

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Classificação de retas e planos no espaço projetivo das cônicas e algumas aplicações

Elias da Silva Lima

João Pessoa – PB
Julho de 2025

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Classificação de retas e planos no espaço projetivo das cônicas e algumas aplicações

por

Elias da Silva Lima

sob a orientação de

Prof^a. Dra. Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia

João Pessoa – PB
Julho de 2025

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

L732c Lima, Elias da Silva.

Classificação de retas e planos no espaço projetivo
das cônicas e algumas aplicações / Elias da Silva Lima.
- João Pessoa, 2025.
137 f. : il.

Orientação: Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Álgebras artiniananas. 2. Grassmanniana. 3. Grupo
de automorfismos. 4. Cônicas e cúbicas projetivas. I.
Arancibia, Jacqueline Fabiola Rojas. II. Título.

UFPB/BC

CDU 512(043)

Elaborado por ANNA REGINA DA SILVA RIBEIRO - CRB-15/24



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
CAMPUS I – DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ATA DE DEFESA DE MESTRADO JUNTO AO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA, REALIZADA NO DIA 18 DE JULHO DE 2025.

Ao décimo oitavo dia de julho de dois mil e vinte e cinco, às 14:00 horas, na Sala de Reuniões do Departamento de Matemática da Universidade Federal da Paraíba, foi aberta a sessão pública de Defesa de Dissertação intitulada “**Classificação de retas e planos no espaço projetivo das cônicas e algumas aplicações**”, do aluno **Elias da Silva Lima**, que havia cumprido, anteriormente, todos os requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, na área de **Álgebra**, sob a orientação da Prof.^a Dr.^a Jacqueline Fabíola Rojas Arancibia. A Banca Examinadora, indicada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática, foi composta pelos professores: Dr. Jacqueline Fabíola Rojas Arancibia (Orientadora), Dr. Otoniel Nogueira da Silva (membro interno) e Dr. Rodrigo José Gondim Neves (membro externo/UFRPE). A professora Jacqueline Fabíola Rojas Arancibia, em virtude da sua condição de orientadora, presidiu os trabalhos e, depois das formalidades de apresentação, convidou o aluno a discorrer sobre o conteúdo da dissertação. Concluída a explanação, o candidato foi arguido pela banca examinadora que, em seguida, sem a presença do aluno, finalizando os trabalhos, reuniu-se para deliberar tendo concedido ao candidato a menção: **APROVADO**. E, para constar, foi lavrada a presente ata que será assinada pelos membros da Banca Examinadora.

João Pessoa, 18 de julho de 2025.

Jacqueline Fabíola Rojas Arancibia

Otoniel Nogueira da Silva

Rodrigo José Gondim Neves

Classificação de retas e planos no espaço projetivo das cônicas e algumas aplicações

por


Elias da Silva Lima¹

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.


Área de Concentração: Álgebra

Aprovada em: 18 de julho de 2025


Banca Examinadora:

Documento assinado digitalmente
 JACQUELINE FABIOLA ROJAS ARANCIBIA
Data: 15/10/2025 09:26:44-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof^a. Dra. Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia – UFPB
(Orientadora)

Documento assinado digitalmente
 OTONIEL NOGUEIRA DA SILVA
Data: 15/10/2025 17:28:02-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Otoniel Nogueira da Silva – UFPB
(Examinador Interno)

Documento assinado digitalmente
 RODRIGO JOSE GONDIM NEVES
Data: 15/10/2025 10:12:53-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. José Gondim Neves – UFRPE
(Examinador Externo)

¹Este trabalho contou com apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq

Agradecimentos

Antes de tudo, agradeço a Deus, por ter me sustentado e guiado durante toda esta jornada. Sem sua graça, força e misericórdia, não teria chegado até aqui.

A realização deste trabalho só foi possível graças ao apoio, incentivo e colaboração de muitas pessoas, às quais sou profundamente grato.

A minha orientadora, Prof^a. Dra. Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia, por sua orientação precisa, dedicação constante, muita paciência e incentivo durante todas as etapas deste trabalho. Todas suas orientações de escrita, didática e pontualidade são coisas que levarei comigo para toda vida. Um exemplo de profissional a se seguir. Também aos professores Rodrigo e Otoniel por terem aceitado participar da banca.

À Universidade Federal da Paraíba (UFPB) e ao Programa de Pós-Graduação em Matemática (PPGMAT), pelo ambiente acadêmico enriquecedor e pela formação sólida que me proporcionaram.

À CAPES, pelo apoio financeiro que tornou possível a dedicação exclusiva aos estudos e à pesquisa.

Aos professores e colegas do mestrado, pelas discussões produtivas, companheirismo e por contribuírem diretamente na minha formação.

A minha família, especialmente minha mãe Elvina, meus irmãos Daniel e Joel, minha companheira Ana Caroline e aos demais parentes, por todo amor, apoio emocional e incentivo ao longo desse período. Vocês foram meu alicerce nos momentos difíceis.

Aos meus amigos, em especial Erineu que me ajudou na inscrição da prova de seleção bem como incentivou a fazer lá, Álvaro, Jean e Mateus dos quais me ajudaram bastante no início da adaptação desse então novo ambiente e nas disciplinas iniciais do curso, João Pedro ("JP") que me apresentou à minha até então orientadora. Também aos demais, Anderson, Fábio, Diego, Gustavo, Edson, Fernanda, Jaqueline, Manoel e muitos outros, por estarem ao meu lado, mesmo nos momentos mais desafiadores. A presença e amizade de vocês foram muito importantes.

Enfim, a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho, deixo aqui minha sincera gratidão.

Lista de Tabelas

2.1	Possibilidades para interseções de cônicas em \mathbb{P}^2	15
2.2	Interseção das retas com \mathcal{H}	29
2.3	Interseção das retas com Δ	29
3.1	Classificação das órbitas em $G_3(S_2)$ sob a ação de $\text{Aut}(\mathbb{P}^2)$	84
4.1	Zeros em comum dos representantes das órbitas	90
A.1	Classificação das cúbicas em \mathbb{P}^2	114
B.1	Classificação das cônicas em \mathbb{P}^2	119

Resumo

Fundamentando-se no artigo **Nets of conics and associated Artinian algebras of length 7** ([1]), de Abdallah, Emsalem e Iarrobino, este trabalho classifica as órbitas sob a ação do grupo de automorfismos do plano projetivo complexo, $\text{Aut}(\mathbb{P}^2)$, sobre as Grassmannianas $G_2(S_2)$ e $G_3(S_2)$, onde S_2 denota o espaço dos polinômios homogêneos de grau 2 em três variáveis com coeficientes complexos. Inicialmente, apresentam-se noções preliminares sobre ações de grupos em espaços projetivos e Grassmannianas. Em seguida, desenvolve-se a classificação completa das órbitas em $G_2(S_2)$, determinando suas dimensões e relações de especialização. A análise estende-se para $G_3(S_2)$ (cujos elementos são denominados de redes de cônicas), com destaque para a identificação geométrica de planos associados às redes de cônicas e suas interseções com a hipersuperfície \mathcal{H} das cônicas singulares. Finalmente, discutem-se aplicações (da classificação obtida em $G_3(S_2)$) na classificação dos morfismos no plano projetivo de grau 4 e na classificação de álgebras artinianas graduadas locais com função de Hilbert $(1, 3, 3, \bar{0})$.

Palavras-chave: Grassmanniana, cônicas e cúbicas projetivas, grupo de automorfismos, ação de grupo, álgebras artinianas.

Abstract

According to the article Nets of conics and associated Artinian algebras of length 7 ([1]) by Abdallah, Emsalem, and Iarrobino, this work classifies the orbits under the action of the automorphism group of the complex projective plane, $\text{Aut}(\mathbb{P}^2)$, on the Grassmannians $G_2(S_2)$ and $G_3(S_2)$, where S_2 denotes the space of homogeneous polynomials of degree 2 in three variables with complex coefficients. First, we present preliminary notions on group actions in projective spaces and Grassmannians. Next, we develop the complete classification of orbits in $G_2(S_2)$, determining their dimensions and specialization relations. The analysis extends to $G_3(S_2)$ (whose elements are called nets of conics), highlighting the geometric identification of planes associated with conic nets and their intersections with the hypersurface \mathcal{H} of singular conics. Finally, we discuss applications (of the classification obtained for $G_3(S_2)$) to classifying degree-4 morphisms in the projective plane and classifying local graded Artinian algebras with Hilbert function $(1, 3, 3, \bar{0})$.

Keywords: Grassmannian, Projective conics and cubics, Automorphism group, Group action, Artinian algebras.

Sumário

Introdução	1
1 Noções Preliminares	3
1.1 Quádricas em \mathbb{P}^n	3
1.2 A superfícies de Veronese	5
1.3 Ação do Grupo $\text{Aut}(\mathbb{P}^n)$	6
1.4 A ação de $\text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ no espaço das cônicas em \mathbb{P}^2	9
1.5 Ação pela esquerda de $\text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ em $G_l(S_d)$	12
2 Órbitas sob a ação de $\text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ em $G_2(S_2)$	14
2.1 Preliminares	14
2.2 Classificação das órbitas de $G_2(S_2)$	20
2.3 Interseção das retas em $\mathbb{P}(S_2)$ com \mathcal{H}	28
2.4 Dimensão das Órbitas	30
2.5 Especialização das órbitas em $G_2(S_2)$ sob a ação de $\text{Aut}(\mathbb{P}^2)$	39
3 Classificação das órbitas em $G_3(S_2)$ sob a ação de $\text{Aut}(\mathbb{P}^2)$	44
3.1 Associação do plano $\pi_W \subseteq \mathbb{P}^5$ a cada $W \in G_3(S_2)$	44
3.2 Γ_W é não singular	47
3.3 Γ_W é singular e irreduzível	56
3.4 Γ_W é uma cúbica redutível	69
3.5 Órbitas dos pontos $W \in G_3(S_2)$ tais que $\pi_W \subset \mathcal{H}_{\mathbb{P}^5}$	82
3.6 Sobre a dimensão das órbitas de $G_3(S_2)$	84
3.7 Sobre a especialização das órbitas em $G_3(S_2)$ sob a ação de $\text{Aut}(\mathbb{P}^2)$	86
4 Aplicações	87
4.1 Morfismo de \mathbb{P}^2 em \mathbb{P}^2 de grau 4	87
4.2 Classificação das \mathbb{K} -álgebras artinianas graduadas locais com função de Hilbert $(1, 3, 3, \bar{0})$	91

4.2.1	Deformação de álgebras com função de Hilbert $(1, 3, 3, \overline{0})$ em uma álgebra suave	93
A	Noções de Geometria Algébrica	96
B	Ação de grupos e resultados de MCP	115
C	Interseções e multiplicidades de curvas planas	121
D	Software MAXIMA	124
	Referências Bibliográficas	126

Notações

A seguir, listamos algumas notações utilizadas neste trabalho.

- \mathbb{P}^n - denota o n -espaço projetivo complexo.
- $\text{Aut}(\mathbb{P}^n) = \{\varphi : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n \mid \varphi \text{ é uma mudança de coordenadas projetivas (MCP)}\}$.
- $G_d(V) = \{W \mid W \text{ é um subespaço de } V \text{ de dimensão } d\}$ - A d -Grassmaniana associada a V .
- $\mathcal{C} := \mathbb{P}(S_2)$ - o espaço das cônicas em \mathbb{P}^2 .

Introdução

A teoria das ações de grupos em variedades algébricas tem desempenhado um papel fundamental no desenvolvimento da geometria algébrica e suas aplicações (cf. [15]). Por exemplo, se $S = \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ e S_d é o subespaço dos polinômios homogêneos de grau d , então o grupo das mudanças de coordenadas projetivas (MCP) em \mathbb{P}^2 , $\text{Aut}(\mathbb{P}^2)$, nos permite classificar as cônicas $\mathcal{C} = \mathbb{P}(S_2)$ (cf. Exemplo A.0.15), cúbicas (cf. [9]) e assim por diante. Esta dissertação, baseada no artigo **Nets of conics and associated Artinian algebras of length 7** de *Nancy Abdallah, Jacques Emsalem e Anthony Iarrobino* ([1]), tem como objetivo investigar a classificação das órbitas sob a ação do grupo $\text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ nas Grassmannianas $G_2(S_2)$ e $G_3(S_2)$, bem como apresentar algumas aplicações associadas no caso de $G_3(S_2)$.

Historicamente a classificação das órbitas em $G_2(R_2)$ sendo $R = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ sob a ação do grupo $\text{Aut}(\mathbb{P}^n)$ é frequentemente atribuída ao matemático italiano *Corrado Segre* (1863-1924). Entretanto, há registros de resultados anteriores dessa classificação, conforme citado por *Igor Dolgachev* [5]; *Karl Weierstrass* fornecera uma classificação em seu artigo de 1868 ([22]).

Sobre a classificação das órbitas em $G_3(S_2)$ (cujos elementos são denominados de redes de cônicas), um dos seus precursores foi o matemático francês *Camille Jordan* (1838-1922). Em 1906 ele apresentou uma tabela com 13 classes de representantes na qual constam omissões (cf. [13]). Trabalhos posteriores, como os de *Albert Wilson* (1914, [23]) e *Alan Campbell* (1928, [4]) exploraram casos modulares e corpos finitos, os quais foram revistos e corrigidos por *Corrado Zanella* (2012, [24]).

A classificação completa de redes de cônicas sobre \mathbb{C} e \mathbb{R} foi estabelecida em 1977 por *Charles Wall* [21], mediante técnicas de germes de aplicações e abordagens algébricas. Posteriormente, *Naoto Onda* (2021, [16]) estendeu essa classificação de redes de cônicas planares para corpos de característica arbitrária (exceto 2 e 3), relacionando-as com álgebras artinianas. No entanto, o trabalho de Onda revela uma equivalência não notada pelo autor entre classificação de redes de cônicas e álgebras artinianas graduadas locais com função de Hilbert $(1, 3, 3, \bar{0})$.

Este trabalho está organizado em quatro capítulos e quatro apêndices.

No *Capítulo 1*, introduzem-se noções preliminares, incluindo: a identificação entre os grupos $\text{Aut}(\mathbb{P}^n)$ e $\text{PGL}_n(\mathbb{C})$, a ação do grupo $\text{Aut}(\mathbb{P}^n)$ sobre espaços de polinômios homogêneos e Grassmannianas associadas ao espaço das cônicas projetivas. Destaca-se também a ação de $\text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ no espaço das cônicas \mathcal{C} , que é identificado com \mathbb{P}^5 , e a caracterização da hipersuperfície \mathcal{H} que parametriza as cônicas singulares, a qual desempenhará um papel fundamental para o desenvolvimento deste trabalho.

No *Capítulo 2*, classificam-se as órbitas em $G_2(S_2)$ sob a ação de $\text{Aut}(\mathbb{P}^2)$. Utilizando ferramentas geométricas e algébricas (incluindo o teorema de Bézout e a análise de interseções entre duas cônicas), determinam-se todas as órbitas, suas dimensões e relações de especialização. Além disso, estudam-se as interseções das retas associadas a essas órbitas com a hipersuperfície \mathcal{H} , obtendo-se informações cruciais para o desenvolvimento do capítulo subsequente.

No *Capítulo 3*, estende-se a classificação às órbitas em $G_3(S_2)$. A cada ponto W em $G_3(S_2)$ associa-se um plano $\pi_W \subset \mathbb{P}^5$, e $\Gamma_W := \pi_W \cap \mathcal{H}_{\mathbb{P}^5}$. Γ_W pode ser uma curva cúbica ou o próprio plano π_W (se contido em $\mathcal{H}_{\mathbb{P}^5}$). Quando Γ_W é uma cúbica, sua geometria (particularmente as singularidades e componentes irredutíveis) permite distinguir órbitas distintas. Vale salientar que o software de computação algébrica MAXIMA [[14]] foi reiteradamente utilizado neste capítulo, principalmente para determinar a equação das cúbicas Γ_W e realizar cálculos complementares à classificação em questão.

Já no *Capítulo 4*, aplica-se a classificação (estabelecida no Capítulo 3) para classificar os morfismos de \mathbb{P}^2 em \mathbb{P}^2 de grau 4. Adicionalmente, discute-se sucintamente sua relação com a classificação de álgebras artinianas graduadas locais com função de Hilbert $(1, 3, 3, \bar{0})$.

Por fim, incluem-se quatro apêndices para tornar o texto autossuficiente facilitando o acesso aos leitores menos familiarizados com os conceitos abordados. No Apêndice A constam noções básicas de Geometria Algébrica, dentre as quais destacam-se a apresentação algébrica e geométrica das cônicas e cúbicas em \mathbb{P}^2 (baseando-se nas referências [17], [8], [11] e [20]). No Apêndice B, apresentam-se resultados sobre ação de grupos e mudança de coordenadas projetivas. No Apêndice C, aborda-se conceitos relacionados à teoria de interseção de curvas em \mathbb{P}^2 , tais como o teorema de Bézout. Por último, no Apêndice D apresentam-se alguns comandos do software MAXIMA que facilitam os cálculos em diversos casos, principalmente no Capítulo 3.

Este trabalho oferece uma abordagem sistemática para o estudo de ações de grupos em Grassmannianas, motivando e abrindo caminho para investigações futuras em contextos mais amplos.

Capítulo 1

Noções Preliminares

Neste trabalho, nosso corpo base é \mathbb{C} , o conjunto dos números complexos. Para este capítulo, introduzimos alguns conceitos e ferramentas matemáticas básicas que serão utilizadas em um desenvolvimento futuro. Começamos com um breve resumo sobre as quádricas em \mathbb{P}^n .

1.1 Quádricas em \mathbb{P}^n

Definição 1.1.1. Uma hipersuperfície quádrica em \mathbb{P}^n é definida por uma forma quádratica não nula, ou seja, um polinômio homogêneo de grau dois,

$$Q = \sum_{i,j=0}^n a_{ij}x_i x_j$$

.

O próximo resultado garante uma classificação para as quádricas em \mathbb{P}^n (sobre certas condições) usando mudanças de coordenadas projetivas (*MCP*).

Teorema (Forma Normal das Quádricas) 1.1.1. *Seja \mathbb{K} um corpo de característica diferente de 2. Se $f = \sum_{i,j=0}^n a_{ij}x_i x_j \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ um polinômio homogêneo não nulo de grau 2 então $\mathcal{Z}(f)$ é projetivamente equivalente a uma quádrica definida por uma equação da seguinte forma*

$$b_0x_0^2 + \dots + b_nx_n^2 = 0;$$

em que $b_0, \dots, b_n \in \mathbb{K}$, não todos nulos.

Demonstração. Confira o Teorema 1.2 (p. 4 em [7])

□

De acordo com a forma normal dada no Teorema acima, alguns dos coeficientes b_i podem ser nulos. Logo, por uma *MCP*, podemos assumir que $b_i \neq 0$ se $0 \leq i \leq m$ e

$b_i = 0$ para $i > m$. Assim, uma quádrlica é projetivamente equivalente a uma quádrlica dada pela equação representada como

$$b_0X_0^2 + \cdots + b_mX_m^2 = 0, \quad b_0, \dots, b_m \neq 0. \quad (1.1)$$

onde $X_i = \sum_{j=0}^n c_{ij}x_j$ para todo i , de forma que f vista nas novas variáveis tenha a forma $b_0X_0^2 + \cdots + b_nX_n^2 = 0$.

Definição 1.1.2. Seja $V \subset \mathbb{P}^n$ uma hipersuperfície quádrlica.

1. Se V é definida por uma equação como em (1.1), diremos que V tem posto $m+1$;
2. De forma geral, se V é uma quádrlica qualquer, diremos que V tem posto $m+1$ se V é projetivamente equivalente a uma quádrlica definida por uma equação com em (1.1).

Observação 1.1.1. Dado $f = \sum_{i,j=0}^n a_{ij}x_ix_j$, podemos sempre supor que $a_{ij} = a_{ji}$.

De fato, basta considerar $d_{ij} = (a_{ij} + a_{ji})/2$, daí reescrevemos $f = \sum_{i,j=0}^n d_{ij}x_ix_j$ com $d_{ij} = d_{ji}$. Além disso, podemos representar f através de multiplicação de matrizes, pois os coeficientes de f formam uma matriz $(n+1) \times (n+1)$, $A = (a_{ij})$, da qual podemos supor que é simétrica. Seja X o vetor coluna com entradas x_0, \dots, x_n . Teremos

$$f(X) = X^tAX,$$

onde X^t é a transposta do vetor X .

Proposição 1.1.1. *Seja $f = X^tAX$, em que A é uma matriz simétrica $(n+1) \times (n+1)$. Então, o posto da superfície quádrlica $\mathcal{Z}(f)$ é igual o posto da matriz A .*

Demonstração. Veja a Proposição 1.2 (p. 6 item (ii) em [7]) □

Dessa forma, quando \mathbb{K} é um corpo algebricamente fechado, o Teorema 1.1.1 e a Proposição 1.1.1 classifica as quádrlicas de acordo co seu posto mediante o seguinte resultado.

Proposição 1.1.2. *Se \mathbb{K} é um corpo algebricamente fechado, então uma hipersuperfície quádrlica de posto $m+1$ é projetivamente equivalente a quádrlica definida pela equação*

$$\sum_{i=0}^m x_i^2.$$

Demonstração. Veja a Proposição 1.4 (p. 7 em [7]) □

1.2 A superfícies de Veronese

Considere $A = \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ um espaço vetorial sobre \mathbb{K} . Para cada $d \geq 0$ inteiro, seja A_d o subespaço vetorial N -dimensional de A gerado por monômio de grau d onde $\dim A_d = \binom{n+d}{d}$. Dessa forma, podemos definir

$$\mathbb{P}^{N-1} = \mathbb{P}(A_d).$$

Considere agora $S = \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$. Com isso, particularmente temos $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(S_1)$ e $\mathbb{P}^5 = \mathbb{P}(S_2)$.

Dessa forma, dado um ponto $[a_0 : a_1 : a_2] \in \mathbb{P}^2$ podemos interpretar tal ponto com uma reta

$$l : a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0,$$

além disso, para um ponto $[a_{00} : a_{01} : a_{02} : a_{11} : a_{12} : a_{22}] \in \mathbb{P}^5$ podemos identifica-lo como uma cônica

$$\sum a_{ii}x_i^2 + \sum_{i<j} 2a_{ij}x_ix_j = 0.$$

Ainda mais, dado $F = \sum a_{ii}x_i^2 + \sum_{i<j} 2a_{ij}x_ix_j = 0 \in \mathbb{P}^5$, podemos representa-lo através de uma matriz simétrica associada a F como

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

a menos de um múltiplo escalar, é claro.

Agora, lembrando que a ação de $\text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ em $\mathbb{P}^5 = \mathbb{P}(S_2)$ determina três órbitas, que se relaciona com o posto da matriz. Dessa forma, essas órbitas podem ser representadas respectivamente pelos conjuntos de pontos em \mathbb{P}^5 :

$$\Delta = \{F \mid F = l^2 \text{ para alguma reta } l\} \quad (1.3)$$

$$\mathcal{H} = \{F \mid F \text{ é singular}\} \quad (1.4)$$

$$\mathbb{P}^5 - \mathcal{H} = \{F \mid F \text{ é não singular}\} \quad (1.5)$$

onde \mathcal{H} é a hipersuperfície cúbica definida pela equação

$$\det M_F = a_{00}a_{11}a_{22} + 2a_{01}a_{02}a_{12} - a_{02}^2a_{11} - a_{00}a_{12}^2 - a_{01}^2a_{22} = 0. \quad (1.6)$$

Ainda mais, $\Delta = \mathcal{Z}(\det(a_{i|j}))$ onde $(a_{i|j})$ são os menores 2×2 da matriz (1.2).

Agora, seja a aplicação

$$\nu : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^5 \quad (1.7)$$

$$l \longmapsto l^2 \quad (1.8)$$

da qual temos em coordenadas $[a_0 : a_1 : a_2] \in \mathbb{P}^2$ a seguinte interpretação

$$[a_0 : a_1 : a_2] \longmapsto [a_0^2 : a_0 a_1 : a_0 a_2 : a_1^2 : a_1 a_2 : a_2^2].$$

Note que, ν está bem definida e é injetiva. Com isso, definimos a **superfície de Veronese** como sendo a imagem da aplicação ν . Dessa forma, por definição obtemos que $\Delta = \nu(\mathbb{P}^2)$. Além disso, podemos obter pela matriz jacobiana de \mathcal{H} que $\Delta = \text{Sing}(\mathcal{H})$.

Agora, apresentamos os seguintes resultados relacionados a ação de grupos, vale ressaltar que em muitos dos artigos que utilizamos para desenvolver este trabalho (principalmente [1]) é utilizado o grupo projetivo geral linear $\text{PGL}_2(\mathbb{C})$ em lugar de $\text{Aut}(\mathbb{P}^2)$, o que nos motiva mostrar em seguida que $\text{PGL}_n(\mathbb{C}) \cong \text{Aut}(\mathbb{P}^n)$.

1.3 Ação do Grupo $\text{Aut}(\mathbb{P}^n)$

Seja $M_{n+1}(\mathbb{C})$ o conjunto das matrizes quadradas de orden $n + 1$ com entradas complexas. Considere o grupo $\text{GL}_{n+1}(\mathbb{C}) = \{A \in M_{n+1}(\mathbb{C}) \mid A \text{ é invertível}\}$ com o produto usual de matrizes. Seja $\mathcal{D} = \{\lambda I \in \text{GL}_{n+1}(\mathbb{C}) \mid \lambda \neq 0, \lambda \in \mathbb{C}\}$ sendo I a matriz identidade de ordem $n + 1$. Sendo \mathcal{D} um subgrupo normal de $\text{GL}_{n+1}(\mathbb{C})$, vamos considerar o grupo quociente:

$$\text{PGL}_n(\mathbb{C}) := \frac{\text{GL}_{n+1}(\mathbb{C})}{\mathcal{D}}.$$

Observe que, se $\overline{A}, \overline{B} \in \text{PGL}_n(\mathbb{C})$, então

$$\overline{A} = \overline{B} \iff A \cdot B^{-1} \in \mathcal{D} \iff A \cdot B^{-1} = \lambda I \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{C} \iff A = \lambda B.$$

Lembremos que $\varphi : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n$ é uma *mudança de coordenadas projetivas (MCP)* se existe $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^{n+1}) := \{T : \mathbb{C}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1} \mid T \text{ é um isomorfismo } \mathbb{C}\text{-linear}\}$ tal que $\varphi([v]) = [T(v)]$ para qualauer $[v] \in \mathbb{P}^n$. O conjunto constituído pelas MCP em \mathbb{P}^n , que denotaremos por $\text{Aut}(\mathbb{P}^n)$, é um grupo com a operação de composição de funções. O leitor encontrará no Apêndice A os principais resultados que utilizaremos no texto que dizem respeito ao grupo $\text{Aut}(\mathbb{P}^n)$ e tópicos afins.

Notação 1.3.1. Para cada $A \in \text{GL}_{n+1}(\mathbb{C})$, defina $T_A \in \text{Aut}(\mathbb{C}^{n+1})$ por $v \mapsto A \cdot v$. Vamos denotar por $\varphi_A \in \text{Aut}(\mathbb{P}^n)$ o automorfismo definido por T_A .¹

Proposição 1.3.1. *Com as notações acima. Verifica-se que,*

$$\begin{aligned} \psi : \text{PGL}_n(\mathbb{C}) &\longrightarrow \text{Aut}(\mathbb{P}^n) \\ \overline{A} &\longmapsto \varphi_A \end{aligned}$$

está bem definida e é um isomorfismo de grupos.

Demonstração. Sejam $\overline{A}, \overline{B} \in \text{PGL}_n(\mathbb{C})$.

ψ está bem definida e é injetiva. Observe que:

$$\overline{A} = \overline{B} \iff A = \lambda B \text{ para algum } \lambda \neq 0 \text{ em } \mathbb{C} \iff T_A = \lambda T_B \iff \varphi_A = \varphi_B.$$

ψ é sobrejetora. Dada $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^n)$, existe $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^{n+1})$ tal que $\varphi([v]) = [T(v)]$ para todo $[v] \in \mathbb{P}^n$. Considere $\alpha = \{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ a base canônica de \mathbb{C}^{n+1} e $A = [T]_\alpha^\alpha = (a_{ij})$ a matriz associada a T da base α na base α . Assim,

$$T(e_j) = \sum_{i=1}^{n+1} a_{ij} e_i \text{ para } j = 1, \dots, n+1.$$

De fato, verifica-se que $\varphi = \varphi_A$ uma vez que $T(v) = A \cdot v$ para todo² v em \mathbb{C}^{n+1} .
 ψ é um homomorfismo.

Note que, $\overline{A} \cdot \overline{B} = \overline{AB}$ e que φ_{AB} é o automorfismo correspondente a $\overline{A} \cdot \overline{B}$, isto é, $\varphi_{AB}([v]) = [(AB) \cdot v]$. Assim, $\psi(\overline{AB})([v]) = \varphi_{AB}([v]) = [(AB) \cdot v]$. Entretanto,

$$[(AB) \cdot v] = [A(B \cdot v)] = \psi(\overline{A})([B \cdot v]) = \psi(\overline{A})(\varphi_B([v])) = (\psi(\overline{A}) \circ \psi(\overline{B}))([v])$$

□

Portanto, de posse dessa identificação entre os grupos $\text{Aut}(\mathbb{P}^n)$ e $\text{PGL}_n(\mathbb{C})$, podemos utilizar qualquer um deles no que segue do texto. Vale salientar que no artigo que utilizamos como base deste trabalho os autores utilizam o grupo $\text{PGL}_n(\mathbb{C})$ (cf. [1]). Entretanto, optamos por trabalhar com o grupo $\text{Aut}(\mathbb{P}^n)$.

¹Observe que se $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^{n+1})$ e $A = [T]_\alpha^\alpha$ é a matriz associada a T da base α na base α , sendo α a base canônica de \mathbb{C}^{n+1} . Então, $T = T_A$.

²Visto que, se $v = (v_1, \dots, v_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}$, então $T(v) = \sum_{j=1}^{n+1} v_j T(e_j) = \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} v_j a_{ij} e_i = A \cdot v$.

Ação de $\text{Aut}(\mathbb{P}^n)$ em \mathbb{P}^n

Nesta subseção, considere $S = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ com a graduação usual. A seguir vamos considerar a ação pela esquerda $\bullet : \text{Aut}(\mathbb{P}^n) \times \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n$ dada por $\varphi \bullet [v] := \varphi([v])$.

Proposição 1.3.2. *A ação \bullet é transitiva, ou seja, $\mathcal{O}_{[e_1]} = \mathbb{P}^n$ sendo $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$.*

Demonstração. A seguir, mostraremos que para quaisquer $p \in \mathbb{P}^n$, existe $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^n)$ tal que $\varphi([e_1]) = p$, ou seja, $p \in \mathcal{O}_{[e_1]}$.

Sabemos que o ideal $\mathcal{I}(\{p\}) = \langle L_1, \dots, L_n \rangle$ com $\{L_1, \dots, L_n\} \subset S_1$ LI. Completando $\{L_i\}_{i=1}^n$ a uma base $\alpha = \{L_0, L_1, \dots, L_n\}$ de $S_1 = [x_0, \dots, x_n]$. Logo, a Proposição A.0.3 nos garante que existe um único $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^{n+1})$ tal que $T_\bullet^{-1}x_i = L_i$ para $i = 0, \dots, n$. Seja $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^n)$ determinada por T . Por fim observe que

$$\varphi(\{[e_1]\}) = \varphi(\mathcal{Z}(x_1, \dots, x_n)) = \mathcal{Z}(T_\bullet^{-1}x_1, \dots, T_\bullet^{-1}x_n) = \mathcal{Z}(L_1, \dots, L_n) = \{p\}.$$

□

Ação de $\text{Aut}(\mathbb{P}^n)$ em $\mathbb{P}(S_d)$ sendo $d \geq 1$

Observe que $\bullet : \text{Aut}(\mathbb{P}^n) \times \mathbb{P}(S_d) \longrightarrow \mathbb{P}(S_d)$ dada por

$$(\varphi, [F]) \longmapsto [T_\bullet F],$$

se $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^n)$ for determinada por $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^{n+1})$, define uma ação pela esquerda do grupo $\text{Aut}(\mathbb{P}^n)$ no espaço $\mathbb{P}(S_d)$.

Exemplo 1.3.1. $d = 1$ A ação de $\text{Aut}(\mathbb{P}^n)$ em $\mathbb{P}(S_1)$ é transitiva.

Se $[L] \in \mathbb{P}(S_1)$, então podemos completar $\{L\}$ a uma base $\{L, M_1, \dots, M_n\}$ de $S_1 = [x_0, x_1, \dots, x_n]$. Novamente, segue da Proposição A.0.3 que existe $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^{n+1})$ tal que $T_\bullet x_0 = L$. Logo, $[L] \in \mathcal{O}_{[x_0]}$, o que implica em que $\mathcal{O}_{[x_0]} = \mathbb{P}(S_1)$.

$d > 1$ A ação de $\text{Aut}(\mathbb{P}^n)$ em $\mathbb{P}(S_d)$ não é transitiva.

De fato, sejam $[F_1], [F_2] \in \mathbb{P}(S_2)$ tal que $[F_1]$ é singular e $[F_2]$ é não singular. Daí, como MCP preserva singularidades (pela Proposição B.0.3), segue que para qualquer $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ determinada por $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^3)$ temos que $[T_\bullet F_1]$ é singular. Sendo assim, não existe $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{C})$ tal que $[T_\bullet F_1] = [F_2]$.

Na próxima seção, vamos focar na ação de $\text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ no espaço das cônicas em \mathbb{P}^2 , uma vez que este espaço e suas órbitas têm um papel preponderante neste texto.

1.4 A ação de $\text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ no espaço das cônicas em \mathbb{P}^2

Lembremos que uma cônica em \mathbb{P}^2 é um elemento de $\mathcal{C} := \mathbb{P}(S_2)$ sendo S_2 a componente homogênea de grau dois em $S = \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$. De acordo com as notações da seção 1.2, temos

Proposição 1.4.1. *Considere as órbitas $\mathcal{O}_0 = \mathcal{O}_{[x_0^2]}$, $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_{[x_0^2+x_1^2]}$ e $\mathcal{O}_2 = \mathcal{O}_{[x_0^2+x_1^2+x_2^2]}$ sob a ação de $\text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ em \mathcal{C} . Então verifica-se que*

1. $\mathcal{C} = \mathcal{O}_0 \dot{\cup} \mathcal{O}_1 \dot{\cup} \mathcal{O}_2$
2. $\mathcal{H} = \mathcal{O}_0 \dot{\cup} \mathcal{O}_1$ e $\Delta = \mathcal{O}_0$.

Demonstração. Para a demonstração do item 1., confira o Exemplo B.0.1 no Apêndice B.

Para $\Delta = \mathcal{O}_0$, basta seguir a construção na demonstração do item 1. do Exemplo B.0.1. Por outro lado, sendo $\mathcal{C} = \mathcal{O}_0 \dot{\cup} \mathcal{O}_1 \dot{\cup} \mathcal{O}_2$ com \mathcal{O}_2 correspondendo as cônicas não singulares, então $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{O}_0 \dot{\cup} \mathcal{O}_1$. Analogamente, se $[F] \in \mathcal{C}$ é singular, segue que $[F] \in \mathcal{O}_0$ ou $[F] \in \mathcal{O}_1$, ou seja, $\mathcal{H} = \mathcal{O}_0 \dot{\cup} \mathcal{O}_1$. \square

A seguir vamos identificar o espaço das cônicas \mathcal{C} com o espaço projetivo \mathbb{P}^5 . Para isso, vamos utilizar o mapa $\Omega : \mathbb{P}^5 \longrightarrow \mathcal{C}$ dado por:

$$[a_0 : a_1 : a_2 : a_3 : a_4 : a_5] \longmapsto [a_0x_0^2 + a_1x_0x_1 + a_2x_0x_2 + a_3x_1^2 + a_4x_1x_2 + a_5x_2^2]. \quad (1.9)$$

Mostraremos a seguir que Ω nos permitirá identificar \mathcal{H} com uma hipersuperfície singular de grau 3 de \mathbb{P}^5 . Para isso, observe que a todo $F \in S_2$ podemos associar uma matriz simétrica, conforme indicamos na próxima definição.

Definição 1.4.1. Se $F = a_0x_0^2 + a_1x_0x_1 + a_2x_0x_2 + a_3x_1^2 + a_4x_1x_2 + a_5x_2^2 \in S_2$, então vamos associar F à matriz simétrica

$$M_F = \begin{bmatrix} a_0 & \frac{1}{2}a_1 & \frac{1}{2}a_2 \\ \frac{1}{2}a_1 & a_3 & \frac{1}{2}a_4 \\ \frac{1}{2}a_2 & \frac{1}{2}a_4 & a_5 \end{bmatrix}.$$

De fato, verifica-se que $X^t \cdot M_F \cdot X = F$ se $X^t = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{bmatrix}$.

Lema 1.4.1. *Considere $F \in S_2$ não nulo. F é singular se, e somente se, $\det(M_F) = 0$.*

Demonstração. Seja $F = a_0x_0^2 + a_1x_0x_1 + a_2x_0x_2 + a_3x_1^2 + a_4x_1x_2 + a_5x_2^2 \in S_2$.

Se $p = [p_0 : p_1 : p_2] \in \mathbb{P}^2$ e $\partial_i F = \frac{\partial F}{\partial x_i}$, então tem-se que³

$$\begin{aligned} p \in \text{Sing}(F) &\iff \begin{cases} \partial_0 F(p) = 2a_0p_0 + a_1p_1 + a_2p_2 = 0 \\ \partial_1 F(p) = a_1p_0 + 2a_3p_1 + a_4p_2 = 0 \\ \partial_2 F(p) = a_2p_0 + a_4p_2 + 2a_5p_2 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{bmatrix} a_0 & \frac{1}{2}a_1 & \frac{1}{2}a_2 \\ \frac{1}{2}a_1 & a_3 & \frac{1}{2}a_4 \\ \frac{1}{2}a_2 & \frac{1}{2}a_4 & a_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\iff \det M_F = 0 \end{aligned}$$

□

Considere $f \in \mathbb{C}[y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5]$ dado por

$$f = y_0y_3y_5 + \frac{1}{4}y_1y_2y_4 - \frac{1}{4}y_2^2y_3 - \frac{1}{4}y_0y_4^2 - \frac{1}{4}y_1^2y_5. \quad (1.10)$$

Para uma construção futura, usaremos os seguintes resultados com as identificações tanto em \mathbb{P}^5 quanto em \mathcal{C} .

Corolário 1.4.1. *Sejam $\mathcal{H}_{\mathbb{P}^5} := \Omega^{-1}(\mathcal{H})$ e f definido em (1.10), então verifica-se que $\mathcal{H}_{\mathbb{P}^5} = \mathcal{Z}(f) \subseteq \mathbb{P}^5$.*

Demonstração. Considere $P = [a_0 : a_1 : a_2 : a_3 : a_4 : a_5] \in \mathbb{P}^5$. Logo, $\Omega(P) = [F] \in \mathcal{C}$ sendo $F = a_0x_0^2 + a_1x_0x_1 + a_2x_0x_2 + a_3x_1^2 + a_4x_1x_2 + a_5x_2^2$. Agora, observe que

$$\det M_F = \begin{vmatrix} a_0 & \frac{1}{2}a_1 & \frac{1}{2}a_2 \\ \frac{1}{2}a_1 & a_3 & \frac{1}{2}a_4 \\ \frac{1}{2}a_2 & \frac{1}{2}a_4 & a_5 \end{vmatrix} = f(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5).$$

Entretanto, o Lema 1.4.1 nos garante que F é singular se, e somente se, $\det M_F = 0$. Portanto, $P \in \mathcal{H}_{\mathbb{P}^5}$ se, e somente se, $f(P) = 0$.

□

Lema 1.4.2. *Seja $\Delta_{\mathbb{P}^5} := \Omega^{-1}(\Delta)$. Verifica-se que $\text{Sing}(\mathcal{H}_{\mathbb{P}^5}) = \Delta_{\mathbb{P}^5}$.*

³Lembre que, $p \in \text{Sing}(F)$ se, e somente se $\frac{\partial F}{\partial x_i}(p) = 0$ para todo $i \in \{0, 1, 2\}$.

Demonstração. Vamos começar mostrando que

$$\Delta_{\mathbb{P}^5} = \left\{ [b_0^2 : 2b_0b_1 : 2b_0b_2 : b_1^2 : 2b_1b_2 : b_2^2] \in \mathbb{P}^5 \mid [b_0 : b_1 : b_2] \in \mathbb{P}^2 \right\}.$$

De fato, segue da Proposição 1.4.1 que $\Delta = \{[L^2] \mid L \in S_1 \text{ não nulo}\}$. Logo, basta observar que se $L = b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 \in S_1$ é não nulo, então

$$L^2 = b_0^2x_0^2 + 2b_0b_1x_0x_1 + 2b_0b_2x_0x_2 + b_1^2x_1^2 + 2b_1b_2x_1x_2 + b_2^2x_2^2.$$

Por simplicidade, considere $g = 4f$ e $\partial_i g = \frac{\partial g}{\partial y_i}$ para $i = 0, \dots, 5$ sendo f definido como na Equação (1.10). Logo,

$$p \in \text{Sing}(\mathcal{H}_{\mathbb{P}^5}) \iff \partial_i g(p) = 0, \forall i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Para $p = [b_0^2 : 2b_0b_1 : 2b_0b_2 : b_1^2 : 2b_1b_2 : b_2^2]$ verifica-se que $\partial_i g(p) = 0$ para todo i . Assim, $\Delta_{\mathbb{P}^5} \subseteq \text{Sing}(\mathcal{H}_{\mathbb{P}^5})$.

Por outro lado, temos que

$$\partial_0 g = 4y_3y_5 - y_4^2 \quad (1.11)$$

$$\partial_1 g = y_2y_4 - 2y_1y_5 \quad (1.12)$$

$$\partial_2 g = y_1y_4 - 2y_2y_3 \quad (1.13)$$

$$\partial_3 g = 4y_0y_5 - y_2^2 \quad (1.14)$$

$$\partial_4 g = y_1y_2 - 2y_0y_4 \quad (1.15)$$

$$\partial_5 g = 4y_0y_3 - y_1^2. \quad (1.16)$$

Assim, se $p = [a_0 : \dots : a_5] \in \text{Sing}(\mathcal{H}_{\mathbb{P}^5})$, então temos dois casos a analisar:

Caso 1 : $a_0 \neq 0$. Podemos supor que $a_0 = 1$. Logo, segue de (1.14), (1.15) e (1.16) que $a_5 = \frac{1}{4}a_2^2$, $a_4 = \frac{1}{2}a_1a_2$ e $a_3 = \frac{1}{4}a_1^2$. Dessa forma,

$$p = [1 : a_1 : a_2 : \frac{1}{4}a_1^2 : \frac{1}{2}a_1a_2 : \frac{1}{4}a_2^2] = [4 : 4a_1 : 4a_2 : a_1^2 : 2a_1a_2 : a_2^2].$$

Logo, $p \in \Delta_{\mathbb{P}^5}$.

Caso 2 : $a_0 = 0$. Segue das Equações (1.14) e (1.16) que $a_1 = a_2 = 0$ e da Equação (1.11) que $a_4^2 = 4a_3a_5$. Observe que, podemos parametrizar os pontos do suporte da cônica $[4a_3a_5 - a_4^2] \in \mathcal{C}$ por $[b_1^2 : 2b_1b_2 : b_2^2]$. Logo, $p = [0 : 0 : 0 : b_1^2 : 2b_1b_2 : b_2^2] \in \Delta_{\mathbb{P}^5}$. \square

Na próxima seção, vamos apresentar a ação $\text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ na Grassmanniana $G_l(S_d)$ sendo nosso foco o caso em que $l \in \{2, 3\}$.

1.5 Ação pela esquerda de $\text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ em $G_l(S_d)$

Considere a ação de $\text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ em $G_l(S_d)$

$$\begin{aligned} \bullet : \text{Aut}(\mathbb{P}^2) \times G_l(S_d) &\longrightarrow G_l(S_d) \\ (\varphi, W) &\longmapsto \varphi \bullet W := \{T_\bullet F \in S_d \mid F \in W\} \end{aligned}$$

sendo φ determinada por $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^3)$.

Observação 1.5.1. Considere as notações acima. A função " \bullet " está bem definida e define uma ação pela esquerda do grupo $\text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ em $G_l(S_d)$.

De fato, se $\{F_1, \dots, F_l\}$ é uma base de $W \in G_l(S_d)$, então $\{T_\bullet F_1, \dots, T_\bullet F_l\}$ é um conjunto de elementos linearmente independente (LI)⁴ e $[T_\bullet F \mid F \in W] = [T_\bullet F_1, \dots, T_\bullet F_l]$,⁵ o que nos permite concluir que $\varphi \bullet W = [T_\bullet F_1, \dots, T_\bullet F_l]$ e consequentemente $\varphi \bullet W \in G_l(S_d)$.

Exemplo 1.5.1. Se $W_t = [x_0^2 - tx_1^2, x_2^2] \in G_2(S_2)$ com $t \in \mathbb{C}$ não-nulo, então existe $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $\varphi \bullet W_t = [x_0x_1, x_2^2]$.

De fato, considere $s \in \mathbb{C}$ tal que $t = s^2$ e observe que $x_0^2 - tx_1^2 = (x_0 - sx_1) \cdot (x_0 + sx_1)$. Visto que $\{x_0 - sx_1, x_0 + sx_1, x_2\}$ é uma base de $S_1 = [x_0, x_1, x_2]$. Então, a Proposição A.0.3 nos garante que existe $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^3)$ tal que $T_\bullet(x_0 - sx_1) = x_0$, $T_\bullet(x_0 + sx_1) = x_1$ e $T_\bullet x_2 = x_2$. Assim, basta considerar $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ determinada por tal T , uma vez que

$$\varphi \bullet W_t = [T_\bullet(x_0^2 - tx_1^2), T_\bullet x_2^2] = [T_\bullet(x_0 - sx_1) \cdot T_\bullet(x_0 + sx_1), (T_\bullet x_2)^2] = [x_0x_1, x_2^2].$$

Porém, para $t = 0$ tem-se $W_0 = [x_0^2, x_2^2]$ e não existe $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ que atenda ao resultado. Pelo absurdo suponha que existe tal MCP , geometricamente deveria acontecer a situação descrita na Figura 1.1

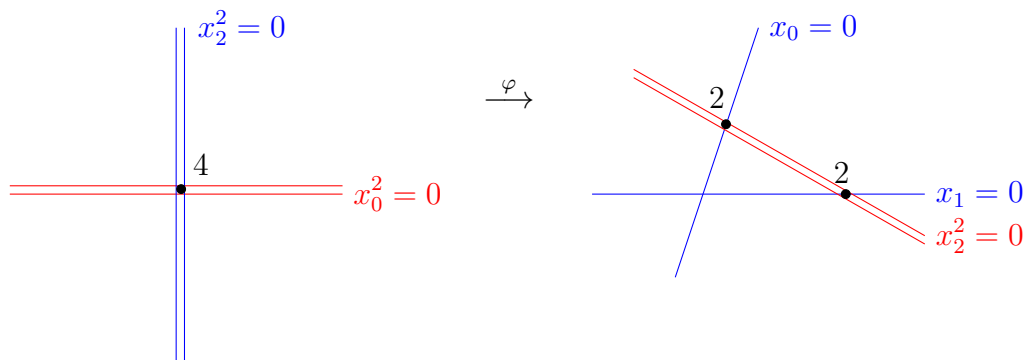
⁴De fato, visto que T_\bullet é um isomorfismo linear, segue que

$$\sum_{i=1}^l a_i T_\bullet F_i = 0 \implies T_\bullet \left(\sum_{i=1}^l a_i F_i \right) = 0 \implies \sum_{i=1}^l a_i F_i = 0 \implies a_i = 0 \quad \forall i.$$

⁵De fato, usando novamente a linearidade de T_\bullet , segue que

$$F \in W \implies F = \sum_{i=1}^l \alpha_i F_i \implies T_\bullet F = \sum_{i=1}^l \alpha_i T_\bullet F_i \implies T_\bullet F \in [T_\bullet F_1, \dots, T_\bullet F_l].$$

Figura 1.1



o que é um absurdo pois uma *MCP* preserva a cardinalidade do conjunto interseção de duas curvas no plano projetivo e as multiplicidades dos respectivos pontos.

Capítulo 2

Órbitas sob a ação de $\text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ em $G_2(S_2)$

O foco deste capítulo é determinar as órbitas sob a ação pela esquerda do grupo $\text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ na Grassmanniana de planos em S_2 sendo $S = \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$. Uma vez que essas órbitas estejam determinadas iremos calcular sua dimensão e especializações.

Vale salientar, que cada um dos pontos em $G_2(S_2)$ determina uma reta no $\mathbb{P}^5 \cong \mathcal{C}$ das cônicas, e que a determinação dos pontos de interseção dos representantes das órbitas listadas no Teorema 2.2.1 com a hipersuperfície cúbica \mathcal{H} (que parametriza as cônicas singulares) irão ter um rol importante na classificação das órbitas em $G_3(S_2)$ sob a ação de $\text{Aut}(\mathbb{P}^2)$, que desenvolveremos no Capítulo 3.

A seguir, vamos introduzir algumas notações e observações importantes para o desenvolvimento deste capítulo.

2.1 Preliminares

Observações 2.1.1. Considere $W \in G_2(S_2)$ e $\alpha = \{F, G\}$ base de W .

(a) Se $\beta = \{F_1, G_1\}$ for uma outra base de W , então

$$\text{mdc}(F, G) = \text{mdc}(F_1, G_1) \quad \text{e} \quad \mathcal{Z}(F) \cap \mathcal{Z}(G) = \mathcal{Z}(F_1) \cap \mathcal{Z}(G_1).$$

(b) Se $\text{mdc}(F, G) = 1$, então $\mathcal{Z}(F) \cap \mathcal{Z}(G)$ é não vazio e consiste de no máximo de 4 pontos distintos. Entretanto, o teorema de Bézout nos garante que $\mathcal{Z}(F) \cap \mathcal{Z}(G)$ consiste de $4 = 2 \cdot 2$ pontos, se os pontos forem contados com multiplicidade.¹

¹Se $p \in \mathcal{Z}(F) \cap \mathcal{Z}(G)$, então denotaremos por $I_p(F, G)$ a *multiplicidade de interseção* de F e G em p (confira Definição C.0.3)

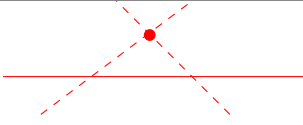

2. Órbitas sob a ação de $\text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ em $G_2(S_2)$

A seguir, considere $\mathfrak{X} = \mathcal{Z}(F) \cap \mathcal{Z}(G)$. Temos as seguintes possibilidades:

Tabela 2.1: Possibilidades para interseções de cônicas em \mathbb{P}^2 .

$\#(\mathfrak{X})$	$I_p(F, G)$	Interpretação Geométrica		
		Ambas não singulares	Singular e não singular	Ambas singulares
4	$\begin{matrix} 1 & 1 \\ \bullet & \bullet \\ 1 & 1 \\ \bullet & \bullet \end{matrix}$			
3	$\begin{matrix} 1 & 1 \\ \bullet & \bullet \\ 2 \\ \bullet \end{matrix}$		 ou 	
2	$\begin{matrix} 2 & 2 \\ \bullet & \bullet \\ \text{ou} \\ 1 & 3 \\ \bullet & \bullet \end{matrix}$		 ou 	
1	$\begin{matrix} 4 \\ \bullet \end{matrix}$			

(c) Se $\text{mdc}(F, G) \neq 1$, então $F = L \cdot M$ e $G = L \cdot N$ com $L, M, N \in S_1$. Tem-se que:

Condição	Interpretação geométrica de $\mathcal{Z}(F) \cap \mathcal{Z}(G)$
$\{L, M, N\}$ LI.	
$\{L, M, N\}$ LD.	

A proposição a seguir será muito utilizada na determinação das órbitas de um ponto $[F, G] \in G_2(S_2)$ tal que F ou G são não singulares.

Proposição 2.1.1. *Considere $[F] \in \mathcal{C}$ não singular e $C = \mathcal{Z}(x_2^2 - x_0x_1)$. Então,*

1. *Existe $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^3)$ tal $T_\bullet F = x_2^2 - x_0x_1$;*
2. *A função $f : \mathbb{P}^1 \longrightarrow C$ dada por $[a : b] \longmapsto [a^2 : b^2 : ab]$ é uma bijeção;*
3. *Existe $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $\varphi(C) = C$, $\varphi(p) = [1 : 0 : 0]$ e $\varphi(q) = [0 : 1 : 0]$, para quaisquer $p \neq q$ em C .*

Demonstração. 1. Segue do Exemplo A.0.15 que existe $R \in \text{Aut}(\mathbb{C}^3)$ tal que $R_\bullet F = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$. Entretanto, $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = x_2^2 + (x_0 + ix_1) \cdot (x_0 - ix_1)$. Assim, a Proposição A.0.9 nos garante que existe um único $R_1 \in \text{Aut}(\mathbb{C}^3)$ tal que: $(R_1)_\bullet(x_0 + ix_1) = x_0$, $(R_1)_\bullet(x_0 - ix_1) = x_1$ e $(R_1)_\bullet(x_2) = x_2$. Logo, temos que $(R_1)_\bullet(R_\bullet F) = x_2^2 - x_0x_1$.

2. Note que f está bem definida. Assim, a seguir iremos mostrar que f é uma bijeção.

- f é injetora: Considere $[a : b], [c : d] \in \mathbb{P}^1$ tais que $[a^2 : b^2 : ab] = [c^2 : d^2 : cd]$. Assim, existe um $\lambda \neq 0$ em \mathbb{C} tal que

$$a^2 = \lambda c^2, \quad b^2 = \lambda d^2 \quad \text{e} \quad ab = \lambda cd. \quad (2.1)$$

Temos duas possibilidades: (i) $a = 0$ ou (ii) $a \neq 0$.

(i) Se $a = 0$ então segue de (2.1) que $c = 0$. O que implica em $b \cdot d \neq 0$. Daí, concluímos que $[0 : b] = [0 : 1] = [0 : d]$.

(ii) Se $a \neq 0$ então $[a : b] = [a^2 : ab] \stackrel{(2.1)}{=} [\lambda c^2 : \lambda cd] = [c : d]$.

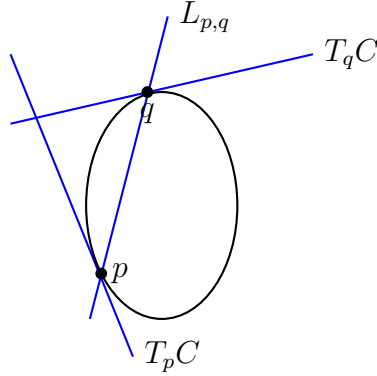
- f é sobrejetora: Considere $p = [a_0 : a_1 : a_2] \in C$. Logo, $a_2^2 = a_0a_1$. A seguir vamos analisar as possibilidades: (i) $a_0 = 0$ ou (ii) $a_0 \neq 0$.

(i) Se $a_0 = 0$, então $a_2 = 0$ e $p = [0 : 1 : 0] = f([0 : 1])$.

(ii) Se $a_0 \neq 0$, então $p = [a_0^2 : a_0a_1 : a_0a_2] = [a_0^2 : a_2^2 : a_0a_2] = f([a_0 : a_2])$.

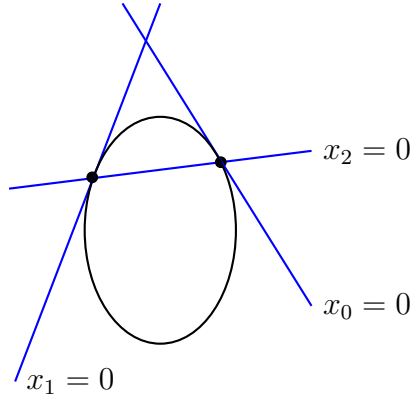
3. Queremos determinar $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $\varphi(C) = C$, $\varphi(p) = [1 : 0 : 0]$ e $\varphi(q) = [0 : 1 : 0]$ para quaisquer $p \neq q$ em C . A ideia que vamos utilizar é a seguinte: Considere a reta tangente² a C em p , $T_p(C) = \mathcal{Z}(L_p)$, a reta tangente a C em q , $T_q(C) = \mathcal{Z}(L_q)$ e a reta secante a C por p e q , $\ell_{p,q} = \mathcal{Z}(L_{p,q})$, conforme ilustrado a seguir

Figura 2.1 Retas tangentes a C em p e q .



Sabemos que existe um único $R \in \text{Aut}(\mathbb{C}^3)$ tal que $R_\bullet L_p = x_0$, $R_\bullet L_q = x_1$ e $R_\bullet L_{p,q} = x_2$. Então vamos levar a configuração da Figura 2.1 na configuração da Figura 2.2.

Figura 2.2 Configuração após aplicar φ .



Na Figura 2.1 temos $p = [a^2 : c^2 : ac]$ e $q = [b^2 : d^2 : bd]$ em C . Note que, se $G = x_2^2 - x_0x_1$ então $\nabla G = (x_1, x_0, -2x_2)$. Assim,

$$L_p = a^2 + c^2 - 2ac \text{ e } L_q = b^2 + d^2 - 2bd.$$

²Se $[F] \in \mathbb{P}^2(S_2)$ for não singular em $p \in \mathcal{Z}(F)$, define-se a reta tangente a $\mathcal{Z}(F)$ em p , $T_p(C) := \mathcal{Z}(L_p)$, sendo $L_p = \partial_0 F(p)x_0 + \partial_1 F(p)x_1 + \partial_2 F(p)x_2$ sendo $\partial_i F := \frac{\partial F}{\partial x_i}$ para $i = 0, 1, 2$.

A equação da reta $L_{p,q}$ é determinada por:

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ a^2 & c^2 & ac \\ b^2 & d^2 & bd \end{vmatrix} = (bc - ad)(cdx_0 + abx_1 - (ad + bc)x_2) = 0.$$

Note que se $bc = ad$ então $p = q$ (absurdo). Logo, $bc - ad \neq 0$. Assim,

$$L_{p,q} = cdx_0 + abx_1 - (ad + bc)x_2.$$

Agora, considere $\psi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ determinada por $R \in \text{Aut}(\mathbb{C}^3)$ tal que a matriz associada a R na base canônica é dada por:

$$\begin{bmatrix} a^2 & c^2 & -2ac \\ b^2 & d^2 & -2bd \\ ab & cd & -(ad + bc) \end{bmatrix}.$$

Observe que, $R(1, 0, 0) = (a^2, b^2, ab)$ e $R(0, 1, 0) = (c^2, d^2, cd)$. Assim, $\psi([1 : 0 : 0]) = p$ e $\psi([0 : 1 : 0]) = q$.

Afirmção: $\psi(C) = C$.

De fato, seja $r = [x^2 : y^2 : xy] \in C$ então,

$$\psi(r) = [R(x^2 : y^2 : xy)] = [(cy - ax)^2 : (dy - bx)^2 : (cy - ax) \cdot (dy - bx)] \in C.$$

Assim, temos $\psi(C) \subseteq C$.

Note que, $\psi(C)$ e C são subvariedades fechadas com $\dim(C) = \dim(\psi(C)) = 1$. Logo, pelo Teorema 1.19 (p. 68 em [12]) segue que $C = \psi(C)$.

Portanto, basta considerar $\varphi = \psi^{-1}$ e o resultado segue. \square

O próximo lema nos dará suporte para descrever as órbitas dos pontos $[F, G] \in G_2(S_2)$ tal que F e G são ambas singulares.

Lema 2.1.1. *Seja $[F, G] \in G_2(S_2)$ tal que F e G são singulares e $\text{mdc}(F, G) = 1$. Então, temos as seguintes possibilidades para a cardinalidade de $\mathcal{Z}(F) \cap \mathcal{Z}(G)$.*

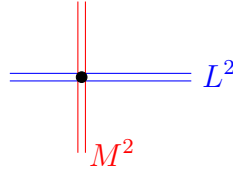
1. Se $F, G \in \Delta$ então, $\#\mathcal{Z}(F) \cap \mathcal{Z}(G) = 1$.
2. Se $F, G \in \mathcal{H} \setminus \Delta$ então, $\#\mathcal{Z}(F) \cap \mathcal{Z}(G) \in \{1, 3, 4\}$.
3. Se $F \in \mathcal{H} \setminus \Delta$ e $G \in \Delta$ então, $\#\mathcal{Z}(F) \cap \mathcal{Z}(G) \in \{1, 2\}$.³

³A menos de uma reordenação no conjunto $\{F, G\}$.

Demonstração. Usaremos como base o apelo geométrico e a condição de que duas curvas sempre se intersectam no plano projetivo.

1. Sendo $F, G \in \Delta$ segue que $F = L^2$ e $G = M^2$ com $\{L, M\}$ LI , isto é, duas retas duplas da qual temos uma única possibilidade. Portanto, $\#\mathcal{Z}(F) \cap \mathcal{Z}(G) = 1$.

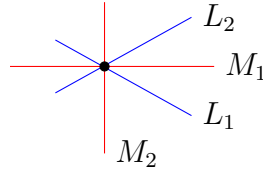
Figura 2.3



2. Agora temos que $F, G \in \mathcal{H} \setminus \Delta$, ou seja, ambas são um par de retas distintas. Considere $F = L_1 \cdot L_2$ com $\{L_1, L_2\}$ LI , $G = M_1 \cdot M_2$ com $\{M_1, M_2\}$ LI , $\mathcal{Z}(L_1, L_2) = \{p\}$ e $\mathcal{Z}(M_1, M_2) = \{q\}$. Sendo assim, temos três possibilidades:

Primeiramente, se $p = q$ então

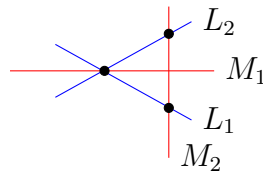
Figura 2.4



donde temos $\#\mathcal{Z}(F) \cap \mathcal{Z}(G) = 1$.

Proseguindo, note que podemos ter o caso em que⁴ $p \in M_1$ e $p \notin M_2$. Assim, segue que M_2 deve intersectar L_1 e L_2 em pontos distintos, isto é,

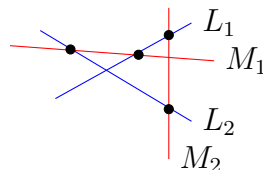
Figura 2.5



logo, $\#\mathcal{Z}(F) \cap \mathcal{Z}(G) = 3$.

Por fim, temos a possibilidade de $p \notin M_i \forall i$ e $q \notin L_i \forall i$, logo

Figura 2.6



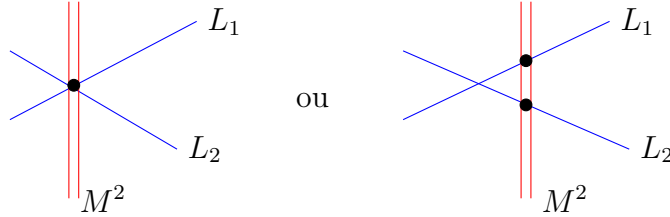
⁴Um raciocínio análogo se aplica trocando p por q e L_i por M_i .

Assim, $\#\mathcal{Z}(F) \cap \mathcal{Z}(G) = 4$.

Portanto, temos que $\#\mathcal{Z}(F) \cap \mathcal{Z}(G) = \{1, 3, 4\}$.

3. Neste caso, considere $F = L_1 \cdot L_2$ com $\{L_1, L_2\}$ LI e $G = M^2$ assim, existe apenas duas possibilidades para M^2 intersectar F , ou seja, M^2 passa por $\mathcal{Z}(L_1, L_2)$ ou intersecta em pontos distintos. Geometricamente temos:

Figura 2.7



Sendo assim, temos que $\#\mathcal{Z}(F) \cap \mathcal{Z}(G) = \{1, 2\}$.

Portanto, segue o resultado. □

2.2 Classificação das órbitas de $G_2(S_2)$

O próximo lema dá início a determinação das órbitas em $G_2(S_2)$ sob a ação do grupo $\text{Aut}(\mathbb{P}^2)$, para $[F, G] \in G_2(S_2)$ tal que $\#\mathcal{Z}(F) \cap \mathcal{Z}(G) = 4$.

Lema 2.2.1. *Sejam $W = [F, G] \in G_2(S_2)$ e \mathcal{O}_W a órbita associada a W pela ação de $\text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ em $G_2(S_2)$. Se $\#\mathcal{Z}(F) \cap \mathcal{Z}(G) = 4$, então $\mathcal{O}_W = \mathcal{O}_V$ sendo $V = [x_1^2 - x_0^2, x_2^2 - x_0^2]$.*

Demonstração. Assuma que $\mathcal{Z}(F) \cap \mathcal{Z}(G) = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$. Neste caso, necessariamente temos que os quatro pontos estão em posição geral. Então, pela Proposição B.0.4 existe $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $\varphi(p_i) = q_i$ sendo $q_1 = [1 : 1 : 1]$, $q_2 = [1 : 1 : -1]$, $q_3 = [1 : -1 : 1]$ e $q_4 = [-1 : 1 : 1]$ (uma vez que os pontos q_1, q_1, q_3 e q_4 também estão em posição geral).

A seguir, vamos determinar uma base para o subespaço V de S_2 constituído pelas cônicas que passam pelos pontos q_1, q_1, q_3 e q_4 . Com esse objetivo em mente, considere $f = a_0x_0^2 + a_1x_0x_1 + a_2x_0x_2 + a_3x_1^2 + a_4x_1x_2 + a_5x_2^2 \in S_2$ e note que $f \in V$ se, e somente se,

$$\begin{cases} f(q_1) = 0 \iff a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 0, \\ f(q_2) = 0 \iff a_0 + a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 = 0, \\ f(q_3) = 0 \iff a_0 - a_1 + a_2 + a_3 - a_4 + a_5 = 0, \\ f(q_4) = 0 \iff a_0 - a_1 - a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Sendo o sistema (2.2) equivalente a $a_4 = a_2 = a_1 = 0$ e $a_0 = -a_3 - a_5$. Logo,

$$f = (-a_3 - a_5)x_0 + a_3x_1^2 + a_5x_2^2 = a_3(x_1^2 - x_0^2) + a_5(x_2^2 - x_0^2).$$

Assim, $\{x_1^2 - x_0^2, x_2^2 - x_0^2\}$ é uma base de V . Entretanto, $T \bullet W = [T_\bullet F, T_\bullet G] \subseteq V$. Portanto, $T \bullet W = V$ e consequentemente $\mathcal{O}_W = \mathcal{O}_V$ sendo $V = [x_1^2 - x_0^2, x_2^2 - x_0^2]$. \square

Tendo em consideração que o teorema de Bézout nos garante que a interseção de duas cônicas $[F], [G]$ em \mathbb{P}^2 , sem componentes em comum, consiste de no máximo 4 pontos distintos. Do contrário, $\text{mdc}(F, G) = L$ com $L \in S_1$ não nula, o que implica que a reta $\mathcal{Z}(L)$ esta contida em $\mathcal{Z}(F) \cap \mathcal{Z}(G)$. Nessa perspectiva, temos que:

Proposição 2.2.1. *Se $W = [F, G] \in G_2(S_2)$ sendo $[F]$ e $[G]$ ambas singulares. Então, existe $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^3)$ tal que*

1. *Se $\#\mathcal{Z}(F) \cap \mathcal{Z}(G) = 1$ então, $T \bullet W = [x_0^2, x_1^2]$.*
2. *Se $\#\mathcal{Z}(F) \cap \mathcal{Z}(G) = 2$ então, $T \bullet W = [x_0x_1, x_2^2]$.*
3. *Se $\#\mathcal{Z}(F) \cap \mathcal{Z}(G) = 3$ então, $T \bullet W = [x_0x_1, (x_0 + x_1)x_2]$.*
4. *Se $\#\mathcal{Z}(F) \cap \mathcal{Z}(G) = 4$ então, $T \bullet W = [x_1^2 - x_0^2, x_2^2 - x_0^2]$.*
5. *Se $\text{mdc}(F, G) \neq 1$ então, $T \bullet W = [x_0x_1, x_0x_2]$ ou $T \bullet W = [x_0^2, x_0x_1]$.*

Demonstração. Note que, uma cônica singular é dada por um par de retas distintas ou por uma reta dupla. Assim, temos três possibilidades:

- (i) $F, G \in \Delta$ (F, G são retas duplas).
- (ii) $F \in \mathcal{H} \setminus \Delta$ e $G \in \Delta$ (F é um par de retas distintas e G é uma reta dupla).⁵
- (iii) $F, G \in \mathcal{H} \setminus \Delta$ (F, G são um par de retas distintas).

Item 1. De acordo com o Lema 2.1.1, temos que analisar as três possibilidades descritas acima:

- (i) se $F, G \in \Delta$, então $F = L^2$, $G = M^2$ e $\{L, M\}$ é LI . Note que a Proposição A.0.9 nos garante que, existe $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^3)$ tal que $T_\bullet L = x_0$ e $T_\bullet M = x_1$ e, portanto, $T \bullet W = [x_0^2, x_1^2]$.⁶

⁵A menos de uma reordenação do conjunto $\{F, G\}$.

⁶Observe que, $\mathcal{Z}(x_0^2, x_1^2) = \{[0 : 0 : 1]\}$. Assim, o teorema de Bézout nos garante que $I_{[0:0:1]}(x_0^2, x_1^2) = 4$.

- (ii) Se $F \in \mathcal{H} \setminus \Delta$ e $G \in \Delta$, então $F = L_1 \cdot L_2$ sendo $\{L_1, L_2\}$ LI e $G = M^2$. Observe que necessariamente a reta $\mathcal{Z}(M)$ passa pelo ponto de interseção das retas $\mathcal{Z}(L_1)$ e $\mathcal{Z}(L_2)$ (do contrário $\#(\mathcal{Z}(F, G)) = 2$). Assim, $M = a_1 L_1 + a_2 L_2$ com $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ não-nulos. Agora, completando $\{L_1, M\}$ a uma base de $S_1 = [x_0, x_1, x_2]$, a Proposição A.0.3 nos garante que existe $R \in \text{Aut}(\mathbb{C}^3)$ tal que $R_\bullet(L_1) = x_1$ e $R_\bullet(M) = x_0$. Visto que $a_2 L_2 = M - a_1 L_1$, segue que $R_\bullet(a_2 L_2) = x_0 - a_1 x_1$. Logo,

$$W_1 := R \bullet [L_1 L_2, M^2] = R \bullet [L_1(a_2 L_2), M^2] = [x_1(x_0 - a_1 x_1), x_0^2] \text{ com } a_1 \neq 0.$$

Daí, considerando $a = a_1^{-1}$ segue que

$$W_1 \stackrel{MB}{=} [x_0^2, x_1^2 - a x_0 x_1] = \left[x_0^2, (x_1 - \frac{a}{2} x_0)^2 - \frac{a^2}{4} x_0^2 \right] \stackrel{MB}{=} \left[x_0^2, (x_1 - \frac{a}{2} x_0)^2 \right].$$

Para concluirmos, basta considerar $R_1 \in \text{Aut}(\mathbb{C}^3)$ tal que $R_{1\bullet}(x_1 - \frac{a}{2} x_0) = x_1$ e $R_{1\bullet}(x_j) = x_j$ para $j \in \{0, 2\}$.

- (iii) Se $F, G \in \mathcal{H} \setminus \Delta$, então $F = L_1 \cdot L_2$ com $\{L_1, L_2\}$ LI e $G = M_1 \cdot M_2$ com $\{M_1, M_2\}$ LI . Como $\#\mathcal{Z}(F) \cap \mathcal{Z}(G) = 1$, segue que as retas L_1, L_2, M_1 e M_2 são concorrentes. Considere $R \in \text{Aut}(\mathbb{C}^3)$ tal que $R_\bullet L_1 = x_0$ e $R_\bullet L_2 = x_1$. Além disso, visto que $R_\bullet M_i \in [x_0, x_1]$ $i = 1, 2$, vamos escrever $M_i = a_i x_0 + b_i x_1$ para $i = 1, 2$ (com $a_i \cdot b_i \neq 0$ uma vez que F e G são LI). Assim,

$$\begin{aligned} R \bullet W &= [x_0 x_1, (a_1 x_0 + b_1 x_1) \cdot (a_2 x_0 + b_2 x_1)] \\ &\stackrel{MB}{=} [x_0 x_1, a x_0^2 + b x_1^2] \text{ com } a = a_1 a_2 \text{ e } b = b_1 b_2 \\ &\stackrel{MB}{=} [x_0 x_1, x_0^2 + c x_1^2] \text{ com } c = \frac{b}{a} \text{ (pois } a, b \neq 0) \\ &= [x_0 x_1, (x_0 + d x_1)^2 - 2 d x_0 x_1] \text{ com } d^2 = c \\ &\stackrel{MB}{=} [x_0 x_1, (x_0 + d x_1)^2]. \end{aligned}$$

Agora, prosseguindo como no caso (ii) deste item, temos o resultado.

Item 2. Como $\#\mathcal{Z}(F) \cap \mathcal{Z}(G) = 2$, novamente pelo Lema 2.1.1 temos que (a menos de uma reordenação) a única possibilidade permissível é $F \in \mathcal{H} \setminus \Delta$ e $G \in \Delta$.

Assim, considerando $F = L_1 \cdot L_2$ com $\{L_1, L_2\}$ LI e $G = M^2$. Note que, $\{L_1, L_2, M\}$ é LI , pois caso fosse LD implicaria que $\#\mathcal{Z}(F) \cap \mathcal{Z}(G) = 1$. Logo, sabemos que existe $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^3)$ tal que $T_\bullet(L_1) = x_0$, $T_\bullet(L_2) = x_1$ e $T_\bullet(M) = x_2$. Portanto,

$$T \bullet W = [T_\bullet(L_1 \cdot L_2), T_\bullet(M^2)] = [x_0 x_1, x_2^2].$$

Item 3. Segue do Lema 2.1.1 que única a possibilidade a considerar é $F, G \in \mathcal{H} \setminus \Delta$. Assim, assumamos que $F = L_1 \cdot L_2$ com $\{L_1, L_2\}$ LI e $G = M_1 \cdot M_2$ com $\{M_1, M_2\}$ LI . Como $\#\mathcal{Z}(F) \cap \mathcal{Z}(G) = 3$, o conjunto $\{L_1, L_2, M_i\}$ é LI para algum $i = 1, 2$.⁷ Escolhendo $\{L_1, L_2, M_1\}$ LI deve ocorrer necessariamente que o conjunto $\{L_1, L_2, M_2\}$ seja LD , e portanto, temos que $M_2 = aL_1 + bL_2$ com a, b em \mathbb{C} ambos não-nulos. Assim, considere $R \in \text{Aut}(\mathbb{C}^3)$ tal que $R_\bullet(L_i) = x_{i-1}$ para $i = 1, 2$ e $R_\bullet(M_1) = x_2$.

Visto que $R_\bullet M_2 = ax_0 + bx_1$. Logo,

$$W_1 := R \bullet W = [x_0x_1, (ax_0 + bx_1)x_2] \stackrel{MB}{=} [(ax_0)(bx_1), (ax_0 + bx_1)x_2].$$

Por fim, basta considerar $R_1 \in \text{Aut}(\mathbb{C}^3)$ tal que $(R_1)_\bullet(ax_0) = x_0$, $(R_1)_\bullet(bx_1) = x_1$ e $(R_1)_\bullet x_2 = x_2$.

Item 4. Segue do Lema 2.2.1.

Item 5 : Como $\text{mdc}(F, G) \neq 1$, podemos assumir que $\text{mdc}(F, G) = L$ com $L \in S_1$. Neste caso, pelo menos uma das cônicas pertence a $\mathcal{H} \setminus \Delta$.⁸ Assim, a menos de uma reordenação temos duas possibilidades:

- $F = L \cdot L_1$, $G = L \cdot M_1 \in \mathcal{H} \setminus \Delta$, o que implica em que $\{L, L_1, M_1\}$ é LI . Daí, basta considerar $R \in \text{Aut}(\mathbb{C}^3)$ tal que $R_\bullet L = x_0$, $R_\bullet L_1 = x_1$ e $R_\bullet M_1 = x_2$. Logo, $R \bullet W = [R_\bullet(L \cdot L_1), R_\bullet(L \cdot M_1)] = [x_0x_1, x_0x_2]$.
- $F = L \cdot L_1 \in \mathcal{H} \setminus \Delta$ e $G = L^2$. Então, $R \bullet W = [x_0x_1, x_0^2]$ ao considerarmos $R \in \text{Aut}(\mathbb{C}^3)$ tal que $R_\bullet L = x_0$ e $R_\bullet L_1 = x_1$.

Portanto, segue o resultado. □

Determinação das órbitas de $G_2(S_2)$ sob a ação de $\text{Aut}(\mathbb{P}^2)$

Finalmente, dispomos de todos os resultados que nos permitirão estabelecer a classificação das órbitas em $G_2(S_2)$ sob a ação de $\text{Aut}(\mathbb{P}^2)$, conforme mostraremos no teorema a seguir.

Teorema 2.2.1. *Considere $W = [F, G] \in G_2(S_2)$ e \mathcal{O}_W a órbita associada a W pela a ação de $\text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ em $G_2(S_2)$. Verifica-se que*

- *Se $\text{mdc}(F, G) = 1$, então de acordo com a cardinalidade de $\mathcal{Z}(F) \cap \mathcal{Z}(G)$ temos as seguintes possibilidades para \mathcal{O}_W :*

⁷Note que, se o conjunto $\{L_1, L_2, M_i\}$ for LI para todo i , então $\#\mathcal{Z}(F) \cap \mathcal{Z}(G) = 4$ visto que os pontos singulares das cônicas não pertencem a $\mathcal{Z}(F) \cap \mathcal{Z}(G)$. Assim, necessariamente deve ocorrer que $\{L_1, L_2, M_i\}$ é LI exatamente para um valor de i .

⁸Sendo $\{F, G\}$ é LI , ambas das cônicas em Δ implicaria em que $\text{mdc}(F, G) = 1$.

1. Se $\#\mathcal{Z}(F) \cap \mathcal{Z}(G) = 1$. Então,

$$\mathcal{O}_W = \begin{cases} \mathcal{O}_{\pi_1} & \text{sendo } \pi_1 = [x_2^2 - x_0x_1, x_1^2] \\ \text{ou} \\ \mathcal{O}_{\pi_2} & \text{sendo } \pi_2 = [x_0^2, x_1^2]. \end{cases}$$

2. Se $\#\mathcal{Z}(F) \cap \mathcal{Z}(G) = 2$. Então,

$$\mathcal{O}_W = \begin{cases} \mathcal{O}_{\pi_3} & \text{sendo } \pi_3 = [x_2^2 - x_0x_1, x_1x_2] \\ \text{ou} \\ \mathcal{O}_{\pi_4} & \text{sendo } \pi_4 = [x_0^2, x_1x_2]. \end{cases}$$

3. Se $\#\mathcal{Z}(F) \cap \mathcal{Z}(G) = 3$. Então, $\mathcal{O}_W = \mathcal{O}_{\pi_5}$ sendo $\pi_5 = [x_0x_1, (x_0 + x_1)x_2]$.

4. Se $\#\mathcal{Z}(F) \cap \mathcal{Z}(G) = 4$. Então, $\mathcal{O}_W = \mathcal{O}_{\pi_6}$ sendo $\pi_6 = [x_1^2 - x_0^2, x_2^2 - x_0^2]$.

• Se $\text{mdc}(F, G) \neq 1$, então

$$\mathcal{O}_W = \begin{cases} \mathcal{O}_{\pi_7} & \text{sendo } \pi_7 = [x_0x_1, x_0x_2] \\ \text{ou} \\ \mathcal{O}_{\pi_8} & \text{sendo } \pi_8 = [x_0^2, x_0x_1]. \end{cases}$$

Demonstração. Considere $W = [F, G] \in G_2(S_2)$. Se F e G são ambas singulares, então o resultado segue diretamente da Proposição 2.2.1. Assim, sem perda de generalidade (e a menos de uma reordenação na base $\{F, G\}$ de W), a seguir vamos supor que F é não singular. Observe que, sendo F não singular, necessariamente $\text{mdc}(F, G) = 1$. Portanto, $\#\mathcal{Z}(F) \cap \mathcal{Z}(G)$ é finita e varia entre 1 e 4.

Por outro lado, a Proposição 2.1.1 nos garante que existe $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ determinada por $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^3)$ tal que $T_\bullet F = x_2^2 - x_0x_1$ (o que implica em $\varphi(C) = C$ se $C = \mathcal{Z}(x_2^2 - x_0x_1)$) e, além disso $\varphi(p) = [1 : 0 : 0]$ e $\varphi(q) = [0 : 1 : 0]$ para quaisquer $p, q \in C$ distintos.

Assim, a seguir faremos a demonstração analisando as possibilidades para a cardinalidade de $\mathcal{Z}(F) \cap \mathcal{Z}(G)$, sendo $F = x_2^2 - x_0x_1$.

• $\#\mathcal{Z}(F) \cap \mathcal{Z}(G) = 1$.

Neste caso, a menos de uma *MCP* podemos assumir que $\mathcal{Z}(F) \cap \mathcal{Z}(G) = \{p\}$, sendo $p = [1 : 0 : 0]$ e o teorema de Bézout nos garante que $I_p(F, G) = 4$. Note que

$$\{x_0x_1, x_0x_2, x_1^2, x_1x_2, x_2^2 - x_0x_1\}$$

é uma base de S_2 constituída pelas cônicas que passam por p . Visto que $\{F, G\}$

é LI e $G(p) = 0$, podemos assumir que

$$G = ax_0x_1 + bx_0x_2 + cx_1^2 + dx_1x_2 \quad \text{com } a, b, c, d \in \mathbb{C}.$$

Agora, escrevendo F e G como polinômios na variável x_2 , tem-se que

$$F = 1 \cdot x_2^2 - x_0x_1 \text{ e } G = \alpha x_2 + \beta \text{ sendo } \alpha = bx_0 + dx_1 \text{ e } \beta = ax_0x_1 + cx_1^2.$$

Assim, a resultante de F e G (relativa a x_2) em p é dada por

$$\begin{aligned} R_p^{x_2}(F, G) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -x_0x_1 \\ \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \end{vmatrix} \\ &= \beta^2 - \alpha^2 x_0x_1 \\ &= a^2 x_0^2 x_1^2 + 2acx_0x_1^3 + c^2 x_1^4 - x_0x_1(b^2 x_0^2 + 2bdx_0x_1 + d^2 x_1^2) \\ &= c^2 x_1^4 + (2ac - d^2)x_0x_1^3 + (a^2 - 2bd)x_0^2 x_1^2 - b^2 x_0^3 x_1. \end{aligned}$$

Visto que $I_p(F, G) = 4$, segue que $a = b = d = 0$ e $c \neq 0$.⁹ Portanto, $G = x_1^2$.

Da qual concluímos que $\mathcal{O}_W = \mathcal{O}_{\pi_1}$ sendo $\pi_1 = [x_2^2 - x_0x_1, x_1^2]$.

• $\#\mathcal{Z}(F) \cap \mathcal{Z}(G) = 2$

Neste caso, a menos de uma MCP podemos considerar que $\mathcal{Z}(F) \cap \mathcal{Z}(G) = \{p, q\}$ sendo $p = [1 : 0 : 0]$ e $q = [0 : 1 : 0]$. Visto que

$$\{x_0x_1, x_0x_2, x_1x_2, x_2^2 - x_0x_1\}$$

é uma base para as cônicas que passam pelos pontos¹⁰ p e q . Assim,

$$G = ax_0x_1 + bx_0x_2 + cx_1x_2 \tag{2.3}$$

Além disso, temos duas possibilidades para considerar:

$$(i) \ I_p(F, G) = 2 = I_q(F, G). \quad (ii) \ I_p(F, G) = 3 \text{ e } I_q(F, G) = 1.$$

De fato,

⁹Lembre que $I_p(F, G) = 4$ implique em que a maior potência de x_1 que divide a resultante $R_p^{x_2}(F, G)$ é x_1^4 .

¹⁰De fato, se $f = a_0x_0^2 + a_1x_0x_1 + a_2x_0x_2 + a_3x_1^2 + a_4x_1x_2 + a_5x_2^2 \in S_2$, então $f(p) = 0 = f(q)$ implica em $a_0 = a_3 = 0$. Assim, uma base para tal subespaço é dada por $\{x_0x_1, x_0x_2, x_1x_2, x_2^2\}$. Entretanto, F pertence a este subespaço de cônicas, o que nos permite obter uma base contendo F .

- (i) Neste caso, escrevendo F e G como polinômios na variável x_2 , a resultante de F e G (relativa a x_2) em $z \in \mathcal{Z}(F) \cap \mathcal{Z}(G)$ é dada por

$$R_z^{x_2}(F, G) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -x_0x_1 \\ \alpha & ax_0x_1 & 0 \\ 0 & \alpha & ax_0x_1 \end{vmatrix} = a^2x_0^2x_1^2 - x_0x_1\alpha^2$$

sendo $\alpha = bx_0 + cx_1$. Assim

$$R_z^{x_2}(F, G) = -c^2x_0x_1^3 + (a^2 - 2bc)x_0^2x_1^2 - b^2x_0^3x_1. \quad (2.4)$$

Logo,

$$\begin{cases} I_p(F_1, G_1) = 2 \text{ implica em } b = 0 \text{ e } a \neq 0, \\ I_q(F_1, G_1) = 2 \text{ implica em } c = 0 \text{ e } a \neq 0. \end{cases}$$

Portanto, $G = ax_0x_1$. Logo, $W_1 = [x_2^2 - x_0x_1, ax_0x_1] \stackrel{MB}{=} [x_2^2, x_0x_1]$. Por fim, considere $R \in \text{Aut}(\mathbb{C}^3)$ tal que $R_\bullet x_2 = x_0$, $R_\bullet x_1 = x_1$ e $R_\bullet x_0 = x_2$. Assim, $R \bullet W_1 = [x_0^2, x_1x_2] = \pi_4$. Ou seja, $\mathcal{O}_W = \mathcal{O}_{\pi_4}$.

- (ii) Como $I_p(F, G) = 3$, segue da Equação (2.4) que $a = b = 0$ e $c \neq 0$. Portanto, $G = cx_1x_2$ com $c \neq 0$. Logo, $W_1 = [x_2^2 - x_0x_1, cx_1x_2] \stackrel{MB}{=} [x_2^2 - x_0x_1, x_1x_2]$.¹¹ Portanto, concluímos que $\mathcal{O}_W = \mathcal{O}_{\pi_3}$, sendo $\pi_3 = [x_2^2 - x_0x_1, x_1x_2]$.

• $\#\mathcal{Z}(F) \cap \mathcal{Z}(G) = 3$.

Assuma que $\mathcal{Z}(F) \cap \mathcal{Z}(G) = \{p, q, r\}$, sendo $p = [1 : 0 : 0]$, $q = [0 : 1 : 0]$ e $r = [1 : u^2 : u]$ com $u \neq 0$.¹² Se $I_p(F, G) = 2$, segue do teorema de Bézout que $I_q(F, G) = I_r(F, G) = 1$. Visto que, $G(p) = G(q) = 0$ segue de (2.3) que $G = ax_0x_1 + bx_0x_2 + cx_1x_2$ com $a, b, c \in \mathbb{C}$ nem todos nulos. Entretanto, $G(r) = 0$ implica em que $au^2 + bu + u^3c = 0$. Sendo $u \neq 0$, segue que $au + b + u^2c = 0$ do qual tem-se $b = -au - u^2c$, o que nos permite concluir que

$$G = ax_0(x_1 - ux_2) + cx_2(x_1 - u^2x_0).$$

Agora, escrevendo F e G como polinômios na variável x_2 , temos que

¹¹Note que pelo teorema de Bézout, tem-se que $I_q(F, G) = 1$.

¹²Como $r \in \mathcal{Z}(F)$, segue da Proposição 2.1.1 que existe um único $[a : b] \in \mathbb{P}^1$ tal que $r = [a^2 : b^2 : ab]$. Agora, como $r \notin \{p, q\}$, segue que $a \neq 0$ e $b \neq 0$. Daí, concluímos que

$$r = \left[1 : \frac{b^2}{a^2} : \frac{ab}{a^2}\right] = [1 : u^2 : u] \text{ com } \frac{b}{a} = u.$$

$F = 1 \cdot x_2^2 + (-x_0x_1)$ e $G = \alpha x_2 + \beta$ com $\alpha = -u(a + uc)x_0 + cx_1$ e $\beta = ax_0x_1$. Assim, a resultante de F e G (com respeito a x_2) em $y \in \mathcal{Z}(F) \cap \mathcal{Z}(G)$ é dada por

$$R_y^{x_2}(F, G) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -x_0x_1 \\ \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \end{vmatrix} = \alpha^2 - x_0x_1\alpha^2.$$

Assim,

$$\begin{aligned} R_y^{x_2}(F, G) &= a^2x_0^2x_1^2 - x_0x_1[u^2(a + uc)^2x_0^2 + c^2x_1^2 - 2uc(a + uc)x_0x_1] \\ &= -c^2x_0x_1^3 + (a^2 + 2uc(a + uc))x_0^2x_1^2 - u^2(a + uc)x_0^3x_1. \end{aligned}$$

Logo $I_p(F, G) = 2$ (resp. $I_q(F, G) = 1$) implica em $a + uc = 0$ e $a \neq 0$ (resp. $c \neq 0$), além disso $I_q(F, G) = 1$ tem-se que $c \neq 0$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} G &= (-uc)x_0(x_1 - ux_2) + cx_2(x_1 - u^2x_0) \text{ como } c \neq 0 \\ &\stackrel{MB}{=} -ux_0(x_1 - ux_2) + x_2(x_1 - u^2x_0) \\ &= -ux_0x_1 + u^2x_0x_2 + x_1x_2 - u^2x_0x_2 \\ &= -ux_0x_1 + x_1x_2 \\ &= x_1(x_2 - ux_0). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} W_1 = [x_2^2 - x_0x_1, x_1(x_2 - ux_0)] &= [x_2^2 - x_0x_1, x_1x_2 - ux_0x_1] \\ &\stackrel{MB}{=} [ux_2^2 - ux_0x_1, x_1x_2 - ux_0x_1] \\ &\stackrel{MB}{=} [ux_2^2 - x_1x_2, x_1x_2 - ux_0x_1] \\ &= [x_2(ux_2 - x_1), x_1(x_2 - ux_0)]. \end{aligned}$$

A seguir, considere $R \in \text{Aut}(\mathbb{C}^3)$ tal que $R_\bullet x_2 = x_0$, $R_\bullet(ux_2 - x_1) = x_1$ e $R_\bullet(x_2 - ux_0) = x_2$. Logo,

$$R \bullet W_1 = [R_\bullet(x_2(ux_2 - x_1)), R_\bullet(x_1(x_2 - ux_0))] = [x_0x_1, x_2(ux_0 - x_1)].$$

Por fim, considere $R_1 \in \text{Aut}(\mathbb{C}^3)$ tal que $R_{1\bullet}x_j = x_j$ para $j = 0, 2$ e $R_{1\bullet}x_1 = -ux_1$. Assim,

$$R_1 \bullet W_1 = [-ux_0x_1, x_2(ux_0 + ux_1)] \stackrel{MB}{=} [-x_0x_1, x_2(x_0 + x_1)] \stackrel{MB}{=} [x_0x_1, x_2(x_0 + x_1)].$$

Portanto, $\mathcal{O}_W = \mathcal{O}_{\pi_5}$ com $\pi_5 = [x_0x_1, x_2(x_0 + x_1)]$.

- $\#\mathcal{Z}(F) \cap \mathcal{Z}(G) = 4$. Segue diretamente do Lema 2.2.1

Se $\text{mdc}(F, G) \neq 1$ o resultado segue da Proposição 2.2.1 □

2.3 Interseção das retas em $\mathbb{P}(S_2)$ com \mathcal{H}

Observe que $\pi = [F_1, F_2] \in G_2(S_2)$ determina a reta $L_\pi \subset \mathcal{C} = \mathbb{P}(S_2)$, dada por:

$$L_\pi = \left\{ [a \cdot F_1 + b \cdot F_2] \in \mathcal{C} \mid [a : b] \in \mathbb{P}^1 \right\}.$$

Por exemplo, se $\pi_1 = [x_2^2 - x_0x_1, x_1^2]$ (dado no Teorema 2.2.1), então

$$L_{\pi_1} = \left\{ [a(x_2^2 - x_0x_1) + bx_1^2] \in \mathcal{C} \mid [a : b] \in \mathbb{P}^1 \right\}.$$

A seguir, vamos determinar $L_{\pi_1} \cap \mathcal{H}$. De fato, conforme o Lema 1.4.1, $[F] \in L_{\pi_1} \cap \mathcal{H}$ se, e somente se $F = ax_2^2 - ax_0x_1 + bx_1^2$ para algum $[a : b] \in \mathbb{P}^1$ e $\det M_F = 0$ sendo

$$M_F = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}a & 0 \\ -\frac{1}{2}a & b & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}.$$

Note que $\det M_F = \frac{1}{4}a^3$. Assim, $a = 0$ é a única solução de $\det M_F = 0$ e possui multiplicidade 3. Logo, $L_{\pi_1} \cap \mathcal{H} = \{x_1^2\}$ consiste de um único ponto de multiplicidade três.¹³

Utilizando o mesmo raciocínio, calculamos as interseções das retas determinadas pelos representantes das órbitas descritas no Teorema 2.2.1 com a hipersuperfície \mathcal{H} , apresentados na Tabela 2.2 a seguir.

Observação 2.3.1. Considere $[F] \in \mathbb{P}(S_2)$ e $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ determinada por $T \in \text{Aut}(\mathbb{C})^3$. Sejam, M_F e $M_{T \bullet F}$ as matrizes associadas a $[F]$ e $[T \bullet F]$. Então verifica-se que

$$M_{T \bullet F} = [T]^{-1} M_F [T]$$

sendo $[T]$ a matriz associada ao isomorfismo \mathbb{C} -linear T na base canônica de \mathbb{C}^3 .

Assim, MCP deixam invariante o valor do determinante. O que nos permite concluir que a cardinalidade da interseção da reta com a hipersuperfície \mathcal{H} permanecem invariante. Logo, os resultados da Tabela 2.2 não dependem do representante escolhido em cada órbita.

¹³Visto que $a = 0$, obtemos $[a : b] = [0 : 1]$, que implica em $F = x_1^2$.

Tabela 2.2: Interseção das retas com \mathcal{H}

i	$L_{\pi_i} \cap \mathcal{H}$	Multiplicidades	$\det M_F$
1	$\{x_1^2\}$	3	$\frac{1}{4}a^3$
2	L_{π_2}	-	0
3	$\{x_1x_2\}$	3	$\frac{1}{4}a^3$
4	$\{x_0^2, x_1x_2\}$	1 e 2	$\frac{1}{4}ab^2$
5	$\{x_0x_1, (x_0 + x_1)x_2\}$	1 e 2	$\frac{1}{4}ab^2$
6	$\{x_1^2 - x_0^2, x_2^2 - x_0^2, x_1^2 - x_2^2\}$	1,1,1	$ab(a + b)$
7	L_{π_7}	-	0
8	L_{π_8}	-	0

Determinando a cardinalidade de $L_{\pi_i} \cap \Delta$

Após os cálculos realizados para obter a Tabela 2.2, resulta natural se perguntar pela cardinalidade de $L_{\pi_i} \cap \Delta$, ou seja, determinar quantos são os $[a : b] \in \mathbb{P}^2$ tais que $a \cdot F_1 + b \cdot F_2 \in \Delta$. Note que, a Tabela 2.2 já fornece respostas em alguns dos casos, faltando apenas verificar os casos $i = 2, 7$ e 8 . Por exemplo, se $\pi_2 = [x_0^2, x_1^2]$ e $ax_0^2 + bx_1^2 \in L_{\pi_2}$, temos

$$ax_0^2 + bx_1^2 \in \Delta \iff ax_0^2 + bx_1^2 = (b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2)^2 \text{ para algum } [b_0 : b_1 : b_2] \in \mathbb{P}^2.$$

A partir da igualdade polinomial¹⁴, segue que, $b_2 = 0$ e $b_0b_1 = 0$, em ambos casos ($b_0 = 0$ ou $b_1 = 0$), obtemos que $\#L_{\pi_2} \cap \Delta = 2$. Proseguindo de forma análoga, obtemos os resultados listados na Tabela 2.3, a seguir.

Tabela 2.3: Interseção das retas com Δ

i	$\#L_{\pi_i} \cap \Delta$
1	1
2	2
3	0
4	1
5	0
6	0
7	0
8	1

¹⁴ $ax_0^2 + bx_1^2 = b_0^2x_0^2 + b_1^2x_1^2 + b_2^2x_2^2 + b_0b_1x_0x_1 + b_0b_2x_0x_2 + b_1b_2x_1x_2$.

Observação 2.3.2. Segue da Tabela 2.3 que as retas determinadas pelos elementos de $G_2(S_2)$, admitem no máximo dois pontos que se correspondem com cônicas em Δ .

2.4 Dimensão das Órbitas

Nesta seção, vamos determinar as dimensões das órbitas listadas no Teorema 2.2.1. Para isso, usaremos os seguintes fatos:

Fato 1 : $\dim(\text{PGL}_n(\mathbb{C})) = (n + 1)^2 - 1$.

Fato 2 : Se \mathcal{O}_W é a órbita associada a $W \in G_2(S_2)$ sob a ação de $\text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ na Grassmanniana $G_d(S_2)$,¹⁵ então

$$\dim(\mathcal{O}_W) = 8 - \dim(E_W) \quad (2.5)$$

sendo $E_W = \{\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2) \mid \varphi \bullet W = W\}$ o estabilizador de W em $\text{Aut}(\mathbb{P}^2)$.

Observe que, se $\varphi \in E_W$ for determinada por $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^3)$ e $W = [F_1, F_2] \in G_2(S_2)$, então

$$[T_\bullet F_1, T_\bullet F_2] = [F_1, F_2] \implies \mathcal{Z}(F_1) \cap \mathcal{Z}(F_2) = \mathcal{Z}(T_\bullet F_1) \cap \mathcal{Z}(T_\bullet F_2). \quad (2.6)$$

De fato, $[T_\bullet F_1, T_\bullet F_2] = [F_1, F_2]$ implica em (i) $T_\bullet F_i = a_i F_1 + b_i F_2$ com a_i, b_i $i = 1, 2$ em \mathbb{C} e (ii) $F_i = c_i T_\bullet F_1 + d_i T_\bullet F_2$ com c_i, d_i $i = 1, 2$ em \mathbb{C} .

Se $p \in \mathcal{Z}(F_1) \cap \mathcal{Z}(F_2)$, então $F_i(p) = 0$ para $i = 1, 2$, logo (i) implica em $T_\bullet F_i = a_i F_1(p) + b_i F_2(p) = 0$. De onde concluímos que $p \in \mathcal{Z}(T_\bullet F_1) \cap \mathcal{Z}(T_\bullet F_2)$. Analogamente, prova-se a outra inclusão.

(I) Se $W = \pi_6 = [x_1^2 - x_0^2, x_2^2 - x_0^2]$, então $\dim(\mathcal{O}_W) = 8$.

Note que, $\mathcal{Z}(F_1) \cap \mathcal{Z}(F_2) = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ sendo $F_1 = x_1^2 - x_0^2$ e $F_2 = x_2^2 - x_0^2$ consiste de 4 pontos em posição geral. De fato, se $C = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$, então verifica-se que

Afirmção 1: Se $\varphi \in E_W$, então $\varphi(C) = C$.

De fato, $\varphi(C) = \varphi(\mathcal{Z}(F_1, F_2)) = \mathcal{Z}(T_\bullet F_1, T_\bullet F_2) \stackrel{(2.6)}{=} \mathcal{Z}(F_1, F_2) = C$.

Afirmção 2: $\Gamma_C := \{\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2) \mid \varphi(C) = C\}$ é um subgrupo¹⁶ de $\text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ finito.

De fato, lembremos que fixados $\{p_1, p_2, p_3, p_4\} \subset \mathbb{P}^2$ e $\{q_1, q_2, q_3, q_4\} \subset \mathbb{P}^2$ em posição geral, existe um único $\psi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $\psi(p_i) = q_i$ $i = 1, 2, 3, 4$.

¹⁵Lembremos que, se $W = [F_1, F_2] \in G_2(S_2)$ e $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ for determinada por $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^3)$, então $\varphi \bullet W := [T_\bullet F_1, T_\bullet F_2]$.

¹⁶Note que, claramente $Id \in \Gamma_C$. Se $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ temos que φ admite uma inversa φ^{-1} , daí $\varphi^{-1} \circ \varphi(C) = \varphi^{-1}(C) \implies C = \varphi^{-1}(C) \implies \varphi^{-1} \in \Gamma_C$. Por fim, se $\varphi, \psi \in \Gamma_C$ então $(\psi \circ \varphi)(C) = \psi(\varphi(C)) = \psi(C) = C \implies \psi \circ \varphi \in \Gamma_C$.

Assim, fixados $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ um elemento de Γ_C é determinado por uma permutação $\sigma \in S_4$. Mais precisamente, se $\sigma \in S_4$, então existe um único $\varphi_\sigma \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $\varphi_\sigma(p_i) = p_{\sigma(i)}$ para $i = 1, 2, 3, 4$. Com efeito, $\Gamma_C = \{\varphi_\sigma \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2) \mid \sigma \in S_4\}$. Logo, $|\Gamma_C| = |S_4| = 4! = 24$. Para concluir, note que a afirmação 1 implica que $E_W \subseteq \Gamma_C$. Entretanto, sendo Γ_C finito, segue que E_W é finito. Portanto, $\dim(E_W) = 0$. Por fim, o Fato 2 nos permite concluir que $\dim(\mathcal{O}_W) = 8$.

Observações 2.4.1. Para o cálculo das dimensões das órbitas com representante π_i com $i \in \{1, \dots, 8\}$ e $i \neq 6$, observe que:

- (a) $\text{SL}_n(\mathbb{C}) = \{A \in \text{GL}_n(\mathbb{C}) \mid \det A = 1\}$ é um subgrupo normal de $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ e a função $\Psi : \text{SL}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \text{PGL}_n(\mathbb{C})$ dada por $A \mapsto \overline{A}$ é um homomorfismo sobrejetivo de grupos tal que

$$\Psi^{-1}(\overline{A}) = \left\{ \xi A \in \text{SL}_n(\mathbb{C}) \mid \xi^{n+1} = 1 \right\}.$$

Por outro lado, segue do teorema dos isomorfismos que $\frac{\text{SL}_n(\mathbb{C})}{\ker(\Psi)} \cong \text{PGL}_n(\mathbb{C})$ e pela correspondência que o citado isomorfismo estabelece, que todo subgrupo H de $\text{PGL}_n(\mathbb{C})$ irá se identificar com um subgrupo da forma $\frac{H'}{\ker(\Psi)}$ sendo H' um subgrupo de $\text{SL}_n(\mathbb{C})$ contendo $\ker(\Psi)$. Entretanto, como $\ker(\Psi)$ é um grupo finito, concluímos que

$$\dim H = \dim H'.$$

Agora, como o estabilizador $E_{\pi_i} \cong H_i := \left\{ \overline{A} \in \text{PGL}_2(\mathbb{C}) \mid \varphi_A \in E_{\pi_i} \right\}$, segue que

$$\dim E_{\pi_i} = \dim H_i = \dim H'_i \text{ sendo } H'_i = \left\{ A \in \text{SL}_2(\mathbb{C}) \mid \varphi_A \in E_{\pi_i} \right\}.$$

- (b) Para o cálculo da dimensão de E_{π_i} , vamos considerar $\varphi \in E_W$ determinada por $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^3)$ tal que

$$\begin{aligned} T_{\bullet}x_0 &= ax_0 + bx_1 + cx_2, \\ T_{\bullet}x_1 &= a_1x_0 + b_1x_1 + c_1x_2, \\ T_{\bullet}x_2 &= a_2x_0 + b_2x_1 + c_2x_2. \end{aligned}$$

Salientamos que na análise nos sistemas gerados em cada caso (para $i \in \{1, \dots, 8\}$ e $i \neq 6$), abordamos apenas uma das possibilidades para elucidar tal procedimento, visto que os demais seguem de forma análoga.

- (II) Se $W = \pi_5 = [x_0x_1, (x_0 + x_1)x_2]$, então $\dim(\mathcal{O}_W) = 7$.

Seja $\varphi \in E_W$ determinada por $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^3)$. Logo,

$$[T_\bullet(x_0x_1), T_\bullet(x_2(x_0 + x_1))] = [x_0x_1, x_2(x_0 + x_1)]. \quad (2.7)$$

Note que,

$$\begin{aligned} T_\bullet(x_0x_1) &= (T_\bullet x_0) \cdot (T_\bullet x_1) = (ax_0 + bx_1 + cx_2) \cdot (a_1x_0 + b_1x_1 + c_1x_2) \\ &= aa_1x_0^2 + (ab_1 + a_1b)x_0x_1 + (ac_1 + a_1c)x_0x_2 + bb_1x_1^2 \\ &\quad + (bc_1 + b_1c)x_1x_2 + cc_1x_2^2. \end{aligned}$$

Segue de (2.7) que $T_\bullet(x_0x_1) = \mu x_0x_1 + \gamma x_2(x_0 + x_1)$. Logo, temos as seguintes relações:

$$\begin{cases} aa_1 = 0, bb_1 = 0, cc_1 = 0, \\ ab_1 + a_1b = \mu \text{ e } ac_1 + a_1c = bc_1 + b_1c = \gamma. \end{cases} \quad (2.8)$$

Assim, para o sistema acima temos a seguinte possibilidade:

- $a = c = 0$ ($b \neq 0$) e $b_1 = 0$.

Neste caso, das relações em (2.8) segue que $bc_1 = 0$ e como $b \neq 0$, então $c_1 = 0$. Logo, $T_\bullet x_0 = bx_1$ e $T_\bullet x_1 = a_1x_0$ com $a_1 \neq 0$. Segue que,

$$\begin{aligned} T_\bullet(x_2(x_0 + x_1)) &= (T_\bullet x_2) \cdot (T_\bullet x_0 + T_\bullet x_1) = (a_2x_0 + b_2x_1 + c_2x_2)(bx_1 + a_1x_0) \\ &= a_2a_1x_0^2 + (a_2b + a_1b_2)x_0x_1 + a_1c_2x_0x_2 + bb_2x_1^2 + bc_2x_1x_2. \end{aligned}$$

Novamente pela Equação (2.7) temos que

$$a_2a_1x_0^2 + (a_2b + a_1b_2)x_0x_1 + a_1c_2x_0x_2 + bb_2x_1^2 + bc_2x_1x_2 = \mu x_0x_1 + \gamma x_2(x_0 + x_1).$$

Assim,

$$\begin{cases} a_2a_1 = 0, bb_2 = 0, \\ a_2b + a_1b_2 = \mu \text{ e } a_1c_2 = bc_2 = \gamma. \end{cases}$$

Daí, sendo $a_1 \neq 0$ e $b \neq 0$ temos que $a_2 = 0$ e $b_2 = 0$ o que implica em $c_2 \neq 0$ e assim, $a_1c_2 = bc_2$ o que nos permite concluir que $a_1 = b$. Logo, $T_\bullet x_0 = bx_1$, $T_\bullet x_1 = bx_0$ e $T_\bullet x_2 = c_2x_2$.

Donde concluímos que a matriz associada ao isomorfismo T^{-1} é dada por:

$$[T^{-1}] = \begin{bmatrix} 0 & b & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 \end{bmatrix}.$$

Note que, $\det[T^{-1}] = -b^2c_2$. Tendo em consideração o item (a) na Observação 2.4.1 podemos supor que o determinante da matriz é igual a 1, assim segue que $c_2 = -\frac{1}{b^2}$. Logo,

$$[T^{-1}] = \begin{bmatrix} 0 & b & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{b^2} \end{bmatrix}.$$

Na qual temos apenas um parâmetro livre, o que nos permite concluir que a $\dim(E_W) = 1$. Portanto, pelo Fato 2.5 temos que $\dim(\mathcal{O}_W) = 7$.

(III) Se $W = \pi_4 = [x_0^2, x_1x_2]$, então $\dim(\mathcal{O}_W) = 6$.

Assumindo $\varphi \in E_W$ determinada por $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^3)$. Assim,

$$[T_\bullet(x_0^2), T_\bullet(x_1x_2)] = [x_0^2, x_1x_2]. \quad (2.9)$$

Note que,

$$\begin{aligned} T_\bullet(x_1x_2) &= (T_\bullet x_1) \cdot (T_\bullet x_2) = (a_1x_0 + b_1x_1 + c_1x_2) \cdot (a_2x_0 + b_2x_1 + c_2x_2) \\ &= a_1a_2x_0^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)x_0x_1 + (a_1c_2 + a_2c_1)x_0x_2 + b_1b_2x_1^2 \\ &\quad + (b_1c_2 + b_2c_1)x_1x_2 + c_1c_2x_2^2. \end{aligned}$$

Daí, segue de (2.9) que $T_\bullet(x_1x_2) = \mu x_0^2 + \gamma x_1x_2$. Logo,

$$\begin{cases} b_1b_2 = 0, c_1c_2 = 0, a_1b_2 + a_2b_1 = 0, a_1c_2 + a_2c_1 = 0, \\ a_1a_2 = \mu \text{ and } b_1c_2 + b_2c_1 = \gamma. \end{cases} \quad (2.10)$$

Assim, para o sistema acima segue a seguinte possibilidade:

- $a_1 = b_1 = 0$ ($c_1 \neq 0$) e $a_2 = c_2 = 0$ ($b_2 \neq 0$).

Sendo assim, temos que $T_\bullet x_1 = c_1x_2$ e $T_\bullet x_2 = b_2x_1$. Logo,

$$T_\bullet(x_0^2) = (ax_0 + bx_1 + cx_2)^2 = a^2x_0^2 + b^2x_1^2 + c^2x_2^2 + 2abx_0x_1 + 2acx_0x_2 + 2bcx_1x_2.$$

Novamente pela Equação (2.9) temos que

$$a^2x_0^2 + b^2x_1^2 + c^2x_2^2 + 2abx_0x_1 + 2acx_0x_2 + 2bcx_1x_2 = \mu x_0^2 + \gamma x_1x_2.$$

Assim, $a \neq 0$ e $b = c = 0$ no qual temos $T_\bullet x_0 = ax_0$. Logo, a matriz associada ao isomorfismo T^{-1} é dada por:

$$[T^{-1}] = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 \\ 0 & b_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Note que, $\det[T^{-1}] = -ab_2c_1$. Novamente, podemos supor o determinante igual a 1, assim $a = -\frac{1}{b_2c_1}$. Logo,

$$[T^{-1}] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{b_2c_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 \\ 0 & b_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Do qual temos dois parâmetros livres, o que nos permite concluir que $\dim(E_W) = 2$. Portanto, pelo Fato 2.5 temos que $\dim(\mathcal{O}_W) = 6$.

(IV) Se $W = \pi_3 = [x_2^2 - x_0x_1, x_1x_2]$, então $\dim(\mathcal{O}_W) = 6$.

Se $\varphi \in E_W$ for determinada por $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^3)$, então

$$[T_\bullet(x_2^2 - x_0x_1), T_\bullet(x_1x_2)] = [x_2^2 - x_0x_1, x_1x_2]. \quad (2.11)$$

Note que,

$$\begin{aligned} T_\bullet(x_1x_2) &= (T_\bullet x_1) \cdot (T_\bullet x_2) = (a_1x_0 + b_1x_1 + c_1x_2) \cdot (a_2x_0 + b_2x_1 + c_2x_2) \\ &= a_1a_2x_0^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)x_0x_1 + (a_1c_2 + a_2c_1)x_0x_2 + b_1b_2x_1^2 \\ &\quad + (b_1c_2 + b_2c_1)x_1x_2 + c_1c_2x_2^2. \end{aligned}$$

Daí, segue de (2.11) que $T_\bullet(x_1x_2) = \mu x_2^2 - \mu x_0x_1 + \gamma x_1x_2$. Deste modo,

$$\begin{cases} aa_1 = 0, b_1b_2 = 0, a_1c_2 + a_2c_1 = 0, \\ c_1c_2 = \mu, a_1b_2 + a_2b_1 = -\mu \text{ e } b_1c_2 + b_2c_1 = \gamma. \end{cases} \quad (2.12)$$

Assim, para o sistema acima temos a seguinte possibilidade:

- $a_1 = c_1 = 0$ ($b_1 \neq 0$) e $a_2 = b_2 = 0$ ($c_2 \neq 0$).

Logo $T_{\bullet}x_1 = b_1x_1$ e $T_{\bullet}x_2 = c_2x_2$ e segue que,

$$\begin{aligned} T_{\bullet}(x_2^2 - x_0x_1) &= (T_{\bullet}x_2^2) - (T_{\bullet}x_0) \cdot (T_{\bullet}x_1) \\ &= c_2^2x_2^2 - (ax_0 + bx_1 + cx_2)b_1x_1 \\ &= c_2x_2^2 - ab_1x_0x_1 - bb_1x_1^2 - cb_1x_1x_2. \end{aligned}$$

Outra vez, pela Equação (2.11) temos que

$$c_2x_2^2 - ab_1x_0x_1 - bb_1x_1^2 - cb_1x_1x_2 = \mu x_2^2 - \mu x_0x_1 + \gamma x_1x_2.$$

Sendo, $b_1 \neq 0$ segue que $b = 0$ e $c_2^2 = ab_1$ o que implica em $a \neq 0$, assim $a = \frac{c_2^2}{b_1}$. Logo, $T_{\bullet}x_0 = ax_0 + cx_2$. Deste modo, a matriz associada ao isomorfismo T^{-1} é dada por:

$$[T^{-1}] = \begin{bmatrix} \frac{c_2^2}{b_1} & 0 & c \\ 0 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 \end{bmatrix}.$$

Note que, $\det[T^{-1}] = c_2^3$. Mais uma vez, podemos supor o determinante igual a 1, assim $c_2 = 1$. Logo,

$$[T^{-1}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{b_1} & 0 & c \\ 0 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Desta forma, $\dim(E_W) = 2$. Portanto, $\dim(\mathcal{O}_W) = 6$.

(V) Se $W = \pi_1 = [x_2^2 - x_0x_1, x_1^2]$, então $\dim(\mathcal{O}_W) = 5$.

Assumindo $\varphi \in E_W$ determinada por $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^3)$. Assim,

$$[T_{\bullet}(x_2^2 - x_0x_1), T_{\bullet}x_1^2] = [x_2^2 - x_0x_1, x_1^2]. \quad (2.13)$$

Note que,

$$\begin{aligned} T_{\bullet}(x_1^2) &= (a_1x_0 + b_1x_1 + c_1x_2)^2 \\ &= a_1^2x_0^2 + b_1^2x_1^2 + c_1^2x_2^2 + 2a_1b_1x_0x_1 + 2a_1c_1x_0x_2 + 2b_1c_1x_1x_2. \end{aligned}$$

Daí, segue de (2.13) que $T_{\bullet}(x_1^2) = \mu(x_2^2 - x_0x_1) + \gamma x_1^2 = \mu x_2^2 - \mu x_0x_1 + \gamma x_1^2$.

Deste modo,

$$\begin{cases} a_1^2 = 0, 2a_1c_1 = 0, 2b_1c_1 = 0, \\ b_1^2 = \gamma \text{ e } c_1^2 = -2a_1b_1 = \mu. \end{cases} \quad (2.14)$$

Note que, em (2.14) temos que $a_1 = 0$ implica que $c_1 = 0$ e consequentemente $b_1 \neq 0$. Logo, $T_\bullet x_1 = b_1 x_1$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} T_\bullet(x_2^2 - x_0x_1) &= (T_\bullet x_2^2) - (T_\bullet x_0) \cdot (T_\bullet x_1) \\ &= (a_2x_0 + b_2x_1 + c_2x_2)^2 - (ax_0 + bx_1 + cx_2)b_1x_1 \\ &= a_2^2x_0^2 + (b_2^2 - bb_1)x_1^2 + c_2^2x_2^2 + (2a_2b_2 - ab_1)x_0x_1 \\ &\quad + 2a_2c_2x_0x_2 + (2b_2c_2 - cb_1)x_1x_2. \end{aligned}$$

Mais uma vez pela Equação (2.13) temos que $T_\bullet(x_2^2 - x_0x_1) = \mu x_2^2 - \mu x_0x_1 + \gamma x_1^2$. Logo,

$$\begin{cases} a_2^2 = 0, 2a_2c_2 = 0, 2b_2c_2 - cb_1 = 0, \\ b_2^2 - bb_1 = \gamma \text{ e } c_2^2 = -2a_2b_2 - ab_1 = \mu. \end{cases} \quad (2.15)$$

Sendo, $a_2 = 0$ segue que $c_2^2 = ab_1$ o que implica em $a \neq 0$, assim $a = \frac{c_2^2}{b_1}$. Além disso, $c = \frac{2b_2c_2}{b_1}$. Daí, $T_\bullet x_0 = ax_0 + bx_1 + cx_2$ e $T_\bullet x_2 = b_2x_1 + c_2x_2$. Deste modo, a matriz associada ao isomorfismo T^{-1} é dada por:

$$[T^{-1}] = \begin{bmatrix} \frac{c_2^2}{b_1} & b & \frac{2b_2c_2}{b_1} \\ 0 & b_1 & 0 \\ 0 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}.$$

Note que, $\det[T^{-1}] = c_2^3$. De novo, podemos supor o determinante igual a 1, assim $c_2 = 1$. Logo,

$$[T^{-1}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{b_1} & b & \frac{2b_2}{b_1} \\ 0 & b_1 & 0 \\ 0 & b_2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Desta forma, $\dim(E_W) = 3$. Portanto, $\dim(\mathcal{O}_W) = 5$.

(VI) Se $W = \pi_2 = [x_0^2, x_1^2]$, então $\dim(\mathcal{O}_W) = 4$.

2. Órbitas sob a ação de $\text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ em $G_2(S_2)$

Mais uma vez, suponha $\varphi \in E_W$ determinada por $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^3)$. Assim,

$$[T_{\bullet}x_0^2, T_{\bullet}x_1^2] = [x_0^2, x_1^2]. \quad (2.16)$$

Note que,

$$T_{\bullet}(x_0^2) = (ax_0 + bx_1 + cx_2)^2 = a^2x_0^2 + b^2x_1^2 + c^2x_2^2 + 2abx_0x_1 + 2acx_0x_2 + 2bcx_1x_2.$$

e

$$T_{\bullet}(x_1^2) = (a_1x_0 + b_1x_1 + c_1x_2)^2 = a_1^2x_0^2 + b_1^2x_1^2 + c_1^2x_2^2 + 2a_1b_1x_0x_1 + 2a_1c_1x_0x_2 + 2b_1c_1x_1x_2.$$

Segue de (2.16) que

$$\begin{cases} c^2 = 0, ab = 0, ac = 0, bc = 0, \\ a^2 = \mu \text{ e } b^2 = \gamma \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} c_1^2 = 0, a_1b_1 = 0, a_1c_1 = 0, b_1c_1 = 0, \\ a_1^2 = \mu \text{ e } b_1^2 = \gamma \end{cases} \quad (2.17)$$

Sendo assim, temos a seguinte possibilidade:

- $a = 0$ e $b_1 = 0$.

Neste caso, segue de (2.17) que $c = c_1 = 0$. Logo, $T_{\bullet}x_0 = bx_1$, $T_{\bullet}x_1 = a_1x_0$ e $T_{\bullet}x_2 = a_2x_0 + b_2x_1 + c_2x_2$.

Deste modo, a matriz associada ao isomorfismo T^{-1} é dada por:

$$[T^{-1}] = \begin{bmatrix} 0 & b & 0 \\ a_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}.$$

Assim, $\det[T^{-1}] = -a_1bc_2$. Supondo o determinante igual a 1, temos $b = -\frac{1}{a_1c_2}$. Logo,

$$[T^{-1}] = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{a_1c_2} & 0 \\ a_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}.$$

Desta forma, $\dim(E_W) = 4$. Portanto, $\dim(\mathcal{O}_W) = 4$.

(VII) Se $W = \pi_7 = [x_0x_1, x_0x_2]$, então $\dim(\mathcal{O}_W) = 4$.

Assumindo $\varphi \in E_W$ determinada por $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^3)$. Assim,

$$[T_{\bullet}(x_0x_1), T_{\bullet}(x_0x_2)] = [x_0x_1, x_0x_2]. \quad (2.18)$$

Note que,

$$\begin{aligned} T_{\bullet}(x_0x_2) &= (T_{\bullet}x_0) \cdot (T_{\bullet}x_2) = (ax_0 + bx_1 + cx_2) \cdot (a_2x_0 + b_2x_1 + c_2x_2) \\ &= aa_2x_0^2 + (ab_2 + a_2b)x_0x_1 + (ac_2 + a_2c)x_0x_2 + bb_2x_1^2 \\ &\quad + (bc_2 + b_2c)x_1x_2 + cc_2x_2^2. \end{aligned}$$

Daí, segue de (2.18) que $T_{\bullet}(x_0x_2) = \mu x_0x_1 + \gamma x_0x_2$. Logo,

$$\begin{cases} aa_2 = 0, bb_2 = 0, cc_2 = 0, ac_2 + a_2c = 0, \\ ab_2 + a_2b = \mu \text{ e } bc_2 + b_2c = \gamma. \end{cases} \quad (2.19)$$

Assim, para o sistema acima segue a seguinte possibilidade:

- $b = c = 0$ ($a \neq 0$) e $a_2 = 0$.

Sendo assim, temos que $T_{\bullet}x_0 = ax_0$. Segue que,

$$T_{\bullet}(x_0x_1) = ax_0 \cdot (a_1x_0 + b_1x_1 + c_1x_2) = aa_1x_0^2 + ab_1x_0x_1 + ac_1x_0x_2.$$

Pela Equação (2.18), temos que $aa_1x_0^2 + ab_1x_0x_1 + ac_1x_0x_2 = \mu x_0x_1 + \gamma x_0x_2$.

Assim, sendo $a \neq 0$ então $a_1 = 0$. Daí $T_{\bullet}x_1 = b_1x_1 + c_1x_2$ e $T_{\bullet}x_2 = b_2x_1 + c_2x_2$.

Logo,

$$[T^{-1}] = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}.$$

Note que, $\det[T^{-1}] = a(b_1c_2 - b_2c_1)$. Novamente, podemos supor o determinante igual a 1, assim $a = -\frac{1}{(b_1c_2 - b_2c_1)}$. Logo,

$$[T^{-1}] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{(b_1c_2 - b_2c_1)} & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}.$$

Do qual temos $\dim(E_W) = 4$. Portanto, pelo Fato 2.5 temos que $\dim(\mathcal{O}_W) = 4$.

(VIII) Se $W = \pi_8 = [x_0^2, x_0x_1]$, então $\dim(\mathcal{O}_W) = 3$.

Mais uma vez, suponha $\varphi \in E_W$ determinada por $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^3)$. Assim,

$$[T_{\bullet}x_0^2, T_{\bullet}x_0x_1] = [x_0^2, x_0x_1]. \quad (2.20)$$

Note que,

$$T_{\bullet}(x_0^2) = (ax_0 + bx_1 + cx_2)^2 = a^2x_0^2 + b^2x_1^2 + c^2x_2^2 + 2abx_0x_1 + 2acx_0x_2 + 2bcx_1x_2.$$

Daí, por (2.20) segue que

$$a^2x_0^2 + b^2x_1^2 + c^2x_2^2 + 2abx_0x_1 + 2acx_0x_2 + 2bcx_1x_2 = \mu x_0^2 + \gamma x_0x_1.$$

Temos que

$$\begin{cases} ac = 0, bc = 0, b^2 = 0, c^2 = 0, \\ a^2 = \mu \text{ e } ab = \gamma. \end{cases} \quad (2.21)$$

Logo, $T_{\bullet}x_0 = ax_0$ com $a \neq 0$. Sendo assim,

$$T_{\bullet}(x_0x_1) = ax_0(a_1x_0 + b_1x_1 + c_1x_2) = aa_1x_0^2 + ab_1x_0x_1 + ac_1x_0x_2.$$

Uma vez que $a \neq 0$ e pela Equação (2.20) concluímos que $c_1 = 0$. Daí, $T_{\bullet}x_1 = a_1x_0 + b_1x_1$ e $T_{\bullet}x_2 = a_2x_0 + b_2x_1 + c_2x_2$. Logo,

$$[T^{-1}] = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}.$$

Note que, $\det[T^{-1}] = ab_1c_2$. Novamente, podemos supor o determinante igual a 1, assim $a = \frac{1}{b_1c_2}$. Logo,

$$[T^{-1}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{b_1c_2} & 0 & 0 \\ a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}.$$

Do qual temos $\dim(E_W) = 5$. Portanto, pelo Fato 2.5 temos que $\dim(\mathcal{O}_W) = 3$.

2.5 Especialização das órbitas em $G_2(S_2)$ sob a ação de $\text{Aut}(\mathbb{P}^2)$

Definição 2.5.1. Sejam \mathcal{O}_W e \mathcal{O}_{W_0} órbitas obtidas pela ação de $\text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ em $G_2(S_2)$. Dizemos que \mathcal{O}_W especializa em \mathcal{O}_{W_0} , neste caso usaremos a notação $\mathcal{O}_W \longrightarrow \mathcal{O}_{W_0}$, se

existe $\gamma : I \longrightarrow G_2(S_2)$ sendo $I \subseteq \mathbb{R}$ uma vizinhança do zero tal que

$$\gamma(t) \in \mathcal{O}_W, \forall t \neq 0 \text{ e } \gamma(0) \in \mathcal{O}_{W_0}.$$

A seguir, determinaremos a especialização das órbitas descritas no Teorema 2.2.1 seguindo uma ordem decrescente em relação as suas dimensões.

$$\boxed{\mathcal{O}_{\pi_6} \longrightarrow \mathcal{O}_{\pi_5}} \text{ sendo } \pi_6 = [x_1^2 - x_0^2, x_2^2 - x_0^2] \text{ e } \pi_5 = [x_0x_1, x_2(x_0 + x_1)].$$

Considere $\gamma : I \longrightarrow G_2(S_2)$ definida por

$$\gamma(t) = [x_1(x_0 - tx_2), x_2(x_0 + x_1)] \in G_2(S_2).$$

Note que, $\gamma(0) = [x_0x_1, x_2(x_0 + x_1)] = \pi_5$. Logo, $\gamma(0) \in \mathcal{O}_{\pi_5}$. Agora, considere $t \neq 0$ e observe que

$$\mathcal{Z}(\gamma(t)) = \mathcal{Z}(x_1(x_0 - tx_2), x_2(x_0 + x_1)) = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$$

sendo $p_1 = [1 : 0 : 0]$, $p_2 = [0 : 1 : 0]$, $p_3 = [0 : 0 : 1]$ e $p_4 = [t : -t : 1]$.¹⁷ Assim, segue do Lema 2.2.1 que $\mathcal{O}_{\gamma(t)} = \mathcal{O}_{\pi_6} \forall t \neq 0$. Logo, $\gamma(t) \in \mathcal{O}_{\pi_6} \forall t \neq 0$. Portanto, temos que \mathcal{O}_{π_6} especializa \mathcal{O}_{π_5} .

$$\boxed{\mathcal{O}_{\pi_5} \longrightarrow \mathcal{O}_{\pi_4}} \text{ sendo } \pi_5 = [x_0x_1, x_2(x_0 + x_1)] \text{ e } \pi_4 = [x_0^2, x_1x_2].$$

Considere $\gamma : I \longrightarrow G_2(S_2)$ definida por

$$\gamma(t) = [x_0(x_0 + tx_1), x_2(tx_0 + x_1)] \in G_2(S_2).$$

Note que, $\gamma(0) = [x_0^2, x_1x_2] = \pi_4$. Logo, $\gamma(0) \in \mathcal{O}_{\pi_4}$. Agora, considere $t \neq 0 \in I$, daí calculando $\mathcal{Z}(\gamma(t))$ obtemos¹⁸

$$p_1 = [0 : 1 : 0], p_2 = [t : 1 : 0] \text{ e } p_3 = [0 : 0 : 1]$$

¹⁷De fato, temos as seguintes interseções (entre as retas componentes das cônicas):

$$\begin{cases} x_1 = 0 \text{ e } x_2 = 0 \implies [1 : 0 : 0] = p_1 \\ x_0 - tx_2 = 0 \text{ e } x_2 = 0 \implies x_0 = x_2 = 0 \implies [0 : 1 : 0] = p_2 \\ x_1 = 0 \text{ e } x_0 + x_1 = 0 \implies x_0 = x_1 = 0 \implies [0 : 0 : 1] = p_3 \\ x_0 - tx_2 = 0 \text{ e } x_0 + x_1 = 0 \implies x_0 = -x_1 \text{ e } tx_2 = x_0 \implies [tx_0 : -tx_0 : x_0] = [t : -t : 1] = p_4. \end{cases}$$

¹⁸De fato, temos as seguintes interseções:

$$\begin{cases} x_0 = 0 \text{ e } x_2 = 0 \implies [0 : 1 : 0] = p_1 \\ x_0 - tx_1 = 0 \text{ e } x_2 = 0 \implies x_0 = tx_1 \implies [t : 1 : 0] = p_2 \\ x_0 = 0 \text{ e } x_0 + tx_1 = 0 \implies x_0 = x_1 = 0 \implies [0 : 0 : 1] = p_3 \\ x_0 - tx_1 = 0 \text{ e } tx_0 + x_1 = 0 \implies [0 : 0 : 1] = p_3. \end{cases}$$

sendo p_3 de multiplicidade dois. Assim, como $\#\mathcal{Z}(\gamma(t)) = 3$, segue da Proposição 2.2.1 que $\mathcal{O}_{\gamma(t)} = \mathcal{O}_{\pi_5}$ para qualquer $t \neq 0$. Logo, $\gamma(t) \in \mathcal{O}_{\pi_5}$ para qualquer $t \neq 0$.

$$\boxed{\mathcal{O}_{\pi_5} \longrightarrow \mathcal{O}_{\pi_3}} \text{ sendo } \pi_5 = [x_0x_1, x_2(x_0 + x_1)] \text{ e } \pi_3 = [x_2^2 - x_0x_1, x_1x_2].$$

Seja $\gamma : I \longrightarrow G_2(S_2)$ definida por

$$\gamma(t) = [x_2^2 - x_0x_1, x_2(tx_2 + x_1)] \in G_2(S_2).$$

Para $t = 0$ segue que $\gamma(0) = [x_2^2 - x_0x_1, x_1x_2] = \pi_3$. Logo, $\gamma(0) \in \mathcal{O}_{\pi_3}$. Agora, calculando $\mathcal{Z}(\gamma(t))$ para $t \neq 0$, obtemos¹⁹

$$p_1 = [1 : 0 : 0], p_2 = [0 : 1 : 0] p_3 = [1 : t^2 : -t].$$

Assim, como $\#\mathcal{Z}(\gamma(t)) = 3$, novamente pela Proposição 2.2.1 segue que $\mathcal{O}_{\gamma(t)} = \mathcal{O}_{\pi_5} \forall t \neq 0$. Logo, $\gamma(t) \in \mathcal{O}_{\pi_5} \forall t \neq 0$.

$$\boxed{\mathcal{O}_{\pi_3} \longrightarrow \mathcal{O}_{\pi_1}} \text{ sendo } \pi_3 = [x_2^2 - x_0x_1, x_1x_2] \text{ e } \pi_1 = [x_2^2 - x_0x_1, x_1^2].$$

Seja $\gamma : I \longrightarrow G_2(S_2)$ definida por

$$\gamma(t) = [x_2^2 - x_0x_1, x_1(tx_2 + x_1)] \in G_2(S_2).$$

Para $t = 0$ segue que $\gamma(0) = [x_2^2 - x_0x_1, x_1^2] = \pi_1$. Logo, $\gamma(0) \in \mathcal{O}_{\pi_1}$. Agora, se $t \neq 0 \in I$, tem-se que $\mathcal{Z}(\gamma(t)) = \{p, q\}$ sendo²⁰ $p = [1 : 0 : 0]$ e $q = [1 : t^2 : -t]$.

Note que,

$$R_p^{x_2}(x_2^2 - x_0x_1, x_1(x_1 + tx_2)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -x_0x_1 \\ tx_1 & x_1^2 & 0 \\ 0 & tx_1 & x_1^2 \end{vmatrix} = x_1^4 - t^2x_0x_1^3 = x_1^3(x_1 - t^2x_0)$$

sendo $t \neq 0$ segue que $I_p(x_2^2 - x_0x_1, x_1(x_1 + tx_2)) = 3$. Como $\#\mathcal{Z}(\gamma(t)) = 2$ e pelo Teorema 2.2.1 podemos concluir que $\mathcal{O}_{\gamma(t)} = \mathcal{O}_{\pi_3} \forall t \neq 0$. Portanto, $\gamma(t) \in \mathcal{O}_{\pi_3} \forall t \neq 0$.

¹⁹Pois

$$\begin{cases} x_2^2 - x_0x_1 = 0 \text{ e } x_2 = 0 \implies [1 : 0 : 0] = p_1 \text{ ou } [0 : 1 : 0] = p_2 \\ tx_2 + x_1 = 0 \text{ e } x_2^2 - x_0x_1 = 0 \implies x_1 = -tx_2 \implies x_2^2 + tx_2x_0 = 0 \implies x_2(x_2 + tx_0) = 0 \\ x_2 = 0 \text{ ou } x_2 + tx_0 = 0 \implies [1 : 0 : 0] = p_1 \text{ ou } x_2 = -tx_0 \text{ e } x_1 = t^2x_0 \\ \implies [x_0 : t^2x_0 : -tx_0] = [1 : t^2 : -t] = p_3 \text{ com } t \neq 0. \end{cases}$$

²⁰

$$\begin{cases} x_2^2 - x_0x_1 = 0 \text{ e } x_1 = 0 \implies [1 : 0 : 0] = p \\ tx_2 + x_1 = 0 \text{ e } x_2^2 - x_0x_1 = 0 \implies [1 : 0 : 0] = p \text{ ou } [1 : t^2 : -t] = q \text{ com } t \neq 0. \end{cases}$$

$$\boxed{\mathcal{O}_{\pi_4} \longrightarrow \mathcal{O}_{\pi_1}} \text{ sendo } \pi_4 = [x_0^2, x_1x_2] \text{ e } \pi_1 = [x_2^2 - x_0x_1, x_1^2].$$

Seja $\gamma : I \longrightarrow G_2(S_2)$ definida por

$$\gamma(t) = [x_2^2 - x_0x_1, (tx_2 + x_1)^2] \in G_2(S_2).$$

Como $\gamma(0) = [x_2^2 - x_0x_1, x_1^2] = \pi_1$. Logo, $\gamma(0) \in \mathcal{O}_{\pi_1}$. Agora, se $t \neq 0 \in I$, então $\mathcal{Z}(\gamma(t)) = \{p, q\}$ sendo $p = [1 : 0 : 0]$ e $q = [1 : t^2 : -t]$.

Note que,

$$\begin{aligned} R_p^{x_2}(x_2^2 - x_0x_1, (x_1 + tx_2)^2) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -x_0x_1 \\ 2tx_1 & \alpha & 0 \\ 0 & 2tx_1 & \alpha \end{vmatrix} = x_1^4 + 2tx_0x_1^3 + t^2x_0^2x_1^2 - 4t^2x_0x_1^3 \\ &= x_1^2(x_1^2 + (2t - 4t^2)x_0x_1 + t^2x_0^2). \end{aligned}$$

com $\alpha = x_1^2 + tx_0x_1$. Sendo $t \neq 0$ segue que $I_p(x_2^2 - x_0x_1, (x_1 + tx_2)^2) = 2$. Como $\#\mathcal{Z}(\gamma(t)) = 2$ e pelo Teorema 2.2.1 podemos concluir que $\mathcal{O}_{\gamma(t)} = \mathcal{O}_{\pi_4} \forall t \neq 0$. Portanto, $\gamma(t) \in \mathcal{O}_{\pi_4} \forall t \neq 0$.

$$\boxed{\mathcal{O}_{\pi_1} \longrightarrow \mathcal{O}_{\pi_2}} \text{ sendo } \pi_1 = [x_2^2 - x_0x_1, x_1^2] \text{ e } \pi_2 = [x_0^2, x_1^2].$$

A menos de uma mudança de representante, vamos considerar $\pi_1 = [x_0^2 - x_1x_2, x_1^2]$. Assim, seja $\gamma : I \longrightarrow G_2(S_2)$ definida por

$$\gamma(t) = [x_0^2 - tx_1x_2, x_1^2] \in G_2(S_2).$$

Temos que $\gamma(0) = [x_0^2, x_1^2] = \pi_2$. Logo, $\gamma(0) \in \mathcal{O}_{\pi_2}$. Agora, se $t \neq 0 \in I$, então $\mathcal{Z}(\gamma(t)) = \{p\}$ sendo $p = [0 : 0 : 1]$.

Note que, pelo Teorema 2.2.1 temos duas possibilidades para $\gamma(t)$: $\gamma(t) \in \mathcal{O}_{\pi_1}$ ou $\gamma(t) \in \mathcal{O}_{\pi_2}$. Porém, pela Tabela 2.2 percebe-se que o determinante obtido pela interseção da reta que tem como representante a órbita de π_2 com a hipersuperfície \mathcal{H} é nulo, conclui-se que todos os elementos que pertencem \mathcal{O}_{π_2} são gerados por elementos singulares. Sendo $t \neq 0$, tem-se que $x_0^2 - tx_1x_2$ define uma cônica não singular.²¹

Assim, concluímos que $\gamma(t) \in \mathcal{O}_{\pi_1} \forall t \neq 0$.

$$\boxed{\mathcal{O}_{\pi_2} \longrightarrow \mathcal{O}_{\pi_8}} \text{ sendo } \pi_2 = [x_0^2, x_1^2] \text{ e } \pi_8 = [x_0^2, x_0x_1].$$

$$\det M_F = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}t \\ 0 & -\frac{1}{2}t & 0 \end{vmatrix} = \frac{t^2}{4} \neq 0.$$

Defina $\gamma : I \longrightarrow G_2(S_2)$ por

$$\gamma(t) = [x_0^2, x_1(x_0 + tx_1)] \in G_2(S_2).$$

Para $t = 0$ segue que $\gamma(0) = [x_0^2, x_0x_1] = \pi_8$. Logo, $\gamma(0) \in \mathcal{O}_{\pi_8}$. Agora, se $t \neq 0 \in I$, então $\mathcal{Z}(\gamma(t)) = \{p\}$ sendo $p = [0 : 0 : 1]$.

Novamente, pelo Teorema 2.2.1 temos duas possibilidades para $\gamma(t)$: $\gamma(t) \in \mathcal{O}_{\pi_1}$ ou $\gamma(t) \in \mathcal{O}_{\pi_2}$. Porém, pela Tabela 2.2 percebe-se que o determinante obtido pela interseção da reta que tem como representante a órbita de π_1 com a hipersuperfície \mathcal{H} é não nulo e consiste de um único ponto, ou seja, só admite um ponto singular. No entanto, para $\gamma(t)$ temos dois elementos singulares o que permite concluir que $\gamma(t) \in \mathcal{O}_{\pi_2}$ para qualquer $t \neq 0$ pois \mathcal{O}_{π_2} possui todos os elementos singulares.

$$\boxed{\mathcal{O}_{\pi_7} \longrightarrow \mathcal{O}_{\pi_8}} \text{ sendo } \pi_2 = [x_0x_1, x_0x_2] \text{ e } \pi_8 = [x_0^2, x_0x_1].$$

Defina $\gamma : I \longrightarrow G_2(S_2)$ dada por

$$\gamma(t) = [x_0x_1, x_0(x_0 + tx_2)] \in G_2(S_2).$$

Para $t = 0$ segue que $\gamma(0) = [x_0x_1, x_0^2] = [x_0^2, x_0x_1] = \pi_8$. Logo, $\gamma(0) \in \mathcal{O}_{\pi_8}$. Agora, como $\{x_0, x_1, x_0 + tx_2\}$ é LI para $t \neq 0$, segue da prova do item 5. da Proposição 2.2.1 que $\gamma(t) \in \mathcal{O}_{\pi_2}$ para qualquer $t \neq 0$.

Capítulo 3

Classificação das órbitas em $G_3(S_2)$ sob a ação de $\text{Aut}(\mathbb{P}^2)$

Neste capítulo, estendemos a análise feita em $G_2(S_2)$ para $G_3(S_2)$. Nosso objetivo é classificar as órbitas sob a ação do grupo $\text{Aut}(\mathbb{P}^2)$, explorando as propriedades geométricas e algébricas da interseção desses subespaços com a hipersuperfície \mathcal{H} que parametriza cônicas singulares.

De fato, a cada $W \in G_3(S_2)$ vamos associar um plano $\pi_W \subseteq \mathbb{P}^5$ e estudar a interseção $\Gamma_W := \pi_W \cap \mathcal{H}_{\mathbb{P}^5}$. Essa interseção, pode ser o próprio plano π_W ou uma curva cúbica plana. A natureza de Γ_W — singular ou não singular — desempenha um papel central na classificação das órbitas. Por fim, vamos calcular a dimensão e determinar a especialização em apenas um caso para elucidar o procedimento.

3.1 Associação do plano $\pi_W \subseteq \mathbb{P}^5$ a cada $W \in G_3(S_2)$

Vamos começar lembrando dois resultados preliminares em \mathbb{P}^n ($n \geq 3$). Considere $P_i = [v_i] \in \mathbb{P}^n$ para $i = 1, 2, 3$, verifica-se que:

- P_1, P_2, P_3 são não colineares se, e somente se, $\{v_1, v_2, v_3\}$ é LI ;
- Se P_1, P_2, P_3 são não colineares, então existe um único plano contendo P_1, P_2 e P_3 , que denotaremos por $\langle P_1, P_2, P_3 \rangle$.

A seguir, considere $\Omega : \mathbb{P}^5 \rightarrow \mathcal{C}$ definido em (1.9) no Capítulo 1. Assim, se $W = [F_1, F_2, F_3] \in G_3(S_2)$, então considere $p_i = \Omega^{-1}(F_i)$ para $i = 1, 2, 3$. Observe que se

$F_i = a_{i0}x_0^2 + a_{i1}x_0x_1 + \dots + a_{i5}x_2^2$, então $p_i = [v_i]$ sendo $v_i = (a_{i0}, \dots, a_{i5})$ para $i = 1, 2, 3$.

Lema 3.1.1. *Com as notações acima, verifica-se que: $\{v_1, v_2, v_3\}$ é LI se, e somente se, $\{F_1, F_2, F_3\}$ é LI.*

Demonstração. Considere $A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{C}$. Note que

$$\sum_{i=1}^3 A_i v_i = \vec{0} \iff A_1 a_{1j} + A_2 a_{2j} + A_3 a_{3j} = 0, \quad j = 0, \dots, 5 \iff \sum_{i=1}^3 A_i F_i = 0.$$

Daí, $\{v_1, v_2, v_3\}$ é LI se, e somente se, $\{F_1, F_2, F_3\}$ é LI. \square

Assim, obtemos o plano $\langle p_1, p_2, p_3 \rangle$ em \mathbb{P}^5 . A seguir, mostraremos que esse plano independe da escolha da base de $W \in G_3(S_2)$. De fato, se $W = [F_1, F_2, F_3] = [G_1, G_2, G_3]$ então considere $p_i = \Omega^{-1}(F_i)$ e $q_i = \Omega^{-1}(G_i)$ para $i = 1, 2, 3$. Note que, para verificar a igualdade $\langle p_1, p_2, p_3 \rangle = \langle q_1, q_2, q_3 \rangle$, basta mostrar que $q_i \in \langle p_1, p_2, p_3 \rangle$, $i = 1, 2, 3$. Visto que $G_i \in [F_1, F_2, F_3]$, para todo i , segue que

$$G_i = \alpha_i F_1 + \beta_i F_2 + \gamma_i F_3 \text{ para alguns } \alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{C}. \quad (3.1)$$

Note que se $F_i = a_{i0}x_0^2 + a_{i1}x_0x_1 + \dots + a_{i5}x_2^2$ então $p_i = [v_i]$ sendo $v_i = (a_{i0}, \dots, a_{i5})$. E analogamente, se $G_i = b_{i0}x_0^2 + b_{i1}x_0x_1 + \dots + b_{i5}x_2^2$ então $q_i = [u_i]$ sendo $u_i = (b_{i0}, \dots, b_{i5})$. Como $\langle p_1, p_2, p_3 \rangle = \{[s_1v_1 + s_2v_2 + s_3v_3] \in \mathbb{P}^5 \mid [s_1 : s_2 : s_3] \in \mathbb{P}^2\}$, a partir de (3.1) conclui-se que $[u_i] = q_i \in \langle p_1, p_2, p_3 \rangle$, logo $\langle q_1, q_2, q_3 \rangle = \langle p_1, p_2, p_3 \rangle$, visto que, existe um único plano determinado por três pontos distintos e não colineares em \mathbb{P}^5 .

Com isso temos a seguinte definição.

Definição 3.1.1. A cada $W \in G_3(S_2)$ vamos associar o plano $\pi_W \subset \mathbb{P}^5$ determinado por p_1, p_2 e p_3 tais que $\Omega(p_i) = [F_i]$, se $W = [F_1, F_2, F_3]$.

Das considerações feitas acima, segue que $\pi_W = \langle p_1, p_2, p_3 \rangle$ e sua definição independe da base escolhida para W .

Exemplo 3.1.1. Seja $W = [x_0^2, x_1^2, x_2^2] \in G_3(S_2)$. Considere $p_{i+1} = \Omega^{-1}([x_i^2])$ para $i = 0, 1, 2$. Logo, $p_1 = [1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0]$, $p_2 = [0 : 0 : 0 : 1 : 0 : 0]$ e $p_3 = [0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1]$. Lembre que $\Lambda \subset \mathbb{P}^5$ é um plano se, e somente se, $\Lambda = \mathcal{Z}(L_1, L_2, L_3)$, L_i homogêneos de grau 1 em $\mathbb{C}[y_0, \dots, y_5]$. Assim, se $L = b_0y_0 + b_1y_1 + b_2y_2 + b_3y_3 + b_4y_4 + b_5y_5$, então verifica-se que

$$L(p_1) = 0 \iff b_0 = 0$$

$$L(p_2) = 0 \iff b_3 = 0$$

$$L(p_3) = 0 \iff b_5 = 0.$$

Donde podemos concluir que $L = b_1y_1 + b_2y_2 + b_3y_3$. Assim, $\pi_W = \mathcal{Z}(y_1, y_2, y_4)$.

Defina $\Gamma_W = \pi_W \cap \mathcal{H}_{\mathbb{P}^5}$ para cada $W \in G_3(S_3)$.

Proposição 3.1.1. *Com as notações acima, verifica-se que $\Gamma_W = \pi_W$ ou Γ_W é uma curva plana de grau 3.*

Demonstração. Considere $W = [F_1, F_2, F_3] \in G_3(S_2)$ e seja $\pi_W \subset \mathbb{P}^5$ o plano determinado por W . Note que temos duas possibilidades: $\pi_W \subseteq \mathcal{H}_{\mathbb{P}^5}$ ou $\pi_W \not\subseteq \mathcal{H}_{\mathbb{P}^5}$. No primeiro caso, concluímos que $\Gamma_W = \pi_W$. A seguir, assumamos que $\pi_W \not\subseteq \mathcal{H}_{\mathbb{P}^5}$. Neste caso, $\Gamma_W = \pi_W \cap \mathcal{H}_{\mathbb{P}^5} \subsetneq \pi_W$. Note que, $\mathcal{H}_{\mathbb{P}^5}$ e π_W são subvariedades de \mathbb{P}^5 tais que $\dim \mathcal{H}_{\mathbb{P}^5} = 4$ e $\dim \pi_W = 2$. Agora, visto que $2 + 4 - 5 = 1 \geq 0$, então segue do Teorema 7.2 (p. 48 em [11]) que $\Gamma_W = \pi_W \cap \mathcal{H}_{\mathbb{P}^5} \neq \emptyset$. Além disso, sendo π_W e $\mathcal{H}_{\mathbb{P}^5}$ fechados, segue que Γ_W também é fechado. Daí, pelo Teorema 5.7 (p. 52 em [10]) segue que Γ_W pode se decompor em uma união finita de componentes irredutíveis, ou seja,

$$\Gamma_W = X_1 \cup \dots \cup X_k.$$

Novamente pelo do Teorema 7.2 (p. 48 em [11]), temos que a $\dim X_i \geq 2 + 4 - 5 = 1$ para todo $i \in \{1, \dots, k\}$. Entretanto, como $\Gamma_W = X_1 \cup \dots \cup X_k \subseteq \pi_W$, temos que $X_i \subset \pi_W$ para todo i (com a inclusão própria pois $\pi_W \not\subseteq \mathcal{H}_{\mathbb{P}^5}$). Segue que $\dim X_i \leq 1$, o que nos permite concluir que $\dim X_i = 1$ para todo i . Logo, Γ_W é uma curva plana (uma vez que Γ_W está contido em π_W).

Por fim, afirmamos que o grau(Γ_W) = 3. Com efeito, lembre que $[v_i] = p_i = \Omega^{-1}(F_i)$ e com isso, $\pi_W = \langle p_1, p_2, p_3 \rangle = \{[\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3] \mid [\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3] \in \mathbb{P}^2\}$. Por outro lado, π_W está em bijeção com \mathbb{P}^2 , assim $q \in \Gamma_W$ se, e somente se, $q = [\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3]$ para algum $[\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3] \in \mathbb{P}^2$ e $f(q) = 0$ (lembre que $\mathcal{H}_{\mathbb{P}^5} = \mathcal{Z}(f) \subseteq \mathbb{P}^5$). Daí, defina

$$g = g(x_0, x_1, x_2) = f(x_0 v_1 + x_1 v_2 + x_2 v_3).$$

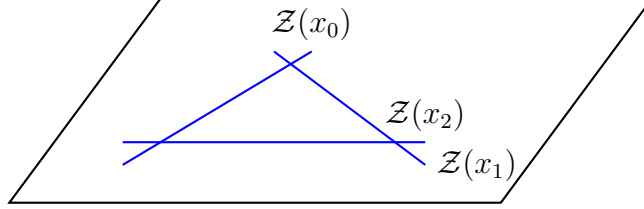
Note que, g é um polinômio homogêneo de grau 3 visto que f é homogêneo de grau 3. Portanto, segue o resultado. \square

Conforme o Exemplo 3.1.1, temos que $\Gamma_W = \pi_W \cap \mathcal{H}_{\mathbb{P}^5} = \mathcal{Z}(y_1, y_2, y_4) \cap \mathcal{Z}(f) = \mathcal{Z}(y_1, y_2, y_3, f)$. Sendo assim, $p = [p_0 : p_1 : p_2 : p_3 : p_4 : p_5] \in \Gamma_W$ se, e somente se, $p_1 = p_2 = p_4 = 0$ e $f(p) = 0$, ou seja,

$$f = \begin{vmatrix} y_0 & \frac{1}{2}y_1 & \frac{1}{2}y_2 \\ \frac{1}{2}y_1 & y_3 & \frac{1}{2}y_4 \\ \frac{1}{2}y_2 & \frac{1}{2}y_4 & y_5 \end{vmatrix} \implies f(p) = \begin{vmatrix} p_0 & 0 & 0 \\ 0 & p_3 & 0 \\ 0 & 0 & p_5 \end{vmatrix} = y_0 y_3 y_5 = 0.$$

Note que, $\pi_W = \mathcal{Z}(y_1, y_2, y_3) \longrightarrow \mathbb{P}^2$ dada por $[x_0 : 0 : 0 : x_1 : 0 : x_2] \longmapsto [x_0 : x_1 : x_2]$ é uma bijeção. Neste caso Γ_W é uma curva cúbica plana singular, representada geometricamente na Figura 3.1 a seguir.

Figura 3.1



De posse do resultado anterior se Γ_W for uma curva, temos duas possibilidades: Γ_W é **singular** ou Γ_W **não é singular**. Trataremos primeiro o caso em que Γ_W é não singular.

No que segue do texto,

- $l_{A,B}$ denota a reta passando pelos pontos A e B ;
- Para cada ponto P em \mathbb{P}^5 , denotaremos por \hat{P} a cônica associada via Ω ;
- Usaremos indistintamente, no caso das retas em \mathbb{P}^2 : $L = \mathcal{Z}(a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2)$ ou $L = a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2$.

3.2 Γ_W é não singular

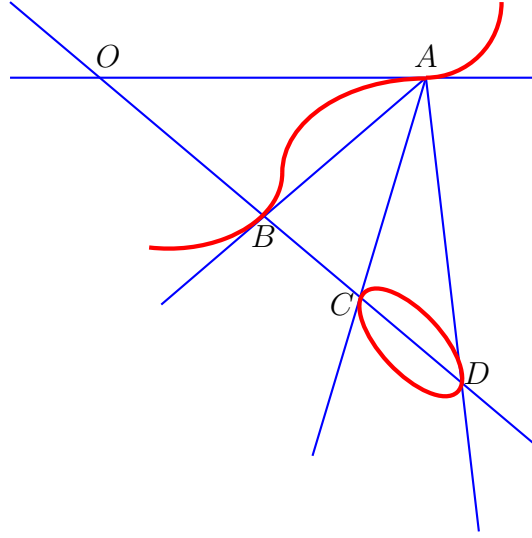
Seja $W \in G_3(S_2)$ tal que Γ_W é um curva não singular. Para este caso, vamos começar com o seguinte resultado preliminar.

Lema 3.2.1. *Seja \mathbf{C} uma cúbica não singular. Então, existem pontos $A, B, C, D \in \mathbf{C}$ tais que*

1. $A \in \mathbf{C}$ é um ponto de inflexão;
2. B, C, D são pontos distintos e colineares em \mathbf{C} e $l_{A,P} = T_P\mathbf{C}$ para todo $P \in \{B, C, D\}$.

Demonstração. Segue uma representação geométrica do que queremos mostrar

Figura 3.2 Representação da cúbica não singular



A menos de uma *MCP* podemos assumir que $\mathbf{C} = \mathcal{Z}(G) \subset \mathbb{P}^2$ sendo $G = x_0^2x_1 + x_0x_1^2 + x_2^3 + ax_0x_1x_2$ com $a \in \mathbb{C}$ tal que $a^3 \neq -27$ (cf. Teorema 6, p. 3 em [18]). Considere $A = [1 : 0 : 0]$ e note que $\nabla G(A) = (0, 1, 0)$ uma vez que

$$\nabla G = (2x_0x_1 + x_1^2 + ax_1x_2, 2x_0x_1 + x_0^2 + ax_0x_2, 3x_2^2 + ax_0x_1).$$

Assim, A é um ponto não singular da curva, cujo o plano tangente é dado por

$$T_A\mathbf{C} = \mathcal{Z}\left(\frac{\partial G}{\partial x_0}(A) \cdot x_0 + \frac{\partial G}{\partial x_1}(A) \cdot x_1 + \frac{\partial G}{\partial x_2}(A) \cdot x_2\right) = \mathcal{Z}(x_1).$$

Além disso, $T_A\mathbf{C} \cap \mathbf{C} = \mathcal{Z}(x_1) \cap \mathcal{Z}(G) = \{[1 : 0 : 0]\} = \{A\}$. O que nos permite concluir que A é um ponto de inflexão, provando o primeiro item. Prosseguindo, considere a família de retas que passam pelo ponto A , ou seja, definidas por $\mathcal{Z}(\alpha x_1 + \beta x_2)$ com $[\alpha : \beta] \in \mathbb{P}^1$. Logo, podemos representar tais retas por $l_\infty = x_1$ com $[\alpha : \beta] = [0 : 1] \in \mathbb{P}^1$ e $l_u = x_2 - ux_1$ com $[\alpha : \beta] = [-u : 1] \in \mathbb{P}^1$.

Note que, $l_\infty = \mathcal{Z}(x_1) = T_A\mathbf{C}$ logo $l_\infty \cap \mathbf{C} = \{A\}$. Por outro lado, $p = [x : y : z] \in l_u \cap \mathbf{C}$ se, e somente se,

$$\begin{cases} z = uy \\ x^2y + xy^2 + z^3 + axyz = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = uy \\ y(x^2 + xy + u^3y^2 + auxy) = 0 \end{cases}$$

Como soluções para o sistema, percebe-se que $y = 0$ implica em $z = 0$ do qual temos

$p = [1 : 0 : 0] = A$. Por outro lado, as soluções $p = [x : y : z]$ do sistema

$$\begin{cases} z = uy \\ x^2 + xy + u^3y^2 + auxy = 0 \end{cases}$$

verificam que $y \neq 0$ (caso contrário, teríamos $x = y = z = 0$), então podemos supor $y = 1$. Logo, $p = [x : 1 : u]$ com $x \in \mathbb{C}$ tal que

$$x^2 + (1 + au)x + u^3 = 0. \quad (3.2)$$

Ou seja, $l_u \cap \mathbf{C} = \{A, [x : 1 : u]\}$ com x solução da Equação (3.2). Note que ao impor que $\#l_u \cap \mathbf{C} = 2$, segue que o discriminante da Equação (3.2) deve ser nulo, isto é,

$$1 + 2au + a^2u^2 - 4u^3 = 0. \quad (3.3)$$

Logo, u é solução da equação $4t^3 - a^2t^2 - 2at - 1 = 0$, a qual admite três soluções distintas, digamos b, c e d . Assim, obtemos a partir de (3.2) para $u \in \{b, c, d\}$ os pontos

$$B = \left[-\frac{(1+ab)}{2} : 1 : b \right], C = \left[-\frac{(1+ac)}{2} : 1 : c \right] \text{ e } D = \left[-\frac{(1+ad)}{2} : 1 : d \right].$$

Visto que

$$\begin{vmatrix} -\frac{(1+ab)}{2} & 1 & b \\ -\frac{(1+ac)}{2} & 1 & c \\ -\frac{(1+ad)}{2} & 1 & d \end{vmatrix} = 0$$

conclui-se que B, C e D são distintos e colineares. E pelo teorema de Bézout temos que $l_{A,P} = T_P\mathbf{C}$ para $P \in \{B, C, D\}$. Portanto, temos o resultado. \square

Lema 3.2.2. *Considere $W_a = [x_0^2 - x_1x_2, x_0x_1, (x_1 - x_2)(x_1 - ax_2)]$ com $a \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$ em $G_3(S_2)$. Então, Γ_{W_a} é uma cúbica não singular.*

Demonstração. Primeiramente, vamos determinar a equação para o plano π_{W_a} em \mathbb{P}^5 . Considere $F_1 = x_0^2 - x_1x_2$, $F_2 = x_0x_1$ e $F_3 = (x_1 - x_2)(x_1 - ax_2)$. Assim, $W_a = [F_1, F_2, F_3]$ e $p_i = \Omega^{-1}(F_i)$ para $i = 1, 2, 3$ é dado por $p_1 = [1 : 0 : 0 : 0 : -1 : 0]$, $p_2 = [0 : 1 : 0 : 0 : 0 : 0]$ e $p_3 = [0 : 0 : 0 : 1 : -(1+a) : a]$. Observe que $L = b_0y_0 + b_1y_1 + b_2y_2 + b_3y_3 + b_4y_4 + b_5y_5$ está no ideal associado a π_{W_a} , se

$$\begin{aligned} L(p_1) &= 0 \iff b_0 - b_4 = 0 \iff b_4 = b_0 \\ L(p_2) &= 0 \iff b_1 = 0 \\ L(p_3) &= 0 \iff b_3 - (1+a)b_4 + ab_5 = 0. \end{aligned}$$

Logo, $L = b_4(y_0 + (1+a)y_3 + y_4) + b_2y_2 + b_5(y_5 - ay_3)$. Assim, $\pi_{W_a} = \mathcal{Z}(L_1, L_2, L_3)$, sendo $L_1 = y_0 + (1+a)y_3 + y_4$, $L_2 = y_2$ e $L_3 = y_5 - ay_3$. Daí, por definição, temos que $\Gamma_{W_a} = \pi_{W_a} \cap \mathcal{H}_{\mathbb{P}^5} = \mathcal{Z}(L_1, L_2, L_3, f)$, com

$$f = \begin{vmatrix} y_0 & \frac{1}{2}y_1 & \frac{1}{2}y_2 \\ \frac{1}{2}y_1 & y_3 & \frac{1}{2}y_4 \\ \frac{1}{2}y_2 & \frac{1}{2}y_4 & y_5 \end{vmatrix}.$$

Considere, $p = [y_0 : y_1 : y_2 : y_3 : y_4 : y_5] \in \mathbb{P}^5$. Note que:

$$p \in \Gamma_{W_a} \iff y_0 = -(1+a)y_3 - y_4, \quad y_2 = 0, \quad y_5 = ay_3 \text{ e } f(p) = 0.$$

Ou seja, $p \in \Gamma_{W_a}$ se, e somente se,

$$g(y_1, y_3, y_4) := \begin{vmatrix} -(1+a)y_3 - y_4 & \frac{1}{2}y_1 & 0 \\ \frac{1}{2}y_1 & y_3 & \frac{1}{2}y_4 \\ 0 & \frac{1}{2}y_4 & ay_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Isto é,

$$g(y_1, y_3, y_4) = \frac{y_4^3 + (a+1)y_3y_4^2 - 4ay_3^2y_4 - 4a^2y_3^3 - 4ay_3^3(a+1) - ay_1^2y_3}{4} = 0. \quad (3.4)$$

Afirmação: Γ_{W_a} é não singular.

Lembremos que $q \in \text{Sing}(\Gamma_{W_a})$ se, e somente se, $\nabla g(q) = 0$. Calculando as derivadas parciais em (3.4), obtemos que ∇g é igual a

$$\left(-\frac{ay_1y_3}{2}, \frac{ay_4^2 + y_4^2 - 8ay_3y_4 - 12a^2y_3^2 - 12ay_3^2 - ay_1^2}{4}, \frac{3y_4^2 + 2ay_3y_4 + 2y_3y_4 - 4ay_3^2}{4} \right). \quad (3.5)$$

Note que, se $q = [y_1 : y_3 : y_4]$ é um ponto singular então $y_1y_3 = 0$ (visto que $a \neq 0$). O que nos leva a considerar os seguintes dois casos:

Caso 1 Se $y_3 = 0$, então segue das outras equações que $y_1 = y_4 = 0$.

Caso 2 $y_1 = 0$. Neste caso, verifica-se que $y_3 = 0$ se, e somente se, $y_4 = 0$. Assim, vamos analisar o caso $y_1 = 0$ e que y_3, y_4 são ambos não nulos. Podemos assumir que $y_3 = 1$. A partir de (3.5) obtemos

$$\begin{cases} ay_4^2 + y_4^2 - 8ay_4 - 12a^2 - 12a = 0 \\ 3y_4^2 + 2ay_4 + 2y_4 - 4a = 0 \end{cases}$$

para a segunda equação, obtemos como soluções $c_1 = -\frac{\sqrt{a^2 + 14a + 1} + a + 1}{3}$ e $c_2 = \frac{\sqrt{a^2 + 14a + 1} - a - 1}{3}$, substituindo c_1 na primeira equação, no sistema acima, temos

$$\frac{2 \left(a^2 \sqrt{k} + 14 a \sqrt{k} + \sqrt{k} + a^3 - 33 a^2 - 33 a + 1 \right)}{9} = 0 \quad (3.6)$$

sendo $k = a^2 + 14a + 1$. Entretanto, observe que (3.6) pode ser escrita na forma: $k \cdot k^{\frac{1}{2}} + (a+1)(a^2 - 34a + 1) = 0$. De onde, segue que $k^{\frac{3}{2}} = -b$ onde $b = (a+1)(a^2 - 34a + 1)$ implica que $k^3 = b^2$. Como $k = a^2 + 14a + 1$ e $b = (a+1)(a^2 - 34a + 1)$, checamos que $k^3 - b^2 = 108a(a-1)^4$. Portanto, $108a(a-1) = 0$ onde temos um absurdo pois $a \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$. Analogamente, ao substituir c_2 obteremos um absurdo. Portanto, segue que Γ_{W_a} é uma cúbica não singular. \square

Proposição 3.2.1. *Com as notações do Lema 3.2.2, se $W \in G_3(S_2)$ e Γ_W é uma cúbica não singular, então existe $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $\varphi \bullet W = W_a$ para algum $a \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$.*

Demonstração. Considere $W \in G_3(S_2)$ tal que Γ_W seja uma cúbica não singular. Segue do Lema 3.2.1 que existem pontos $A, B, C, D \in \Gamma_W$ tais que:

- A é um ponto de inflexão;
- $\{B, C, D\} \subset \Gamma_W - \{A\}$ são distintos e colineares.

Note que, cada ponto de Γ_W está associado a uma cônica em \mathcal{C} (de modo que a cada ponto $Q \in \Gamma_W$ associaremos a cônica $\hat{Q} \in \mathcal{C}$). Além disso, a reta L determinada pelos pontos B, C e D é do tipo (6) na Tabela 2.2. Assim, existe $\varphi_1 \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ de modo que as cônicas associadas a B, C e D são da forma, $\hat{B} = x_0^2 - x_1^2$, $\hat{C} = x_1^2 - x_2^2$ e $\hat{D} = x_2^2 - x_0^2$. Considere os pontos $P_B = [0 : 0 : 1]$, $P_C = [1 : 0 : 0]$ e $P_D = [0 : 1 : 0]$ determinados pelas interseções das componentes de \hat{B} , \hat{C} e \hat{D} . Por outro lado, $O \in L = l_{B,C}$ e O está associado a uma cônica não singular \hat{O} (visto que $O \notin \Gamma_W$). Logo, temos que

$$\begin{aligned} \hat{O} &= \mu(x_0^2 - x_1^2) + \nu(x_1^2 - x_2^2) && \text{com } \mu \cdot \nu \neq 0 \\ \hat{O} &= \mu x_0^2 + (\nu - \mu)x_1^2 - \nu x_2^2 \\ \hat{O} &= -\frac{\mu}{\nu}x_0^2 - (1 - \frac{\mu}{\nu})x_1^2 + x_2^2 \\ \hat{O} &= kx_0^2 - (1 + k)x_1^2 + x_2^2 && \text{com } k = -\frac{\mu}{\nu} \in \mathbb{C} - \{0, -1\}. \end{aligned}$$

Afirmção 1: $A \in \mathcal{H}_{\mathbb{P}^5} - \Delta_{\mathbb{P}^5}$.

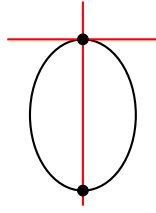
De fato, como $\text{Sing}(\mathcal{H}_{\mathbb{P}^5}) = \Delta_{\mathbb{P}^5}$, se $A \in \Delta_{\mathbb{P}^5}$, então A seria um ponto singular, o que é um absurdo pois A é ponto de inflexão.

Assim, segue que A está associado a um par de retas distintas, e portanto, as retas $l_{A,P}$ com $P \in \{B, C, D\}$ são do tipo (5) na Tabela 2.2.

Afirmção 2: Os pontos P_B, P_C e P_D pertencem a exatamente uma das componentes da cônica \hat{A} .

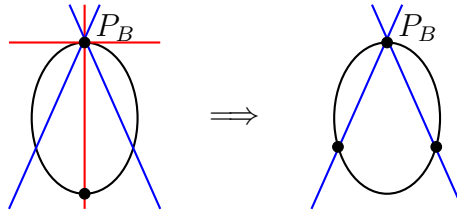
De fato, observe que $l_{A,O}$ é do tipo (3) na Tabela 2.2, ou seja, geometricamente temos a seguinte representação para as cônicas \hat{A} e \hat{O} .

Figura 3.3



Suponha por absurdo que P_B pertença a ambas das componentes da cônica \hat{A} . Logo, como A e B são distintos e $l_{A,B}$ não é uma componente de Γ_W , geometricamente temos

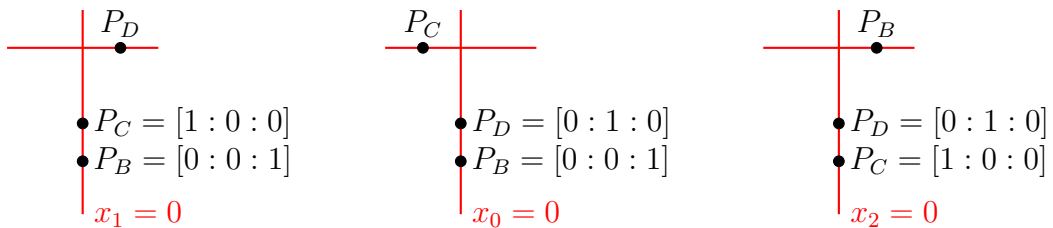
Figura 3.4



Note que, as cônicas \hat{B} e \hat{O} se intersectam em três pontos distintos, donde podemos concluir pelo Teorema 2.2.1 que a reta $l_{O,B}$ é do tipo (5) na Tabela 2.2, o que é um absurdo já que $l_{O,B} = L$ é do tipo (6). O mesmo raciocínio se aplica para \hat{C} e \hat{D} .

Sendo assim, temos três possibilidades (representadas geometricamente abaixo) para a posição dos pontos P_B, P_C e P_D em relação às componentes da cônica \hat{A} .

Figura 3.5



Logo, as possibilidades para \hat{A} são: $x_0 \cdot L_1$, $x_1 \cdot L_1$, $x_2 \cdot L_1$. Para $\hat{A} = x_0 \cdot L_1$ temos que a componente $x_0 = 0$ encontra a cônica $\hat{O} = kx_0^2 - (1+k)x_1^2 + x_2^2$ nos pontos

$[0 : 1 : u]$ e $[0 : 1 : -u]$ sendo $u^2 = k + 1$. De onde concluimos que existem duas possibilidades para a componente L_1 (que é a reta tangente nos pontos indicados), a saber $L_1 = x_2 + ux_1$ ou $L_1 = x_2 - ux_1$. Escolha $L_1 = x_2 + ux_1$, assim, em resumo temos que

$$\hat{O} = kx_0^2 - u^2x_1^2 + x_2^2, \hat{A} = x_0(x_2 + ux_1), \hat{B} = x_0^2 - x_1^2, \hat{C} = x_1^2 - x_2^2 \text{ e } \hat{D} = x_2^2 - x_0^2.$$

Dáí, considerando $\pi_W = \langle O, A, C \rangle$ temos que

$$\begin{aligned} W_1 = \varphi_1 \bullet W &= [kx_0^2 - u^2x_1^2 + x_2^2, x_0(x_2 + ux_1), x_1^2 - x_2^2] \\ &\stackrel{MB}{=} [kx_0^2 + (x_2 + ux_1) \cdot (x_2 - ux_1), x_0(x_2 + ux_1), 4u^2(x_1^2 - x_2^2)]. \end{aligned}$$

Considere a base $\{x_0, x_2 + ux_1, x_2 - ux_1\}$ de S_1 , assim existe $R \in \text{Aut}(\mathbb{C}^3)$ tal que $R_\bullet x_0 = x_0$, $R_\bullet(x_2 + ux_1) = x_1$ e $R_\bullet(x_2 - ux_1) = -kx_2$. Note que,

$$\begin{aligned} (x_2 + ux_1) + (x_2 - ux_1) &= 2x_2 \implies R_\bullet(2x_2) = x_1 - kx_2, \\ (x_2 + ux_1) - (x_2 - ux_1) &= 2ux_1 \implies R_\bullet(2ux_1) = x_1 + kx_2. \end{aligned}$$

Logo, sob a ação de R_\bullet , obtemos

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 &\mapsto \frac{x_1 + kx_2}{u} - \frac{u(x_1 - kx_2)}{u} = \frac{1}{u}[(1 - u)x_1 + k(1 + u)x_2], \\ 2x_1 + 2x_2 &\mapsto \frac{x_1 + kx_2}{u} + \frac{u(x_1 - kx_2)}{u} = \frac{1}{u}[(1 + u)x_1 + k(1 - u)x_2]. \end{aligned}$$

Agora considere $\varphi_2 \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ determinada por $R \in \text{Aut}(\mathbb{C}^3)$. Assim, $\varphi_2 \bullet W_1 := W_2$ é dado por

$$\begin{aligned} W_2 &= [kx_0^2 - kx_1x_2, x_0x_1, ((1 - u)x_1 + k(1 + u)x_2) \cdot ((1 + u)x_1 + k(1 - u)x_2)] \\ W_2 &\stackrel{MB}{=} [kx_0^2 - kx_1x_2, x_0x_1, ((-kx_1 + k(1 + u)^2x_2) \cdot (-kx_1 + k(1 - u)^2x_2))] \\ W_2 &\stackrel{MB}{=} [x_0^2 - x_1x_2, x_0x_1, ((x_1 + (1 + u)^2x_2) \cdot (x_1 + (1 - u)^2x_2))], \end{aligned}$$

com $u \neq \pm 1$ (pois $u = \pm 1$ implica que $k = 0$). Por fim, seja $R_2 \in \text{Aut}(\mathbb{C}^3)$ de modo que $(R_2)_\bullet(x_1) = x_1$, $(R_2)_\bullet(x_2) = \frac{x_2}{(1 + u)^2}$ e $(R_2)_\bullet(x_0) = \frac{x_0}{(1 + u)^2}$, assim, considere $\varphi_3 \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ determinada por $R_2 \in \text{Aut}(\mathbb{C}^3)$. Logo,

$$\begin{aligned} W_3 = \varphi_3 \bullet W_2 &= \left[\frac{x_0^2}{(1 + u)^2} - \frac{x_1x_2}{(1 + u)^2}, \frac{x_0x_1}{(1 + u)^2}, (x_1x_2)(x_1 - \frac{(1 - u)^2}{(1 + u)^2}x_2) \right] \\ &\stackrel{MB}{=} [x_0^2 - x_1x_2, x_0x_1, (x_1 - x_2)(x_1 - ax_2)] \end{aligned}$$

com $a = \left(\frac{1-u}{1+u}\right)^2$ e $a \notin \{0, 1\}$.¹ Portanto, segue o resultado. \square

Proposição 3.2.2. *Considere $W \in G_3(S_2)$ tal que Γ_W é não singular. Então,*

1. *Existe uma única cúbica $[G] \in \mathbb{P}(S_3)$ tal que $W = [G_{x_0}, G_{x_1}, G_{x_2}]$ sendo $G_{x_i} = \frac{\partial G}{\partial x_i}$ com $i = 0, 1, 2$.*
2. *A cúbica $[G]$ em 1. é não singular e não é projetivamente equivalente à cúbica $[x_0^3 + x_1^3 + x_2^3] \in \mathbb{P}(S_3)$.*
3. *Reciprocamente, se $[G] \in \mathbb{P}(S_3)$ é não singular e não é projetivamente equivalente à cúbica $[x_0^3 + x_1^3 + x_2^3]$, então Γ_{W_G} é uma cúbica não singular, sendo $W_G = [G_{x_0}, G_{x_1}, G_{x_2}] \in G_3(S_2)$.*
4. *O invariante fundamental j_G associado a uma cúbica não singular $[G] \in \mathbb{P}(S_3)$ classifica os elementos $W \in G_3(S_2)$ sob a ação de $\text{Aut}(\mathbb{P}^2)$.*

Demonstração. 1. Considere $W \in G_3(S_2)$ tal que Γ_W é não singular. Segue da Proposição 3.2.1 que existe $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $\varphi \bullet W = [F_1, F_2, F_3]$ sendo $F_1 = x_0^2 - x_1x_2$, $F_2 = x_0x_1$ e $F_3 = (x_1 - x_2) \cdot (x_1 - ax_2)$ para algum $a \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$. Assim, vamos procurar $[G] \in \mathbb{P}(S_3)$ de modo que

$$W_G := [G_{x_0}, G_{x_1}, G_{x_2}] = [F_1, F_2, F_3]. \quad (3.7)$$

Segue de (3.7) que

$$G_{x_0} = a_1F_1 + b_1F_2 + c_1F_3, \quad G_{x_1} = a_2F_1 + b_2F_2 + c_2F_3 \quad \text{e} \quad G_{x_2} = a_3F_1 + b_3F_2 + c_3F_3$$

com $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2, 3$. Visto que $G_{x_0x_1} = G_{x_1x_0}$, $G_{x_0x_2} = G_{x_2x_0}$ e $G_{x_1x_2} = G_{x_2x_1}$, a partir dessas três relações, obtemos um sistema de 9 equações lineares nas incógnitas (com o auxílio do software MAXIMA) (a_i, b_i, c_i) , a saber:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2a_2 & 0 \\ a_2 & 0 & -\frac{(a+1)a_2}{(a-1)^2} \\ 0 & 0 & \frac{2aa_2}{(a-1)^2} \end{bmatrix} = \frac{a_2}{(a-1)^2} \begin{bmatrix} 0 & 2(a-1)^2 & 0 \\ (a-1)^2 & 0 & -(a+1) \\ 0 & 0 & 2a \end{bmatrix}.$$

Logo, temos que

$$G_{x_0} = 2(a-1)^2F_2, \quad G_{x_1} = (a-1)^2F_1 - (a+1)F_3 \quad \text{e} \quad G_{x_2} = 2aF_3. \quad (3.8)$$

¹De fato, $a = 1 \implies (1+u)^2 = (1-u)^2 \implies 4u = 0 \implies u = 0$ (absurdo) e $a = 0 \implies \frac{1-u}{1+u} = 0 \implies u = 0$ (absurdo).

Assim, por uma mudança de base, temos que $[G_{x_0}, G_{x_1}, G_{x_2}] = [F_1, F_2, F_3]$. Por fim, pela identidade de Euler, segue que $3 \cdot G = x_0 G_{x_0} + x_1 G_{x_1} + x_2 G_{x_2}$. Logo, a menos de um múltiplo por escalar, temos que

$$G = 3(a-1)^2 x_0^2 x_1 + 3a x_1^2 x_2 - 3(a^2 - a) x_1 x_2^2 - (1+a) x_1^3 + 2a^3 x_2^3.$$

2. Primeiro mostraremos que $[G]$ é não singular. De fato, lembre que $p \in \text{Sing}(G)$ se, e somente se, $G_{x_i}(p) = 0$ para $i = 0, 1, 2$. Tendo em consideração (3.8) e o fato de que $a \notin \{0, 1\}$, concluí-se que $p \in \text{Sing}(G)$ se, e somente se, $p \in \mathcal{Z}(F_1, F_2, F_3)$.

Assuma que $p = [p_0 : p_1 : p_2]$ é um ponto singular de $[G]$. Visto que $F_1 = x_0^2 - x_1 x_2$, $F_2 = x_0 x_1$ e $F_3 = (x_1 - x_2)(x_1 - a x_2)$, daí

$$p_0^2 - p_1 p_2 = 0 \tag{3.9}$$

$$p_0 p_1 = 0 \tag{3.10}$$

$$(p_1 - p_2)(p_1 - a p_2) = 0 \tag{3.11}$$

Caso 1 Se $p_0 = 0$, então por (3.9) $p_1 = 0$ ou $p_2 = 0$, mas se $p_1 = 0$ em (3.11) temos $a p_2^2 = 0$ o que implica em $p_2 = 0$. Por outro lado, se $p_2 = 0$ segue o mesmo raciocínio e concluímos que $p_1 = 0$.

Caso 2 Se $p_1 = 0$, então em (3.9) temos que $p_0 = 0$ e em (3.11) $p_2 = 0$.

Logo, segue que $\text{Sing}(G) = \emptyset$. Portanto, $[G]$ é não singular.

Por outro lado, $[G]$ não é projetivamente equivalente a $[x_0^3 + x_1^3 + x_2^3]$. De fato, considere $H = x_0^3 + x_1^3 + x_2^3$. Logo, $W_H = [x_0^2, x_1^2, x_2^2] \in G_3(S_2)$. Assim, de acordo com o Exemplo 3.1.1, temos que Γ_{W_H} é uma cúbica plana singular. Entretanto, Γ_{W_G} é uma cúbica plana não singular. Portanto, não são projetivamente equivalentes.

3. Sendo $[G] \in \mathbb{P}(S_3)$ não singular, a menos de uma *MCP* podemos assumir que $G = x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + 3\lambda x_0 x_1 x_2$ com $\lambda \in \mathbb{C} - \{-1, -\omega, -\omega^2\}$ tal que $\omega \in \mathbb{C}$ com $\omega^3 = 1$, $\omega \neq 1$. Segue do item (b) no Teorema 4.1 em [11] que $j_G \neq j_{G_0}$ com $G_0 = x_0^3 + x_1^3 + x_2^3$ sendo j_G e j_{G_0} o j -invariante associado às curvas $[G]$ e $[G_0]$. Tendo em consideração que $j_G = \frac{\lambda^3(\lambda^3 - 8)}{27(\lambda^3 + 1)}$ (cf. [11]), se $G = x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + 3\lambda x_0 x_1 x_2$. Como $j_{G_0} \neq j_G$ segue que $\lambda \neq 0$ e $\lambda \notin \{2, 2\omega, 2\omega^2\}$.

Afirmção: Se $W_G = [x_0^2 + \lambda x_1 x_2, x_1^2 + \lambda x_0 x_2, x_2^2 + \lambda x_0 x_1]$ com $\lambda \notin \{0, -\omega^i, 2\omega^i\}_{i=0}^2$, então Γ_{W_G} é uma cúbica não singular.

De fato, seja $P \in \Gamma_{W_G} = \pi_{W_G} \cap \mathcal{H}_{\mathbb{P}^5}$. Lembre que a $P \in \pi_{W_G}$ se associa uma cônica

$$\hat{P} = a(x_0^2 + \lambda x_1 x_2) + b(x_1^2 + \lambda x_0 x_2) + c(x_2^2 + \lambda x_0 x_1) \text{ com } [a : b : c] \in \mathbb{P}^2.$$

Assim, se a cônica \hat{P} é singular, segue que

$$\begin{vmatrix} a & \frac{c\lambda}{2} & \frac{b\lambda}{2} \\ \frac{c\lambda}{2} & b & \frac{a\lambda}{2} \\ \frac{b\lambda}{2} & \frac{a\lambda}{2} & c \end{vmatrix} = 0 \iff (a^3 + b^3 + c^3)\lambda^2 - (\lambda^3 + 4)abc = 0.$$

Como $\lambda \neq 0$, segue que $a^3 + b^3 + c^3 - \frac{(\lambda^3 + 4)}{\lambda^2}abc = 0$ define uma cúbica singular se, e somente se, $-\frac{(\lambda^3 + 4)}{3\lambda^2} \notin \{-1, \omega, \omega^2\}$. Pois, se

$$-\frac{(\lambda^3 + 4)}{3\lambda^2} = -1 \iff \lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = 0 \iff (\lambda + 1)(\lambda - 2)^2 = 0 \iff \lambda \in \{-1, 2\}.$$

Procedendo de forma análoga, para os demais valores (ω e ω^2) obtemos que $\lambda \notin \{0, -\omega^i, 2\omega^i\}_{i=0}^2$, tendo em vista que λ não assume esses valores, segue a afirmação.

4. Seja $W \in G_3(S_2)$, se Γ_W define uma cúbica não singular, então existem $[G_\lambda] \in \mathbb{P}(S_3)$ não singular que não é projetivamente equivalente a $[x_0^3 + x_1^3 + x_2^3]$ e $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tais que

$$\varphi \bullet W = W_{G_\lambda} = \left[\frac{\partial G_\lambda}{\partial x_0}, \frac{\partial G_\lambda}{\partial x_1}, \frac{\partial G_\lambda}{\partial x_2} \right].$$

□

3.3 Γ_W é singular e irredutível

A partir de agora, vamos concentrar nossa atenção na classificação das órbitas no caso em que Γ_W é singular e irredutível. Ou seja, Γ_W é uma cúbica nodal ou cuspidal.

Lema 3.3.1. *Seja $\mathbf{C} \subset \mathbb{P}^2$ uma cúbica nodal tendo P por singularidade. Então, existem $A, B \in \mathbf{C} - \{P\}$ distintos, tais que A é um ponto de inflexão e $T_B\mathbf{C} = l_{A,B}$.*

Demonstração. Segue da Proposição B.5 (cf. p. 53 item (1) em [2]), que a menos de uma MCP, $\mathbf{C} = \mathcal{Z}(G)$ com $G = x_1^2x_2 - x_0^3 - x_0^2x_2$. Note que $\nabla G = (-3x_0^2 - 2x_0x_2, 2x_1x_2, x_1^2 - x_0^2)$. Logo, $P = [x_0 : x_1 : x_2] \in \text{Sing}(G)$ se, e somente se,

$$-3x_0^2 - 2x_0x_2 = 0, \tag{3.12}$$

$$2x_1x_2 = 0, \tag{3.13}$$

$$x_1^2 - x_0^2 = 0. \tag{3.14}$$

De (3.13) segue que $x_1 = 0$ ou $x_2 = 0$. Se $x_1 = 0$, então a partir (3.14) temos que $x_0 = 0$, logo $P = [0 : 0 : 1]$. Por outro lado, se $x_2 = 0$, então a partir (3.12) e (3.14) concluímos que $x_0 = x_1 = 0$. Portanto, $[0 : 0 : 1]$ é a única singularidade de \mathbf{C} .

A seguir considere $A = [0 : 1 : 0]$. Observe que $A \in \mathbf{C}$ e que $\nabla G(A) = [0 : 0 : 1]$, assim, $T_A \mathbf{C} = \mathcal{Z}(x_2)$, além disso, temos que $T_A \mathbf{C} \cap \mathbf{C} = \{A\}$. Portanto, A é um ponto de inflexão. Por outro lado, considere a família de retas passando por A , isto é, aquelas definidas por, $L = x_2$ e $L_u = x_0 - ux_2$ com $u \in \mathbb{C}$.

Note que, $L = T_A \mathbf{C}$. A seguir, vamos determinar $u \in \mathbb{C}$ tal que $\#L_u \cap \mathbf{C} = 2$. Observe que, $Q = [x_0 : x_1 : x_2] \in L_u \cap \mathbf{C}$ se, e somente se,

$$\begin{cases} x_0 = ux_2 \\ x_1^2 - x_2 - x_0^3 - x_0^2 x_2 = 0 \end{cases} \implies x_1^2 x_2 - u^3 x_2^3 - u^2 x_2^3 = x_2(x_1^2 - u^2(u+1)x_2^2) = 0.$$

Queremos que $x_1^2 - u^2(u+1)x_2^2 = 0$ admita uma única solução, ou seja, $u^2(u+1) = 0$. Assim, $u = 0$ ou $u = -1$. Note que, se $u = 0$ então $Q = [0 : 0 : 1] = P$. Se $u = -1$ então $Q = [-x_2 : 0 : x_2] = [-1 : 0 : 1]$.

Afirmção: Se $B = [-1 : 0 : 1]$ então $l_{A,B} = T_B \mathbf{C}$.

De fato, $l_{A,B} = \mathcal{Z}(x_0 + x_2)$. Por outro lado, $T_B \mathbf{C} = \mathcal{Z}(L_B)$ sendo $L_B = \frac{\partial G}{\partial x_0}(B) \cdot x_0 + \frac{\partial G}{\partial x_1}(B) \cdot x_1 + \frac{\partial G}{\partial x_2}(B) \cdot x_2$. Como $\nabla G(B) = [-1 : 0 : 1]$ segue que $L_B = -x_0 - x_2$. Portanto, $l_{A,B} = T_B \mathbf{C}$. \square

Lema 3.3.2. *Se $\mathbf{C} \subset \mathbb{P}^2$ for uma cúbica cuspidal tendo P por singularidade, então existe $A \in \mathbf{C} - \{P\}$ ponto de inflexão e existe uma única reta L_P passando por P tal que $L_P \cap \mathbf{C} = \{P\}$.*

Demonstração. Novamente pela Proposição B.5 (p. 53 item (2) em [2]), a menos de uma MCP podemos supor que $\mathbf{C} = \mathcal{Z}(G)$, sendo $G = x_2 x_1^2 - x_0^3$. Assim, segue que $\nabla G = (-3x_0^2, 2x_1 x_2, x_1^2)$ e conclui-se que $P = [0 : 0 : 1]$ é a única singularidade de \mathbf{C} . Note que, $A = [0 : 1 : 0] \in \mathbf{C}$ satisfaz $\nabla G(A) = [0 : 0 : 1]$, logo $T_A \mathbf{C} = \mathcal{Z}(x_2)$. Visto que $T_A \mathbf{C} \cap \mathbf{C} = \{A\}$, concluímos que A é um ponto de inflexão. Considerando a família de retas passando por P , ou seja, $L_P = \mathcal{Z}(x_1)$ e $L_u = \mathcal{Z}(x_0 - ux_1)$, com $u \in \mathbb{C}$.

Note que $L_P \cap \mathbf{C} = \{P\}$ ($x_1 = 0$ implica em $x_0 = 0$), isto é, a reta L_P intersecta a curva somente no ponto P . Considere $Q = [x_0 : x_1 : x_2]$ e observe que

$$Q \in L_u \cap \mathbf{C} \iff \begin{cases} x_0 = ux_1 \\ x_1^2 x_2 - x_0^3 = 0 \end{cases} \implies x_1^2 x_2 - u^3 x_1^3 = x_1^2(x_2 - u^3 x_1) = 0.$$

Se $x_1^2 = 0$, então $x_0 = 0$ e obtemos $Q = P$. Por outro lado, se $x_2 - u^3 x_1 = 0$ então

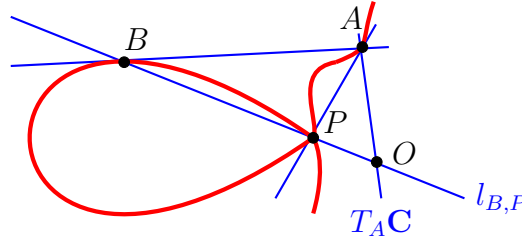
$Q = [ux_1 : x_1 : u^3x_1] = [u : 1 : u^3]$. Assim, $\mathcal{Z}(x_0 - ux_1) \cap \mathbf{C} = \{P, [u : 1 : u^3]\}$. Portanto, L_P é a única reta que passa por P e não intersecta a curva em outro ponto. \square

Proposição 3.3.1. *Seja $W \in G_3(S_2)$ tal que Γ_W é uma cúbica singular irreduzível. Então, verifica-se que*

1. *Se Γ_W é uma cúbica nodal cuja singularidade se corresponde com uma cônica em $\mathcal{H}_{\mathbb{P}^5} - \Delta_{\mathbb{P}^5}$, então existe $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $\varphi \bullet W = [x_0x_1, x_0^2 - x_1x_2, x_1^2 - x_0x_2]$;*
2. *Se Γ_W é uma cúbica nodal cuja singularidade se corresponde com uma cônica em $\Delta_{\mathbb{P}^5}$, então existe $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $\varphi \bullet W = [x_0x_1, x_0^2 - x_1x_2, (x_1 + x_2)^2]$;*
3. *Se Γ_W é uma cúbica cuspidal, então a singularidade de Γ_W se corresponde com uma cônica em $\Delta_{\mathbb{P}^5}$ e existe $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $\varphi \bullet W = [x_0^2 - x_1x_2, x_0x_1, x_2^2]$.*

Demonstração. Assuma que Γ_W é uma cúbica nodal. Segue do Lema 3.3.1 que existe $A \in \Gamma_W$ ponto de inflexão, $B \in \Gamma_W - \{A\}$ tal que $l_{A,B} = T_B\Gamma_W$. De fato, se $P \in \Gamma_W$ for sua singularidade então temos a seguinte representação geométrica para Γ_W

Figura 3.6: Representação para uma cúbica nodal



Sendo O o ponto de interseção das retas $T_A\mathbf{C}$ e $l_{B,P}$. Observe que $O \notin \Gamma_W$, logo O se corresponde com a cônica não singular \hat{O} . Além disso, temos que A, B e P se correspondem com cônicas singulares \hat{A}, \hat{B} e \hat{P} , respectivamente. Note que $\pi_W = \langle A, O, P \rangle$ e além disso

- $l_{A,P}, l_{A,B}, l_{B,P}, l_{B,O}, l_{P,O}$ são do tipo (5) na Tabela 2.2;
- $l_{A,O}$ é do tipo (3) na Tabela 2.2.

Como $W = [\hat{A}, \hat{O}, \hat{P}]$ e tendo em vista o tipo da reta $l_{A,O}$, segue que existe $\varphi_1 \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $W_1 = \varphi_1 \bullet W = [x_1x_2, x_2^2 - x_0x_1, \hat{P}_1]$.

Considere $\varphi_2 \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $x_0 \mapsto x_2$, $x_1 \mapsto x_1$ e $x_2 \mapsto x_0$. Assim,

$$W_2 = \varphi_2 \bullet W_1 = [x_0x_1, x_0^2 - x_1x_2, L_1 \cdot L_2]. \quad (3.15)$$

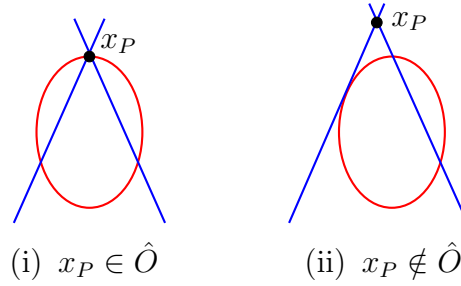
Por simplicidade, no que segue do texto, considere $\hat{A} = x_0x_1$, $\hat{O} = x_0^2 - x_1x_2$ e $\hat{P} = L_1 \cdot L_2$. Além disso, sejam x_A e x_P o ponto de interseção das componentes de \hat{A} e \hat{P} .

A partir de agora, considere os seguintes dois casos: $P \in \mathcal{H}_{\mathbb{P}^5} - \Delta_{\mathbb{P}^5}$ e $P \in \Delta_{\mathbb{P}^5}$.

Caso 1: $P \in \mathcal{H}_{\mathbb{P}^5} - \Delta_{\mathbb{P}^5}$.

Como $P \in \mathcal{H}_{\mathbb{P}^5} - \Delta_{\mathbb{P}^5}$ e $l_{P,O}$ é do tipo (5) na Tabela 2.2, temos que analisar as seguintes possibilidades de acordo com a posição relativa de \hat{P} e \hat{O} :

Figura 3.7



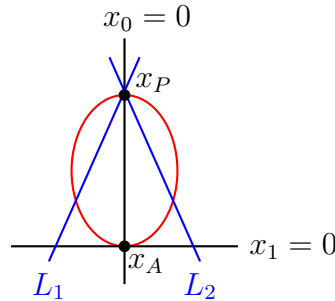
(i) $x_P \in \hat{O}$.

A seguir, vamos analisar as possibilidades para a posição relativa das cônicas \hat{A} e \hat{P} em W_2 (cf. (3.15)).

(i-1) x_P pertence a uma das componentes de \hat{A} . Como $l_{A,P}$ é do tipo (5) (na Tabela 2.2) segue que $x_A = [0 : 0 : 1] \neq x_P$. Entretanto, $l_{A,O}$ é do tipo (3) (na Tabela 2.2).

Com isso, temos a seguinte representação:

Figura 3.8



Assim, necessariamente $x_P = [0 : 1 : 0]$. Portanto, $L_1 = ax_0 + bx_2$ e $L_2 = a_1x_0 + b_1x_2$, com $a, a_1, b, b_1 \in \mathbb{C} - \{0\}$. Assim, $L_1 \cdot L_2 = aa_1x_0^2 + (ab_1 + a_1b)x_0x_2 + bb_1x_2^2$.

Daí, por uma mudança de base obtemos

$$W_2 = [x_0x_1, x_0^2 - x_1x_2, x_2^2 + \mu x_0x_2 + \nu x_0^2] \quad \text{com } \mu = \frac{ab_1 + a_1b}{bb_1}, \quad \nu = \frac{aa_1}{bb_1}.$$

Seja $\varphi_3 \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $x_0 \mapsto x_2$, $x_1 \mapsto x_1$ e $x_2 \mapsto x_2 + \theta x_0$, com θ solução da equação $t^2 + \mu t + \nu = 0$. Assim, ao aplicarmos φ_3 teremos $\hat{A} \mapsto x_0x_1$, $\hat{O} \mapsto x_0^2 - x_1x_2 - \theta x_0x_1$ e

$$\begin{aligned} \hat{P}_2 &\mapsto x_2^2 + \theta x_0^2 + 2\theta x_0x_2 + \mu x_0x_2 + \mu\theta x_0^2 + \nu x_0^2 \\ &\mapsto x_2^2 + (2\theta + \mu)x_0x_2 + (\theta^2 + \theta\mu + \nu)x_0^2 = x_2^2 + \mu_1x_0x_2, \quad \text{com } \mu_1 = 2\theta + \mu. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} W_3 &= \varphi_3 \bullet W_2 = [x_0x_1, x_0^2 - x_1x_2 - \theta x_0x_1, x_2^2 + \mu_1x_0x_2] \\ &\stackrel{MB}{=} [x_0x_1, x_0^2 - x_1x_2, x_2^2 + \mu_1x_0x_2]. \end{aligned}$$

Sendo assim, temos duas possibilidades: $\mu_1 = 0$ ou $\mu_1 \neq 0$.

- $\mu_1 = 0$.

Considere $G \in W_3 = [x_0x_1, x_0^2 - x_1x_2, x_2^2]$. Logo, $G = ax_0x_1 + b(x_0^2 - x_1x_2) + cx_2^2$ com $[a : b : c] \in \mathbb{P}^2$, temos

$$M_G = \begin{bmatrix} b & \frac{a}{2} & 0 \\ \frac{a}{2} & 0 & -\frac{b}{2} \\ 0 & -\frac{b}{2} & c \end{bmatrix} \implies \det(M_G) = b^3 - a^2c.$$

De onde concluímos que Γ_{W_3} é uma cúbica cuspidal, o que é um absurdo pois Γ_W é uma cúbica nodal.

- $\mu_1 \neq 0$.

Neste caso, considere $\varphi_4 \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $x_0 \mapsto \frac{1}{\mu_1}x_0$, $x_1 \mapsto \frac{1}{\mu_1^2}x_1$ e $x_2 \mapsto x_2$. Logo,

$$\begin{aligned} \hat{A} &\mapsto \frac{1}{\mu_1^3}x_0x_1 \stackrel{MB}{=} x_0x_1 \\ \hat{O} &\mapsto \frac{1}{\mu_1^2}x_0^2 - \frac{1}{\mu_1^2}x_1x_2 \stackrel{MB}{=} x_0^2 - x_1x_2 \\ \hat{P}_3 &\mapsto x_2^2 - \mu_1 \frac{1}{\mu_1}x_0x_2 = x_2^2 - x_0x_2 \end{aligned}$$

Segue que $W_4 = \varphi_4 \bullet W_3 = [x_0x_1, x_0^2 - x_1x_2, x_2^2 - x_0x_2]$.

Seja agora $\varphi_5 \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ em que $x_0 \mapsto x_0$, $x_1 \mapsto x_1$ e $x_2 \mapsto x_2 + \frac{1}{2}x_0$. Assim,

$$\begin{aligned}\hat{A} &\mapsto x_0x_1 \\ \hat{O} &\mapsto x_0^2 - x_1x_2 - \frac{1}{2}x_0x_1 \stackrel{MB}{=} x_0^2 - x_1x_2 \\ \hat{P}_3 &\mapsto x_2^2 + \frac{1}{4}x_0^2 + x_0x_2 - x_0x_2 - \frac{1}{2}x_0^2 = x_2^2 - \frac{1}{2}x_0^2.\end{aligned}$$

Com isso, temos

$$W_5 = \varphi_5 \bullet W_4 = [x_0x_1, x_0^2 - x_1x_2, x_2^2 - \frac{1}{2}x_0^2] \stackrel{MB}{=} [x_0x_1, x_0^2 - x_1x_2, x_2^2 - \frac{1}{2}x_1x_2].$$

Seja $\varphi_6 \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ na qual $x_0 \mapsto 2x_0$, $x_1 \mapsto 4x_1$ e $x_2 \mapsto x_2$. Assim, aplicando φ_6 e por uma mudança de base obtemos

$$W_6 = \varphi_6 \bullet W_5 = [x_0x_1, x_0^2 - x_1x_2, x_2^2 - x_1x_2] \stackrel{MB}{=} [x_0x_1, x_0^2 - x_1x_2, x_0^2 - x_2^2].$$

Definindo $\hat{O}_1 = x_1^2 - x_0x_2$, note que

$$\hat{O} + \hat{O}_1 = x_0^2 - x_1x_2 + x_1^2 - x_0x_2 \quad (3.16)$$

$$\hat{O} - \hat{O}_1 = x_0^2 - x_1x_2 - x_1^2 + x_0x_2 = (x_0 - x_1)(x_0 + x_1 + x_2). \quad (3.17)$$

Agora, considere $\varphi_7 \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ em que $x_0 \mapsto x_0 - x_1$, $x_1 \mapsto \frac{1}{2}(x_0 + x_1 + x_2)$ e $x_2 \mapsto x_0 + x_1$. Segue que,

$$\begin{aligned}\hat{A} &\mapsto (x_0 - x_1)\frac{1}{2}(x_0 + x_1 + x_2) \stackrel{(3.17)}{=} \frac{1}{2}(\hat{O} - \hat{O}_1) \stackrel{MB}{=} \hat{O} - \hat{O}_1 \\ \hat{O} &\mapsto (x_0 - x_1)^2 - \frac{1}{2}(x_0 + x_1)(x_0 + x_1 + x_2) \\ &\mapsto x_0^2 + x_1^2 - 2x_0x_1 - \frac{1}{2}(x_0^2 + x_1^2 + 2x_0x_1 + x_0x_2 + x_1x_2) \\ &\mapsto \frac{1}{2}x_0^2 + \frac{1}{2}x_1^2 - 3x_0x_1 - \frac{1}{2}x_0x_2 - \frac{1}{2}x_1x_2 \\ &\stackrel{MB}{=} x_0^2 - x_1x_2 + x_1^2 - x_0x_2 - 6x_0x_1 \stackrel{(3.16)}{=} \hat{O} + \hat{O}_1 - 6x_0x_1 \\ \hat{P}_3 &\mapsto (x_0 + x_1)^2 - (x_0 - x_1)^2 = 4x_0x_1.\end{aligned}$$

Com isso, temos que $W_7 = \varphi_7 \bullet W_6 = [\hat{O} - \hat{O}_1, \hat{O} + \hat{O}_1 - 6x_0x_1, 4x_0x_1]$. Note que

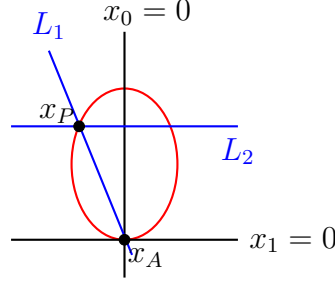
$$W_7 \stackrel{MB}{=} [\hat{O} - \hat{O}_1, \hat{O} + \hat{O}_1, x_0x_1] \stackrel{MB}{=} [\hat{O}_1, \hat{O}, x_0x_1] \stackrel{MB}{=} [x_0x_1, x_0^2 - x_1x_2, x_1^2 - x_0x_2].$$

Donde chegamos ao resultado.

(i-2) x_P não pertence a nenhuma das componentes de \hat{A} .

Neste caso, temos que x_A pertence a uma das componentes de \hat{P} (visto que $l_{A,P}$ é do tipo (5)). Geometricamente, a situação é a seguinte

Figura 3.9



Note que, $x_P = [ab : a^2 : b^2]$ para algum $[a : b] \in \mathbb{P}^1$.² De fato, podemos assumir $a = 1$, assim $x_P = [b : 1 : b^2]$ com $b \neq 0$, caso contrário x_P pertenceria a uma das componentes de \hat{A} . Observe que, se $L = a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2$ e $x_P \in L$, temos que

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 + a_2b^2 = 0 &\implies a_1 = -a_0b - a_2b^2 \\ &\implies L = a_0x_0 + (-a_0b - a_2b^2)x_1 + a_2x_2 \\ &\implies L = a_0(x_0 - bx_1) + a_2(x_2 - b^2x_1). \end{aligned}$$

Como $x_A, x_P \in L_1$, segue da equação de L acima que $L_1 = x_0 - bx_1$. Logo, $L_2 = a(x_0 - bx_1) + x_2 - b^2x_1$ com $a \in \mathbb{C}$ visto que $(L_1 \neq L_2)$. Temos então duas possibilidades: $a = 0$ ou $a \neq 0$.

- $a = 0$.

Neste caso, $\hat{P} = (x_0 - bx_1)(x_2 - b^2x_1) = x_0x_2 - b^2x_0x_1 - bx_1x_2 + b^3x_1^2$, com $b \neq 0$. Assim,

$$\begin{aligned} W_1 &= [x_0x_1, x_0^2 - x_1x_2, x_0x_2 - b^2x_0x_1 - bx_1x_2 + b^3x_1^2] \\ &\stackrel{MB}{=} [x_0x_1, x_0^2 - x_1x_2, x_0x_2 - bx_1x_2 + b^3x_1^2] \\ &= [x_0x_1, x_0^2 - x_1x_2, b^3x_1^2 + x_2(x_0 - bx_1)]. \end{aligned}$$

²Se $a = 0$, então $x_P = [0 : 0 : 1] = x_A$ (absurdo).

3. Classificação das órbitas em $G_3(S_2)$ sob a ação de $\text{Aut}(\mathbb{P}^2)$

Seja $\varphi_2 \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $x_0 \mapsto x_0$, $x_1 \mapsto x_1$ e $x_2 \mapsto x_2 + bx_0$. Consequentemente,

$$\begin{aligned}\hat{A} &\mapsto x_0x_1 \\ \hat{O} &\mapsto x_0^2 - x_1x_2 - bx_0x_1 \stackrel{MB}{=} x_0^2 - x_1x_2 \\ \hat{P}_3 &\mapsto b^3x_1^2 + (x_2 - bx_0)(x_0 - bx_1) \\ &\mapsto b^3x_1^2 + x_0x_2 - bx_0^2 - bx_1x_2 + b^2x_0x_1 \stackrel{MB}{=} b^3x_1^2 + x_0x_2.\end{aligned}$$

Diante disso, $W_2 = \varphi_2 \bullet W_1 = [x_0x_1, x_0^2 - x_1x_2, b^3x_1^2 + x_0x_2]$.

Considere $\varphi_3 \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ em que $x_0 \mapsto \alpha x_0$, $x_1 \mapsto \alpha^2 x_1$ e $x_2 \mapsto x_2$, com $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $\alpha^3 = \frac{1}{b^3}$. Daí,

$$\begin{aligned}\hat{A} &\mapsto \alpha\beta x_0x_1 \stackrel{MB}{=} x_0x_1 \\ \hat{O} &\mapsto \alpha^2x_0^2 - \alpha^2x_1x_2 \stackrel{MB}{=} x_0^2 - x_1x_2 \\ \hat{P}_3 &\mapsto b^3\alpha^4x_1^2 + \alpha x_0x_2 = b^3\alpha^3\alpha x_1^2 + \alpha x_0x_2 = \alpha x_1^2 + \alpha x_0x_2 \stackrel{MB}{=} x_1^2 - x_0x_2.\end{aligned}$$

Obtendo o resultado almejado $W_3 = \varphi_3 \bullet W_2 = [x_0x_1, x_0^2 - x_1x_2, x_1^2 - x_0x_2]$.

• $a \neq 0$

Neste caso, $L_2 = a(x_0 - bx_1) + x_2 - b^2x_1$ com $ab \neq 0$ e por uma MB obtemos

$$L_1 \cdot L_2 = sx_0^2 + tx_1^2 + x_0x_2 \quad \text{com } s = a - b, \text{ e } t = ab^2 + b^3.$$

Logo, $W_1 = [x_0x_1, x_0^2 - x_1x_2, sx_0^2 + tx_1^2 + x_0x_2]$.

A seguir, considere $\varphi_2 \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $x_0 \mapsto x_0$, $x_1 \mapsto x_1$ e $x_2 \mapsto x_2 - sx_0$. Observe que, \hat{A} e \hat{O} se mantêm invariantes a menos de uma MB e $\hat{P}_1 \xrightarrow{\varphi_2} sx_0^2 + tx_1^2 + x_0x_2 - sx_0^2 = tx_1^2 + x_0x_2$.

Com isso, temos duas possibilidades: $t = 0$ ou $t \neq 0$.

Se $t = 0$, então $W_2 = \varphi_2 \bullet W_1 = [x_0x_1, x_0^2 - x_1x_2, x_0x_2]$. Verificamos (com auxílio do software MAXIMA) que Γ_{W_2} é uma cúbica redutível.

Para $t \neq 0$, considere $\varphi_3 \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $x_0 \mapsto \alpha x_0$, $x_1 \mapsto \alpha^2 x_1$ e $x_2 \mapsto x_2$ com $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $\alpha^3 = -\frac{1}{t}$. Assim,

$$\begin{aligned}\hat{A} &\mapsto \alpha^3x_0x_1 \stackrel{MB}{=} x_0x_1 \\ \hat{O} &\mapsto \alpha^2x_0^2 - \alpha^2x_1x_2 \stackrel{MB}{=} x_0^2 - x_1x_2 \\ \hat{P}_3 &\mapsto t\alpha^4x_1^2 + \alpha x_0x_2 = -\alpha x_1^2 + \alpha x_0x_2 \stackrel{MB}{=} x_1^2 - x_0x_2.\end{aligned}$$

Logo, $W_3 = \varphi_3 \bullet W_2 = [x_0x_1, x_0^2 - x_1x_2, x_1^2 - x_0x_2]$ obtendo o resultado desejado.

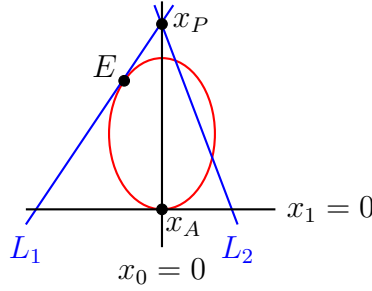
(ii) $x_P \notin \hat{O}$.

Analogamente, precisamos considerar duas possibilidades:

(ii-1) x_P pertence a exatamente a uma das componentes de $\hat{A} = x_0x_1$.

Suponha que x_P pertença a componente dada pela equação $x_0 = 0$, que representamos graficamente a seguir:

Figura 3.10



De modo que $L_1 = T_E\hat{O}$ sendo $E = [b : 1 : b^2]$. Note que, $x_P \neq [0 : 0 : 1] = x_A$ (está na reta $x_0 = 0$) assim $x_P = [0 : 1 : t]$.

De fato, como $\nabla\hat{O} = (-2x_0, x_2, x_1)$, temos $L_1 = T_E\hat{O} = -2bx_0 + b^2x_1 + x_2$, além disso, $x_P \in T_E\hat{O}$ o que implica $b^2 + t = 0$. Assim, $x_P = [0 : 1 : -b^2]$. Observe que as retas passando por x_P e distintas de $x_0 = 0$ são da forma: $ax_0 + x_2 + b^2x_1 = 0$, com $a \in \mathbb{C}$. Logo,

$$L_1 = -2bx_0 + x_2 + b^2x_1 \quad \text{e} \quad L_2 = ax_0 + x_2 + b^2x_1 \quad \text{com} \quad a \in \mathbb{C}.$$

Temos duas possibilidades para a : $a = 0$ ou $a \neq 0$.

- $a = 0$.

Assim, $L_2 = x_2 + b^2x_1$ e $L_1 \cdot L_2 = (-2bx_0 + x_2 + b^2x_1) \cdot (x_2 + b^2x_1)$. Portanto, a menos de uma MB , $W_1 = [x_0x_1, x_0^2 - x_1x_2, -2bx_0x_2 + x_2^2 + 2b^2x_1x_2 + b^4x_1^2]$.

Considere $\varphi_2 \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ determinada por $x_0 \mapsto x_0$, $x_1 \mapsto x_1$ e $x_2 \mapsto x_2 + 2bx_0$. Assim,

$$\begin{aligned} \hat{P}_1 &\xrightarrow{\varphi_2} -2bx_0(x_2 + 2bx_0) + (x_2 + 2bx_0)^2 + 2b^2x_1^2 + 2b^2x_1(x_2 + 2bx_0) + b^4x_1^2 \\ &\xrightarrow{\varphi_2} x_2^2 + 2bx_0x_2 + b^4x_1^2 \quad (\text{após uma } MB). \end{aligned}$$

Logo, após uma MB temos $W_2 = [x_0x_1, x_0^2 - x_1x_2, x_2^2 + 2bx_0x_2 + b^4x_1^2]$. A seguir,

considere $\varphi_3 \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $x_0 \mapsto \frac{1}{b}x_0$, $x_1 \mapsto \frac{1}{b^2}x_1$ e $x_2 \mapsto x_2$. Logo,

$$\begin{aligned}\hat{A} &\mapsto \frac{1}{b^3}x_0x_1 \stackrel{MB}{=} x_0x_1 \\ \hat{O} &\mapsto \frac{1}{b^2}x_0^2 - \frac{1}{b^2}x_1x_2 \stackrel{MB}{=} x_0^2 - x_1x_2 \\ \hat{P}_3 &\mapsto x_2^2 + 2b\frac{1}{b}x_0x_2 + b^4\frac{1}{b^4}x_1^2 = x_2^2 + x_0x_2 + x_1^2.\end{aligned}$$

Dessa forma, $W_3 = [x_0x_1, x_0^2 - x_1x_2, x_2^2 + x_0x_2 + x_1^2]$. Utilizando o software MAXIMA, verifica-se que Γ_{W_3} é uma cúbica não singular (absurdo).

- $a \neq 0$.

Neste caso, $L_2 = ax_0 + x_2 + b^2x_1$ com $a \neq 0$. Assim,

$$\hat{P}_1 = L_1 \cdot L_2 = (x_2 - 2bx_0 + b^2x_1) \cdot (ax_0 + x_2 + b^2x_1).$$

Após MB obtemos $W_1 = [x_0x_1, x_0 - x_1x_2, x_1^2 + \eta x_2^2 + \mu x_1x_2 + \nu x_0x_2 + \delta x_0^2]$. Considere $\varphi_2 \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $x_0 \mapsto x_0$, $x_1 \mapsto x_1$ e $x_2 \mapsto x_2 + \theta x_0$ com θ solução da equação $a_1t^2 + \gamma t + \delta = 0$. Note que

$$\begin{aligned}\hat{P}_1 &\xrightarrow{\varphi_2} x_1^2 + \eta(x_2^2 + \theta^2x_0^2 + 2\theta x_0x_2) + \mu x_1(x_2 + \theta x_0) + \nu x_0(x_2 + \theta x_0) + \delta x_0^2 \\ &\xrightarrow{\varphi_2} x_1^2 + x_2(\eta x_2 + \mu_1x_1 + \nu_1x_0).\end{aligned}$$

Segue que $W_2 \stackrel{MB}{=} [x_0x_1, x_0^2 - x_1x_2, x_1^2 + x_2(\eta x_2 + \mu_1x_1 + \nu_1x_0)]$. Considere $\varphi_3 \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $x_0 \mapsto \alpha x_0$, $x_1 \mapsto x_1$ e $x_2 \mapsto \gamma x_2$ com $\gamma \in \mathbb{C}$ tal que $\gamma^2 = \frac{1}{\eta}$ e $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $\alpha^2 = \gamma$. Note que

$$\hat{P}_2 \xrightarrow{\varphi_3} x_1^2 + \gamma^2\eta x_2^2 + \mu_2x_1x_2 + \nu_2x_0x_2 = x_1^2 + x_2^2 + \mu_2x_1x_2 + \nu_2x_0x_2.$$

Logo,

$$\begin{aligned}W_3 = \varphi_3 \bullet W_2 &= [x_0x_1, x_0^2 - x_1x_2, x_1^2 + x_2^2 + \mu_2x_1x_2 + \nu_2x_0x_2] \\ &\stackrel{MB}{=} [x_0x_1, x_0^2 - x_1x_2, x_1^2 + x_2^2 + \mu_2x_0^2 + \nu_2x_0x_2].\end{aligned}$$

Agora, seja $\varphi_4 \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ determinada por $x_0 \mapsto x_0$, $x_1 \mapsto x_1$ e $x_2 \mapsto x_2 + \theta x_0$ com θ solução da equação $t^2 + \nu_2t + \mu_2 = 0$. Neste caso, \hat{A} e \hat{O} são fixadas por φ_4 (a menos de uma MB) e

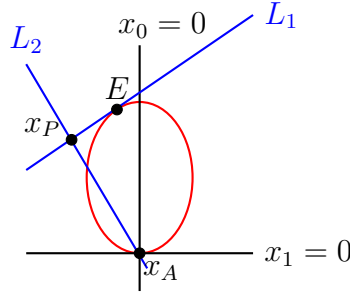
$$\hat{P}_3 \xrightarrow{\varphi_4} x_1^2 + x_2^2 + \theta^2x_0^2 + 2\theta x_0x_2 + \mu_2x_0^2 + \nu_2x_0x_2 + \nu_2\theta x_0^2 = x_1^2 + x_2^2 + \nu_3x_0x_2.$$

Portanto, $W_4 = [x_0x_1, x_0^2 - x_1x_2, x_1^2 + x_2^2 + \nu_3x_0x_2]$. Verificamos que Γ_{W_4} é uma cúbica não singular (absurdo).

(ii-2) x_P não pertence a nenhuma das componentes de \hat{A} .

Nesse caso, x_A pertence a exatamente umas das componentes de $L_1 \cdot L_2 = \hat{P}_1$. Segue uma representação gráfica deste caso

Figura 3.11



sendo $L_1 = T_E\hat{O}$ com $E = [b : 1 : b^2]$ e $L_2 = l_{x_A, x_P}$. Assim, de forma análoga, obtemos

$$\begin{cases} L_1 = x_2 + b^2x_1 - 2bx_0 & (\text{tangente}) \quad \text{com } b \neq 0 \\ L_2 = x_0 + \nu_1x_1 & (\text{secante}) \quad \text{com } \nu_1 \neq 0. \end{cases}$$

Assim, $\hat{P} = L_1 \cdot L_2 = x_0x_2 + b^2x_0x_1 - 2bx_0^2 + \nu_1x_1x_2 + b^2\nu_1x_1^2 - 2b\nu_1x_0x_1$.

Logo, $W_1 \stackrel{MB}{=} [x_0x_1, x_0^2 - x_1x_2, x_0x_2 + \nu_1x_1x_2 + b^2\nu_1x_1^2 - 2bx_0^2]$. Considere $\varphi_2 \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $x_0 \mapsto x_0$, $x_1 \mapsto x_1$ e $x_2 \mapsto x_2 + 2bx_0$. Daí,

$$\hat{P}_1 \xrightarrow{\varphi_2} x_0(x_2 + 2bx_0) - 2bx_0^2 + \nu_1x_1(x_2 + 2bx_0) + b^2\nu_1x_1^2 \stackrel{MB}{=} x_0x_2 + \nu_1x_1x_2 + b^2\nu_1x_1^2.$$

Logo, $W_2 \stackrel{MB}{=} [x_0x_1, x_0^2 - x_1x_2, x_0x_2 + \nu_1x_1x_2 + \nu_2x_1^2]$ sendo $\nu_2 = b^2\nu_1$ e $b\nu_1 \neq 0$. A seguir, considere $\varphi_3 \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $x_0 \mapsto x_0$, $x_1 \mapsto x_1$ e $x_2 \mapsto x_2 - \nu_1x_0$. Assim,

$$\hat{P}_2 \xrightarrow{\varphi_3} x_0(x_2 - \nu_1x_0) + \nu_1x_1(x_2 - \nu_1x_0) + \nu_2x_1^2 \stackrel{MB}{=} x_0x_2 + \nu_2x_1^2.$$

Dessa forma, $W_3 = \varphi_3 \bullet W_2 = [x_0x_1, x_0^2 - x_1x_2, x_0x_2 + \nu_2x_1^2]$. Para concluir, considere $\varphi_4 \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $x_0 \mapsto \alpha x_0$, $x_1 \mapsto \alpha^2x_1$ e $x_2 \mapsto x_2$ com $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $\alpha = -\frac{1}{\nu_2}$. Com isso, temos

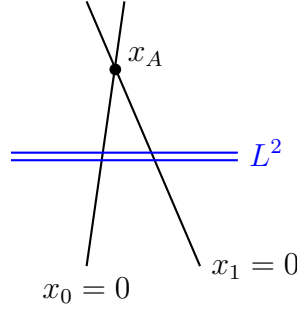
$$\begin{aligned} \hat{A} &\mapsto \alpha^3x_0x_1 \stackrel{MB}{=} x_0x_1 \\ \hat{O} &\mapsto \alpha^2x_0^2 - \alpha^2x_1x_2 \stackrel{MB}{=} x_0^2 - x_1x_2 \\ \hat{P}_3 &\mapsto \alpha x_0x_2 + \alpha^4x_1^2 \stackrel{MB}{=} x_1^2 - x_0x_2. \end{aligned}$$

Portanto, $W_4 = [x_0x_1, x_0^2 - x_1x_2, x_1^2 - x_0x_2]$ e segue o resultado.

Caso 2: $P \in \Delta_{\mathbb{P}^5}$.

Neste caso, já sabemos que existe $\varphi_1 \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $W_1 = [x_1x_0, x_0^2 - x_1x_2, L^2]$. Visto que $l_{A,P}$ é do tipo (4) (na Tabela 2.2), geometricamente temos a seguinte representação para \hat{A} e \hat{P}

Figura 3.12



com $L = x_2 + a_1x_0 + a_2x_1$. Observe que os pontos $Q \in \hat{O}$ distintos de x_A são da forma $Q = [t : 1 : t^2]$. Além disso, $Q = [t : 1 : t^2] \in L$ se, e somente se, $t^2 + a_1t + a_2 = 0$. Agora, pelo tipo da reta $l_{O,P}$, queremos que tal equação tenha duas soluções distintas, ou seja, $a_1^2 - 4a_2 \neq 0$. Assim, por uma MB temos $L^2 = x_2^2 + a_1^2x_0^2 + a_2^2x_1^2 + 2a_1x_0x_2 + 2a_2x_1x_2$. Considere $\varphi_2 \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $x_0 \mapsto x_0$, $x_1 \mapsto x_1$ e $x_2 \mapsto x_2 - a_1x_0$. Logo,

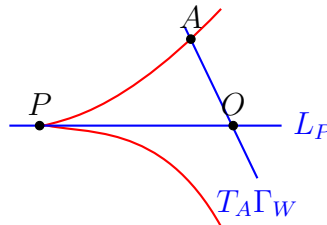
$$\hat{P}_2 \xrightarrow{\varphi_2} x_2^2 + a_1^2x_0^2 - 2a_1x_0x_2 + a_1x_0^2 + a_2^2x_1^2 + 2a_1x_0x_2 - 2a_1^2x_0^2 + 2a_2x_1x_2 = (x_2 + a_2x_1)^2.$$

Note que, se $a_2 = 0$ então $W_2 = [x_0x_1, x_0^2 + x_1x_2, x_2^2]$ e verificamos (com a ajuda do software MAXIMA) que Γ_{W_2} é uma cúbica cuspidal (absurdo). Por outro lado, se $a_2 \neq 0$, considere $\varphi_3 \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $x_0 \mapsto \alpha x_0$, $x_1 \mapsto \frac{1}{a_2}x_1$ e $x_2 \mapsto x_2$ com $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $\alpha^2 = \frac{1}{a_2}$. Assim, $W_3 = \varphi_3 \bullet W_2 = [x_0x_1, x_0^2 - x_1x_2, (x_2 + x_1)^2]$, portanto, tem-se o resultado.

Com isso concluímos a demonstração dos itens 1. e 2.

3. Pelo Lema 3.3.2 existe $A \in \Gamma_W$ ponto de inflexão, L_P reta passando pela singularidade P de Γ_W tal que $\#L_P \cap \Gamma_W = 1$. Assim, ao considerar que $L_P \cap T_A\Gamma_W = \{O\}$ temos a seguinte representação gráfica

Figura 3.13: Representação para uma cúbica cuspidal

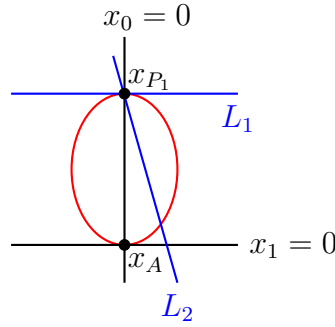


Considerando $W = [\hat{A}, \hat{O}, \hat{P}]$ e sabendo que $T_A \mathbf{C}$ é do tipo (3) na Tabela 2.2, então existe $\varphi_1 \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $W_1 = \varphi_1 \bullet W = [x_0x_1, x_0^2 - x_1x_2, \hat{P}_1]$. Suponha, por absurdo, que $P \in \mathcal{H}_{\mathbb{P}^5} - \Delta_{\mathbb{P}^5}$. Neste caso, temos que $l_{A,O}$ e $l_{P,O}$ são do tipo (3) na Tabela 2.2. Logo, $\hat{P}_1 = L_1 \cdot L_2$ com $x_{P_1} \in \hat{O}$, L_1 tangente a \hat{O} em x_{P_1} e L_2 secante a \hat{O} passando por x_{P_1} . Temos duas situações a analisar:

(i) x_{P_1} pertence a exatamente umas das componentes de $\hat{A} = x_0x_1$.

Como $x_{P_1} \neq x_A$, temos a seguinte representação gráfica

Figura 3.14

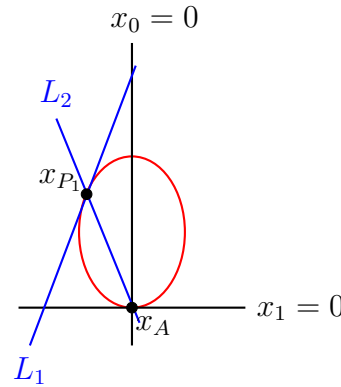


Donde temos $x_{P_1} = [0 : 1 : 0]$, $L_1 = x_2$ e $L_2 = x_2 + \mu x_0$ sendo $\mu \neq 0$. Assim, $W_1 = [x_0x_1, x_0^2 - x_1x_2, x_2(x_2 + \mu x_0)]$ com $\mu \neq 0$. Utilizando o software MAXIMA verificamos que Γ_{W_1} é uma cúbica nodal (absurdo).

(ii) x_{P_1} não pertence a nenhuma das componentes de $\hat{A} = x_0x_1$.

Assim, temos que x_A pertence a exatamente uma das componentes de $L_1 \cdot L_2$. Note que, se $x_A \in L_1$ sendo $L_1 = T_{x_{P_1}} \hat{O}$ teremos que $x_A = x_{P_1}$ (absurdo). Logo, $x_A \in L_2$. Neste caso, temos a seguinte representação gráfica

Figura 3.15



Sendo $x_{P_1} \in \hat{O}$ temos que $x_{P_1} = [t : 1 : t^2]$ com $t \neq 0$. Logo, $L_1 = x_2 + t^2x_1 - 2tx_0$ e $L_2 = x_0 - tx_1$.

Com isso, a menos de uma MB , temos $\hat{P}_1 = x_0x_2 - tx_1x_2 - t^3x_1^2 - 2tx_0^2$. Assim, seja $\varphi_2 \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $x_0 \mapsto x_0$, $x_1 \mapsto x_1$ e $x_2 \mapsto x_2 + 3tx_0$. Segue que

$$\hat{P}_1 \xrightarrow{\varphi_2} x_0x_2 + 3tx_0^2 - tx_1x_2 - 3t^2x_0x_1 - t^3x_1^2 - 2tx_0^2 \stackrel{MB}{=} x_0x_2 - t^3x_1^2.$$

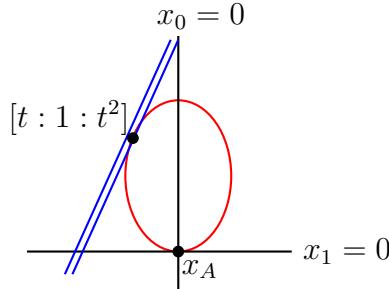
Agora considere $\varphi_3 \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $x_0 \mapsto \alpha x_0$, $x_1 \mapsto \beta x_1$ e $x_2 \mapsto \frac{1}{\alpha}x_2$ com $\beta \in \mathbb{C}$ tal que $\beta^3 = \frac{1}{t^3}$ e $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $\alpha^3 = \beta$. Logo, a menos de uma MB , obtemos

$$W_3 = \varphi_3 \bullet W_2 = [x_0x_1, x_0^2 - x_1x_2, x_0x_2 - x_1^2].$$

Verificamos com a ajuda do software MAXIMA que Γ_{W_3} é uma cúbica nodal (absurdo). Portanto, $P \notin \mathcal{H}_{\mathbb{P}^5} - \Delta_{\mathbb{P}^5}$.

Sendo assim, considere agora $P \in \Delta_{\mathbb{P}^5}$, neste caso temos que l_{A,P_1} e l_{O,P_1} são do tipo (4) na Tabela 2.2. Assim, temos $W_1 = [x_0x_1, x_0^2 - x_1x_2, L^2]$. Como l_{A,P_1} é uma reta do tipo (4), temos a seguinte representação geométrica:

Figura 3.16



Como L determina uma reta tangente a \hat{O} em $[t : 1 : t^2]$ segue que $L = x_2 + t^2x_1 - 2tx_0$. Por uma MB , temos $L^2 = x_2^2 + t^4x_1^2 + 4tx_0^2 + 2t^2x_1x_2 - 4tx_0x_2$. Considere $\varphi_2 \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $x_0 \mapsto x_0$, $x_1 \mapsto x_1$ e $x_2 \mapsto x_2 + 2tx_0$. Logo,

$$L^2 \xrightarrow{\varphi_2} x_2^2 + 4t^2x_0^2 + 4tx_0x_2 + t^4x_1^2 + 4t^2x_0^2 + 2t^2x_1x_2 - 4tx_0x_2 - 8t^2x_0^2 = (x_2 + t^2x_1)^2.$$

Com isso $W_2 = [x_0x_1, x_0^2 - x_1x_2, (x_2 + t^2x_1)^2]$. Se $t \neq 0$, então utilizando o software MAXIMA verificamos que Γ_{W_2} é uma cúbica nodal (absurdo). E para $t = 0$ segue o resultado. \square

3.4 Γ_W é uma cúbica redutível

Proposição 3.4.1. *Se Γ_W é uma cúbica redutível tal que $\Gamma_W = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ sendo Γ_1 uma cônica não singular e Γ_2 uma reta secante a Γ_1 de modo que $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \{A, B\}$. Então,*

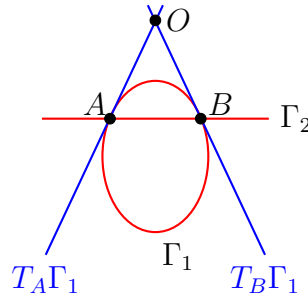
3. Classificação das órbitas em $G_3(S_2)$ sob a ação de $\text{Aut}(\mathbb{P}^2)$

$A, B \in \mathcal{H}_{\mathbb{P}^5} - \Delta_{\mathbb{P}^5}$ ou $A, B \in \Delta_{\mathbb{P}^5}$. Além disso,

1. Se $A, B \notin \Delta_{\mathbb{P}^5}$ então existe $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $\varphi \bullet W = [x_0x_1, x_0^2 - x_1x_2, x_0x_2]$;
2. Se $A, B \in \Delta_{\mathbb{P}^5}$ então existe $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $\varphi \bullet W = [x_1^2, x_0^2 - x_1x_2, x_2^2]$.

Demonstração. Assuma que $T_A\Gamma_1 \cap T_B\Gamma_1 = \{O\}$. Assim, podemos considerar a seguinte representação gráfica

Figura 3.17



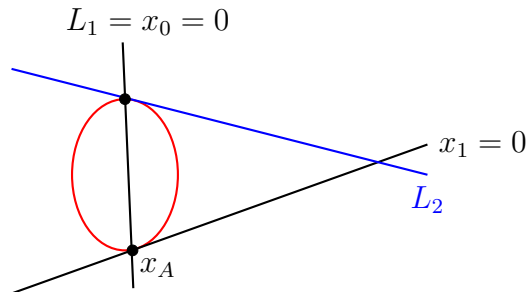
Assim, $W = [\hat{A}, \hat{O}, \hat{B}]$. Temos três casos a considerar.

Caso 1 : $A, B \in \mathcal{H}_{\mathbb{P}^5} - \Delta_{\mathbb{P}^5}$.

Neste caso, $\Gamma_2 = l_{A,B}$ é do tipo (7) e $l_{A,O}, l_{B,O}$ são do tipo (3) na Tabela 2.2. Sendo assim, existe $\varphi_1 \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $W_1 = \varphi_1 \bullet W = [x_0x_1, x_0^2 - x_1x_2, L_1 \cdot L_2]$. Pelo tipo da reta $l_{A,B}$, temos duas possibilidades: $L_1 = x_0$ ou $L_1 = x_1$.

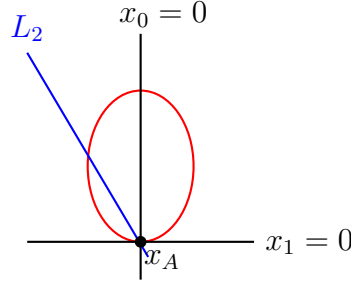
- $L_1 = x_0$. Necessariamente, $L_2 = x_2$. Assim, o resultado em 1. segue, visto que $W_1 = [x_0x_1, x_0^2 - x_1x_2, x_0x_2]$. Temos a seguinte representação gráfica

Figura 3.18



- $L_1 = x_1$. Neste caso, L_2 é uma reta secante a \hat{O} passando por x_A . Temos a seguinte representação geométrica

Figura 3.19



Logo, $L_2 = x_1 + \mu x_0$ com $\mu \neq 0$. Assim,

$$W_1 = [x_0x_1, x_0^2 - x_1x_2, (x_1 + \mu x_0)x_1] \stackrel{MB}{=} [x_0x_1, x_0^2 - x_1x_2, x_1^2].$$

Verificamos (novamente utilizando o software MAXIMA) que Γ_{W_1} consiste de três retas distintas e não concorrentes (absurdo).

Caso 2 : $A \in \mathcal{H}_{\mathbb{P}^5} - \Delta_{\mathbb{P}^5}$ e $B \in \Delta_{\mathbb{P}^5}$.

Neste caso, $l_{A,B}$ é do tipo (8), $l_{A,O}$ é do tipo (3) e $l_{B,O}$ é do tipo (1) na Tabela 2.2. Com isso, escolha $\varphi_1 \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $W_1 = \varphi_1 \bullet W = [x_0x_1, x_0^2 - x_1x_2, L^2]$. Sendo $l_{A,B}$ do tipo (8), temos duas possibilidades: $L = x_0$ ou $L = x_1$.

- se $L = x_0$ teremos $W_1 = [x_0x_1, x_0^2 - x_1x_2, x_0^2]$. Neste caso, verificamos que Γ_{W_1} é uma cúbica redutível, cujas componentes são uma reta dupla e uma secante (absurdo).
- se $L = x_1$ teremos $W_1 = [x_0x_1, x_0^2 - x_1x_2, x_1^2]$. Neste caso, Γ_{W_1} é uma reta tripla (absurdo).

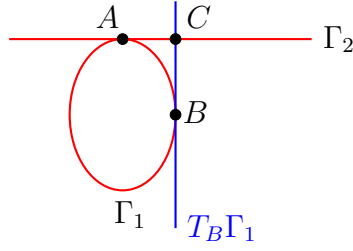
Caso 3 : $A, B \in \Delta_{\mathbb{P}^5}$.

Temos que $l_{A,B}$ é do tipo (2), $l_{A,O}$ e $l_{B,O}$ são do tipo (1) na Tabela 2.2. Logo, existe $\varphi_1 \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $W_1 = \varphi_1 \bullet W = [x_1^2, x_0^2 - x_1x_2, L^2]$ com L tangente a \hat{O} e $\{x_1, L\} \perp LI$. Observe que, podemos fazer uma MCP de modo que pela Proposição 2.1.1 existe $\varphi_2 \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ em que $\varphi_2(\hat{O}) = \hat{O}$ e $\varphi_2(p) = [0 : 1 : 0]$, $\varphi_2(q) = [0 : 0 : 1]$ para quaisquer $p, q \in \hat{O}$. Assim, o resultado em 2. segue, visto que $W_2 = \varphi_2 \bullet W_1 = [x_1^2, x_0^2 - x_1x_2, x_2^2]$. \square

Proposição 3.4.2. Se Γ_W é uma cúbica redutível tal que $\Gamma_W = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ sendo Γ_1 uma cônica não singular e Γ_2 uma reta tangente a Γ_1 . Então existe $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $\varphi \bullet W = [x_0^2, x_0x_1, x_2(x_1 + x_2)]$.

Demonstração. Assuma que $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \{A\}$. Considere B em $\Gamma_1 - \{A\}$ e $\{C\} = \Gamma_2 \cap T_B\Gamma_1$, conforme ilustra a figura a seguir

Figura 3.20



Sendo $l_{B,C}$ do tipo (5) na Tabela 2.2 e x_B, x_C o ponto de interseção de suas componentes, temos duas possibilidades:

(CB-1) x_C pertence a exatamente uma das componentes de $L_1 \cdot L_2$.

ou

(CB-2) x_B pertence a exatamente uma das componentes de x_0x_2 .

A seguir, note que $W = [\hat{A}, \hat{C}, \hat{B}]$. Temos duas possibilidades: $A \notin \Delta_{\mathbb{P}^5}$ ou $A \in \Delta_{\mathbb{P}^5}$.

Caso 1 : $A \in \mathcal{H}_{\mathbb{P}^5} - \Delta_{\mathbb{P}^5}$

Note que, $l_{A,C} \subset \mathcal{H}_{\mathbb{P}^5}$ é do tipo (7) e $l_{A,B}, l_{B,C}$ são do tipo (5) na Tabela 2.2. Sendo assim, existe $\varphi_1 \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $W_1 = [x_0x_1, x_0x_2, L_1 \cdot L_2]$ com $x_A = [0 : 0 : 1]$ e $x_B = [0 : 1 : 0]$. Analisando a posição relativa de x_0x_1 e $L_1 \cdot L_2$, segue que

(AB-1) x_A pertence a exatamente uma das componentes de $L_1 \cdot L_2$

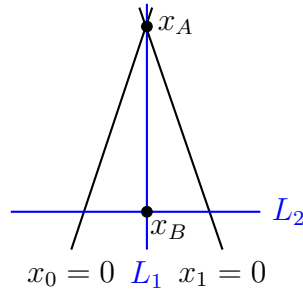
ou

(AB-2) x_B pertence a exatamente uma das componentes de x_0x_1 .

A seguir analisaremos os dois casos acima levando em consideração **(CB-1)** e **(CB-2)**.

Para (AB-1): Neste caso temos a seguinte representação

Figura 3.21



A seguir vamos explorar as condições **(CB-1)** e **(CB-2)** neste caso.

Para (CB-1). Visto que $x_A = [0 : 0 : 1] \in L_1$, segue que $L_1 = x_1 + bx_0$ com $b \neq 0$. Note que, $x_C = [0 : 1 : 0] \notin L_1$, logo $x_C \in L_2$ e $L_2 = x_2 + cx_0$ com $c \neq 0$. Logo, $L_1 \cdot L_2 \stackrel{MB}{=} x_1x_2 + \mu x_0^2$ com $\mu \neq 0$. Portanto, $W_1 = [x_0x_1, x_0x_2, x_1x_2 + \mu x_0^2]$. Verificamos

que Γ_{W_1} é uma cúbica redutível cujas componentes são uma cônica não singular e uma reta secante (absurdo).

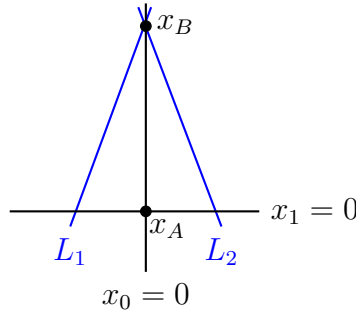
Para (CB-2). Note que, neste caso $x_B \notin \mathcal{Z}(x_0)$. Logo, $x_B \in \mathcal{Z}(x_2)$ e então $x_B = [1 : s : 0]$ com $s \neq 0$. Com isso, $L_1 = x_1 - sx_0$ com $s \neq 0$. Observe que, as retas passando por x_B são da forma $\mathcal{Z}(a_1x_2 + a_2(x_1 - sx_0))$ e $\{L_1, L_2\}$ é LI . Daí, segue que $L_2 = x_2 + \nu(x_1 - sx_0)$. Assim, $L_1 \cdot L_2 \stackrel{MB}{=} x_1x_2 + \nu x_1^2 + \nu s^2 x_0^2$. Dessa forma, $W_1 = [x_0x_1, x_0x_2, x_1x_2 + \nu x_1^2 + \nu s^2 x_0^2]$. Verificamos (utilizando o software MAXIMA) que Γ_{W_1} é uma cúbica redutível cujas componentes são três retas distintas e não concorrentes (absurdo).

A seguir, vamos abordar o caso (AB-2).

Para (AB-2): Neste caso, temos duas novas possibilidades: (AB-2.1): $x_B \in \mathcal{Z}(x_0)$ ou (AB-2.2): $x_B \in \mathcal{Z}(x_1)$.

(AB-2.1) $x_B \in \mathcal{Z}(x_0)$. Temos a seguinte representação gráfica

Figura 3.22



Tendo em consideração (CB-1) e (CB-2) segue que:

Para (CB-1). $x_C \in L_i$ para algum i . Neste caso, sendo $x_B = [0 : 1 : s]$ com $s \neq 0$ e que as retas passando por x_B distintas de $x_0 = 0$ são da forma $L_i = ax_0 + x_2 - sx_1$ com $a \in \mathbb{C}$. Assim, se $x_C = [0 : 1 : 0] \in L_i$ temos por consequência que $s = 0$ (absurdo).

Para (CB-2). Observe que $x_B = [0 : 1 : s]$ com $s \neq 0$. Logo,

$$\begin{aligned} L_1 \cdot L_2 &= (x_2 - sx_1 + b_1x_0) \cdot (x_2 - sx_1 + b_2x_0) \quad \text{com } b_1 \cdot b_2 \neq 0 \\ &\stackrel{MB}{=} x_2^2 - 2sx_1x_2 + s^2x_1^2 + b_1b_2x_0^2. \end{aligned}$$

Dessa forma, considere $\varphi_2 \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $x_0 \mapsto x_0$, $x_1 \mapsto x_1$ e $x_2 \mapsto x_2 + sx_1$. Assim,

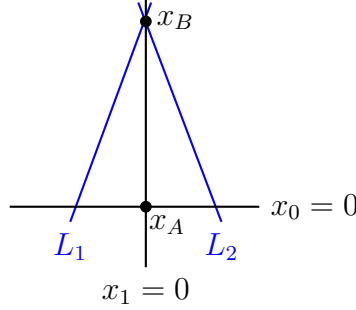
$$\begin{aligned} L_1 \cdot L_2 &\xrightarrow{\varphi_2} x_2^2 + s^2x_1^2 + 2sx_1x_2 - 2sx_1x_2 - 2s^2x_1^2 + s^2x_1^2 + \mu x_0^2 \quad \text{com } \mu \neq 0 \\ &\xrightarrow{\varphi_2} x_2^2 + \mu x_0^2. \end{aligned}$$

Logo, $W_2 = \varphi_2 \bullet W_1 = [x_0x_1, x_0^2 - x_1x_2, x_2^2 + \mu x_0^2]$. Verificamos que Γ_{W_2} uma cúbica

redutível cujas componentes são uma reta dupla e uma reta secante (absurdo).

(AB-2.2) $x_B \in \mathcal{Z}(x_1)$. Neste caso temos a seguinte representação

Figura 3.23



com $x_B = [1 : 0 : s]$. Note que, as retas passando por x_B distintas de $x_1 = 0$ são da forma $\mathcal{Z}(\mu x_1 + x_2 - s x_0)$. A partir da posição relativa de \hat{B} e \hat{C} temos:

Para (CB-1). Se $x_C = [0 : 1 : 0] \in L_1$ então $\mu = 0$. Assuma que $L_1 = x_2 - s x_0$ e $L_2 = x_2 - s x_0 + \mu x_1$ com $\mu \neq 0$. Logo,

$$L_1 \cdot L_2 \stackrel{MB}{=} x_2^2 + s^2 x_0^2 + \mu x_1 x_2.$$

Se $s \neq 0$, verifica-se Γ_{W_1} é uma cúbica não singular. Por outro lado, se $s = 0$ e sendo $\mu \neq 0$, verificamos que Γ_{W_1} é uma cúbica redutível com componentes três retas distintas (absurdo).

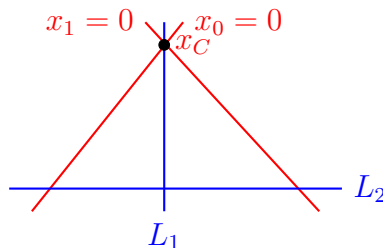
Para (CB-2). Neste caso $x_B \in \mathcal{Z}(x_0)$ ou $x_B \in \mathcal{Z}(x_2)$. Sabemos que $x_B \notin \mathcal{Z}(x_0)$, logo se $x_B \in \mathcal{Z}(x_2)$ obtemos $s = 0$. Sendo assim, $L_1 = x_2 + b_1 x_0$ e $L_2 = x_2 + b_2 x_0$ e segue que $L_1 \cdot L_2 \stackrel{MB}{=} x_2^2 + \mu x_0^2$ com $\mu \neq 0$. Com isso obtemos $W_1 = [x_0 x_1, x_0^2 - x_1 x_2, x_2^2 + \mu x_0^2]$. Verificamos que Γ_{W_1} é uma cúbica redutível cujas componentes são uma reta dupla e uma reta secante (absurdo).

Caso 2 : $A \in \Delta_{\mathbb{P}^5}$

Neste caso, $l_{A,C}$ é do tipo (8) na Tabela 2.2. Assim, existe $\varphi_1 \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $W_1 = [x_0^2, x_0 x_1, L_1 \cdot L_2]$. Além disso, temos que $l_{A,B}$ é do tipo (4) e $l_{B,C}$ é do tipo (6). Novamente, pela posição relativa de \hat{B} e \hat{C} temos duas possibilidades:

Para (CB-1). Neste caso, $x_C = [0 : 0 : 1]$. Assuma que $x_C \in L_1$. Segue uma representação geométrica deste caso

Figura 3.24

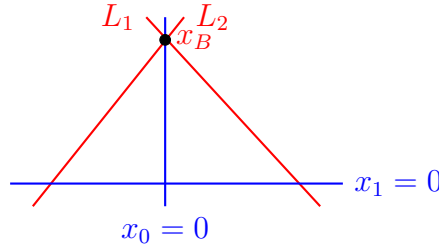


Com isso, pelo tipo da reta $l_{A,B}$ temos que $\{L_1, L_2, x_0\}$ é LI . Dessa forma, temos que $L_1 = x_1 + ax_0$, com $a \neq 0$ e $L_2 = x_2 + b_1x_1 + b_0x_0$. Logo, por uma MB obtemos $L_1 \cdot L_2 = x_1x_2 + b_1x_1^2 + ax_0x_2$. Assim, $W_1 = [x_0^2, x_0x_1, x_1x_2 + b_1x_1^2 + ax_0x_2]$. Verificamos com o auxílio do MAXIMA que Γ_{W_1} é uma cúbica redutível cujas componentes são uma reta dupla e uma reta secante (absurdo).

Para (CB-2). Neste caso, temos duas possibilidades a analisar: $x_B \in \mathcal{Z}(x_0)$ ou $x_B \in \mathcal{Z}(x_1)$

- $x_B \in \mathcal{Z}(x_0)$. Note que, podemos representar geometricamente na forma

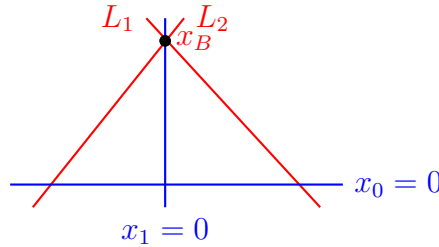
Figura 3.25



Dessa forma, $x_B = [0 : 1 : t]$ e a família de retas passando por x_B distintas da reta $x_0 = 0$, é dada por $ux_0 + x_2 - tx_1 = 0$ com $u \in \mathbb{C}$. Assim, $L_1 = x_2 - tx_1 + b_1x_0$ e $L_2 = x_2 - tx_1 + b_2x_0$ com $b_1 \neq b_2$, o que implica (a menos de uma MB) $L_1 \cdot L_2 = x_2^2 + t^2x_1^2 - 2tx_1x_2 + ax_0x_2$, com $a \neq 0$. Em ambos dos casos, $t = 0$ ou $t \neq 0$, verificamos que Γ_{W_1} é uma cúbica redutível cujas componentes são uma reta dupla e uma reta secante (absurdo).

- $x_B \in \mathcal{Z}(x_1)$. Conforme ilustra a figura a seguir

Figura 3.26



com $x_B = [1 : 0 : t]$.

Sabemos que existe $\varphi_2 \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $x_0 \mapsto x_0$, $x_1 \mapsto x_1$ e $L_1 \mapsto x_2$. Dessa forma, obtemos $x_B = [1 : 0 : 0]$ e $L_2 = x_2 + \mu x_1$ com $\mu \neq 0$. Por fim, considere

$\varphi_3 \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $x_0 \mapsto x_0$, $x_1 \mapsto \frac{1}{\mu}x_1$ e $x_2 \mapsto x_2$. Assim, obtemos

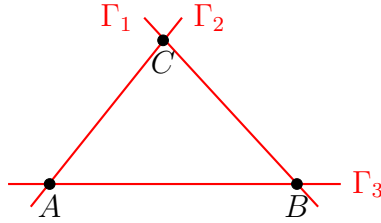
$$W_3 = \varphi_3 \bullet W_2 = [x_0^2, \frac{1}{\mu}x_0x_1, x_2(x_2 + \mu\frac{1}{\mu}x_1)] \stackrel{MB}{=} [x_0^2, x_0x_1, x_2(x_1 + x_2)].$$

Portanto, segue o resultado. \square

Proposição 3.4.3. *Seja $\Gamma_W = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ sendo Γ_i retas distintas para $i = 1, 2, 3$. Verifica-se que*

1. *As retas Γ_1 , Γ_2 e Γ_3 não são concorrentes;*
2. *Se A, B, C são os pontos singulares de Γ_W (ilustrada na seguinte figura)*

Figura 3.27

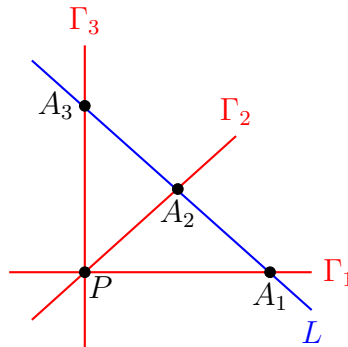


então temos duas possibilidades:

- (a) $A, B, C \in \mathcal{H}_{\mathbb{P}^5} - \Delta_{\mathbb{P}^5}$ e existe $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $\varphi \bullet W = [x_0x_1, x_0x_2, x_1x_2]$;
- (b) $A, B, C \in \Delta_{\mathbb{P}^5}$ e existe $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $\varphi \bullet W = [x_0^2, x_1^2, x_2^2]$.

Demonstração. 1. Suponha pelo absurdo que $\Gamma_W = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ sendo Γ_1 , Γ_2 e Γ_3 retas distintas concorrentes em P . Considere, uma reta L tal que $P \notin L$ e $\{A_i\} = L \cap \Gamma_i$ para $i = 1, 2, 3$. Conforme ilustra na figura a seguir

Figura 3.28



Assim, $W = [\hat{A}_1, \hat{P}, \hat{A}_2]$. Temos duas possibilidades: $P \notin \Delta_{\mathbb{P}^5}$ ou $P \in \Delta_{\mathbb{P}^5}$.

Caso 1 : $P \in \mathcal{H}_{\mathbb{P}^5} - \Delta_{\mathbb{P}^5}$. Dessa forma, percebe-se que $l_{A_1,P}, l_{A_2,P}$ são do tipo (7) e l_{A_1,A_2} é do tipo (6) na Tabela 2.2. Assim, existe $\varphi_1 \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $W_1 = \varphi_1 \bullet W = [x_0x_1, x_0x_2, L_1 \cdot L_2]$. Visto que $\text{mdc}(\hat{P}, \hat{A}_2) \neq 1$ segue que: $L_1 = x_0$ ou $L_1 = x_2$.

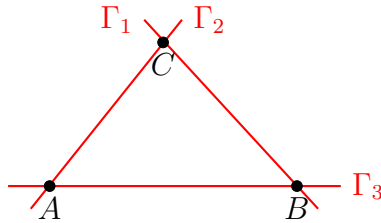
- se $L_1 = x_0$, então x_0 é fator comum das três cônicas, logo $W_1 \subset \mathcal{H}_{\mathbb{P}^5}$ (absurdo).
- se $L_1 = x_2$, então segue que $\{x_0, x_2, L_2\}$ é LI . Assim, $L_2 = x_1 + a_1x_0 + a_2x_2$ e $L_1 \cdot L_2 \stackrel{MB}{=} x_1x_2 + a_2x_2^2$. Logo, $W_1 = [x_0x_1, x_0x_2, x_1x_2 + a_2x_2^2]$. Verificamos que Γ_{W_1} consiste de três retas distintas não concorrentes (absurdo).

Caso 2 : $P \in \Delta_{\mathbb{P}^5}$. Agora, note que $l_{A_1,P}, l_{A_2,P}$ são do tipo (8) e l_{A_1,A_2} é do tipo (6) na Tabela 2.2. Assim, existe $\varphi_1 \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $W_1 = \varphi_1 \bullet W = [x_0x_1, x_0^2, L_1 \cdot L_2]$. Porém, como $\text{mdc}(\hat{P}, \hat{A}_2) \neq 1$ temos que $L_1 = x_0$, logo x_0 é um fator comum das três cônicas, novamente teremos que $W_1 \subset \mathcal{H}_{\mathbb{P}^5}$ (absurdo).

Portanto, temos que as retas Γ_1, Γ_2 e Γ_3 não são concorrentes.

2. Segue do item 1. desta proposição que Γ_1, Γ_2 e Γ_3 são retas distintas e não concorrentes. Assim, temos a seguinte representação geométrica

Figura 3.29



sendo A, B, C os pontos singulares de Γ_W . Observe que, $W = [\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}]$ e temos os seguintes casos a analisar:

Caso 1 : $A, B, C \in \mathcal{H}_{\mathbb{P}^5} - \Delta_{\mathbb{P}^5}$. Perceba que $l_{A,C}, l_{A,B}$ e $l_{B,C}$ são do tipo (7) na Tabela 2.2. Com isso, existe $\varphi_1 \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $W_1 = \varphi_1 \bullet W = [x_0x_1, x_0x_2, L_1 \cdot L_2]$. Como $\text{mdc}(\hat{A}, \hat{C}) \neq 1$ e $\text{mdc}(\hat{B}, \hat{C}) \neq 1$ temos que $L_1 = x_1$ e $L_2 = x_2$. Portanto, $W_1 = [x_0x_1, x_0x_2, x_1x_2]$ provando o item 2.(a).

Caso 2 : $A, B \in \mathcal{H}_{\mathbb{P}^5} - \Delta_{\mathbb{P}^5}$ e $C \in \Delta_{\mathbb{P}^5}$ (a menos de uma reordenação). Sendo assim, temos que $l_{A,C}$ e $l_{B,C}$ são do tipo (8) e $l_{A,B}$ é do tipo (7) na Tabela 2.2. Dessa forma, existe $\varphi_1 \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $W_1 = \varphi_1 \bullet W = [x_0x_1, x_0x_2, L^2]$. Como $\text{mdc}(\hat{A}, \hat{C}) \neq 1$ e $\text{mdc}(\hat{B}, \hat{C}) \neq 1$ temos $L = \mathcal{Z}(x_0)$. Logo, $W_1 = [x_0x_1, x_0x_2, x_0^2] \subset \mathcal{H}_{\mathbb{P}^5}$ (absurdo).

Caso 3 : $A \in \mathcal{H}_{\mathbb{P}^5} - \Delta_{\mathbb{P}^5}$ e $B, C \in \Delta_{\mathbb{P}^5}$. Neste caso, temos $l_{A,B}$ e $l_{A,C}$ são do tipo (8) na Tabela 2.2. Assim, existe $\varphi_1 \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $W_1 = \varphi_1 \bullet W = [x_0x_1, x_0^2, L^2]$. Sendo $\text{mdc}(\hat{A}, \hat{C}) \neq 1$ temos que $L = x_0$ ou $L = x_1$, em ambos dos casos verifica-se que $W_1 \subset \mathcal{H}_{\mathbb{P}^5}$ (absurdo).

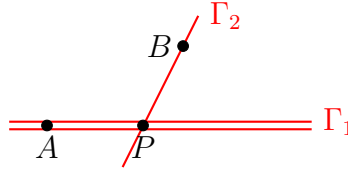
Caso 4 : $A, B, C \in \Delta_{\mathbb{P}^5}$. Note que, $l_{A,C}$, $l_{A,B}$ e $l_{B,C}$ são do tipo (3) na Tabela 2.2. Dessa forma, existe $\varphi_1 \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $W_1 = \varphi_1 \bullet W = [x_0^2, x_1^2, L^2]$. Escreva $L = a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2$. Note que, se $a_2 = 0$ então $W_1 \stackrel{MB}{=} [x_0^2, x_1^2, x_0x_1] \subset \mathcal{H}_{\mathbb{P}^5}$ (absurdo). Assim, $L = x_2 + b_0x_0 + b_1x_1$ e pela Proposição A.0.9 existe $\varphi_2 \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $x_0 \mapsto x_0$, $x_1 \mapsto x_1$ e $L \mapsto x_2$. Logo, $W_2 = \varphi_2 \bullet W_1 = [x_0^2, x_1^2, x_2^2]$, provando assim o item 2.(b). Portanto, segue o resultado. \square

Proposição 3.4.4. *Se Γ_W é uma cúbica não reduzida tal que $\Gamma_W = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ sendo Γ_1 uma reta dupla com reta suporte em M tal que $M \cap \Gamma_2 = \{P\}$. Então $M \cap \Delta_{\mathbb{P}^5}$ é não vazio. Além disso,*

1. Se $\#M \cap \Delta_{\mathbb{P}^5} = 1$ então $P \notin \Delta_{\mathbb{P}^5}$ e existe $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $\varphi \bullet W = [x_0^2, x_0x_1, x_1x_2]$;
2. Se $\#M \cap \Delta_{\mathbb{P}^5} = 2$ então
 - 2-1. Se $P \in \Delta_{\mathbb{P}^5}$ então existe $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $\varphi \bullet W = [x_0^2, x_1^2, x_1x_2]$;
 - 2-2. Se $P \notin \Delta_{\mathbb{P}^5}$ então existe $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $\varphi \bullet W = [x_0^2, x_1^2, x_2(x_0 + x_1)]$.

Demonstração. Considere $A \in M - \{P\}$ e $B \in \Gamma_2 - \{P\}$, conforme ilustramos a seguir

Figura 3.30



Segue da Observação 2.3.2 que $M \cap \Delta_{\mathbb{P}^5}$ consiste no máximo de dois pontos distintos.

Assim, temos três casos a considerar:

Caso 1 : A reta suporte de Γ_1 não contém pontos em $\Delta_{\mathbb{P}^5}$.

Neste caso, $A, P \in \mathcal{H}_{\mathbb{P}^5} - \Delta_{\mathbb{P}^5}$ e $W = [\hat{A}, \hat{P}, \hat{B}]$. Assim, $l_{A,P}$ é do tipo (7) na Tabela 2.2. Logo, existe $\varphi_1 \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $W_1 = \varphi_1 \bullet W = [x_0x_1, x_0x_2, L_1 \cdot L_2]$. Note que, a reta $l_{B,P}$ é do tipo (7), logo temos duas possibilidades para L_1 :

- (i) $L_1 = x_0$. Neste caso, obtemos que $W_1 \subset \mathcal{H}_{\mathbb{P}^5}$ (absurdo).
- (ii) $L_1 = x_2$. Logo, $l_{A,B}$ é do tipo (5), $x_A = [0 : 0 : 1]$ e $x_B = [s : t : 0]$. Então, ao analisarmos a posição relativa de x_A e x_B temos que:
 - (ii-1) x_A pertence a uma das componentes de $x_2 \cdot L_2$. Observe que, necessariamente $x_A \in L_2$ e $L_2 = x_1 + \mu x_0$ com $\mu \in \mathbb{C}$. Neste caso, verificamos que Γ_{W_1} é uma cúbica cujas componentes são três retas distintas (absurdo).
 - (ii-2) x_B pertence a uma das componentes de x_0x_1 . Note que, se $x_B \in \mathcal{Z}(x_0)$, segue que $x_B = [0 : 1 : 0]$ e $L_2 = bx_0 + x_2$ com $b \in \mathbb{C}$. Como $l_{B,P} \subset \mathcal{H}_{\mathbb{P}^5}$ é do tipo (7)

temos que $\{x_2, x_0, bx_0 + x_2\}$ deveria ser LI , o que é um absurdo. Por outro lado, se $x_B \in \mathcal{Z}(x_1)$ temos que $x_B = [1 : 0 : 0]$ e $L_2 = x_2 + \mu x_1$ com $\mu \neq 0$. Assim, $W_1 = [x_0 x_1, x_0 x_2, x_2(x_2 + \mu x_1)]$ e verificamos que Γ_{W_1} é uma cúbica cujas componentes são três retas distintas (absurdo).

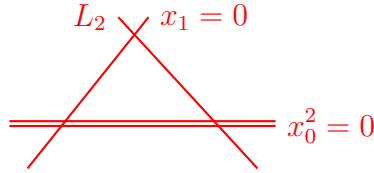
Caso 2 : A reta suporte de Γ_1 contém exatamente um ponto de $\Delta_{\mathbb{P}^5}$.

Por conta da análise feita no caso 1, não ocorre que $A, P \in \mathcal{H}_{\mathbb{P}^5} - \Delta_{\mathbb{P}^5}$. Assim, temos as seguintes duas possibilidades a analisar: (i) $A \in \mathcal{H}_{\mathbb{P}^5} - \Delta_{\mathbb{P}^5}$ e $P \in \Delta_{\mathbb{P}^5}$ ou (ii) $P \in \mathcal{H}_{\mathbb{P}^5} - \Delta_{\mathbb{P}^5}$ e $A \in \Delta_{\mathbb{P}^5}$.

(i) Neste caso, temos que $l_{A,P}$ e $l_{B,P}$ são do tipo (8) na Tabela 2.2. Dessa forma, escolha $\varphi_1 \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $W_1 = \varphi_1 \bullet W = [x_0 x_1, x_0^2, L_1 \cdot L_2]$. Logo, pelo tipo da reta $l_{B,P}$ temos que $L_1 = x_0$ e $\{x_0, L_2\}$ é LI . Assim, o $\text{mdc}(\hat{A}, \hat{B}) = x_0$ o que implica $l_{A,B} \subset \mathcal{H}_{\mathbb{P}^5}$ (absurdo).

(ii) Segue que $l_{A,P}$ é do tipo (8) na Tabela 2.2. Escolha $\varphi_1 \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $W_1 = \varphi_1 \bullet W = [x_0^2, x_0 x_1, L_1 \cdot L_2]$. Como $l_{B,P} \subset \mathcal{H}_{\mathbb{P}^5}$ temos $\text{mdc}(\hat{B}, \hat{P}) \neq 1$, segue que $L_1 = x_0$ e obtemos $W_1 \subset \mathcal{H}_{\mathbb{P}^5}$ (absurdo) ou $L_1 = x_1$ e pelo tipo da reta $l_{A,B}$ temos a seguinte representação gráfica

Figura 3.31



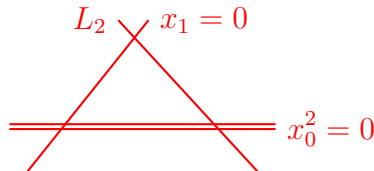
Escolha $\varphi_2 \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $x_0 \mapsto x_0$, $x_1 \mapsto x_1$ e $L_2 \mapsto x_2$. Assim, $W_2 = \varphi_2 \bullet W_1 = [x_0^2, x_0 x_1, x_1 x_2]$, o que prova o item 1. desta proposição.

Caso 3 : A reta suporte de Γ_1 contém exatamente dois ponto de $\Delta_{\mathbb{P}^5}$.

Tendo em consideração o caso 1, para este caso, temos novamente duas possibilidades: (i) $P \in \Delta_{\mathbb{P}^5}$ ou (ii) $P \notin \Delta_{\mathbb{P}^5}$.

(i) Neste caso, sem perda de generalidade podemos assumir que $A, P \in \Delta_{\mathbb{P}^5}$. Perceba que, $l_{A,P}$ é do tipo (3) na Tabela 2.2. Com isso, escolha $\varphi_1 \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $W_1 = \varphi_1 \bullet W = [x_0^2, x_1^2, L_1 \cdot L_2]$. Como $l_{B,P} \subset \mathcal{H}_{\mathbb{P}^5}$, segue que $L_1 = x_1$ e $\{x_1, L_2\}$ é LI , além disso, $l_{A,B}$ é do tipo (4). Assim, temos a seguinte representação gráfica

Figura 3.32



Assim, existe $\varphi_2 \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $x_0 \mapsto x_0$, $x_1 \mapsto x_1$ e $L_2 \mapsto x_2$. Logo, $W_2 = \varphi_2 \bullet W_1 = [x_0^2, x_1^2, x_1 x_2]$. O que prova o item 2-1. desta proposição.

(ii) Neste caso, vamos assumir que $A \in \Delta_{\mathbb{P}^5}$ e escolher $C \neq A \in M$ tal que $C \in \Delta_{\mathbb{P}^5}$. Com isso, temos que $l_{A,C}$ é do tipo (3), e assim, existe $\varphi_1 \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ em que $W_1 = [x_0^2, x_1^2, L_1 \cdot L_2]$. Como $l_{A,B}$ e $l_{B,C}$ são do tipo (4), temos que $\{L_i, x_0, x_1\}$ é LI para algum $i = 1, 2$. Suponha sem perda de generalidade que $\{L_1, x_0, x_1\}$ é LI , dessa forma existe $\varphi_2 \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $x_0 \mapsto x_0$, $x_1 \mapsto x_1$ e $L_1 \mapsto x_2$. Assim, $W_2 = \varphi_2 \bullet W_1 = [x_0^2, x_1^2, x_2 \cdot M]$. Temos duas possibilidades a analisar: $\{M, x_0, x_1\}$ é LI ou LD .

(ii-1) Se $\{M, x_0, x_1\}$ for LI então $M = x_2 + a_0 x_0 + a_1 x_1$. Dessa forma, $W_2 = [x_0^2, x_1^2, x_2(x_2 + a_0 x_0 + a_1 x_1)]$. A seguir, temos duas possibilidades a analisar:

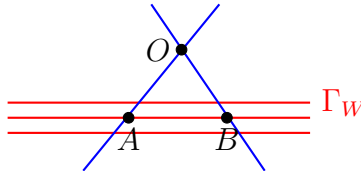
- Se $a_0 a_1 = 0$ então, utilizando o software MAXIMA, verificamos que Γ_{W_2} é uma cúbica cujas componentes são três retas distintas e não concorrentes (absurdo).
- Se $a_0 a_1 \neq 0$ então, novamente pelo auxílio do software MAXIMA, verificamos que Γ_{W_2} é uma cúbica cujas componentes são uma cônica não singular e uma reta secante (absurdo).

(ii-1) Se $\{M, x_0, x_1\}$ é LD . então $M = x_1 + b x_0$ com $b \neq 0$. Seja $\varphi_2 \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $x_0 \mapsto x_0$, $x_1 \mapsto b x_1$ e $L_1 \mapsto x_2$. Daí, $W_2 = \varphi_2 \bullet W_1 = [x_0^2, x_1^2, x_2(x_0 + x_1)]$ o que prova o item 2-2.. Portanto, temos o resultado. \square

Proposição 3.4.5. *Seja $W \in G_3(S_2)$ tal que Γ_W é uma cúbica não reduzida que possui uma única componente irredutível (ou seja, Γ_W é uma reta tripla). Então, existe $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $\varphi \bullet W = [x_0 x_1, x_0^2 - x_1 x_2, x_1^2]$.*

Demonstração. Considere A, B pontos distintos na reta suporte l de Γ_W e $O \notin l$, conforme ilustra a figura a seguir:

Figura 3.33



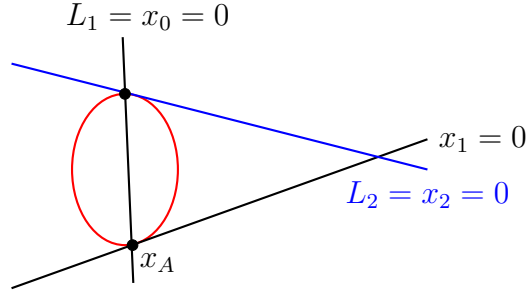
Assim, $W = [\hat{A}, \hat{O}, \hat{B}]$. Vamos considerar os seguintes três casos de acordo com a distribuição dos pontos A, B em relação a $\Delta_{\mathbb{P}^5}$.

Caso 1 : $A, B \in \mathcal{H}_{\mathbb{P}^5} - \Delta_{\mathbb{P}^5}$.

Observe que, $l_{A,O}$ e $l_{B,O}$ são do tipo (3) e $l_{A,B}$ é do tipo (7) na Tabela 2.2. Escolhendo $\varphi_1 \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $\varphi_1 \bullet W = W_1 = [x_0 x_1, x_0^2 - x_1 x_2, L_1 \cdot L_2]$. Veja que, temos duas possibilidades: $L_1 = x_0$ ou $L_1 = x_1$.

(i) $L_1 = x_0$. Visto que $\hat{A} \neq \hat{B}$ e concluímos que $W_1 = [x_0x_1, x_0^2 - x_1x_2, x_0x_2]$. temos a seguinte representação gráfica

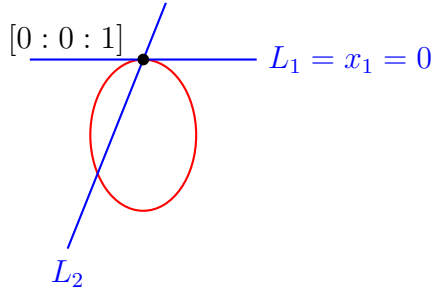
Figura 3.34



Verificamos que Γ_{W_1} é uma cúbica cujas as componentes são uma cônica não singular e uma reta secante (absurdo).

(ii) $L_1 = x_1$. Neste caso temos a seguinte representação gráfica

Figura 3.35



Dessa forma, $L_2 = x_1 + bx_0$ com $b \neq 0$. Assim, o resultado segue, visto que

$$W_1 = [x_0x_1, x_0^2 - x_1x_2, x_1(x_1 + bx_0)] \stackrel{MB}{=} [x_0x_1, x_0^2 - x_1x_2, x_1^2].$$

Caso 2 : $A \in \mathcal{H}_{\mathbb{P}^5} - \Delta_{\mathbb{P}^5}$ e $B \in \Delta_{\mathbb{P}^5}$ (a menos de uma reordenação).

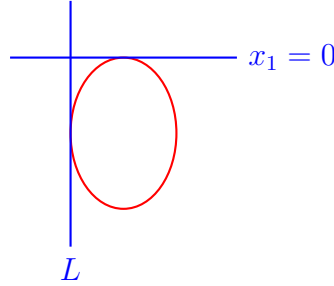
Neste caso, sendo $l_{A,O}$ do tipo (3) na Tabela 2.2, escolha $\varphi_1 \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ em que $W_1 = \varphi_1 \bullet W = [x_0x_1, x_0^2 - x_1x_2, L^2]$. Como $l_{A,B}$ é do tipo (8), segue que $\text{mdc}(\hat{A}, \hat{B}) \neq 1$ o que implica em $L = x_0$ ou $L = x_1$.

- Se $L = x_0$ então $W_1 = [x_0x_1, x_0^2 - x_1x_2, x_0^2]$ e verificamos que Γ_{W_1} é um cúbica redutível cujas as componentes são uma reta dupla e uma reta secante (absurdo).
- Se $L = x_1$ então $W_1 = [x_0x_1, x_0^2 - x_1x_2, x_1^2]$ e temos o resultado.

Caso 3 : $A, B \in \Delta_{\mathbb{P}^5}$.

Observe que $l_{A,O}$, $l_{B,O}$ são do tipo (1) enquanto $l_{A,B}$ é do tipo (3) na Tabela 2.2. Assim, escolha $\varphi_1 \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $\varphi_1 \bullet W = W_1 = [x_1^2, x_0^2 - x_1x_2, L^2]$. Considerando as retas suporte de L^2 e x_1^2 temos a seguinte representação gráfica

Figura 3.36



Observe que, novamente podemos fazer uma *MCP* de modo que pela Proposição 2.1.1 existe $\varphi_2 \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $x_1 \mapsto x_1$ e $L \mapsto x_2$ e $\varphi_2(\hat{O}) = \hat{O}$. Logo, $W_2 = \varphi_2 \bullet W_1 = [x_1^2, x_0^2 - x_1x_2, x_2^2]$ e verificamos que Γ_{W_2} é uma cúbica redutível cujas componentes são uma cônica não singular e uma reta secante (absurdo). \square

3.5 Órbitas dos pontos $W \in G_3(S_2)$ tais que $\pi_W \subset \mathcal{H}_{\mathbb{P}^5}$

Para determinar as órbitas dos pontos $W \in G_3(S_2)$ tais que $\pi_W \subset \mathcal{H}_{\mathbb{P}^5}$, temos o seguinte lema que dará suporte aos resultados a seguir.

Lema 3.5.1. *Se $W \in G_3(S_2)$ for tal que $\pi_W \subset \mathcal{H}_{\mathbb{P}^5}$, então $\pi_W \cap \Delta_{\mathbb{P}^5}$ é não vazio.*

Demonstração. Considere $W = [\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}]$. Observe que, necessariamente os tipos das retas $l_{A,B}$, $l_{A,C}$ e $l_{B,C}$ na Tabela 2.2 variam entre os tipos (2), (7) e (8). Com isso, se $l_{A,B}$ for do tipo (2) ou (8), o resultado segue, como também se $C \in \Delta_{\mathbb{P}^5}$. Caso contrário, escolha $\varphi_1 \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $\varphi_1 \bullet W = W_1 = [x_0x_1, x_0x_2, L_1 \cdot L_2]$. Sendo $l_{A,C}$ e $l_{B,C}$ do tipo (7), temos as seguintes possibilidades: (i) $L_1 = x_0$ ou (ii) $L_1 = x_1$. (i) Note que, $\{x_0, x_1, L_2\}$ e $\{x_0, x_2, L_2\}$ são *LI*. Assim, $L_2 = x_2 + a_1x_1 + a_0x_0$ com $a_1 \neq 0$. Logo, o resultado segue, visto que

$$W_1 = [x_0x_1, x_0x_2, x_0(x_2 + a_1x_1 + a_0x_0)] \stackrel{MB}{=} [x_0x_1, x_0x_2, x_0^2].$$

(ii) Neste caso, sendo $\text{mdc}(\hat{B}, \hat{C}) \neq 1$ segue que $L_2 = x_2$. Logo, $W_1 = [x_0x_1, x_0x_2, x_1x_2]$ e verificamos que Γ_{W_1} é uma cúbica redutível cujas componentes são três retas distintas (absurdo). Portanto, segue o resultado. \square

Proposição 3.5.1. *Considere $W \in G_3(S_2)$ tal que $\pi_W \subset \mathcal{H}_{\mathbb{P}^5}$. Então,*

1. *Se $\#W \cap \Delta = 1$, então existe $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $\varphi \bullet W = [x_0^2, x_0x_1, x_0x_2]$;*

2. Se $\#W \cap \Delta > 1$, então existe $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $\varphi \bullet W = [x_0^2, x_1^2, x_0x_2]$.

Demonstração. Assuma que $W = [\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}]$.

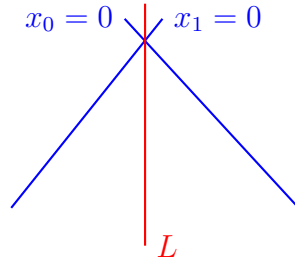
1. Se $A \in \Delta_{\mathbb{P}^5}$ e $B, C \in \mathcal{H}_{\mathbb{P}^5} - \Delta_{\mathbb{P}^5}$, então as retas $l_{A,B}$ e $l_{A,C}$ são do tipo (8) e $l_{B,C}$ são do tipo (7) na Tabela 2.2. Escolha $\varphi_1 \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $W_1 = \varphi_1 \bullet W = [L^2, x_0x_1, x_0x_2]$. Note que, necessariamente $L = x_0$, ou seja, $W_1 = [x_0^2, x_0x_1, x_0x_2]$.

2. Se $A, B \in \Delta_{\mathbb{P}^5}$, então pelo tipo da reta $l_{A,B}$, existe $\varphi_1 \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $W_1 = \varphi_1 \bullet W = [x_0^2, x_1^2, \hat{C}_1]$. Temos assim, duas possibilidades: (i) $\hat{C}_1 \in \Delta$ ou (ii) $\hat{C}_1 \notin \Delta$.

(i) $\hat{C}_1 \in \Delta$, ou seja, $\hat{C}_1 = L^2$. Neste caso, temos $\{x_0, L\}$ e $\{x_1, L\}$ são LI , e assim, temos duas possibilidades: $L \in [x_0, x_1]$ ou $L \notin [x_0, x_1]$.

(i-1) Se $L \in [x_0, x_1]$, então temos a seguinte representação gráfica

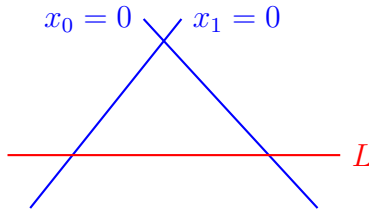
Figura 3.37



com isso, $L = x_1 + bx_0$ com $b \neq 0$. Logo, $W_1 \stackrel{MB}{=} [x_0^2, x_1^2, x_0x_1]$ e temos o resultado.

(i-2) Se $L \notin [x_0, x_1]$, então temos a seguinte representação gráfica

Figura 3.38




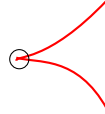
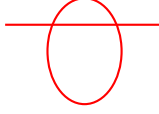
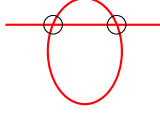
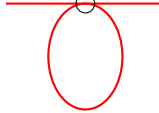
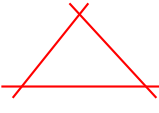
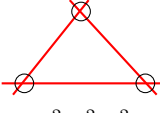
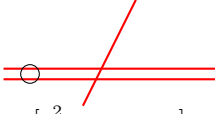
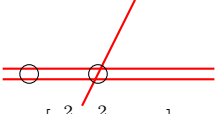
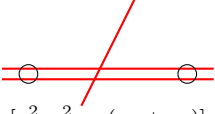
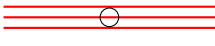




Dessa forma, existe $\varphi_2 \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tal que $x_0 \mapsto x_0$, $x_1 \mapsto x_1$ e $L \mapsto x_2$. Logo, $W_2 = \varphi_2 \bullet W_1 \stackrel{MB}{=} [x_0^2, x_1^2, x_2^2]$. Verificamos que Γ_{W_2} é uma cúbica redutível cujas componentes são três retas distintas (absurdo).

(ii) Se $\hat{C}_1 \in \mathcal{H} - \Delta$, ou seja, $\hat{C}_1 = L_1 \cdot L_2$. Note que, $\text{mdc}(\hat{A}, \hat{C}) \neq 1$ e $\text{mdc}(\hat{B}, \hat{C}) \neq 1$ segue que, necessariamente, $L_1 = x_0$ e $L_2 = x_1$. Assim, $W_1 = [x_0^2, x_1^2, x_0x_1]$ e temos o resultado. \square

Na tabela a seguir, apresentamos a classificação das órbitas em $G_3(S_2)$ sob a ação de $\text{Aut}(\mathbb{P}^2)$.

Tabela 3.1: Classificação das órbitas em $G_3(S_2)$ sob a ação de $\text{Aut}(\mathbb{P}^2)$.

		
$[x_0^2 - x_1x_2, x_0x_1, (x_1 - x_2)(x_1 - ax_2)]$	$[x_0x_1, x_0^2 + x_1x_2, x_1^2 + x_0x_2]$	$[x_0x_1, x_0^2 - x_1x_2, (x_1 + x_2)^2]$
		
$[x_0^2 - x_1x_2, x_0x_1, x_2^2]$	$[x_0x_1, x_0^2 - x_1x_2, x_0x_2]$	$[x_1^2, x_0^2 - x_1x_2, x_2^2]$
		
$[x_0^2, x_0x_1, x_2(x_1 + x_2)]$	$[x_0x_1, x_0x_2, x_1x_2]$	$[x_0^2, x_1^2, x_2^2]$
		
$[x_0^2, x_0x_1, x_1x_2]$	$[x_0^2, x_1^2, x_1x_2]$	$[x_0^2, x_1^2, x_2(x_0 + x_1)]$
		
$[x_0x_1, x_0^2 - x_1x_2, x_1^2]$	$[x_0^2, x_0x_1, x_0x_2]$	$[x_0^2, x_1^2, x_0x_2]$

3.6 Sobre a dimensão das órbitas de $G_3(S_2)$

Nesta subseção, não vamos determinar a dimensão de todas as órbitas, resultantes da ação de $\text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ em $G_3(S_2)$. Apenas, faremos o cálculo para a órbita associada a $W = [x_0x_1, x_0x_2, x_1x_2]$, no qual o leitor poderá visualizar mais uma vez as técnicas utilizadas na Seção 2.2 do Capítulo 2.

Afirmção: Se $W = [x_0x_1, x_0x_2, x_1x_2]$, então $\dim(\mathcal{O}_W) = 6$.

Considere $\varphi \in E_W$ determinada por $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^3)$. Assim,

$$[T_\bullet(x_0x_1), T_\bullet(x_0x_2), T_\bullet(x_1x_2)] = [x_0x_1, x_0x_2, x_1x_2]. \quad (3.18)$$

Note que,

$$\begin{aligned} T_\bullet(x_0x_1) &= (T_\bullet x_0) \cdot (T_\bullet x_1) = (ax_0 + bx_1 + cx_2) \cdot (a_1x_0 + b_1x_1 + c_1x_2) \\ &= aa_1x_0^2 + (ab_1 + a_1b)x_0x_1 + (ac_1 + a_1c)x_0x_2 + bb_1x_1^2 \\ &\quad + (bc_1 + b_1c)x_1x_2 + cc_1x_2^2. \end{aligned}$$

Segue de (3.18) que

$$T_{\bullet}(x_0x_2) = \alpha x_0x_1 + \beta x_0x_2 + \gamma x_1x_2. \quad (3.19)$$

Logo,

$$aa_1 = 0, \quad bb_1 = 0, \quad cc_1 = 0, \quad ab_1 + a_1b = \alpha, \quad ac_1 + a_1c = \beta, \quad bc_1 + b_1c = \gamma.$$

Assim, para o sistema acima segue a seguinte possibilidade:

- $a = b = 0$ ($c \neq 0$) e $c_1 = 0$.

Sendo assim, temos que $T_{\bullet}x_0 = cx_2$. Segue que,

$$T_{\bullet}(x_0x_2) = cx_2 \cdot (a_2x_0 + b_2x_1 + c_2x_2) = ca_2x_0x_2 + cb_2x_1x_2 + cc_2x_2^2.$$

Pela equação (3.19) temos que

$$ca_2x_0x_2 + cb_2x_1x_2 + cc_2x_2^2 = \alpha x_0x_1 + \beta x_0x_2 + \gamma x_1x_2.$$

Assim, sendo $c \neq 0$ então $c_2 = 0$. Daí $T_{\bullet}x_1 = a_1x_0 + b_1x_1$ e $T_{\bullet}x_2 = a_2x_0 + b_2x_1$. Dessa forma,

$$T_{\bullet}(x_1x_2) = (a_1x_0 + b_1x_1) \cdot (a_2x_0 + b_2x_1) = a_1a_2x_0^2 + b_1b_2x_1^2 + (a_1b_2 + b_1a_2)x_0x_1.$$

Com isso, $a_1a_2 = 0$ e $b_1b_2 = 0$. Se $a_2 = 0$ então $b_1 = 0$ (uma vez que $b_2 \neq 0$). Então, $T_{\bullet}x_0 = cx_2$, $T_{\bullet}x_1 = a_1x_0$ e $T_{\bullet}x_2 = b_2x_1$. Logo,

$$[T^{-1}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c \\ a_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e } \det[T^{-1}] = ca_1b_2.$$

Podemos supor que o valor do determinante seja igual a 1, assim $c = \frac{1}{a_1b_2}$. Logo,

$$[T^{-1}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{a_1b_2} \\ a_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, $\dim(E_W) = 2$. Portanto, pelo Fato 2.5 temos que $\dim(\mathcal{O}_W) = 6$.

3.7 Sobre a especialização das órbitas em $G_3(S_2)$ sob a ação de $\text{Aut}(\mathbb{P}^2)$

A determinação das especializações realizadas pelos autores em [1] utiliza as mesmas técnicas da Seção 2.3 do Capítulo 2, com exceção de alguns casos, que deixamos para o leitor interessado investigar. Assim, nos remetemos a determinar a especialização $\mathcal{O}_W \longrightarrow \mathcal{O}_{W'}$ sendo $W = [x_0x_1, x_0x_2, x_1x_2]$ e $W' = [x_0^2, x_0x_1, x_1x_2]$.

Seja $\gamma : I \longrightarrow G_3(S_2)$ definida por

$$\gamma(t) = [x_0^2 - tx_0x_2, x_0x_1, x_1x_2] \in G_3(S_2).$$

Para $t = 0$ segue que $\gamma(0) = [x_0^2, x_0x_1, x_1x_2] = W'$. Logo, $\gamma(0) \in \mathcal{O}_{W'}$.

Para $t \neq 0$ considere $G \in \gamma(t)$. Logo, $G = a(x_0^2 - tx_0x_2) + bx_0x_1 + cx_1x_2$ com $[a : b : c] \in \mathbb{P}^2$, temos

$$M_G = \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} & -\frac{at}{2} \\ \frac{b}{2} & 0 & \frac{c}{2} \\ -\frac{at}{2} & \frac{c}{2} & 0 \end{bmatrix} \implies \det(M_G) = \frac{ac(bt + c)}{4}.$$

Segue que $\Gamma_{\gamma(t)}$ define uma cúbica singular cujas componentes são três retas distintas e não concorrentes. Portanto, $\gamma(t) \in \mathcal{O}_W$ para qualquer $t \neq 0$.

Capítulo 4

Aplicações

Neste capítulo, destacamos algumas aplicações que podem ser realizadas a partir da classificação das órbitas de $G_3(S_2)$ sob a ação de $\text{Aut}(\mathbb{P}^2)$, conforme a Tabela 3.1. A seguir, faremos uma apresentação descritiva, com base na Seção 7 de [1].

Vamos começar abordando a classificação dos morfismos de \mathbb{P}^2 em \mathbb{P}^2 de grau 4 sob a ação de $\text{Aut}(\mathbb{P}^2) \times \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ indicada na Definição 4.1.2.

4.1 Morfismo de \mathbb{P}^2 em \mathbb{P}^2 de grau 4

Vamos começar revisando o conceito de morfismo, para logo indicarmos a definição de grau tão somente no caso do plano projetivo.

Definição 4.1.1. Uma função $f : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$ é denominada morfismo (ou função regular) se existem $F, G, H \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ homogêneos de mesmo grau tais que $\mathcal{Z}(F, G, H) = \emptyset$ e $f(a) = [F(a) : G(a) : H(a)]$, para todo $a \in \mathbb{P}^2$.

Por exemplo, $f : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$ dada por $[x : y : z] \longmapsto [x^2 : y^2 : z^2]$ define um morfismo.

Grau do morfismo: Considere $f : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$ um morfismo. Definimos o grau de f , $\text{grau}(f) = \#(f^{-1}(a))$ com $a \in \mathbb{P}^2$, sendo essa cardinalidade contada com multiplicidade.

O lema a seguir mostra que a definição de $\text{grau}(f)$ independe do ponto escolhido.

Lema 4.1.1. *Seja $f : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$ o morfismo dado por $f(a) = [F(a) : G(a) : H(a)]$ com F, G, H homogêneos de grau d , então $\text{grau}(f) = d^2$.*

Demonstração. Sejam $a = [a_0 : a_1 : a_2] \in \mathbb{P}^2$ e $b \in f^{-1}(a)$. Note que:

$$\begin{aligned} f(b) = a &\iff [F(b) : G(b) : H(b)] = [a_0 : a_1 : a_2] \\ &\iff \{(F(b), G(b), H(b)), (a_0, a_1, a_2)\} \text{ é } LD \\ &\iff \text{o posto da matriz } \begin{bmatrix} F(b) & G(b) & H(b) \\ a_0 & a_1 & a_2 \end{bmatrix} \text{ é igual a } 1 \\ &\iff \begin{vmatrix} F(b) & G(b) \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F(b) & H(b) \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} G(b) & H(b) \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$f(b) = a \iff \begin{cases} a_1 F(b) - a_0 G(b) = 0 & (1) \\ a_2 F(b) - a_0 H(b) = 0 & (2) \\ a_2 G(b) - a_1 H(b) = 0 & (3) \end{cases}$$

Percebe-se que, se $a_0 \neq 0$ então podemos obter a partir das equações (1) e (2), a equação (3). De fato,

$$-a_2 \cdot (a_1 F(b) - a_0 G(b)) + a_1 \cdot (a_2 F(b) - a_0 H(b)) = a_0(a_2 G(b) - a_1 H(b)) = 0$$

Assim, se $a_0 \neq 0$, então o sistema acima é dado por

$$f(b) = a \iff \begin{cases} a_1 F(b) - a_0 G(b) = 0 \\ a_2 F(b) - a_0 H(b) = 0 \end{cases} \iff b \in \mathcal{Z}(a_1 F - a_0 G, a_2 F - a_0 H)$$

Para concluir, segue do teorema de Bézout que $\#\mathcal{Z}(a_1 F - a_0 G, a_2 F - a_0 H) = d^2$, contada com multiplicidades. \square

A seguir introduzimos a noção de morfismo do mesmo tipo.

Definição 4.1.2. Considere $f, g : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$ morfismos de grau d^2 . Dizemos que f e g possuem o mesmo tipo se existem $\varphi, \psi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tais que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}^2 \\ \varphi \uparrow & & \uparrow \psi \\ \mathbb{P}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{P}^2 \end{array} \quad \text{isto é, } \psi \circ g = f \circ \varphi.$$

Usaremos a notação $f \sim g$ para indicar que f e g possuem o mesmo tipo. Observe

que \sim define uma relação de equivalência no conjunto dos morfismos de \mathbb{P}^2 em \mathbb{P}^2 de grau d^2 .

Proposição 4.1.1. *Sejam $f, g : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$ morfismos de grau 4 dados por $f(a) = [f_1(a) : f_2(a) : f_3(a)]$ e $g(a) = [g_1(a) : g_2(a) : g_3(a)]$. Verifica-se que f e g possuem o mesmo tipo se, e somente se, $\mathcal{O}_{[f_1, f_2, f_3]} = \mathcal{O}_{[g_1, g_2, g_3]}$.*

Demonstração. Sejam f e g dadas por $f(a) = [f_1(a) : f_2(a) : f_3(a)]$ e $g(a) = [g_1(a) : g_2(a) : g_3(a)]$ do mesmo tipo, ou seja, existem $\varphi, \psi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ tais que $\psi \circ g = f \circ \varphi$. Assim, temos que

$$\begin{aligned} f \sim g &\iff \psi \circ g = f \circ \varphi \\ &\iff \psi(g(a)) = f(\varphi(a)) \quad \forall a \in \mathbb{P}^2 \\ &\iff \psi([g_1(a) : g_2(a) : g_3(a)]) = [f_1(\varphi(a)) : f_2(\varphi(a)) : f_3(\varphi(a))] \quad \forall a \in \mathbb{P}^2 \\ &\iff [g_1(a) : g_2(a) : g_3(a)] = \psi^{-1}([f_1(\varphi(a)) : f_2(\varphi(a)) : f_3(\varphi(a))]) \quad \forall a \in \mathbb{P}^2. \end{aligned}$$

Se ψ^{-1} for determinada por S^{-1} , então assumamos que $[S^{-1}] = [\alpha_{ij}]$ (na base canônica de \mathbb{C}^3). Assim, podemos reescrever a última equação acima, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} [g_1(a) : g_2(a) : g_3(a)] &= [S^{-1}(f_1(\varphi(a)), f_2(\varphi(a)), f_3(\varphi(a)))] \\ &= \left[\sum_{j=1}^3 \alpha_{1j} f_j(\varphi(a)) : \sum_{j=1}^3 \alpha_{2j} f_j(\varphi(a)) : \sum_{j=1}^3 \alpha_{3j} f_j(\varphi(a)) \right]. \end{aligned}$$

Desta forma, temos que existe $\lambda_i(a) \neq 0 \in \mathbb{C}$ tal que

$$\begin{aligned} \lambda(a) \cdot (g_1(a), g_2(a), g_3(a)) &= \left(\sum_{j=1}^3 \alpha_{1j} f_j(\varphi(a)), \sum_{j=1}^3 \alpha_{2j} f_j(\varphi(a)), \sum_{j=1}^3 \alpha_{3j} f_j(\varphi(a)) \right) \\ \implies \lambda(a) \cdot g_i(a) &= \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} f_j(\varphi(a)), \quad \forall a \in \mathbb{P}^2. \end{aligned}$$

Considere $F_i(a) = \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} f_j(\varphi(a))$. Assim,

$$\lambda(a) g_i(a) = F_i(a) \iff \lambda(a) = \frac{F_i(a)}{g_i(a)} \quad \text{se } g_i(a) \neq 0.$$

Note que, $\lambda : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ é uma função regular¹ e segue do Teorema 3.4 (p. 18 em [11])

¹Seja $Y \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ um conjunto algébrico e $p \in Y$. Uma função $\varphi : Y \longrightarrow \mathbb{K}$ é dita regular em p , se existe $U_p \subseteq Y$ vizinhança aberta de p , $F, G \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ homogêneos de mesmo grau tais que $G(u) \neq 0$ para todo $u \in U_p$ e $\varphi(u) = \frac{F(u)}{G(u)}$, para todo $u \in U_p$.

que λ é uma função contante, ou seja, $\lambda(a) = \lambda_0 \in \mathbb{C}$. Assim, tem-se que²

$$g_i(x_0, x_1, x_2) = \lambda_0^{-1} \cdot \left(\sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} T_{\bullet}^{-1} f_j(x_0, x_1, x_2) \right), \quad \text{para } i = 1, 2, 3.$$

Isso implica que $g_i \in [T_{\bullet}^{-1} f_1, T_{\bullet}^{-1} f_2, T_{\bullet}^{-1} f_3]$. Portanto, $[g_1, g_2, g_3] = T^{-1} \bullet [f_1, f_2, f_3]$, isto é, $\mathcal{O}_{[f_1, f_2, f_3]} = \mathcal{O}_{[g_1, g_2, g_3]}$. \square

De posse deste resultado, segue que as classes determinadas pelos os morfismos de \mathbb{P}^2 em \mathbb{P}^2 de grau 4 do mesmo tipo, é equivalente à classificação das órbitas de $G_3(S_2)$ sob a ação de $\text{Aut}(\mathbb{P}^2)$ cujos geradores não possuem zeros em comum.

Na tabela 4.1 a seguir, listamos os zeros comuns dos geradores dos representantes das órbitas em $G_3(S_2)$ (cf. Tabela 3.1).

Tabela 4.1: Zeros em comum dos representantes das órbitas

$W = [f_1, f_2, f_3]$	$\mathcal{Z}(f_1, f_2, f_3)$
$[x_0^2, x_0x_1, x_0x_2]$	não vazio
$[x_0^2, x_1^2, x_0x_1]$	não vazio
$[x_0x_1, x_0^2 - x_1x_2, x_1^2]$	não vazio
$[x_0^2, x_0x_1, x_1x_2]$	não vazio
$[x_0^2, x_1^2, x_1x_2]$	não vazio
$[x_0x_1, x_0x_2, x_1x_2]$	não vazio
$[x_0^2, x_0x_1, x_2(x_1 + x_2)]$	não vazio
$[x_0^2, x_1^2, x_2(x_0 + x_1)]$	não vazio
$[x_0^2, x_1^2, x_2^2]$	vazio
$[x_0x_1, x_0^2 - x_1x_2, x_0x_2]$	não vazio
$[x_1^2, x_0^2 - x_1x_2, x_2^2]$	vazio
$[x_0^2 - x_1x_2, x_0x_1, x_2^2]$	não vazio
$[x_0x_1, x_0^2 + x_1x_2, x_1^2 + x_0x_2]$	não vazio
$[x_0x_1, x_0^2 - x_1x_2, (x_1 + x_2)^2]$	vazio
$[x_0^2 - x_1x_2, x_0x_1, (x_1 - x_2)(x_1 - ax_2)]$	vazio

Dessa forma, os representantes dos morfismos $f : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$ de grau 4 do mesmo tipo são dados pelos geradores dos subespaços $W \in G_3(S_2)$ em azul na Tabela 4.1.

²Note que $H_i(x_0, x_1, x_2) = g_i(x_0, x_1, x_2) - \lambda_0^{-1} F_i(x_0, x_1, x_2)$ é homogêneo e $H_i(a) = 0$ para todo $a \in \mathbb{P}^2$, logo $H_i = 0$.

4.2 Classificação das \mathbb{K} -álgebras artinianas graduadas locais com função de Hilbert $(1, 3, 3, \bar{0})$

Considere \mathbb{K} um corpo algebricamente fechado e $S = \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$, com a graduação usual. Se $I \subset S$ for um ideal homogêneo, então o anel quociente $\frac{S}{I}$ também é um anel graduado. Dessa forma, considere

$$A_W = \frac{\mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]}{I_W},$$

sendo $I_W = \langle F_1, F_2, F_3 \rangle + \mathfrak{m}^3$, com $W = [F_1, F_2, F_3] \in G_3(S_2)$ e $\mathfrak{m} = \langle x_0, x_1, x_2 \rangle$.

Observe que A_W é uma \mathbb{K} -álgebra artiniana graduada local³. Além disso, note que o comprimento de A_W , ou seja, $l(A_W)$ é dado por: $l(A_W) = \dim_{\mathbf{K}} A_W$ sendo $\mathbf{K} = \frac{A_W}{\mathfrak{n}}$ e $\mathfrak{n} = \langle \bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2 \rangle$ (de fato $\mathbf{K} \cong \mathbb{K}$) o corpo residual de A_W conforme o Lema 7.2.5 (cap 7, p. 162 em [19]).

Exemplo 4.2.1. Seja $W = [x_0^2, x_0x_1, x_1x_2]$ como na Proposição 3.4.4 item 1.

Dessa forma, $A_W = \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]/(\langle x_0^2, x_0x_1, x_1x_2 \rangle + \mathfrak{m}^3)$, com $\mathfrak{m} = \langle x_0, x_1, x_2 \rangle$. Note que, $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ admite a base canônica

$$\{1, x_0, x_1, x_2, x_0^2, x_0x_1, x_0x_2, x_1^2, x_1x_2, x_2^2, \dots\}$$

e $\mathfrak{m}^3 = \langle x_0^3, x_0^2x_1, x_0^2x_2, x_0x_1^2, x_0x_1x_2, x_0x_2^2, x_1^3, x_1^2x_2, x_1x_2^2, x_2^3 \rangle$. Logo, temos que

$$\{\bar{1}, \bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_0\bar{x}_2, \bar{x}_1^2, \bar{x}_2^2\} \subseteq A_W$$

é uma base do \mathbb{C} -espaço vetorial A_W . Portanto, $l(A_W) = \dim_{\mathbb{C}} A_W = 7$.

Função de Hilbert associada a uma \mathbb{K} -álgebra artiniana graduada (A, \mathfrak{n})

Seja (A, \mathfrak{n}) uma \mathbb{K} -álgebra artiniana graduada local. Considere \mathbb{N} o conjunto dos inteiros não negativos. Definimos a função de Hilbert associada a A por

$$\begin{aligned} h_A : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ i &\longmapsto \dim_{\mathbf{K}} \frac{\mathfrak{n}^i}{\mathfrak{n}^{i+1}} \end{aligned}$$

³É uma \mathbb{K} -álgebra visto que $\varphi : \mathbb{K} \longrightarrow A_W$ dada por $a \longmapsto \bar{a}$ é um homomorfismo de anéis. Além disso, é local (lembramos que $\text{Spec}(A_W)$ está em bijeção com $\{P \in \text{Spec}(S) \mid I_W \subseteq P\}$. Assim, $I_W = \langle F_1, F_2, F_3 \rangle + \mathfrak{m}^3 \subseteq P$ implica que $\mathfrak{m}^3 \subseteq P$. Entretanto, $x_i^3 \in \mathfrak{m}^3$ para $i = 0, 1, 2$. Logo, visto que P é primo, segue que $x_i \in P$ para todo $i = 0, 1, 2$. Portanto, $\mathfrak{m} = \langle x_0, x_1, x_2 \rangle \subseteq P$. De onde concluímos que $\mathfrak{m} = P$. Além disso, A_W é artiniana (visto que $\text{Spec}(A_W) = \{\mathfrak{n}\}$ sendo $\mathfrak{n} = \langle \bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2 \rangle$ segue que $\dim_{\text{krull}}(A_W) = 0$). Logo, como A_W é noetheriano e $\dim_{\text{krull}}(A_W) = 0$, segue do Teorema 8.5 em [3] que A_W é artiniana).

sendo $\mathbf{K} = \frac{A}{\mathbf{n}}$ o corpo residual de A , $\mathbf{n}^0 = A$, $\mathbf{n}^1 = \mathbf{n}$ e \mathbf{n}^i é o produto de i fatores de \mathbf{n} .

Vale salientar que a notação $(1, 3, 3, \bar{0})$ indica que A é uma álgebra graduada artiniana local, cuja a função de Hilbert é dada por $h_A(0) = 1$, $h_A(1) = 3$, $h_A(2) = 3$ e $h_A(i) = 0 \quad \forall i \geq 3$.

Exemplo 4.2.2. Considere o anel local (A_W, \mathbf{n}) com $W = [x_0^2, x_0x_1, x_1x_2]$ e $\mathbf{n} = \langle \bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2 \rangle$. Iremos calcular $h_{A_W}(i) = \dim_{\mathbf{K}} \frac{\mathbf{n}^i}{\mathbf{n}^{i+1}}$ para $i = 0, 1, 2, \dots$.

1. Para $i = 0$ temos $\frac{\mathbf{n}^0}{\mathbf{n}^1} = \frac{A_W}{\mathbf{n}} \cong \mathbb{K}$. Logo, $h_{A_W}(0) = \dim_{\mathbf{K}} \frac{\mathbf{n}^0}{\mathbf{n}^1} = 1$.

A seguir por simplicidade, considere $x = \bar{x}_0, y = \bar{x}_1$ e $z = \bar{x}_2$ em A_W .

2. Para $i = 1$ temos $\mathbf{n}^1 = \langle x, y, z \rangle$ e $\mathbf{n}^2 = \langle x^2, xy, xz, y^2, yz, z^2 \rangle$. Note que, $x^2 = xy = yz = \bar{0}$, assim $\mathbf{n}^2 = \langle xz, y^2, z^2 \rangle$. Dessa forma,

$$\frac{\mathbf{n}^1}{\mathbf{n}^2} = \frac{\langle x, y, z \rangle}{\langle xz, y^2, z^2 \rangle} = [x + \mathbf{n}^2, y + \mathbf{n}^2, z + \mathbf{n}^2] \implies h_{A_W}(1) = \dim_{\mathbf{K}} \frac{\mathbf{n}^1}{\mathbf{n}^2} = 3.$$

3. Para $i = 2$ note que, $\mathbf{n}^3 = \{\bar{0}\}$, pois $I_W = \langle x_0^2, x_0x_1, x_1x_2 \rangle + \mathbf{n}^3$. Assim,

$$\frac{\mathbf{n}^2}{\{\bar{0}\}} = [xz + \mathbf{n}^3, y^2 + \mathbf{n}^3, z^2 + \mathbf{n}^3] \implies h_{A_W}(2) = \dim_{\mathbf{K}} \frac{\mathbf{n}^2}{\mathbf{n}^3} = 3.$$

4. Para $i \geq 3$ temos que $h_{A_W}(i) = 0$, já que $\mathbf{n}^i = \{\bar{0}\}$ para todo $i \geq 3$.

Portanto, $h_{A_W} = (1, 3, 3, \bar{0})$.

Exemplo 4.2.3. Considere agora o anel local (A_W, \mathbf{n}) com $W = [x_0^2, x_1^2, x_2^2]$ e $\mathbf{n} = \langle \bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2 \rangle$. Calcularemos $h_{A_W}(i) = \dim_{\mathbf{K}} \frac{\mathbf{n}^i}{\mathbf{n}^{i+1}}$ para $i = 0, 1, 2, \dots$.

1. Para $i = 0$ temos $\frac{\mathbf{n}^0}{\mathbf{n}^1} = \frac{A_W}{\mathbf{n}} \cong \mathbb{K}$. Logo, $h_{A_W}(0) = \dim_{\mathbf{K}} \frac{\mathbf{n}^0}{\mathbf{n}^1} = 1$.

Novamente por simplicidade, considere $x = \bar{x}_0, y = \bar{x}_1$ e $z = \bar{x}_2$ em A_W .

2. Para $i = 1$ temos $\mathbf{n}^1 = \langle x, y, z \rangle$ e $\mathbf{n}^2 = \langle x^2, xy, xz, y^2, yz, z^2 \rangle$. Note que, $x^2 = y^2 = z^2 = \bar{0}$, com isso $\mathbf{n}^2 = \langle xy, xz, yz \rangle$. Logo,

$$\frac{\mathbf{n}^1}{\mathbf{n}^2} = \frac{\langle x, y, z \rangle}{\langle xy, xz, yz \rangle} = [x + \mathbf{n}^2, y + \mathbf{n}^2, z + \mathbf{n}^2] \implies h_{A_W}(1) = \dim_{\mathbf{K}} \frac{\mathbf{n}^1}{\mathbf{n}^2} = 3.$$

3. Para $i = 2$, note que $\mathbf{n}^3 = \{\bar{0}\}$, pois $I_W = \langle x_0^2, x_1^2, x_2^2 \rangle + \mathbf{n}^3$. Assim,

$$\frac{\mathbf{n}^2}{\{\bar{0}\}} = [xy + \mathbf{n}^3, xz + \mathbf{n}^3, yz + \mathbf{n}^3] \implies h_{A_W}(2) = \dim_{\mathbf{K}} \frac{\mathbf{n}^2}{\mathbf{n}^3} = 3.$$

4. Para $i \geq 3$ $h_{A_W}(i) = 0$, uma vez que $\mathbf{n}^i = \{\bar{0}\}$ para todo $i \geq 3$. Portanto, $h_{A_W} = (1, 3, 3, \bar{0})$.

Observação 4.2.1. Considere

$$A_W = \frac{\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]}{I_W},$$

com $I_W = \langle F_1, F_2, F_3 \rangle + \mathfrak{n}^3$, $W = [F_1, F_2, F_3] \in G_3(S_2)$ e $\mathfrak{n} = \langle x, y, z \rangle$ sendo $x = \overline{x_0}$, $y = \overline{x_1}$, $z = \overline{x_2}$ em A_W . Verifica-se que:

- $h_{A_W}(0) = 1$;
- $h_{A_W}(1) = 3$, pois $\mathfrak{n} = \langle x, y, z \rangle$ e $\mathfrak{n}^2 = \langle x^2, xy, xz, y^2, yz, z^2 \rangle$ irá eliminar todo elemento de grau maior que 1 em \mathfrak{n} , ao passar ao quociente, o qual independe da escolha dos geradores de W ;
- $h_{A_W}(2) = 3$, uma vez que $\mathfrak{n}^3 = \{\overline{0}\}$ e sempre eliminamos três elementos de \mathfrak{n}^2 módulo I_W ;
- $h_{A_W}(i) = 0$ para todo $i \geq 3$, já que $\mathfrak{n}^3 = \{\overline{0}\}$ para todo $i \geq 3$.

Para concluir esta breve exposição, indicamos a seguir um dos resultados principais provado pelos autores Nancy Abdallah, Jacques Emsalem e Anthony Iarrobino em [1].

Teorema 4.2.1. *Álgebras artinianas graduadas locais A com função de Hilbert $(1, 3, 3, \overline{0})$ são suavizáveis. Ou seja, A pode ser deformada em uma álgebra suave de dimensão 7 (isomorfa à álgebra produto \mathbb{K}^7).*

Com o objetivo de discutir brevemente o conceito de álgebra suavizável, que é citado no teorema acima, reproduzimos a seguir (com um pouco mais de detalhes), parte do texto da Seção 7.1 em [1].

4.2.1 Deformação de álgebras com função de Hilbert $(1, 3, 3, \overline{0})$ em uma álgebra suave

Uma álgebra com função de Hilbert $(1, 3, 3, \overline{0})$ tem a forma geral $\frac{\mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]}{\langle F, G, H \rangle + \mathfrak{m}^3}$, sendo $\{F, G, H\}$ LI em S_2 e $\mathfrak{m} = \langle x_0, x_1, x_2 \rangle$. Considere

$$A_0 := \frac{\mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]}{\langle x_0^2 + \lambda x_1 x_2, x_1^2 + \lambda x_0 x_2, x_2^2 + \lambda x_0 x_1 \rangle + \mathfrak{m}^3}.$$

Observe que:

$$\langle x_0^2 + \lambda x_1 x_2, x_1^2 + \lambda x_0 x_2, x_2^2 + \lambda x_0 x_1 \rangle + \mathfrak{m}^3 = \langle x_0^2 + \lambda x_1 x_2, x_1^2 + \lambda x_0 x_2, x_2^2 + \lambda x_0 x_1, x_0 x_1 x_2 \rangle.$$

Logo, $A_0 = \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]/\langle x_0^2 + \lambda x_1 x_2, x_1^2 + \lambda x_0 x_2, x_2^2 + \lambda x_0 x_1, x_0 x_1 x_2 \rangle$. A seguir, considere a família de álgebras

$$A_t = \frac{\mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]}{I_t}$$

sendo $I_t = \langle x_0^2 + \lambda x_1 x_2 + t x_0, x_1^2 + \lambda x_0 x_2, x_2^2 + \lambda x_0 x_1, x_0 x_1 x_2 + \lambda^2 t(1 - \lambda^3)^{-1} x_0^2 \rangle$.

Lema 4.2.1. *O conjunto $\mathcal{Z}(I_t) \subseteq \mathbb{C}^3$ é dado por*

$$\{(0, 0, 0), (-u, \lambda u, \lambda u), (-u, \lambda j u, \lambda j^2 u), (-u, \lambda j^2 u, \lambda j u)\}$$

sendo $u = \frac{t}{1 + \lambda^3}$ e j uma raiz cúbica primitiva da unidade.

Demonstração. Observe que $(x_0, x_1, x_2) \in \mathcal{Z}(I_t) \subseteq \mathbb{C}^3$ se, e somente se, satisfaz o sistema:

$$\begin{cases} x_0^2 + \lambda x_1 x_2 - t x_0 = 0 & (4.1) \\ x_1^2 + \lambda x_0 x_2 = 0 & (4.2) \\ x_2^2 + \lambda x_0 x_1 = 0 & (4.3) \\ x_0 x_1 x_2 + \lambda^2 t(1 - \lambda^3)^{-1} x_0^2 = 0 & (4.4). \end{cases}$$

Segue da equação (4.4) que

$$x_0(x_1 x_2 + \lambda^2 t(1 - \lambda^3)^{-1} x_0) = 0. \quad (4.5)$$

Daí, temos duas possibilidades:

Caso 1 : se $x_0 = 0$, segue das equações (4.2) e (4.3) que $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$. Portanto, obtemos o ponto $(0, 0, 0)$ em \mathbb{C}^3 .

Caso 2 : se $x_0 \neq 0$, segue da equação (4.5) que $x_1 x_2 = -\lambda^2 t(1 - \lambda^3)^{-1} x_0$. Substituindo essa última igualdade em (4.1) teremos que $x_0 = -\frac{t}{1 + \lambda^3}$. Ao substituir $x_0 = -\frac{t}{1 + \lambda^3}$ em $x_1 x_2 = -\lambda^2 t(1 - \lambda^3)^{-1} x_0$, segue que $x_1 = \frac{1}{x_2} \cdot \left(\frac{\lambda t}{1 + \lambda^3}\right)^2$. Logo, ao substituir $x_0 = -\frac{t}{1 + \lambda^3}$ e $x_1 = \frac{1}{x_2} \cdot \left(\frac{\lambda t}{1 + \lambda^3}\right)^2$ em (4.3) teremos $x_2^3 = \alpha^3$ com $\alpha = \frac{\lambda t}{1 + \lambda^3}$. Assim, $x_2^3 = \alpha^3$ se, e somente se, $x_2 \in \{\alpha, \alpha j, \alpha j^2\}$ onde j é a raiz cúbica primitiva da unidade. Dessa forma, segue o resultado. \square

Em relação a esses quatro pontos, os autores afirmam que, a localização da álgebra A_t em $(0, 0)$ é isomorfa a $\mathbb{K}[x_0, x_1]/\langle x_0^2, x_1^2 \rangle$, tem comprimento 4; e as demais localizações têm comprimento 1. Portanto, obtém-se uma deformação plana de A_0 em uma família de álgebras isomorfas a $\mathbb{K}[x_0, x_1]/(x_0^2, x_1^2) \times \mathbb{K}^3$. Como todas as álgebras artinianas com

dois geradores são suavizáveis (cf. [6]) então $\mathbb{K}[x_0, x_1]/(x_0^2, x_1^2)$ pode ser deformada em \mathbb{K}^4 . Logo, A_0 é deformável em \mathbb{K}^7 .

Observações 4.2.1. Entretanto, embora A_0 seja suavizável, isso não garante que A_0 seja alinhável, isto é, que admita uma deformação plana a uma álgebra curvilínea do tipo $\mathbb{K}[x]/(x^n)$. No caso específico das álgebras com função de Hilbert $(1, 3, 3, \bar{0})$, **ainda é um problema em aberto** se elas são alinháveis ou não.

Apêndice A

Noções de Geometria Algébrica

Para deixar o texto autocontido, neste apêndice apresentamos os conceitos e resultados básicos que utilizamos no desenvolvimento do trabalho. O leitor também é convidado a consultar os textos [17], [8], [11] e [20].

Projetivização de um espaço vetorial

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre \mathbb{K} . Em $V - \{0\}$ defina a seguinte relação:

$$u \sim v \iff u = \lambda v, \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{K}$$

Observações A.0.1. Com as notações acima. Observe que $\lambda \neq 0$. Além disso,

- (a) \sim define uma relação de equivalência em $V - \{0\}$;
- (b) A classe de equivalência associada a $v \in V$ (v não nulo) é dada por

$$\bar{v} = \{u \in V - \{0\} \mid u \sim v\} = [v] - \{0\}.$$

sendo $[v] = \{\lambda v \in V \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$ o subespaço vetorial de V gerado pelo vetor v .

Definimos a projetivização de V por $\mathbb{P}(V) := \frac{V - \{0\}}{\sim}$.

Notação A.0.1. Considere $V = \mathbb{K}^{n+1}$ como espaço vetorial sobre \mathbb{K} . Usaremos a notação

1. $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ em lugar de $\mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1})$ ($\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ é chamado n -espaço projetivo sobre \mathbb{K});
2. \mathbb{P}^n em lugar de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n = \mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1})$;
3. $\bar{v} = [v_0 : v_1 : \dots : v_n]$ se $v = (v_0, v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ é não nulo. Neste caso, v_0, v_1, \dots, v_n são chamadas coordenadas homogêneas de $\bar{v} \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$.

Observação A.0.1. Se $u, v \in V - \{0\}$, então

$$\bar{u} = \bar{v} \in \mathbb{P}(V) \iff u \text{ e } v \text{ são linearmente dependentes.}$$

Assim, $[v_0 : v_1 : \dots : v_n] = [\lambda v_0 : \lambda v_1 : \dots : \lambda v_n]$ em $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n \quad \forall \lambda \neq 0 \text{ em } \mathbb{K}$.

Exemplo A.0.1. Vamos descrever os pontos em \mathbb{P}^n para $n \in \{0, 1, 2, 3\}$.

- (i) Se $n = 0$ então $\mathbb{P}^0 = \mathbb{P}(\mathbb{C}) = \{[a_0] \mid a_0 \in \mathbb{C}, a_0 \neq 0\} = \{[1]\}$.¹
- (ii) Se $n = 1$ então $\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}(\mathbb{C}^2) = \{[a_0 : a_1] \mid (a_0, a_1) \in \mathbb{C}^2, (a_0, a_1) \neq (0, 0)\}$.

Seja $[a_0 : a_1] \in \mathbb{P}^2$ temos duas possibilidades, $a_1 \neq 0$ ou $a_1 = 0$.

- Se $a_1 \neq 0$, então $[a_0 : a_1] = [a_0 \cdot a_1^{-1} : a_1 \cdot a_1^{-1}] = [a : 1]$ com $a = a_0 \cdot a_1^{-1}$
- Se $a_1 = 0$, então $a_0 \neq 0$ e $[a_0 : a_1] = [a_0 \cdot a_0^{-1} : 0] = [1 : 0]$.

Logo, $\mathbb{P}^1 = \{[a : 1] \mid a \in \mathbb{C}\} \cup \{[1 : 0]\}$.

Note que, a função $\phi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}^1 - \{[1 : 0]\}$ dada por $a \longmapsto [a : 1]$ é uma bijeção, ou seja, em \mathbb{P}^1 existe uma cópia de \mathbb{C} . Assim, temos a seguinte identificação:

$$\mathbb{P}^1 = \{[a : 1] \mid a \in \mathbb{C}\} \cup \{[1 : 0]\} \simeq \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

Nesta partição, $[1 : 0]$ é denominado ponto no infinito e denotado por ∞ .

- (iii) se $n = 2$ então $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{C}^3) = \{[a_0 : a_1 : a_2] \mid (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{C}^3 - \{(0, 0, 0)\}\}$.

Seja $[a_0 : a_1 : a_2] \in \mathbb{P}^3$. Temos novamente duas possibilidades: $a_2 \neq 0$ ou $a_2 = 0$.

- Se $a_2 \neq 0$, então $[a_0 : a_1 : a_2] = [a_0 \cdot a_2^{-1} : a_1 \cdot a_2^{-1} : a_2 \cdot a_2^{-1}] = [a : b : 1]$ com $a = a_0 \cdot a_2^{-1}$ e $b = a_1 \cdot a_2^{-1}$.
- Se $a_2 = 0$, então $[a_0 : a_1 : a_2] = [a_0 : a_1 : 0]$ com $[a_0 : a_1] \in \mathbb{P}^1$.

Seja $\mathbb{L}_\infty := \{[a_0 : a_1 : 0] \mid [a_0 : a_1] \in \mathbb{P}^1\}$. Então a função $\phi : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2 - \mathbb{L}_\infty$ dada por $(a, b) \longmapsto [a : b : 1]$ é uma bijeção, ou seja, em \mathbb{P}^2 existe uma cópia de \mathbb{C}^2 .

Logo, $\mathbb{P}^2 = \{[a : b : 1] \mid (a, b) \in \mathbb{C}^2\} \cup \mathbb{L}_\infty$. Note ainda que, $[a_0 : a_1] \mapsto [a_0 : a_1 : 0]$ define uma bijeção entre a reta projetiva \mathbb{P}^1 e a reta no infinito \mathbb{L}_∞ .

- (iv) se $n = 3$ então $\mathbb{P}^3 = \mathbb{P}(\mathbb{C}^4)$.

De forma análoga, se $\mathbb{H}_\infty := \{[a_0 : a_1 : a_2 : 0] \mid [a_0 : a_1 : a_2] \in \mathbb{P}^2\}$ teremos que

$$\mathbb{P}^3 = \{[a : b : c : 1] \mid (a, b, c) \in \mathbb{C}^3\} \cup \mathbb{H}_\infty.$$

\mathbb{H}_∞ é denominado plano no infinito. Note também que, $[a_0 : a_1 : a_2] \mapsto [a_0 : a_1 : a_2 : 0]$ define uma bijeção entre o plano projetivo \mathbb{P}^2 e o plano no infinito \mathbb{H}_∞ .

¹De fato,

$$\overline{a_0} = \overline{1} \iff a_0 \sim 1 \iff a_0 = a_0 \cdot 1.$$

De forma geral, mostra-se que o n -espaço projetivo \mathbb{P}^n admite uma partição da forma, $\mathbb{P}^n = \mathcal{A} \cup \mathcal{H}_\infty$ em que podemos identificar \mathcal{A} como \mathbb{C}^n e \mathcal{H}_∞ (denominado hiperplano no infinito) com \mathbb{P}^{n-1} .

A d -Grassmaniana associada a V sobre \mathbb{K}

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita n sobre \mathbb{K} . Considere $d \in \{0, 1, \dots, n\}$. A d -Grassmaniana associada a V é dada por:

$$G_d(V) := \{W \mid W \text{ é um subespaço de } V \text{ de dimensão } d\}.$$

Exemplo A.0.2. Seja $V = \mathbb{R}^3$.

- se $d = 0$ então $G_0(\mathbb{R}^3) = \{\{0\}\}$.
- se $d = 1$ então $G_1(\mathbb{R}^3) = \{[v] \mid v \neq 0 \in \mathbb{R}^3\}$.
- se $d = 2$ então $G_2(\mathbb{R}^3) = \{[u, v] \mid u \text{ e } v \text{ são LI em } \mathbb{R}^3\}$.
- se $d = 3$ então $G_3(\mathbb{R}^3) = \{\mathbb{R}^3\}$.

Observação A.0.2. Seja V um espaço vetorial sobre \mathbb{K} de dimensão finita e positiva. A função $\psi : \mathbb{P}(V) \rightarrow G_1(V)$ dada por $\bar{v} \mapsto [v]$ é uma bijeção. Logo, podemos identificar $\mathbb{P}(V)$ com $G_1(V)$.

Polinômios homogêneos

Considere $A = \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ o anel de polinômios nas variáveis x_0, \dots, x_n com coeficientes no corpo \mathbb{K} .

Para cada $I = (i_0, \dots, i_n)$ com i_0, \dots, i_n inteiros não negativos. Definimos o monômio $x^I = x_0^{i_0} \cdot x_1^{i_1} \cdot \dots \cdot x_n^{i_n}$ e $\text{grau}(x^I) = i_0 + i_1 + \dots + i_n$. Vale salientar que $x_i^0 := 1 \forall i$.

Se $F \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$, então $F = \sum_{I \text{ finita}} a_I x^I$ com $a_I \in \mathbb{K}$ e

$$\text{grau}(F) = \max\{\text{grau}(x^I) \mid x^I \text{ é um monômio que comparece em } F\}.$$

Graduação usual no anel de polinômios

Note que, $A = \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ é um espaço vetorial sobre \mathbb{K} . Para cada $d \geq 0$ inteiro, seja A_d o subespaço de A gerado por monômios de grau d . Assim,

- $A_0 = [1] = \mathbb{K}$;
- $A_1 = [x_0, x_1, \dots, x_n] = \{a_0 x_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \mid a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}\}$;
- \vdots

- $A_d = [\{x^I \mid \text{grau}(x^I) = d\}]$.

Observações A.0.2. Com as notações acima, verifica-se que:

1. $\dim(A_d) = \binom{n+d}{d}$;
2. Os elementos de A_d são chamados de polinômios homogêneos;
3. Se $F \in A_d$ e $F \neq 0$ então F é chamado de polinômio homogêneo de grau d .
4. Se $F \in A$ é não nulo de grau d , então F pode ser escrito de forma única como

$$F = F_0 + F_1 + \cdots + F_d \quad \text{com } F_i \in A_i \text{ } i \in \{0, \dots, d\}.$$

Proposição A.0.1. *Seja \mathbb{K} um corpo infinito. Considere $F \in A = \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ não nulo de grau d . Verifica-se que,*

$$F \in A_d \iff F(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d F(x_0, \dots, x_n) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}.$$

Demonstração. $\boxed{\implies}$ Seja $F \in A_d$. Logo, $F = \sum_I a_I x^I$ com $a_I \in \mathbb{K}$, sendo x^I monômios de grau d . Assim,

$$\begin{aligned} F(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) &= \sum_I a_I (\lambda x_0)^{i_0} \cdots (\lambda x_n)^{i_n} = \sum_I a_I \lambda^{(i_0 + \cdots + i_n)} (x_0^{i_0} \cdots x_n^{i_n}) \\ &= \sum_I a_I \lambda^d x_0^{i_0} \cdots x_n^{i_n} \\ &= \lambda^d \sum_I a_I x_0^{i_0} \cdots x_n^{i_n} \\ &= \lambda^d \sum_I a_I x^I \\ &= \lambda^d F(x_0, \dots, x_n). \end{aligned}$$

$\boxed{\impliedby}$ Seja $F \neq 0$ de grau d . Daí, $F = F_0 + F_1 + \cdots + F_d$ com $F_d \neq 0$.

Afirmção: $F_i = 0 \quad \forall i \in \{0, \dots, d-1\}$.

Pelo absurdo, suponha que exista um $j \in \{0, \dots, d-1\}$ tal que $F_j \neq 0$. Note que

$$\begin{aligned} F(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) &= F_0(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) + F_1(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) + \cdots + F_d(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) \\ &= F_0 + \lambda F_1(x_0, \dots, x_n) + \cdots + \lambda^d F_d(x_0, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Pela hipótese tem-se que $F(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d F(x_0, \dots, x_n)$. Logo

$$F_0 + \lambda F_1(x_0, \dots, x_n) + \cdots + \lambda^d F_d(x_0, \dots, x_n) = \lambda^d F(x_0, \dots, x_n).$$

Ou seja, $F_0 + \lambda F_1 + \dots + \lambda^{d-1} F_{d-1} + \lambda^d F_d = \lambda^d F$. Logo,

$$F_0 + \lambda F_1 + \dots + \lambda^{d-1} F_{d-1} + \lambda^d F_d = \lambda^d F_0 + \lambda^d F_1 + \dots + \lambda^d F_d.$$

Assim, $F_0 + \lambda F_1 + \dots + \lambda^{d-1} F_{d-1} = \lambda^d (F_0 + F_1 + \dots + F_{d-1})$. Equivalentemente

$$F_0 + \lambda F_1 + \dots + \lambda^j F_j + \dots + \lambda^{d-1} F_{d-1} - \lambda^d (F_0 + F_1 + \dots + F_{d-1}) = 0 \quad (\text{A.1})$$

Como $F_j \neq 0$ e \mathbb{K} é infinito, então existe² $a = (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tal que $F_j(a) \neq 0$. Assim, a partir de (A.1) obtemos

$$\sum_{i=0}^{d-1} \lambda^i F_i(a) - \lambda^d \left(\sum_{i=0}^{d-1} F_i(a) \right) = 0.$$

Agora considere

$$f(t) = b_0 + b_1 t + \dots + b_j t^j + \dots + b_{d-1} t^{j-1} - t^d (b_0 + b_1 + \dots + b_{d-1}) \in \mathbb{K}[t]$$

sendo $b_k = F_k(a)$ com $k \in \{0, 1, \dots, d-1\}$. Note que, $f(t) \neq 0$ e $f(\lambda) = 0 \forall \lambda \in \mathbb{K}$ (absurdo). Portanto, segue o resultado. \square

Corolário A.0.1. *Com as notações da Proposição A.0.1. Assuma que $F \in A_d$. Se $F(a_0, \dots, a_n) = 0$ então $F(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n) = 0 \forall \lambda \in \mathbb{K}$.*

Demonstração. Segue da Proposição A.0.1 que $F(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n) = \lambda^d F(a_0, \dots, a_n) = \lambda^d \cdot 0 = 0 \forall \lambda \in \mathbb{K}$. \square

Zeros de um polinômio homogêneo de $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$

Se $p = [a_0 : \dots : a_n] \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ e $F \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ for homogêneo então $F(p) := F(a_0, \dots, a_n)$. Definimos os zeros de F em $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ por $\mathcal{Z}(F) = \{p \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n \mid F(p) = 0\}$.

Se $T \subset A$ é formado por polinômios homogêneos, então definimos os zeros de T por

$$\mathcal{Z}(T) = \bigcap_{F \in T} \mathcal{Z}(F).$$

Ideal homogêneo

Seja $I \subseteq \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ um ideal. I é dito homogêneo se existe uma quantidade finita de geradores homogêneos de I .

²Seja \mathbb{K} um corpo infinito. $G \in \mathbb{K}[x]$, $G \neq 0$ se, e somente se, existe $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tal que $G(a_0, \dots, a_n) \neq 0$.

O exemplo abaixo, mostra que apesar de I admitir geradores nem todos homogêneos, isso não implica em I não ser homogêneo.

Exemplo A.0.3. Seja $I = \langle x - y^2, y \rangle \subseteq \mathbb{R}[x, y]$.³ Note que, $I = \langle x, y \rangle$. De fato, $x = 1 \cdot (x - y^2) + y \cdot y$ e $y = 0 \cdot (x - y^2) + 1 \cdot y$.

Proposição A.0.2. *Seja $I \subseteq \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ um ideal.*

I é um ideal homogêneo se, e somente se, $\forall g \neq 0 \in I$ de grau d tal que $g = g_0 + \dots + g_d$ com $g_i \in A_i$ tem-se que $g_i \in I \forall i \in \{0, \dots, d\}$.

Demonstração. Veja a Proposição 1.17 (p. 58 em [17]). □

Zeros de um Ideal homogêneo

Seja $I \subset \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ um ideal homogêneo tendo $\{F_i\}_{i=1}^k$ como um conjunto de geradores homogêneos. Definimos os zeros de I por

$$\mathcal{Z}(I) = \bigcap_{i=0}^k \mathcal{Z}(F_i).$$

Observação A.0.3. Se $I = \langle F_1, \dots, F_k \rangle$ sendo $F_i \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ homogêneos $\forall i$ e $\{G_1, \dots, G_d\}$ for outro conjunto de geradores de I , então

$$\bigcap_{i=0}^k \mathcal{Z}(F_i) = \bigcap_{i=0}^d \mathcal{Z}(G_i).$$

Exemplo A.0.4. Seja $I = \langle 3x_0 - x_1, x_0 - 2x_2 \rangle \subseteq \mathbb{R}[x_0, x_1, x_2]$. Iremos calcular $\mathcal{Z}(I)$ em $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$. Por definição, $\mathcal{Z}(I) = \mathcal{Z}(3x_0 - x_1) \cap \mathcal{Z}(x_0 - 2x_2)$. Considere $a = [a_0 : a_1 : a_2] \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$. Note que

$$\begin{aligned} a \in \mathcal{Z}(I) &\iff 3a_0 - a_1 = 0 \quad \text{e} \quad a_0 - 2a_2 = 0 \\ &\iff a_1 = 3a_0 \quad \text{e} \quad a_0 = 2a_2 \\ &\iff a = [a_0 : 3a_0 : 2a_2] = [1 : 3 : 2]. \end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{Z}(I) = \{[1 : 3 : 2]\}$.

Exemplo A.0.5. Seja $J = \langle x_0x_1 \rangle \subseteq \mathbb{R}[x_0, x_1, x_2]$. Então, $\mathcal{Z}(J) = \mathcal{Z}(x_0) \cup \mathcal{Z}(x_1)$.

³Lembre que se $I = \langle F_1, \dots, F_k \rangle$ e $J = \langle G_1, \dots, G_n \rangle$ são ideais em $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ então verifica-se: $I = J \iff F_i \in J$ e $G_j \in I$ para todo i, j .

De fato, considere $a = [a_0 : a_1 : a_2] \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$. Note que

$$\begin{aligned} a \in \mathcal{Z}(J) &\iff a \in \mathcal{Z}(x_0x_1) &\iff a_0 \cdot a_1 = 0 \\ &&\iff a_0 = 0 \quad \text{ou} \quad a_1 = 0 \\ &\iff a \in \mathcal{Z}(x_0) \quad \text{ou} \quad a \in \mathcal{Z}(x_1) \\ &\iff a \in \mathcal{Z}(x_0) \cup \mathcal{Z}(x_1). \end{aligned}$$

Visto que,

$$a \in \mathcal{Z}(x_0) \iff a_0 = 0 \iff a = [0 : a_1 : a_2] \text{ com } [a_1 : a_2] \in \mathbb{P}^1,$$

segue que $\mathcal{Z}(x_0)$ está em bijeção com $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$.

Proposição A.0.3. *Sejam I, J ideais homogêneos em $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ e $T \subset \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ formados por polinômios homogêneos. Verifica-se que:*

1. $I \subseteq J$, então $\mathcal{Z}(I) \supseteq \mathcal{Z}(J)$;
2. $\mathcal{Z}(I) \cup \mathcal{Z}(J) = \mathcal{Z}(I \cap J)$;
3. $\mathcal{Z}(T) = \mathcal{Z}(\langle T \rangle)$;
4. $\mathcal{Z}(I) \cap \mathcal{Z}(J) = \mathcal{Z}(I + J)$.

Demonstração. Confira a Proposição 1.18 (p. 61 em [17]). □

Conjuntos Algébricos em $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$

Seja $X \subset \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$. X é denominado conjunto algébrico em $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ se $X = \mathcal{Z}(I)$ para algum ideal homogêneo $I \subseteq \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$. Ou seja, X é um conjunto algébrico em $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ se existe uma quantidade finita de polinômios homogêneos $F_1, \dots, F_k \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ tais que $X = \bigcap_{i=1}^k \mathcal{Z}(F_i)$.

Exemplo A.0.6. (Conjuntos Algébricos em \mathbb{P}^1). Seja $X \subset \mathbb{P}^1$. Lembre que: X é um conjunto algébrico se, e somente se, existem $F_1, \dots, F_k \in \mathbb{C}[x_0, x_1]$ homogêneos tais que $X = \bigcap_{i=1}^k \mathcal{Z}(F_i)$.

Se $k = 1$, então $X = \mathcal{Z}(F)$ com $F \in \mathbb{C}[x_0, x_1]$ homogêneo. Vamos analisar primeiro o caso em que F é um polinômio constante. Se $F = 0$ então $\mathcal{Z}(F) = \mathbb{P}^1$, caso contrário $\mathcal{Z}(F) = \emptyset$.

Considere então, $F \neq 0$ e $\text{grau}(F) = d \geq 1$. Daí, se $d = 1$ tem-se $F = b_0x_0 + b_1x_1$. Logo

$$\begin{aligned}
 a = [a_0 : a_1] \in \mathcal{Z}(F) &\iff b_0a_0 + b_1a_1 = 0 \\
 &\iff \begin{vmatrix} b_0 & b_1 \\ -a_1 & a_0 \end{vmatrix} = 0 \\
 &\iff \{(b_0, b_1), (-a_1, a_0)\} \text{ é } LD \\
 &\iff -a_1 = \lambda b_0 \text{ e } a_0 = \lambda b_1 \text{ para algum } \lambda \neq 0 \in \mathbb{C} \\
 &\iff a = [a_0 : a_1] = [\lambda b_1 : -\lambda b_0] = [b_1 : -b_0].
 \end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{Z}(F) = \{[b_1 : -b_0]\}$.

Para analisar o caso em que $d > 1$ vamos utilizar o seguinte lema.

Lema A.0.1. *Seja $F \in \mathbb{C}[x_0, x_1]$ homogêneo de grau $d \geq 1$. Então, existem F_1, \dots, F_d homogêneos de grau 1 tais que $F = F_1 \cdot \dots \cdot F_d = \prod_{i=1}^d F_i$.*

Demonstração. Veja o Lema 1.8 (p. 63 em [17]). □

De posse do resultado, tem-se que todo polinômio homogêneo em $\mathbb{C}[x_0, x_1]$ é um produto de fatores lineares da forma $bx_0 + ax_1$, podendo aparecer fatores repetidos. Logo, podemos representar F da seguinte forma

$$F = L_1^{m_1} \cdot L_2^{m_2} \cdot \dots \cdot L_k^{m_k}$$

sendo $L_i = b_i x_0 - a_i x_1$ e $\{L_1, \dots, L_k\}$ LI com $m_1 + m_2 + \dots + m_k = d$. Logo,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Z}(F) &= \mathcal{Z}(L_1^{m_1}) \cup \mathcal{Z}(L_2^{m_2}) \cup \dots \cup \mathcal{Z}(L_k^{m_k}) \\
 &= \mathcal{Z}(L_1) \cup \mathcal{Z}(L_2) \cup \dots \cup \mathcal{Z}(L_k) \\
 &= \{[a_1 : b_1], [a_2 : b_2], \dots, [a_k : b_k]\}.
 \end{aligned}$$

Assim concluímos que os conjuntos algébricos em \mathbb{P}^1 são os subconjuntos finitos de \mathbb{P}^1 e o próprio \mathbb{P}^1 .

Observação A.0.4. $\mathcal{F} = \{\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n - X \mid X \text{ é um conjunto algébrico}\}$ define uma topologia em $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ denominada Topologia de Zariski.

Ideal associado a um subconjunto de $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$

Seja $Y \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ um subconjunto qualquer. Definimos o ideal associado a Y por

$$\mathcal{I}(Y) = \langle \{F \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n] \mid F \text{ é homogêneo e } F(a) = 0, \forall a \in Y\} \rangle$$

Proposição A.0.4. *Sejam Y, Y_1 subconjuntos de $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$. Considere $T \subseteq \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ formado por polinômios homogêneos. Verifica-se que*

1. $Y \subseteq Y_1$, então $\mathcal{I}(Y) \supseteq \mathcal{I}(Y_1)$;
2. $\mathcal{I}(Y \cup Y_1) = \mathcal{I}(Y) \cap \mathcal{I}(Y_1)$;
3. $T \subseteq \mathcal{I}(\mathcal{Z}(T))$;
4. $\mathcal{Z}(\mathcal{I}(Y)) = \overline{Y}$.

Demonstração. Confira a Proposição 1.22 (p. 74 em [17]). □

Conjunto irredutível em um espaço topológico

Seja (X, \mathcal{F}) um espaço topológico e Y um subconjunto de X . Verifica-se que

$$\mathcal{F}_Y = \{U \cap Y \mid U \in \mathcal{F}\}$$

define a topologia em Y , denominada topologia induzida em Y a partir da topologia em X .

Definição A.0.1. Seja Y um espaço topológico. Y é dito irredutível se, e somente se, para todo $F_1, F_2 \subseteq Y$ fechados tais que $Y = F_1 \cup F_2$, tem-se que $Y = F_1$ ou $Y = F_2$. Do contrário, Y é dito redutível.

Exemplos A.0.1. 1. \emptyset é irredutível.

2. Em \mathbb{P}^1 os conjuntos algébricos são os subconjuntos finitos e o próprio \mathbb{P}^1 . Logo, os conjuntos irredutíveis em \mathbb{P}^1 são o próprio \mathbb{P}^1 e os conjuntos unitários.

3. $Y = \mathcal{Z}(x_0x_1) = \mathcal{Z}(x_0) \cup \mathcal{Z}(x_1) \subseteq \mathbb{P}^2$ é redutível. Entretanto, $\mathcal{Z}(x_0)$ é irredutível.

Observação A.0.5. Considere $A = \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ e $A_+ = \langle x_0, \dots, x_n \rangle$. Seja $I \subseteq A$ um ideal homogêneo. Verifica-se que

$$\mathcal{Z}(I) = \emptyset \iff \sqrt{I} = A \text{ ou } \sqrt{I} = A_+ \iff \exists d \geq 0 \text{ tal que } A_d \subseteq I.$$

Proposição A.0.5. *(Teorema dos zeros de Hilbert - versão projetiva) Seja \mathbb{K} um corpo algebricamente fechado e $I \subseteq \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ um ideal homogêneo tal $\mathcal{Z}(I) \neq \emptyset$. Então, $\mathcal{I}(\mathcal{Z}(I)) = \sqrt{I}$.*

Demonstração. Veja o Teorema 1.4 (p. 82 em [17]). □

Considere $A = \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ sendo A_d o subespaço vetorial de A gerado por pelos monômios em A de grau $d \geq 0$.

Dizemos que X é uma **hipersuperfície** de grau $d \geq 1$ em $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ se $X \in \mathbb{P}(A_d)$, isto é, $X = [F] \in \mathbb{P}(A_d)$ com $F \neq 0$ em A_d .

Observação A.0.6. Se $[F], [G] \in \mathbb{P}(A_d)$ definem a mesma hipersuperfície se, e somente se, $F = \lambda G$ para algum $\lambda \neq 0$ em \mathbb{K} .

Definimos o suporte de $[F] \in \mathbb{P}(A_d)$ por $\mathcal{Z}(F) \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$.

Exemplo A.0.7. Considere $S = \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$. Uma hipersuperfície de grau d em \mathbb{P}^2 será denominada de curva plana de grau d . Em particular, curvas de grau 2 em \mathbb{P}^2 são chamadas de cônicas. Observe que

$$\Psi : \mathbb{P}(S_2) \longrightarrow \{\mathcal{Z}(F) \mid F \neq 0 \text{ em } S_2\} \text{ dada por } [F] \longmapsto \mathcal{Z}(F),$$

é uma bijeção. Como também $\Phi : \mathbb{P}(S_2) \longrightarrow \mathbb{P}^5$ dada por

$$[a_0x_0^2 + a_1x_0x_1 + a_2x_0x_2 + a_3x_1^2 + a_4x_1x_2 + a_5x_2^2] \longmapsto [a_0 : a_1 : a_2 : a_3 : a_4 : a_5]$$

é uma bijeção.

Variedades lineares

Seja $Y \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ um conjunto algébrico. Y é uma variedade linear se $\mathcal{I}(Y) = \langle F_1, \dots, F_k \rangle$ com $F_1, \dots, F_k \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ homogêneos de grau 1.

Exemplo A.0.8. Seja $Y \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ um conjunto algébrico. Observe que se $\mathcal{I}(Y) = \{0\}$ então $Y = \bar{Y} = \mathcal{Z}(\mathcal{I}(Y)) = \mathcal{Z}(\{0\}) = \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$. Entretanto, se $\mathcal{I}(Y) = \langle x_0, \dots, x_n \rangle$ então $Y = \emptyset$.

Observação A.0.7. Seja $Y \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ uma variedade linear tal que $\mathcal{I}(Y) = \langle L_1, \dots, L_k \rangle$ com $L_i \in A_1$ não nulos. Seja $W = [L_1, \dots, L_k] \leq A_1 = [x_0, \dots, x_n]$ e seja $\{L_{i_1}, \dots, L_{i_s}\} \subseteq \{L_1, \dots, L_k\}$ base de W . Então, $\mathcal{I}(Y) = \langle L_{i_1}, \dots, L_{i_s} \rangle$.

Proposição A.0.6. *Seja \mathbb{K} um corpo algebricamente fechado e $Y \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ um conjunto algébrico. Y é uma variedade linear se, e somente se, $Y = \mathbb{P}(W)$ para algum W subespaço de \mathbb{K}^{n+1} .*

Demonstração. Confira a Proposição 1.19 (p. 67 em [17]). □

Corolário A.0.2. *A função $\psi : \{W \mid W \leq \mathbb{K}^{n+1}\} \longrightarrow \{Y \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n \mid \text{Variedade linear}\}$ dada por $W \longmapsto \mathbb{P}(W)$ é uma bijeção.*

Demonstração. De fato, a sobrejetividade é dada pela Proposição A.0.6. Para a injetividade, considere U, W subespaços vetoriais de \mathbb{K}^{n+1} tais $\mathbb{P}(W) = \mathbb{P}(U)$. Seja $w \in W$ com $w \neq 0$, daí

$$[w] \in \mathbb{P}(W) \implies [w] \in \mathbb{P}(U) \implies [w] = [u] \text{ para algum } u \in U - \{0\}.$$

Consequentemente, $w = \lambda u$ para algum $\lambda \neq 0$ em \mathbb{K} . Logo, $W \subseteq U$. De forma análoga, tem-se $U \subseteq W$. Portanto, $U = W$. \square

Definição A.0.2. Seja $Y \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ uma variedade linear. Definimos a dimensão de Y , por $\dim Y = \dim W - 1$, com W subespaço vetorial de \mathbb{K}^{n+1} tal que $Y = \mathbb{P}(W)$.

Retas e planos em $\mathbb{P}(V)$

Considere $Y \subseteq \mathbb{P}(V)$. Então

- Y é uma reta se $Y = \mathbb{P}(W)$ para algum $W \in G_2(V)$.
- Y é um plano se $Y = \mathbb{P}(U)$ para algum $U \in G_3(V)$.

Observação A.0.8. Sejam p, q pontos em $\mathbb{P}(V)$ distintos. Então, existe uma única reta passando por p e q , que denotaremos por $l_{p,q}$.

De fato, sejam $p = [u]$ e $q = [v]$ pontos em $\mathbb{P}(V)$ distintos, logo temos que u e v são LI. Daí, considere $W = [u, v] \in G_2(V)$. Logo, $\mathbb{P}(W) = L_{p,q}$ é uma reta em $\mathbb{P}(V)$ que contém os pontos p e q . Provando assim, a existência. Para a unicidade, considere $L_{p,q} = \mathbb{P}(W_1)$ com $W_1 \in G_2(V)$. Uma vez que, $p = [u] \in \mathbb{P}(W_1)$ segue que $[u] = [w_1]$ para algum $w_1 \in W_1$. Assim, $u = \lambda w_1$ para algum λ não nulo em \mathbb{C} , ou seja, $u \in W_1$ e analogamente, tem-se que $v \in W_1$. Assim,

$$W = [u, v] \subset W_1 \xrightarrow{\dim W=2} W = W_1.$$

Portanto, $\mathbb{P}(W) = \mathbb{P}(W_1)$ do qual concluímos que existe uma única reta passando por p e q .

Observações A.0.3. Pontos, retas e planos são variedades lineares em $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$. De fato,

$$\boxed{n \geq 2:} \quad l \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n \text{ é uma reta } \iff l = \mathcal{Z}(L_1, \dots, L_{n-1}), \quad \{L_i\}_{i=1}^{n-1} \subseteq [x_0, \dots, x_n] \text{ LI.}$$

$$\boxed{n \geq 3:} \quad \pi \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n \text{ é um plano } \iff \pi = \mathcal{Z}(L_1, \dots, L_{n-2}), \quad \{L_i\}_{i=1}^{n-2} \subseteq [x_0, \dots, x_n] \text{ LI.}$$

Exemplos A.0.2. Com as notações acima

- Considere $S = \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$, $S_1 = [x_0, x_1, x_2]$ e $l \subseteq \mathbb{P}^2$. Então

$$\begin{aligned} l \text{ é uma reta} &\iff l \text{ é uma variedade linear de dimensão 1} \\ &\iff l = \mathbb{P}(W) \text{ para algum } W \in G_2(\mathbb{C}^3) \\ &\iff l = \mathcal{Z}(L), \text{ sendo } L \neq 0 \text{ em } S_1 \end{aligned}$$

- Considere $R = \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$, $R_1 = [x_0, x_1, x_2, x_3]$ e $Y \subseteq \mathbb{P}^3$. Então

$$\begin{aligned} Y \text{ é uma reta} &\iff Y \text{ é uma variedade linear de dimensão 1} \\ &\iff Y = \mathbb{P}(U) \text{ para algum } U \in G_2(\mathbb{C}^4) \\ &\iff Y = \mathcal{Z}(L_1, L_2) \text{ e } \{L_1, L_2\} \subseteq R_1 \text{ LI} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y \text{ é um plano} &\iff Y \text{ é uma variedade linear de dimensão 2} \\ &\iff Y = \mathbb{P}(W) \text{ para algum } W \in G_3(\mathbb{C}^4) \\ &\iff Y = \mathcal{Z}(L), \text{ sendo } L \neq 0 \text{ em } R_1 \end{aligned}$$

Proposição A.0.7. *Duas retas em \mathbb{P}^2 sempre se intersectam.*

Demonstração. Considere $l_1 = \mathbb{P}(W_1)$, $l_2 = \mathbb{P}(W_2)$ com $W_i \in G_2(\mathbb{C}^3)$ retas em \mathbb{P}^2 . Assuma que $l_1 \neq l_2$. Vamos mostrar que, $l_1 \cap l_2 = \mathbb{P}(W_1) \cap \mathbb{P}(W_2) = \mathbb{P}(W_1 \cap W_2) \neq \emptyset$. Lembre que,

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2) \quad (\text{A.2})$$

Se $\dim(W_1 + W_2) = 2$ então $W_1 = W_2$ (absurdo). Logo, $\dim(W_1 + W_2) > 2$ de onde concluímos que $\dim(W_1 + W_2) = 3$. De (A.2), segue que a $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$. Assim, $\mathbb{P}(W_1 \cap W_2)$ define um ponto em \mathbb{P}^2 . \square

Mudança de coordenadas projetivas (MCP)

Considere $\text{Aut}(\mathbb{K}^{n+1}) = \{T : \mathbb{K}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{K}^{n+1} \mid T \text{ é um isomorfismo } \mathbb{K}\text{-linear}\}$.

Observação A.0.9. Para todo $W \in G_d(\mathbb{K}^{n+1})$ verifica-se que $T(W) \in G_d(\mathbb{K}^{n+1})$ para todo $T \in \text{Aut}(\mathbb{K}^{n+1})$.

Definição A.0.3. Uma função $\varphi : \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n \longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ é chamada de mudança de coordenadas projetivas (MCP) em $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ se existe $T \in \text{Aut}(\mathbb{K}^{n+1})$ tal que $\varphi([v]) = [T(v)]$, $\forall [v] \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$.

Notação A.0.2. $\text{Aut}(\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n) := \{\varphi : \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n \longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n \mid \varphi \text{ é uma MCP}\}$.

Exemplo A.0.9. Se $p = [1 : 2 : 3] \in \mathbb{P}^2$, então vamos determinar $\varphi : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$ MCP tal que $\varphi(p) = [1 : 0 : 0]$.

Note que, existe um único isomorfismo \mathbb{C} -linear $T : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$ tal que⁴

$$T(1, 2, 3) = (1, 0, 0), T(0, 1, 0) = (0, 1, 0) \text{ e } T(0, 0, 1) = (0, 0, 1).$$

Visto que $T(x, y, z) = (x, y - 2x, z - 3x)$, então $\varphi : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$ definida por

$$[x : y : z] \longmapsto [x : y - 2x : z - 3x]$$

é uma MCP tal que $\varphi([1 : 0 : 0]) = [1 : 2 : 3]$.

Exemplo A.0.10. Se $l \subseteq \mathbb{P}^2$ é uma reta, então existe $\varphi : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$ MCP tal que $\varphi(l) = \mathcal{Z}(x_0)$.

Note que,

$$\mathcal{Z}(x_0) = \{[a : b : c] \in \mathbb{P}^2 \mid a = 0\} = \{[0 : b : c] \in \mathbb{P}^2\} = \mathbb{P}(U) \text{ sendo } U = [e_2, e_3].$$

Assuma que $l = \mathbb{P}(W)$ sendo $W = [w_1, w_2]$ e escolha $w_3 \in \mathbb{C}^3$ tal que $\{w_1, w_2, w_3\}$ seja uma base para \mathbb{C}^3 . Como existe um único $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^3)$ tal que $T(w_1) = e_2$, $T(w_2) = e_3$ e $T(w_3) = e_1$. Podemos considerar, $\varphi : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$ MCP dada por $\varphi([v]) = [T(v)]$. Note que, $T(W) = U$. Logo, $\varphi(l) = \mathcal{Z}(x_0)$.⁵

Exemplo A.0.11. Considere $\{L_1, L_2\}$ LI em $[x_0, x_1, x_3] \subseteq \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$. Então, existe $\varphi : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$ MCP tal que $\varphi(\mathcal{Z}(L_1 \cdot L_2)) = \mathcal{Z}(x_0) \cup \mathcal{Z}(x_1)$.

A seguir, colocamos uma representação do queremos mostrar

Assim, considere o isomorfismo \mathbb{C} -linear $T : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$ determinado por $T(w) = e_3$, $T(w_1) = e_2$ e $T(w_2) = e_1$.⁶

⁴De fato, basta determinar $a, b, c \in \mathbb{C}$ tais que $(x, y, z) = a(1, 2, 3) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1)$. Equivalientemente,

$$\begin{cases} x = a \\ y = a + 2b \\ z = 3a + c \end{cases} \implies \begin{cases} a = x \\ b = y - 2x \\ c = z - 3x \end{cases}$$

Donde concluímos que $T(x, y, z) = (x, y - 2x, z - 3x)$.

⁵De fato,

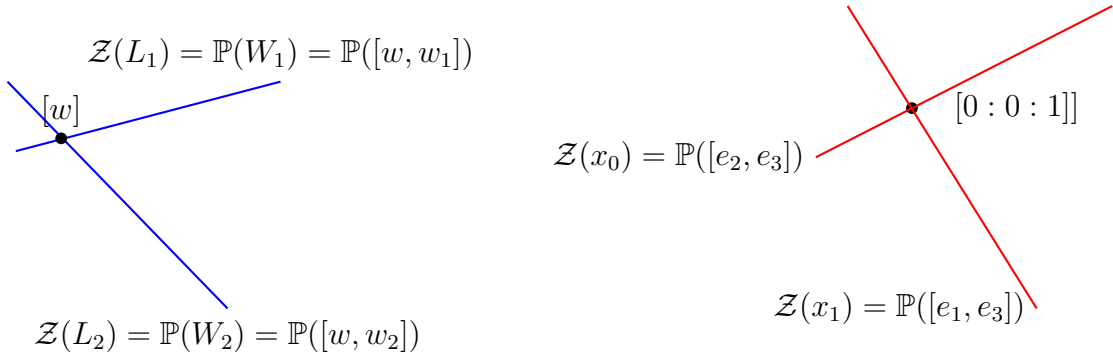
$$\varphi(l) = \varphi(\mathbb{P}(W)) = \{\varphi([w]) \mid w \neq 0, w \in W\} = \{[T(w)] \mid w \neq 0, w \in W\} = \mathbb{P}(U) = \mathcal{Z}(x_0).$$

Pois, $w \in W \implies w = a \cdot w_1 + b \cdot w_2 \implies T(w) = a \cdot e_2 + b \cdot e_3 \implies T(w) \in [e_2, e_3] = U$.

⁶De fato,

$$\begin{aligned} \varphi(\mathcal{Z}(L_1)) &= \varphi(\mathbb{P}(W_1)) = \mathbb{P}([e_2, e_3]) = \mathcal{Z}(x_0); \\ \varphi(\mathcal{Z}(L_2)) &= \varphi(\mathbb{P}(W_2)) = \mathbb{P}([e_1, e_3]) = \mathcal{Z}(x_1); \\ \varphi(\mathcal{Z}(L_1 \cdot L_2)) &= \varphi(\mathcal{Z}(L_1) \cup \mathcal{Z}(L_2)) = \varphi(\mathcal{Z}(L_1)) \cup \varphi(\mathcal{Z}(L_2)) = \mathcal{Z}(x_0) \cup \mathcal{Z}(x_1) = \mathcal{Z}(x_0 x_1). \end{aligned}$$

Figura A.1



A ação do grupo $\text{Aut}(\mathbb{K}^{n+1})$ no anel $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$

Considere $A = \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ e defina

$$\begin{aligned} \bullet : \text{Aut}(\mathbb{K}^{n+1}) \times A &\longrightarrow A \\ (T, F) &\longmapsto T_\bullet F \end{aligned}$$

sendo $T_\bullet F(x_0, \dots, x_n) = F(T^{-1}(x_0, \dots, x_n))$.⁷

Exemplo A.0.12. Se $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^3)$ é tal que $T^{-1}(x, y, z) = (x - y, y, x - z)$ e $F = 1 + x_0 - x_1 x_2 \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$. Então,

$$T_\bullet F = F(T^{-1}(x_0, x_1, x_2)) = F(x_0 - x_1, x_1, x_0 - x_2) = 1 + x_0 - x_1 - x_1(x_0 - x_2).$$

Proposição A.0.8. Com as notações acima. Considere $T, R \in \text{Aut}(\mathbb{K}^{n+1})$. Então,

1. $T_\bullet : A \longrightarrow A$ dado por $F \longmapsto T_\bullet F$ é um isomorfismo \mathbb{K} -linear.
2. $(T \circ R)_\bullet = T_\bullet \circ R_\bullet$ e $(T^{-1})_\bullet = (T_\bullet)^{-1}$.
3. $T_\bullet(F \cdot G) = (T_\bullet F) \cdot (T_\bullet G) \forall F, G \in A$.
4. se $F \in A_d$ então $T_\bullet F \in A_d$. Além disso, $T_\bullet : A_d \longrightarrow A_d$ é um isomorfismo \mathbb{K} -linear.

Demonstração. Veja a Proposição 1.34 (p. 127 em [17]). □

Proposição A.0.9. Seja $\{L_0, \dots, L_n\}$ uma base de $[x_0, \dots, x_n] \subseteq \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$. Então, existe $T \in \text{Aut}(\mathbb{K}^{n+1})$ tal que $T_\bullet L_i = x_i \forall i \in \{0, \dots, n\}$.

⁷Observe que " \bullet " define uma ação pela esquerda do grupo $\text{Aut}(\mathbb{K}^{n+1})$ em A .

Demonstração. Observe que

$$T_{\bullet} L_j = x_j \iff L_j = (T_{\bullet})^{-1} x_j = (T^{-1})_{\bullet} x_j = \sum_{i=0}^n a_{ji} x_i \text{ se } [T] = [a_{ij}]$$

for a matriz associada a T na base canônica. Visto que,

$$T_{\bullet}^{-1} F(x_0, \dots, x_n) = F(T(x_0, \dots, x_n)) = F\left(\sum_{i=0}^n a_{0i} x_i, \dots, \sum_{i=0}^n a_{ni} x_i\right) \forall F \in A.$$

Assim, as linhas da matriz $[T]$ são determinadas pelas coeficientes de L_i na base $\{x_i\}_{i=0}^n$. □

Exemplo A.0.13. Sejam $L_0 = x_0 + x_1 + 2x_2$, $L_1 = x_1 - 4x_2$ e $L_2 = x_0 - 5x_2$. Daí, para determinar $T \in \text{Aut}(\mathbb{K}^{n+1})$ tal que $T_{\bullet} L_i = x_i$ basta considerar,

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix} \text{ na base canônica de } \mathbb{C}^3.$$

Corolário A.0.3. Sejam $\{L_i\}_{i=0}^n$ e $\{M_i\}_{i=0}^n$ bases de $[x_0, \dots, x_n]$. Então, existe $T \in \text{Aut}(\mathbb{K}^{n+1})$ tal que $T_{\bullet} L_i = M_i \forall i \in \{0, \dots, n\}$.

Demonstração. Pela Proposição A.0.9 existem $T_1, T_2 \in \text{Aut}(\mathbb{K}^{n+1})$ tais que $T_{1\bullet} L_i = x_i$ e $T_{2\bullet} M_i = x_i$ para todo $i \in \{0, \dots, n\}$. Segue que, $M_i = T_2^{-1} x_i$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Logo, considere $T := T_2^{-1} \circ T_1 \in \text{Aut}(\mathbb{K}^{n+1})$ tal que

$$T_{\bullet} L_i = (T_2^{-1} \circ T_1)_{\bullet} (L_i) = T_2^{-1} (T_{1\bullet} L_i) = T_2^{-1} x_i = M_i$$

para todo $i \in \{0, \dots, n\}$. □

Lema A.0.2. Seja $A = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$. Considere $L_1, L_2 \in A_1 = [x_0, \dots, x_n]$ não nulos. Verifica-se que:

1. Se $\{L_1, L_2\}$ é LD, então existe $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^{n+1})$ tal que $T_{\bullet}(L_1 \cdot L_2) = x_0^2$;
2. Se $\{L_1, L_2\}$ é LI, então existe $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^{n+1})$ tal que $T_{\bullet}(L_1 \cdot L_2) = x_0^2 + x_1^2$.

Demonstração. 1. Sendo $\{L_1, L_2\}$ LD então $L_1 = \lambda L_2$ para algum $\lambda \in \mathbb{C}$. Assim,

$$L_1 \cdot L_2 = \lambda L_2^2 = \alpha^2 L_2^2 = (\alpha L_2)^2 \text{ com } \alpha \in \mathbb{C} \text{ tal que } \alpha^2 = \lambda.$$

Daí, completando $\{\alpha L_2\}$ para a base $\{\alpha L_2, M_1, \dots, M_n\}$ de A_1 , então a Proposição A.0.9 garante que existe $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^{n+1})$ tal que

$$T_\bullet(\alpha L_2) = x_0 \quad \text{e} \quad T_\bullet M_i = x_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Logo, $T_\bullet(L_1 \cdot L_2) = T_\bullet(\alpha L_2)^2 = (T_\bullet(\alpha L_2))^2 = x_0^2$.

2. Sendo $\{L_1, L_2\}$ LI , podemos completar à base $\{L_1, L_2, M_2, \dots, M_n\}$ de A_1 . Agora sendo $\{x_0 + ix_1, x_0 - ix_1, x_2, \dots, x_n\}$ uma outra base de A_1 , então a Proposição A.0.3 garante novamente que existe $T \in \text{Aut}(\mathbb{C})^{n+1}$ tal que $T_\bullet L_1 = x_0 + ix_1$, $T_\bullet L_2 = x_0 - ix_1$ e $T_\bullet M_i = x_i$, $\forall i \in \{2, \dots, n\}$. Logo,

$$T_\bullet(L_1 \cdot L_2) = T_\bullet(L_1) \cdot T_\bullet(L_2) = (x_0 + ix_1) \cdot (x_0 - ix_1) = x_0^2 + x_1^2.$$

□

Exemplo A.0.14. Classificação das quádricas em \mathbb{P}^1 :

Considere $F \in A = \mathbb{C}[x_0, x_1]$ homogêneo de grau 2 não nulo. Segue do Lema A.0.1 que $F = L_1 L_2$. Portanto, segue do Lema A.0.2 que existe $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^2)$ tal que $T_\bullet F = x_0^2$ ou $T_\bullet F = x_0^2 + x_1^2$.

Exemplo A.0.15. Classificação das cônicas em \mathbb{P}^2 :

Considere $F \in A = \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ homogêneo de grau 2 não nulo. Temos duas possibilidades: F é redutível ou irredutível.

1. F é redutível: temos que $F = L_1 \cdot L_2$ com $L_1, L_2 \in A_1$. Pelo Lema A.0.2 existe $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^3)$ tal que $T_\bullet(L_1 \cdot L_2) = x_0^2$ ou $T_\bullet(L_1 \cdot L_2) = x_0^2 + x_1^2$.⁸

2. F é irredutível: Assim, $F = a_0 x_0^2 + a_1 x_0 x_1 + a_2 x_0 x_2 + a_3 x_1^2 + a_4 x_1 x_2 + a_5 x_2^2$

(a) Suponha primeiro que $a_0 \neq 0$. Logo,

$$\begin{aligned} F &= a_0 \left(x_0 + \frac{a_1}{2a_0} x_1 \right)^2 - \frac{a_1^2 x_1^2}{4a_0^2} + a_2 x_0 x_2 + a_3 x_1^2 + a_4 x_1 x_2 + a_5 x_2^2 \\ &= a_0 \left(x_0 + \frac{a_1}{2a_0} x_1 \right)^2 + \left(a_3 - \frac{a_1^2}{4a_0^2} \right) x_1^2 + x_2 (a_2 x_0 + a_4 x_1 + a_5 x_2) \\ &\quad \text{considere: } L_0 = x_0 + \frac{a_1}{2a_0} x_1; \quad \alpha = a_3 - \frac{a_1^2}{4a_0^2} \quad \text{e} \quad M = a_2 x_0 + a_4 x_1 + a_5 x_2 \\ F &= (b_0 L_0)^2 + \alpha x_1^2 + M x_2 \quad \text{com } b_0 \in \mathbb{C} \text{ tal que } b_0^2 = a_0. \end{aligned}$$

⁸Note que $\mathcal{Z}(x_0^2) = x_0$. Entretanto, $[x_0^2] \in \mathbb{P}(A_2)$ é chamada de reta dupla e $\mathcal{Z}(x_0^2 + x_1^2) = \mathcal{Z}(x_0 + ix_1) \cup \mathcal{Z}(x_0 - ix_1)$ é um par de retas distintas.

Daí, considere $\{b_0L_0, x_1, x_2\}$ base de A_1 então existe $R \in \text{Aut}(\mathbb{C}^3)$ tal que $R_\bullet(b_0L_0) = x_0$ e $R_\bullet x_i = x_i$ para $i = 1, 2$. Note que, se $\beta = \frac{a_1}{2a_0}$ então

$$b_0L_0 = b_0x_0 + b_0\beta x_1 \xrightarrow{R_\bullet} x_0 = b_0R_\bullet x_0 + b_0\beta x_1 \implies R_\bullet x_0 = \frac{x_0}{b_0} - \beta x_1.$$

Como $M = a_2x_0 + a_4x_1 + a_5x_2$ então $R_\bullet M = a_2(\frac{x_0}{b_0} - \beta x_1) + a_4x_1 + a_5x_2$. Assim

$$G = R_\bullet F = x_0^2 + \alpha x_1^2 + x_2(c_0x_0 + c_1x_1 + c_2x_2)$$

com $c_0 = \frac{a_2}{b_0}$, $c_1 = a_4 - \frac{a_2\beta}{b_0}$ e $c_2 = a_5$. Daí, tem-se que $\alpha = 0$ ou $\alpha \neq 0$. Se $\alpha = 0$ então

$$\begin{aligned} G &= x_0^2 + x_2(c_0x_0 + c_1x_1 + c_2x_2) \\ &= (x_0 + \frac{c_0}{2}x_2)^2 - \frac{c_0^2}{4}x_2^2 + c_1x_1x_2 + c_2x_2^2 \\ &= (x_0 + \frac{c_0}{2}x_2)^2 + (c_2 + \frac{c_0^2}{4})x_2^2 + c_1x_1x_2. \end{aligned}$$

Daí, considere $\{x_0 + \frac{c_0}{2}x_2, x_1, x_2\}$ uma base de A_1 . Logo, existe $R_1 \in \text{Aut}(\mathbb{C}^3)$ tal que $(R_1)_\bullet(x_0 + \frac{c_0}{2}x_2) = x_0$ e $(R_2)_\bullet x_i = x_i$ para $i = 1, 2$. Com efeito,

$$\begin{aligned} G_1 = (R_1)_\bullet G &= x_0^2 + \gamma x_2^2 + c_1x_1x_2 \quad \text{com } \gamma = c_2 - \frac{c_0^2}{4} \\ &= x_0^2 + x_2(\gamma x_2 + c_1x_1). \end{aligned}$$

- Se $c_1 = 0$, então, $G_2 = x_0^2 + \gamma x_2^2$ é redutível (pois todo polinômio de duas variáveis de grau 2 é redutível), o que é um absurdo já que F é irredutível.
- Se $c_1 \neq 0$, então considere $\{c_1x_1 + \gamma x_2, x_0, x_2\}$ base de \mathbb{C}^3 . Assim, existe $R_2 \in \text{Aut}(\mathbb{C}^3)$ tal que $(R_2)_\bullet(c_1x_1 + \gamma x_2) = x_1$ e $(R_2)_\bullet x_i = x_i$ para $i = 0, 2$. Logo, $G_2 = (R_2)_\bullet G_1 = x_0^2 + x_2x_1$. Por fim, sendo $\{x_0, x_1 + ix_2, x_1 - ix_2\}$ uma base de \mathbb{C}^3 , segue da Proposição A.0.3 que existe $R_3 \in \text{Aut}(\mathbb{C}^3)$ tal que $(R_3)_\bullet x_0 = x_0$, $(R_3)_\bullet(x_1 + ix_2) = x_1$ e $(R_3)_\bullet(x_1 - ix_2) = x_2$. Assim, $G_3 = (R_3)_\bullet G_2 = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$.

Se $\alpha \neq 0$ então

$$G = R_\bullet F = x_0^2 + \alpha x_1^2 + M_1x_2 \text{ com } M_1 = c_0x_0 + c_1x_1 + c_2x_2.$$

Considere $\alpha_1 \in \mathbb{C}$ tal que $\alpha_1^2 = \alpha$. Logo, $G = R_\bullet F = x_0^2 + (\alpha_1x_1)^2 + M_1x_2$.

Considere $\{x_0, \alpha_1 x_1, x_2\}$ uma base para A_1 . Daí, existe $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^3)$ tal que $T_\bullet(\alpha_1 x_1) = x_1$ e $T_\bullet x_i = x_i$, para $i = 0, 2$. Assim,

$$\begin{aligned} G_1 = T_\bullet G &= x_0^2 + x_1^2 + x_2 M_2 \text{ com } M_2 = d_0 x_0 + d_1 x_1 + d_2 x^2. \\ &= (x_0 + \frac{d_0}{2} x_2)^2 + (x_1 + \frac{d_0}{2} x_2)^2 + (d_0 - \frac{d_0^2}{4} - \frac{d_1^2}{4}) x_2^2 \\ &= (x_0 + \frac{d_0}{2} x_2)^2 + (x_1 + \frac{d_0}{2} x_2)^2 + (\lambda_1 x_2)^2 \text{ com } \lambda_1^2 = d_0 - \frac{d_0^2}{4} - \frac{d_1^2}{4}. \end{aligned}$$

Por fim, seja $\{x_0 + \frac{d_0}{2} x_2, x_1 + \frac{d_0}{2} x_2, \lambda_1 x_2\}$ uma base para A_1 , e assim, existe $T_1 \in \text{Aut}(\mathbb{C}^3)$ tal que $(T_1)_\bullet(x_0 + \frac{d_0}{2} x_2) = x_0$, $(T_1)_\bullet(x_1 + \frac{d_0}{2} x_2) = x_1$ e $(T_1)_\bullet(\lambda_1 x_2) = x_2$. Portanto, $G_2 = (T_1)_\bullet G_1 = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$.

Em resumo, se o coeficiente de x_0^2 é não nulo, podemos obter por *MCP* que $F = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$. Sendo assim, considere agora o seguinte caso




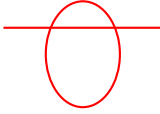

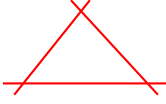
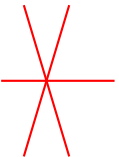
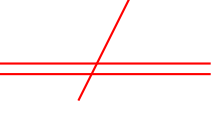

- (b) Suponha que $a_0 = 0$. Daí, $F = a_1 x_0 x_1 + a_2 x_0 x_2 + a_3 x_1^2 + a_4 x_1 x_2 + a_5 x_2^2$. Note que se a_3 ou a_5 são não nulos, basta considerar uma *MCP* tal que apareça o termo em x_0^2 e assim proceder como no caso 1. Por exemplo, se $a_3 \neq 0$ basta considerar a $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^3)$ tal que $T_\bullet x_1 = x_0$, $T_\bullet x_0 = x_2$ e $T_\bullet x_2 = x_1$. Daí, perceba que $T_\bullet F = a_1 x_0 x_2 + a_2 x_1 x_2 + a_3 x_0^2 + a_4 x_0 x_1 + a_5 x_1^2$, sendo $a_3 \neq 0$ o resultado segue do caso 1.

Por outro lado, se a_3 e a_5 são nulos, então $F = a_1 x_0 x_1 + a_2 x_0 x_2 + a_4 x_1 x_2$, considerando $a_1 \neq 0$ temos que existe $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^3)$ tal que $T_\bullet x_0 = x_0$, $T_\bullet x_1 = x_0 + x_1$ e $T_\bullet x_2 = x_2$. Logo, $T_\bullet F = a_1 x_0^2 + a_1 x_0 x_1 + (a_2 + a_4) x_0 x_2 + a_4 x_1 x_2$. Novamente, o resultado segue do caso 1. Portanto, a menos de uma *MCP* $F = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$.

Classificação das cúbicas em \mathbb{P}^2 :

De acordo com [9] podemos classificar as cúbicas em \mathbb{P}^2 em nove classes distintas representadas na tabela a seguir:

Tabela A.1: Classificação das cúbicas em \mathbb{P}^2 .

Tipo	Descrição	Representação geométrica
Não-singular e irreduzível	Geral	
Singular e irreduzível	Nodal	
Singular e irreduzível	Cuspidal	
Singular e redutível	Cônica não singular e uma reta secante	
Singular e redutível	Cônica não singular e uma reta tangente	
Singular e redutível	Três retas distintas não colineares	
Singular e redutível	Três retas distintas e colineares	
Singular e redutível	Uma reta dupla e uma reta secante	
Singular e redutível	Reta tripla	

Apêndice B

Ação de grupos e resultados de *MCP*

Considere $(G, *)$ um grupo e X um conjunto não vazio. A função

$$\begin{aligned}\bullet : G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto g \bullet x\end{aligned}$$

define uma ação pela esquerda de G em X se as seguintes condições forem satisfeitas para todos $g, h \in G$ e $x \in X$:

- (i) $e \bullet x = x$ para todo $x \in X$;
- (ii) $(g * h) \bullet x = g \bullet (h \bullet x)$.

Note que, a ação \bullet induz a seguinte relação de equivalência em X

$$x_1 \sim x_2 \iff \exists g \in G \text{ tal que } g \bullet x_1 = x_2.$$

Seja $\mathcal{O}_x = \{g \bullet x \in X \mid g \in G\}$ a órbita de x em X e $G_x = \{g \in G \mid g \bullet x = x\}$ o estabilizador de x em G . Em geral, tem-se que $X = \bigcup_{x \in X} \mathcal{O}_x$. De fato, as órbitas determinam uma partição no conjunto X .

Exemplo B.0.1. Considere $G = \text{Aut}(\mathbb{C}^3)$ e $X = \mathbb{P}(S_2)$ sendo $S = \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$. Observe que, $\bullet : \text{Aut}(\mathbb{C}^3) \times \mathbb{P}(S_2) \longrightarrow \mathbb{P}(S_2)$ dada por $(T, [F]) \longmapsto T \bullet [F] = [T_\bullet F]$ é uma ação pela esquerda de $\text{Aut}(\mathbb{C}^3)$ em $\mathbb{P}(S_2)$. Sejam

$$\mathcal{O}_0 = \mathcal{O}_{[F_0]}, \quad \mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_{[F_1]} \quad \text{e} \quad \mathcal{O}_2 = \mathcal{O}_{[F_2]}$$

sendo $F_0 = x_0^2$, $F_1 = x_0^2 + x_1^2$ e $F_2 = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$.

Afirmção: $\mathbb{P}(S_2) = \mathcal{O}_0 \dot{\cup} \mathcal{O}_1 \dot{\cup} \mathcal{O}_2$.

Por definição tem-se que $\mathcal{O}_0 \dot{\cup} \mathcal{O}_1 \dot{\cup} \mathcal{O}_2 \subseteq \mathbb{P}(S_2)$. Para mostrarmos a outra inclusão, considere $[F] \in \mathbb{P}(S_2)$. Vamos começar dando uma descrição explícita das órbitas \mathcal{O}_0 , \mathcal{O}_1 e \mathcal{O}_2 relacionada com a classificação das cônicas em \mathbb{P}^2 (cf. Exemplo A.0.15).

Para \mathcal{O}_0 : Note que $\mathcal{O}_0 = \{T \bullet [x_0^2] \mid T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^3)\} = \{([T \bullet x_0])^2 \mid T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^3)\}$.

A seguir mostraremos que $\mathcal{O}_0 = \{[L^2] \mid [L] \in \mathbb{P}(S_1)\}$. De fato,

$$\begin{aligned} [F] \in \mathcal{O}_0 &\iff [F] = [T \bullet x_0]^2 \text{ para algum } T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^3) \\ &\iff F = \lambda(T \bullet x_0)^2 \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{C} \text{ não nulo} \\ &\iff F = (\lambda_1 T \bullet x_0)^2 \text{ com } \lambda_1 \in \mathbb{C} \text{ tal que } \lambda_1^2 = \lambda \\ &\iff F = L^2 \text{ com } L = \lambda_1 T \bullet x_0 \in S_1. \end{aligned}$$

Para concluir, basta observar que para quaisquer $L, \lambda_1 x_0 \in S_1$ existe $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^3)$ tal que $L = T \bullet (\lambda_1 x_0)$.

Para \mathcal{O}_1 : Tem-se que $\mathcal{O}_1 = \{[T \bullet (x_0^2 + x_1^2)] \mid T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^3)\} = \{[L_1 \cdot L_2] \mid \{L_1, L_2\} \subseteq S_1 \text{ LI}\}$. De fato,

$$\begin{aligned} [F] \in \mathcal{O}_1 &\iff [F] = [T \bullet (x_0^2 + x_1^2)] \text{ para algum } T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^3) \\ &\iff F = \lambda \cdot T \bullet (x_0^2 + x_1^2) \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{C} \\ &\iff F = \lambda \cdot T \bullet ((x_0 + ix_1) \cdot (x_0 - ix_1)) \\ &\iff F = \lambda \cdot (T \bullet (x_0 + ix_1) \cdot T \bullet (x_0 - ix_1)) \\ &\iff F = L_1 \cdot L_2 \end{aligned}$$

com $L_1 = \sqrt{\lambda} \cdot T \bullet (x_0 + ix_1)$ e $L_2 = \sqrt{\lambda} \cdot T \bullet (x_0 - ix_1)$. Para concluir, é suficiente notar que se $\{L_1, L_2\} \subseteq S_1$ é LI, existe $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^3)$ tal que $L_1 = T \bullet (\alpha_1(x_0 + ix_1))$ e $L_2 = T \bullet (\alpha_2(x_0 - ix_1))$ para quaisquer escolha de $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C} - \{0\}$.

Para \mathcal{O}_2 : Seguindo de forma semelhante, temos que $\mathcal{O}_2 = \{[F] \mid F \text{ é irredutível}\}$.

Portanto, segue que

$$\mathbb{P}(S_2) = \mathcal{O}_0 \dot{\cup} \mathcal{O}_1 \dot{\cup} \mathcal{O}_2.$$

Proposição B.0.1. *Sejam $\mathcal{Z}(F) \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ com F homogêneo de grau d em $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ e $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n)$ definida por $T \in \text{Aut}(\mathbb{K}^{n+1})$. Então, $\varphi(\mathcal{Z}(F)) = \mathcal{Z}(T \bullet F)$.*

Demonstração. Seja $\varphi : \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n \longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ uma MCP determinada por $T \in \text{Aut}(\mathbb{K}^{n+1})$.

Considere $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ e note que

$$\begin{aligned}
 p \in \varphi(\mathcal{Z}(F)) &\iff p = \varphi(q) \text{ para algum } q \in \mathcal{Z}(F) \\
 &\iff p = \varphi([u]) \text{ para algum } q = [u] \in \mathcal{Z}(F) \text{ (i.é. } F(u) = 0) \\
 &\iff p = [v] \text{ com } [v] \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n \text{ tal que } F(T^{-1}(v)) = 0 \\
 &\iff p = [v] \text{ e } T_{\bullet}F(v) = 0 \\
 &\iff p \in \mathcal{Z}(T_{\bullet}F).
 \end{aligned}$$

□

Corolário B.0.1. *Toda MCP preserva conjuntos algébricos em $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$.*

Demonstração. Seja $X \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ um conjunto algébrico. Assim, existem F_1, \dots, F_k homogêneos em $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ tais que $X = \bigcap_{i=1}^k \mathcal{Z}(F_i)$.

Considere $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n)$ definida por $T \in \text{Aut}(\mathbb{K}^{n+1})$. Note que,

$$\varphi(X) = \varphi\left(\bigcap_{i=1}^k \mathcal{Z}(F_i)\right) = \bigcap_{i=1}^k \varphi(\mathcal{Z}(F_i)).$$

Segue da Proposição B.0.1 que $\varphi(\mathcal{Z}(F_i)) = \mathcal{Z}(T_{\bullet}F_i)$. Logo,

$$\varphi(X) = \bigcap_{i=1}^k \mathcal{Z}(T_{\bullet}F_i).$$

□

Proposição B.0.2. *Toda MCP preserva conjuntos irredutíveis em $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$.*

Demonstração. Seja $X \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ um conjunto irredutível e $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n)$. Queremos mostrar que $\varphi(X)$ é irredutível. De fato, considere $Y_1, Y_2 \subseteq \varphi(X)$ fechados tais que $Y_1 \cup Y_2 = \varphi(X)$. Logo, $X = \varphi^{-1}(Y_1) \cup \varphi^{-1}(Y_2)$. Temos que cada $Y_i = \varphi(X) \cap Z_i$, Z_i fechado em $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$. Logo, $\varphi^{-1}(Y_i) = X \cap \varphi^{-1}(Z_i)$ e segue do Corolário B.0.1 que $\varphi^{-1}(Z_i)$ é fechado em $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ (lembre que, fechado é sinônimo de conjunto algébrico). Portanto, cada $\varphi^{-1}(Y_i)$ é fechado em $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$. Como X é irredutível, segue que $X = \varphi^{-1}(Y_1)$ ou $X = \varphi^{-1}(Y_2)$, aplicando φ tem-se que $\varphi(X) = Y_1$ ou $\varphi(X) = Y_2$, ou seja, $\varphi(X)$ é irredutível em $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$. □

Pontos singulares de hipersuperfícies em $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$.

Considere $X = [F] \in \mathbb{P}(A_d)$ uma hipersuperfície de grau $d \geq 1$ em $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ sendo $A = \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$. O ponto $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ é dito ponto singular de X se, e somente se, $\frac{\partial F}{\partial x_i}(p) = 0 \forall i \in \{0, \dots, n\}$.

Notação B.0.1. Iremos denotar por

$$\text{Sing}(F) = \{p \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n \mid p \text{ é ponto singular de } X = [F]\}.$$

Afirmção: $\text{Sing}(F) \subseteq \mathcal{Z}(F) \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$.

Se $p = [a_0 : \dots : a_n] \in \text{Sing}(F)$ então $\frac{\partial F}{\partial x_i}(p) = 0 \ \forall \ i$. Logo, pela relação de Euler¹, segue que

$$\sum_{i=0}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(p) \cdot a_i = d \cdot F(p) \implies F(p) = 0 \implies p \in \mathcal{Z}(F).$$

Exemplo B.0.2. Considere $F \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ homogêneo de grau 2 não nulo. Sabemos que existe $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^3)$ tal que

$$T_{\bullet}F = \begin{cases} x_0^2, \\ x_0^2 + x_1^2, \\ x_0^2 + x_1^2 + x_2^2. \end{cases}$$

No que segue usaremos a notação $\partial_i F = \frac{\partial F}{\partial x_i}$ e $\nabla F = (\partial_0 F, \partial_1 F, \partial_2 F)$.

- Se $F_0 = x_0^2$ então $\text{Sing}(F_0) = \mathcal{Z}(x_0)$. De fato, $\nabla F = (2x_0, 0, 0)$. Assim, $\nabla F = (0, 0, 0)$ se, e somente se, $x_0 = 0$. Logo, $\text{Sing}(F_0) = \{[0 : x_1 : x_2] \mid [x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^1\} = \mathcal{Z}(x_0)$.
- Se $F_1 = x_0^2 + x_1^2$ então $\text{Sing}(F_1) = \{[0 : 0 : 1]\}$. De fato, $\nabla F = (2x_0, 2x_1, 0)$. Assim, $\nabla F = (0, 0, 0)$ se, e somente se, $x_0 = x_1 = 0$. Logo, $[a_0 : a_1 : a_2] \in \text{Sing}(F_1)$ se, e somente se $a_0 = a_1 = 0$ e $a_2 \neq 0$.
- Se $F_2 = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$ então $\text{Sing}(F_2) = \emptyset$. De fato, $\nabla F = (2x_0, 2x_1, 2x_2) = (0, 0, 0)$ se, e somente se $x_0 = x_1 = x_2 = 0$.

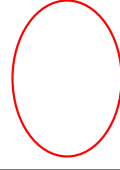


Definição B.0.1. Dizemos que $[F] \in \mathbb{P}(A_d)$ é não singular se $\text{Sing}(F) = \emptyset$.

Com isso, de acordo com o Exemplo A.0.15 temos a seguinte identificação para as cônicas em \mathbb{P}^2

¹A relação de Euler é dada por:

$$\frac{\partial F}{\partial x_0} \cdot x_0 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n} \cdot x_n = d \cdot F.$$

Tabela B.1: Classificação das cônicas em \mathbb{P}^2 .

Tipo	Descrição	Representação geométrica
Irredutível	Cônica não singular	
Redutível	Par de retas distintas	
Redutível	Reta dupla	

Definição B.0.2. Sejam $\mathcal{S} = [F] \in \mathbb{P}(A_d)$ sendo $A = \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ e $p \in \mathcal{Z}(F)$ não singular. Então, definimos o hiperplano tangente a \mathcal{S} no ponto p , por:

$$T_p\mathcal{S} = \mathcal{Z}(L_p) \text{ com } L_p = \frac{\partial F}{\partial x_0}(p) \cdot x_0 + \frac{\partial F}{\partial x_1}(p) \cdot x_1 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n}(p) \cdot x_n.$$

Exemplo B.0.3. Seja $C = \mathcal{Z}(F) \subseteq \mathbb{P}^2$ com $F = x_2^2 - x_0x_1$. Considere $p = [1 : 0 : 0]$ e $q = [0 : 1 : 0]$ em C . Note que $\nabla F = (-x_1, -x_0, 2x_2)$. Assim,

$$\nabla F(p) = (0, -1, 0) \implies T_pC = \mathcal{Z}(x_1),$$

$$\nabla F(q) = (-1, 0, 0) \implies T_qC = \mathcal{Z}(x_0).$$

Definição B.0.3. (Pontos em posição geral) Considere $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ tais que $p_i = [v_i]$ com $v_i \in \mathbb{K}^{n+1} - \{0\}$ $i \in \{1, \dots, k\}$. Dizemos que p_1, \dots, p_k estão em posição geral se para todo $C \subseteq \{v_1, \dots, v_k\}$ tal que $1 \leq \#C \leq n+1$ verifica-se que C é LI.

Proposição B.0.3. Sejam $[F] \in \mathbb{P}(A_d)$ uma hipersuperfície de grau d sendo $A = \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ e $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n)$ determinada por $T \in \text{Aut}(\mathbb{K}^{n+1})$. Verifica-se que

$$p \in \text{Sing}(F) \iff \varphi(p) \in \text{Sing}(T_{\bullet}F).$$

Demonstração. Veja a Proposição 1.36 (p. 129 em [17]). □

Proposição B.0.4. Sejam $\varphi, \varphi_1 \in \text{Aut}(\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n)$ definidas por $T, S \in \text{Aut}(\mathbb{K}^{n+1})$, respectivamente, então:

1. $\varphi = \varphi_1 \iff T = \lambda S$ para algum $\lambda \neq 0 \in \mathbb{C}$.
2. Se $\{p_i\}_{i=1}^{n+2}$ são pontos em $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ em posição geral e $\{q_i\}_{i=1}^{n+2}$ também são pontos em $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ em posição geral. Então, existe um único $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n)$ tal que $\varphi(p_i) = q_i \forall i \in \{1, \dots, n+2\}$.

$$\{1, \dots, n+2\}.$$

3. $\text{Aut}(\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n)$ com a composição de funções é um grupo.

Demonstração. 1. (\implies) Seja $\alpha = \{v_1, \dots, v_{n+1}\}$ base de \mathbb{C}^{n+1} .

$$\begin{aligned} \varphi = \varphi_1 &\implies \varphi([v_i]) = \varphi_1([v_i]) \quad \forall i \\ &\implies [T(v_i)] = [S(v_i)] \quad \forall i \\ &\implies T(v_i) = \lambda_i S(v_i) \text{ para algum } \lambda_i \neq 0 \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Agora considere $v = v_1 + v_2 + \dots + v_{n+1}$. Logo, $\varphi([v]) = \varphi_1([v])$ o que implica em $T(v) = \lambda S(v)$ para algum $\lambda \neq 0 \in \mathbb{C}$. Assim,

$$\begin{aligned} &\implies T(v_1) + T(v_2) + \dots + T(v_{n+1}) = \lambda S(v_1) + \lambda S(v_2) + \dots + \lambda S(v_{n+1}) \\ &\implies \lambda_1 S(v_1) + \lambda_2 S(v_2) + \dots + \lambda_{n+1} S(v_{n+1}) = \lambda S(v_1) + \lambda S(v_2) + \dots + \lambda S(v_{n+1}) \\ &\implies \lambda_i = \lambda \forall i \\ &\implies T = \lambda S. \end{aligned}$$

(\impliedby) Segue da definição de *MCP*.

2. Veja o Teorema 1.4 (p. 7 em [10]).

□

Apêndice C

Interseções e multiplicidades de curvas planas

Neste apêndice são apresentados alguns resultados relacionados com interseções de curvas planas projetivas e multiplicidades (cf. [20], [8] e [9]).

Definição C.0.1. Seja A um anel comutativo com unidade e $F, G \in A[x]$ com

$$\begin{aligned} F &= a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \quad (n \geq 1), \\ G &= b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m \quad (m \geq 1). \end{aligned}$$

Definimos a resultante de F e G como o determinante da matriz $(n+m) \times (n+m)$, com m linhas de a 's e n linhas de b 's (preenchendo com zeros nos espaços livres), a seguir

$$R(F, G) := \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & \dots & a_0 & & & & \\ & a_n & \dots & a_1 & a_0 & & & \\ & & \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ & & & & & a_n & \dots & a_0 \\ b_m & b_{m-1} & \dots & b_0 & & & & \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & & & \\ & & & & & b_m & \dots & b_0 \end{vmatrix}.$$

Exemplo C.0.1. Considere $F = x_0x_1$ e $G = x_2^2$ polinômios em $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$. Considere $A = \mathbb{C}[x_0, x_1]$ e $F, G \in A[x_2]$. Note que

$$\text{grau}_{x_2}(x_0x_1) = 0 \text{ e } \text{grau}_{x_2}(x_2^2) = 2.$$

Assim, iremos repetir zero linhas para os coeficientes de G e duas vezes as linhas dos

coeficientes de F em $A[x_2]$. Logo,

$$R(F, G) = \begin{vmatrix} x_0x_1 & 0 \\ 0 & x_0x_1 \end{vmatrix} = (x_0x_1)^2.$$

Exemplo C.0.2. Sejam $F = x_0^2 + 2x_1x_2$ e $G = x_1^2 + x_0x_2$ polinômios em $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$. Neste caso, escolhendo x_1 como variável, isto é, $A = \mathbb{C}[x_0, x_2]$, temos que $\text{grau}_{x_1}(x_0^2 + 2x_1x_2) = 1$ e $\text{grau}_{x_1}(x_1^2 + x_0x_2) = 2$. Logo,

$$R(F, G) = \begin{vmatrix} 2x_2 & x_0^2 & 0 \\ 0 & 2x_2 & x_0^2 \\ 1 & 0 & x_0x_2 \end{vmatrix} = 4x_0x_2^3 + x_0^4.$$

Lema C.0.1. *O polinômio $R(F, G)$ acima definido é homogêneo de grau $n \cdot m$, se não for identicamente nulo.*

Demonstração. Veja o Lema 18 (p. 28 em [20]). □

Da teoria geral, sabe-se que duas curvas projetivas planas quaisquer sempre se intersectam, o próximo resultado nos garante uma relação para a finitude da interseção.

Lema C.0.2. *Sejam F, G curvas planas projetivas. Então $F \cap G$ é finita se, e somente se, F e G não admitem componentes em comum.*

Demonstração. Veja o Lema 8 (p. 61 em [20]) □

De posse desse resultado, é interessante obtermos uma estimativa para tal cardinalidade, mas para isso precisamos de mais algumas definições.

Definição C.0.2. Sejam $P_i = [x_i : y_i : z_i]$, $i = 1, \dots, r$ os distintos pontos de $F \cap G$. Diremos que F, G estão em boa posição se $P_0 = [0 : 1 : 0] \notin F \cap G$. Diremos que F, G estão muito bem posicionados se $P_0 \notin F \cap G$ e se, para cada par $P_i, P_j \in F \cap G$, temos P_0, P_i, P_j não colineares.

Suponha de agora em diante que $F, G \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ são homogêneos de grau d e e , respectivamente, e não têm componentes em comum. Escrevendo

$$\begin{aligned} F &= a_0x_1^d + a_1x_1^{d-1} + \dots + a_d, \\ G &= b_0x_1^e + b_1x_1^{e-1} + \dots + b_e, \end{aligned}$$

em que $a_i, b_j \in \mathbb{C}[x_0, x_2]$ são homogêneos de graus i, j . Note que, o ponto $[0 : 1 : 0] \in F$ se, e somente se, $a_0 = 0$. Logo, estando F, G bem posicionados, temos que a_0 e b_0 são

não nulos. Sendo a resultante $R = R(x_0, x_2)$ de F e G com respeito a x_1 homogênea de grau $d \cdot e$. Por outro lado, considerando a_0 e b_0 não nulos, para cada $[x : z] \in \mathbb{P}^1$ temos $R(x, z) = 0$ se, e somente se, $[x : y : z] \in F \cap G$. Ao supor que F, G estão bem posicionados, concluímos que R rescreve-se na forma:

$$R(x_0, x_2) = c \cdot \prod_{i=1}^r (z_i x_0 - x_i x_2)^{m_i}$$

na qual

- c é uma constante não nula;
- $P_i = [x_i : y_i : z_i]$, $i = 1, \dots, r$ são os pontos distintos de $F \cap G$;
- os expoentes m_i são inteiros maiores ou iguais a 1 e $\sum_{i=1}^r m_i = d \cdot e$.

Definição C.0.3. A multiplicidade ou índice de interseção de F e G no ponto P é dada por

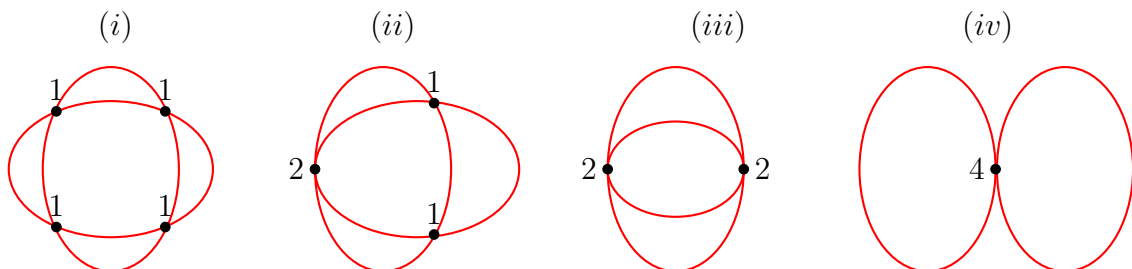
$$I_P(F, G) = \begin{cases} 0 & \text{se } P \notin F \cap G \\ m_i & \text{se } P = P_i \end{cases} \quad \text{nas condições acima.}$$

Teorema C.0.1. (Bézout) *Sejam C e C_1 são duas curvas planas projetivas de grau d e d_1 , respectivamente, sem componentes em comum. Então, C e C_1 se interceptam em $d \cdot d_1$ pontos, contando com as multiplicidades, ou seja,*

$$\sum_{P \in C \cap C_1} I_P(C, C_1) = d \cdot d_1.$$

Demonstração. Veja o Teorema 14.7 (p. 182 em [9]). □

Exemplo C.0.3. Sejam $C_1 = \mathcal{Z}(F_1)$ e $C_2 = \mathcal{Z}(F_2)$ com $F_i \in S_2$ sendo $S = \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ não singulares para todo $i \in \{1, 2\}$. Logo, o teorema de Bézout nos garante que essas curvas tem as seguintes possibilidades de interseção, representadas graficamente abaixo:



Apêndice D

Software MAXIMA

Este Apêndice apresenta alguns dos algoritmos utilizados no trabalho, com o objetivo de auxiliar o leitor, na utilização dos comandos do software MAXIMA, para verificar as afirmações feitas ao longo do texto.

Observe que as afirmações que constam na Tabela 2.2 foram bastante utilizadas no Capítulo 3 do trabalho. O que nos motiva a dar um roteiro dos comandos utilizados para obtê-la, a partir do software MAXIMA.

Conforme a Seção 2.1, lembre-se que $\pi = [F_1, F_2] \in G_2(S_2)$ determina a reta $L_\pi \subset \mathcal{C} = \mathbb{P}(S_2)$, dada por $L_\pi = \{[a \cdot F_1 + b \cdot F_2] \in \mathcal{C} \mid [a : b] \in \mathbb{P}^1\}$. De fato, (cf. o Lema 1.4.1) $[F] \in L_\pi \cap \mathcal{H}$ se, e somente se, $F = a \cdot F_1 + b \cdot F_2$ para algum $[a : b] \in \mathbb{P}^1$ e $\det M_F = 0$, sendo

$$M_F = \begin{vmatrix} a_0 & \frac{1}{2}a_1 & \frac{1}{2}a_2 \\ \frac{1}{2}a_1 & a_3 & \frac{1}{2}a_4 \\ \frac{1}{2}a_2 & \frac{1}{2}a_4 & a_5 \end{vmatrix}.$$

Primeiro usamos a seguinte mudança no código: $x = x_0, y = x_1$ e $z = x_2$. Seguindo, temos

```
F1:digite o primeiro gerador$ F2:digite o segundo gerador$ F:a*(F1)+b*(F2);
y0:factor(diff(F,x,2)/2);
y1:factor(diff(diff(F,x),y));
y2:factor(diff(diff(F,x),z));
y3:factor(diff(F,y,2)/2);
y4:factor(diff(diff(F,y),z));
y5:factor(diff(F,z,2)/2);
l1:[y0,y1/2,y2/2]$
```



```
l2: [y1/2, y3, y4/2]$  
l3: [y2/2, y4/2, y5]$  
h: matrix(l1, l2, l3);  
dh: determinant(h);  
f: factor(dh);
```

Com isso, obtemos as informações para a construção da Tabela 2.2.

O software MAXIMA foi também de grande ajuda, uma vez que possibilitou reduzir algumas contas nos vastos casos que foram abordados nas proposições do Capítulo 3. De fato, se $W \in G_3(S_2)$ nós utilizamos o software MAXIMA para determinar que tipo de cúbica era obtida pela interseção de $\pi_W \cap \mathcal{H}_{\mathbb{P}^5}$ e compará-la com a cúbica em questão. Segue o código que utilizamos nessa análise:

```
F1: primeiro gerador$ F2: segundo gerador$ F3: terceiro gerador$  
F: a*(F1)+b*(F2)+c*(F3)$
```

```
y0: factor(diff(F, x, 2)/2);  
y1: factor(diff(diff(F, x), y));  
y2: factor(diff(diff(F, x), z));  
y3: factor(diff(F, y, 2)/2);  
y4: factor(diff(diff(F, y), z));  
y5: factor(diff(F, z, 2)/2);
```

```
l1: [y0, y1/2, y2/2]$  
l2: [y1/2, y3, y4/2]$  
l3: [y2/2, y4/2, y5]$
```

```
h: matrix(l1, l2, l3);  
dh: determinant(h);  
f: factor(dh);
```

```
Gh: factor([diff(f, a), diff(f, b), diff(f, c)]);
```

Referências Bibliográficas

- [1] N. Abdallah, J. Emsalem, and A. Iarrobino. *Nets of conics and associated Artinian algebras of length 7*. European Journal of Mathematics, 2023.
- [2] G. Assis. Cálculo das retas numa superfície cúbica em \mathbb{P}^3 . Disponível em: <https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/tede/7466>, Dissertação (Mestrado). Universidade Federal da Paraíba, 2011.
- [3] M. F. Atiyah and I. G. MacDonald. *Introduction to Commutative Algebra*. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 1969.
- [4] A. Campbell. *Nets of conics in the Galois fields of order 2^n* . Bulletin of the American Mathematical Society, 34(4):481–489, 1928.
- [5] I. V. Dolgachev. *Classical Algebraic Geometry: A Modern View*. Cambridge University Press, Cambridge, 2012.
- [6] J. Fogarty. *Algebraic families on an algebraic surface*. American Journal of Mathematics, 90(2):511–521, 1968.
- [7] A. Freire. Cúbicas reversas e redes de quádras. Disponível em: <https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/tede/9275/2/arquivototal.pdf>, Dissertação (Mestrado). Universidade Federal da Paraíba, 2016.
- [8] W. Fulton. *Algebraic Curves: An Introduction to Algebraic Geometry*. Mathematics Lecture Note Series. W. A. Benjamin, New York, 1969.
- [9] C. G. Gibson. *Elementary Geometry of Algebraic Curves: An Undergraduate Introduction*. Cambridge Mathematical Textbooks. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [10] J. Harris. *Algebraic geometry: a first course*, volume 133. Springer Science & Business Media, 2013.
- [11] R. Hartshorne. *Algebraic geometry*, volume 52. Springer Science & Business Media, 2013.

- [12] S. Igor. *Basic Algebraic Geometry 1: Varieties in Projective Space*. Springer Berlin Heidelberg, 2013.
- [13] C. Jordan. *Réduction d'un réseau de formes quadratiques ou bilinéaires*. Journal de mathématiques pures et appliquées, 2:403–438, 1906.
- [14] MAXIMA. Maxima, a computer algebra system. versão 5.47.0. Disponível em: <http://maxima.sourceforge.net>. Acesso em: 12 de agosto 2024, 2014.
- [15] D. Mumford and J. Fogarty. *Geometric Invariant Theory, Ergeb. Math. u. Grenzgeb. 34*, 1982.
- [16] N. Onda. *Isomorphism types of commutative algebras of rank 7 over an arbitrary algebraically closed field of characteristic not 2 or 3*, 2021. <https://arxiv.org/abs/2107.04959>.
- [17] J. Rojas, S. Andria, and W. Manguiera. *Contando retas em superfícies no espaço projetivo*. IMPA, Rio de Janeiro, 2023.
- [18] rspuzio. inflection points and canonical forms of non-singular cubic curves. Disponível em: <https://planetmath.org/inflectionpointsandcanonicalformsofnonsingularcubiccurves>. Acesso em: 6 de março 2025, 2014.
- [19] E. Tengan and H. Borges. *Álgebra Comutativa em 4 Movimentos*. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, Brasil, 2014.
- [20] I. Vainsencher. *Introdução às Curvas Algébricas Planas*. Coleção Matemática Universitária. IMPA, Rio de Janeiro, Brasil, 2014.
- [21] C. Wall. Nets of conics. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 81, pages 351–364. Cambridge University Press, 1977.
- [22] K. Weierstrass. *Zur Theorie der biliearen und quadratischen Formen*. Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1868.
- [23] A. H. Wilson. *The canonical types of nets of modular conics*. American Journal of Mathematics, 36(2):187–210, 1914.
- [24] C. Zanella. On finite steiner surfaces. *Discrete mathematics*, 312(3):652–656, 2012.