta & \text{em } \left\{u_{h_0} \geq \frac{1}{2^{\beta+1}a_0}\right\} \cap B_1 \end{cases}$$

em que,

$$D_e u_{h_0} = \frac{1}{(r_{h_0})^{\beta-1}} D_e u(r_{h_0}x) \Longrightarrow r_{h_0}x \in B_{r_{h_0}}$$

e portanto,

$$\begin{cases} D_e u \geq 0 & \text{em } B_{r_{h_0}} \\ D_e u \geq c\delta(r_{h_0})^\beta & \text{em } \left\{u \geq \frac{1}{2^{\beta+1}a_0}(r_{h_0})^{\beta-1}\right\} \cap B_{r_{h_0}} \end{cases}$$

o que, tomando $r_\delta = r_{h_0}$ tem-se (4.16).

Capítulo 5

Regularidade da Fronteira Livre

Neste capítulo, demonstra-se a regularidade para a fronteira livre próxima a pontos regulares, ou seja, a suavidade da fronteira em uma região suficientemente restrita. Em essência, verifica-se que, em pontos próximos a um ponto regular, a fronteira livre se comporta como o gráfico de uma função C^1 $(d-1)$-dimensional, comprovando o **Teorema C**.

Proposição 5.1 *Seja F um operador satisfazendo (1.1) e (1.8), juntamente com (1.9) ou (1.10).*

Supondo $u \in P_\infty^F(0)$ com $0 \in Reg(u)$ e $|\{u=0\}| > 0$.

Então, existe $\rho > 0$ tal que $B_\rho \cap \partial\{u > 0\} \subset Reg(u)$.

Demonstração: Pela demonstração da **Proposição 4.16**, podemos encontrar uma sequência $r_h \to 0$, tal que o reescalonamento

$$u_h(x) = \frac{1}{r_h^\beta} u(r_h x) \to v, \text{ localmente uniforme em } C^2(\mathbb{R}^d),$$

para alguma $v \in P_\infty^F(0)$ com $\{u=0\} \subset \{v=0\}$. Então o blow-up v se encontra nas condições exigidas pela **Proposição 4.16**, logo para $\delta = \frac{1}{2}$, existe $r > 0$ tal que

$$\begin{cases} D_e v \geq 0 > -\epsilon & \text{em } B_r, \\ D_e v \geq \frac{1}{2} c_0 r^{\beta-1} > \frac{1}{4} c_0 r^{\beta-1} & \text{em } B_r \cap \left\{ v \geq \frac{1}{2^{\beta+1} a_0} r^\beta > \frac{1}{2^{\beta+2} a_0} r^\beta \right\} \end{cases}$$

desde que, $\epsilon > 0$, $e \in \mathbb{S}^{d-1}$ e $(e \cdot e_1) \geq \frac{1}{2}$.

Pela convergência $u_h \to v$, temos que para h suficientemente grande

$$\left\{ u_h \geq \frac{1}{2^{\beta+2} a_0} r^\beta \right\} \subset \left\{ v \geq \frac{1}{2^{\beta+1} a_0} r^\beta \right\}$$

e consequentemente aumentando h se necessário teremos

$$\begin{cases} D_e u_h \geq -\epsilon & \text{em } B_r, \\ D_e u_h \geq \frac{1}{4} c_0 r^{\beta-1} \geq 0 & \text{em } B_r \cap \left\{ u_h \geq \dfrac{1}{2^{\beta+2} a_0} r^\beta \right\}. \end{cases}$$

Escolhendo ϵ, dependendo de c_0, pelo **Lema 2.2**, tem-se

$$D_e u_h \geq 0 \text{ em } B_{\frac{1}{2}r}$$

para todo $e \in \mathbb{S}^{d-1}$ satisfazendo $(e \cdot e_1) \geq \frac{1}{2}$.

Fixado h_0 suficientemente grande

$$D_e u_{h_0} \geq 0 \Longrightarrow D_e \left(\frac{1}{r_{h_0}^\beta} u(r_{h_0} x) \right) = \frac{1}{r_{h_0}^{\beta-1}} D_e u(r_{h_0} x) \geq 0 \Longrightarrow D_e u(r_{h_0} x) \geq 0$$

sendo $x \in B_{\frac{1}{2}r}$, então $r_{h_0} x \in B_{\frac{1}{2} r_{h_0} r}$, isto é,

$$D_e u \geq 0 \text{ em } B_\rho \quad \text{para todo } e \in S^{d-1} \text{ satisfazendo } \quad (e \cdot e_1) \geq \frac{1}{2}$$

com $\rho = \frac{1}{2} r_{h_0} r$.

Isto juntamente com o fato de $0 \in \partial \{u > 0\}$ garante que, para qualquer direção e que não seja ortogonal a $(1/2, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^d$ tenha-se

$$0 = u(0) < u(te) \text{ desde que } te \in B_\rho \text{ e } t > 0.$$

Garantindo, assim, a existência de um cone C_1 com vértice na origem, tal que $C_1 \cap B_\rho \subset \{u > 0\} \cap B_\rho$, e com ângulo $\alpha > 0$ entre a sua reta geratriz e o eixo x_1.

Por outro lado, devido ao **Lema 4.1** tem-se que $\{u = 0\}$ é convexo, conclui-se que, existe um cone C_2, também com vértice na origem (pois $0 \in \{u = 0\}$), com ângulo $\theta > 0$ entre a sua reta geratriz e o eixo x_1, tal que $C_2 \cap B_\rho \subset \{u = 0\} \cap B_\rho$.

Dessa forma, a fronteira livre em B_ρ está situada entre os dois cones C_1 e C_2, permitindo, assim, que a fronteira livre seja interpretada como o gráfico de uma função

$$f : B_\rho \cap \{x_1 = 0\} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

A qual satisfaz,

$$\{u = 0\} \cap B_\rho = \{x_1 \leq f(x')\} \text{ e } \{u > 0\} \cap B_\rho = \{x_1 < f(x')\}$$

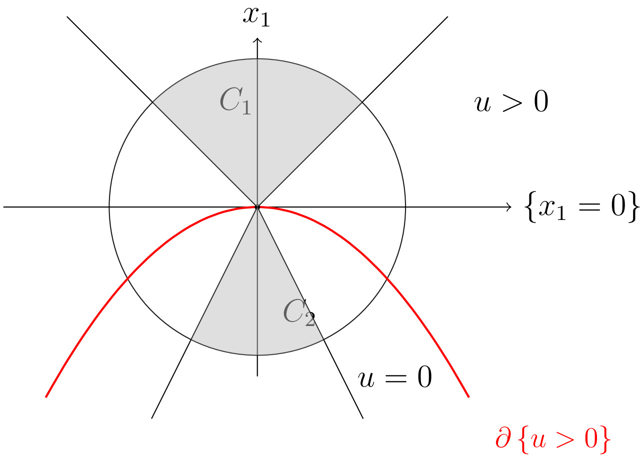

Figura 5.1: A função f entre dois cones.

Além disso, note que f é Lipschitz em $0 \in B_\rho \cap \{x_1 = 0\}$, pois dado $y' \in B_\rho \cap \{x_1 = 0\}$, tem-se

$$\begin{cases} f(y') - f(0) = f(y') - C_1(0) \leq C_1(y') - C_1(0) \leq L_{C_1}|y - 0| \\ f(0) - f(y') = C_2(0) - f(y') \leq C_2(0) - C_2(y') \leq L_{C_2}|y' - 0|. \end{cases}$$

Portanto,

$$|f(y') - f(0)| \leq \max\{L_{C_1}, L_{C_2}\}|y' - 0| \tag{5.1}$$

em que L_{C_1} e L_{C_2} representam as constantes de Lipschitz associadas as equações das cascas dos cones C_1 e C_2, respectivamente.

Por fim, com f contínua em B_ρ, garantimos que a fronteira livre em B_ρ não admite pontos não regulares, concluindo assim, a demonstração da proposição.

■

Observação 5.0.1 *Vale ressaltar mais algumas informações sobre as constantes L_{C_1} e L_{C_2}, sendo C_1 e C_2 cones com vértices na origem e volumes não nulos, temos que,*

$$L_{C_1} = \frac{1}{tg(\alpha)} \text{ e } L_{C_2} = \frac{1}{tg(\phi)}$$

em que α (respectivamente ϕ) representa o ângulo entre a reta geratriz do cone C_1 (resp. C_2) com o eixo $\{x_1 = 0\}$.

Geometricamente, podemos tomar $\theta = \min\{\alpha, \phi\} > 0$ e novos cones com vértices na origem e ângulo θ entre a reta geratriz e x_1, denominados C_1' e C_2', que estão contidos, respectivamente, em C_1 e C_2. Assim, C_1' e C_2', possuem a mesma constante de Lipschitz.

$$L = \frac{1}{tg(\theta)} = \frac{C_1'(x_0')}{|x_0'|} \leq \frac{\delta}{|x_0'|}$$

desde que, se tome $x'_0 \in \{x_1 = 0\}$ satisfazendo $C'_1(x'_0) \leq \delta$. E, conforme (5.1), tem-se

$$|f(y') - f(0)| \leq \frac{\delta}{|x'_0|}|y' - 0| = \delta k|y'| \text{ para todo } y' \in B_\rho \cap \{x_1 = 0\}$$

com $k^{-1} = |x'_0|$ constante.

Definição 5.1 *Denotamos $\mathcal{C}_\delta$ o cone com direção $e_1 = (1, 0, \cdots, 0)$ e altura $\delta > 0$, ou seja*

$$\mathcal{C}_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \cdot e_1 > \delta|x'|\},$$

onde $x' := (x_2, \cdots, x_n)$.

Definição 5.2 *Dado um cone $\mathcal{C}$, definimos o seu cone dual por*

$$\mathcal{C}^\star := \{y \in \mathbb{R}^n \mid x \cdot y \geq 0, \forall\, x \in \mathcal{C}\}.$$

Proposição A *Para cada $\delta > 0$, tem-se*

$$\mathcal{C}^\star_\delta = \mathcal{C}_{1/\delta}.$$

Além disso, existe uma função universal não decrescente $\omega : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, com $\omega(0) = 0$, tal que

$$|y - e_1| \leq \omega(\delta),$$

para cada $y \in \mathcal{C}_{1/\delta}$, with $|y| = 1$.

Demonstração: Seja θ o ângulo entre a reta geratriz de $\mathcal{C}_\delta$ $r(y_1) = (y_1, \delta y_1)$ e o vetor e_1, então

$$\sin\theta = \delta\frac{|y'|}{|y|},$$

garantido assim que, $\theta = \theta(\delta)$ é não-crescente. É fácil ver que para o caso $\delta = 1$ tem-se $\theta = \pi/4$, pois a reta geratriz será $r(y_1) = y_1(1, 1)$. Portanto, se $\delta \in (0, 1)$, então $\theta(\delta) \leq \pi/4$. Além disso, $1/\delta > 1$, logo $\theta(1/\delta) \geq \pi/4$.

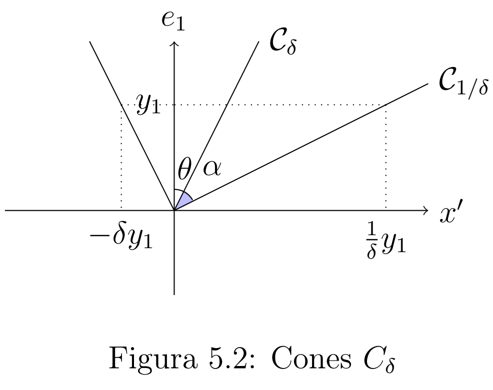

Figura 5.2: Cones C_δ

Para o caso $\delta \in (0,1)$ considere a figura 5.2 e note que,

$$\cos(\alpha + 2\theta) = \frac{\left((y_1, \frac{1}{\delta}y_1)\cdot(y_1, -\delta y_1)\right)}{|(y_1, \frac{1}{\delta}y_1)|\cdot|(y_1, -\delta y_1)|} = \frac{y_1^2 - y_1^2}{|(y_1, \frac{1}{\delta}y_1)|\cdot|(y_1, -\delta y_1)|} = 0.$$

Portanto $\alpha + 2\theta = \pi/2$ o que garante $\mathcal{C}_\delta^\star = \mathcal{C}_{1/\delta}$. Para $\delta \in [1, \infty)$ inverta os papéis de $\mathcal{C}_\delta$ e $\mathcal{C}_{1/\delta}$ na figura 5.2 e obtém-se o mesmo resultado.

Na sequência, iremos mostrar a desigualdade da Proposição em questão. De fato, sendo $\theta > 0$ o ângulo de abertura entre os vetores unitários $y \in C_{1/\delta}$ e e_1, observamos que

$$|y - e_1|^2 = (1 - y_1)^2 + |y'|^2 < (1 - \cos\theta)^2 + \delta^2$$

veja a figura 5.3. Daí,

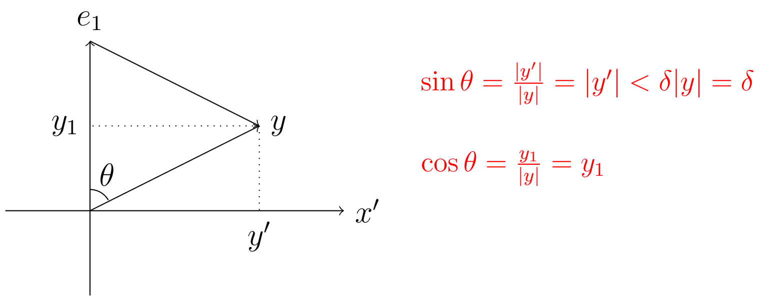

Figura 5.3:

$$\begin{aligned} |y - e_1| &< \sqrt{(1 - \sqrt{1 - (\sin\theta)^2})^2 + \delta^2} \\ &< \sqrt{(1 - \sqrt{1 - \delta^2})^2 + \delta^2} \\ &= \sqrt{(1 - 2\sqrt{1 - \delta^2} + 1 - \delta^2) + \delta^2} \\ &= \sqrt{2}\,\sqrt{1 - \sqrt{1 - \delta^2}}. \end{aligned}$$

Concluímos a prova denotando $\omega(\delta) := \sqrt{2}\,\sqrt{1 - \sqrt{1 - \delta^2}}$. ■

Proposição 5.2 *Assumindo as mesmas hipóteses da proposição anterior, é possível encontrar um* $\rho > 0$ *tal que* $B_\rho \cap \partial\{u > 0\}$ *é uma hiperfície de classe* C^1.

Demonstração: Do mesmo argumento da demonstração anterior, agora utilizando $\delta > 0$ qualquer (ao invés de $\delta = 1/2$), podemos mostrar a seguinte afirmação: Dado $\delta > 0$, existe $\rho_\delta > 0$ tal que

$$D_e u > 0 \text{ em } B_{\rho_\delta}, \text{ para cada } e \in \mathbb{S}^{n-1} \text{ satisfazendo } e_1 \cdot e \geq \delta. \tag{5.2}$$

Ainda com base na demonstração da proposição anterior, nota-se que a equação (5.2) junto com a Observação (5.0.1) implicam que $\partial\{u > 0\}$ é gráfico de uma função f Lipschitz em $0 \in B_{\rho_\delta}$. Além disso, existe constante universal $C > 0$, tal que

$$|f(x') - f(0)| \leq C\delta|x'| \quad \text{para cada } x' \in B_{\rho_\delta} \cap \{x_1 = 0\}\,.$$

Uma vez que δ acima é arbitrário, concluimos que, ao tomarmos $\delta \to 0$, a função f é diferenciável no ponto 0 com derivada nula, isto é,

$$Df(0) \cdot x' = 0 \text{ para todo } x' \in \{x_1 = 0\}\,.$$

Desta forma, temos a existência de um plano tangente ao gráfico da f (ou seja, um plano tangente a fronteira $\partial\{u > 0\}$), na origem, com vetor normal

$$\nu_0 := \frac{(1, -Df(0))}{\sqrt{1 + |Df(0)|^2}} = e_1.$$

Até este ponto, é mostrado que a fronteira livre $\partial\{u > 0\}$ é diferenciável na origem.

Pela **Proposição 5.1**, para cada ponto $z \in \partial\{u > 0\} \cap B_\mu$, com μ suficientemente pequeno, é possível construir um plano tangente, de onde denotamos o seu vetor normal por ν_z. Assim, como $\partial\{u > 0\} \cap B_\mu$ é uma superfície de nível diferenciável, temos que $\nu_z = \nabla u(z)$, para cada $z \in \partial\{u > 0\} \cap B_\mu$. Desta forma, aplicando (5.2), temos

$$\nu_z \cdot e \geq 0 \text{ para cada } e \in \mathbb{S}^{n-1} \text{ satisfazendo } e_1 \cdot e \geq \delta. \tag{5.3}$$

Usando a Definição 5.2, temos que ν_z pertence ao cone dual $\mathcal{C}_\delta^\star$. Pela **Proposição A**, temos que $\nu_z \in \mathcal{C}_{1/\delta}$. Portanto, pela **Proposição A**, temos que

$$|\nu_z - e_1| \leq C\delta$$

Como δ é arbitrário, podemos considerar $\delta \leq \mu$. Assim, a desigualdade acima vale para cada $z \in \partial\{u > 0\} \cap B_\delta$. Isto nos mostra que a variação do vetor normal é universalmente contínua em relação proximidade da origem. ■

Referências Bibliográficas

[1] Alt, H. W. and Caffarelli, L., *Existence and regularity for a minimum problem with free boundary*, J. Reine Angew. Math. **368** (1981), 105–144. 4

[2] Alt, H. W. and Phillips, D., *A free boundary problem for semilinear elliptic equations*, J. Reine Angew. Math. **368** (1986), 63–107. 5

[3] Araújo, D. and Teixeira, E., *Geometric approach to nonvariational singular elliptic equations*, Arch. Ration. Mech. Anal. **209** (2013), no. 3, 1019–1054. 5

[4] Aris, R., *The Mathematical Theory of Diffusion and Reaction in Permeable Catalysts*, Oxford University Press, 1975. 3

[5] Bandle, C. and Stakgold, I., *The formation of the dead core in parabolic reaction-diffusion problems*, Trans. Amer. Math. Soc. **286** (1984), no. 1, 275–293. 4

[6] Caffarelli, L., *Interior a priori estimates for solutions of fully nonlinear equations*, Ann. Math. **130** (1989), 189–213. 18

[7] Caffarelli, L. and Salsa, S., *A Geometric Approach to Free Boundary Problems*, Vol. 68, American Mathematical Society, Providence, RI, 2005. 4

[8] Caffarelli, L. and Cabré, X., *Fully Nonlinear Elliptic Equations*, Vol. 43, AMS Colloquium Publications, Providence, RI, 1995. 6, 7, 9, 10, 18, 19

[9] Evans, L. C., *Classical solutions of fully nonlinear convex second order elliptic equations*, Comm. Pure Appl. Math. **25** (1982), 333–363. 18

[10] Evans, L. C., *Partial Differential Equations*, 2nd ed., Graduate Studies in Mathematics, Vol. 19, American Mathematical Society, Providence, RI, 2010. 20

[11] Han, Q. and Lin, F., *Elliptic Partial Differential Equations*, 1st ed., American Mathematical Society, Providence, 2011. 17, 33

[12] Krylov, N. V., *Boundedly nonhomogeneous elliptic and parabolic equations in a domain*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **47** (1983), 75–108; English transl. in Math. USSR Izv. **22** (1984), 67–97. 18

[13] Lee, K., *Obstacle problems for the fully nonlinear elliptic operators*, Ph.D. thesis, New York University, 1998. 5

[14] Petrosyan, A., Shahgholian, H., and Uraltseva, N., *Regularity of Free Boundaries in Obstacle-Type Problems*, American Mathematical Society, 2012. 4

[15] Ricarte, G. and Teixeira, E., *Fully nonlinear singularly perturbed equations and asymptotic free boundaries*, J. Funct. Anal. **261** (2011), 1624–1673. 5

[16] Silva, J., *Equicontinuidade e o teorema de Arzelá–Ascoli*, Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática), Universidade Federal de Alagoas, 2016. 17

[17] Wu, Y. and Yu, H., *On the fully nonlinear Alt–Phillips equation*, Int. Math. Res. Not. **2022**, no. 11 (2022), 8540–8570. Advance publication: February 2, 2021. vi, vii, 3, 7