Universidade Federal da Paraíba
Programa de Pós–Graduação em Matemática

# Divisores Livres em $\mathbb{P}^2$

Fernanda Kellen Medeiros de Oliveira

**João Pessoa – PB**
**Julho de 2025**

# Divisores Livres em $\mathbb{P}^2$

Trabalho de dissertação de mestrado submetido à coordenação do Programa de Pós Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba, como parte dos requisitos para a obtenção do título de mestre em matemática.

**Orientador: Prof. Dr. Ricardo Burity Croccia Macedo**

João Pessoa - PB
Julho de 2025

**Catalogação na publicação**
**Seção de Catalogação e Classificação**

O48d Oliveira, Fernanda Kellen Medeiros de.
Divisores livres em $\mathbb{P}^2$ / Fernanda Kellen Medeiros de Oliveira. - João Pessoa, 2025.
69 f.

Orientação: Ricardo Burity Croccia Macedo.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Matemática - Divisores livres. 2. Ideal Jacobiano. 3. Sizígias regulares. 4. Resoluções de Hilbert-Burch. I. Macedo, Ricardo Burity Croccia. II. Título.

UFPB/BC CDU 51(043)

Elaborado por ANNA REGINA DA SILVA RIBEIRO - CRB-15/24

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
CAMPUS I – DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**ATA DE DEFESA DE MESTRADO JUNTO AO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA, REALIZADA NO DIA 25 DE JULHO DE 2025.**

Ao vigésimo quinto dia de julho de dois mil e vinte e cinco, às 10:00 horas, no Auditório do Departamento de Matemática/CCEN da Universidade Federal da Paraíba, foi aberta a sessão pública de Defesa de Dissertação intitulada "**Divisores Livres em $\mathbb{P}^2$**", da aluna **Fernanda Kellen Medeiros de Oliveira**, que havia cumprido, anteriormente, todos os requisitos para a obtenção do grau de Mestra em Matemática, na área de **Álgebra**, sob a orientação do Prof. Dr. Ricardo Burity Croccia Macedo. A Banca Examinadora, indicada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática, foi composta pelos professores: Dr. Ricardo Burity Croccia Macedo (Orientador), Dr. Cleto Brasileiro Miranda Neto (membro interno) e Dr. Zaqueu Alves Ramos (membro externo/UFS). O professor Ricardo Burity Croccia Macedo, em virtude da sua condição de orientador, presidiu os trabalhos e, depois das formalidades de apresentação, convidou a aluna a discorrer sobre o conteúdo da dissertação. Concluída a explanação, a candidata foi arguida pela banca examinadora que, em seguida, sem a presença da aluna, finalizando os trabalhos, reuniu-se para deliberar tendo concedido à candidata a menção: **aprovada.** E, para constar, foi lavrada a presente ata que será assinada pelos membros da Banca Examinadora.

João Pessoa, 25 de julho de 2025.

Documento assinado digitalmente
gov.br RICARDO BURITY CROCCIA MACEDO
Data: 26/07/2025 09:56:15-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Ricardo Burity Croccia Macedo

Documento assinado digitalmente
gov.br CLETO BRASILEIRO MIRANDA NETO
Data: 27/07/2025 20:58:41-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Cleto Brasileiro Miranda Neto

Zaqueu Alves Ramos

Documento assinado digitalmente
gov.br ZAQUEU ALVES RAMOS
Data: 26/07/2025 10:14:35-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

*A Painho, Mauri.*
*A Felipe, por acreditar.*

# Agradecimentos


Aos meus pais, Maria da Graça e Mauri. Aos meus irmãos: Maria de Fátima, Luiz, João Paulo e Pedro. Obrigada por todo o apoio e compreensão em todos os momentos em que não pude estar presente.

A Amanda, obrigada por cada conselho, por estar sempre disposta a ouvir e pelo carinho de sempre. Você é uma irmã que a vida me presenteou.

A Jaqueline, Mateus Vinicius, Aureliana, Jonatã e Aurílio, por tantos momentos compartilhados durante essa jornada que não é, nem de longe, um bolo de morango.

Aos amigos Assuério e Mateus Barreto, por todas as conversas, risadas e memes de cachorrinhos fofinhos! Vocês tem um papel fundamental nessa conquista.

A João Pedro e Manoel, por todos os conselhos, todas as dúvidas respondidas, todo incentivo e empolgação, por acolher as minhas lágrimas, fossem figurativas ou não.

Aos colegas da pós-graduação, que se tornaram uma segunda família. Obrigada por cada café compartilhado, dúvida esclarecida e palavra de incentivo.

Ao meu orientador, Ricado Burity, por toda a paciência, dedicação e por todos os ensinamentos que vão muito além da Álgebra Comutativa. Sua orientação foi fundamental.

Aos professores Cleto Miranda-Neto e Zaqueu Ramos, pelas valiosas contribuições como membros da banca.

A CAPES, pelo apoio financeiro.

# Resumo

Este trabalho disserta sobre divisores livres no plano projetivo. O conceito de divisor livre foi introduzido por K. Saito, em 1980, no contexto analítico complexo. Posteriormente, desenvolveu-se uma abordagem algébrica da teoria, formulada em termos da liberdade do módulo de derivações logarítmicas associadas a uma forma $f$ em um anel de polinômios sobre um corpo. O objetivo desta dissertação é apresentar critérios que caracterizam quando uma forma $f$ define um divisor livre algébrico. Inicialmente, são explorados critérios clássicos, tanto em termos matriciais, por meio do critério de Saito, quanto em termos homológicos, utilizando resoluções do tipo Hilbert-Burch. Como principal resultado do trabalho, estuda-se uma caracterização desenvolvida por S. Tohaneanu, em 2012, baseado na noção de sizígias regulares no contexto tridimensional. Além disso, no caso em que $f$ define um arranjo de hipersuperfícies em $\mathbb{P}^2$, investigam-se conexões entre o grau mínimo das sizígias do ideal Jacobiano de $f$ e o grau mínimo dos geradores do radical desse ideal.

**Palavras-chave:** Divisores livres, ideal Jacobiano, sizígias regulares, resolução de Hilbert-Burch.

# Abstract

This work discusses free divisors in the projective plane. The concept of a free divisor was introduced by K. Saito in 1980, within the context of complex analytic geometry. Later, an algebraic approach to the theory was developed, formulated in terms of the freeness of the module of logarithmic derivations associated with a form $f$ in a polynomial ring over a field. The goal of this dissertation is to present criteria that characterize when a form $f$ defines an algebraic free divisor. Initially, classical criteria are explored, both in matrix terms, via Saito's criterion, and from a homological perspective, using Hilbert–Burch type resolutions. As the main result of this work, we study a characterization developed by S. Tohaneanu in 2012, based on the notion of regular syzygies in the three-dimensional setting. Moreover, in the case where $f$ defines an arrangement of hypersurfaces in $\mathbb{P}^2$, we investigate connections between the minimal degree of the syzygies of the Jacobian ideal of $f$ and the minimal degree of the generators of the radical of this ideal.

**Keywords:** Free Divisors, Jacobian ideal, regular syzygies, Hibert-Burch free resolution.

# Sumário

Sejam $R$ um anel e $M$ um $R$-módulo. A seguir, listamos algumas notações utilizadas neste trabalho.

- adj(C) - denota a matriz adjunta de uma matriz $C$;
- $\mathrm{alt}(I)$ - denota a altura do ideal $I \subsetneq R$;
- $\mathrm{Ass}(M)$ - denota o conjunto dos ideais primos associados de $M$;
- prof(M) - denota a profundidade de $M$;
- $\mathrm{Derlog}(f)$ - denota o Módulo de Saito de uma forma (polinômio homogêneo) $f$;
- $\det(C)$ - denota o determinante de uma matriz $C$;
- dh(M) - denota a dimensão homológica de $M$;
- $\dim_{\mathbb{K}}(V)$ - denota a dimensão do espaço vetorial de $V$;
- $\dim(M)$ - denota a dimensão de Krull de $M$;
- $e(M)$ - denota a multiplicidade de $M$;
- $\mathrm{H}(M, n)$ - denota a Função de Hilbert de $M$;
- $\mathrm{H}_M(t)$ - denota a Série de Hilbert de $M$;
- $\mathrm{Hom}(-, R)$ - denota o módulo dos homomorfismos $\mathrm{Hom}_R(-, R)$;
- $\mathfrak{I}$ - denota o ideal de definição de uma variedade algébrica;
- $J_f$ - denota o ideal jacobiano de uma forma $f$;
- $\mathrm{P}_M(t)$ - denota o polinômio de Hilbert de $M$;
- $\mathbb{P}^2$ - denota o espaço projetivo de dimensão 2;
- $(R, \mathfrak{m})$ - denota um anel local $R$, com $\mathfrak{m}$ seu ideal maximal;
- $\mathrm{Syz}_n(M)$ - $n$-ésimo módulo de sizígias de $M$;
- $V(I)$ - denota a variedade algébrica associada ao ideal $I$;
- $\mathcal{Z}(M)$ - denota o conjunto dos divisores de zero de $M$;
- $(0 : M)$ - denota o ideal anulador de $M$;
- $\mu(I)$ - denota o número mínimo de geradores do ideal $I \subsetneq R$;
- $\sqrt{I}$ - denota o ideal radical do ideal $I$;
- $\partial_{x_i} f$ - denota a derivada parcial de um polinômio $f$ na $i$-ésima indeterminada;
- $\nabla f$ - denota o vetor gradiente de $f$;

# Introdução

O marco inicial da teoria sobre *divisores livres* é a publicação do artigo de Kyoji Saito, *Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields* [15], em 1980. Nesse célebre trabalho, Saito introduz e explora o conceito de divisores livres em hipersuperfícies, originalmente no contexto da análise complexa. Ainda nesse artigo, ele apresenta o mais famoso critério de liberdade, que viria, posteriormente, a receber seu nome: o *Critério de Saito*.

Desde então, diversos matemáticos vêm se dedicando ao aprofundamento da teoria e à investigação de suas aplicações em diferentes áreas da Matemática, tais como Geometria Algébrica, Teoria de Singularidades, Álgebra Comutativa, entre outras. Um dos nomes de destaque nesse contexto é Hiroaki Terao, que contribuiu, em [19], de forma decisiva para o desenvolvimento da teoria, especialmente no que se refere à interação com arranjos de hiperplanos.

No cenário puramente algébrico, entre os problemas ainda em aberto, destaca-se a caracterização e construção explícita de famílias bem estruturadas de divisores livres. Destacamos o trabalho de Simis e Tohaneanu [18], que demonstraram que, em $\mathbb{P}^2$, não existem divisores livres irredutíveis de graus 2 e 3, sendo, portanto, os arranjos lineares os únicos possíveis para polinômios de grau menor ou igual a três. Em 2013, Buchweitz e Conca [5] descreveram diversos métodos para construir e identificar novos divisores livres a partir de outros já conhecidos. Mais recentemente, destacamos o trabalho de Burity, Miranda-Neto e Ramos [6], que apresenta quatro novas famílias de divisores livres homogêneos em anéis de polinômios sobre um corpo de característica zero com a *graduação standard*.

Um avanço importante na caracterização de divisores livres foi obtido por Tohaneanu em [20], ao associar a liberdade de um divisor no plano projetivo à existência de uma *sizígia regular* do ideal jacobiano da forma (isto é, um polinômio homogêneo) $f$ que o define. Esse resultado constitui a motivação principal deste trabalho.

Esta dissertação está estruturada em três capítulos. O *Capítulo 1* tem caráter preliminar: nele apresentamos conceitos fundamentais de Álgebra Comutativa essenciais ao desenvolvimento do trabalho, com ênfase naqueles que serão utilizados com maior frequência. Neste capítulo, exploramos o conceito de *sizígia regular* e o Teorema de Hilbert–Burch, crucial para esta dissertação, por caracterizar as resoluções livres de ideais de altura 2 gerados por menores de matrizes. Além disso, introduzimos as funções e séries de Hilbert, ferramentas indispensáveis para estudo de ideais graduados. Estas são as ferramentas algébricas necessárias para os resultados a serem desenvolvidos ao longo do trabalho.

No *Capítulo 2*, apresentamos a noção central do trabalho: *divisores livres*. Iniciamos com a exposição do módulo de derivações de um anel e, posteriormente, introduzimos o *módulo de derivações logarítmicas (ou módulo de Saito)*, $\mathrm{Derlog}(f)$, associado a uma forma $f$. Apresentamos o conceito de divisor livre para uma forma $f$, bem como um critério de liberdade baseado na estrutura de $\mathrm{Derlog}(f)$, associando esse módulo ao *ideal jacobiano* $J_f$. Finalizamos este capítulo com uma demonstração do Critério de Saito, que caracteriza a liberdade de divisores em termos determinantais.

Finalmente, no *Capítulo 3*, apresentamos o resultado obtido por Stefan Tohaneanu [20], que estabelece, para um ideal $I \subsetneq R = \mathbb{C}[x, y, z]$ de altura 2 minimamente gerado por três polinômios homogêneos, a relação entre sua resolução livre minimal e a existência de sizígias regulares. Mais especificamente, o autor caracteriza completamente tal resolução via o Teorema de Hilbert–Burch quando $I$ admite uma sizígia regular. No caso particular em que $I$ é o ideal jacobiano $J_f$ de uma forma $f \in R$, esse resultado fornece um critério para a liberdade do divisor definido por $f$. Discutimos também o fato deste critério não ser generalizável em dimensão superior, ao evidenciarmos um contraexemplo explícito em $S = \mathbb{C}[x, y, z, w]$. Além disso, investigamos ainda as relações entre o grau mínimo das sizígias de $J_f$ e o grau mínimo dos geradores minimais de $\sqrt{J_f}$, no caso em que $f$ define um arranjo de hipersuperfícies em $\mathbb{P}^2$.

# Capítulo 1

# Miscelânea

Neste capítulo, vamos introduzir o aparato teórico que dá suporte ao desenvolvimento deste trabalho. De modo geral, consideramos $R$ um anel comutativo com unidade Noetheriano e $M$ um $R$-módulo finitamente gerado. As definições e resultados apresentados podem ser encontrados em: [10], [12], [16] e [17].

## 1.1 Anéis Graduados e o espaço projetivo

O contexto dos principais resultados deste trabalho aborda um anel de polinômios $R := \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ sobre um corpo $\mathbb{K}$ algebricamente fechado. Devido a própria natureza do anel de polinômios é natural considerar $R$ um anel graduado.

**Definição 1.1.1.** Seja $R \neq 0$ um anel. Uma *graduação* para $R$ é uma família $\{R_k\}_{k \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}}$ de subgrupos do grupo aditivo $(R, +)$ tal que:

1. $R = \displaystyle\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}} R_k$;
2. $R_i R_j \subseteq R_{i+j}, \forall\ i, j, \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$.

O anel $R$ é dito *graduado* quando provido de uma graduação.

Os elementos de cada subgrupo $R_k$ são chamados de *elementos homogêneos de grau* $k$. Da definição, dado $g \in R$ existe $s \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$ tal que $g = a_0 + a_1 + \cdots + a_s$, sendo $a_k \in R_k$ para todo $k = 1, \ldots, s$. Cada $a_k$ na decomposição de $g$ é chamado de *componente homogênea de grau* $k$.

Como mencionado, o exemplo mais natural de anel graduado é o anel de polinômios.

**Exemplo 1.1.2.** O anel de polinômios $R = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ sobre um corpo $\mathbb{K}$ é uma anel graduado com a decomposição

$$R = R_0 \oplus R_1 \oplus \cdots ,$$

onde $R_0 = \mathbb{K}$ e para cada $d \geq 0$, o subgrupo $R_d$ é definido como o conjunto dos polinômios homogêneos de grau $d \geq 0$. Isto é, se $f \in R_d$, então

$$f = \sum_{a_1+\cdots+a_n=d} \rho_{a_1\ldots a_n} x_1^{a_1} \ldots x_n^{a_n}, \text{ com } \rho_{a_1\ldots a_n} \in \mathbb{K}. \tag{1.1}$$

Neste caso, estamos considerando que o grau de cada indeterminada $x_1, \ldots, x_n$ é igual a 1. Essa graduação para $R$ é chamada de *graduação standard*.

Assim como anéis podem ser decompostos em partes homogêneas, ideais podem preservar essa característica.

**Definição 1.1.3.** Sejam $R = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}_+\cup\{0\}} R_k$ um anel graduado e $I \subseteq R$ um ideal. Dizemos que $I$ é um ideal *homogêneo* se

$$I = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}_+\cup\{0\}} I_k,$$

onde $I_k := I \cap R_k$.

Note que a definição anterior é equivalente a dizer que o ideal $I$ é gerado por elementos homogêneos de $R$. No ambiente Noetheriano de um anel de polinômios com coeficientes em um corpo, $R = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, um ideal $I$ de $R$ é homogêneo se é gerado por uma quantidade finita de polinômios homogêneos. Se além disso, $I$ é gerado por polinômios homogêneos de mesmo grau, então, dizemos que $I$ é um ideal *equigerado*.

Ainda no ambiente polinomial, podemos notar que a primalidade de um ideal homogêneo é dada em termos de elementos homogêneos.

**Proposição 1.1.1.** *Sejam $R$ anel de polinômios sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $I \subset R$ um ideal homogêneo. Então $I$ é primo se, dados elementos homogêneos $f, g \in R$, temos que $fg \in I$ implica que ou $f \in I$ ou $g \in I$.*

*Demonstração.* Ver [17], Lemma 2.7.1. $\square$

Além disso, para o caso geral, destacamos o seguinte resultado:

**Proposição 1.1.2.** *Sejam $R = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}_+\cup\{0\}} R_k$ um anel graduado e $I \subseteq R$ um ideal homogêneo. Então todos os primos minimais de $I$ em $R$ são ideais homogêneos.*

*Demonstração.* Ver [12], Chapter I, Proposition 5.11. $\square$

Retornando ao caso $R = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, anel de polinômios standard graduado, é possível concluir que o ideal $\mathfrak{m} = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ é um ideal maximal, já que $\dfrac{R}{\langle x_1, \ldots, x_n \rangle} \simeq \mathbb{K}$, pois $R = \mathbb{K} \oplus \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$. Além disso, neste sentido, todo ideal próprio homogêneo de $R$ está contido em $\mathfrak{m}$.

A estrutura graduada do anel $R = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{n+1}]$ permite interpretar seus ideais homogêneos como objetos geométricos no *espaço projetivo* $n$-dimensional $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$. Esse espaço surge naturalmente ao considerar os pontos de $\mathbb{K}^{n+1}$ identificados por multiplicação escalar.

**Definição 1.1.4.** Seja $\mathbb{K}$ um corpo. O *espaço projetivo* de dimensão $n$ sobre $\mathbb{K}$, denotado $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$, é o conjunto de classes de equivalência de $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ pela relação

$$(x_1, \ldots, x_{n+1}) \sim (y_1, \ldots, y_{n+1}) \iff \exists\, \lambda \in \mathbb{K}^* \text{ tal que } y_i = \lambda x_i,\ \forall\ i = 1, \ldots, n+1.$$

A classe de equivalência de $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ é denotada por $[x_1 : \cdots : x_{n+1}]$.

Cada ponto de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ corresponde, portanto, a uma reta que passa pela origem em $\mathbb{K}^{n+1}$, sendo representado por coordenadas homogêneas. Polinômios homogêneos em $R$ definem funções bem definidas nesse espaço, pois sua homogeneidade garante que o valor do polinômio é bem definido sob a equivalência projetiva. Quando não houver ambiguidade quanto ao corpo de base, denotaremos o espaço projetivo apenas por $\mathbb{P}^n$.

Como cada ponto $(y_1, \ldots, y_{n+1}) \in \mathbb{P}^n$ é, na verdade, uma classe de equivalência, então para que um polinômio $f \in R$ seja tal que $f(y_1, \ldots, y_{n+1}) = 0$, é necessário e suficiente que $f$ se anule em todos os elementos $(y_1, \ldots, y_{n+1}) = \lambda(x_1, \ldots, x_{n+1})$, com $\lambda$ não nulo. Se $f$ é um polinômio homogêneo de grau $d$, então é suficiente que ele se anule para um representante da classe. Como

$$f(y_1, \ldots, y_{n+1}) = f(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_{n+1}) = \lambda^d f(x_1, \ldots, x_{n+1}),$$

e $f(x_1, \ldots, x_{n+1}) = 0$, então $f(y_1, \ldots, y_{n+1}) = 0$.

**Definição 1.1.5.** Sejam $f_1, \ldots, f_m \in R$ polinômios homogêneos. Diremos que $X \subset \mathbb{P}^n$ é uma *variedade projetiva* se é o conjunto de todos os pontos projetivos que zeram simultaneamente cada $f_i, i = 1, \ldots, m$, em $\mathbb{P}^n$. Ou seja, $X$ é uma variedade projetiva se

$$X := \{[a_1 : \cdots : a_{n+1}] \in \mathbb{P}^n; f_i(a_1, \ldots, a_{n+1}) = 0, \text{com } f_i \text{ formas em } R, \forall i = 1, \ldots, m\}.$$

Algebricamente, dado um ideal homogêneo $I \subset R$, o conjunto $V(I) \subset \mathbb{P}^n$ formado pelos zeros comuns dos elementos de $I$ define geometricamente uma variedade projetiva. A propriedade de ser homogêneo garante que os polinômios sejam bem definidos em coordenadas projetivas. Como $I$ é finitamente gerado (pelo teorema da base de Hilbert), $V(I)$ é de fato uma variedade projetiva no sentido acima.

A recíproca dessa correspondência geométrica está na noção de ideal de definição de uma variedade. Para toda variedade projetiva $X \subset \mathbb{P}^n$, podemos recuperar um conjunto de polinômios homogêneos que se anulam em todos os seus pontos.

**Definição 1.1.6.** Seja $X \subset \mathbb{P}^n$ uma variedade projetiva não vazia. Definiremos o *ideal de definição* de $X$, denotado $\mathfrak{I}(X) \subset R$, como a coleção dos polinômios homogêneos em $R$ que se anulam em todos os pontos de $X$. Explicitamente:

$$\mathfrak{I}(X) = \{f \in R; f(P) = 0 \text{ para todo } P \in X\}.$$

Esse ideal é homogêneo por construção e fornece uma maneira algébrica de representar a variedade $X$. A relação entre o ideal $I$ e a variedade $V(I)$, bem como entre $X$ e o ideal $\mathfrak{I}(X)$, é formalizada nas propriedades a seguir.

**Proposição 1.1.3.** *Seja $R = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{n+1}]$ o anel dos polinômios sobre um corpo $\mathbb{K}$ em $n+1$ indeterminadas. São válidas as seguintes propriedades:*

*(a) Para qualquer variedade $X \in \mathbb{P}^n$, $V(\mathfrak{I}(X)) = X$;*

*(b) Dados $X_1, X_2$ variedades algébricas em $\mathbb{P}^n$, temos que $X_1 \subsetneq X_2$ se, e somente se, $\mathfrak{I}(X_2) \subsetneq \mathfrak{I}(X_1)$.*

*Demonstração.* Ver [12], Chapter I, Propostion 5.9. □

O teorema a seguir, versão projetiva do Teorema dos Zeros de Hilbert, fundamenta a correspondência entre variedades geométricas e ideais homogêneos radicais não triviais.

**Teorema 1.1.4** (Zeros de Hilbert Projetivo)**.** *Seja $I \subset R$ um ideal homogêneo. Então:*

*(a) $V(I) = \emptyset$ se, e somente se, $\langle x_1, \ldots, x_{n+1} \rangle \subset \sqrt{I}$.*

*(b) Se $V(I) \neq \emptyset$, então $\mathfrak{I}(V(I)) = \sqrt{I}$.*

Esse teorema estabelece uma bijeção entre variedades projetivas não vazias e ideais homogêneos radicais que não contêm o ideal irrelevante.

A dimensão de uma variedade projetiva pode ser definida em termos da dimensão de Krull do anel quociente pelo seu ideal de definição.

**Definição 1.1.7.** Sejam $I \subset R$ um ideal e $V(I) \subset \mathbb{P}^n$ a variedade algébrica associada a $I$. Definimos a *dimensão* de $V(I)$ como sendo:

$$\dim(V(I)) = \dim\left(\frac{R}{\mathfrak{I}(V(I))}\right) - 1.$$

Por fim, ainda podemos definir o espaço tangente a uma variedade de maneira análoga a abordagem diferencial usual. Para este fim, exploraremos o contexto principal deste trabalho: uma hipersuperfície no plano projetivo, isto é, uma variedade em $\mathbb{P}^2$ definida apenas por um polinômio homogêneo $f \in \mathbb{K}[x, y, z]$.

**Definição 1.1.8.** O *espaço tangente* de uma variedade $V(f)$ em um ponto $x \in V(f)$ é a coleção de todas as retas tangentes a $V$ neste ponto. A saber, o conjunto

$$T_xV = \left\{ [a_1 : a_2 : a_3] \in \mathbb{P}^2; \sum_{i=1}^{3} \partial_{x_i} f(x) a_i = 0 \right\}.$$

Esse espaço representa a melhor aproximação linear da variedade no ponto e é central no estudo da suavidade e singularidades de variedades projetivas. A análise local da estrutura do espaço tangente levará naturalmente ao estudo de derivadas logarítmicas, módulos de derivadas, e, mais adiante, à teoria dos divisores livres, tema central desta dissertação.

## 1.2 Sizígias e sequências regulares

Seja $\{m_1, \ldots, m_n\}$ um conjunto de geradores de $M$. Definamos a seguinte aplicação $R$-linear:

$$\begin{aligned} \alpha_0 : R^n &\rightarrow M \\ (a_1, \ldots, a_n) &\mapsto a_1 m_1 + \cdots + a_n m_n. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Naturalmente, esta aplicação se traduz na seguinte sequência exata curta:

$$0 \to \ker(\alpha_0) \to R^n \xrightarrow{\alpha_0} M \to 0. \tag{1.3}$$

Neste caso, o núcleo de $\alpha_0$, denotado acima por $\ker(\alpha_0)$, é chamado de módulo de relações dos geradores $\{m_1, \ldots, m_n\}$, ou *Módulo das Sizígias* de $M$. Por simplicidade, denotaremos:

$$\operatorname{Syz}(M) := \ker(\alpha_0) = \{(b_1, \ldots, b_n) \in R^n;\ b_1 m_1 + \cdots + b_n m_n = 0\}.$$

Cada elemento $(b_1, \ldots, b_n) \in \operatorname{Syz}(M)$ é chamado uma *sizígia* de $M$ (com relação a $m_1, \ldots, m_n$).

**Observação 1.2.1.** Note que, por definição, o conceito de sizígia depende do conjunto de geradores escolhido, e não é intrínseco ao módulo.

Embora, como observado anteriormente, o conceito de sizígia dependa do conjunto de geradores escolhido, há propriedades que são mantidas quando da mudança do conjunto de geradores fixado. Um exemplo desta manifestação é o conceito de *sizígia regular*. Iniciamos definindo a noção de sequência regular.

**Definição 1.2.2.** Sejam $R$ um anel Noetheriano, $M \neq 0$ um $R$-módulo finitamente gerado e $a_1, \ldots, a_n \in R$. Dizemos que $a_1, \ldots, a_n$ é uma *$M$-sequência regular* se :

(a) $M \neq \langle a_1, \ldots, a_n \rangle M$;

(b) Para todo $i = 0, \ldots, n-1$, temos que $a_{i+1}$ é um não divisor de zero em $\dfrac{M}{\langle a_1, \ldots, a_i \rangle M}$.

Em particular, $a_1$ é um não divisor de zero em $M$, neste caso, $a_1$ é dito um elemento *$M$-regular*.

No contexto dessa definição, temos que não existe uma sequência $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ de elementos em $R$, tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ a sequência $(a_i)_{i=1}^{n}$, seja uma $M$-sequência regular. É possível encontrar uma prova para esse fato em [16, Proposition 16.10]. Esse resultado motiva nossa próxima definição.

**Definição 1.2.3.** Sejam $R$ um anel Noetheriano e $M \neq 0$ um $R$-módulo finitamente gerado. Sejam $I \subsetneq R$ um ideal tal que $IM \neq M$ e $a_1, \ldots, a_n$ uma $M$-sequência regular de elementos de $I$. Diremos que $a_1, \ldots, a_n$ é uma $M$-sequência regular *maximal* se não existe um elemento $a_{n+1} \in I$ tal que $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}$ é uma $M$-sequência regular.

Na definição acima, dado $b \in I$, temos que $M \neq \langle a_1, \ldots, a_n, b \rangle M$, já que $IM \neq M$. Então, a definição de $M$-sequência regular maximal é equivalente a dizer que $I$ está contido no conjunto dos divisores de zero de $\dfrac{M}{\langle a_1, \ldots, a_n \rangle M}$. Uma propriedade que decorre do fato de $R$ ser um anel Noetheriano é que toda $M$-sequência regular em $I$ pode ser estendida a uma $M$-sequência regular maximal em $I$.

**Teorema 1.2.1.** *Sejam $R$ um anel Noetheriano, $M \neq 0$ um $R$-módulo finitamente gerado e $I \subsetneq R$ um ideal tal que $IM \neq M$. Então, quaisquer duas $M$-sequências regulares maximais em $I$ têm o mesmo tamanho.*

*Demonstração.* Ver [12], Chapter VI, Proposition 3.1. □

Motivado por esta discussão, podemos definir um importante invariante algébrico.

**Definição 1.2.4.** Sejam $R$ um anel Noetheriano, $M \neq 0$ um $R$-módulo finitamente gerado e $I \subsetneq R$ um ideal tal que $IM \neq M$. O tamanho de uma $M$-sequência regular maximal em $I$ é chamada de *profundidade* de $I$ em $M$, denotado por $\mathrm{prof}(I, M)$.

Se $(R, \mathfrak{m})$ é um anel local, então $\mathrm{prof}(\mathfrak{m}, M)$ é chamada simplesmente de profundidade de $M$ e denotada $\mathrm{prof}(M)$.

**Observação 1.2.5.** (a) Na definição acima poderemos fazer com que o módulo em questão seja o próprio anel $R$. Neste caso, a ênfase do invariante é dada ao ideal $I$. A profundidade de $I$ em $R$ é chamada de *grade* de $I$ e denotada por $\mathrm{grade}(I) := \mathrm{prof}(I, R)$.

(b) No caso em que $(R, \mathfrak{m})$ é um anel local, temos que

$$\operatorname{prof}(M) = 0 \iff \mathfrak{m} \subseteq \mathcal{Z}(M),$$

onde $\mathcal{Z}(M)$ denota o conjunto dos divisores de zero de $M$.

**Definição 1.2.6.** Uma sizígia $(b_1, \ldots, b_n)$ de $M$ é dita $R$-regular, ou simplesmente *regular*, quando $b_1, \ldots, b_n$ determina uma $R$-sequência regular.

Retomando o contexto dos principais resultados deste trabalho, dada uma sizígia regular de um ideal $I$ do anel de polinômios $R = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, é possível recuperar sizígias regulares associadas a novos conjuntos minimais de geradores de $I$.

**Lema 1.2.2.** *Sejam $\mathbb{K}$ um corpo, $R = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, standard graduado e $I \subset R$ um ideal minimamente gerado por $f_1, \ldots, f_n$ polinômios homogêneos de grau $d$. Se este conjunto de geradores possui uma sizígia regular, então para todo conjunto minimal de geradores de $I$ existe uma sizígia regular.*

*Demonstração.* Considere $g_1, \ldots, g_n \in R$ um conjunto minimal de geradores de $I$. Podemos expressar esse conjunto em termos dos geradores originais $f_1, \ldots, f_n$ por meio de um argumento matricial. Naturalmente, existe $\mathcal{M}$, uma matriz invertível de ordem $n \times n$ com coeficientes em $\mathbb{K}$ tal que:

$$[g_1 \cdots g_n] = [f_1 \cdots f_n] \cdot \mathcal{M}. \tag{1.4}$$

Considere $a_1, \ldots, a_n$ uma $R$-sequência regular que satisfaz a relação $a_1 f_1 + \cdots + a_n f_n = 0$.

Reescrevendo na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} f_1 & \cdots & f_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{1.5}$$

Utilizando 1.4, obtemos:

$$\begin{bmatrix} g_1 & \cdots & g_n \end{bmatrix} \cdot \mathcal{M}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Definiremos $(a'_1, \ldots, a'_n)$ como o vetor resultante do produto

$$\begin{bmatrix} a'_1 \\ \vdots \\ a'_n \end{bmatrix} := \mathcal{M}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

Desta forma, $(a'_1, \ldots, a'_n)$ é uma sizígia do ideal $I$ com respeito a $g_1, \ldots, g_n$, já que:

$$\begin{bmatrix} g_1 & \cdots & g_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a'_1 \\ \vdots \\ a'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Precisamos avaliar a regularidade da sequência $a'_1, \ldots, a'_n$. Considere o ideal $\langle a'_1, \ldots, a'_n \rangle$. Como $\mathcal{M}$ é invertível, segue que $a_1, \ldots, a_n \in \langle a'_1, \ldots, a'_n \rangle$. Logo, este ideal possui uma $R$-sequência regular de tamanho $n$. Portanto, pelo Corolário 17.7 de [10], concluímos que $a'_1, \ldots, a'_n$ é uma $R$-sequência regular.

□

## 1.3 Dimensões Homológica e de Krull

Retomando ao ambiente inicial em 1.2, como $R$ é um anel Noetheriano, temos que $\mathrm{Syz}(M)$ é um $R$-submódulo de $R^n$ finitamente gerado. Então, supondo que $\mathrm{Syz}(M)$ é gerado por $n_1$ elementos, podemos repetir o processo em 1.3, obtendo a sequência exata

$$0 \to \mathrm{Syz}_2(M) := \mathrm{Syz}(\mathrm{Syz}(M)) \to R^{n_1} \xrightarrow{\alpha_1} \mathrm{Syz}(M) \to 0. \tag{1.6}$$

Como $\mathrm{Im}(\alpha_1) = \ker(\alpha_0) \subset R^n$ na sequência 1.3, via composição entre 1.3 e 1.6, produzimos a seguinte sequência exata:

$$R^{n_1} \xrightarrow{\alpha_1} R^n \xrightarrow{\alpha_0} M \to 0, \tag{1.7}$$

chamada de *apresentação livre* do módulo $M$. Iterando o processo anterior, através de sucessivas composições, obtemos uma sequência exata longa a qual chamaremos de *resolução livre* de $M$.

$$\cdots \to R^{n_i} \xrightarrow{\alpha_i} R^{n_{i-1}} \xrightarrow{\alpha_{i-1}} \cdots \to R^{n_1} \xrightarrow{\alpha_1} R^n \xrightarrow{\alpha_0} M \to 0.$$

Uma tal sequência é, a priori, infinita, mas podemos truncá-la a qualquer momento, tornando-a finita:

$$0 \to \mathrm{Syz}_{i+1}(M) \to R^{n_i} \xrightarrow{\alpha_i} \cdots \to R^{n_1} \xrightarrow{\alpha_1} R^n \xrightarrow{\alpha_0} M \to 0. \tag{1.8}$$

Neste caso, não se trata de uma resolução livre. Porém, se para algum $i \geq 1$, $\mathrm{Syz}_{i+1}(M)$ é livre, então $\mathrm{Syz}_{i+1}(M)$ é isomorfo ao módulo livre $R^{n_{i+1}}$, sendo $n_{i+1}$ o número mínimo de geradores de $\mathrm{Syz}_{i+1}(M)$. Desta maneira, obtemos uma *resolução livre finita* do módulo $M$:

$$0 \to R^{n_{i+1}} \xrightarrow{\alpha_{i+1}} R^{n_i} \xrightarrow{\alpha_i} \cdots \to R^{n_1} \xrightarrow{\alpha_1} R^{n} \xrightarrow{\alpha_0} M \to 0. \tag{1.9}$$

Ressaltamos que diferentes conjuntos geradores para $M$ produzem módulos de sizígias distintos, dessa forma, é razoável que um módulo $M$ apresente diversas resoluções livres. Além disso, definimos o tamanho de uma resolução livre finita 1.9 como sendo o número de módulos livres menos um.

**Observação 1.3.1.** Como mencionado na seção anterior, o módulo de sizígias, a rigor, é definido com respeito ao conjunto de geradores do módulo. No entanto, esta construção está bem posta quando pensamos no caso em o módulo $M$ é finitamente gerado sobre $R$ um anel local, visto que, via Lema de Nakayama, o número mínimo de geradores de $M$ está bem posto.

**Definição 1.3.2.** Sejam $R$ um anel e $M$ um $R$-módulo. A *dimensão homológica* de $M$, denotada $\mathrm{dh_R(M)}$, é o comprimento de uma resolução livre finita de menor tamanho possível. Se $M$ não admite resolução livre finita então $\mathrm{dh_R(M)} = \infty$.

**Exemplo 1.3.3.** Sejam $\mathbb{K}$ um corpo, $R = \mathbb{K}[x,y]/\langle xy\rangle =: \mathbb{K}[X,Y]$ e $I = \langle X, Y\rangle \subset R$. Então, $I$ tem resolução livre infinita. De fato, $\mathrm{Syz}(I) = \{(a,b) \in R^2;\ aX + bY = 0\}$. Deste modo, $\mathrm{Syz}(I)$ é gerado pelos elementos $(Y,0),(0,X) \in R^2$, pois $XY = 0$, e obtemos a apresentação livre

$$R^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix}} R^2 \to I \to 0,$$

onde a matriz $\begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix}$ descreve a aplicação linear entre os módulos livres $R^2$. Ao iterar o processo, obtemos a resolução livre

$$\cdots \to R^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix}} R^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix}} R^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix}} R^2 \to I \to 0.$$

A dimensão homológica do ideal $I$ no exemplo 1.3.3 é infinita devido a condição do anel $R$ não ser um anel *regular*. Um anel local $(R, \mathfrak{m})$ é dito *regular* se o ideal maximal $\mathfrak{m}$ é gerado por uma sequência regular. A finitude da dimensão homológica de módulos finitamente gerados sobre anéis locais regulares é consequência do célebre Teorema de Auslander-Buchsbaum-Serre [12, Chapter VII, Proposition 2.4].

**Exemplo 1.3.4.** Sejam $\mathbb{K}$ um corpo, $R = \mathbb{K}[x,y,z]$ e $\mathfrak{m} = \langle x,y,z\rangle \subset R$. Utilizando-se do software computacional Macaulay2[11], obtemos uma resolução livre de $\mathfrak{m}$ descrita por:

$$0 \to R^1 \xrightarrow{\begin{pmatrix} z \\ -y \\ x \end{pmatrix}} R^3 \xrightarrow{\begin{pmatrix} -y & -z & 0 \\ x & 0 & -z \\ 0 & x & y \end{pmatrix}} R^3 \xrightarrow{\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}} R^1 \to \mathfrak{m} \to 0.$$

Logo, $\mathrm{dh}(I) = 3$.

**Definição 1.3.5.** Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e $M$ um $R$-módulo. Uma resolução livre de $M$

$$0 \to R^{n_k} \xrightarrow{\alpha_k} R^{n_{k-1}} \xrightarrow{\alpha_{k-1}} \cdots \to R^{n_1} \xrightarrow{\alpha_1} R^n \xrightarrow{\alpha_0} M \to 0$$

é dita *minimal* se $\mathrm{Im}(\alpha_i) \subseteq \mathfrak{m}R^{n_{i-1}}, \forall\, i \in \{1, \ldots, k\}$.

**Observação 1.3.6.** Todo módulo finitamente gerado sobre um anel local admite uma resolução livre minimal, basta que escolhamos $R^n$ de forma que $n$ seja igual a $\mu(M)$, o número mínimo de geradores de $M$, então $\ker(\alpha_1) \subseteq \mathfrak{m}R^n$, sendo $\alpha_1$ construida como na seção anterior. Escolhemos $R^{n_1}$ tal que $\mu(R^{n_1}) = \mu(\mathrm{Syz}(M))$. Iteradamente, para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$, temos $n_i = \mu(\mathrm{Syz}_i(M))$.

**Lema 1.3.1** (Lema de Schanuel)**.** *Sejam duas sequências exatas de $R$-módulos*

$$\begin{aligned} 0 \to K_n \xrightarrow{\alpha_n} F_{n-1} \xrightarrow{\alpha_{n-1}} \cdots \to F_1 \xrightarrow{\alpha_1} F_0 \xrightarrow{\alpha_0} M \to 0, \\ 0 \to K'_n \xrightarrow{\alpha'_n} F'_{n-1} \xrightarrow{\alpha'_{n-1}} \cdots \to F'_1 \xrightarrow{\alpha'_1} F'_0 \xrightarrow{\alpha_0} M \to 0, \end{aligned}$$

*com $n \geq 1$ e $F_i, F'_i$ módulo livres para todo $i = 0, \ldots, n-1$. Então,*

$$K_n \oplus F'_{n-1} \oplus F_{n-2} \oplus \cdots \simeq K'_n \oplus F_{n-1} \oplus F'_{n-2} \oplus \cdots .$$

*Demonstração.* Ver [12], Chapter VII, Proposition 1.4. □

Uma importante propriedade relacionada a resoluções livres minimais é a invariância dos *postos*, isto é, do número mínimos de geradores, dos módulos livres que compõem tais resoluções, precisamente:

**Proposição 1.3.2.** *Considere duas resoluções livres minimais de um módulo $M$*

$$\begin{aligned} \cdots \to F_n \xrightarrow{\alpha_n} F_{n-1} \xrightarrow{\alpha_{n-1}} \cdots \to F_1 \xrightarrow{\alpha_1} F_0 \xrightarrow{\alpha_0} M \to 0, \\ \cdots \to F'_n \xrightarrow{\alpha'_n} F'_{n-1} \xrightarrow{\alpha'_{n-1}} \cdots \to F'_1 \xrightarrow{\alpha'_1} F'_0 \xrightarrow{\alpha_0} M \to 0. \end{aligned}$$

*Então, $\mu(F_i) = \mu(F'_i)$ para todo $i$.*

*Demonstração.* Ver [12], Chapter VII, Proposition 1.1. □

Estes importantes invariantes são chamados de *números de Betti* do $R$-módulo $M$, e são denotados por $\beta_i = \mu(F_i), \forall\ i = 1$.

**Proposição 1.3.3.** *Sejam $R$ um anel Noetheriano e $M$ um $R$-módulo com a resolução livre*

$$0 \to F_k \xrightarrow{\alpha_k} F_{k-1} \xrightarrow{\alpha_{k-1}} \cdots \to F_1 \xrightarrow{\alpha_1} F_0 \xrightarrow{\alpha_0} M \to 0$$

*de comprimento $k$. Então são equivalentes:*

*a)* $(0 : M) := \{a \in R; am = 0,\ \forall\ m \in M\} \neq 0$, *isto é, o anulador de $M$ é não trivial;*

*b)* $\displaystyle\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\beta_i = 0$*;*

*c)* $(0 : M)$ *contém um elemento não divisor de zero de $R$.*

*Demonstração.* Ver [12], Chapter VII, Lemma 2.2. □

Até agora, exploramos invariantes homológicos como a profundidade e a dimensão homológica, que medem a complexidade de módulos através de sequências regulares e resoluções livres. No entanto, para contemplar a estrutura de um módulo é necessário um invariante que vá além das homologias e descreva as cadeias de ideais primos no anel de base.

**Definição 1.3.7.** Seja $R \neq 0$ um anel. Uma expressão

$$\mathcal{P}_0 \subsetneq \mathcal{P}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{P}_n,$$

com $\mathcal{P}_i \in \operatorname{Spec}(R) := \{\text{ideais primos de } R\}, \forall\ i = 0, \ldots, n$, é chamada uma *cadeia de ideais primos* de $R$ e seu *comprimento* é definido como a quantidade de ideais primos na cadeia menos 1.

**Definição 1.3.8.** Seja $R \neq 0$ um anel. Definimos a *dimensão de Krull* de $R$, $\dim(R)$, como o supremo dos comprimentos das cadeias de ideais primos em $R$.

**Definição 1.3.9.** Seja $\mathcal{P} \in \operatorname{Spec}(R)$. A *altura* de $\mathcal{P}$, denotada por $\operatorname{alt}(\mathcal{P})$, é definida como sendo o supremo dos comprimentos das cadeias $\mathcal{P}_0 \subsetneq \mathcal{P}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{P}_n$, com $\mathcal{P}_i \in \operatorname{Spec}(R), \forall\ i = 0, \ldots, n$ e $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}$.

Para um ideal qualquer $I$ de $R$, definimos a altura de $I$, $\operatorname{alt}(I)$, como sendo o ínfimo das alturas dos primos minimais de $I$.

O célebre Teorema do Ideal Principal de Krull, em sua versão generalizada [12, Chapter V, Theorem 3.4], nos garante que se $I \subsetneq R$ é gerado por $m$ elementos, então, a altura de qualquer primo minimal de $I$ é menor ou igual a $m$. Assim, pela definição acima, temos que $\operatorname{alt}(I) \leq \mu(I)$. Esta discussão nos motiva a seguinte definição.

**Definição 1.3.10.** Sejam $I \subsetneq R$ um ideal sobre $R$ um anel local Noetheriano. Diremos que $I$ é *interseção completa* se $\operatorname{alt}(I) = \mu(I)$. Mais geralmente, no contexto não necessariamente local, diremos que $I$ é *localmente interseção completa* se para todo ideal maximal $\mathfrak{m}$ em $R$, tal que $I \subset \mathfrak{m}$, tivermos que $I_\mathfrak{m}$ é interseção completa em $R_\mathfrak{m}$. Além disso, dizemos que um ideal é *genericamente interseção completa* se $I_P$ é interseção completa para todo $P$ primo minimal de $I$, vide [8, Theorem 3.1].

Se tivermos que $I$ é localmente interseção completa, então para todo $P \in \operatorname{Spec}(R)$, tal que $I \subset P$, segue das propriedades da localização [12, Chapter III, Proposition 4.12], que $\operatorname{alt}(I_\mathfrak{m}) \leq \operatorname{alt}(I_P) \leq \mu(I_P) \leq \mu(I_\mathfrak{m})$, para $\mathfrak{m} \subsetneq R$ ideal maximal tal que $P \subset \mathfrak{m}$. Donde segue $\operatorname{alt}(I_P) = \mu(I_P)$. Portanto $I_P$ é interseção completa em $R_P$.

**Definição 1.3.11.** Sejam $R$ um anel e $M$ um $R$-módulo, definimos a *dimensão de Krull* de $M$ como sendo a dimensão de Krull de $R/(0:M)$.

Se $M$ é um módulo finitamente gerado sobre $R$ um anel Noetheriano, então os primos minimais de $(0:M)$ são os elementos minimais do conjunto dos *primos associados* de $M$, denotado por $\operatorname{Ass}(M)$, conjunto finito de ideais primos $P$ tais que $P = 0 : m$, para algum $m \in M$. A definição acima nos provém com a seguinte fórmula:

$$\dim(M) = \sup_{P \in \operatorname{Ass}(M)} \left\{ \dim \left( \frac{R}{P} \right) \right\}.$$

A próxima proposição ilustra, para um anel local, a relação entre a dimensão de Krull e a profundidade de um $R$-módulo.

**Proposição 1.3.4.** *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local Noetheriano e $M$ um $R$-módulo não trivial finitamente gerado. Então:*

$$\operatorname{prof}(M) \leq \min_{P \in \operatorname{Ass}(M)} \left\{ \dim \left( \frac{R}{P} \right) \right\} \leq \dim(M).$$

*Demonstração.* Ver [12], Chapter VI, Proposition 3.9. □

No contexto da proposição acima, $\operatorname{prof}(M) = \dim(M)$ implica em propriedades importantes para o módulo em questão.

**Definição 1.3.12.** Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local Noetheriano e $M$ um $R$-módulo finitamente gerado. Diremos que $M$ é um módulo *Cohen-Macaulay* se $M = \langle 0 \rangle$ ou $\operatorname{prof}(M) = \dim(M)$. De forma geral, se $R$ não é um anel local, diremos que $M$ é Cohen-Macaulay se $M_\mathfrak{m}$ é um $R_\mathfrak{m}$-módulo Cohen-Macaulay para todo ideal maximal de $\mathfrak{m}$ do anel $R$. O anel $R$ é dito Cohen-Macaulay se possui essa propriedade quando visto como $R$-módulo.

**Proposição 1.3.5.** *Seja $R$ um anel Cohen-Macaulay (não necessariamente local) e $I \subsetneq R$ um ideal próprio de $R$. Então* $\operatorname{grade}(I) = \operatorname{alt}(I)$.

*Demonstração.* Ver [12], Chapter VI, Theorem 3.14. □

**Exemplo 1.3.13.** Em [16, Theorem 17.33], o autor prova que o anel de polinômios sobre um anel é Cohen-Macaulay se, e somente se, o anel de base é um anel Cohen-Macaulay. Neste sentido, se $\mathbb{K}$ um corpo, então o anel $R = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ é Cohen-Macaulay.

Finalizamos esta seção apresentando um resultado central da teoria que relaciona a dimensão homológica e a profundidade de um $R$-módulo $M$.

**Teorema 1.3.6** (Fórmula de Auslander-Buchsbaum)**.** *Seja* $(R, \mathfrak{m})$ *um anel local Noetheriano e* $M$ *um* $R$*-módulo finitamente gerado. Se* $\operatorname{dh}(M) < \infty$*, então*

$$\operatorname{dh}(M) + \operatorname{prof}(M) = \operatorname{prof}(R). \tag{1.10}$$

*Demonstração.* Ver [12], Chapter VII, Proposition 1.12. □

**Observação 1.3.14.** Em 1.3.6, se adicionarmos a hipótese de que $(R, \mathfrak{m})$ é um anel Cohen-Macaulay, é imediato que a fórmula de Auslander-Buchsbaum passa a relacionar a profundidade e a dimensão homológica de $M$ com a dimensão de Krull do anel $R$. Uma vez que $(R, \mathfrak{m})$ ser Cohen-Macaulay implica $\operatorname{prof}(R) = \dim(R)$, temos que:

$$\operatorname{dh}(M) + \operatorname{prof}(M) = \dim(R).$$

## 1.4 O Teorema de Hilbert-Burch

Nesta seção exibiremos a teoria necessária para apresentar o Teorema de Hilbert-Burch, uma importante ferramenta que caracteriza ideais gerados pelos menores de uma matriz em termos de suas resoluções livres; em especial, sua principal adição ao nosso estudo é a informação de que ideais de que trata o teorema são ideais de dimensão homológica igual a 1.

Iniciamos com o aparato teórico que servirá como base para a demonstração do teorema. Essa etapa está baseada em [2], [3], [7] e [10].

**Definição 1.4.1.** Seja $\varphi$ uma matriz de tamanho $p \times q$, com entradas em $R$, um anel Noetheriano. Definimos, para cada $n = 1, \ldots, \min\{p, q\}$, o *ideal dos menores* $n \times n$ *da matriz* $\varphi$ como sendo o ideal $I_n(\varphi)$ gerado por todos os determinantes das submatrizes de ordem $n$ da matriz $\varphi$.

**Observação 1.4.2.** Ideais do tipo menores de uma matriz são bastante estudados em Álgebra Comutativa pela natural relação com as aplicações lineares que aparecem em resoluções livres serem dadas por matrizes. Portanto, várias propriedades foram exploradas visando o desenvolvimento da teoria, a exemplo de uma cota para a altura de $I_n(\varphi)$ ser dada por $\operatorname{alt}(I_n(\varphi)) \leq (p - n + 1)(q - n + 1)$ [4, Theorem (2.1)].

**Definição 1.4.3.** Sejam $R$ um anel e $G_1 \simeq R^p$, $G_2 \simeq R^q$ módulos livres finitamente gerados. Qualquer aplicação $R$-linear $\theta : G_1 \to G_2$ pode ser representada, com respeito às bases de $G_1$ e $G_2$, por uma matriz $q \times p$, com entradas em $R$. Definimos o *posto* da matriz $\theta$ por

$$\operatorname{rank}(\theta) = \max\{r; I_r(\theta) \neq 0\}.$$

Ao tentarmos construir resoluções livres para um módulo $M$, por vezes, conhecemos algumas sizígias de $M$. Entretanto, isso induz apenas a construção de um *complexo* para $M$, isto é, em 1.9, é garantido que $\operatorname{Im}(\alpha_{i+1}) \subseteq \operatorname{Ker}(\alpha_i)$. O próximo resultado, devido a Buchsbaum-Eisenbud, nos fornece um critério para quando um complexo é exato.

**Teorema 1.4.1.** *Seja $R$ um anel Noetheriano. O complexo de módulos livres finitamente gerados*

$$0 \to F_n \xrightarrow{\varphi_n} F_{n-1} \xrightarrow{\varphi_{n-1}} \cdots \to F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0$$

*é um complexo exato se, e somente se, valem as seguintes condições:*

*(a)* $\operatorname{rank}(F_k) = \operatorname{rank}(\varphi_k) + \operatorname{rank}(\varphi_{k+1}), \forall k = 1, \ldots, n-1$ *e* $\operatorname{rank}(F_n) = \operatorname{rank}(\varphi_n)$*;*

*(b)* $\operatorname{grade}(I_{n_k}(\varphi_k)) \geq k, \forall k = 1, \ldots, n,$ *onde* $n_k := \operatorname{rank}(\varphi_k)$.

*Demonstração.* Ver [10], Theorem 20.9. □

**Lema 1.4.2.** *Sejam $R$ um anel Noetheriano e $I \subsetneq R$ um ideal não trivial. Se $I$ admite uma resolução livre finita, então, $I$ contém um não divisor de zero.*

*Demonstração.* Considere uma resolução livre minimal para o ideal $I$,

$$0 \to F_n \xrightarrow{\varphi_n} F_{n-1} \xrightarrow{\varphi_{n-1}} \cdots \to F_1 \xrightarrow{\varphi_1} I.$$

Dela, induzimos uma resolução para o quociente $\dfrac{R}{I}$,

$$0 \to F_n \xrightarrow{\varphi_n} F_{n-1} \xrightarrow{\varphi_{n-1}} \cdots \to F_1 \xrightarrow{\varphi_1} R \to \frac{R}{I} \to 0.$$

Observe que $Im(\varphi_1) = I \neq 0$. Isso implica que existe pelo menos uma entrada não nula na matriz associada a $\varphi_1$, ou seja, $\operatorname{rank}(\varphi_1) \geq 1$. Como $\varphi_1$ deve ser uma matriz de dimensão $1 \times \operatorname{rank}(F_1)$, temos que $\varphi_1$ não admite submatrizes de ordem $r \times r$ com $r > 1$, já que $Im(\varphi_1) \subseteq R$. Logo, $\operatorname{rank}(\varphi_1) = 1$ e o ideal $I_1(\varphi_1)$, gerado pelas entradas de $\varphi_1$, coincide com $Im(\varphi_1) = I$. Logo, pelo Teorema 1.4.1, temos que $\operatorname{grade}(I) = \operatorname{grade}(I_1(\varphi_1)) \geq 1$. Portanto, $I$ deve conter pelo menos um elemento não divisor de zero. □

Diante do exposto, podemos iniciar nossas considerações sobre a demonstração do teorema que dá nome a essa seção.

**Teorema 1.4.3** (Teorema de Hilbert-Burch)**.** *Sejam $R$ um anel Noetheriano e $I \subsetneq R$ um ideal não trivial.*

*(a) Se o complexo*

$$\mathcal{F}_1 : 0 \to F_2 \xrightarrow{\varphi_2} F_1 \xrightarrow{\varphi_1} R \xrightarrow{\pi} \frac{R}{I} \to 0$$

*é exato e $F_1 \simeq R^{n+1}$, então $F_2 \simeq R^n$ e existe um elemento $\mathrm{a} \in R$ não divisor de zero tal que $I = \mathrm{a}I_n(\varphi_2)$, com $\mathrm{grade}(I_n(\varphi_2)) = 2$.*

*(b) Dada uma matriz de $\varphi_2$ de tamanho $n \times (n+1)$ tal que $\mathrm{grade}(I_n(\varphi_2)) \geq 2$ e $\mathrm{a} \in R$ um não divisor de zero, a aplicação $\varphi_1$, como descrita anteriormente, faz de $\mathcal{F}_1$ uma resolução livre de $R/I$, com $I = \mathrm{a}I_n(\varphi_2)$.*

*Demonstração.* (a) Como $\mathcal{F}_1$ é exato, então $Im(\varphi_1) = \ker(\pi) = I$, isto é, $\varphi_1 \neq 0$. Assim, existe pelo menos uma entrada não nula na matriz associada de $\varphi_1$, donde segue que $\mathrm{rank}(\varphi_1) \geq 1$. Desde que $\pi$ é uma matriz $1 \times (n+1)$, então $I_r(\varphi_1) = 0$ para $r > 1$. Portanto, $\mathrm{rank}(\varphi_1) = 1$.

Pelo Teorema 1.4.1 temos que

$$\mathrm{rank}(F_1) = \mathrm{rank}(\varphi_1) + \mathrm{rank}(\varphi_2) \implies \mathrm{rank}(\varphi_2) = \mathrm{rank}(F_2) = n. \tag{1.11}$$

Então $F_2$ é um módulo livre tal que $\mathrm{rank}(F_2) = n$. Portanto, $F_2 \simeq R^n$.

Novamente pelo Teorema 1.4.1 temos que $\mathrm{grade}(I_n(\varphi_2)) \geq 2$. Por outro lado, sabemos que o grade é limitado pela altura e, pela Observação 1.4.2, temos que:

$$\mathrm{grade}(I_n(\varphi_2)) \leq \mathrm{alt}(I_n(\varphi_2)) \leq (n+1-n+1)(n-n+1) = 2.$$

Logo,

$$\mathrm{grade}(I_n(\varphi_2)) = 2. \tag{1.12}$$

Agora, defina a aplicação $R$-linear

$$\begin{aligned} \Delta : F_1 &\to R \\ e_i &\mapsto \Delta(e_i) = \Delta_i, \end{aligned}$$

onde $\Delta_i$ é o menor maximal da matriz de $\varphi_2$ removendo a $i$-ésima linha, sendo $e_i$, com $i = 1, \ldots, n+1$, os elementos da base de $F_1$. Então,

$$0 \longrightarrow F_2 \xrightarrow{\varphi_2} F_1 \xrightarrow{\Delta} R \longrightarrow R/I \longrightarrow 0$$

é um complexo, pois considerando o produto das matrizes $\Delta \cdot \varphi_2$, temos para cada $i$, que $(\Delta \cdot \varphi_2)_i = \sum_{j=1}^{n+1} \Delta_j \varphi_2^{j,i}$ é o determinante da matriz $\varphi_2$ com a $i$-ésima coluna repetida. Temos então dois complexos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_1 &: 0 \longrightarrow F_2 \xrightarrow{\varphi_2} F_1 \xrightarrow{\varphi_1} R \longrightarrow R/I \longrightarrow 0,\\
\mathcal{F}_2 &: 0 \longrightarrow F_2 \xrightarrow{\varphi_2} F_1 \xrightarrow{\Delta} R \longrightarrow R/I \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

Ao aplicar o funtor $\mathrm{Hom}(-, R)$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_1^* &: 0 \longrightarrow R^* \xrightarrow{\varphi_1^*} F_1^* \xrightarrow{\varphi_2^*} F_2^*,\\
\mathcal{F}_2^* &: 0 \longrightarrow R^* \xrightarrow{\Delta^*} F_1^* \xrightarrow{\varphi_2^*} F_2^*,
\end{aligned}$$

onde $R^* = \mathrm{Hom}(R, R)$, $F_1^* = \mathrm{Hom}(F_1, R)$, $F_2^* = \mathrm{Hom}(F_2, R)$. Note que $R^* \simeq R$ e que através do isomorfismo:

$$\begin{aligned}
\rho : F_1^* &\to F_1 \simeq R^{n+1}\\
f &\mapsto (f(e_1), \dots, f(e_{n+1})),
\end{aligned}$$

concluímos que $F_1^* \cong F_1$. Analogamente, provamos que $F_2^* \cong F_2$. De maneira natural, considerando a contra variância do funtor, obtemos que $\varphi_1^* = \varphi_1^T$, $\varphi_2^* = \varphi_2^T$ e $\Delta^* = \Delta^T$, onde $M^T$ denota a matriz transposta da matriz $M$. Assim temos os seguintes complexos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_1^* &: 0 \longrightarrow R \xrightarrow{\varphi_1^T} F_1 \xrightarrow{\varphi_2^T} R \longrightarrow R/I \longrightarrow 0,\\
\mathcal{F}_2^* &: 0 \longrightarrow R \xrightarrow{\Delta^T} F_1 \xrightarrow{\varphi_2^T} R \longrightarrow R/I \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

Como o determinante é invariante por transposição, segue que $I_n(\varphi_2^T) = I_n(\varphi_2)$. Desta forma, pelas considerações em 1.12, temos que $\mathrm{grade}(I_n(\varphi_2^T)) > 1$. Além disso, como $\mathrm{rank}(\varphi_2^T) = \mathrm{rank}(\varphi_2) = n$, concluímos que existe pelo menos um subdeterminante de $\varphi_2$ não nulo.

Dessa forma, $\mathrm{rank}(\Delta^T) = 1$ e pela definição de $\Delta$ temos que $I_1(\Delta^T) = I_n(\varphi_2)$, o que implica $\mathrm{grade}(I_1(\Delta^T)) = \mathrm{grade}(I_n(\varphi_2)) \geq 2$. Como $\mathrm{rank}(\Delta^T) = 1 = \mathrm{rank}(R)$ e $\mathrm{rank}(F_1) = n + 1 = \mathrm{rank}(\varphi_2^T) + \mathrm{rank}(\Delta^T)$, segue, pelo Teorema 1.4.1, que $\mathcal{F}_2^*$ é um complexo exato.

Considerando a aplicação $\mathrm{Id} : F_2 \to F_2$, podemos induzir aplicações $R$-lineares tais que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}_1^* : 0 \arrow[r] & R \arrow[r, "\varphi_1^T"] \arrow[d, dashed] & F_1 \arrow[r, "\varphi_2^T"] \arrow[d, dashed] & F_2 \arrow[d, dashed] \\
\mathcal{F}_2^* : 0 \arrow[r] & R \arrow[r, "\Delta^T"] & F_1 \arrow[r, "\varphi_2^T"] & F_2
\end{tikzcd}$$

A aplicação $\mathrm{Id} : F_1 \to F_1$ claramente satisfaz o quadro à direita, enquanto o homomorfismo induzido de $R$ em $R$ deve ser definido por:

$$\begin{aligned} \mathrm{a} : R &\to R \\ r &\mapsto \mathrm{a}r, \end{aligned}$$

a multiplicação por algum elemeto $\mathrm{a} \in R$, satisfaz a comutatividade do quadro à esquerda.

Então, temos, da comutatividade do diagrama, que $\mathrm{Id}\varphi_1^T = \Delta^T \mathrm{a}$, isto é, $\varphi_1 = \Delta \mathrm{a}$ e, aplicando $\varphi_1$ nos elementos da base de $F_1$, temos que $\varphi_1(e_i) = \Delta_i \mathrm{a}$, $\forall i = 1, \ldots, n+1$. Logo,

$$\mathrm{a}I_n(\varphi_2) = \langle \Delta_1 \mathrm{a}, \ldots, \Delta_{n+1}\mathrm{a} \rangle = Im(\varphi_1) = I. \tag{1.13}$$

Por fim, como $I$ possui uma resolução livre, pelo Lema 1.4.2, existe um $r \in I$ não divisor de zero de $R$. Suponha, por absurdo, que a é divisor de zero, dessa forma, $\exists u \in R\backslash\{0\}$ tal que $\mathrm{a}u = 0$. Por outro lado, por 1.13, temos que $I \subseteq \langle \mathrm{a} \rangle$, isto é, $r = \mathrm{a}s$, para algum $s \in R$. Assim, pela lei da absorção, $ur = u\mathrm{a}s = 0$, um absurdo, pois $r$ é não divisor de zero de $R$. Finalizando assim, a primeira parte do teorema.

(b) Considere $\varphi_2$ uma matriz $(n+1) \times n$ com entradas em $R$ tal que $\mathrm{grade}(I_n(\varphi_2)) \geq 2$, e um elemento a não divisor de zero de $R$. Como $\mathrm{grade}(I_n(\varphi_2)) \neq 0$, então $I_n(\varphi_2) \neq 0$, isto é, $\mathrm{rank}(\varphi_2) \geq n$ e, como o rank é limitado pelas dimensões da matriz, tem-se que $\mathrm{rank}(\varphi_2) = n$. Considere a aplicação $\Delta$ como definida na parte 1., então $I_1(\Delta) = I_n(\varphi_2) \neq 0$. Como a é não divisor de zero de $R$, segue que

$$I_1(\mathrm{a}\Delta) = \mathrm{a}I_1(\Delta) \neq 0.$$

Assim, $\mathrm{rank}(\mathrm{a}\Delta) \geq 1$ e $\mathrm{a}I_1(\Delta) = \mathrm{a}I_n(\varphi_2)$. Por hipótese,

$$\mathrm{grade}(I_1(\Delta)) = \mathrm{grade}(I_n(\varphi_2)) \geq 2 > 1.$$

Portanto, pelo Teorema 1.4.1, temos a resolução

$$\mathcal{F} : 0 \to R^n \xrightarrow{\varphi_2} R^{n+1} \xrightarrow{\mathrm{a}\Delta} R \xrightarrow{\pi} \frac{R}{\mathrm{a}I_n(\varphi_2)} \to 0.$$

Finalizando nossa demonstração. □

Como discutido anteriormente, ter resolução livre minimal de Hilbert-Burch significa ter dimensão homológica igual a 1. Nesse sentido, ter uma resolução minimal do tipo Hilbert-Burch será uma qualidade importante no estudo de *divisores livres*, conceito que introduziremos no próximo capítulo do trabalho.

**Exemplo 1.4.4.** Sejam $\mathbb{K}$ um corpo e $R = \mathbb{K}[x, y, z]$ o anel de polinômios. Considere o ideal $I = \langle xy, xz, yz\rangle$. Os geradores de $I$ são os menores $2 \times 2$ da matriz

$$\varphi = \begin{bmatrix} 0 & z \\ -y & 0 \\ x & -x \end{bmatrix}.$$

Isto é, $I = I_2(\varphi)$. Além disso, $\mathrm{grade}(I) = \mathrm{alt}(I) = 2$, por $R$ é um anel Cohen-Macaulay. Assim, pelo Teorema de Hilbert-Burch, a sequência

$$0 \to R^2 \xrightarrow{\varphi} R^3 \to I \to 0$$

é exata e, portanto, uma resolução livre minimal para $I$. Logo, $\mathrm{dh}(I) = 1$.

**Observação 1.4.5.** Frequentemente, dizemos que um ideal tem resolução livre *do tipo Hilbert-Burch* quando o ideal em questão possuir resolução livre minimal nos moldes da resolução que aparece no Teorema de Hilbert-Burch.

## 1.5 Função de Hilbert

Os resultados e definições apresentados nessa seção podem ser encontrados de forma aprofundada em [3] e [17]. Similarmente ao contexto de anel graduado, 1.1.1, podemos definir a noção de módulo graduado.

**Definição 1.5.1.** Seja $R = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}} R_k$ um anel graduado. Um $R$-módulo $M$ é dito *graduado* quando pode ser decomposto em uma soma direta de subgrupos aditivos

$$M = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}} M_k$$

tal que $R_i M_j \subseteq M_{i+j}, \forall\, i, j \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$.

De maneira totalmente análoga ao caso de anéis graduados, os elementos de cada subgrupo $M_k$ são chamados de *elementos homogêneos de grau $k$*. Da definição, dado $m \in M$ existe $s \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$ tal que $m = m_0 + m_1 \cdots + m_s$, sendo $m_k \in M_k$ para todo

$k = 1, \ldots, s$. Cada $m_k$ na decomposição de $m$ é chamado de *componente homogênea de grau k*. Note ainda que cada $M_k$ é um $R_0$-módulo, desde que $R_0 M_k \subseteq M_k$.

Seja $M = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}} M_k$ um módulo graduado sobre um anel graduado $R$. Uma importante ferramenta no estudo de módulos graduados é a *translação de grau* $M(v)$, isto é, para $v \in \mathbb{Z}_+$, definimos $M(v)_k := M_{k+v}$. Uma das principais vantagens é ajustar os graus de $M$ de modo a preservar homogeneidade entre homomorfismos. Precisamente, se $M$ é gerado por elementos homogêneos $m_1, \ldots, m_n$, com $\mathrm{grau}(m_i) = u_i$, então o homomorfismo $R^n \to M$, utilizado para obter o módulo de sizígias de $M$, pode ser reescrito como $R(-u_1) \oplus \cdots \oplus R(-u_n) \to M$, garantindo que este homomorfismo seja homogêneo de grau zero. Essa construção é essencial para obter resoluções livres graduadas, nas quais módulos livres com graus deslocados mantêm a estrutura homogênea das aplicações.

**Definição 1.5.2.** Sejam $R$ um anel graduado e $M$ um $R$-módulo graduado finitamente gerado. Uma *resolução livre graduada* de $M$ é dada por

$$0 \to \bigoplus_s R(-u_{n,s})^{\beta_{n,s}} \to \bigoplus_s R(-u_{n-1,s})^{\beta_{n-1,s}} \to \cdots \to \bigoplus_s R(-u_{0,s})^{\beta_{0,s}} \to M \to 0.$$

Os expoentes $\beta_{i,j}$ são chamados de *números de Betti graduados* de $M$.

**Exemplo 1.5.3.** Sejam $\mathbb{K}$ um corpo e $R = \mathbb{K}[x, y, z]$. No Exemplo 1.4.4, apresentamos uma resolução livre para o ideal $I = \langle xy, xz, yz \rangle$.

$$0 \to R^2 \xrightarrow{\varphi} R^3 \to I \to 0.$$

Esta resolução pode ser vista como uma resolução livre graduada ao se adicionar a informação sobre as translações de grau. Uma tal resolução para o ideal $I$ é dada por:

$$0 \to R(-3)^2 \xrightarrow{\varphi} R(-2)^3 \to I \to 0.$$

Note que o grau dos geradores de $I$ é 2, assim como o grau dos geradores do módulo de sizígias de $I$ é 1, desta forma, as translações para que os homomofismos na resolução livre de $I$ sejam graduados são $-2$ e $-3 = (-2) - 1$, respectivamente.

**Definição 1.5.4.** Sejam $R$ um anel graduado Noetheriano, sendo $R_0 = \mathbb{K}$ um corpo e $M$ um $R$-módulo graduado finitamente gerado. A função numérica

$$\mathrm{H}(M, n) := \dim_{\mathbb{K}}(M_n), \ n \geq 0, \tag{1.14}$$

é chamada de *função de Hilbert* de $M$, onde $\dim_{\mathbb{K}}(M_n)$ a dimensão do $\mathbb{K}$-espaço vetorial $M_n$, bem definida pois $R_0 M_m \subseteq M_m$

Suponha que $\dim(M) := \dim(R/(0 : M)$ seja igual a $d+1$ com $d \geq 0$. Para $n$ suficientemente grande, a função de Hilbert $\mathrm{H}(M,t)$ se apresenta como um polinômio em $n$ de grau $d$. A este polinômio damos o nome de *polinômio de Hilbert* de $M$ e o denotaremos por $P_M(t)$. Além da informação da dimensão de $M$ ser obtida via o grau de $P_M(t)$, o polinômio de Hilbert nos fornece outros invariantes algébricos associados a $M$, a exemplo da multiplicidade.

**Definição 1.5.5.** A *multiplicidade* de $M$, denotada por $e(M)$ (ou $\deg(M)$), é definida por

$$e(M) = \mathrm{P}_M(1).$$

A terminologia multiplicidade remete ao caso em que $M$ é o anel de coordenadas de uma variedade algébrica projetiva.

**Definição 1.5.6.** A *série de Hilbert* de $M$ é dada por $\mathrm{H}_M(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{H}(M,n)t^n$.

O próximo resultado apresenta uma conexão entre os conceitos trabalhados nesta seção, isto é, nos diz como obter a série de Hilbert de um módulo graduado $M$ a partir de uma resolução livre graduada.

**Proposição 1.5.1.** *Seja $M$ um $R$-módulo finitamente gerado com dimensão homológica finita e seja*

$$0 \to \bigoplus_s R(-s)^{\beta_{p,s}} \to \cdots \to \bigoplus_s R(-s)^{\beta_{0,s}} \to M \to 0,$$

*uma resolução livre graduada finita de $M$. Então a série de Hilbert $\mathrm{H}_M(t) = \mathrm{S}_M(t)\mathrm{H}_R(t)$, onde $\mathrm{S}_M(t) = \sum_{i,s}(-1)^i \beta_{i,s} t^s$. Em particular, se $R = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{n+1}]$ então, $\mathrm{H}_M(t) = \dfrac{\mathrm{S}_M(t)}{(1-t)^{n+1}}$.*

*Demonstração.* Ver [17], Proposition 7.4.11. □

Finalizamos esta seção mencionando que no caso em que $R$ é um anel polinomial obtemos uma fórmula explícita para a multiplicidade.

**Proposição 1.5.2.** *Sejam $R = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{n+1}]$ anel de polinômios sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $M$ um $R$-módulo graduado finitamente gerado de dimensão $d+1$. Então,*

$$e(M) = \frac{(-1)^{n-d}}{(n-d)!} \frac{\partial^{n-d} \mathrm{S_M(t)}}{\partial t^{n-d}}(1).$$

*Demonstração.* Ver [17], Corolary 7.4.12. □

**Exemplo 1.5.7.** Considere o ideal $I = \langle xy, yz, zx \rangle \subset R = \mathbb{K}[x, y, z]$, com a resolução livre graduada apresentada no exemplo 1.5.3. A série de Hilbert de $R/I$ é dada por:

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_{R/I}(t) = \frac{\sum_{i,s}(-1)^i \beta_{i,s} t^s}{(1-t)^3} &= \frac{(-1)^0 1t^0 + (-1)^1 3t^2 + (1)^2 2t^3}{(1-t)^3} \\ &= \frac{1 - 3t^2 + 2t^3}{(1-t)^3}. \end{aligned}$$

Note que $\dim(R/I) = 1$, assim a multiplicidade deste mesmo ideal é dada por:

$$e(R/I) = \left[ \frac{(-1)^2}{(2)!} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (1 - 3t^2 + 2t^3) \right] (1) = \left( \frac{12t - 6}{2} \right) (1) = 3.$$

# Capítulo 2

# Sobre Divisores Livres

Formalmente definido, e estudado, pelo matemático japonês K. Saito nos anos 1980, o conceito de *divisores livres* surge no contexto de investigações sobre formas logarítmicas diferenciais e singularidades de hipersuperfícies. As descobertas de Saito, em [15], são de suma importância ao desenvolvimento da teoria algébrica sobre esse conceito.

Para além das contribuições fundamentais de Saito, o estudo de divisores livres faz parte do repertório de produções de autores como Dimca [9], Tohaneanu [20], etc.

Na primeira seção deste capítulo, estabelecemos o contexto algébrico necessário ao desenvolvimento desse trabalho. A segunda seção apresenta o módulo de derivações logarítmicas, introduz formalmente o conceito de divisor livre e fornece um critério algébrico para liberdade baseado nas propriedades do *ideal Jacobiano*. Para finalizar este capítulo, exibimos uma demonstração para o célebre *critério de Saito*, que caracteriza a liberdade do divisor em termos matriciais.

## 2.1 Derivações

O principal objetivo desta seção é apresentar as principais definições e resultados necessários para a construção do ambiente onde desenvolveremos nosso estudo. As principais referências para esta seção são [10], [13] e [14].

Seja $R := \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ um anel de polinômios standard graduado sobre um corpo $\mathbb{K}$. Eventualmente, hipóteses sobre $\mathbb{K}$ ser algebricamente fechado ou sobre sua característica serão consideradas já que os resultados principais do trabalho estão propostos no ambiente tridimensional $\mathbb{C}[x, y, z]$.

**Definição 2.1.1.** Uma *derivação* de $R$ é uma aplicação $\theta : R \to R$ que satisfaz as seguintes condições:

(a) $\theta(f + g) = \theta(f) + \theta(g)$, para todo $f, g \in R$ (Aditividade),

(b) $\theta(fg) = f\theta(g) + g\theta(f)$, para todo $f, g \in R$ (Regra de Leibniz).

**Exemplo 2.1.2.** As derivadas parciais formais $\partial_{x_i}$ são exemplos iniciais de derivações. Além disso, podemos apresentar a aplicação $\varepsilon : R \to R$, definida por

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} x_i \partial_{x_i},$$

como uma derivação de $R$, chamada de *Derivação de Euler*.

É de fácil verificação que o *conjunto das derivações* de $R$, denotado $\mathrm{Der}(R)$, possui uma estrutura de $R$-módulo com as operações:

$$\begin{array}{rcl} + : \mathrm{Der}(R) \times \mathrm{Der}(R) & \to & \mathrm{Der}(R) \\ (\theta_1, \theta_2) & \mapsto & \theta_1 + \theta_2 : A \to A \\ & & \qquad f \mapsto (\theta_1 + \theta_2)(f) = \theta_1(f) + \theta_2(f); \\ \cdot : \quad R \times \mathrm{Der}(R) & \to & \mathrm{Der}(R) \\ (f, \theta_1) & \mapsto & f \cdot \theta_1 : A \to A \\ & & \qquad g \mapsto f \cdot \theta_1(g) = f\theta_1(g). \end{array}$$

Como $\mathrm{Der}(R)$ é um módulo, podemos definir o submódulo das derivações que se anulam nos elementos de $\mathbb{K}$, denotado por $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(R)$. Formalmente:

$$\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(R) = \{\theta \in \mathrm{Der}(R);\ \theta|_{\mathbb{K}} \equiv 0\}.$$

Se $\theta$ é uma derivação em $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(R)$, diremos que $\theta$ é uma $\mathbb{K}$-*derivação*.

Em [10, Proposition 16.1], é mostrado que $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(R)$ é um módulo livre no qual o conjunto das derivações parciais usuais do cálculo, $\partial_{x_i}, i \in \{1, \ldots, n\}$, determinam uma base para $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(R)$. Isto é, qualquer $\mathbb{K}$-derivação, $\theta \in R$, pode ser escrita como a seguinte combinação $R$-linear das derivações parciais:

$$\theta = \sum_{i=1}^{n} g_i \partial_{x_i},\ \text{com}\ g_i \in R,\ i = 1, \ldots, n.$$

Estruturalmente:

$$\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(R) = \bigoplus_{i=1}^{n} R\partial_{x_i} \simeq R^n. \tag{2.1}$$

Naturalmente, a derivação de Euler,

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} x_i \partial_{x_i},$$

é um elemento de $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(R)$.

## 2.2 Módulo de Saito e Divisores Livres

Esta seção terá como foco principal um $R$-submódulo do módulo das $\mathbb{K}$-derivações: o *Módulo das Derivações Logarítmicas*, ou *Módulo de Saito*, relativo a um polinômio dado em $R$. O estudo das estruturas algébricas desse módulo é fundamental para este trabalho.

**Definição 2.2.1.** Seja $f \in R = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ um polinômio. O *Módulo de Derivações Logarítmicas* de $f$, ou *Módulo de Saito* de $f$, é o $R$-submódulo de $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(R)$ definido por:

$$\mathrm{Derlog}(f) := \{\theta \in \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(R);\ \theta(f) = gf,\ \text{com } g \in R\}\,.$$

**Observação 2.2.2.** É fácil verificar que $f \cdot \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(R) \subseteq \mathrm{Derlog}(f)$. Para uma derivação qualquer $\theta \in \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(R)$ temos que $f \cdot \theta(f) = f\theta(f) = \theta(f)f \in \langle f \rangle$, o ideal principal gerado por $f$. Portanto, o conjunto $\mathrm{Derlog}(f)$ é não trivial.

**Exemplo 2.2.3.** Seja $f \in R$ uma forma de grau $m$, isto é, um polinômio homogêneo de grau $m$. Neste caso, a derivação de Euler, $\varepsilon$, é um elemento em $\mathrm{Derlog}(f)$. Com efeito, sendo $f$ homogêneo de grau $m \geq 0$, é válida a *identidade de Euler*:

$$x_1\partial_{x_1} f + \cdots + x_n\partial_{x_n} f = mf. \tag{2.2}$$

Isto significa, em particular, que a derivação de Euler, $\varepsilon$, pertence a $\mathrm{Derlog}(f)$, pois

$$\varepsilon(f) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\partial_{x_i}\right)(f) = \sum_{i=1}^{n} x_i\partial_{x_i} f = mf.$$

É por meio do módulo de Saito que apresentamos a definição que fornece o título de nosso trabalho. Definimos:

**Definição 2.2.4.** Seja $f \in R$, dizemos que $f$ é um *divisor livre* se $\mathrm{Derlog}(f)$ é um módulo livre.

Frequentemente, encontrar uma base para um módulo não é uma tarefa fácil. Com respeito ao módulo de Saito, em especial, será possível investigar uma decomposição estrutural para este módulo. Para este fim, iniciamos introduzindo o ideal Jacobiano associado a um polinômio $f$.

**Definição 2.2.5.** Seja $f \in R$. O *ideal Jacobiano* de $f$, denotado por $J_f$, é o ideal gerado por $f$ e suas derivadas parciais:

$$J_f = \langle \partial_{x_1} f, \ldots, \partial_{x_n} f, f \rangle\,.$$

No caso em que $f$ é um polinômio homogêneo de grau $m \geq 0$, então a relação de Euler nos aponta que $f$ é combinação de suas derivadas parciais, isto é,

$$f = \frac{x_1}{m}\partial_{x_1} f + \cdots + \frac{x_n}{m}\partial_{x_n} f.$$

Assim, para um polinômio $f \in R$ homogêneo, podemos simplificar um conjunto de geradores para o ideal Jacobiano: $J_f = \langle \partial_{x_1} f, \ldots, \partial_{x_n} f \rangle$ .

**Exemplo 2.2.6.** Seja $R = \mathbb{K}[x, y, z]$, um anel de polinômios sobre um corpo $\mathbb{K}$. Seja $f = xyz$, então o ideal Jacobiano de $f$ é dado por:

$$J_f = \langle yz, xz, xy \rangle.$$

A seguir, apresentaremos um primeiro resultado que estabelece uma relação entre o módulo de sizígias de $J_f$, o $R$-módulo cíclico $R\varepsilon$ e o módulo de Saito de uma forma $f$.

**Proposição 2.2.1.** *Seja $f \in R$ um polinômio homogêneo de grau $m \geq 0$. Então, a sequência*

$$0 \to \mathrm{Syz}(J_f) \to \mathrm{Derlog}(f) \xrightarrow{\varphi} R\varepsilon \to 0, \tag{2.3}$$

*é exata, sendo*

$$\begin{aligned} \varphi : \mathrm{Derlog}(f) &\to R\varepsilon \\ \theta &\mapsto g_\theta \varepsilon, \end{aligned}$$

*onde $g_\theta \in R$ é tal que $\theta(f) = g_\theta f$.*

*Demonstração.* Iniciamos mostrando que a aplicação:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathrm{Derlog}(f) &\to R\varepsilon \\ \theta &\mapsto g_\theta \varepsilon, \text{ onde } g_\theta \in R \text{ é tal que } \theta(f) = g_\theta f, \end{aligned}$$

está bem definida.

De fato, sejam $g_\theta, g_{\theta'} \in R$ tais que $\theta(f) = g_\theta f$ e $\theta'(f) = g_{\theta'} f$. Deste modo, $\theta = \theta' \Rightarrow \theta(f) = \theta'(f) \Rightarrow g_\theta \varepsilon = g_{\theta'} \varepsilon \Rightarrow (g_\theta - g'_\theta)\varepsilon = 0 \Rightarrow g_\theta = g_{\theta'} \implies \varphi(\theta) = \varphi(\theta')$. Logo, $\varphi$ está bem definido.

Além disso, se $\theta, \theta' \in \mathrm{Derlog}(f)$ são derivações tais que $\theta(f) = g_\theta f$ e $\theta'(f) = g'_\theta f$, sendo $g_\theta, g'_\theta \in R$, temos que $(\theta + \theta')(f) = \theta(f) + \theta'(f) = g_\theta f + g'_\theta f = (g_\theta + g'_\theta) f$. Assim sendo, $\varphi(\theta + \theta') = (g_\theta + g'_\theta)\varepsilon = g_\theta \varepsilon + g'_\theta \varepsilon = \varphi(\theta) + \varphi(\theta')$. Além disso, para $h \in R$, temos que $h \cdot \theta(f) = h\theta(f) = hg_\theta f$. Dessa forma, $\varphi(h\theta) = hg_\theta \varepsilon = h\varphi(\theta)$. Do exposto, conclui-se que $\varphi$ é uma aplicação $R$-linear.

Agora, vamos mostrar que $\ker\varphi = \mathrm{Syz}(J_f)$. Para tanto, observe que

$$\begin{aligned}\ker\varphi = \{\theta \in \mathrm{Derlog}(f);\ \varphi(\theta) = 0\varepsilon\} &= \{\theta \in \mathrm{Derlog}(f);\ \theta(f) = 0\} \\ &= \left\{\sum_{i=1}^{n} h_i\partial_{x_i} \in \mathrm{Derlog}(f);\ \sum_{i=1}^{n} h_i\partial_{x_i} f = 0\right\}.\end{aligned}$$

Uma vez que $\mathrm{Derlog}(f) \subset \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(R)$, podemos identificar as derivações $\theta = \sum_{i=1}^{n} h_i\partial_{x_i}$ com vetores $(h_1, \ldots, h_n) \in R^n$, já que $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(R)$ é um módulo livre gerado pelas $n$ derivações parciais (logo isomorfo a $R^n$). Isso significa que podemos identificar $\ker\varphi$ com o módulo de sizígias de $J_f$:

$$\mathrm{Syz}(J_f) = \left\{(h_1, \ldots, h_n) \in R^n;\ \sum_{i=1}^{n} h_i\partial_{x_i} f = 0\right\}.$$

Ainda precisamos demonstrar a sobrejetividade de $\varphi$, isto é, mostrar a exatidão da sequência

$$\mathrm{Derlog}(f) \xrightarrow{\varphi} R\varepsilon \to 0. \tag{2.4}$$

Por hipótese, $f$ é homogêneo de grau $m \geq 0$, então, pela relação de Euler temos que:

$$f = \frac{x_1}{m}\partial_{x_1} f + \cdots + \frac{x_n}{m}\partial_{x_n} f.$$

Para cada $h \in R$, defina a derivação $\theta_h \in \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(R)$ por:

$$\theta_h = \frac{x_1 h}{m}\partial_{x_1} + \frac{x_2 h}{m}\partial_{x_2} + \cdots + \frac{x_m h}{m}\partial_{x_n}.$$

É imediato que $\theta_h \in \mathrm{Derlog}(f)$, visto que

$$\theta_h(f) = \frac{h}{m}\sum_{i=1}^{n} x_i\partial_{x_i} f = \frac{h}{m} m f = hf.$$

Além disso, note que por definição temos que $\varphi(\theta_h) = h\varepsilon$. Isto é, dado $h\varepsilon \in R\varepsilon$, existe $\theta_h \in \mathrm{Derlog}(f)$, com $\theta_h(f) = hf$, tal que $\varphi(\theta_h) = h\varepsilon$. Portanto, $\varphi$ é sobrejetora e a sequência curta 2.4 é exata.

Diante do exposto, concluímos a exatidão da sequência

$$0 \to \mathrm{Syz}(J_f) \to \mathrm{Derlog}(f) \xrightarrow{\varphi} R\varepsilon \to 0.$$

□

Como mencionado anteriormente, nosso objetivo é estabelecer uma decomposição para

Derlog$(f)$. Para isso, precisaremos apresentar alguns resultados gerais de Álgebra Comutativa.

**Definição 2.2.7.** Seja $S$ um anel qualquer e suponha que $M, N$ e $T$ sejam $S$-módulos. Uma sequência exata

$$0 \to N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\varphi} T \to 0,$$

é dita *cindida* se existe $\psi : T \to M$ aplicação $S$-linear tal que $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_T$. Esta aplicação $\psi$ é chamada de *cisão.*

**Observação 2.2.8.** No contexto descrito acima, se $T$ é livre, então toda sequência exata $0 \to N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\varphi} T \to 0$ é cindida. De fato, defina a cisão como a aplicação que leva cada elemento da base de $T$ na sua imagem inversa via $\varphi$:

$$\begin{aligned} \psi : T &\to M \\ t &\mapsto \psi(t) = \varphi^{-1}(t). \end{aligned}$$

Logo, $(\varphi \circ \psi)(t) = \varphi(\varphi^{-1}(t)) = t$, para todo $t \in T$.

**Lema 2.2.2.** *Seja $S$ um anel qualquer e suponha que $M, N$ e $T$ sejam $S$-módulos. Considere uma sequência exata*

$$0 \to N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\varphi} T \to 0.$$

*Se $\psi : T \to M$ é uma cisão, então*

$$M = i(N) \oplus \psi(T).$$

*Demonstração.* Desde que a sequência é exata, então temos a igualdade entre os conjuntos $i(N) = \ker(\varphi)$. Assim, é suficiente mostrar que $M = \ker \varphi \oplus \psi(T)$.

Para todo $x \in M$ temos que $\varphi(x) \in T$ e, consequentemente, $\psi(\varphi(x)) \in M$. Defina $y := x - \psi(\varphi(x)) \in M$. Aplicando $\varphi$, obtemos:

$$\begin{aligned} \varphi(y) &= \varphi(x) - (\varphi \circ \psi)(\varphi(x)) \\ &= \varphi(x) - \varphi(x) = 0. \end{aligned}$$

Logo, $y \in \ker \varphi$. Daí, $x = y + \psi(\varphi(x)) \in \ker \varphi + \psi(T)$. Consequentemente, $M = \ker \varphi + \psi(T)$.

Precisamos mostrar que $\ker \varphi \cap \psi(T) = \{0\}$. De fato, tome $y \in \ker \varphi \cap \psi(T)$. Então, $\varphi(y) = 0$. Como $y \in \psi(T)$, então para algum $x \in T$, temos que $y = \psi(x)$. Donde segue que $0 = \varphi(y) = \varphi(\psi(x)) = x$, pois, por hipótese, $\psi$ é uma cisão. Assim, $y = \psi(x) = \psi(0) = 0$. Logo, $\ker \varphi \cap \psi(T) = \{0\}$. Portanto, $M = i(N) \oplus \psi(T)$. □

**Observação 2.2.9.** Uma vez que $\psi$ é injetora, temos que $\psi(T) \simeq T$. E, como $i(N) \simeq N$, segue que $M = N \oplus T$.

Apresentada a teoria necessária, o próximo teorema estabelece um resultado estrutural para o módulo de derivações logarítmicas de uma forma $f$.

**Teorema 2.2.3.** *Seja $f \in R$ um polinômio homogêneo de grau $m \geq 0$. Então*

$$\mathrm{Derlog}(f) = \mathrm{Syz}(J_f) \oplus R\varepsilon.$$

*Demonstração.* Como $R\varepsilon$ é um módulo livre, o resultado segue do Lema 2.2.2 aplicado a sequência exata

$$0 \to \mathrm{Syz}(J_f) \to \mathrm{Derlog}(f) \xrightarrow{\varphi} R\varepsilon \to 0.$$

Em todo caso, exibiremos a cisão em questão. Nosso objetivo será mostrar que existe uma cisão $\psi : R\varepsilon \to \mathrm{Derlog}(f)$. Considere a aplicação

$$\begin{aligned} \psi : R\varepsilon &\to \mathrm{Derlog}(f) \\ h\varepsilon &\mapsto d_h = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i h}{m} \partial_{x_i}. \end{aligned}$$

Decorre naturalmente que $d_h(f) \in \mathrm{Derlog}(f)$, visto que

$$d_h(f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i h}{m} \partial_{x_i} f = \frac{h}{m} \sum_{i=1}^{n} x_i \partial_{x_i} f = \frac{h}{m} m f = hf.$$

Além disso, considere $\varphi$ como na Proposição 2.2.1:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathrm{Derlog}(f) &\to R\varepsilon \\ \theta &\mapsto g_\theta \varepsilon, \end{aligned}$$

onde $g_\theta \in R$ é tal que $\theta(f) = g_\theta f$.

Assim, temos que $\varphi(\psi(h\varepsilon)) = \varphi(d_h)$. Como $d_h(f) = hf$, segue que $\varphi(d_h) = h\varepsilon$, ou seja, $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_{R\varepsilon}$. Concluímos que $\psi$ é uma cisão.

Portanto, a sequência exata

$$0 \to \mathrm{Syz}(J_f) \xrightarrow{i} \mathrm{Derlog}(f) \xrightarrow{\varphi} R\varepsilon \to 0$$

é cindida e

$$\mathrm{Derlog}(f) = \mathrm{Syz}(J_f) \oplus R\varepsilon.$$

□

A próxima definição nos fornece uma classe mais geral que módulos livres.

**Definição 2.2.10.** Sejam $S$ um anel e $M$ um módulo sobre $S$. Dizemos que $M$ é *projetivo* se existe um $S$-módulo $M'$ tal que $M \oplus M'$ é um $S$-módulo livre.

Considerando a decomposição $\mathrm{Derlog}(f) = \mathrm{Syz}(J_f) \oplus R\varepsilon$, temos que $\mathrm{Syz}(J_f)$ é um módulo projetivo, se $\mathrm{Derlog}(f)$ é um módulo livre. Porém, devido ao Teorema de Quillen-Suslin [12, Chapter IV, Theorem 3.14, Theorem 3.15], temos que todo módulo projetivo sobre $R = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, anel de polinômios com coeficientes em um corpo $\mathbb{K}$, é livre. Desta forma, se $\mathrm{Derlog}(f)$ é livre, temos que $\mathrm{Syz}(J_f)$ é livre.

Essa discussão culmina no seguinte critério de liberdade.

**Teorema 2.2.4.** *Seja $f \in R$ um polinômio homogêneo. Então, $f$ é divisor livre se, e somente se,* $\mathrm{dh}(J_f) \leq 1$.

*Demonstração.* Considere a sequência exata curta

$$0 \to \mathrm{Syz}(J_f) \to \mathrm{Derlog}(f) \to R\varepsilon \to 0.$$

Suponha que $f$ é um divisor livre. Isto significa, por definição, que $\mathrm{Derlog}(f)$ é livre. No Teorema 2.2.3, apresentamos a seguinte decomposição $\mathrm{Derlog}(f) = \mathrm{Syz}(J_f) \oplus R\varepsilon$. Neste caso, pela definição 2.2.10, temos que $\mathrm{Syz}(J_f)$ é um módulo projetivo e, pela discussão anterior, temos que $\mathrm{Syz}(J_f)$ é um módulo livre.

Diante do exposto, temos que

$$0 \to \mathrm{Syz}(J_f) \to \mathrm{Derlog}(f) \to J_f \to 0$$

é uma resolução livre finita para $J_f$ de comprimento 1. Portanto, $\mathrm{dh}(J_f) \leq 1$.

Reciprocamente, suponha que $\mathrm{dh}(J_f) \leq 1$. Considere a sequência exata a seguir

$$0 \to \mathrm{Syz}(J_f) \to R^n \to J_f \to 0. \tag{2.5}$$

Pelo Lema de Schanuel, Lema 1.3.1, segue que 2.5 é uma resolução livre de $J_f$. Donde segue que $\mathrm{Syz}(J_f)$ é um módulo livre. Logo, $\mathrm{Derlog}(f) = \mathrm{Syz}(J_f) \oplus R\varepsilon$ é livre e $f$ é, portanto, um divisor livre. □

**Exemplo 2.2.11.** Sejam $R = \mathbb{C}[x, y, z]$ e $f = xyz \in R$. O ideal Jacobiano de $f$ é o ideal

$$J_f = \langle \partial_x f, \partial_y f, \partial_z f \rangle = \langle yz, xz, xy \rangle.$$

O qual possui resolução livre:

$$0 \to R^2 \to R^3 \to J_f \to 0,$$

conforme discutido no Exemplo 1.5.3. Assim, $\mathrm{dh}(J_f) \leq 1$. Portanto, pelo Teorema 2.2.4, $f$ é um divisor livre.

**Exemplo 2.2.12.** Sejam $R = \mathbb{C}[x,y,z]$ e $g = xyz(x-y)(y-z)(z-x) \in R$. O ideal Jacobiano de $g$, $J_g$, é o ideal gerado pelos polinômios:

$$\begin{aligned} \partial_x g &= -zy(y-z)(3x^2 - 2xy - 2xz + yz) \\ \partial_y g &= -zx(x-z)(2xy - 3y^2 - xz + 2yz) \\ \partial_z g &= -yx(x-y)(xy - 2xz - 2yz + 3z^2). \end{aligned}$$

Precisamente, $J_g = \langle \partial_x g, \partial_y g, \partial_z g \rangle$.

Utilizando o software computacional Macaulay2, encontramos uma resolução livre para $J_g$ como segue:

$$0 \to R^2 \to R^3 \to J_g \to 0.$$

Isso implica que $\mathrm{dh}(J_g) \leq 1$. Portanto, pelo Teorema 2.2.4, $g$ é um divisor livre.

Esse resultado é um critério para determinar se uma forma é um divisor livre. Embora seja uma ferramenta útil, não é o critério inicialmente proposto por Saito. Na próxima seção iremos apresentar o Critério de Saito junto com sua demonstração.

## 2.3 Critério de Saito

Em [15], Saito desenvolve um estudo geral sobre formas logarítmicas diferenciais e apresenta um critério para determinar se o módulo das derivações logarítmicas de uma forma $f$ é livre. Em essência, o critério se fundamenta na própria definição de módulo livre, isto é, quando este possui uma base (um conjunto de geradores linearmente independentes).

Esta seção traz uma outra demonstração deste teorema, elaborada por Alexandru Dimca e Gabriel Sticlaru, em [9], que constitui uma abordagem alternativa à prova original de Saito.

O resultado considera o corpo $\mathbb{K}$ como sendo o corpo dos números complexos $\mathbb{C}$ e $f \in R = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ uma forma reduzida. A fim de uma melhor apresentação do critério, introduzimos algumas notações preliminares.

Dado um conjunto $\mathfrak{D} = \{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$ formado por $n$ derivações em $\mathrm{Derlog}(f)$, podemos considerar uma matriz $M := M(\delta_1, \ldots, \delta_n)$ cujas linhas são dadas pelos coeficientes das derivações $\delta_1, \ldots, \delta_n$ na base canônica $\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_n}$. Explicitamente:

$$\text{se } \delta_i = a_{i1}\partial_{x_1} + \cdots + a_{in}\partial_{x_n} \in \mathrm{Derlog}(f) \subset \bigoplus_{i=1}^{n} R\partial_{x_i} \text{ para cada } i \in \{1, \ldots, n\},$$

então,

$$M(\delta_1, \dots, \delta_n) := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

**Teorema 2.3.1** (Critério de Saito)**.** *No contexto anterior. O conjunto* $\mathfrak{D} = \{\delta_1, \dots, \delta_n\}$ *é uma base para o módulo livre* Derlog$(f)$ *se, e somente se,*

$$\det(M(\delta_1, \dots, \delta_n)) = cf, \ \textit{para algum } c \in \mathbb{C}^*.$$

*Demonstração.* Inicialmente, faremos considerações para um conjunto qualquer de $n$ derivações em Derlog$(f)$, digamos, $\rho_1, \dots, \rho_n$ (não necessariamente uma base). Note que para cada $i = 1, \dots, n$ temos que:

$$\rho_i(f) = a_{i1}\partial_{x_1} f + \cdots + a_{in}\partial_{x_n} f = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\partial_{x_j} f = h_i' f, \text{ para algum } h_i' \in R. \tag{2.6}$$

Considere a supracitada matriz $M = M(\rho_1, \dots, \rho_n)$, cujas linhas são os coeficientes das derivações $\rho_1, \dots, \rho_n$. Deste modo, podemos reescrever a equação 2.6 em termos matriciais:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_{x_1} f \\ \partial_{x_2} f \\ \vdots \\ \partial_{x_n} f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1' f \\ h_2' f \\ \vdots \\ h_n' f \end{bmatrix}. \tag{2.7}$$

Denotemos a igualdade 2.7 por

$$M\nabla(f) = f', \tag{2.8}$$

onde $\nabla f = (\partial_{x_1} f, \dots, \partial_{x_n} f)$ é o *vetor gradiente* do polinômio $f$ e $f' := (h_1' f, \dots, h_n' f)$.

Denote por $\operatorname{adj}(M) = [b_{ij}]$, $b_{ij} \in R$, a matriz adjunta de $M$. Desta forma, multiplicando 2.8 por adj$(M)$, obtemos a seguinte igualdade:

$$\operatorname{adj}(M) M \nabla f = \operatorname{adj}(M) f'. \tag{2.9}$$

Mas pela fórmula de Cauchy, temos que

$$\operatorname{adj}(M)M = \det(M)\mathrm{Id} = \begin{bmatrix} \det(M) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det(M) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det(M) \end{bmatrix}.$$

Dessa forma, o sistema de equações 2.9 pode ser explicitamente reescrito da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} \det(M) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det(M) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det(M) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_{x_1} f \\ \partial_{x_2} f \\ \vdots \\ \partial_{x_n} f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} b_{1j} h'_1 f \\ \sum_{j=1}^{n} b_{2j} h'_2 f \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} b_{nj} h'_n f \end{bmatrix}.$$

É imediato do sistema acima que, para cada $i = 1, \ldots, n$,

$$\det(M)\partial_{x_i} f = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} h'_i f.$$

Logo, $\det(M)\partial_{x_i} f \in \langle f \rangle$, para todo $i = 1, \ldots, n$.

**Afirmação:** $\det(M) \in \langle f \rangle$.

Com efeito, por hipótese, sendo $f$ reduzido, podemos escrever $f = p_1 \ldots p_l$, onde para cada $k = 1, \ldots, l$, temos que $p_k \in R$ é um polinômio irredutível tal que $\mathrm{mdc}(p_s, p_r) = 1$, para $s \neq r$. Como $\det(M)\partial_{x_i} f \in \langle f \rangle$ segue que para todo $k = 1, \ldots, l$,

$$\det(M)\partial_{x_i} f \in \langle p_k \rangle. \tag{2.10}$$

Desde que cada $p_k$ é irredutível, temos que $\langle p_k \rangle$ é um ideal primo. Então, por 2.10, tem-se $\det(M) \in \langle p_k \rangle$ ou $\partial_{x_i} f \in \langle p_k \rangle$. Argumentamos que, para todo $i = 1, \ldots, n$, $\partial_{x_i} f \notin \langle p_k \rangle$. Do contrário, se, para algum $i$, tivéssemos $\partial_{x_i} f \in \langle p_k \rangle$, então, por meio da regra de Leibniz,

$$\partial_{x_i} f = \partial_{x_i}(p_1 \ldots p_l) = p_1 \ldots p_{k-1} p_{k+1} \ldots p_l \partial_{x_i}(p_k) + p_k \partial_{x_i}(p_1 \ldots p_{k-1} p_{k+1} \ldots p_l) \in \langle p_k \rangle,$$

concluiríamos que $p_1 \ldots p_{k-1} p_{k+1} \ldots p_l \partial_{x_i}(p_k) \in \langle p_k \rangle$. E mais uma vez, sendo $\langle p_k \rangle$ um ideal primo, deríamos ter que $\partial_{x_i} p_k \in \langle p_k \rangle$ ou $p_1 \ldots p_{k-1} p_{k+1} \ldots p_l \in \langle p_k \rangle$. Em ambos os casos, temos um absurdo, de fato: uma vez que $p_k$ é homogêneo, temos que $\mathrm{grau}(\partial_{x_i} p_k) \leq \mathrm{grau}(p_k) - 1$, logo, $\partial_{x_i} p_k \notin \langle p_k \rangle$ e, por outro lado, $p_1 \ldots p_{k-1} p_{k+1} \ldots p_l \notin \langle p_k \rangle$, pela hipótese sobre $p_1 \ldots p_l$ serem relativamente primos entre si.

Portanto, para todo $i = 1, \ldots, n$ e $k = 1, \ldots, l$, obtemos que $\partial_{x_i} p_k \notin \langle p_k \rangle$. Consequentemente, $\det(M) \in \langle p_k \rangle$, para todo $k = 1, \ldots, l$. Isso implica que $\det(M) \in \langle f \rangle$.

Conclusão: se $M$ é uma matriz quadrada de ordem $n$ cujas linhas são os coeficientes de $n$ derivações logarítmicas de $f$, então

$$\det(M) = hf, \text{ para algum } h \in R. \tag{2.11}$$

Agora, suponha que as derivações $\delta_1, \ldots, \delta_n$ formam uma base para Derlog$(f)$. Por definição, essas derivações são $R$-linearmente independentes, isso implica que, na equação 2.11, $h \neq 0$.

Considere as derivações $\beta_1, \ldots, \beta_n$ definidas como segue:

$$\begin{aligned}
&\beta_1 = f\partial_{x_1} \\
&\beta_j = f_1\partial_{x_j} - f_j\partial_{x_1}, \forall\ j = 2, \ldots, n, \text{ sendo } f_j := \partial_{x_j}(f).
\end{aligned}$$

Note que claramente $\beta_1, \ldots, \beta_n \in$ Derlog$(f)$. Além disso, considere a matriz $M_1 := M(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ cujas linhas são compostas pelos coeficientes das derivações $\beta_1, \ldots, \beta_n$ na base canônica $\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_n}$:

$$M_1 = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -f_2 & f_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -f_3 & 0 & f_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -f_n & 0 & 0 & \cdots & f_1 \end{bmatrix}.$$

Então,

$$\det(M_1) = f{f_1}^{n-1}. \tag{2.12}$$

Como $\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$ é uma base para Derlog$(f)$, podemos explicitar as derivações $\beta_1, \ldots, \beta_n$ através de combinações $R$-lineares desses geradores. Em termos matriciais, existe $N$ uma matriz de ordem $n \times n$ tal que $M_1 = NM$. Assim sendo, $\det(M_1) = \det(N)\det(M)$. Isso implica, devido 2.11 e 2.12, que

$$f{f_1}^{n-1} = \det(N)hf.$$

Ou seja, $h$ deve dividir ${f_1}^{n-1}$.

Reproduzindo o procedimento anterior para cada $k \neq 1$, definimos:

$$\begin{aligned}
&\beta_k^k = f\partial_{x_k} \\
&\beta_j^k = f_k\partial_{x_j} - f_j\partial_{x_k}, \forall\ j = 1, \ldots, k-1, k+1, \ldots n.
\end{aligned}$$

Mais uma vez, claramente, para cada $k$, temos que $\beta_1^k, \ldots, \beta_n^k$ são derivações logarítmicas de $f$. E definindo $M_k = M(\beta_1^k, \ldots, \beta_n^k)$ matriz cujas linhas são compostas pelos coeficientes das derivações $\beta_1^k, \ldots, \beta_n^k$ na base canônica $\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_n}$, temos que existe $N_k$

matriz quadrada de ordem $n$ tal que $M_k = N_k M$. Desta forma, $\det(M_k) = \det(N_k)\det(M)$ o que implica $f{f_k}^{n-1} = \det(N_k)hf$. Consequentemente, $h$ divide $f_k, \forall\ k = 1, \ldots, n$.

Por fim, consideremos as derivações logarítmicas $\widetilde{\beta_j} = f\partial_{x_j}$, com $j = 1, \ldots, n$, e a matriz:

$$\widetilde{M} = M(\widetilde{\beta_1}, \ldots, \widetilde{\beta_n}) = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & f & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f \end{bmatrix}.$$

Similarmente, existe $\widetilde{N}$ matriz quadrada de ordem $n$ tal que $\widetilde{M} = \widetilde{N}M$. Então, $\det(\widetilde{M}) = f^n = \det(\widetilde{N})hf$. Dessa forma, temos que $h$ divide $f^{n-1}$. Conclusão: $h$ divide $f^{n-1}$ e $h$ divide $f_k, \forall\ k = 1, \ldots, n$.

**Afirmação:** $h \in \mathbb{C}^*$.

De fato, como $f$ é reduzido, por hipótese, podemos reescrevê-lo como anteriormente, isto é, como um produto de $l$ formas irredutíveis distantas duas a duas:

$$f = p_1 \ldots p_l.$$

Suponha, por absurdo, que $h \notin \mathbb{C}^*$. Desta forma, como $h$ divide $f^{n-1}$, existiria $j \in \{1, \ldots, l\}$ tal que $p_j$ divide $h$. Além disso, como $h$ divide $f_k, \forall\ k = 1, \ldots, n$, teríamos que $p_j$ dividiria $f_k^{n-1}, \forall\ k = 1, \ldots, n$.

Perceba que para cada $k = 1, \ldots, n$ podemos escrever

$$f_k = p_1 \ldots p_{j-1}p_{j+1} \ldots p_l \partial_{x_k}(p_j) + p_j \partial_{x_k}(p_1 \ldots p_{j-1}p_{j+1} \ldots p_l).$$

Denotaremos $f_{(k,j)} := p_1 \ldots p_{j-1}p_{j+1} \ldots p_l \partial_{x_k}(p_j)$. Pelo Teorema Binomial, temos que

$$\begin{aligned} {f_k}^{n-1} &= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} f_{(k,j)}^{(n-1)-i} (p_j \partial_{x_k}(p_1 \ldots p_{j-1}p_{j+1} \ldots p_l))^i \\ &= f_{(k,j)}^{n-1} + p_j \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i} f_{(k,j)}^{(n-1)-i} p_j^{i-1} \partial_{x_k}(p_1 \ldots p_{j-1}p_{j+1} \ldots p_l)^i. \end{aligned}$$

Da expressão acima, podemos concluir que $p_j$ deve dividir $f_{(k,j)}^{n-1}$. E pela definição de $f_{(k,j)}$, teríamos que $p_j \mid \partial_{x_i}(p_j)^{n-1}$. Sendo $p_j$ irredutível, teríamos finalmente que $p_j \mid \partial_{x_i}(p_j)$, um absurdo, pois $\operatorname{grau}(\partial_{x_i} p_j) < \operatorname{grau}(p_j)$.

Portanto $h = \lambda$, para algum $\lambda \in \mathbb{C}^*$, como queríamos demonstrar.

Reciprocamente, suponha que $\det(M) = cf$, com $c \in \mathbb{C}^*$. Neste caso, em particular, as derivações $\delta_1, \ldots, \delta_n$ são linearmente independentes sobre $R$. Resta mostrar que tais derivações geram Derlog($f$). Seja $\beta \in$ Derlog(f), evidentemente, esta derivação pode ser identificada como sendo:

$$\beta = \sum_{i=1}^{n} b_i \partial_{x_i};\ b_i \in R, \forall\ i = 1, \ldots, n. \tag{2.13}$$

**Afirmação:** Existem $u_1, \ldots, u_n \in R$ tais que

$$f\beta = \sum_{i=1}^{n} u_i \delta_i \in \mathrm{Derlog}(f). \tag{2.14}$$

De fato, em essência, precisamos resolver o sistema $R$-linear abaixo:

$$\begin{bmatrix} u_1 & \cdots & u_n \end{bmatrix} \cdot M = \begin{bmatrix} fb_1 & \cdots & fb_n \end{bmatrix}.$$

Pela Fórmula de Cauchy, obtemos que, para todo $i = 1, \ldots, n$,

$$\begin{bmatrix} u_1 & \cdots & u_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \det(M) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \det(M) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} fb_1 & \cdots & fb_n \end{bmatrix} \cdot \mathrm{adj}(M).$$

Desde que $\det(M) = cf$, com $c \in \mathbb{C}^*$, podemos reescrever a igualdade anterior:

$$\begin{bmatrix} u_1 & \cdots & u_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1/c & \cdots & b_n/c \end{bmatrix} \cdot \mathrm{adj}(M).$$

Ou seja, o sistema linear é solúvel em $R$ para $u_1, \ldots, u_n$, e a afirmação é válida.

Seja $M_i$ a matriz obtida ao trocar a $i$-ésima linha de $M = M(\delta_1, \ldots, \delta_n)$ pelas coordenadas de $\beta$:

$$M_i = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-11} & a_{i-12} & \cdots & a_{i-1n} \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ a_{i+11} & a_{i+12} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Em 2.11 concluímos que para uma matriz qualquer $U$, quadrada de ordem $n$, cujas linhas são derivações em Derlog$(f)$, temos que $\det(U) \in \langle f \rangle$. Isto vale, em particular, para cada $M_i$. Dessa forma,

$$\exists\ g_i \in R;\ \det(M_i) = g_i f,\ \forall\ i = 1, \ldots, n.$$

Agora, considere a matriz $M_i'$ trocando a $i$-ésima linha de $M = M(\delta_1, \ldots, \delta_n)$ pelas coordenadas da derivação $f\beta$. Considerando 2.13 e 2.14, temos duas escritas de $f\beta$ na base canônica $\{\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_n}\}$, a saber,

$$fb_1\partial_{x_1} + \cdots + fb_n\partial_{x_n} = f\beta = \left(\sum_{j=1}^{n} u_j a_{j1}\right)\partial_{x_1} + \cdots + \left(\sum_{j=1}^{n} u_j a_{jn}\right)\partial_{x_n}.$$

Logo, podemos apresentar $M_i'$ do seguinte modo:

$$M_i' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-11} & a_{i-12} & \cdots & a_{i-1n} \\ fb_1 & fb_2 & \cdots & fb_n \\ a_{i+11} & a_{i+12} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-11} & a_{i-12} & \cdots & a_{i-1n} \\ \sum_{j=1}^{n} u_j a_{j1} & \sum_{j=1}^{n} u_j a_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} u_j a_{jn} \\ a_{i+11} & a_{i+12} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Pela primeira expressão matricial, é imediato ver quer $\det(M_i') = f\det(M_i) = g_i f^2$. Já pela segunda, a menos de sinal, temos que $u_1 \cdots u_{i-1}u_{i+1} \cdots u_n \det(M_i') = u_i \det(M)$. Denote $\mathfrak{u}_i := u_1 \cdots u_{i-1}u_{i+1} \cdots u_n$. Daí,

$$\begin{aligned} \mathfrak{u}_i \det(M_i') = u_i \det(M) &\iff \mathfrak{u}_i g_i f^2 = u_i c f \\ &\iff \mathfrak{u}_i g_i f = u_i c. \end{aligned}$$

Como, por hipótese, $c$ é constante, temos que $f$ divide $u_i, \forall\ i = 1, \ldots, n$. Então, existem $d_1, \ldots, d_n \in R$ tais que $u_i = d_i f, \forall\ i = 1, \ldots, n$. Assim,

$$f\beta = \sum_{i=1}^{n} f d_i \delta_i = f \sum_{i=1}^{n} d_i \delta_i.$$

Logo, $\beta = \sum_{i=1}^{n} d_i \delta_i$. Portanto, o conjunto $\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$ determina uma base para $\mathrm{Derlog}(f)$, concluindo nossa demonstração. □

**Exemplo 2.3.1.** Sejam $R = \mathbb{C}[x, y, z]$ e $f = xyz \in R$. Considere as derivações: $\delta_1 = x\partial_x$, $\delta_2 = y\partial_y$, $\delta_3 = z\partial_z$. É fácil notar que para todo $i = 1, 2, 3$ temos que $\delta_i(f) = f$. Logo, $\delta_i \in \mathrm{Derlog}(f), \forall\ i = 1, 2, 3$.

Além disso, com respeito a base canônica de $\mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(R)$, a matriz de Saito é dada por

$$M := \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}.$$

Trivialmente, notamos que $\det(M) = 1 \cdot f$. Assim, pelo Critério de Saito, $f$ é um divisor livre e as derivações $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ formam uma base para $\mathrm{Derlog}(f)$.

# Capítulo 3

# Resultado Principal e Aplicações

Conforme discutido no capítulo anterior, o estudo de divisores livres admite uma gama de critérios teóricos e algorítmicos para identificar quando classes específicas de polinômios que satisfazem essa propriedade. Este capítulo se propõe a explorar o resultado apresentado por Ştefan O. Tohăneanu em [20] que fornece um critério para quando uma forma $f$, no plano projetivo, é um divisor livre, bem como algumas aplicações.

## 3.1 Um Critério de Liberdade

Nesta seção, discutiremos em detalhes o teorema principal deste trabalho. No contexto particular sobre divisores, este resultado atuará como um critério de liberdade, fornecendo uma maneira alternativa de obter a dimensão homológica do ideal Jacobiano associado a uma forma $f \in R$.

Preliminar à discussão central desta seção, vamos apresentar dois lemas que serão ferramentas fundamentais na demonstração do teorema principal.

**Lema 3.1.1.** *Sejam $R = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ anel de polinômios standard graduado sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $A, B, C \in R$ polinômios homogêneos. Então, a sequência $A, B, C$ determina uma $R$-sequência regular se, e somente se,* $\operatorname{alt}\langle A, B, C\rangle = 3$.

*Demonstração.* Denote por $J = \langle A, B, C\rangle$, o ideal gerado pelas três formas $A, B, C$. Se $A, B, C$ determinam uma $R$-sequência regular, então, $\operatorname{alt}(J) = 3$, pela Proposição 1.3.5.

Reciprocamente, se $\operatorname{alt}(J) = 3$, então $\operatorname{grade}(J) = 3$, mais uma vez, pela Proposição 1.3.5. Então, existem $D, E, F$ elementos em $J$ de forma que $D, E, F$ determina uma $R$-sequência maximal em $J$. Desta forma, por [10, Corollary 17.7], $A, B, C$ é uma $R$-sequência regular. □

Para os próximos resultados deste capítulo, estaremos supondo que $R := \mathbb{C}[x, y, z]$ é o anel dos polinômios nas indeterminadas $x, y$ e $z$ com coeficientes no corpo $\mathbb{C}$.

**Lema 3.1.2.** *Seja $I \subseteq R = \mathbb{C}[x,y,z]$ um ideal de altura 2, minimamente gerado por três polinômios homogêneos de mesmo grau. Se $I$ possui uma sizígia regular, então $I$ é genericamente interseção completa.*

*Demonstração.* Seja $(A,B,C) \in R^3$ uma sizígia regular de $I = \langle f_1, f_2, f_3 \rangle$. Então,

$$Af_1 + Bf_2 + Cf_3 = 0. \tag{3.1}$$

Seja $P \supseteq I$ um primo minimal. Note que $\operatorname{alt}(P) = \operatorname{alt}(I) = 2$, desta forma,

$$\begin{aligned} \operatorname{alt}(I_P) &= \min\{\operatorname{alt}(Q_P) \ ; \ I_P \subseteq Q_P, \ Q_P \in \operatorname{Spec}(R_P)\} \\ &= \min\{\operatorname{alt}(Q_P) \ ; \ I \subseteq Q \subseteq P, \ Q \in \operatorname{Spec}(R)\} \\ &= \operatorname{alt}(P_P) = \dim R_P = \operatorname{alt}(P) = 2, \end{aligned}$$

visto que $P$ é minimal sobre $I$. Dessa forma, devemos mostrar que $\mu(I_P) = 2$, sendo $I_P = \left\langle \frac{f_1}{1}, \frac{f_2}{1}, \frac{f_3}{1} \right\rangle$.

Note que o ideal $P$ não contém ao menos um dos elementos da sizígia $(A,B,C)$. Do contrário, se $\langle A,B,C \rangle \subset P$, teríamos $2 = \operatorname{alt}(P) \geq \operatorname{alt}(A,B,C)$, absurdo, visto que $\langle A,B,C \rangle$ é gerado por uma $R$-sequência regular, logo, $\operatorname{alt}(A,B,C) = 3$.

Suponha, sem perda de generalidade, que $A \notin P$, então $\frac{A}{1}$ é uma unidade em $R_P$, o que implica que podemos reescrever a equação 3.1 da seguinte forma:

$$\frac{f_1}{1} = -\frac{B}{A}\frac{f_2}{1} - \frac{C}{A}\frac{f_3}{1}. \tag{3.2}$$

Sendo assim,

$$I_P = \left\langle \frac{f_1}{1}, \frac{f_2}{1}, \frac{f_3}{1} \right\rangle = \left\langle \frac{f_2}{1}, \frac{f_3}{1} \right\rangle.$$

Portanto, concluímos que $I_P$ é minimamente gerado por dois elementos de $R_P$. Isto é, $I$ é genericamente interseção completa. $\square$

Em posse dessas ferramentas, iremos enunciar e demonstrar o resultado principal deste trabalho.

**Teorema 3.1.3.** *Seja $I \subset R = \mathbb{C}[x,y,z]$ um ideal de altura 2, minimamente gerado por três polinômios homogêneos de mesmo grau. Então, o ideal $I$ é genericamente interseção completa e $R/I$ admite resolução livre minimal do tipo Hilbert-Burch se, e somente se, o ideal $I$ admite uma sizígia regular.*

*Demonstração.* ($\Leftarrow$) O Lema 3.1.2 nos garante que $I$ é genericamente interseção completa. Resta mostrar que $R/I$ admite resolução livre minimal do tipo Hilbert-Burch. Considere $(A,B,C) \in R^3$ uma sizígia regular de $I$. Assim, $A, B, C$ é uma $R$-sequência regular e, para polinômios homogêneos de mesmo grau $f_1, f_2, f_3 \in R$ que geram $I$, temos que:

$$Af_1 + Bf_2 + Cf_3 = 0. \tag{3.3}$$

Rearranjando a equação, temos:

$$Cf_3 = -Af_1 - Bf_2 \text{ o que implica que } Cf_3 \in \langle A, B\rangle. \tag{3.4}$$

Como $C$ é um elemento regular em $R/\langle A, B\rangle$, temos que $f_3 \in \langle A, B\rangle$. Isto é, $f_3 = AD + BE$, para certos $D, E \in R$.

Substituindo $f_3$ na equação 3.3, temos:

$$Af_1 + Bf_2 + C(AD + BE) = 0.$$

Reagrupando os termos, obtemos:

$$A(f_1 + CD) = B(-f_2 - CE). \tag{3.5}$$

Uma vez que $B$ é regular em $R/\langle A\rangle$, a igualdade acima implica que

$$-f_2 - CE \in \langle A\rangle, \text{ isto é, } -f_2 - CE = AF, \text{ para algum } F \in R.$$

Assim,

$$f_2 = -AF - CE.$$

Por fim, substituindo $f_2$ na equação 3.5, obtemos:

$$A(f_1 + CD) = B(AF + CE - CE) = ABF.$$

Sendo $A$ regular em $R$, isto é, um elemento não nulo (já que $R$ é um domínio), concluímos que:

$$f_1 + CD = BF, \text{ ou seja, } f_1 = BF - CD.$$

Conclusão: podemos identificar $f_1 = BF - CD, f_2 = -AF - CE$ e $f_3 = AD + BE$ como os respectivos determinantes

$$f_1 = \begin{vmatrix} B & D \\ C & F \end{vmatrix}, f_2 = -\begin{vmatrix} A & -E \\ C & F \end{vmatrix} \text{ e } f_3 = \begin{vmatrix} A & -E \\ B & D \end{vmatrix}.$$

Donde segue que os polinômios $f_1, -f_2, f_3$ são os menores de ordem $2 \times 2$ da seguinte matriz:

$$\varphi = \begin{bmatrix} A & -E \\ B & D \\ C & F \end{bmatrix}.$$

Finalmente, tendo em conta que $R$ é um anel Cohen-Macaulay, devemos ter que $\text{grade}(I) = 2$ (pois, por hipótese, $\text{alt}(I) = 2$). Portanto, pelo Teorema 1.4.3, $R/I$ tem uma resolução minimal do tipo Hilbert-Burch.

$$0 \to R^2 \xrightarrow{\varphi} R^3 \to R \to \frac{R}{I} \to 0.$$

($\Rightarrow$) Suponha que $R/I$ tenha resolução minimal do tipo Hilbert-Burch. Isto significa que

$$0 \to R^2 \xrightarrow{\varphi} R^3 \to R \to \frac{R}{I} \to 0 \tag{3.6}$$

é uma resolução minimal para $R/I$, onde

$$\varphi = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \\ C_1 & C_2 \end{bmatrix}$$

é uma matriz tal que os menores de ordem $2 \times 2$ de $\varphi$ são geradores minimais para $I$. Isto é, se

$$f_1 := B_1C_2 - B_2C_1, f_2 := A_1C_2 - A_2C_1 \text{ e } f_3 := A_1B_2 - A_2B_1, \tag{3.7}$$

então, $I = \langle f_1, f_2, f_3 \rangle$.

Precisamos mostrar que existe $(A, B, C) \in R^3$ uma sizígia regular de $I$. Note que pelo Lema 1.2.2, é suficiente mostrar que $(A, B, C)$ é uma sequência regular para os geradores $f_1, f_2, f_3$. Portanto, basta mostrarmos que existe $(A, B, C) \in R^3$ tal que $Af_1+Bf_2+Cf_3 = 0$.

Desde que $\varphi$ é a matriz de sizígias de $I$, se $A_1, B_1, C_1$ ou $A_2, B_2, C_2$ é uma $R$-sequência regular, então, obtemos o resultado.

Suponha que nenhuma delas é $R$-sequência regular. Como $I$ é um ideal equigerado, temos que existem $d_1, d_2 \geq 1$ tais que $\text{grau}(A_1) = \text{grau}(B_1) = \text{grau}(C_1) = d_1$ e $\text{grau}(A_2) = \text{grau}(B_2) = \text{grau}(C_2) = d_2$. Sem perda de generalidade, podemos supor $d_1 \leq d_2$.

Nosso objetivo é mostrar que uma combinação $R$-linear das sequência $A_1, B_1, C_1$ e $A_2, B_2, C_2$ determina uma $R$-sequência regular. Explicitamente, mostraremos que existe $f \in R$ polinômio homogêneo de grau $d_2 - d_1$ tal que $A_2 - fA_1, B_2 - fB_1, C_2 - fC_1$ é uma

$R$-sequência regular, já que evidentemente $(A_2 - fA_1, B_2 - fB_1, C_2 - fC_1)$ determina uma sizígia para os geradores $f_1, f_2, f_3$ do ideal $I$.

Considere o ideal $J = \langle A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 \rangle$. Iniciamos mostrando que a variedade algébrica projetiva $V(J)$ é vazia. De fato, suponha, por absurdo, que $V(J) \neq \varnothing$.

Seja $p = [a : b : c] \in V(J) \subseteq \mathbb{P}^2$. Por 3.7, temos que $I \subseteq J$. Consequentemente, $V(J) \subseteq V(I)$, em particular, $p \in V(I)$. Denote por $\mathfrak{P} := \mathfrak{I}(p)$, o ideal (primo) de definição associado ao ponto $p$. Como $\{p\} \subseteq V(I)$ temos que $\mathfrak{I}(V(I)) \subseteq \mathfrak{I}(p) = \mathfrak{P}$. Porém, pelo Teorema dos Zeros de Hilbert, $\mathfrak{I}(V(I)) = \sqrt{I} \supseteq I$. Desta forma, $I \subseteq \mathfrak{P}$.

Por hipótese, $I$ é um ideal de altura 2. Assim, $\mathrm{alt}(\mathfrak{P}) \geq 2$. Contudo, $\mathrm{alt}(\mathfrak{P}) < 3$, já que $\mathfrak{P} \neq \mathfrak{m} = \langle x, y, z \rangle$ ideal irrelevante associado a origem no espaço afim $\mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$. Em particular, $\dim(R_{\mathfrak{P}}) = \mathrm{alt}(\mathfrak{P}) = 2$.

Localizando a resolução 3.6 em $\mathfrak{P}$, obtemos:

$$0 \to R^2_{\mathfrak{P}} \xrightarrow{\Phi} R^3_{\mathfrak{P}} \to I_{\mathfrak{P}} \to 0, \tag{3.8}$$

onde $\Phi$ é a localização de $\varphi$ em $\mathfrak{P}$.

Passando à localização de $R$ em $\mathfrak{P}$, temos que $\mathrm{alt}(I_{\mathfrak{P}}) \leq \dim(R_{\mathfrak{P}}) = \mathrm{alt}(\mathfrak{P}) = 2$. Por hipótese, como $I$ é genericamente interseção completa, temos que $\mu(I_{\mathfrak{P}}) \leq 2$. Logo, a resolução livre 3.8 não é minimal para $I_{\mathfrak{P}}$. Consequentemente, $\mathrm{Im}(\Phi) \nsubseteq \mathfrak{P}_{\mathfrak{P}} R^3_{\mathfrak{P}}$.

Como $\dfrac{\Phi(e_1)}{1}$ e $\dfrac{\Phi(e_2)}{1}$ são geradores de $\mathrm{Im}(\Phi)$, sendo $e_1, e_2$ elementos da base canônica de $R^2$, segue que ou $\dfrac{\Phi(e_1)}{1}$ ou $\dfrac{\Phi(e_2)}{1}$ não pertence à $\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}} R^3_{\mathfrak{P}}$.

Suponha, sem perda de generalidade, que $\dfrac{\Phi(e_1)}{1} \notin \mathfrak{P}_{\mathfrak{P}} R^3_{\mathfrak{P}}$. Então,

$$\frac{\Phi(e_1)}{1} = \frac{A_1}{1}\frac{e'_1}{1} + \frac{B_1}{1}\frac{e'_2}{1} + \frac{C_1}{1}\frac{e'_3}{1} \notin \mathfrak{P}_{\mathfrak{P}} R^3_{\mathfrak{P}},$$

sendo $e'_1, e'_2, e'_3$ os elementos da base canônica de $R^3$. Donde segue que $\dfrac{A_1}{1}$ ou $\dfrac{B_1}{1}$ ou $\dfrac{C_1}{1}$ não pertence a $\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}}$. Isso significa que pelo menos um elemento entre $\dfrac{A_1}{1}, \dfrac{B_1}{1}, \dfrac{C_1}{1}$ é um elemento invertível em $R_{\mathfrak{P}}$ e, consequentemente, um elemento entre $A_1, B_1, C_1$ não pertence ao ideal $\mathfrak{P}$. Um absurdo, pois o ponto $p$ foi tomado em $V(J)$. Portanto,

$$V(J) = \varnothing. \tag{3.9}$$

Agora vamos introduzir um ideal auxiliar. Dado $f$ em $R$, polinômio de grau $d_2 - d_1$, definimos o ideal:

$$I(f) = \langle A_2 - fA_1, B_2 - fB_1, C_2 - fC_1 \rangle.$$

Mostraremos que existe uma forma $f \in R$ de grau $d_2 - d_1$ para o qual $V(I(f)) = \varnothing$ (em $\mathbb{P}^2$), em particular, $\mathrm{alt}(I(f)) = 3$. Desta forma, pelo Lema 3.1.1, teríamos que os três geradores de $I(f)$ formam uma $R$-sequência regular.

Diante disso, analisemos o caso em que $V(I(f)) \neq \varnothing$, para $f \in R$ forma de grau $d_2 - d_1$. Para cada $f \in R$ polinômio homogêneo de grau $d_2 - d_1$, considere um ponto qualquer $P_f \in V(I(f)) \subseteq \mathbb{P}^2$. Em particular, os geradores de $I(f)$ se anulam no ponto $P_f$:

$$\begin{aligned} (A_2 - fA_1)(P_f) &= A_2(P_f) - f(P_f)A_1(P_f) = 0; \\ (B_2 - fB_1)(P_f) &= B_2(P_f) - f(P_f)B_1(P_f) = 0; \\ (C_2 - fC_1)(P_f) &= C_2(P_f) - f(P_f)C_1(P_f) = 0. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Por 3.7, realizando convenientes manipulações algébricas nos geradores de $I$, podemos evidenciar a dependência de $f_1, f_2$ e $f_3$ sobre $f$:

$$\begin{array}{lllll} f_1 & = & B_1C_2 - B_2C_1 + fB_1C_1 - fB_1C_1 & = & B_1(C_2 - fC_1) - C_1(B_2 - fB_1), \\ f_2 & = & A_1C_2 - A_2C_1 + fA_1C_1 - fA_1C_1 & = & A_1(C_2 - fC_1) - C_1(A_2 - fA_1), \\ f_3 & = & -B_1A_2 + B_2A_1 + fB_1A_1 - fB_1A_1 & = & -B_1(A_2 - fA_1) + A_1(B_2 - fB_1). \end{array}$$

Avaliando o ponto $P_f$ nas equações de $f_1, f_2$ e $f_3$, como reescritas acima, obtemos que: $f_1(P_f) = 0, f_2(P_f) = 0$ e $f_3(P_f) = 0$. Donde concluímos que $P_f \in V(I)$. Isto é,

$$\text{dado } f \in R_{d_2 - d_1} \text{ tal que } V(I(f)) \neq \varnothing \text{ temos que } V(I(f)) \subset V(I), \tag{3.11}$$

onde $R_{d_2-d_1}$ denota o conjunto dos polinômios homogêneos de grau $d_2 - d_1$.

Agora, note que se $[a : b : c] \in V(I(f)) \cap V(I(g))$, sendo $f, g \in R_{d_2-d_1}$, então, $f(a,b,c) = g(a,b,c)$.

De fato, por 3.9 concluímos que $V(J) = \varnothing$. Assim, algum dos geradores de $J$ não se anula em $[a : b : c]$. Suponha que $A_2(a,b,c) \neq 0$. Pela igualdade 3.10:

$$A_2(a,b,c) - f(a,b,c)A_1(a,b,c) = 0,$$

obtemos que $A_1(a,b,c) \neq 0$. Note que o mesmo valeria para $B_2$ e $C_2$, isto é, se $B_2(a,b,c) \neq 0$ então, $B_1(a,b,c) \neq 0$ e se $C_2(a,b,c) \neq 0$ então, $C_1(a,b,c) \neq 0$. Portanto, suponha, sem perda de generalidade, que $A_1(a,b,c) \neq 0$. Mais uma vez por 3.10, isto implica que

$$\begin{array}{lll} A_2(a,b,c) - f(a,b,c)A_1(a,b,c) = 0, & \text{que é equivalente a} & f(a,b,c) = \dfrac{A_2(a,b,c)}{A_1(a,b,c)}, \\ A_2(a,b,c) - g(a,b,c)A_1(a,b,c) = 0, & \text{que é equivalente a} & g(a,b,c) = \dfrac{A_2(a,b,c)}{A_1(a,b,c)}. \end{array}$$

Logo,

$$[a : b : c] \in V(I(f)) \cap V(I(g)) \implies f(a,b,c) = g(a,b,c). \tag{3.12}$$

Finalmente, tomemos $\mathfrak{f} \in R_{d_2-d_1}$ de modo que $\mathfrak{f}$ não se anula em nenhum ponto de

$V(I)$. Suponha, por absurdo, que $V(I(\mathfrak{f})) \neq \varnothing$. Além disso, considere a seguinte sequência de polinômios:

$$\mathfrak{f}, 2\mathfrak{f}, \ldots, k\mathfrak{f}, \ldots$$

**Afirmação:** $\forall\ i \neq j$, temos que $V(I(i\mathfrak{f})) \cap V(I(j\mathfrak{f})) = \varnothing$.

De fato, suponha que a interseção seja não vazia. Em virtude de 3.12, teríamos que se $[a : b : c]$ é um ponto em $V(I(i\mathfrak{f})) \cap V(I(j\mathfrak{f}))$, então:

$$i\mathfrak{f}(a, b, c) = j\mathfrak{f}(a, b, c), \forall\ i \neq j. \tag{3.13}$$

Desde que $i \neq j$, segue que $\mathfrak{f}(a, b, c) = 0$, isto é, $[a : b : c] \in V(I(i\mathfrak{f}))$. Por outro lado, por 3.11, teríamos que $V(I(i\mathfrak{f})) \subseteq V(I)$. Consequentemente, $[a : b : c] \in V(I)$. Contradizendo a hipótese de que $\mathfrak{f}$ não se anula nos pontos de $V(I)$. Assim, $\forall\ i \neq j$, temos que $V(I(i\mathfrak{f})) \cap V(I(j\mathfrak{f})) = \varnothing$.

Como uma consequência da Afirmação, concluímos que, para cada $k \geq 1$, obtemos um ponto distinto em $V(I)$, já que $\forall\ k > 0, V(I(k\mathfrak{f})) \subseteq V(I)$, por 3.11.

Em particular, $V(I)$ possui infinitos pontos, uma contradição, visto que a dimensão da variedade $V(I)$ é descrita por

$$\dim(V(I)) = \dim\left(\frac{R}{\mathfrak{I}(V(I))}\right) - 1 = \dim\left(\frac{R}{\sqrt{I}}\right) - 1 = \dim R - \operatorname{alt}(\sqrt{I}) - 1 = 3 - 2 - 1 = 0,$$

visto que $\operatorname{alt}(\sqrt{I}) = \operatorname{alt}(I) = 2$.

Portanto, $V(I(\mathfrak{f})) = \varnothing$. Concluindo nossa demonstração, pois, pelo Lema 3.1.1, a sequência $A_2 - \mathfrak{f}A_1, B_2 - \mathfrak{f}B_1, C_2 - \mathfrak{f}C_1$ determina uma $R$-sequência regular. $\square$

**Observação 3.1.1.** A versão do Teorema 3.1.3 apresentado neste trabalho é mais geral que a proposta originalmente em [20]. Especificamente, o autor do trabalho original supõe que o ideal $I$ é genericamente interseção completa como hipótese básica à equivalência. Embora a motivação inicial para apresentação do Lema 3.1.2 derive do comentário em [20], a demonstração e os detalhes técnicos são desenvolvimentos próprios deste trabalho.

Uma particularidade da resolução livre do tipo Hilbert-Burch é que esse tipo de resolução carrega consigo a informação sobre um invariante algébrico importante: a dimensão homológica. Em síntese, dizer que um ideal é do tipo Hilbert-Burch é dizer que este ideal tem dimensão homológica menor ou igual a um. Nesse sentido, podemos finalmente apresentar um critério alternativo para determinar a liberdade de uma forma $f \in R$.

**Teorema 3.1.4.** *Sejam $R = \mathbb{C}[x, y, z]$ o anel dos polinômios sobre o corpo $\mathbb{C}$ e $f \in R$ um polinômio homogêneo. Suponha que $\operatorname{alt}(J_f) = 2$ e $\{\partial_x f, \partial_y f, \partial_z f\}$ seja um conjunto* *minimal de geradores de $J_f$. Então,*

$$f \text{ é um divisor livre e } J_f \text{ é genericamente interseção completa}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$J_f \text{ admite uma sizígia regular.}$$

*Demonstração.* Sejam $f \in R$ um polinômio homogêneo e $J_f = \langle \partial_x f, \partial_y f, \partial_z f \rangle$ o ideal Jacobiano de $f$. Se $f$ é um divisor livre, então o módulo de sizígias $\mathrm{Syz}(J_f)$ é um módulo livre. Isto significa que

$$0 \to R^n \overset{\varphi}{\to} R^3 \to R \to \frac{R}{J_f} \to 0,$$

com $R^n \simeq \mathrm{Syz}(J_f)$ e $n = \mu(\mathrm{Syz}(J_f))$, é uma resolução livre minimal para $J_f$.

Além disso, pela Proposição 1.3.3, temos que $-n+3-1=0$ o que implica que $n=2$. Logo, $J_f$ possui resolução livre do tipo Hilbert-Burch:

$$0 \to R^2 \overset{\varphi}{\to} R^3 \to R \to \frac{R}{J_f} \to 0, \tag{3.14}$$

e o resultado segue do Teorema 3.1.3, já que estamos supondo que $J_f$ é genericamente interseção completa.

Reciprocamente, se $J_f$ tem uma sizígia regular, então, $J_f$ possui resolução livre do tipo Hilbert-Burch, pelo Teorema 3.1.3. Em particular, $\mathrm{dh}(J_f) \leq 1$. Portanto, pelo Teorema 2.2.4, $f$ é um divisor livre. Além disso, $J_f$ é genericamente interseção completa pelo Lema 3.1.2. □

**Exemplo 3.1.2.** Sejam $R = \mathbb{C}[x, y, z]$ e $f = xyz \in R$. O ideal Jacobiano de $f$ é o ideal minimamente gerado pelas derivadas parciais de $f$ :

$$J_f = \langle \partial_x f,\, \partial_y f,\, \partial_z f \rangle = \langle yz,\, xz,\, xy \rangle.$$

Esse ideal é tal que $\mathrm{alt}(J_f) = 2$, pois seus primos minimais possuem altura 2, a saber, os ideais primos $\langle x, y\rangle, \langle x, z\rangle$ e $\langle z, y\rangle$. Considere a 3-upla $(-2x, y, z)$ em $R^3$, temos que:

$$-2x(yz) + y(xz) + z(xy) = 0.$$

Como $-2x$, $y$ e $z$ constituem uma sequência regular em $R$, podemos aplicar o Teorema 3.1.4 para concluir que o polinômio $f = xyz$ é um divisor livre.

**Observação 3.1.3.** É fato que existem, em $\mathbb{P}^2$, divisores livres que não possuem sizígias regulares devido ao fato de que não satisfazem a condição de ser genericamente interseção completa. Em [6, Theorem 4.1, item (iii)] os autores apresentam uma família de divisores livres em $\mathbb{P}^2$ que, para os parâmetros corretos, não possuem ideal Jacobiano do tipo linear e, portanto, não podem ser genericamente interseção completa, uma vez que há uma equivalência entre esses conceitos [18, Proposition 1.6].

Ao longo deste capítulo estamos nos concentrando no caso onde $R := \mathbb{C}[x, y, z]$. É natural o questionamento se o teorema principal deste trabalho é válido para anéis de polinômios em mais variáveis. De fato, a seguir, apresentaremos um exemplo onde o teorema não irá funcionar no ambiente $S := \mathbb{C}[x, y, z, w]$. Este exemplo consta em [20].

**Exemplo 3.1.4.** Sejam $S := \mathbb{C}[x, y, z, w]$ e $Q := xyzw(x + y + z + w) \in S$. O ideal Jacobiano de $Q$ é descrito por $J_Q = \langle \partial_x Q, \partial_y Q, \partial_z Q, \partial_w Q\rangle$, onde

$$\begin{aligned} \partial_x Q &= yzw(2x + y + z + w), \\ \partial_y Q &= xzw(x + 2y + z + w), \\ \partial_z Q &= xyw(x + y + 2z + w), \\ \partial_w Q &= xyz(x + y + z + 2w). \end{aligned} \tag{3.15}$$

Note que $\operatorname{alt}(J_Q) = 2$. Considere $(s_1, s_2, s_3, s_4) \in S^4$, onde

$$\begin{array}{rclcl} s_1 & := & 2x^2 + xy + 7xw & = & x(2x + y + 7w), \\ s_2 & := & -y^2 - 4yw & = & y(-y - 4w), \\ s_3 & := & 4xz + yz + 2z^2 + 3zw & = & z(4x + y + 2z + 3w), \\ s_4 & := & -8xw - 4zw - 3w^2 & = & w(-8x - 4z - 3w). \end{array}$$

De fato, é fácil verificar que:

$$s_1\partial_x Q + s_2\partial_y Q + s_3\partial_z Q + s_4\partial_w Q = 0,$$

o que mostra que $(s_1, s_2, s_3, s_4)$ é uma sizígia de $J_Q$. Utilizando o software de computação algébrica Macaulay2, temos que o ideal $I = \langle s_1, s_2, s_3, s_4\rangle$ tem altura igual a 4. Consequentemente, $\operatorname{grade}(I) = 4$, pois $S$ é Cohen-Macaulay. Assim, existe uma $S$-sequência regular de 4 elementos $s'_1, s'_2, s'_3, s'_4$ em $I$. Então, de acordo com a prova do Lema 1.2.2, temos que $s_1, s_2, s_3, s_4$ é uma sizígia regular sobre $J_Q$.

Contudo, se existe um polinômio $t \in S$ tal que $t \notin J_Q$ e $t \in (J_Q : \mathfrak{m})$, com $\mathfrak{m} = \langle x, y, z, w\rangle$, temos que $t\mathfrak{m} \subseteq J_Q$, logo, $\mathfrak{m} = (J_Q : t)$, isto é, $\mathfrak{m} = (\bar{0} : \bar{t})$, com $\bar{t} \in \dfrac{S}{J_Q} \setminus \{0\}$. Assim, $\mathfrak{m} \in \operatorname{Ass}\left(\dfrac{S}{J_Q}\right)$, em particular, $\operatorname{prof}\left(\dfrac{S}{J_Q}\right) = 0$.

Como $\dim(S) = 4$ e $S$ é um anel Cohen-Macaulay, pela fórmula de Auslander-Buchsbaum, discutido na observação 1.3.14, segue que:

$$\operatorname{prof}\left(\frac{S}{J_Q}\right) + \operatorname{dh}\left(\frac{S}{J_Q}\right) = \dim S.$$

Consequentemente, $\mathrm{dh}\left(\dfrac{S}{J_Q}\right) = 4$. De fato, utilizando, mais uma vez, o software de computação algébrica Macaulay2, é possível verificar que o polinômio $t = y^2zw + yz^2w + yzw^2$ é tal que $t \notin J_Q$ e $t \in (J_Q : \mathfrak{m})$. Portanto, $J_Q$ não pode ter resolução minimal do tipo Hilbert-Burch. Isto é, o ideal Jacobiano $J_Q$ possui uma sizígia regular, mas não admite resolução livre de Hilbert-Burch, em particular, $Q$ não é um divisor livre.

**Observação 3.1.5.** No Exemplo 3.1.4 contamos com o auxílio do software computacional Macaulay2. No Apêndice A é possível encontrar os códigos utilizados na resolução do exemplo em questão.

## 3.2 Aplicações

Nessa seção, apresentaremos outras aplicações na temática dos objetos centrais neste estudo. Os resultados apresentados nessa seção são propostos por Tohaneanu em [20].

Ainda no ambiente introduzido neste capítulo, seja $R = \mathbb{C}[x, y, z]$, anel de polinômios standard graduado e $f \in R$ um polinômio homogêneo. Podemos considerar o módulo das $\mathbb{C}$-derivações, $\mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(R)$, como um $R$-módulo graduado: uma $\mathbb{C}$-derivação $\theta = A\partial_x + B\partial_y + C\partial_z$ é *homogênea de grau d* se $\mathrm{grau}(A) = \mathrm{grau}(B) = \mathrm{grau}(C) = d$.

Agora vamos introduzir uma nomenclatura auxiliar. Se $(A, B, C) \in R^3$ é uma sizígia do ideal jacobiano de $f$, descrito por $J_f = \langle \partial_x f, \partial_y f, \partial_z f \rangle$, então, a derivação $\theta$, dada por

$$\theta = A\partial_x + B\partial_y + C\partial_z,$$

é uma derivação em $\mathrm{Derlog}(f)$, uma vez que $\theta(f) = A\partial_x f + B\partial_y f + C\partial_z f = 0 = 0f$. A derivação $\theta$ é denominada *derivação logarítmica especial*. Se $A, B, C$ é uma $R$-sequência regular com $\mathrm{grau}(A) = \mathrm{grau}(B) = \mathrm{grau}(C) = d$, então a $\theta$ daremos o nome de *derivação especial regular* de grau $d$.

Os resultados que seguem estão no contexto onde $F$ define um arranjo de hipersuperfícies (em particular, um arranjo de hiperplanos), isto é, quando $F$ é definido como um produto de formas irredutíveis. Nosso primeiro resultado apresenta uma relação entre o grau mínimo das sizígias de $J_F$ e o grau dos geradores do ideal radical de $J_F$.

**Proposição 3.2.1.** *Sejam $f_1, \ldots, f_m \in R$ polinômios homogêneos irredutíveis relativamente primos entre si e $F := f_1 \ldots f_m$. Suponha que as hipersuperfícies algébricas definidas por $f_1, \ldots, f_m$ interceptem-se transversalmente (duas a duas) e que $V(J_{f_i}) = \emptyset$, para todo $i = 1, \ldots, m$.*

*Denote o grau mínimo das sizígias de $J_F$ por $\beta(J_F)$ e o grau mínimo dos geradores de $\sqrt{J_F}$ por $\alpha(\sqrt{J_F})$. Então,*

$$\alpha(\sqrt{J_F}) \leq \beta(J_F) + 1.$$

*Demonstração.* Seja $(A, B, C) \in R^3$ uma sizígia de $J_F$ de grau mínimo, $\beta(J_F)$. Considere a derivação especial

$$\theta = A\partial_x + B\partial_y + C\partial_z \in \mathrm{Derlog}(F).$$

Como $F = f_1 \cdots f_m$, com $f_1, \ldots, f_m$ formas irredutíveis, então

$$\begin{aligned}\theta(F) = A\partial_x F + B\partial_y F + C\partial_z F &= (A\partial_x f_1 + B\partial_y f_1 + C\partial_z f_1) f_2 \cdots f_m + \cdots + \\ &+ (A\partial_x f_i + B\partial_y f_i + C\partial_z f_i) \prod_{j \neq i}^{m} f_j + \cdots + \\ &+ (A\partial_x f_m + B\partial_y f_m + C\partial_z f_m) f_1 \cdots f_{m-1} \\ &= \sum_{i=1}^{m} (A\partial_x f_i + B\partial_y f_i + C\partial_z f_i) \prod_{j \neq i}^{m} f_j.\end{aligned}$$

Desde que $(A, B, C)$ é uma sizígia sobre $J_F = \langle \partial_x F, \partial_y F, \partial_z F \rangle$, temos que $A\partial_x F + B\partial_y F + C\partial_z F = 0$. Dessa forma,

$$\sum_{i=1}^{m} (A\partial_x f_i + B\partial_y f_i + C\partial_z f_i) \prod_{j \neq i}^{m} f_j = 0. \tag{3.16}$$

Como $\theta(f_i) = A\partial_x f_i + B\partial_y f_i + C\partial_z f_i$, segue que, para todo $j \neq i$,

$$\begin{aligned}\theta(f_i) \prod_{j \neq i}^{m} f_j = &- \sum_{j=1}^{i-1} (A\partial_x f_j + B\partial_y f_j + C\partial_z f_j) \prod_{k \neq j}^{m} f_k - \\ &- \sum_{j=i+1}^{m} (A\partial_x f_j + B\partial_y f_j + C\partial_z f_j) \prod_{k \neq j}^{m} f_k.\end{aligned}$$

Mais ainda, podemos destacar $f_i$ na expressão acima:

$$\begin{aligned}\theta(f_i) \prod_{j \neq i}^{m} f_j = f_i \Bigg( &- \sum_{j=1}^{i-1} (A\partial_x f_j + B\partial_y f_j + C\partial_z f_j) \prod_{k \neq j; k \neq i}^{m} f_k - \\ &- \sum_{j=i+1}^{m} (A\partial_x f_j + B\partial_y f_j + C\partial_z f_j) \prod_{k \neq j; k \neq i}^{m} f_k \Bigg).\end{aligned}$$

Como $f_i$ é irredutível, e $\mathrm{mdc}(f_i, f_j) = 1$, para $j \neq i$, segue que, para cada $i = 1, \ldots, m$:

$$\theta(f_i) = A\partial_x f_i + B\partial_y f_i + C\partial_z f_i = f_i g_i, \text{ para algum } g_i \in R. \tag{3.17}$$

Note que $V(J_F) \neq \emptyset$, visto que $\mathrm{alt}(J_F) \leq 2$, pois $J_F \subseteq \langle f_i, f_j \rangle$. Assim, considere um ponto $P = [a : b : c] \in V(J_F) \subseteq \mathbb{P}^2$.

**Afirmação:** $P \in V(f_i) \cap V(f_j)$, para algum par $i, j$ com $i \neq j$.

De fato, como $F = f_1 \dots f_m \in J_F$ e $P \in V(J_F)$, segue que $0 = F(P) = f_1(P) \cdots f_m(P)$. Daí, existe $i$ tal que $f_i(P) = 0$. Suponha, por absurdo, que para todo $j \neq i$, temos $P \notin V(f_j)$, isto é, $f_j(P) \neq 0$. Note ainda que podemos expressar a derivada parcial de $F$ com respeito a $x$ como segue:

$$\begin{aligned} \partial_x F &= \partial_x(f_1)\prod_{j=2}^{m} f_j + \cdots + \partial_x(f_i)\prod_{j=1, j\neq i}^{m} f_j + \cdots + \partial_x(f_m)\prod_{j=1}^{m-1} f_j \\ &= \partial_x(f_i)\prod_{j=1, j\neq i}^{m} f_j + f_i\left(\sum_{k=1, k\neq i}^{m} \partial_x(f_k)\prod_{j=1, j\neq k, i}^{m} f_j\right). \end{aligned}$$

Avaliando a expressão anterior no ponto $P$ teríamos:

$$\partial_x F(P) = \partial_x(f_i)(P)\left(\prod_{j=1, j\neq i}^{m} f_j\right)(P) + (f_i)(P)\left(\sum_{k=1, k\neq i}^{m} \partial_x(f_k)\prod_{j=1, j\neq k, i}^{m} f_j\right)(P),$$

donde segue $0 = \partial_x(f_i)(P)\left(\prod_{j=1, j\neq i}^{m} f_j\right)(P)$, o que implicaria que $\partial_x(f_i)(P) = 0$, já que $f_j(P) \neq 0$ para todo $j \neq i$. Reproduzindo o mesmo argumento para as variáveis $y, z$, obteríamos $\partial_y(f_i)(P) = \partial_z(f_i)(P) = 0$, o que seria um absurdo, pois $V(J_{f_i}) = \emptyset$. Assim, $P \in V(f_i) \cap V(f_j)$, para algum par $i, j$ com $i \neq j$.

Dado $P \in V(J_F)$, duas situações podem acontecer: $P \in V(A, B, C)$ ou $P \notin V(A, B, C)$. Se $P \notin V(A, B, C)$, então, por 3.17, temos

$$A(P)\partial_x f_i(P) + B(P)\partial_y f_i(P) + C(P)\partial_z f_i(P) = f_i(P)g_i(P) = 0, \tag{3.18}$$

já que $P \in V(f_i)$, para algum $i = 1, \dots, m$.

Diante do exposto, em 3.18 temos que o ponto $P' = [A(P) : B(P) : C(P)]$ deve pertencer ao espaço tangente à variedade $V(f_i)$ em $P$. Desde que as hipersuperfícies $V(f_i)$ definem curvas projetivas em $\mathbb{P}^2$, temos que $P'$ pertence a reta $L_i$ tangente à $V(f_i)$. Analogamente, concluímos que $P'$ pertence a reta tangente $L_j$ à $V(f_j)$, já que $P \in V(f_i) \cap V(f_j)$ (pela afirmação).

Por hipótese, as hipersuperfícies se interceptam transversalmente, isto é, as retas $L_i$ e $L_j$ possuem inclinações diferentes, logo $L_i \cap L_j = \{P\}$, uma vez que $P \in V(f_i) \cap V(f_j)$. Dessa forma, temos uma única possibilidade: $P' = P$, isto é:

$$[a : b : c] = P = P' = [A(P) : B(P) : C(P)].$$

Agora, consideremos o ideal

$$I^{(A,B,C)} = (yA - xB, zA - xC, zB - yC).$$

Avaliando $P$ nos geradores de $I^{(A,B,C)}$, obtemos:

$$\begin{aligned}(yA - xB)(P) &= bA(P) - aB(P) = 0,\\ (zA - xC)(P) &= cA(P) - aC(P) = 0,\\ (zB - yC)(P) &= cB(P) - bC(P) = 0.\end{aligned}$$

Donde segue que $P \in V(I^{(A,B,C)})$.

Por outro lado, se $P \in V(A, B, C)$, então, como $I^{(A,B,C)} \subseteq \langle A, B, C\rangle$, é imediato que $P \in V(I^{(A,B,C)})$.

Em ambos os casos, concluímos que se $P$ é um ponto em $V(J_F)$, então $P \in V(I^{(A,B,C)})$. Isto significa que $V(J_F) \subseteq V(I^{(A,B,C)})$. Pelo Teorema dos Zeros de Hilbert, temos que $I^{(A,B,C)} \subseteq \sqrt{J_F}$. Desde que $I^{(A,B,C)}$ é um ideal equigerado em grau $\beta(J_F)+1$, o resultado segue:

$$\alpha(\sqrt{J_F}) \leq \beta(J_F) + 1.$$

□

A proposição a seguir estabelece uma cota superior para a multiplicidade do ideal radical do ideal jacobiano associado a um divisor livre definido por um arranjo de hiperplanos.

**Proposição 3.2.2.** *Sejam $L_1, \ldots, L_n \in R$ formas lineares relativamente primas entre si e $Q = L_1 \ldots L_n$. Suponha que $Q$ é um divisor livre que admite uma derivação logarítmica especial regular de grau $d \geq 2$. Então,*

$$e(R/\sqrt{J_Q}) \leq d^2 + d + 1.$$

*Demonstração.* A argumentação desta prova é similar a feita em Proposição 3.2.1. Seja $\theta = A\partial_x + B\partial_y + C\partial_z$, uma derivação logarítmica especial regular de $Q$ de grau $d$. Isto é, $(A, B, C)$ é uma sizígia de $J_Q$ tal que $\text{grau}(A) = \text{grau}(B) = \text{grau}(C) = d$, com $d \geq 2$ e $A, B, C$ forma uma sequência regular. Desde que cada $L_i$ é uma forma linear em $R$, podemos escrever $L_i = a_i x + b_i y + c_i z$, com $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{C}, \forall\ i = 1, \ldots, n$.

Aplicando $\theta$ em $Q = L_1 \cdots L_n$, considerando que $(A, B, C)$ é uma sizígia regular de $J_Q$, obtemos:

$$\theta(Q) = A\partial_x Q + B\partial_y Q + C\partial_z Q = \sum_{k=1}^{n} (A\partial_x L_k + B\partial_y L_k + C\partial_z L_k) \prod_{j\neq k}^{n} L_j = 0.$$

Como $\partial_x L_k = a_k,\ \partial_y L_k = b_k,\ \partial_z L_k = c_k$, temos que

$$\theta(Q) = \sum_{k=1}^{n}(a_k A + b_k B + c_k C)\prod_{j\neq k}^{n} L_j = 0.$$

Assim, para cada $i$, podemos reescrever de forma conveniente esta igualdade:

$$\begin{aligned}(a_i A + b_i B + c_i C)\prod_{j\neq i}^{n} L_j = L_i\Bigg( &-\sum_{k=1}^{i-1}(a_k A + b_k B + c_k C)\prod_{j\neq k,i}^{n} L_j - \\ &- \sum_{k=i+1}^{n}(a_k A + b_k B + c_k C)\prod_{j\neq k,i}^{n} L_j\Bigg).\end{aligned}$$

Como $L_i$ é uma forma de grau 1 e $\mathrm{mdc}(L_i, L_j) = 1$, temos que

$$a_i A + b_i B + c_i C = L_i S_i, \text{ para algum } S_i \in R, \forall\ i = 1, \ldots, n. \tag{3.19}$$

**Afirmação**: Se $P = [a : b : c] \in V(J_Q)$, então $P \in V(L_i) \cap V(L_j)$, para algum para $i, j$ com $i \neq j$.

Com efeito, como $Q = L_1 \cdots L_n \in J_Q$ e $P \in V(J_Q)$, segue que $0 = Q(P) = L_1(P) \cdots L_m(P)$. Logo, $L_i(P) = 0$ para algum $i$. Suponha, por absurdo, que para todo $j \neq i$, temos $P \notin V(L_j)$. Note que

$$\begin{aligned}\partial_x Q &= \partial_x(L_1)\prod_{j=2}^{m} L_j + \cdots + \partial_x(L_i)\prod_{j=1,j\neq i}^{m} L_j + \cdots + \partial_x(L_m)\prod_{j=1}^{m-1} L_j \\ &= \partial_x(L_i)\prod_{j=1,j\neq i}^{m} L_j + L_i\left(\sum_{k=1,k\neq i}^{m}\partial_x(L_k)\prod_{j=1,j\neq k,i}^{m} L_j\right).\end{aligned}$$

Avaliando a expressão anterior no ponto $P$ teríamos:

$$\partial_x Q(P) = \partial_x(L_i)(P)\left(\prod_{j=1,j\neq i}^{m} L_j\right)(P) + (L_i)(P)\left(\sum_{k=1,k\neq i}^{m}\partial_x(L_k)\prod_{j=1,j\neq k,i}^{m} L_j\right)(P),$$

donde segue $0 = \partial_x(L_i)(P)\left(\prod_{j=1,j\neq i}^{m} L_j\right)(P)$, o que implicaria que $a_i = \partial_x(L_i)(P) = 0$. De maneira análoga, concluímos também que $b_i = \partial_y(L_i)(P) = 0$ e $c_i = \partial_z(L_i)(P) = 0$, ou seja, $(a_i, b_i, c_i) = (0, 0, 0)$, um absurdo. Assim, $P \in V(L_i) \cap V(L_j)$, para algum par $i, j$ com $i \neq j$.

Análogo à proposição anterior, temos duas opções. Se $P \notin V(A, B, C)$, avaliamos o ponto $P$ na equação 3.19, obtemos

$$a_iA(P) + b_iB(P) + c_iC(P) = 0 = a_jA(P) + b_jB(P) + c_jC(P),$$

pois $P \in V(L_i) \cap V(L_j)$. Dessa forma, o ponto $[A(P) : B(P) : C(P)] \in V(L_i) \cap V(L_j)$.

Como a interseção entre as retas projetivas $V(L_i)$ e $V(L_j)$ define um ponto projetivo, pela afirmação segue que $V(L_i) \cap V(L_j) = \{P\}$, logo, $[A(P) : B(P) : C(P)] = P = [a : b : c]$. Assim, $A(P) = ka, B(P) = kb$ e $C(P) = kc$ para algum $k \in \mathbb{C}^*$.

Considere o ideal $I^{(A,B,C)} = (yA - xB, zA - xC, zB - yC)$. Avaliando $P$ nos geradores de $I^{(A,B,C)}$:

$$\begin{aligned} (yA - xB)(P) &= bA(P) - aB(P) = 0, \\ (yA - xC)(P) &= cA(P) - aC(P) = 0, \\ (yB - yC)(P) &= cB(P) - bC(P) = 0. \end{aligned}$$

Donde $P \in V(I^{(A,B,C)})$. Se $P \in V(A, B, C)$, então $P \in V(I^{(A,B,C)})$, pois $I^{(A,B,C)} \subseteq (A, B, C)$. Concluímos que

$$V(J_Q) \subseteq V(I^{(A,B,C)}). \tag{3.20}$$

Nossa estratégia consiste em utilizar o Teorema 3.1.3 para inferir uma cota superior para $e(I^{(A,B,C)})$. Assim, precisamos mostrar que $I^{(A,B,C)}$ se encaixa nas hipóteses do teorema.

Primeiro mostraremos que $I^{(A,B,C)}$ é minimamente gerado por três elementos. Sem perda de generalidade, suponha, por absurdo, que existem $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tais que:

$$yA - xB = \alpha(zA - xC) + \beta(zB - yC).$$

Reorganizando a igualdade anterior, obtemos:

$$(y - \alpha z)A + (-x - \beta z)B + (\beta y + \alpha x)C = 0, \tag{3.21}$$

uma sizígia de grau 1 do ideal $\langle A, B, C\rangle$, um absurdo, visto que $A, B, C$ é uma $R$-sequência regular de elementos homogêneos de mesmo grau $d \geq 2$, por hipótese. Logo, o grau das sizígias de $\langle A, B, C\rangle$ deve ser maior ou igual que $d \geq 2$. Com efeito, se $(f, g, h)$ é uma sizígia do ideal $\langle A, B, C\rangle$, então $fA + gB + hC = 0$, consequetemente, $hC = -fA - gB$ e, pela regularidade de $A, B$ e $C$, tem-se que $h \in \langle A, B\rangle$. Então, $\text{grau}(h) \geq d$. O mesmo é válido para $f$ e $g$. Portanto, $I^{(A,B,C)}$ deve ser minimamente gerado por três elementos.

Em seguida, devemos mostrar que $\text{alt}(I^{(A,B,C)}) = 2$. Uma vez que $I^{(A,B,C)} \subseteq \sqrt{J_Q}$, pela equação 3.20, e que $\text{alt}(J_Q) \leq 2$, visto que $J_Q \subseteq \langle L_i, L_j\rangle$, então $\text{alt}(I^{(A,B,C)}) \leq 2$. Suponha, por absurdo, $\text{alt}(I^{(A,B,C)}) = 1$.

Como $R$ é um domínio de fatoração única, os primos minimais de $I^{(A,B,C)}$ de altura 1 são ideais principais. Daí, existe um polinômio homogêneo $D \in R$ que divide os geradores de $I^{(A,B,C)}$. Ou seja,

$$\begin{aligned} fD &= yA - xB, \\ gD &= zA - xC, \\ hD &= zB - yC. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Para certos polinômios $f, g, h \in R$ tais que $\mathrm{alt}(f, g, h) = 2$. Note que, se $f, g, h$ não cumprem a condição de altura 2, podemos iterar esse processo.

Multiplicando as equações 3.22 por $z, -y, x$, respectivamente, obtemos

$$\begin{aligned} zfD &= zyA - zxB, \\ -ygD &= -yzA + yxC, \\ xhD &= xzB - xyC. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Somando estas equações, tem-se

$$0 = zfD - ygD + xhD = D(zf - yg + xh), \text{ consequentemente, } zf - yg + xh = 0.$$

E, da regularidade da sequência $z, -y, x$, concluímos que $f = yv_1 + xv_2$, $g = zv_1 + xv_3$ e $h = yv_3 - zv_2$, para certos $v_1, v_2, v_3 \in R$. Donde segue que:

$$\begin{aligned} yA - xB = (yv_1 + xv_2)D &\iff y(A - v_1D) - x(B + v_2D) = 0; \\ zA - xC = (zv_1 + xv_3)D &\iff z(A - v_1D) - x(C + v_3D) = 0; \\ zB - yC = (yv_3 - zv_2)D &\iff z(B + v_2D) - y(C + v_3D) = 0. \end{aligned}$$

Dessa forma, $y(A - v_1D) = x(B + v_2D)$. Logo, existe $t \in R$ tal que $A - v_1D = tx$. Então, $yxt = x(B + v_2D)$, o que implica que $B + v_2D = ty$ e $C + v_3D = tz$. Isto é, $\langle A, B, C\rangle \subseteq \langle D, t\rangle$. Um absurdo, já que $\mathrm{alt}(A, B, C) = 3$ e $\mathrm{alt}(D, t) \leq 2$. Portanto, $\mathrm{alt}(I^{(A,B,C)}) = 2$.

Note que por 3.23, a $R$-sequência regular $z, -y, x$ é, na verdade, uma sizígia de $I^{(A,B,C)}$. E, do que foi discutido anteriormente, tem-se, pelo Teorema 3.1.3, que $I^{(A,B,C)}$ é do tipo Hilbert-Burch com resolução livre minimal:

$$0 \to R^2 \to R^3 \to I^{(A,B,C)} \to 0.$$

Desde que $\mathrm{grau}(A) = \mathrm{grau}(B) = \mathrm{grau}(C) = d$, e $I^{(A,B,C)}$ admite uma sizígia linear, produzimos a seguinte resolução graduada:

$$0 \to R(-(d+2)) \oplus R(-(2d+1)) \to R^3(-(d+1)) \to R \to R/I^{(A,B,C)} \to 0. \quad (3.24)$$

Com o auxílio do teorema 1.5.1, e da resolução graduada 3.24, temos que a série de Hilbert de $I^{(A,B,C)}$ é dada por:

$$H_{I^{(A,B,C)}}(t) = (1 - 3t^{d+1} + t^{2d+1} + t^{d+2})\frac{1}{(1-t)^3}. \quad (3.25)$$

Além disso, $\dim(R/I^{(A,B,C)}) = \dim R - \operatorname{alt}(I^{(A,B,C)}) = 1$. Então, pela Proposição 1.5.2, calculamos a multiplicidade de $R/I^{(A,B,C)}$:

$$e(R/I^{(A,B,C)}) = \left[\frac{(-1)^{2-0}}{(2-0)!}\frac{\partial^{2-0} S_{I^{(A,B,C)}}(t)}{\partial t^{2-0}}\right](1) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 S_{I^{(A,B,C)}}(t)}{\partial t^2}\right](1),$$

onde

$$S_{I^{(A,B,C)}}(t) = 1 - 3t^{d+1} + t^{2d+1} + t^{d+2}.$$

Calculando as derivadas de $S_{I^{(A,B,C)}}(t)$ com respeito a $t$, obtemos:

$$\begin{aligned} S'_{I^{(A,B,C)}}(t) &= -3(d+1)t^d + (2d+1)t^{2d} + (d+2)t^{d+1}, \\ S''_{I^{(A,B,C)}}(t) &= -3(d+1)dt^{d-1} + 2d(2d+1)t^{2d-1} + (d+1)(d+2)t^d, \\ S''_{I^{(A,B,C)}}(1) &= 2(d^2+d+1). \end{aligned}$$

Então, $e(R/I^{(A,B,C)}) = d^2 + d + 1$.

Finalmente, como consequência de 3.20, obtemos a desigualdade desejada:

$$e(R/\sqrt{J_Q}) \leq d^2 + d + 1.$$

□

# Apêndice A

# Macaulay2

O Macaulay2 é um sistema computacional voltado para Álgebra Comutativa e Geometria Algébrica, muito utilizado por pesquisadores e estudantes para realizar cálculos simbólicos com ideais, anéis e módulos. Ele permite estudar características dessas estruturas, como dimensões e resoluções livres, de forma eficiente, além de oferecer uma linguagem de programação própria para automatizar tarefas.

Nesse trabalho, o Macaulay2 desempenha um papel decisivo na argumentação do Exemplo 3.1.4.

A fim de calcular a altura do ideal $I = \langle 2x^2 + xy + 7xw, -y^2 - 4yw, 4xz + yz + 2z^2 + 3zw, -8xw - 4zw - 3w^2 \rangle$, no Exemplo 3.1.4, usamos o seguinte código:

```
i1 : R=QQ[x,y,z,w]
o1 = R
o1 : PolynomialRing

i2 : I=ideal(2*x*x + x*y + 7*x*w, -y*y-4*y*w, 4*x*z + y*z + 2*z*z+3*z*w,
-8*x*w-4*z*w-3*w*w)
o2 = ideal(2x2+xy+7xw,-y2-4yw,4xz+yz+2z2+3zw,-8xw-4zw-3w2)
o2 : Ideal of R

i3 : dim R - dim(R/I)
o3 = 4
```

Para encontrar elementos dentro de um ideal construído, basta indexar, com o comando "_[índice]", o nome do ideal. Deixamos claro que, para esse software, a indexação começa em 0. Assim, para encontrar o polinômio $t = y^2zw + yz^2w + yzw^2$ no Exemplo 3.1.4, utilizamos o código abaixo:

```
i1 : R=QQ[x,y,z,w]
```

```
o1 = R
o1 : PolynomialRing

i2 : m= ideal(x,y,z,w)
o2 = ideal(x,y,z,w)
o2 : Ideal of R

i3 : Jq=ideal(y*z*w*(2*x + y + z + w), x*z*w*(x + 2*y + z + w),
x*y*w*(x + y + 2*z + w), x*y*z*(x + y + z + 2*w))
o3 = ideal(2xyzw+y2zw+yz2w+yzw2,x2zw+2xyzw+xz2w+xzw2,x2yw+xy2w+2xyzw+xyw2,
x2yz+xy2z+xyz2+2xyzw)
o3 : Ideal of R

i4 : condutor= Jq:m
o4 = ideal(y2zw+yz2w+yzw2,xyzw,x2zw+xz2w+xzw2,x2yw+xy2w+xyw2,
x2yz+xy2z+xyz2)
o4 : Ideal of R

i5 : condutor_0
o5 = y2zw+yz2w+yzw2
o5 : R
```

Um outro recurso de grande utilidade nesse trabalho é a possibilidade de se calcular resoluções livres através do Macaulay2. Para tal, utilizamos o código "res ". Este foi utilizado tanto no Exemplo 1.3.4 quanto no Exemplo 2.2.12.

Exemplo 1.3.4:

```
i1 : R=QQ[x,y,z,w]
o1 = R
o1 : PolynomialRing

i2 : m=ideal(x,y,z)
o2 = ideal(x,y,z)
o2 : Ideal of R

i3 : res m
o3 =
```

$$R^1 \xleftarrow{(x\ y\ z)} R^3 \xleftarrow{\begin{pmatrix} -y & -z & 0 \\ x & 0 & -z \\ 0 & x & y \end{pmatrix}} R^3 \xleftarrow{\begin{pmatrix} z \\ -y \\ x \end{pmatrix}} R^1 \leftarrow 0$$

```
o3 : ChainComplex
```

Exemplo 2.2.12:

```
i1 : R=QQ[x,y,z]
o1 = R
o1 : PolynomialRing

i2 : g=x*y*z*(x-y)*(y-z)*(z-x)
o2 = -x3y2z+x2y3z+x3yz2-xy3z2-x2yz3+xy2z3
o2: R

i3 : Jg=ideal (diff(x,g), diff(y,g), diff(z,g))
o3 = ideal(-3x2y2z+2xy3z+3x2yz2-y3z2-2xyz3+y2z3,-2x3yz+3x2y2z+x3z2-3xy2z2
-x2z3+2xyz3, -x3y2+x2y3+2x3yz-2xy3z-3x2yz2+3xy2z2)
o3 : Ideal of R

i4 : res Jg
```

# Referências Bibliográficas


[1] Andrade, J.F.; Simis, A., *Tópicos de Álgebra Comutativa.*Instituto de Matemática Pura e Aplicada-IMPA,1981.

[2] Arumugam, M., *A theorem of homological algebra: the Hilbert-Burch theorem*. Bachelor's Thesis. School of Mathematics, The University of New South Wales, 2005.

[3] Bruns, W., Herzog, J., *Cohen-Macaulay Rings*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge Unniversity Press, 1993.

[4] Bruns, W., Vetter, U., *Determinantal rings*. Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[5] Buchweitz, R. O., Conca, A., *New free divisors from old.* Journal of Commutative Algebra, **5**, p. 17-47, 2012.

[6] Burity, R., Miranda-Neto, C. B., Ramos, Z., *Free divisors, blowup algebras of Jacobian ideals, and maximal analytic spread*. Indiana Univ. Math. J., to appear, 2026.

[7] Chachapoyas Siesquén, N. C., *Singularidades Simples de Curvas Determinantais*. Dissertação de Mestrado. ICMC, USP, 2010.

[8] Cox, D.; Schenck, H. *Local Complete Intersections in $P^2$ and Koszul Syzygies*. Proceedings of the American Mathematical Society **131**, p. 2007-2014, 2001.

[9] Dimca, A., Sticlaru, G., *Ramblings on the freeness of affine hypersurfaces*. ArXiv, arXiv:2106.15501, 2021.

[10] Eisenbud, D., *Commutative algebra: with a view toward algebraic geometry*. Springer Science & Business Media, New York, 2013.

[11] Grayson, D. R., Stillman, M. E., *Macaulay2, a software system for research in algebraic geometry*. Disponível em `http://www2.macaulay2.com`.

[12] Kunz, E., *Introduction to commutative algebra and algebraic geometry*. Birkhauser, Boston, 1985.

[13] Matsumura, H.,*Commutative Ring Theory*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 1986.

[14] Miranda Neto, C. B., *Teoria dos Módulos Idealizadores Diferenciais*. Tese de Doutorado. Departamento de Matemática, UFPE, 2006.

[15] Saito, K., *Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields*. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math **27**, p. 265–291, 1980.

[16] Sharp, R. Y., *Steps in Commutative Algebra.* 2nd ed. Cambridge University Press, 2001.

[17] Simis, A., *Commutative Algebra.* The Gruyter, 2020.

[18] Simis, A., Tohaneanu, S. O., *Homology of homogeneous divisors.* Israel J. Math., **200**, p. 449–487, 2014.

[19] Terao, H.,*Arrangements of hyperplanes and their freeness I, II.* J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. Math. **27**, p. 293-320, 1980.

[20] Tohaneanu, S. O., *On Freeness of Divisors on* $\mathbb{P}^2$. Communications in Algebra **41**, p. 2916–2932, 2012.