



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Antonio Lucas Araujo Moreira

**Um Estudo do Desvio da Luz no Formalismo de Campo Forte**

João Pessoa – PB  
2023



## UM ESTUDO DO DESVIO DA LUZ NO FORMALISMO DE CAMPO FORTE

Antonio Lucas Araujo Moreira

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física (CCEN - PPGF) da Universidade Federal da Paraíba para a obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: prof. José Roberto Soares do Nascimento

Co-orientador: prof. Paulo José Ferreira Porfírio da Silva

João Pessoa – PB

2023

**Catálogo na publicação**  
**Seção de Catalogação e Classificação**

M838e Moreira, Antonio Lucas Araujo.

Um estudo do desvio da luz no formalismo de campo forte / Antonio Lucas Araujo Moreira. - João Pessoa, 2023.

53 f. : il.

Orientação: José Roberto Soares do Nascimento.

Coorientação: Paulo José Ferreira Porfírio da Silva.

Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Relatividade geral. 2. Desvio da luz. 3. Lentes gravitacionais. I. Nascimento, José Roberto Soares do. II. Silva, Paulo José Ferreira Porfírio da. III. Título.

UFPB/BC


CDU 530.12(043)




Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
**Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Física**

Ata da Sessão Pública da Defesa de dissertação de **Mestrado** do aluno **Antonio Lucas Araujo Moreira**, candidato ao Título de Mestre em Física na Área de Concentração Física de Partículas Elementares e Campos.


Aos vinte e seis dias do mês de julho do ano de dois mil e vinte e três, às 14:00, nas dependências do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal da Paraíba, reuniram-se os membros da Banca Examinadora constituída para avaliar a dissertação de Mestrado, na área de Física de Partículas Elementares e Campos, de **Antonio Lucas Araujo Moreira**. A banca foi composta pelos(as) professores(as) doutores(as): José Roberto Soares do Nascimento (UFPB), orientador e presidente da banca examinadora, Paulo José Ferreira Porfírio da Silva (UFPB), coorientador, Alberto Petrov (UFPB) e André Carlos Lehum (UFPA). Dando início aos trabalhos, o Prof. José Roberto Soares do Nascimento comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a palavra para o candidato para que o mesmo fizesse, oralmente, a exposição da pesquisa de dissertação intitulada “*Um Estudo do Desvio da Luz no Formalismo de Campo Forte*”. Concluída a exposição, o candidato foi arguido pela Banca Examinadora, que emitiu o parecer “**aprovado**”. Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba expedir o respectivo diploma de Mestre em Física na forma da lei. E para constar, Danilo Wilson Lemos Menezes, Técnico em Assuntos Educacionais, redigiu a presente ata que vai assinada pelos membros da Banca Examinadora. João Pessoa, Paraíba, **26 de julho de 2023**.

Documento assinado digitalmente  
 JOSE ROBERTO SOARES DO NASCIMENTO  
Data: 16/11/2023 14:16:57-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>


Prof. Dr. José Roberto Soares do Nascimento  
Orientador - PPGF/UFPB

Documento assinado digitalmente  
 ALBERT PETROV  
Data: 10/11/2023 12:12:48-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Alberto Petrov  
PPGF/UFPB

Documento assinado digitalmente  
 PAULO JOSE FERREIRA PORFIRIO DA SILVA  
Data: 10/11/2023 11:48:59-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Paulo José Ferreira Porfírio da Silva  
Coorientador - UFPB

Documento assinado digitalmente  
 ANDRE CARLOS LEHUM  
Data: 10/11/2023 11:35:43-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. André Carlos Lehum  
UFPA

# Agradecimentos

Agradeço a minha mãe, Ana, meu pai, Silvio e minha irmã, Livia, por todo apoio e confiança que depositaram em mim.

Sou grato à CAPES, pelo sustento que me possibilitou seguir com os estudos.

Muito obrigado a meu orientador, Zé Roberto e meu coorientador, Paulo, por me mostrarem o caminho para uma carreira acadêmica brilhante.

E minha gratidão também aos amigos que fiz no mestrado, Albérico, Erinaldo, Felipe, Gislaine, Isaiane, João Leno, Mylle, Pedro, Ramires, Rose *et al.*, pelas conversas científicas e risadas acadêmicas.

# Resumo

Nesta dissertação, calculamos o desvio da luz usando o formalismo de campo forte e o aplicamos no estudo das lentes gravitacionais. Este formalismo corresponde ao limite em que a luz se aproxima da esfera de fótons, onde as geodésicas nulas definem órbitas circulares. Neste limite, o parâmetro de impacto da trajetória do fóton tende ao parâmetro de impacto crítico, abaixo do qual o fóton cai no horizonte de eventos. Supomos inicialmente uma métrica estática, esfericamente simétrica e assintoticamente plana e depois aplicamos o formalismo às métricas de Schwarzschild, de Reissner-Nordström e de *black-bounce*. No campo forte, a integral do desvio da luz diverge, então extraímos a parte divergente e expressamos o resultado através de alguns parâmetros. Por fim, definimos observáveis no contexto das lentes gravitacionais para distinguir entre as métricas a partir de dados experimentais futuros.

**Palavras-chave:** Relatividade Geral. Desvio da Luz. Lentes Gravitacionais.

# Abstract

In this master thesis, we work out light deflection using the strong field approach and apply the results in the study of gravitational lensing. This formalism becomes useful when the light gets close to a photon sphere, where null geodesics trace circular orbits. In this limit, the impact parameter of the photon approaches the critical impact parameter, and if it is less than that the photon falls into the event horizon. We start assuming a static, spherically symmetric and asymptotically flat metric and then we apply this formalism to the Schwarzschild, Reissner-Nordström and black-bounce metrics. In the strong field limit, the integral for the light deflection diverges, so that we have to extract the divergent term and express the result in terms of some parameters. Ultimately, we define observables in the context of gravitational lensing with the purpose of distinguishing between those metrics from future experimental data.

**Keywords:** General Relativity. Light Deflection. Gravitational Lensing.

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Precessão do periélio de Mercúrio . . . . .	6
Figura 2 – Elevador acelerado no espaço . . . . .	8
Figura 3 – Elevador em repouso na Terra . . . . .	8
Figura 4 – Potencial efetivo na métrica de Schwarzschild . . . . .	19
Figura 5 – Desvio da luz . . . . .	20
Figura 6 – Geodésicas com $r_0 \approx r_m$ . . . . .	27
Figura 7 – Configuração geométrica da fonte (S), da imagem (I), do observador (O) e da lente (L) . . . . .	35



# Sumário

1	INTRODUÇÃO . . . . .	1
2	RELATIVIDADE GERAL . . . . .	5
2.1	O princípio de equivalência . . . . .	7
2.2	A geometria do espaço-tempo . . . . .	9
2.3	Equações de Einstein . . . . .	13
2.4	Testes clássicos . . . . .	16
3	DESVIO DA LUZ NO REGIME DE CAMPO FRACO . . . . .	18
4	DESVIO DA LUZ NO REGIME DE CAMPO FORTE . . . . .	25
4.1	Métrica de Schwarzschild . . . . .	31
4.2	Métrica de Reissner-Nordström . . . . .	32
4.3	Métrica <i>black-bounce</i> . . . . .	33
5	LENTES GRAVITACIONAIS . . . . .	35
6	CONCLUSÃO . . . . .	40
	REFERÊNCIAS . . . . .	42

# 1 INTRODUÇÃO

A Relatividade Geral (RG) é a teoria de gravitação mais bem verificada atualmente. Einstein desenvolveu este modelo físico baseando-se mais em sua intuição física do que nos dados experimentais, publicando-o em 1915. Mesmo assim, apenas quatro anos depois, foi observada a primeira evidência experimental da teoria, o desvio da luz, que juntamente com o avanço do periélio de Mercúrio e o *redshift* gravitacional é um dos testes clássicos propostos por Einstein. Estes fenômenos não são explicados pela gravitação newtoniana, mas todos foram confirmados ao longo do século XX, alçando a RG ao papel desempenhado por aquela desde o século XVIII.

Devido a limitações tecnológicas, por anos, a RG não encontrou muitas aplicações, até que, a partir dos anos 1960, novos testes puderam ser conduzidos e novos efeitos gravitacionais passaram a ser estudados. Um deles, o atraso temporal pela gravidade, não só foi verificado como encontrou aplicação na comunicação com satélites, sendo fundamental para o funcionamento do sistema de GPS [1]. Outro deles, um dos focos desta dissertação, são as lentes gravitacionais, que serão detalhadas mais adiante.

Uma das previsões mais notáveis da RG é a existência de buracos negros: objetos tão densos e com gravidade tão intensa, que nem a luz pode sair do horizonte de eventos. Tais objetos foram previstos apenas como uma hipótese, mas posteriormente foram descobertos mecanismos para a sua formação. Um desses processos é o colapso gravitacional de uma estrela de massa muitas vezes maior que a do Sol ao esgotar seu combustível de fusão nuclear. Toda a matéria que não foi ejetada durante a formação do buraco negro se condensa num único ponto de densidade infinita chamado singularidade.

Por não emitirem luz, os buracos negros são difíceis de ser encontrados, sendo detectados através de sua influência gravitacional sobre estrelas próximas ou através da radiação emitida pelo disco de acreção, um disco de gás girando ao redor do buraco negro e sendo aquecido pelo atrito antes de ser finalmente absorvido [2, 3]. Por isso eles são mais facilmente encontrados nos centros das galáxias, sendo nestes casos buracos negros supermassivos, pois absorvem continuamente muita matéria e gás interestelar. Em 2019, atingimos uma resolução de imagem tão grande que pudemos ver pela primeira vez a sombra de um buraco negro no centro da galáxia M87 [4], e depois novamente em 2022 com o buraco negro no centro da Via Láctea [5], confirmando definitivamente que os buracos negros não são meras construções matemáticas.

Outro fenômeno previsto pela RG que só pôde ser verificado recentemente são as ondas gravitacionais, detectadas pela primeira vez em 2016 [6]. As ondas gravitacionais são a forma como a interação gravitacional é transmitida pelo espaço-tempo. Ao contrário da

gravitação newtoniana, que descreve a gravidade como instantânea, na RG, as modificações na configuração de matéria são percebidas pelos objetos sob sua influência gravitacional com um atraso. A propagação dessa influência ocorre à velocidade da luz, que é o limite superior para a transmissão de qualquer tipo de informação. Essas ondas são, em geral, muito fracas e instrumentos muito sensíveis são necessários para detectar até mesmo as ondas geradas por grandes eventos como a fusão de dois buracos negros ou de estrelas de nêutrons, mas servem como uma nova forma de explorar o Universo para além das ondas eletromagnéticas.

Apesar de ser bem sucedida em alguns aspectos, a RG ainda possui limitações tanto experimentais como teóricas. No campo experimental, ela não consegue explicar a formação de grandes estruturas no Universo sem a necessidade de introduzir componentes “escuras” (matéria escura e energia escura). A matéria escura é um tipo de matéria que não interage com a radiação eletromagnética. Já a energia escura é de natureza incerta. Estima-se que 25% do Universo é feito de matéria escura, 70% é energia escura e somente até 5% é matéria bariônica (estrelas, gás), havendo também uma presença ínfima de radiação [7]. A ideia de matéria escura foi concebida para explicar a curva de rotação das galáxias [8, 9]. É possível que sua composição seja um novo tipo de matéria a ser descoberta no futuro. Outra opção é que uma nova teoria possa explicar esse fenômeno sem ser necessário postular uma forma misteriosa de matéria. Quanto à matéria escura, experimentos como o WMAP, que mapeou a radiação cósmica de fundo [10, 11] e medidas do *redshift* de supernovas distantes [12] confirmam que a expansão do Universo é acelerada. A RG lida fenomenologicamente com esse fato, adicionando uma constante cosmológica às equações de Einstein. Esta constante é identificada com uma forma de energia de vácuo cujo valor está em desacordo com o previsto pela física de partículas [13].

Um outro tipo de limitação é de ordem teórica. A interação gravitacional é muito fraca para ser percebida em sistemas quânticos, sendo necessário realizar experimentos envolvendo energia tão altas que provavelmente serão inacessíveis por muito tempo. Devido à falta de evidências empíricas, é muito difícil formular uma teoria quântica de gravitação. Tal teoria poderia descrever apropriadamente as interações entre sistemas quânticos e os buracos negros, ou fornecer algum mecanismo que impeça o colapso completo da singularidade. As interações entre sistemas quânticos e o horizonte de eventos e problemas com relação à termodinâmica dos buracos negros poderiam ser melhor compreendidos do ponto de vista da gravitação quântica. Estes problemas estão relacionados com a perda de informação nos buracos negros, a destruição das correlações quânticas ao atravessar o horizonte de eventos, e a radiação de Hawking [14].

Acredita-se que as possíveis soluções para esses problemas são associadas a uma teoria quântica de gravitação. São propostas de teorias quânticas a teoria de cordas e a gravidade quântica em *loop*. Por outro lado, acredita-se que modificações da RG também

possam ser um caminho promissor. Tais teorias são conhecidas como teorias alternativas de gravitação. Alguns exemplos são teorias  $f(R)$  [15], galíleons [16] e, em geral, teorias escalar tensoriais [17].

Nesta dissertação, porém, vamos nos ater ao estudo das lentes gravitacionais, que além de se mostrarem como um instrumento de verificação experimental da RG, também tiveram seu papel na medição da constante de Hubble e contribuem até hoje na exploração do Universo em larga escala [18]. Lentes gravitacionais também podem ser usadas, por exemplo, para tentar observar efeitos ou assinaturas de possíveis cordas cósmicas, que acredita-se terem sido geradas no universo primordial [19].

O fenômeno das lentes gravitacionais foi previsto por Einstein em 1936 [20], mas só despertou interesse da comunidade científica em 1963, com a descoberta dos quasares [21, 18]. Os quasares são objetos distantes cuja luz é sujeita a ser desviada de tal forma que sua imagem seja ampliada, distorcida e multiplicada pela gravidade de galáxias na sua frente, na nossa perspectiva. A esse efeito, dá-se o nome de lente gravitacional.

Naquela época, procuravam-se principalmente imagens duplicadas de galáxias distantes, mas há também outras manifestações do mesmo efeito, como os anéis de Einstein, formados quando o alinhamento entre a fonte e a lente é praticamente perfeito [18]. Esse efeito foi observado pela primeira vez em 1979 [22]. As lentes gravitacionais foram estudadas somente no regime de campo fraco até a década de 90, ou seja, no contexto de objetos não muito densos, como estrelas e galáxias. Para um resumo dos resultados dos estudos sobre lentes gravitacionais no formalismo de campo fraco, consultar Lima e Santos [23].

A descoberta dos buracos negros, por sua vez, instigou o estudo das lentes gravitacionais no regime de campo forte, que ocorre na escala do horizonte de eventos, mais precisamente na vizinhança de uma estrutura chamada esfera de fótons [24, 25, 26]. No campo fraco, só é possível observar as imagens primária e secundária — imagens que sofreram um desvio menor que  $360^\circ$ , uma de cada lado da lente. Para o campo forte, como o desvio pode ser mais intenso, aparecem as imagens relativísticas, ou seja, imagens que deram uma ou mais voltas ao redor do objeto espalhador.

As dificuldades para a observação de imagens relativísticas, no entanto, ainda não foram superadas. É necessário um alinhamento muito preciso entre a fonte e a lente, pois as imagens relativísticas são pequenas, fracas e aparecem por pouco tempo, sendo necessária uma fonte de luz intensa, como um quasar ou uma supernova. Além disso, o método VLBI (*Very Long Baseline Interferometry*) possui resolução teoricamente suficiente para observá-las, mas a visibilidade é comprometida pela presença do disco de acreção [27]. Sendo assim, é pouco provável que observemos essas imagens, mas com sorte poderemos verificar mais este fenômeno impressionante previsto pela RG.

Esta dissertação está estruturada da seguinte forma: no capítulo 2 falamos da RG com foco nos princípios empregados em sua formulação, sua motivação física, matemática básica e verificação experimental; no capítulo 3 é feito o cálculo do desvio da luz no regime de campo fraco para as métricas de Schwarzschild, Reissner-Nordström (RN) e *black-bounce* (BB); no capítulo 4 é apresentado o formalismo de campo forte e o cálculo dos parâmetros que caracterizam o desvio da luz nesse regime, para as mesmas três métricas; no capítulo 5 é exposto uma aplicação do desvio da luz no regime de campo forte para o estudo de lentes gravitacionais e como correlacionar os parâmetros do campo forte com os observáveis físicos; no capítulo 6 é feita a conclusão da dissertação, com considerações finais e propostas de trabalhos futuros.

## 2 Relatividade geral

A Gravitação foi discutida de várias maneiras ao longo da História. O movimento dos corpos na superfície da Terra era estudado pela Dinâmica. Aristóteles postulou uma lei de movimento envolvendo os conceitos de “potência motriz” e “resistência” e que a queda dos corpos é o resultado de um movimento natural das coisas pesadas para o centro da Terra e das coisas leves para o alto, onde atingem o equilíbrio [28]. Alguns matemáticos da Idade Média criticaram o modelo de Aristóteles e contribuíram para a futura formulação matemática correta das leis da Dinâmica, mas não dispunham do formalismo adequado (cálculo diferencial) e não puseram suas conclusões a teste [29]. Em particular, as leis de movimento aristotélicas relacionavam a força à velocidade do móvel. Galileu foi pioneiro em enunciar uma lei do movimento através da aceleração, em particular a queda dos corpos, e expressar a relação correta entre aceleração, tempo e distância percorrida [29].

Já os movimentos dos corpos celestes eram estudados pela Astronomia, havendo uma distinção muito marcada entre fenômenos celestes e terrenos. O modelo dominante na Idade Média era geocêntrico e descrevia o movimento errante dos planetas através do modelo de Ptolomeu, que concordava com as observações em tal grau que ideias alternativas advinham de considerações filosóficas, em vez de empíricas. Foi esse o caso de Copérnico, quando propôs seu modelo heliocêntrico, desafiando a Igreja e a Academia. A base empírica para este modelo só foi firmada posteriormente, por Brahe. A precisão de suas observações era maior que as disponíveis na época, antes mesmo da invenção do telescópio. De posse desses dados, Kepler formulou a lei das órbitas elípticas, publicada em 1609 [30] e conforme novas evidências foram surgindo, particularmente com a invenção do telescópio, o modelo geocêntrico foi sendo descartado.

Antes de Newton publicar o Principia em 1687, desconhecia-se que a queda dos corpos e o movimento dos corpos celestes tinham a mesma natureza. Newton fundamentou sua lei de gravitação sobre os estudos de Galileu, Kepler e Huygens. Essa lei é descrita abaixo

$$\vec{F} = G \frac{mM}{r^2} \hat{r}, \quad (2.1)$$

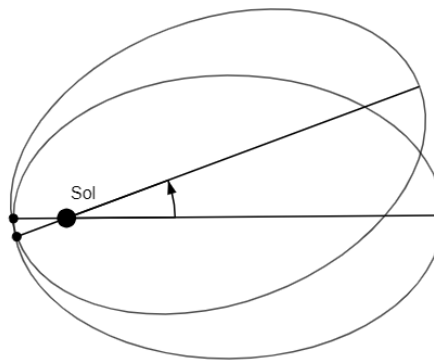
onde  $G$  é a constante gravitacional newtoniana. A teoria de Newton descreve muito bem os fenômenos gravitacionais a nível do sistema solar, ou seja, no regime de campo fraco. Uma das aplicações mais importantes dessa lei é o experimento de Cavendish, que mediu a densidade da Terra em 1798, fornecendo, além de uma verificação experimental, a possibilidade de calcular  $G$  e as densidades de outros corpos do sistema solar [31].

O sucesso da teoria newtoniana também pode ser ilustrado pela previsão da existência de Netuno por Adams e Le Verrier entre 1845 e 1846, através do cálculo

perturbativo desenvolvido por Euler, Lagrange e Laplace no final do século XVIII e início do século XIX. Ainda em 1846, o astrônomo Galle conseguiu comprovar sua existência [32]. A busca por uma nova teoria de gravitação, então, parecia desnecessária. Pensava-se que outras anomalias poderiam ser explicadas de maneira análoga. A descoberta de Plutão em 1930 por Tombaugh também foi precedida de uma previsão baseada numa anomalia na órbita de Netuno [33].

Outras, porém, se mostraram incompatíveis com a teoria newtoniana. Dentre estas estão algumas anomalias nas órbitas dos cometas e da Lua. A mais famosa, no entanto, é o avanço do periélio de Mercúrio (figura 1). Antes de prever a existência de Netuno, Le Verrier calculara, a partir das observações, que o periélio de Mercúrio avança  $35''$  a cada século, valor que foi posteriormente corrigido por Newcomb para  $43''$ . Considerou-se, à época, que essas anomalias podiam se originar de alguma forma de matéria interplanetária, ou outras forças não gravitacionais, tamanha era a confiança nas leis de Newton [34].

**Figura 1** – Precessão do periélio de Mercúrio



**Fonte:** autoria própria.

Há também o questionamento sobre o que caracteriza um observador inercial na visão de Newton. Ele acreditava que o espaço era absoluto e somente observadores com velocidades constantes em relação a esse podem ser usados para descrever as leis físicas. Contudo num universo vazio ou com somente uma partícula, os conceitos de velocidade e observadores inerciais não fazem sentido, segundo Mach. É necessário compará-los com o restante do universo, e não com um referencial abstrato. Para definir quais observadores são inerciais, deve-se comparar seu movimento ao das “estrelas distantes”. Esse é o princípio de Mach, que pode ter inspirado Einstein, mas não foi empregado diretamente. Somente em 1961 é que Brans e Dicke formularam uma teoria relativística de gravitação que incorporava essa ideia [35]. Nesta teoria a constante gravitacional passa a ser um campo escalar, porém tal modificação na RG precisa ainda impor que esse campo seja estritamente positivo (gravidade atrativa) para permitir a renormalização.

Por fim, a mecânica newtoniana é invariante sob as transformações de Galileu. Todavia, o advento da Relatividade Restrita (RR) no século XX motivou a busca por uma teoria de Gravitação que incorporasse as transformações de Lorentz. A ação instantânea à distância prevista por Newton é incompatível com a RR, pois a velocidade da luz impõe um limite sobre a velocidade de propagação dos campos. Mas em vez de adequar a gravitação newtoniana ao formalismo relativístico, Einstein construiu uma nova teoria baseada em outro princípio fundamental da física, chamada Relatividade Geral (RG).

## 2.1 O princípio de equivalência

Galileu, através dos seus experimentos com planos inclinados, já percebera que corpos com diferentes massas e composições respondem igualmente ao campo gravitacional. Essa característica contrasta com o eletromagnetismo, por exemplo, em que corpos com cargas diversas respondem ao campo cada um à sua maneira. A gravidade, pelo contrário, é universal. Nas próprias leis de Newton, há uma notável coincidência entre a massa inercial e a massa gravitacional. Se não fosse assim, poderíamos ter partículas com “cargas gravitacionais” diferentes, sem violação da mecânica newtoniana.

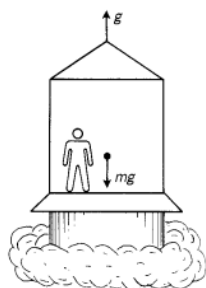
Além dos experimentos de Galileu, o próprio Newton também fez experimentos com pêndulos de composições diferentes, mas com o mesmo comprimento. Esse mesmo método foi utilizado por Bessel em 1830, com mais precisão. Um outro método, que obteve precisão de uma parte em  $10^9$ , foi usado por Eötvös, em 1889. Seu experimento consistiu em um sistema com pesos presos por uma barra fixa pendurada por um fio. Qualquer diferença entre as respostas dos pesos à gravidade e à rotação da Terra seria detectada como um torque no fio, o que não foi observado [34, 36]. Portanto, apesar de termos um conjunto de leis do movimento e uma lei de gravitação separados, as massas presentes nelas são iguais.

Einstein, então, incorporou essa equivalência como postulado. Uma consequência importante dela é ilustrada no experimento do elevador de Einstein. Imagine um cientista dentro de um elevador sem acesso ao exterior. Ele dispõe de equipamento para verificar o movimento dos objetos dentro do elevador. Se o elevador estiver no espaço sideral, os objetos se movem com velocidades constantes, conforme a 1ª lei de Newton.

Porém duas situações distintas produzem efeitos iguais no referencial do cientista. A primeira é o caso de um elevador com foguete, acelerando numa determinada direção (figura 2). Todos os objetos soltos caem com a mesma aceleração na direção contrária. O cientista verifica que sua força é proporcional à massa, assim como a força peso gravitacional. Essas forças são ditas fictícias, porque desaparecem com uma escolha apropriada de referencial. Num referencial externo fixo, como as estrelas distante, os objetos permanecem em queda livre até atingirem uma parede do elevador.

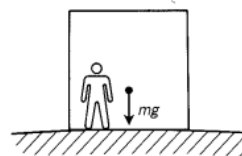


**Figura 2** – Elevador acelerado no espaço



**Fonte:** [36]

**Figura 3** – Elevador em repouso na Terra



**Fonte:** [36]

A outra situação é a do elevador na superfície da Terra (figura 3). Aqui os objetos também caem com a mesma aceleração em direção ao chão e o seu peso também é proporcional à massa. Já no elevador em queda livre nas proximidades do planeta, os objetos se comportam como se o elevador estivesse no espaço sideral, flutuando sem aceleração, que é o que acontece nas naves espaciais em órbita, por exemplo.

Se o elevador percorrer um caminho suficientemente longo em queda livre na Terra, os objetos começarão a se aproximar levemente uns dos outros, pois o campo gravitacional da Terra é radial. Entretanto, numa região pequena do espaço, o efeito do campo gravitacional é idêntico ao de um referencial não inercial, como o do elevador em aceleração. Pode-se, então, tratar a força gravitacional como uma força fictícia local, que surge em referenciais não inerciais, eliminando-a com uma escolha apropriada de coordenadas. A limitação contra isso é que não existe uma escolha que a anule em todo lugar, pois o campo gravitacional varia de ponto a ponto globalmente. Essa é uma forma de expressar o princípio de equivalência, o maior pilar para a formulação da RG.

Até então só citamos o movimento de objetos com massa, mas e o caso dos fótons, que não têm massa? Por não ser relativístico, o modelo newtoniano não prevê a interação da luz com a gravidade. Logo, uma forma de diferenciar um referencial acelerado do referencial com um campo gravitacional seria com algum experimento que não dependesse de interação gravitacional. A luz, por não ter massa, é a cobaia ideal para esse experimento. No elevador acelerado, o cientista poderia verificar que a luz se curva, enquanto que no referencial do elevador com velocidade constante, a luz segue uma trajetória reta.

Na realidade, outra manifestação de energia, além da luz, poderia ser usada para ilustrar uma relação entre massa, energia e gravidade. Sabemos que os objetos são feitos de átomos, mas a massa de um átomo não é totalmente derivada da soma das suas partículas constituintes. A energia de ligação entre as partículas também contribui com a massa dos objetos. Considerando este fato, já poderíamos inferir uma relação entre os fenômenos gravitacionais e a relatividade. Se o princípio de equivalência se aplicasse somente às leis da dinâmica, essa energia de ligação (seja devida à força eletromagnética, à força nuclear

ou à força forte) seria descontada nas interações gravitacionais.

Entretanto, a proposta de Einstein é que o princípio de equivalência se estende para todas as leis da física, inclusive as equações de Maxwell, que dão origem à propagação da luz e as interações nucleares e atômicas. Assim é o chamado princípio de equivalência forte. A gravidade interage com toda forma de energia e matéria. Esse fato é a maior justificativa para tratar a gravidade como uma característica intrínseca do próprio espaço-tempo, em vez de uma simples força.

## 2.2 A geometria do espaço-tempo

A ferramenta que possibilitou lidar com a localidade do campo gravitacional pertence à área da matemática chamada geometria diferencial, especificamente da geometria riemanniana ou mais precisamente, da geometria pseudorriemanniana, ou semirriemanniana<sup>1</sup>. Para descrições mais detalhadas, consultar [37] ou [38], por exemplo.

No modelo da RG, o espaço é uma variedade diferenciável pseudorriemanniana, uma forma de generalizar o espaço euclidiano para além da inclusão de uma coordenada temporal já presente no espaço-tempo de Minkowski, da RR, incluindo também uma curvatura do espaço. Os fenômenos gravitacionais, na RG, são descritos inteiramente pela deformação da geometria do espaço-tempo.

Posteriormente, Weyl, Kaluza e Eddington tentaram desenvolver uma teoria que incluísse também o eletromagnetismo na geometria do espaço-tempo, usando diferentes abordagens e com diferentes graus de sucesso no campo conceitual [39]. No campo experimental, porém, as teorias quânticas do eletromagnetismo se mostram mais completas e bem sucedidas, desencorajando avanços na geometrização clássica do campo eletromagnético e outros.

Na RG, o potencial gravitacional escalar dá lugar ao tensor métrico, de componentes  $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$  (simétrico). A cada ponto da variedade, é associado um espaço tangente, onde se encontram os vetores. A operação produto escalar entre dois vetores  $X$  e  $Y$  de componentes  $X^\mu$  e  $Y^\nu$ , respectivamente, é definida como:

$$\langle A, B \rangle = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu. \quad (2.2)$$

Dada uma curva na variedade, parametrizada por  $\lambda$ , com vetores tangentes  $V$  associados a cada ponto, obtemos o comprimento da curva entre dois pontos, integrando a raiz quadrada do produto escalar de  $V$  consigo mesmo (sua norma):

$$\Delta s = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \langle V, V \rangle^{\frac{1}{2}} d\lambda. \quad (2.3)$$

---

<sup>1</sup> A diferença entre a geometria riemanniana e a pseudorriemanniana está na assinatura da métrica, que será discutida no decorrer do texto.

As componentes de  $V$  dependem do sistema de coordenadas usado na seção da variedade onde ele se localiza. As componentes de  $V$  são escritas  $V^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$ , onde  $x^\mu$  são as coordenadas usadas. Infinitesimalmente, descreve-se a métrica com o chamado elemento de linha  $ds^2$ , expresso a seguir:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.4)$$

ou seja, o significado imediato da métrica é que podemos calcular o comprimento de uma curva qualquer aplicando o elemento de linha ao seu vetor tangente e integrando (2.3).

As variedades pseudorriemannianas apresentam quatro coordenadas, uma temporal ( $x_0$ ) e três espaciais ( $x_i$ , com  $i = 1, 2, 3$ ) e assinatura<sup>2</sup>  $(+ - - -)$ . Dessa forma, o elemento de linha pode ser positivo (tipo tempo), negativo (tipo espaço) ou nulo (tipo luz). O espaço de Minkowski é o caso mais simples desse tipo de variedade, cuja métrica é dada por

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \quad (2.5)$$

onde usamos a velocidade da luz  $c = 1$ .

Nos espaços planos, a derivada parcial é utilizada para quantificar a variação de um escalar ou de um campo vetorial em uma direção. Nos espaços curvos, os vetores em pontos diferentes não se localizam no mesmo espaço vetorial, então se define uma conexão  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ , que realiza a ponte entre espaços tangentes vizinhos, e a partir dela se define uma derivada covariante, que generaliza a noção de derivada para espaços curvos. Para grandezas escalares, a derivada covariante é igual à derivada parcial, mas para um vetor  $V$ , a derivada covariante é escrita

$$\nabla_\mu V^\alpha = \partial_\mu V^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha V^\nu. \quad (2.6)$$

Percebe-se que a derivada covariante é igual à derivada parcial acrescida de um termo que inclui a conexão, o que é necessário para ter as propriedades esperadas para uma derivada: a regra de Leibniz e a linearidade. A derivada covariante, assim como a derivada parcial, relaciona pontos vizinhos. Aplicações sucessivas da derivada covariante de um vetor ao longo de uma curva são interpretados como o transporte paralelo do vetor ao longo da curva.

Na forma (2.6), a conexão pode ser definida de maneira arbitrária, desde que a derivada covariante tenha essas propriedades, mas na RG, ela tem uma propriedade adicional, de que as derivadas covariantes da métrica e da métrica inversa sejam nulas. Em outras palavras, o produto escalar e, portanto, o comprimento de um vetor, devem se manter constantes quando transportados paralelamente. Só existe uma conexão com essa propriedade, dada a seguir

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} (g_{\nu\lambda,\mu} + g_{\mu\lambda,\nu} - g_{\mu\nu,\lambda}), \quad (2.7)$$

---

<sup>2</sup> em algumas referências, adota-se a convenção  $(- + + +)$

onde  $g_{\nu\lambda,\mu} \equiv \partial_\mu g_{\nu\lambda}$  e  $g^{\mu\nu}$  é o tensor métrico inverso, definido por

$$g^{\mu\nu} g_{\mu\lambda} = \delta_\lambda^\nu. \quad (2.8)$$

Em geral, nos espaços curvos, o transporte paralelo de um mesmo vetor por caminhos diferentes resulta em vetores diferentes. A curvatura pode ser representada pelos tensores de Riemann  $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ , de Ricci  $R_{\mu\nu}$  e pelo escalar de curvatura  $R$ , calculados a partir da conexão e de suas derivadas:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = g_{\alpha\gamma} \left( \Gamma_{\beta\nu,\mu}^\gamma - \Gamma_{\beta\mu,\nu}^\gamma + \Gamma_{\mu\rho}^\gamma \Gamma_{\beta\nu}^\rho - \Gamma_{\nu\rho}^\gamma \Gamma_{\beta\mu}^\rho \right) \quad (2.9)$$

$$R_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\beta\nu} \quad (2.10)$$

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (2.11)$$

Uma geodésica é o caminho mais curto entre dois pontos. No contexto da RG, é a trajetória de uma partícula em queda livre (ausência de forças não gravitacionais). De acordo com a geometria diferencial, as geodésicas obedecem à seguinte equação

$$\ddot{x}^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0, \quad (2.12)$$

onde  $\dot{x}^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\lambda}$  e  $\ddot{x}^\mu \equiv \frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2}$ , sendo  $\lambda$  um parâmetro afim.

A luz percorre geodésicas nulas, que definem cones de luz locais. Geodésicas dentro do cone de luz são tipo tempo, e correspondem a trajetórias de partículas livres com massa. Já as geodésicas fora do cone de luz são tipo espaço, e são não causais. Uma forma mais direta de se obter as equações geodésicas é a partir da lagrangiana

$$\mathcal{L} = g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu, \quad (2.13)$$

onde  $\mathcal{L}$  é igual a 0 para as geodésicas nulas, 1 para geodésicas tipo tempo e  $-1$  para geodésicas tipo espaço. Nesse caso, as equações de Euler-Lagrange,

$$\frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = 0, \quad (2.14)$$

também resultam nas equações geodésicas, mas sem precisar calcular previamente a conexão  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$  a partir do tensor métrico. Dessa forma, podemos extrair a conexão diretamente a partir de (2.14).

Variedades podem possuir isometrias, que são curvas ao longo das quais a métrica é constante. Os vetores que definem essas curvas são chamados vetores de Killing. Em termos físicos, os vetores de Killing representam quantidades físicas conservadas.

No espaço de Minkowski (plano), os vetores de translação espacial são vetores de Killing, e indicam a conservação do momento linear. Um vetor de Killing tipo tempo indica que a energia é conservada. Quando os vetores de rotação são vetores de Killing da métrica, o momento angular é conservado.

Para mostrar como a geometria diferencial pode ser usada para descrever os fenômenos gravitacionais, consideremos primeiramente o limite newtoniano, uma aproximação válida para campo fraco e partículas com velocidades não relativísticas ( $\frac{dx^i}{dt} \ll 1$ , para  $i = 1, 2, 3$ ) [40, 41]. Na gravitação newtoniana, o movimento das partículas é descrito pela seguinte equação de movimento:

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x^i}, \quad (2.15)$$

onde  $\Phi$  é o potencial gravitacional. Para o campo gravitacional de um objeto de massa  $M$ ,  $\Phi = \frac{MG}{r}$ .

Numa aproximação de campo fraco, a perturbação pode ser considerada linear. A métrica do limite newtoniana é descrita por

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \epsilon h_{\mu\nu}, \quad (2.16)$$

onde  $\epsilon h_{\mu\nu}$  é uma perturbação em torno da métrica de Minkowski. Além disso, assumimos que a métrica seja estática. Assim,

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 + \epsilon h_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2.17)$$

Logo, derivando em relação ao tempo e desprezando os termos de segunda ordem na velocidade:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 1 - \delta_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} + \epsilon h_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} = 1 + \epsilon h_{00}, \quad (2.18)$$

As equações geodésicas, escritas usando o próprio elemento de linha ( $s$ ) como parâmetro afim, são dadas por:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0. \quad (2.19)$$

Como a métrica é estática,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{dt}{ds} \right) = \frac{d}{dt} (1 + \epsilon h_{00})^{-\frac{1}{2}} = 0. \quad (2.20)$$

Assim,

$$\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 \frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 \frac{dx^\mu}{dx^\nu} = 0. \quad (2.21)$$

Desprezando os termos das velocidades, sobra apenas

$$\frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} + \Gamma_{00}^\alpha = 0, \quad (2.22)$$

que implica em  $\Gamma_{00}^0 = 0$ . Para calcular a conexão, precisamos da métrica inversa  $g^{\mu\nu}$ , dada a seguir

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \epsilon h^{\mu\nu}. \quad (2.23)$$

Esta expressão pode ser verificada usando (2.8) e desprezando os termos de segunda ordem em  $\epsilon$ . Usando o fato que a métrica é estática e desprezando os termos de segunda ordem de  $\epsilon$ ,  $\Gamma_{00}^\alpha$  é expresso:

$$\begin{aligned}\Gamma_{00}^\alpha &= \frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}(2g_{0\lambda,0} - g_{00,\lambda}) = -\frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}g_{00,\lambda} \\ &= -\frac{1}{2}(\eta^{\alpha\lambda} + \epsilon h^{\alpha\lambda})(\epsilon h_{00,\lambda}) = -\frac{1}{2}\epsilon h_{00,\alpha}.\end{aligned}$$

Substituindo esta expressão em (2.22), obtemos

$$\frac{d^2x^\alpha}{dt^2} = \frac{1}{2}\epsilon h_{00,\alpha}. \quad (2.24)$$

Para  $\alpha = 0$ , esta expressão não representa nenhuma novidade, mas para  $\alpha = i = 1, 2, 3$ , ela se compara a (2.15):

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = \frac{1}{2}\epsilon \frac{\partial h_{00}}{\partial x^i}. \quad (2.25)$$

Assim, a perturbação que resulta no limite newtoniano é dada por:

$$-\frac{1}{2}\epsilon h_{00} = \Phi. \quad (2.26)$$

Então a componente  $g_{00}$  do limite newtoniano é dada por

$$g_{00} = 1 - 2\Phi = 1 - \frac{2m}{r}, \quad (2.27)$$

onde  $m = MG$  ou, recuperando a velocidade da luz,  $m = \frac{MG}{c^2}$ . Assim, concluímos a geometrização da gravidade no limite newtoniano.

## 2.3 Equações de Einstein

A expressão completa da Relatividade Geral relaciona a curvatura do espaço-tempo com o tensor momento-energia através das equações de Einstein:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (2.28)$$

onde  $G_{\mu\nu}$  é o tensor de Einstein. Essas equações nos dizem como a matéria curva o espaço. A propriedade que distingue as equações de Einstein da gravitação newtoniana é a sua não linearidade. Soluções distintas destas equações geralmente não podem ser somadas para se obter uma terceira. Como consequência disso, mesmo em regiões de vácuo pode haver uma curvatura provocada pela matéria ao seu redor.

Obter soluções exatas dessas equações é, em geral, uma tarefa árdua. No entanto, sob certas condições de simetria sobre a métrica, é possível encontrar soluções exatas para as equações de Einstein. Em 1916, Schwarzschild encontrou a primeira solução exata e uma das mais importantes. Já que a RG é uma teoria de gravitação, é natural

procurar a métrica do espaço-tempo ao redor de um corpo esférico com massa, como os planetas e as estrelas, e verificar se corresponde ao caso newtoniano tomado um certo limite. Considera-se, para este cálculo, que a rotação é desprezada. A métrica onde são considerados os efeitos de rotação foi estudada por Kerr. A seguir temos uma dedução resumida da métrica de Schwarzschild, conforme apresentada em [40] e [41].

Em primeiro lugar, a métrica de Schwarzschild descreve a métrica externa de um objeto com massa, logo  $T_{\mu\nu} = 0$ . Para esta métrica,  $R_{\mu\nu} = 0$  e por consequência  $R = 0$ .

Esta métrica também apresenta simetria no tempo, pois os corpos em consideração se mostram aproximadamente rígidos e imutáveis. O tensor métrico, portanto, não deve depender do tempo. Neste caso, a métrica é *estacionária*, mas essa condição não é suficiente, pois os termos cruzados  $dx^i dt$  ainda podem mudar de sinal por inversão temporal ( $dt \rightarrow -dt$ ). Para evitar isso, também é necessário que as componentes  $g_{0i}$  se anulem. Com estas duas condições satisfeitas, a métrica é dita *estática*.

A simetria esférica, por sua vez, é evidenciada partindo do elemento de linha minkowskiano em coordenadas polares, com  $x^\mu = (t, r, \theta, \phi)$  e multiplicando cada termo por uma função de  $r$ :

$$ds^2 = A(r) dt^2 - B(r) dr^2 - C(r) r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.29)$$

Assim, também não há termos cruzados com  $d\theta$  ou  $d\phi$ , assegurando que inversões nessas coordenadas não afetem a métrica, nem funções dos ângulos além do  $\sin^2 \theta$  no termo de  $d\phi^2$ , para não modificar a estrutura esférica. Além disso, o termo que multiplica  $r^2 d\theta^2$  deve ser o mesmo que o de  $r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$ , assegurando que um deslocamento  $r^2 d\phi$  ao longo do equador ( $\theta = \frac{\pi}{2}$ ) seja equivalente a um deslocamento  $r^2 d\theta$  ao longo dos meridianos, por exemplo. Por ser fixo, vamos denotar por  $d\Omega^2$  o elemento de ângulo sólido  $d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$ .

O termo  $C(r)$  pode ser eliminado com uma mudança de coordenadas  $\bar{r} = \sqrt{C}r$ , definindo também  $\bar{B} = \frac{B}{C} \left(1 + \frac{r}{2C} \frac{dC}{dr}\right)$ , logo:

$$ds^2 = A dt^2 - \bar{B} d\bar{r}^2 - \bar{r}^2 d\Omega^2, \quad (2.30)$$

de onde podemos retirar também a barra sem perda de generalidade, pois  $r$  ou  $\bar{r}$  são apenas designações arbitrárias.

Por fim, precisamos que  $A$  e  $B$  sejam funções estritamente positivas neste *ansatz*, para preservar a assinatura, ou seja, vamos trocá-las por exponenciais de funções arbitrárias de  $r$ . Portanto, a métrica estática e esfericamente simétrica que buscamos é expressa por

$$ds^2 = e^{\nu(r)} dt^2 - e^{\lambda(r)} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (2.31)$$

A partir de (2.13), obtém-se a lagrangiana para a métrica (2.31),

$$\mathcal{L} = e^{\nu(r)} \dot{t}^2 - e^{\lambda(r)} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\theta}^2 - r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2. \quad (2.32)$$

Usando (2.14), extraímos as componentes não nulas da conexão:

$$\begin{aligned}\Gamma_{10}^0 &= \frac{1}{2} \frac{d\nu}{dr} & \Gamma_{00}^1 &= \frac{1}{2} e^{\nu-\lambda} \frac{d\nu}{dr} & \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} \frac{d\lambda}{dr} \\ \Gamma_{22}^1 &= -r e^{-\lambda} & \Gamma_{33}^1 &= -r e^{-\lambda} \sin^2 \theta & \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{r} \\ \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta & \Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{r} & \Gamma_{23}^3 &= \cotg \theta,\end{aligned}\quad (2.33)$$

Na sequência, calcula-se o tensor de curvatura (2.9), com componentes não nulas

$$\begin{aligned}R_{0101} &= e^\nu \left( -\frac{1}{2} \frac{d^2 \nu}{dr^2} + \frac{1}{4} \frac{d\nu}{dr} \frac{d\lambda}{dr} - \frac{1}{4} \left( \frac{d\nu}{dr} \right)^2 \right) & R_{0202} &= -\frac{1}{2} r e^{\nu-\lambda} \frac{d\nu}{dr} \\ R_{0303} &= -\frac{1}{2} r e^{\nu-\lambda} \sin^2 \theta \frac{d\nu}{dr} & R_{1212} &= -\frac{1}{2} r \frac{d\lambda}{dr} \\ R_{1313} &= -\frac{1}{2} r \sin^2 \theta \frac{d\lambda}{dr} & R_{2323} &= r^2 \sin^2 \theta (e^{-\lambda} - 1).\end{aligned}\quad (2.34)$$

Por fim, o tensor de Ricci é encontrado contraindo o tensor de curvatura (2.10):

$$\begin{aligned}R_{00} &= e^{\nu-\lambda} \left( \frac{1}{2} \frac{d^2 \nu}{dr^2} - \frac{1}{4} \frac{d\nu}{dr} \frac{d\lambda}{dr} + \frac{1}{4} \left( \frac{d\nu}{dr} \right)^2 + \frac{1}{r} \frac{d\nu}{dr} \right) \\ R_{11} &= -\frac{1}{2} \frac{d^2 \nu}{dr^2} + \frac{1}{4} \frac{d\nu}{dr} \frac{d\lambda}{dr} - \frac{1}{4} \left( \frac{d\nu}{dr} \right)^2 + \frac{1}{r} \frac{d\lambda}{dr} \\ R_{22} &= \frac{1}{2} r e^{-\lambda} \left( \frac{d\lambda}{dr} - \frac{d\nu}{dr} \right) + 1 - e^{-\lambda} = \frac{R_{33}}{\sin^2 \theta}.\end{aligned}\quad (2.35)$$

Como a solução que procuramos é no vácuo, todas as componentes do tensor de Ricci devem ser iguais a zero. De  $R_{00}$  e  $R_{11}$ , obtemos que

$$e^{-\nu+\lambda} R_{00} + R_{11} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (\nu + \lambda) = 0 \implies \nu + \lambda = c, \quad (2.36)$$

mas é possível escolher  $\nu + \lambda = 0$  redimensionando  $t \rightarrow e^{-\frac{c}{2}} t$ . De  $R_{22}$ ,

$$r e^{-\lambda} \frac{d\lambda}{dr} + 1 - e^{-\lambda} = 0 \implies \frac{d}{dr} (r e^{-\lambda}) = 1. \quad (2.37)$$

Integrando (2.37):

$$r e^{-\lambda} = r + k \implies e^{-\lambda} = 1 + \frac{k}{r}, \quad (2.38)$$

onde  $k$  é somente uma constante de integração. Desse resultado, verifica-se que essa métrica corresponde assintoticamente à métrica de Minkowski. Além disso, para corresponder ao limite newtoniano (2.27), fazemos  $k = -2m$  e obtemos a expressão da métrica de Schwarzschild:

$$ds^2 = \left( 1 - \frac{2m}{r} \right) dt^2 - \left( 1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (2.39)$$

Nesta seção, pressupõe-se uma métrica estática, mas esta premissa poderia ser dispensada pelo Teorema de Birkhoff, que diz que qualquer solução esfericamente simétrica



é também estática. Consequentemente, uma estrela cujo volume pulsa radialmente não modifica a métrica ao seu redor e não emite ondas gravitacionais.

A métrica de Schwarzschild deu origem a uma das previsões mais surpreendentes da RG. No raio  $r = 2m$ , denominado raio de Schwarzschild ( $r_S$ ), a componente  $g_{00}$  da métrica é nula e a componente  $g_{11}$  diverge. Esta métrica também diverge em  $r = 0$ , mas essa divergência não pode ser eliminada com uma simples mudança de coordenadas, e este ponto é denominado singularidade. A divergência das componentes em  $r_S$ , ao contrário, pode ser regularizada com uma mudança de coordenadas adequada. A superfície definida por  $r_S$  é chamada de horizonte de eventos, e encerra uma região conhecida como buraco negro. Para  $r < r_S$  o caráter das curvas tipo tempo se inverte e os cones de luz apontam todos para dentro. Nenhuma partícula pode ser emitida de dentro dessa região, inclusive os fótons. Para corpos como a Terra e o Sol,  $r_S$  fica muito abaixo de sua superfície, e nessa região a métrica do espaço-tempo é outra, mas é possível que uma estrela de massa muito grande sofra um colapso gravitacional no fim de seu ciclo estelar e os seus restos se tornem um buraco negro.

## 2.4 Testes clássicos

Einstein propôs três testes para a RG, conhecidos como testes clássicos. O primeiro é o avanço no periélio de Mercúrio, que a teoria newtoniana não explicava, mas é previsto pela RG. O resultado já era conhecido desde o século XIX, então não foi preciso conduzir um novo experimento para realizar este teste. Quanto aos outros planetas, esse efeito é bastante reduzido, logo mais difícil de ser observado. A RG não só permite calcular o avanço como também mostra que ele é inversamente proporcional à distância do Sol ao planeta, sendo, por isso, mais evidente na órbita de Mercúrio.

Outro teste envolve um fenômeno até então não observado, o desvio gravitacional da luz. Einstein usou o princípio de equivalência para calcular o desvio da luz que vem de uma fonte distante, é espalhado pelo Sol e chega à Terra em uma posição diferente da que é observada em sua ausência. Um primeiro cálculo, com a energia do fóton, forneceu o valor atualmente conhecido como desvio newtoniano,  $\delta = \frac{2GM}{c^2 b}$ , em 1911 [42], antes do desenvolvimento da RG. Na década de 1920, descobriu-se que Soldner, em 1802, e Cavendish, 20 anos antes, obtiveram um valor igual a este até primeira ordem, mas considerando a luz como formada de partículas com massa [43]. Somente em 1916 [44] é que Einstein publicou o artigo “Fundação da teoria da Relatividade Geral”, onde ele calcula o desvio da luz novamente, mas agora levando em conta a curvatura do espaço-tempo e obtendo  $2\delta$ , o valor considerado atualmente correto [45].

A primeira verificação do desvio da luz ocorreu em 1919, quando uma equipe liderada por Eddington buscou observar se o fenômeno do desvio da luz realmente ocorre

e se o valor correto é o newtoniano ou o da RG durante um eclipse total do Sol observado em Sobral, no Brasil, e na ilha do Príncipe, embora as condições meteorológicas estivessem mais favoráveis em Sobral, onde foi obtida uma precisão maior[46]. Esta observação confirmou o resultado da RG, mas sem muita precisão. Outros experimentos similares foram sendo realizados ao longo do século, com incerteza de no mínimo 30%. Resultados quantitativos mais significativos só foram obtidos na década de 70, diferindo em até 1,5% do previsto pela RG, através do método VLBI no espectro de ondas de rádio [47].

Um outro experimento só foi realizado anos mais tarde, pois exigia mais precisão. É o *redshift* gravitacional, também uma interação com a luz, mas mostrando que o tempo flui em ritmos distintos segundo a intensidade do campo gravitacional. Ao longo do século XX, outros testes foram sendo desenvolvidos e os métodos para realizar os testes clássicos foram sendo aperfeiçoados. Um exemplo de novo teste foi elaborado em 1964 por Shapiro [48], que consistia em medir o atraso de um sinal de luz emitido na direção de Mercúrio ou Vênus passando próximo ao Sol, sendo refletido e detectado. Um extenso compilado dos testes da RG realizados até 2014 foi feito por Will [49], pouco antes da detecção de ondas gravitacionais pelo LIGO [6]. Desde então, destaca-se também a captura em imagem da sombra de buracos negros supermassivos [4, 5].

### 3 Desvio da luz no regime de campo fraco

Entre os testes clássicos, vamos examinar com mais detalhes o desvio da luz. Neste capítulo, retemo-nos ao regime de campo fraco, ou seja, no espaço ao redor de objetos com raio muito maior que  $r_S$  ou a uma grande distância de um buraco negro, pois a curvatura nessa região é insuficiente para desviar a luz de forma muito intensa. Diversas abordagens podem ser empregadas para o cálculo do desvio da luz, conforme se vê nos livros-textos [40, 34, 36]. Neste trabalho, seguiremos o método exposto por Wald [50].

Na métrica de Schwarzschild (2.39), conforme (2.13), as geodésicas nulas são descritas pela lagrangiana

$$\mathcal{L} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) = 0. \quad (3.1)$$

Usando as equações de Euler-Lagrange (2.14), podemos evidenciar as conservações da energia e do momento angular, que decorrem das isometrias do sistema. Como a métrica é estática, aplicando (2.14) à coordenada temporal, obtém-se que

$$\frac{d}{d\lambda} \left( 2\dot{t} \left( 1 - \frac{2m}{r} \right) \right) = 0. \quad (3.2)$$

Isto implica que

$$\left( 1 - \frac{2m}{r} \right) \dot{t} = E. \quad (3.3)$$

onde  $E$  é uma constante, interpretada como a energia do fóton. Já sobre a coordenada angular ( $\phi$ ), devido à simetria esférica, temos que

$$\frac{d}{d\lambda} \left( 2r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} \right) = 0. \quad (3.4)$$

Consequentemente, podemos dizer que

$$r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} = L, \quad (3.5)$$

onde  $L$  é uma outra constante, representando o momento angular do fóton. A conservação do momento angular implica que o movimento fica contido em um plano. Com isso, caso seja necessário, pode-se rotacionar o sistema de coordenadas para reposicionar o movimento no plano equatorial  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , reduzindo efetivamente a lagrangiana a três dimensões.

Substituindo (3.3), (3.5) em (3.1), eliminamos a dependência da lagrangiana das coordenadas temporal e angular:

$$0 = E^2 \left( 1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1} - \left( 1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1} \dot{r}^2 - \frac{L^2}{r^2} \implies$$

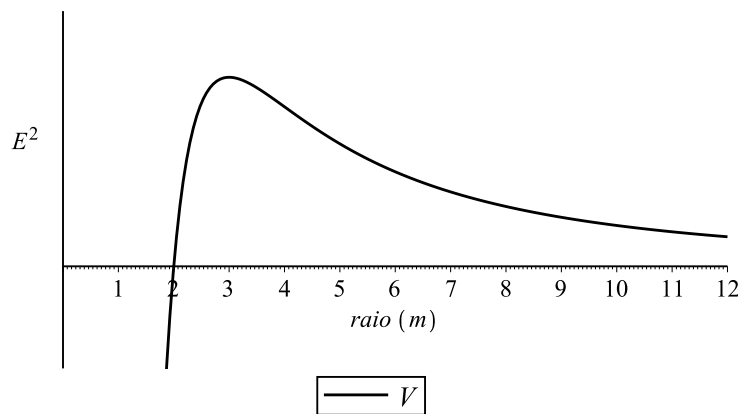
$$\implies E^2 = \dot{r}^2 + \frac{L^2}{r^2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right). \quad (3.6)$$

Esta equação descreve o movimento radial da luz. Apesar de ter velocidade radial variável, isso não significa que a  $c$  deixa de ser constante, pois a velocidade total também apresenta uma componente tangencial, que corresponde ao desvio em relação à trajetória reta que seguiria num espaço plano. O movimento radial é análogo ao de uma partícula com massa unitária movendo-se em um potencial central. O termo  $\dot{r}^2$  representa a energia cinética,  $E^2$  representa a energia mecânica, e a energia potencial ( $V$ ) é dada por

$$V = \frac{L^2}{r^2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right). \quad (3.7)$$

A figura 4 mostra a forma do potencial  $V$ . Na figura, observam-se o raio de Schwarzschild  $r = 2m$ , onde o potencial é nulo, e a região interna ao horizonte de eventos, onde o potencial é negativo. O máximo do potencial ocorre no raio da esfera de fótons  $r = 3m$ , que será estudada no capítulo 4.

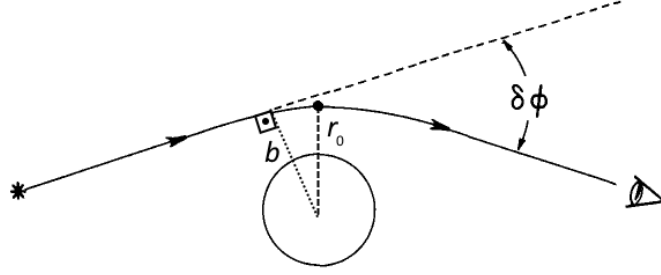
**Figura 4** – Potencial efetivo na métrica de Schwarzschild



**Fonte:** Autoria própria, inspirada em figura presente em [50]

Vamos estudar o caso de um fóton que vem do infinito com determinada energia. No infinito, o potencial tende a zero, ou seja, para  $r \rightarrow \infty$ , a energia é totalmente cinética ( $E^2 = \dot{r}^2$ ). Conforme o fóton se aproxima, essa energia vai diminuindo e se convertendo em energia potencial. Se a energia for maior que o potencial, ela não diminui o suficiente para evitar que o fóton caia no horizonte de eventos.

Caso seja menor, a energia cinética só pode diminuir até zero. Quando isto acontece, a trajetória apresenta um ponto de inflexão ( $r_0$ ) onde  $\dot{r} = 0$ , ou seja,  $r_0$  é o raio de maior aproximação da origem, ou raio mínimo. Este fenômeno é análogo ao caso de uma partícula que vem de longe, se depara com um potencial maior que sua energia cinética, para momentaneamente e retorna para o infinito. A diferença é que para o fóton, isso só ocorre na coordenada radial. Levando em conta o movimento angular, acontece a situação ilustrada na figura 5. Nesta figura,  $\delta\phi$  é o desvio angular em relação a uma trajetória reta

**Figura 5** – Desvio da luz**Fonte:** [50], editado pelo autor.

e  $b$  é o parâmetro de impacto, definido a partir da energia e do momento angular conforme a seguir

$$b \equiv \frac{L}{E}. \quad (3.8)$$

Fisicamente, o parâmetro de impacto é a distância entre a origem e a trajetória que a luz seguiria num espaço plano.

Escrevendo (3.6) com  $r = r_0$ , podemos escrever o parâmetro de impacto  $b$  em função de  $r_0$  e  $m$  da seguinte forma

$$E^2 = 0 + \frac{L^2}{r_0^2} \left(1 - \frac{2m}{r_0}\right) \quad (3.9)$$

$$\frac{L^2}{E^2} = r_0^2 \left(1 - \frac{2m}{r_0}\right)^{-1} \quad (3.10)$$

$$b^2 = \frac{r_0^3}{r_0 - 2m}. \quad (3.11)$$

Reescrevendo (3.6) usando  $b$ , obtemos que

$$\dot{r}^2 = L^2 \left( \frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \right). \quad (3.12)$$

Para calcular o ângulo de desvio, reintroduzimos  $\phi$  em (3.12) através de  $L$  e dividimos a equação por  $\dot{\phi}$ , obtendo assim uma relação entre  $\phi$  e  $r$ .

$$\dot{r}^2 = r^4 \dot{\phi}^2 \left( \frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \right) \quad (3.13)$$

$$\frac{d\phi}{dr} = \left( \frac{r^4}{b^2} - r^2 + 2mr \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.14)$$

Costuma-se, no formalismo de campo fraco, escrever (3.14) substituindo a variável  $r$  por  $u = \frac{1}{r}$ , assim

$$\frac{d\phi}{du} = - \left( \frac{1}{b^2} - u^2 + 2mu^3 \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.15)$$

Ou ainda, em termos de  $u_0 \equiv \frac{1}{r_0}$ , a partir de (3.11):

$$\frac{d\phi}{du} = -\left(u_0^2 - u^2 - 2mu_0^3 + 2mu^3\right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.16)$$

Integrando essa expressão, obtém-se a variação da coordenada angular em um trecho da trajetória.

Estamos interessados na trajetória de um fóton que vem do infinito ( $u = 0$ ), passa pelo ponto de inflexão ( $u = u_0$ ) e vai até o infinito em outra direção. Devido à simetria do problema, esses trechos são iguais, então integra-se de 0 a  $u_0$  e multiplica-se por  $-2$ :

$$\Delta\phi = 2 \int_0^{u_0} \left(u_0^2 - u^2 - 2mu_0^3 + 2mu^3\right)^{-\frac{1}{2}} du. \quad (3.17)$$

Esta integral não possui solução analítica, mas podemos aproximá-la no formalismo de campo fraco expandindo o integrando para  $m \rightarrow 0$ , calculando assim o desvio até primeira ordem de  $m$ :

$$\Delta\phi = \Delta\phi|_{m=0} + \left. \frac{\partial(\Delta\phi)}{\partial m} \right|_{m=0} m + O(m^2). \quad (3.18)$$

O termo  $\Delta\phi|_{m=0}$  corresponde à variação na coordenada angular correspondente ao espaço de Minkowski (plano). Espera-se que seja igual a  $180^\circ$ , pois o feixe de luz vem do infinito em uma direção e segue para o outro lado sem desvio. É isso que se verifica calculando a integral

$$\Delta\phi|_{m=0} = 2 \int_0^{u_0} \frac{du}{\sqrt{u_0^2 - u^2}}. \quad (3.19)$$

A substituição trigonométrica  $u = u_0 \sin x$  nos permite escrever

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u_0 \cos x dx}{\sqrt{u_0^2 \cos^2 x}} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \pi. \quad (3.20)$$

Ou seja,  $\Delta\phi|_{m=0} = \pi$ . Isto significa que quando não há atração gravitacional, a luz segue uma trajetória reta. A grandeza  $\delta\phi$ , denominada “desvio da luz” é o que sobra na expressão de  $\Delta\phi$ , pois é a diferença angular entre uma trajetória reta e a trajetória curvada pela gravidade:

$$\delta\phi = \Delta\phi - \pi = \left. \frac{\partial(\Delta\phi)}{\partial m} \right|_{m=0} m. \quad (3.21)$$

O desvio da luz até primeira ordem de  $m$  é calculado:

$$\left. \frac{\partial(\Delta\phi_S)}{\partial m} \right|_{m=0} m = 2m \int_0^{u_0} \frac{u_0^3 - u^3}{(u_0^2 - u^2)^{\frac{3}{2}}} dr. \quad (3.22)$$

Por substituição trigonométrica  $u = u_0 \sin x$

$$2m \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u_0^3 - u_0^3 \sin^3 x}{(u_0^2 - u_0^2 \sin^2 x)^{\frac{3}{2}}} u_0 \cos x dx = 2mu_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin x + \sin^2 x}{1 + \sin x} dx \quad (3.23)$$

Usando  $y = \tan \frac{x}{2}$

$$4mu_0 \int_0^1 \frac{(1+y^2)^2 + 2y(1+y)^2}{(1+y)^2(1+y^2)} dy = 4mu_0 \left( \int_0^1 \frac{dy}{(1+y)^2} + \int_0^1 \frac{2ydy}{(1+y^2)^2} \right)$$

$$= 4mu_0 \left( \int_1^2 z^{-2} dz + \int_1^2 w^{-2} dw \right) = 4mu_0 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = 4mu_0. \quad (3.24)$$

Na aproximação de campo fraco,  $\frac{2m}{r_0} \ll 1$ , então  $u_0 \approx \frac{1}{b}$  e:

$$\delta\phi = \frac{4m}{b}. \quad (3.25)$$

Em geral, prefere-se expressar observáveis, como o desvio da luz, usando  $b$ , pois esta é independente de coordenadas, embora efetivamente essa escolha só provoque diferenças quantitativas quando se trabalha com teorias modificadas de gravitação [51].

Recuperando as constantes de  $m$ , o desvio da luz na métrica de Schwarzschild é dado por  $\delta\phi = \frac{4MG}{c^2 b}$ . Para um raio de luz passando rente à superfície do Sol ( $b =$  raio do Sol), o desvio é de  $\delta\phi = 1,75$  arco-segundos.

Pode-se aplicar esse procedimento para outras métricas com propriedades similares, como a métrica de Reissner-Nordström (RN), que é solução das equações de Einstein no eletrovácuo ao redor de um corpo com carga elétrica. Temos portanto, o surgimento de um termo de carga ( $Q$ ) na métrica, conforme a seguir

$$ds^2 = \left( 1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) dt^2 - \left( 1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (3.26)$$

O potencial efetivo neste caso é:

$$V = \frac{L^2}{r^2} \left( 1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right). \quad (3.27)$$

Sua forma é similar ao de Schwarzschild, especialmente no que concerne fótons vindos de longe sendo espalhados. O parâmetro de impacto em função de  $r_0$  e  $m$  é dado por:

$$b^2 = r_0^2 \left( 1 - \frac{2m}{r_0} + \frac{Q^2}{r_0^2} \right)^{-1} = \frac{r_0^4}{r_0^2 - 2mr_0 + Q^2}. \quad (3.28)$$

A taxa de variação do ângulo em relação ao raio é expressa:

$$\frac{d\phi}{dr} = \left( \frac{r^4}{r_0^2} - \frac{2mr^4}{r_0^3} + \frac{r^4 Q^2}{r_0^4} - r^2 + 2mr - Q^2 \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.29)$$

Fazendo a mudança de variável para  $u = \frac{1}{r}$  e integrando,

$$\Delta\phi = 2 \int_0^{u_0} \left( u_0^2 - u^2 - 2mu_0^3 + 2mu^3 + Q^2 u_0^4 - Q^2 u^4 \right)^{-\frac{1}{2}} du. \quad (3.30)$$

Na aproximação de campo fraco, tomamos  $m$  e  $Q^2$  próximos de zero, expandindo o integrando até primeira ordem. O termo em primeira ordem de  $m$  é idêntico ao de Schwarzschild, restando apenas calcular o termo em primeira ordem de  $Q^2$ , que representa a correção introduzida pela carga na métrica. Mais uma vez, usamos a substituição  $u = u_0 \sin x$ ,

$$2Q^2 \int_0^{u_0} \frac{u_0^4 - u^4}{(u_0^2 - u^2)^{\frac{3}{2}}} du = 2Q^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u_0^3 - u_0^3 \sin^3 x}{(u_0^2 - u_0^2 \sin^2 x)^{\frac{3}{2}}} u_0 \cos x dx$$

$$\begin{aligned}
&= 2Q^2 u_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u_0^3 \cos x (1 - \sin^4 x)}{(u_0^2 \cos^2 x)^{\frac{3}{2}}} dx = 2Q^2 u_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^4 x}{\cos^2 x} dx \\
&= 2Q^2 u_0^2 \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx \right) = 2Q^2 u_0^2 \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{2}{3} Q^2 u_0^2 \pi.
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Além disso, assim como na métrica de Schwarzschild, para  $m$  e  $Q^2$  pequenos,  $u_0 \approx \frac{1}{b}$ . Portanto, o desvio da luz de campo fraco na métrica RN é calculado

$$\delta\phi_{RN} = \frac{4m}{b} + \frac{2Q^2\pi}{3b^2}. \tag{3.32}$$

Uma outra métrica de interesse é a métrica de *black-bounce* (BB), também chamada de métrica de Simpson-Visser, onde um parâmetro de *bouncing* ( $a$ ) é acrescentado de forma que a métrica não apresente uma singularidade em  $r = 0$ , representando, portanto, um buraco negro regular [52]. Este parâmetro pode ser ajustado de forma que a métrica possa representar um buraco negro, um buraco de minhoca atravessável apenas por um lado ou um buraco de minhoca atravessável bidirecional. Entretanto, esta métrica não é solução para as equações de Einstein no vácuo, e requer alguma forma exótica de matéria para poder existir. A métrica BB é dada a seguir

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{\sqrt{r^2 + a^2}}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{\sqrt{r^2 + a^2}}\right)^{-1} dr^2 - (r^2 + a^2) d\Omega^2. \tag{3.33}$$

O potencial é dado por

$$V = \frac{L^2}{r^2 + a^2} \left(1 - \frac{2m}{\sqrt{r^2 + a^2}}\right). \tag{3.34}$$

O parâmetro de impacto é expresso como

$$b^2 = (r_0^2 + a^2) \left(1 - \frac{2m}{\sqrt{r_0^2 + a^2}}\right)^{-1} = \frac{(r_0^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{r_0^2 + a^2} - 2m}. \tag{3.35}$$

A taxa de variação do ângulo em relação ao raio se torna:

$$\frac{d\phi}{dr} = \left( \frac{(r^2 + a^2)^2}{r_0^2 + a^2} - \frac{2m(r^2 + a^2)^2}{(r_0^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} - r^2 - a^2 + \frac{2m(r^2 + a^2)}{\sqrt{r_0^2 + a^2}} \right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{3.36}$$

Para  $a = 0$ , esta métrica se reduz à de Schwarzschild, então vamos calcular apenas a correção em segunda ordem de  $a$  em relação ao seu já conhecido resultado. Derivando em relação a  $a^2$  e fazendo  $a \rightarrow 0$  e  $m \rightarrow 0$  em (3.36), temos

$$\left( \frac{r^4}{r_0^4} - \frac{2r^2}{r_0^2} + 1 \right) \left( \frac{r^4}{r_0^2} - r^2 \right)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{r^3} \sqrt{\frac{r^2}{r_0^2} - 1} = -\sqrt{u_0^2 - u^2}. \tag{3.37}$$

Onde substituímos  $u = \frac{1}{r}$  depois de aproximar  $a \rightarrow 0$ . Integrando de 0 a  $u_0$  (inverte-se o sinal por causa da inversão dos limites de integração) e substituindo  $u = u_0 \sin x$ ,

$$u_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \frac{u_0^2 \pi}{4}. \tag{3.38}$$



Novamente, para  $a = 0$  e  $m = 0$ ,  $u_0 \approx \frac{1}{b}$ . Dessa forma, a correção introduzida pelo parâmetro de *bouncing* é igual a  $\frac{\pi a^2}{4b^2}$  e o desvio da luz no regime de campo fraco é igual à soma dessa correção com a já calculada correção em primeira ordem de  $m$  da métrica de Schwarzschild:

$$\delta\phi = \frac{4m}{b} + \frac{\pi a^2}{4b^2}. \quad (3.39)$$

Este resultado pode ser comparado com [53], onde foi calculado também um termo adicional da ordem de  $ma^2$ .

## 4 Desvio da luz no regime de campo forte

O segundo limite em que podemos estudar o desvio da luz é o de campo forte, ou seja, com  $m$  grande. Esse limite corresponde às proximidades do buraco negro. Neste caso, é necessário empregar um outro formalismo para calculá-lo. Um pouco mais distante em relação à singularidade do que o horizonte de eventos, localiza-se a esfera de fótons, de raio  $r_m$  maior que  $r_S$ , mas de mesma ordem de grandeza. Nesta esfera, os fótons podem teoricamente orbitar a origem, contudo esta órbita é instável e a menor perturbação pode ejetar os fótons ou enviá-los para dentro do buraco negro. No regime de campo fraco, a luz se aproxima da origem a um raio mínimo  $r_0 \gg r_S$ . Em contraste, o regime de campo forte é definido como o limite em que  $r_0 \rightarrow r_m$ .

O cálculo do desvio da luz no regime de campo forte foi desenvolvido por Bozza [54, 27]. Posteriormente, Tsukamoto [55] modificou o cálculo de forma que resultados analíticos fossem obtidos também para a métrica RN, portanto o seu método é o que será empregado neste trabalho.

Considere uma variedade cuja métrica seja estática, esfericamente simétrica e assintoticamente plana. Podemos escrever o elemento de linha  $ds^2$  de uma métrica com essas propriedades usando  $(t, r, \theta, \phi)$  como coordenadas.

$$ds^2 = A(r) dt^2 - B(r) dr^2 - C(r)(d\theta + \sin^2\theta d\phi)^2. \quad (4.1)$$

A métrica é assintoticamente plana (tende à métrica de Minkowski para  $r$  grande) quando as seguintes condições sobre as funções  $A(r)$ ,  $B(r)$  e  $C(r)$  são satisfeitas

$$\lim_{r \rightarrow \infty} A(r) = 1 \quad (4.2)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} B(r) = 1 \quad (4.3)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} C(r) = r^2. \quad (4.4)$$

Considerações similares às feitas no capítulo 3 se aplicam às métricas com essas características. As geodésicas nulas são descritas pela lagrangiana

$$\mathcal{L} = A(r) \dot{t}^2 - B(r) \dot{r}^2 - C(r)(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta \dot{\phi}^2) = 0, \quad (4.5)$$

Pelas equações de Euler-Lagrange, definimos as grandezas conservadas  $E$  e  $L$ :

$$E = A(r) \dot{t} \quad (4.6)$$

$$L = C(r) \sin^2\theta \dot{\phi}. \quad (4.7)$$

Fazendo  $\theta = \frac{\pi}{2}$  e substituindo  $E$  e  $L$  em (4.5), obtém-se

$$0 = \frac{E^2}{A(r)} - B(r) \dot{r}^2 - \frac{L^2}{C(r)} \quad (4.8)$$

$$\dot{r}^2 + \frac{L^2}{B(r)C(r)} = \frac{E^2}{A(r)B(r)}. \quad (4.9)$$

Nesta trajetória, quando o fóton chega a um raio mínimo  $r_0$ ,  $\dot{r} = 0$ , e assim a razão  $b = \frac{L}{E}$  pode ser escrita em função de  $r_0$  conforme a seguir

$$b = \sqrt{\frac{C(r_0)}{A(r_0)}}. \quad (4.10)$$

Escrevendo (4.9) usando  $b$ ,

$$\dot{r}^2 = \frac{L^2}{B(r)} \left( \frac{1}{b^2 A(r)} - \frac{1}{C(r)} \right), \quad (4.11)$$

de onde tiramos, após substituir a expressão de  $L$  com  $\dot{\phi}$

$$\frac{d\phi}{dr} = \left( \frac{C(r)}{B(r)} \left( \frac{C(r)}{b^2 A(r)} - 1 \right) \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.12)$$

Em geral, mesmo conhecendo  $A(r)$ ,  $B(r)$  e  $C(r)$ , não há uma expressão analítica para o desvio da luz, que é obtido integrando esta expressão, então se utilizam métodos numéricos para calculá-lo, mas as integrais de algumas métricas possuem soluções analíticas no regime de campo forte.

Vamos definir  $r_m$ , o raio da esfera de fótons, em termos das componentes da métrica. Multiplicando (4.9) por  $C(r)B(r)$ , obtemos

$$C(r)B(r)\dot{r}^2 + L^2 = \frac{C(r)E^2}{A(r)}. \quad (4.13)$$

Derivando (4.13) em relação ao parâmetro afim, ficamos com

$$\frac{d}{dr}[C(r)B(r)]\dot{r}^3 + 2C(r)B(r)\dot{r}\ddot{r} = E^2 \left( \frac{C'(r)}{A(r)} - \frac{C(r)A'(r)}{A^2(r)} \right) \dot{r}, \quad (4.14)$$

onde a linha denota derivada em relação a  $r$ . Multiplicando (4.14) por  $\frac{A(r)}{E^2 C(r) \dot{r}}$ , ela se torna

$$\frac{A(r)}{E^2 C(r)} \frac{d}{dr}[C(r)B(r)]\dot{r}^2 + \frac{2A(r)B(r)}{E^2} \ddot{r} = \frac{C'(r)}{C(r)} - \frac{A'(r)}{A(r)}. \quad (4.15)$$

Para simplificar a notação, define-se

$$D(r) \equiv \frac{C'(r)}{C(r)} - \frac{A'(r)}{A(r)}. \quad (4.16)$$

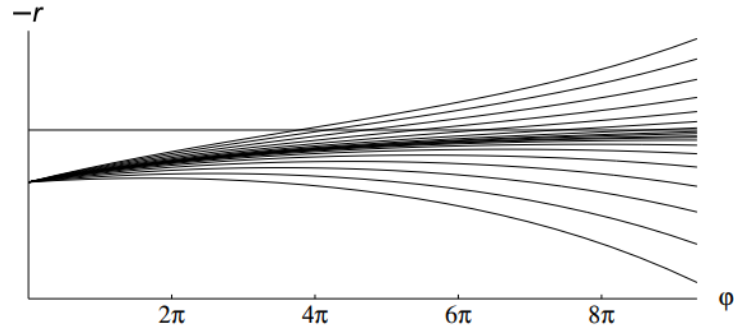
Usando o fato que a luz orbita circularmente em  $r_m$ , temos que  $\dot{r}$  e  $\ddot{r}$  são nulos para este valor de  $r$ . Assim, usando  $r = r_m$  em (4.15), temos:

$$D(r_m) = \frac{C'(r_m)}{C(r_m)} - \frac{A'(r_m)}{A(r_m)} = 0. \quad (4.17)$$

Esta equação é a definição de  $r_m$  a partir da métrica. Para encontrar  $r_m$ , é preciso resolver (4.17). No caso de haver mais de uma solução, [55] utiliza a maior delas, mas em princípio, nada impede de calcular o desvio provocado pelas esferas de fótons mais internas, contanto que elas sejam externas ao horizonte de eventos ( $r_m > r_S$ ). Fazer  $D(r_m) = 0$  corresponde a calcular o máximo do potencial efetivo visto no capítulo 3. Este raio representa um limite para que partículas externas possam ser espalhadas pelo buraco negro. Qualquer fóton que ultrapasse para dentro da esfera de fótons necessariamente entra no horizonte de eventos. É possível, no entanto, que um fóton seja emitido na região entre  $r_S$  e  $r_m$  e escape.

Idealmente, se  $b$  for tal que o raio do ponto de inflexão da trajetória de um fóton que vem do infinito ( $r_0$ ) seja igual a  $r_m$ , pelo fato de que  $\ddot{r} = 0$ , o fóton não volta para o infinito e nem ultrapassa a esfera de fótons para dentro, mas continua a orbitar na esfera de fótons. Na prática, uma pequena diferença entre  $r_0$  e  $r_m$  faz com que o fóton dê algumas voltas, depois caia ou escape. A figura 6 mostra o destino de vários fótons com valores de  $r_0$  levemente diferentes de  $r_m$ .

**Figura 6** – Geodésicas com  $r_0 \approx r_m$



Fonte: [25]

Para calcular o desvio da luz no regime de campo forte, integramos (4.12), mas antes façamos uma mudança de variável para  $z \equiv 1 - \frac{r_0}{r}$ . Assim, temos que

$$\Delta\phi = \int_0^1 \frac{2r_0}{(1-z)^2} \left[ \frac{C(\frac{r_0}{1-z})}{B(\frac{r_0}{1-z})} \left( \frac{C(\frac{r_0}{1-z})}{b^2 A(\frac{r_0}{1-z})} - 1 \right) \right]^{-\frac{1}{2}} dz. \quad (4.18)$$

No limite inferior de integração, quando tomamos o limite forte  $r_0 \rightarrow r_m$ , essa integral diverge, mas podemos separar a parte que diverge da integral antes de aplicarmos o limite. Para simplificar os cálculos, vamos definir

$$R(r) \equiv \frac{C(r)}{b^2 A(r)} - 1 \quad (4.19)$$

$$G(z, r_0) \equiv (1-z)^4 \frac{C\left(\frac{r_0}{1-z}\right) R\left(\frac{r_0}{1-z}\right)}{B\left(\frac{r_0}{1-z}\right)} \quad (4.20)$$

$$f(z, r_0) \equiv \frac{2r_0}{\sqrt{G(z, r_0)}}. \quad (4.21)$$

Além disso, denotaremos as funções de  $r_0$  com o índice 0 também, por exemplo,  $A(r_0) \equiv A_0$ , assim como as funções de  $r_m$ , com um índice  $m$ , então  $A_m \equiv A(r_m)$ . Como estamos lidando com o limite inferior, vamos expandir  $G(z, r_0)$  para  $z \rightarrow 0$ :

$$G(z, r_0) = c_1(r_0)z + c_2(r_0)z^2 + O(z^3), \quad (4.22)$$

onde os coeficientes  $c_1$  e  $c_2$  são expressos

$$c_1(r_0) = \frac{r_0 C_0 D_0}{B_0} \quad (4.23)$$

$$c_2(r_0) = \left[ \frac{r_0}{2} \left( \frac{C_0''}{C_0} - \frac{A_0''}{A_0} \right) + D_0 \left( 1 - \frac{A_0'}{A_0} r_0 \right) \right] \frac{r_0 C_0}{B_0} + D_0 r_0 \left( \frac{r_0 C_0'}{B_0} - \frac{B_0' C_0}{B_0^2} - \frac{4C_0}{B_0} \right). \quad (4.24)$$

No limite  $r_0 \rightarrow r_m$ ,  $D_0 \rightarrow D(r_m) = 0$ . Vamos definir também

$$D'_m \equiv \frac{C_m''}{C_m} - \frac{A_m''}{A_m}. \quad (4.25)$$

Vamos usar  $D'_m$ , correspondendo à segunda derivada do potencial efetivo no limite forte, lembrando que a primeira derivada é nula. Eliminando os termos envolvendo  $D_m$ , temos que

$$G(z, r_0 \rightarrow r_m) \approx \frac{r_m^2 C_m D'_m}{2B_m} z^2 = c_2(r_m) z^2. \quad (4.26)$$

Ao integrarmos  $f(z, r_m) = \frac{2r_m}{\sqrt{G(z, r_m)}}$ , no limite inferior ( $z = 0$ ) obtemos o seguinte

$$\int \frac{2r_m}{\sqrt{G(z, r_m)}} dz \approx 2r_m \int \frac{dz}{\sqrt{c_2(r_m) z^2}} \int \frac{dz}{z} \sim \ln z. \quad (4.27)$$

Logo,  $\Delta\phi$  (4.18) diverge se  $r_0$  for substituído diretamente por  $r_m$ . Essa divergência representa fisicamente que o ângulo de desvio se torna infinito para uma trajetória cujo raio de maior aproximação coincide com o raio da esfera de fótons. Entretanto podemos extrair a parte divergente da integral e só depois aplicarmos o limite forte  $r_0 \rightarrow r_m$ . O que sobra é uma parte regular que pode ser sondada fisicamente pelos observáveis a serem definidos no capítulo 5. Vamos separar  $f(z, r_0)$  em uma parte divergente  $f_D(z, r_0)$  e uma parte regular  $f_R(z, r_0)$ , definidas como:

$$f_D(z, r_0) = \frac{2r_0}{\sqrt{c_1(r_0)z + c_2(r_0)z^2}} \quad (4.28)$$

$$f_R(z, r_0) \equiv f(z, r_0) - f_D(z, r_0). \quad (4.29)$$

Calculamos a integral de  $f_D(z, r_0)$ :

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_D(z, r_0) dz &= 2r_0 \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{c_1(r_0)z + c_2(r_0)z^2}} \\ &= \frac{4r_0}{\sqrt{c_2(r_0)}} \ln \left( \sqrt{c_2(r_0)} + \sqrt{c_1(r_0) + c_2(r_0)} \right) - \frac{2r_0}{\sqrt{c_2(r_0)}} \ln c_1(r_0). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Percebe-se que podemos aplicar diretamente o limite forte  $r_0 = r_m$ , ao primeiro termo de (4.30), mas o segundo termo precisa ser separado. Vamos expandi-lo em torno de  $r_0 = r_m$ , em primeira ordem:

$$c_1(r_0) = c_1(r_m) + c_1'(r_m)(r_0 - r_m) + O((r_0 - r_m)^2) \quad (4.31)$$

$$c_1(r_0) = \frac{r_m C_m D'_m}{B_m} (r_0 - r_m) + O((r_0 - r_m)^2). \quad (4.32)$$

Como os valores de  $r_0$  são muito próximos a  $r_m$ , vamos desprezar os termos de ordem superior. Substituindo (4.32) no segundo termo de (4.30), ficamos com o seguinte

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_D(z, r_m) dz &= \frac{4r_m}{\sqrt{c_2(r_m)}} \ln \left( 2\sqrt{c_2(r_m)} \right) - \frac{2r_m}{\sqrt{c_2(r_m)}} \ln \left( \frac{r_m C_m D'_m}{B_m} (r_0 - r_m) \right) \\ &= 2\sqrt{\frac{2B_m}{C_m D'_m}} \left( \ln 2 - \ln \left( \frac{r_0}{r_m} - 1 \right) \right). \end{aligned} \quad (4.33)$$

Havendo separado o termo divergente de  $f(z, r_0)$ , aplicamos o limite  $r_0 = r_m$  diretamente em  $f_R(z, r_0)$ , assim

$$\begin{aligned} f_R(z, r_m) &= \frac{2r_m}{\sqrt{G(z, r_m)}} - \frac{2r_m}{\sqrt{\frac{r_m^2 C_m D'_m}{2B_m} z^2}} \\ &= \frac{2r_m}{(1-z)^2 \sqrt{\frac{C \left( \frac{r_m}{1-z} \right) R \left( \frac{r_m}{1-z} \right)}{B \left( \frac{r_m}{1-z} \right)}}} - \frac{2}{z \sqrt{\frac{C_m D'_m}{2B_m}}}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Finalmente, o desvio da luz no regime de campo forte é dado por:

$$\delta\phi = \Delta\phi - \pi = 2\sqrt{\frac{2B_m}{C_m D'_m}} \left( \ln(2r_m) - \ln(r_0 - r_m) \right) + \int_0^1 f_R(z, r_m) dz - \pi. \quad (4.35)$$

Ou seja, para um dado  $r_0$  muito próximo de  $r_m$ , o desvio pode ser arbitrariamente grande, inclusive passando de  $2\pi$ , o que significa que a luz pode dar várias voltas antes de escapar para o observador, segundo vimos na figura 6. Este caso e outros, como o de uma esfera de fótons estável, são discutidos em [25].

Alternativamente, seguindo a recomendação de usar  $b$  em vez de  $r_0$ , conforme [51], podemos escrever este desvio em termos do parâmetro de impacto. O limite inferior para

$b$  é o parâmetro de impacto crítico ( $b_c$ ). Como um valor menor que  $b_c$  resulta em um  $r_0$  menor que  $r_m$ , o limite  $b \rightarrow b_c$  é equivalente a  $r_0 \rightarrow r_m$ . Definimos  $b_c$  como segue

$$b_c \equiv b(r_m) = \sqrt{\frac{C_m}{A_m}}, \quad (4.36)$$

Para escrever o desvio da luz no regime forte utilizando o parâmetro de impacto, vamos expandir  $b$  em potências de  $r_0 - r_m$  partindo de (4.10). A derivada de  $b$  em relação a  $r_0$  é:

$$\begin{aligned} b'(r_0) &= \frac{1}{2} \left( \frac{C_0}{A_0} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{C'_0}{A_0} + \frac{C_0 A'_0}{A_0^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{C_0}{A_0}} D_0 = \frac{1}{2} b(r_0) D_0. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Como no limite  $r_0 \rightarrow r_m$ ,  $D_0 \rightarrow 0$ , então o termo de primeira ordem para  $r_m$  é nulo. A segunda derivada de  $b(r_0)$  é:

$$b''(r_0) = \frac{1}{2} (b'(r_0) D_0 + b(r_0) D'_0). \quad (4.38)$$

Assim, a expansão do parâmetro de impacto em potências de  $r_0 - r_m$  pode ser escrita:

$$\begin{aligned} b &= b(r_m) + b'(r_m)(r_0 - r_m) + \frac{1}{2} b''(r_m)(r_0 - r_m)^2 \\ &= b_c \left( 1 + \frac{D'_m}{4} (r_0 - r_m)^2 \right). \end{aligned} \quad (4.39)$$

Isolando  $r_0 - r_m$  nesta expressão, obtemos

$$\frac{b}{b_c} - 1 = \frac{D'_m}{4} (r_0 - r_m)^2 \quad (4.40)$$

$$r_0 - r_m = \sqrt{\frac{4}{D'_m} \left( \frac{b}{b_c} - 1 \right)}. \quad (4.41)$$

Sendo assim, o desvio da luz em termos do parâmetro de impacto se torna

$$\begin{aligned} \delta\phi &= 2\sqrt{\frac{2B_m}{C_m D'_m}} \left( \ln(2r_m) - \ln \sqrt{\frac{4}{D'_m} \left( \frac{b}{b_c} - 1 \right)} \right) + \int_0^1 f_R(z, r_m) dz \\ &= -\sqrt{\frac{2B_m}{C_m D'_m}} \ln \left( \frac{b}{b_c} - 1 \right) + \sqrt{\frac{2B_m}{C_m D'_m}} (\ln r_m^2 D'_m) + \int_0^1 f_R(z, r_m) dz - \pi, \end{aligned} \quad (4.42)$$

Podemos escrever resumidamente o desvio definindo os parâmetros do desvio forte  $\bar{a}$  e  $\bar{b}$ :

$$\bar{a} \equiv \sqrt{\frac{2B_m}{C_m D'_m}} \quad (4.43)$$

$$\bar{b} \equiv \bar{a} \ln(r_m^2 D'_m) + \int_0^1 f_R(z, r_m) dz - \pi, \quad (4.44)$$

ou seja,

$$\delta\phi = -\bar{a} \ln\left(\frac{b}{b_c} - 1\right) + \bar{b}, \quad (4.45)$$

de maneira que será mais conveniente para o cálculo da lente gravitacional. Cada métrica resulta em parâmetros diferentes, possibilitando diferenciar experimentalmente entre as métricas, conforme será exposto no capítulo 5. Para ilustrar o regime de campo forte, vamos aplicar este método às métricas de Schwarzschild, RN e *black-bounce*, assim como foi feito no capítulo 3 para o limite de campo fraco.

## 4.1 Métrica de Schwarzschild

O raio da esfera de fótons ( $r_m$ ) é dado por (4.17). Na métrica de Schwarzschild (2.39), temos que

$$\frac{2r_m}{r_m^2} - \frac{2m}{r_m^2} \left(1 - \frac{2m}{r_m}\right)^{-1} \implies 1 - \frac{2m}{r_m} = \frac{m}{r_m} \implies \quad (4.46)$$

$$\implies r_m - 2m = m \implies r_m = 3m. \quad (4.47)$$

com o qual calculamos o parâmetro de impacto crítico (4.36):

$$A_m = 1 - \frac{2m}{3m} = \frac{1}{3} \quad C_m = 9m^2 \quad (4.48)$$

$$b_c^2 = \frac{C_m}{A_m} = 27m^2. \quad (4.49)$$

O termo  $D'_m$  (4.25), que aparece na expressão do desvio, é dado por:

$$D'_m = \frac{2}{9m^2} + \frac{12}{27m^2} = \frac{2}{3m^2} \quad (4.50)$$

Com isso,  $\bar{a}$  (4.43) é dado por

$$\bar{a} = \sqrt{\frac{6}{9m^2 \frac{2}{3m^2}}} = 1. \quad (4.51)$$

e  $\bar{b}$  (4.44) é dado por

$$\bar{b} = \ln\left(9m^2 \frac{2}{3m^2}\right) + \int_0^1 f_R(z, r_m) dz - \pi = \ln 6 + \int_0^1 f_R(z, r_m) dz - \pi. \quad (4.52)$$

A parte regular (4.29), no raio da esfera de fótons, é calculada:

$$\begin{aligned} & 6m \left( 9m^2 (1-z)^2 \left( \frac{1}{3(1-z)^2} - 1 + \frac{2}{3}(1-z) \right) \right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{2}{z} \\ &= \frac{2}{z\sqrt{1-\frac{2}{3}z}} - \frac{2}{z} = \frac{2(1-\sqrt{1-\frac{2}{3}z})}{z\sqrt{1-\frac{2}{3}z}}. \end{aligned} \quad (4.53)$$



Ao integrarmos a parte regular, substituindo  $u = \sqrt{1 - \frac{2}{3}z}$  obtemos

$$\begin{aligned} 4 \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \frac{1-u}{1-u^2} du &= 4 \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \frac{1}{1+u} du \\ &= 4 \left( \ln 2 - \ln \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right) = 4 \ln (3 - \sqrt{3}). \end{aligned} \quad (4.54)$$

Portanto, o desvio de campo forte na métrica de Schwarzschild é expresso a seguir

$$\delta\phi_S = -\ln \left( \frac{b}{3\sqrt{3}m} - 1 \right) + \ln 6 + 4 \ln (3 - \sqrt{3}) - \pi. \quad (4.55)$$

Este resultado é igual ao obtido por Bozza [27] e Tsukamoto [55].

## 4.2 Métrica de Reissner-Nordström

Nesta métrica, dada por (3.26), a equação para o raio da esfera de fótons (4.17) possui duas raízes:

$$\frac{2r_m}{r_m^2} = \left( \frac{2m}{r_m^2} - \frac{2Q^2}{r_m^3} \right) \left( 1 - \frac{2m}{r_m} + \frac{Q^2}{r_m^2} \right)^{-1} \quad (4.56)$$

$$r_m^2 - 3mr_m + 2Q^2 = 0 \quad (4.57)$$

$$r_m = \frac{3m \pm \sqrt{9m^2 - 8Q^2}}{2}. \quad (4.58)$$

Porém a raiz interna (sinal negativo) só é possível quando  $\frac{Q^2}{m^2} > 1$ , ou seja, o caso em que não há horizonte de eventos em volta da singularidade. Mesmo assim, os resultados a seguir valem para ambas as raízes. Vamos tomar  $r_m$  como sendo o raio da esfera de fótons externa. Assim

$$C_m = r_m^2 = \frac{18m^2 + 6m\sqrt{9m^2 - 8Q^2} - 8Q^2}{4} = 3mr_m - 2Q^2 \quad (4.59)$$

$$A_m = 1 - \frac{2m}{r_m} + \frac{Q^2}{r_m^2} = \frac{r_m^2 - 2mr_m + Q^2}{r_m^2} = \frac{mr_m - Q^2}{r_m^2} \quad (4.60)$$

$$b_c = \sqrt{\frac{r_m^4}{mr_m - Q^2}} = \frac{r_m^2}{\sqrt{mr_m - Q^2}} \quad (4.61)$$

$$D'_m = \frac{2}{r_m^2} - \frac{r_m^2}{mr_m - Q^2} \left( -\frac{4m}{r_m^3} + \frac{6Q^2}{r_m^2} \right) = \frac{6mr_m - 8Q^2}{r_m^2(mr_m - Q^2)} \quad (4.62)$$

$$\bar{a} = \sqrt{\frac{2}{A_m C_m D'_m}} = \sqrt{2} \left( \frac{2r_m^2(mr_m - Q^2)(3mr_m - 4Q^2)}{r_m^4(mr_m - Q^2)} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (4.63)$$

$$= \frac{r_m}{\sqrt{3mr_m - 4Q^2}} = \left( 1 - 2\frac{Q^2}{r_m^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\bar{b} = \bar{a} \ln \frac{6mr_m - 8Q^2}{mr_m - Q^2} + \int_0^1 f_R(z, r_m) dz - \pi. \quad (4.64)$$

A parte regular (4.29) no RN é

$$2r_m \left( r_m^2 (1-z)^2 \left( \frac{r_m^2 (mr_m - Q^2)}{r_m^4 (1-z)^2} - 1 + \frac{2m(1-z)}{r_m} - \frac{Q^2(1-z)^2}{r_m^2} \right) \right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{2\bar{a}}{z} \\ = 2r_m \left( -Q^2 z^2 - 2(mr_m - 2Q^2)z + 3mr_m - 4Q^2 \right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{2\bar{a}}{z}. \quad (4.65)$$

Ao integrarmos, obtemos

$$\int f_R(z, r_m) = \frac{2r_m}{\sqrt{3mr_m - 4Q^2}} \left( \ln z - \ln \left( 2(3mr_m - 4Q^2) + (-2mr_m + 4Q^2)z + \right. \right. \\ \left. \left. + 2\sqrt{3mr_m - 4Q^2} \sqrt{-Q^2 z^2 - 2mr_m z + 4Q^2 z + 3mr_m - 4Q^2} \right) - \ln z \right) + k. \quad (4.66)$$

Ao aplicarmos os limites de integração

$$\int_0^1 f_R(z, r_m) = \frac{2r_m}{\sqrt{3mr_m - 4Q^2}} \ln \frac{2(3mr_m - 4Q^2)}{2mr_m - 2Q^2 + \sqrt{3mr_m - 4Q^2} \sqrt{mr_m - Q^2}}. \quad (4.67)$$

Por fim, a expressão completa do desvio da luz no regime de campo forte, na métrica RN é dada a seguir

$$\delta\phi_{RN} = \frac{r_m}{\gamma} \left( -\ln \left( \frac{\zeta b}{r_m^2} - 1 \right) + \ln \frac{2\gamma^2}{\zeta^2} + 2 \ln \frac{2\gamma^2}{2\zeta^2 + \gamma\zeta} \right) - \pi, \quad (4.68)$$

onde  $\zeta^2 = mr_m - Q^2$  e  $\gamma^2 = 3mr_m - 4Q^2$ .

### 4.3 Métrica *black-bounce*

Para esta métrica, dada por (3.33), o raio da esfera de fótons (4.17) é calculado a seguir

$$\frac{2r_m}{r_m^2 + a^2} = \frac{2mr_m \sqrt{r_m^2 + a^2}}{(r_m^2 + a^2)^{\frac{3}{2}} (\sqrt{r_m^2 + a^2} - 2m)} \implies \quad (4.69)$$

$$\implies \sqrt{r_m^2 + a^2} = 3m \implies r_m = \pm \sqrt{9m^2 - a^2}. \quad (4.70)$$

Como  $r_m$  sempre aparece ao quadrado na métrica, a solução negativa tem as mesmas implicações que a solução positiva, que é a que vamos assumir daqui para frente. O parâmetro de impacto crítico é dado por

$$C_m = r_m^2 + a^2 = 9m^2 \quad (4.71)$$

$$A_m = 1 - \frac{2m}{\sqrt{r_m^2 + a^2}} = 1 - \frac{2m}{3m} = \frac{1}{3} \quad (4.72)$$

$$b_c = \sqrt{27m^2} = 3\sqrt{3}m. \quad (4.73)$$

Repare que  $b_c$  é o mesmo que na métrica de Schwarzschild. Para o cálculo dos parâmetros  $\bar{a}$  e  $\bar{b}$ ,  $D'_m$  é dado por

$$D'_m = \frac{2}{9m^2} - \frac{6(a^2 - 6m^2)}{(3m)^4} = \frac{6(9m^2 - a^2)}{(3m)^4}. \quad (4.74)$$

Logo, temos

$$\bar{a} = \sqrt{\frac{(3m)^4}{9m^2(9m^2 - a^2)}} = \frac{3m}{\sqrt{9m^2 - a^2}} \quad (4.75)$$

$$\bar{b} = \bar{a} \ln \frac{6(9m^2 - a^2)^2}{(3m)^4} + \int_0^1 f_R(z, r_m) dz - \pi. \quad (4.76)$$

Usando o fato que  $A = 1 - \frac{2m}{\sqrt{C}}$ , podemos escrever a parte regular como

$$\begin{aligned} f_R(z, r_m) &= 2r_m \left( (1-z)^4 \left( \frac{C(r)^2}{b_c^2} - C(r) + 2m\sqrt{C(r)} \right) \right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{2\bar{a}}{z} \\ &= 2\sqrt{9m^2 - a^2} \left( \frac{(9m^2 - a^2 z(2-z))^2}{27m^2} - (9m^2 - a^2 z(2-z))(1-z)^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2m(1-z)^3 \sqrt{9m^2 - a^2 z(2-z)} \right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{6m}{z\sqrt{9m^2 - a^2}}. \end{aligned} \quad (4.77)$$

A integral deste termo não possui solução analítica, então é necessário usar métodos numéricos para calcular  $\bar{b}$ .

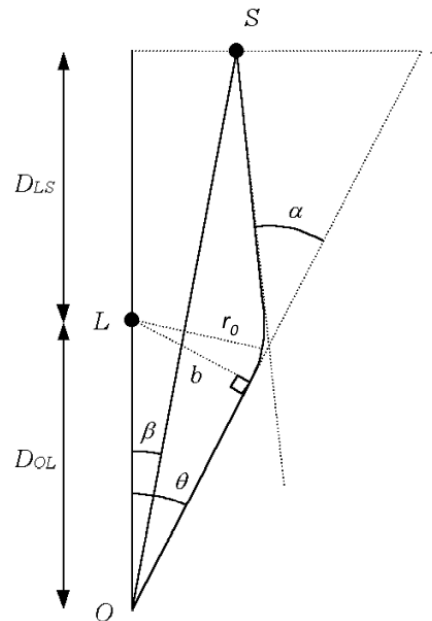
## 5 Lentes gravitacionais

Uma lente gravitacional é um objeto que desvia a luz vinda de um objeto mais distante, a fonte, criando num certo observador a ilusão de que o objeto se localiza em outra posição, onde fica a imagem. O efeito de lente gravitacional é medido pelo aumento ( $\mu$ ), a razão entre o fluxo de luz da fonte (localizada a um ângulo  $\theta$ ) e o de sua imagem gerada pela lente (localizada a um ângulo  $\beta$ ), segundo a figura 7. Como a luz é apenas redirecionada, a razão entre os fluxos só leva em conta a razão entre os ângulos sólidos do objeto fonte e de sua imagem. Para encontrar essa relação, vamos seguir o procedimento em [54].

Considere o esquema da figura 7. Neste caso, só vamos nos preocupar com o lado da fonte, onde aparece a imagem primária, porque o importante é a relação entre ela e as imagens relativísticas correspondentes. A imagem secundária e as imagens relativísticas secundárias aparecem do outro lado, e considerações semelhantes poderiam ser feitas com relação a elas, mas isso não será necessário para este estudo. Nesta figura, identificamos o parâmetro de impacto ( $b$ ), o raio mínimo ( $r_0$ ), e o ângulo  $\alpha$ , igual ao desvio menos as voltas completas que a luz deu ao redor da origem antes de chegar ao observador. Matematicamente, esta definição é expressa por

$$\alpha = \delta\phi - 2\pi n, \quad (5.1)$$

**Figura 7** – Configuração geométrica da fonte (S), da imagem (I), do observador (O) e da lente (L)



Fonte: [54]

onde índice  $n$  é o número de voltas.

No regime de campo forte, é necessário um alinhamento quase perfeito entre a fonte e a lente para que o efeito seja apreciável. Portanto, o eixo horizontal nesta figura foi exagerado para evidenciar as relações entre os ângulos mostrados. Na realidade, a fonte e a lente se localizam aproximadamente na mesma linha reta  $D_{OS}$  e os ângulos  $\beta$ ,  $\theta$  e  $\alpha$  são todos muito pequenos. Vamos buscar uma relação entre  $\beta$  e  $\theta$ . Conforme a figura 7, podemos escrever

$$D_{OS} \operatorname{tg} \beta + D_{LS} (\operatorname{tg} \theta + \operatorname{tg}(\alpha - \theta)) = D_{OS} \operatorname{tg} \theta. \quad (5.2)$$

Podemos reescrever esta relação como

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \theta - \frac{D_{LS}}{D_{OS}} (\operatorname{tg} \theta + \operatorname{tg}(\alpha - \theta)). \quad (5.3)$$

Como os ângulos são pequenos, suas tangentes podem ser aproximadas pelos próprios ângulos:

$$\operatorname{tg} \beta \approx \beta \quad \operatorname{tg} \theta \approx \theta \quad \operatorname{tg}(\alpha - \theta) \approx \alpha_n - \theta. \quad (5.4)$$

Assim, (5.3) se torna

$$\beta = \theta - \frac{D_{LS}}{D_{OS}} \alpha. \quad (5.5)$$

Devido ao alinhamento quase perfeito entre a fonte e a lente, o ângulo  $\alpha$  depende do parâmetro de impacto, que pode ser aproximado por

$$b \approx D_{OL} \operatorname{tg} \theta \approx D_{OL} \theta, \quad (5.6)$$

Portanto, de acordo com (4.45),

$$\delta\phi(\theta) \approx -\bar{a} \ln \left( \frac{\theta D_{OL}}{b_c} - 1 \right) + \bar{b}. \quad (5.7)$$

Vamos chamar de  $\theta_n^0$  o ângulo cujo desvio correspondente é igual a exatas  $n$  voltas completas, ou seja,  $\delta\phi(\theta_n^0) = 2\pi n$ . Expandindo  $\delta\phi(\theta)$  em torno de  $\theta_n^0$ , temos

$$\delta\phi(\theta) \approx \delta\phi(\theta_n^0) + \left. \frac{\partial(\delta\phi)}{\partial\theta} \right|_{\theta_n^0} (\theta - \theta_n^0) = 2\pi n - \frac{\bar{a} D_{OL}}{b_c e_n} (\theta - \theta_n^0), \quad (5.8)$$

onde

$$e_n = e^{\frac{\bar{b} - 2\pi n}{\bar{a}}}. \quad (5.9)$$

Assim,  $\alpha$  (5.1) se torna

$$\alpha = -\frac{\bar{a} D_{OL}}{b_c e_n} (\theta - \theta_n^0). \quad (5.10)$$

E então, expandindo  $\beta$  em torno de  $\theta_n^0$ , obtemos

$$\beta(\theta) = \theta_n^0 + \left( 1 + \frac{\bar{a} D_{OL} D_{LS}}{b_c e_n D_{OS}} \right) (\theta - \theta_n^0) + O((\theta - \theta_n^0)^2), \quad (5.11)$$

onde podemos desprezar o 1 no termo de primeira ordem em  $(\theta_n - \theta_n^0)$ , tendo em vista que  $b_c$  é pequeno comparado às distâncias com relação à lente ( $D_{OL}$  ou  $D_{LS}$ ). Portanto, temos que

$$\beta \approx \theta_n^0 + \frac{\bar{a}D_{OL}D_{LS}}{b_c e_n D_{OS}}(\theta - \theta_n^0). \quad (5.12)$$

Ou ainda, escrevendo  $\theta_n$  em função de  $\beta$ :

$$\theta_n \approx \theta_n^0 + \frac{b_c e_n D_{OS}}{\bar{a}D_{OL}D_{LS}}(\beta - \theta_n^0). \quad (5.13)$$

Podemos a partir dessa expressão calcular o aumento, definido como

$$\mu_n = \frac{\theta_n^0}{\beta} \frac{\partial \theta}{\partial \beta}. \quad (5.14)$$

A expressão para  $\theta_n^0$  (5.7) é dada por

$$2\pi n = -\bar{a} \ln \left( \frac{\theta_n^0 D_{OL}}{b_c} - 1 \right) + \bar{b} \implies \theta_n^0 = \frac{b_c}{D_{OL}}(1 + e_n). \quad (5.15)$$

Logo, o aumento é calculado como

$$\mu_n = \frac{b_c^2 D_{OS} e_n (1 + e_n)}{\bar{a} \beta D_{OL}^2 D_{LS}}. \quad (5.16)$$

O termo exponencial  $e_n$  mostra que os fluxos das imagens diminuem com o número de voltas, pois  $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\bar{b}-2\pi n}{\bar{a}}} = 0$ . Além disso, conforme  $\beta$  diminui,  $\mu_n$  aumenta, então quanto mais próxima a fonte estiver da reta  $OL$ , mais evidente se torna o lenteamento gravitacional.

Podemos comparar as previsões teóricas com as observações através dos observáveis  $\theta_1$  e  $\theta_\infty$ , que são respectivamente, os ângulos da imagem que deu uma volta e o de uma imagem que deu um número arbitrariamente grande de voltas. Como as imagens relativísticas são muito próximas umas das outras, podemos considerar que coalescem em uma única imagem, separando a mais externa delas. O parâmetro de impacto crítico ( $b_c$ ) pode ser calculado a partir da aproximação (5.6)

$$b_c = D_{OL} \theta_\infty. \quad (5.17)$$

O ângulo de separação ( $s$ ) entre as imagens é definido como

$$s \equiv \theta_1 - \theta_\infty. \quad (5.18)$$

Se ignorarmos a correção  $\frac{b_c e_n D_{OS}}{\bar{a} D_{OL} D_{LS}}(\beta - \theta_n^0)$  em (5.13), devido à diferença de magnitude entre  $b_c$  e  $D_{OL}$ , a expressão de  $s$  pode ser escrita

$$s \approx \theta_1^0 - \theta_\infty^0 = \frac{b_c}{D_{OL}} \left( 1 + e^{\frac{\bar{b}-2\pi}{\bar{a}}} \right) - \frac{b_c}{D_{OL}} = \theta_\infty^0 e^{\frac{\bar{b}-2\pi}{\bar{a}}}. \quad (5.19)$$

Pode-se observar também a razão ( $R$ ) entre o fluxo (luminosidade sobre área) da imagem correspondente a  $\theta_1$  e o fluxo da imagem em  $\theta_\infty$

$$\begin{aligned} R &\equiv \mu_1 \left( \sum_{n=2}^{\infty} \mu^n \right)^{-1} = e_1(1 + e_1) \left( \sum_{n=2}^{\infty} e_n(1 + e_n) \right)^{-1} \\ &= \left( e^{\frac{2\pi}{\bar{a}}} + e^{\frac{\bar{b}}{\bar{a}}} \right) \left( \frac{e^{\frac{2\pi}{\bar{a}}}}{e^{\frac{2\pi}{\bar{a}}} - 1} + \frac{e^{\frac{\bar{b}}{\bar{a}}}}{e^{\frac{4\pi}{\bar{a}}} - 1} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Mas, conforme visto no capítulo 4,  $\bar{a}$  é da ordem de 1 e  $\bar{b}$  é da ordem de  $-1$ , então  $e^{\frac{2\pi}{\bar{a}}}$  prevalece sobre  $e^{\frac{\bar{b}}{\bar{a}}}$  e sobre 1, onde usamos o fato que  $2\pi$  é da ordem de 10. Portanto temos

$$R \approx e^{\frac{2\pi}{\bar{a}}}. \quad (5.21)$$

Sabendo disso, podemos extrair  $\bar{a}$  e  $\bar{b}$  a partir de  $R$ ,  $s$  e  $\theta_\infty$

$$\bar{a} = \frac{2\pi}{\ln R} \quad (5.22)$$

$$\bar{b} = \bar{a} \ln \frac{sR}{\theta_\infty}. \quad (5.23)$$

Assim, poderíamos comparar os parâmetros calculados a partir das observações com os parâmetros do campo forte específicos da métrica (Schwarzschild, RN, etc.) e apontar qual melhor se encaixa com os dados experimentais, quando estes puderem ser obtidos. As métricas podem ser comparadas na Tabela 1, onde usamos como referência o buraco negro supermassivo no centro da Via Láctea (Sagitário A\*), com massa igual a  $4 \cdot 10^6$  vezes a massa do Sol [56] e distante 8.15 kpc do Sistema Solar [57]. Na métrica RN,  $Q = 1m$

**Tabela 1** – Parâmetros do campo forte e observáveis (grandezas angulares medidas em parsecs)

Schw.	Reissner-Nordström ( $Q$ )					Black-bounce ( $a$ )					
		0,3m	0,6m	0,9m	1m	1,05m	0,5m	1m	1,8m	2,3m	2,8m
$\bar{a}$	1	1,01	1,05	1,20	1,41	2,01	1,01	1,06	1,25	1,56	2,79
$\bar{b}$	-0,400	-0,398	-0,397	-0,462	-0,733	-2,44	-0,414	-0,465	-0,799	-1,44	-6,24
$\frac{b_c}{2m}$	2,60	2,56	2,43	2,16	2	1,88	o mesmo que Schwarzschild				
$\theta_\infty$	25,31	24,93	23,67	21,04	19,49	18,29	o mesmo que Schwarzschild				
$s$	0,032	0,034	0,041	0,077	0,136	0,238	0,034	0,047	0,091	0,178	0,282
$R$	535	501	393	186	85,0	22,8	490	373	152	56,5	9,54

**Fonte:** Os valores desta tabela são originais, mas podem ser comparados com [27], de onde tiramos a ideia de expor os resultados em forma de tabela e possui a métrica Janis-Newman-Winicour no lugar da métrica BB, e com [53], que expôs o resultado em forma de gráfico. Além disso, esta tabela utiliza dados atualizados de Sagitário A\* em relação a essas fontes.

corresponde ao caso extremal. Para  $Q = 1,05m$ , o espaço possui duas esferas de fótons (considerou-se somente a mais externa para o cálculo da tabela), mas não tem horizonte de eventos. Para valores de  $Q^2$  acima de  $\frac{9}{8}m^2$ , não há esferas de fótons (mais detalhes

deste caso em [58]). Na métrica BB (estudada no contexto de lentes gravitacionais em [53, 59]), os dois maiores valores considerados correspondem ao caso do buraco de minhoca atravessável. Nesta métrica, o limite superior para o parâmetro  $a$  é  $3m$ , onde o valor de  $\bar{a}$  (4.75) explode.

Inferese pela tabela que a métrica RN é mais facilmente distinguível da métrica de Schwarzschild do que a métrica BB, por apresentar diferença na posição angular da imagem relativística mais interna, um parâmetro mais fácil de se detectar do que os outros observáveis. Também é possível perceber um comportamento similar dos observáveis em relação aos parâmetros específicos das métricas, pois tanto na métrica RN quanto na métrica BB, o ângulo de separação aumenta com o parâmetro, enquanto que o fluxo relativo da imagem relativística mais externa diminui em comparação com as demais.



## 6 Conclusão

O foco principal dessa dissertação foi fornecer um estudo detalhado do desvio da luz usando o formalismo de campo forte, sendo um trabalho puramente de revisão. Aplicamos este formalismo a diversos *backgrounds*, quais sejam: métricas de Schwarzschild, Reissner-Nordström e de *black-bounce*. Além disso, estudamos o fenômeno de lentes gravitacionais, um efeito que já fora bem estudado no regime de campo fraco, mas possui características diferentes no regime de campo forte.

No capítulo 1, fizemos uma introdução genérica, abordando diversos tópicos relevantes da física gravitacional, desde a contextualização histórica na qual a RG fora desenvolvida até a descrição de alguns fenômenos gravitacionais observados recentemente, que podem motivar o desenvolvimento de uma nova física.

No capítulo 2, revisamos os principais aspectos da RG. Vimos que a RG é fundamentada no princípio de equivalência, que garante que, na vizinhança de um ponto do espaço-tempo, um campo gravitacional e um referencial acelerado são equivalentes. Na prática, a consequência disso é que, localmente (na vizinhança desse ponto), são válidas as leis da Relatividade Especial. Dado o caráter lorentziano local da RG preconizado pelo princípio de equivalência, seu caráter “global”, ou seja, quando o campo gravitacional não pode ser mais tratado como sendo aproximadamente homogêneo, está intrinsecamente relacionado com a curvatura do espaço-tempo, codificado através do tensor métrico. O outro ingrediente fundamental são a matéria e a energia, que dão origem à curvatura do espaço. Tal relação é explicitamente constatada através das equações de Einstein. Por fim, tratamos dos testes clássicos que ratificaram o grande sucesso da RG.

A partir do capítulo 3, nos concentramos no desvio da luz. Nesse capítulo, descrevemos em detalhes o algoritmo que fornece o ângulo de deflexão da luz no regime de campo fraco, considerando um *background* esfericamente simétrico e estático. Aplicamos o algoritmo para três métricas esfericamente simétricas, a saber: métricas de Schwarzschild, Reissner-Nordström e *black-bounce*. Por exemplo, vimos que, no caso da métrica de *black-bounce*, o ângulo de deflexão é igual à soma do ângulo de deflexão da métrica de Schwarzschild mais um termo proporcional ao quadrado do parâmetro de *bouncing* ( $a$ ).

No capítulo 4, discutimos a deflexão da luz no regime de campo forte. Destacamos que o limite de campo forte passa a ser relevante quando a luz passa pelo objeto defletor (por exemplo, um buraco negro) a uma distância da ordem do raio da esfera de fótons ( $r_m$ ). No que se segue, apresentamos detalhadamente o algoritmo desenvolvido por Bozza [54] e Tsukamoto [55] e o aplicamos para as mesmas métricas estudadas no regime de campo fraco. Verificamos que as expressões para os ângulos de deflexão da luz para essas

métricas diferem drasticamente daquelas obtidas no capítulo anterior.

Finalmente, no capítulo 5, tratamos das lentes gravitacionais no regime de campo forte, onde surgem as imagens relativísticas. Nesse contexto, definimos certos observáveis ( $\theta_\infty$ ,  $s$  e  $R$ ), quantidades físicas medidas experimentalmente, a partir dos quais é possível inferir os parâmetros definidos no regime de campo forte e comparar os resultados experimentais com as previsões dadas por cada métrica. Esses resultados requerem mais precisão do que os últimos avanços tecnológicos permitem, mas fizemos uma projeção dos possíveis resultados tomando como exemplo o buraco negro no centro da Via Láctea.

Para o futuro, esperamos estudar as lentes gravitacionais em outras métricas, em especial naquelas que levam em conta a rotação do buraco negro, como as métricas de Kerr e de Kerr-Newman [60]. Nesses casos, não há a condição de simetria esférica utilizada nesta dissertação, mas ainda é possível analisar as trajetórias de fótons no plano equatorial.

# Referências

- 1 ASHBY, N. Relativity in the Global Positioning System. **Living Reviews in Relativity**, Springer, Berlim, v. 6, Jan. 2003. Article number: 1.
- 2 RUFFINI, R.; WHEELER, J. A. Introducing the black hole. **Physics Today**, v. 24, n. 1, p. 30–41, Jan. 1971. ISSN 0031-9228. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.3022513>>.
- 3 OROSZ, J. A. et al. THE MASS OF THE BLACK HOLE IN CYGNUS X-1. **The Astrophysical Journal**, AAS, v. 742, n. 2, p. 84, Nov. 2011. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1088/0004-637X/742/2/84>>.
- 4 AKIYAMA, K. et al. First M87 Event Horizon Telescope Results: I. The Shadow of the Supermassive Black hole. **The Astrophysical Journal Letters**, AAS, v. 875, n. 1, p. L1, Apr. 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.3847/2041-8213/ab0ec7>>.
- 5 AKIYAMA, K. et al. First Sagittarius A\* Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole in the Center of the Milky Way. **The Astrophysical Journal Letters**, AAS, v. 930, n. 2, p. L12, May 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.3847/2041-8213/ac6674>>.
- 6 ABBOTT, B. P. et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. **Physical Review Letters**, APS, v. 116, n. 6, p. 061102, Feb. 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.061102>>.
- 7 von MARTTENS, R. et al. Cosmological constraints on parametrized interacting dark energy. **Physics of the Dark Universe**, v. 23, p. 100248, 2019. ISSN 2212-6864. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2212686418300992>>.
- 8 PERSIC, M.; SALUCCI, P.; STEL, F. The universal rotation curve of spiral galaxies — I. The dark matter connection. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 281, n. 1, p. 27–47, July 1996. ISSN 0035-8711. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093/mnras/278.1.27>>.
- 9 SOFUE, Y.; RUBIN, V. Rotation Curves of Spiral Galaxies. **Annual Review of Astronomy and Astrophysics**, v. 39, n. 1, p. 137–174, 2001. Disponível em: <<https://doi.org/10.1146/annurev.astro.39.1.137>>.
- 10 URBAN, F. R.; ZHITNITSKY, A. R. Cosmological constant, violation of cosmological isotropy and CMB. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP, v. 2009, n. 9, p. 18, Sep. 2009. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2009/09/018>>.
- 11 BENNETT, C. L. et al. NINE-YEAR WILKINSON MICROWAVE ANISOTROPY PROBE (WMAP) OBSERVATIONS: FINAL MAPS AND RESULTS. **The Astrophysical Journal Supplement Series**, AAS, v. 208, n. 2, p. 20, Sep. 2013. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1088/0067-0049/208/2/20>>.

- 12 RIESS, A. G. et al. Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant. **The Astronomical Journal**, AAS, v. 116, n. 3, p. 1009, Sep. 1998. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1086/300499>>.
- 13 WEINBERG, S. The cosmological constant problem. **Rev. Mod. Phys.**, APS, v. 61, n. 1, p. 1–23, Jan. 1989. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.61.1>>.
- 14 SCHÜTZHOLD, R.; UNRUH, W. G. Quantum correlations across the black hole horizon. **Phys. Rev. D**, APS, v. 81, n. 12, p. 124033, June 2010. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.81.124033>>.
- 15 SOTIRIOU, T. P.; FARAONI, V.  $f(r)$  theories of gravity. **Rev. Mod. Phys.**, APS, v. 82, p. 451–497, Mar. 2010. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.82.451>>.
- 16 de RHAM, C. Galileons in the sky. **Comptes Rendus Physique**, v. 13, n. 6, p. 666–681, 2012. ISSN 1631-0705. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1631070512000473>>.
- 17 CRISOSTOMI, M.; KOYAMA, K.; TASINATO, G. Extended scalar-tensor theories of gravity. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP, v. 2016, n. 4, p. 44, Apr. 2016. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2016/04/044>>.
- 18 SCHNEIDER, P.; EHLERS, J.; FALCO, E. E. **Gravitational Lenses**. Berlim: Springer, 1992.
- 19 HOGAN, C.; NARAYAN, R. Gravitational lensing by cosmic strings. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 211, p. 575–591, Dec. 1984.
- 20 EINSTEIN, A. Lens-Like Action of a Star by the Deviation of Light in the Gravitational Field. **Science**, v. 84, n. 2188, p. 506–507, 1936. Disponível em: <<https://doi.org/10.1126/science.84.2188.506>>.
- 21 SCHMIDT, D. 3C273: A Star-Like Object with Large Red-Shift. **Nature**, Nature, Londres, v. 197, p. 1040, Mar. 1963.
- 22 WALSH, D.; CARSWELL, R. F.; WEYMANN, R. J. 0957+561 A, B: twin quasistellar objects or gravitational lens? **Nature**, Nature, Londres, v. 279, p. 381–384, May 1979.
- 23 LIMA, J. A. S.; SANTOS, R. C. Do Eclipse Solar de 1919 ao Espetáculo das Lentes Gravitacionais. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, SBF, v. 41, p. e20190199, 2019. ISSN 1806-1117.
- 24 VIRBHADRA, K. S.; ELLIS, G. F. R. Schwarzschild black hole lensing. **Phys. Rev. D**, APS, College Park, v. 62, n. 8, p. 084003, Sep. 2000. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.62.084003>>.
- 25 HASSE, W.; PERLICK, V. Gravitational lensing in spherically symmetric static spacetimes with centrifugal force reversal. **General Relativity and Gravitation**, Springer, v. 34, p. 415–433, Mar. 2002.
- 26 EIROA, E. F.; ROMERO, G. E.; TORRES, D. F. Reissner-Nordström black hole lensing. **Phys. Rev. D**, APS, College Park, v. 66, n. 2, p. 024010, July 2002.

- 27 BOZZA, V. Gravitational lensing in the strong field limit. **Phys. Rev. D**, APS, College Park, v. 66, n. 10, p. 103001, Nov. 2002. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.66.103001>>.
- 28 CAMPOS, A.; RICARDO, É. C. A complexidade do movimento local na Física aristotélica. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, SBF, São Paulo, v. 34, n. 3, p. 3601, jul. 2012. ISSN 1806-1117.
- 29 MOODY, E. A. Laws of Motion in Medieval Physics. **The Scientific Monthly**, AAAS, Washington, v. 72, n. 1, p. 18–23, Jan. 1951. ISSN 00963771.
- 30 DAMASIO, F. O início da revolução científica: questões acerca de copérnico e os epíclis, kepler e as órbitas elípticas. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, SBF, São Paulo, v. 33, n. 3, p. 3602, jul. 2011. ISSN 1806-1117.
- 31 CLOTFELTER, B. E. The Cavendish experiment as Cavendish knew it. **American Journal of Physics**, AIP, Melville, v. 55, n. 3, p. 210–213, Mar. 1987. ISSN 0002-9505. Disponível em: <<https://doi.org/10.1119/1.15214>>.
- 32 PANNEKOEK, A. The Discovery of Neptune. **Centaurus**, Munksgaard, Copenhagen, v. 3, n. 1, p. 126–137, 1953. Disponível em: <<https://doi.org/https://doi.org/10.1111/j.1600-0498.1953.tb00525.x>>.
- 33 NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de Física Básica**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2002. v. 1.
- 34 WEINBERG, S. **Gravitation and Cosmology**: Principles and applications of the general theory. Nova Iorque: John Wiley & Sons, 1972.
- 35 BRANS, C.; DICKE, R. H. Mach's principle and a relativistic theory of gravitation. **Phys. Rev.**, APS, College Park, v. 124, n. 3, p. 925–935, Nov. 1961. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRev.124.925>>.
- 36 D'INVERNO, R. **Introducing Einstein's Relativity**. Nova Iorque: Oxford University, 1992.
- 37 O'NEILL, B. **Semi-Riemannian geometry**: with applications to relativity. San Diego: AP, 1983.
- 38 CARMO, M. P. do. **Geometria riemanniana**. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.
- 39 GOENNER, H. F. M. On the History of Unified Field Theories. **Living Reviews in Relativity**, Springer, Berlim, v. 7, Dec. 2004. Article number: 2.
- 40 CARROLL, S. M. **Spacetime and geometry**: An introduction to general relativity. San Francisco: Addison Wesley, 2004.
- 41 ADLER, R.; BAZIN, M.; SCHIFFER, M. **Introduction to General Relativity**. 2. ed. Tóquio: McGraw-Hill, 1975.
- 42 EINSTEIN, A. Über den Einfluß der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichtes. **Annalen der Physik**, v. 340, n. 10, p. 898–908, 1911.

- 43 WILL, C. M. Henry Cavendish, Johann von Soldner, and the deflection of light. **American Journal of Physics**, AIP, Melville, v. 56, n. 5, p. 413–415, May 1988. ISSN 0002-9505. Disponível em: <<https://doi.org/10.1119/1.15622>>.
- 44 EINSTEIN, A. Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. **Annalen der Physik**, v. 354, n. 7, p. 769–822, 1916.
- 45 SOARES, D. S. L. **Newtonian gravitational deflection of light revisited**. 2009. ArXiv preprint. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/physics/0508030>>.
- 46 CRISPINO, L. C. B.; KENNEFICK, D. J. A hundred years of the first experimental test of general relativity. **Nature Physics**, Nature, Londres, v. 15, n. 5, p. 416–419, May 2019.
- 47 FOMALONT, E. B.; SRAMEK, R. A. Measurements of the Solar Gravitational Deflection of Radio Waves in Agreement with General Relativity. **Phys. Rev. Lett.**, APS, College Park, v. 36, n. 25, p. 1475–1478, June 1976. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.36.1475>>.
- 48 SHAPIRO, I. I. Fourth Test of General Relativity. **Phys. Rev. Lett.**, APS, v. 13, n. 26, p. 789–791, Dec. 1964. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.13.789>>.
- 49 WILL, C. M. The Confrontation between General Relativity and Experiment. **Living Reviews in Relativity**, Springer, Berlim, v. 17, Dec. 2014. Article number: 4.
- 50 WALD, R. M. **General relativity**. Chicago: University of Chicago, 1984.
- 51 GÉRARD, J.-M.; PIREAUX, S. **The observable light deflection angle**. 1999. ArXiv preprint. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/gr-qc/9907034>>.
- 52 SIMPSON, A.; VISSER, M. Black-bounce to traversable wormhole. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP, Bristol, v. 2019, n. 2, p. 42, Feb. 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1475-7516/2019/02/042>>.
- 53 NASCIMENTO, J. R. et al. Gravitational lensing in black-bounce spacetimes. **Phys. Rev. D**, APS, v. 102, p. 044021, Aug. 2020. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.102.044021>>.
- 54 BOZZA, V. et al. Strong field limit of black hole gravitational lensing. **General Relativity and Gravitation**, Springer, Berlim, v. 33, p. 1535–1548, 2001.
- 55 TSUKAMOTO, N. Deflection angle in the strong deflection limit in a general asymptotically flat, static, spherically symmetric spacetime. **Phys. Rev. D**, APS, College Park, v. 95, n. 6, p. 064035, Mar. 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.95.064035>>.
- 56 AKIYAMA, K. et al. First Sagittarius A\* Event Horizon Telescope results. IV. Variability, Morphology, and Black Hole Mass. **The Astrophysical Journal Letters**, AAS, v. 930, n. 2, p. L15, May 2022. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.3847/2041-8213/ac6736>>.

- 57 REID, M. J. et al. Trigonometric Parallaxes of High-mass Star-forming Regions: Our View of the Milky Way. **The Astrophysical Journal**, AAS, v. 885, n. 2, p. 131, Nov. 2019. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.3847/1538-4357/ab4a11>>.
- 58 TSUKAMOTO, N. Gravitational lensing by a photon sphere in a Reissner-Nordström naked singularity spacetime in strong deflection limits. **Phys. Rev. D**, APS, v. 104, n. 12, p. 124016, Dec. 2021. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.104.124016>>.
- 59 TSUKAMOTO, N. Gravitational lensing in the Simpson-Visser black-bounce spacetime in a strong deflection limit. **Phys. Rev. D**, APS, v. 103, p. 024033, Jan. 2021. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.103.024033>>.
- 60 HSIEH, T.; LEE, D.-S.; LIN, C.-Y. Strong gravitational lensing by kerr and kerr-newman black holes. **Phys. Rev. D**, APS, v. 103, p. 104063, May 2021. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.103.104063>>.