



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO STRICTO SENSU EM FÍSICA

Ramires Nascimento da Silva

**Modelos Generalizados de Chern-Pontryagin e uma Nova Teoria de Espinores
Não-Locais**

João Pessoa/PB

2025

MODELOS GENERALIZADOS DE CHERN-PONTRYAGIN E UMA NOVA TEORIA DE
ESPINORES NÃO-LOCAIS

Ramires Nascimento da Silva

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Física da Universidade Federal da Paraíba, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Física, na área de concentração: Teoria de Campos e Partículas.

Orientador: Prof. Dr. Paulo José Ferreira
Porfírio da Silva

Coorientador: Prof. Dr. Albert Petrov

João Pessoa/PB

2025

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S586m Silva, Ramires Nascimento da.

Modelos Generalizados de Chern-Pontryagin e uma Nova Teoria de Espinores Não-Locais / Ramires Nascimento da Silva. - João Pessoa, 2025.

143 f. : il.

Orientação: Paulo José Ferreira Porfírio da Silva.

Coorientação: Albert Petrov.

Tese (Doutorado) - UFPB/CCEN.

1. Gravitação - teorias modificadas. 2. Relatividade geral. 3. Teorias Não-Locais. 4. Invariância de Lorentz. 5. Gravidade Chern-Simons. I. Silva, Paulo José Ferreira Porfírio da. II. Petrov, Albert. III. Título.

UFPB/BC


CDU 531.5(043)




Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Física

Ata da Sessão Pública da Defesa de tese de Doutorado do aluno **Ramires Nascimento da Silva**, candidato ao Título de Doutor em Física na Área de Concentração Física das Partículas Elementares e Campos.


Aos vinte e nove dias do mês de agosto do ano de dois mil e vinte e cinco, às 10h00, na sala virtual meet.google.com/fav-jqhp-gbj, reuniram-se os membros da Banca Examinadora constituída para avaliar a tese de Doutorado, na área de Física das Partículas Elementares e Campos, de **Ramires Nascimento da Silva**. A banca foi composta pelos(as) professores(as) doutores(as): Paulo José Ferreira Porfírio da Silva (PPGF/UFPB), orientador e presidente da banca examinadora, Albert Petrov (PPGF/UFPB), coorientador, Dionísio Bazeia Filho (PPGF/UFPB), Jorge Gabriel Gomes de Souza Ramos (PPGF/UFPB), André Carlos Lehum (UFPB) e Roberto Vinhaes Maluf Cavalcante (UFC). Dando início aos trabalhos, o Prof. Paulo José Ferreira Porfírio da Silva comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a palavra para o candidato, para que o mesmo fizesse, oralmente, a exposição da pesquisa de tese intitulada “*Modelos Generalizados de Chern-Pontryagin e uma Nova Teoria de Espinores Não-Locais*”. Concluída a exposição, o candidato foi arguido pela Banca Examinadora, que emitiu o parecer “**aprovado**”. Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba expedir o respectivo diploma de Doutor em Física na forma da lei. E para constar, Ana Beatriz Cândido Vieira, Assistente em Administração, redigiu a presente ata que vai assinada pelos membros da Banca Examinadora. João Pessoa, Paraíba, **29 de agosto de 2025**.

Documento assinado digitalmente
 PAULO JOSÉ FERREIRA PORFÍRIO DA SILVA
Data: 01/09/2025 12:02:34-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>


Prof. Dr. Paulo José Ferreira Porfírio da Silva
Orientador - PPGF/UFPB

Documento assinado digitalmente
 ALBERT PETROV
Data: 01/09/2025 12:25:36-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>


Prof. Dr. Albert Petrov
Coorientador - PPGF/UFPB

Documento assinado digitalmente
 DIONÍSIO BAZEIA FILHO
Data: 29/08/2025 23:28:32-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>


Prof. Dr. Dionísio Bazeia Filho
PPGF/UFPB

Documento assinado digitalmente
 JORGE GABRIEL GOMES DE SOUZA RAMOS
Data: 29/08/2025 19:43:10-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Jorge Gabriel Gomes de Souza Ramos
PPGF/UFPB

Documento assinado digitalmente
 ANDRÉ CARLOS LEHUM
Data: 29/08/2025 14:02:25-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. André Carlos Lehum
UFPB

Documento assinado digitalmente
 ROBERTO VINHAES MALUF CAVALCANTE
Data: 29/08/2025 17:44:57-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Roberto Vinhaes Maluf Cavalcante
UFC

Agradecimentos

Primeiramente, registro o meu mais profundo agradecimento aos meus pais, pela proteção, pelo zelo e pelo amor a mim dedicados em todos os momentos da minha vida. Expresso minha extrema gratidão à minha esposa, pela ternura e cuidado sempre presentes, pela compreensão diante da minha dedicação aos estudos, muitas vezes em detrimento do nosso convívio. Do mesmo modo, agradeço aos meus três amorosos filhos.

Aos colegas de turma e de trabalho, manifesto meu sincero obrigado pela ajuda prestada sempre que precisei. Igualmente, estendo meu reconhecimento a todos que, de modo direto ou indireto, contribuíram para a realização deste projeto.

Minha profunda gratidão dirige-se aos competentes e dedicados Professores Paulo Porfírio e Albert Petrov, pelo inabalável suporte em todas as circunstâncias. Sou grato a esses profissionais que, através de um convívio sempre harmonioso e respeitoso, com suas orientações altruístas, conselhos desprendidos, críticas construtivas e valiosos ensinamentos, contribuíram decisivamente para a formulação desta tese.

In memoriam, rendo meu penhorado e respeitoso agradecimento aos Professores Ivon Palmeira Fittipaldi e Luiz Guimarães Ferreira, meus primeiros orientadores, quando eu ainda era estudante de graduação em Física na estimada Universidade Federal de Pernambuco, e de pós-graduação em Física na Universidade de Campinas, respectivamente.

Por fim, registro o meu excelso agradecimento ao meu grandioso e bondoso Deus, por me conceder vida, saúde e sabedoria. Muito obrigado, Senhor, pelo Seu inefável amor, graça, paz e misericórdia, e pelas incontáveis bênçãos derramadas sobre mim, pois “Ele realiza maravilhas insondáveis, milagres que não se podem contar” (Jó 5:9).

**"He stretcheth out the north over the empty
place, and hangeth the earth upon nothing."**

(Job 27:2, King James Version Bible)

Resumo

Esta Tese discorre sobre teorias modificadas da gravitação, explorando aspectos inerentes a causalidade, unitariedade, renormalizabilidade, invariância de Lorentz e quebra de simetria CPT, com destaque aos resultados originais extraídos de duas novas categorias de modelos: i) Modelos generalizados de gravidade Chern-Pontryagin; e ii) Modelo de campo de spin-1/2 não-local, no espaço de Minkowski. No primeiro, formulamos uma classe de modelos de gravidade modificada em 4 dimensões, cuja ação é caracterizada por uma função arbitrária do escalar de Ricci e do termo topológico de Chern-Pontryagin $*RR$. Dentro desta estrutura, para dois protótipos em particular, $f_I(R, *RR) = R + \beta(*RR)^2$ e $f_{II}(R, *RR) = R + \alpha R^2 + \beta(*RR)^2$, derivamos e resolvemos suas respectivas equações do campo para dois ansatz: as métricas tipo-Gödel ST-homogêneas com perturbações em primeira ordem e a métrica de Schwarzschild em rotação lenta, que produziu o efeito Lense-Thirring com uma correção em primeira ordem, potencializado pelo parâmetro angular L , que caracteriza os desvios dos resultados da relatividade geral. Mostramos que os modelos generalizados de Chern-Pontryagin admitem uma representação escalar-tensorial, cuja forma explícita apresenta dois campos escalares: Φ com grau de liberdade dinâmico (*scalaron*), e ϕ não-dinâmico, que surge acoplado ao termo topológico de Chern-Pontryagin $*RR$, ou seja, $\phi *RR$, chamado de termo de Chern-Simons gravitacional. Na segunda categoria de modelo, elaboramos uma nova teoria de campo de spin-1/2 não-local, na qual os fatores de forma dependem do operador de Dirac, e não do de d'Alembert. Em seu nível clássico, investigamos a relação de dispersão das partículas livres, que se desvia cada vez mais do caso padrão à medida que os efeitos não-locais se tornam relevantes. No nível quântico, calculamos a ação não-local efetiva de um laço fermiônico com acoplamento de Yukawa. Mostramos que as contribuições dos efeitos não-locais são significativas no limite UV, enquanto no IR elas são suprimidas por uma escala de corte UV, que foi escolhida ser coincidente com a escala da não-localidade Λ . Ademais, acoplamos minimamente um campo de calibre $U(1)$, com demonstração explícita da invariância de gauge do modelo. Finalmente, obtivemos uma versão não-local da equação de Pauli, avaliando seu impacto no fator g_s das partículas massivas.

keywords: Teorias modificadas da gravitação. Relatividade geral. Teorias não-locais. Termo Chern-Pontryagin. Gravidade de Chern-Simons. Invariância de Lorentz. Causalidade.

Abstract

This thesis discusses modified theories of gravitation, exploring aspects inherent to causality, unitarity, renormalizability, Lorentz invariance and CPT symmetry breaking, with emphasis on the original results extracted from two new categories of models: i) generalized Chern-Pontryagin gravity models; and ii) the non-local spin-1/2 field model, in Minkowski space. In the first case, we formulate a new class of modified gravity models in 4 dimensions, whose action is characterized by an arbitrary function of the Ricci scalar and the topological Chern-Pontryagin term $*RR$. Within this framework, we derive the gravitational field equations and solve them for a particular model $f_I(R, *RR) = R + \beta(*RR)^2$ and $f_{II}(R, *RR) = R + \alpha R^2 + \beta(*RR)^2$, considering two ansatzes: the slowly rotating Schwarzschild metric and first-order perturbations of Gödel-type metrics. For the former, considering slowly rotating Schwarzschild metric, we find a first-order correction to the frame dragging effect boosted by the parameter L , which characterizes the departures from general relativity results. We show that generalized four-dimensional Chern-Pontryagin models admit a scalar-tensor representation, whose explicit form presents two scalar fields: Φ , a dynamical degree of freedom (*scalaron*). In contrast, the second, ϕ , is a non-dynamical degree of freedom, which arises coupled with the Chern-Pontryagin topological term $*RR$, that is, $\phi *RR$, which is nothing more than the gravitational Chern-Simons term. In the latter model, we create a novel nonlocal spin-1/2 field theory in which the form factors depend on the Dirac operator rather than on the d'Alembert operator. At the classical level, we investigate the dispersion relation of free spin-1/2 particles and find that it increasingly deviates from the standard case as the nonlocal effects become relevant. At the quantum level, we compute the fermionic one-loop effective action for the nonlocal spin-1/2 theory with Yukawa coupling and show that the contributions of nonlocal effects are significant in the UV limit. At the same time, in the IR they are suppressed by a UV cutoff scale, which has been chosen to coincide with the nonlocality scale Λ . We minimally couple a $U(1)$ gauge field to the non-local spin-1/2 field theory and explicitly demonstrate that this theory is gauge invariant. Finally, we obtain a nonlocal version of the Pauli equation and the impact of the nonlocality on the g_s -factor of massive particles.

Keywords: Modified theories of gravitation. General relativity. Chern-Pontryagin gravity models. Chern-Simons term. Non-local gravity. Lorentz invariance. Causality.

Lista de Publicações

Durante o período em que o aluno subscritor esteve matriculado no curso de DOUTORADO em Física, na Pós-Graduação *stricto sensu* na Universidade Federal da Paraíba:

1) Nascimento, J.R., Petrov, A.Y., Porfírio, P.J. and da Silva, Ramires N. *Generalized Chern–Pontryagin models*. European Physical Journal C, 84, 1199 (2024). <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-024-13607-7>

2) Nascimento, J.R., Petrov, A.Y., Porfírio, P.J. and da Silva, Ramires N. *A Novel Nonlocal Spin-1/2 Theory: Classical and Quantum Aspects*. Preprint: ArXiv:2505.07483v1 [hep-th] (2025). <https://doi.org/10.48550/arXiv.2505.07483>

Lista de ilustrações

1	CTC de um raio de luz representada no plano azimutal $z = 0$ para classe linear plana de métricas tipo-Gödel. Crédito da figura: <i>Wave fronts in a causality violating Godel-type metric</i> , Kling, T. P.; Ahmed, F.; Lalumiere, M., 2020, arXiv:2005.03417 [gr-qc].	17
2	Representação esquemática das linhas geodésicas: (a) Sem o efeito de arrasto de referenciais; (b) Com o efeito de arrasto de referenciais. Crédito da figura: <i>Frame Dragging and Geodetic Effect Derived: Two More Tests of GR</i> . Springer International Publishing, 2020. Manoukian, E. B.	58
3	Gráficos da relação de dispersão não-local dada pela Eq.(5.42) para diferentes valores de massa: $m = 1$ (linha azul), $m = 2$ (linha amarela) e $m = 3$ (linha verde).	74
4	Diagrama de Feynman: Amplitude de espalhamento para dois férmions, trocando um méson. Crédito da figura: https://en.wikipedia.org/wiki/Yukawa-potential/media/File: Momentum-exchange.svg	75
5	Diagrama de Feynman: Correções supersimétricas para o fator $(g_s - 2)$ do múon devido ao envolvimento do bóson de gauge Z' . Crédito da Figura: <i>Supersymmetric gauged $U(1)L\mu-L\tau$ model for neutrinos and the muon $(g_s - 2)$ anomaly</i> . Banerjee, H.; Byakti, P.; Roy, S.: Physical Review D - (APS).	87

Lista de abreviaturas e siglas

RG: Relatividade Geral

RE: Relatividade Especial

UV: Ultravioleta

IR: Infravermelho

MQ: Mecânica Quântica

VSR: *Very Special Relativity*

TQC: Teoria Quântica de Campos

CTC: *Closed Time-like Curve*

QED: Eletrodinâmica quântica - (*Quantum Electrodynamics*)

CMB: *Cosmic Microwave Background*

VL: Violação de Lorentz

QSL: Quebra de Simetria de Lorentz

CDM: *Cold Dark Matter*

CCP: *Cosmological Coincidence Problem*

FRW: Friedmann-Robertson-Walker

SM: Modelo Padrão - (*Standard Model*)

SME: Modelo Padrão Estendido - (*Standard Model Extension*)

CPT: Carga-Paridade-Tempo

GHY: Gibbons-Hawking-York

BD: Brans-Dicke

CSMG: Gravidade Modificada de Chern-Simons

BCH: Fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff

TCE: Teoria de Campos Efetiva

Sumário

1 INTRODUÇÃO	1
2 RELATIVIDADE GERAL	8
2.1 Uma Teoria de Descrição Essencialmente Geométrica	8
2.1.1 Formalismo Riemanniano: (\mathcal{M}, g)	8
2.1.2 Formalismo de Palatini: $(g^{\mu\nu}, \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda})$	11
2.1.3 Formalismo de Tetradas: $e_{\mu}^a(x^{\mu})$	12
2.2 Soluções das Equações de Einstein	14
2.2.1 Métrica de Schwarzschild	14
2.2.2 Métricas de Friedmann-Robertson-Walker e de Gödel	14
2.2.3 Métricas Tipo-Gödel ST-Homogêneas	15
2.3 Limitações da Gravitação de Einstein	18
2.3.1 Aceleração Cósmica	18
2.3.2 A descrição Quântica da Gravidade	21
2.3.3 Linearização da Relatividade Geral	22
2.4 Equação de Dirac no Espaço Curvo	24
3 TEORIAS MODIFICADAS DA GRAVITAÇÃO	27
3.1 Modificações no Setor Gravitacional Puro	27
3.1.1 Gravidade Escalar-Tensorial	30
3.1.2 Gravidade Vetor-Tensorial	31
3.1.3 Gravidade Horava-Lifshitz	31
3.2 Modelos Topológicos de Chern-Simons	32
3.2.1 Modelos de Chern-Simons Tridimensionais	33
3.2.2 Gravidade Modificada de Chern-Simons Quadridimensional	34
3.2.3 Gravidade Modificada de Chern-Simons Dinâmico	37
3.3 Invariância de Lorentz	38
3.3.1 Quebra de Simetria de Lorentz e CPT na Gravitação	41
3.4 Teorias Não-Locais da Gravitação	42
3.4.1 Aspectos Gerais	42
3.4.2 Cenário gravitacional	44
3.4.3 Equação de Poisson Newtoniana Não-local	45
4 MODELOS GENERALIZADOS DE CHERN-PONTRYAGIN	47
4.1 Ação e Equações de Campo da Teoria	47
4.1.1 Equações de Vínculo do Modelo $f = f_1(R) + f_2(*RR)$	50
4.1.2 Equações de Campo no Frame de Jordan	51

4.1.3	Equações de Campo no Frame de Einstein	53
4.2	Perturbação do espaço-tempo de Schwarzschild	55
4.2.1	Efeito Lense-Thirring do Modelo $f_I = R + \beta(*RR)^2$	57
4.3	Esquema Perturbativo para Métricas Tipo-Gödel ST-Homogêneas	59
4.3.1	Modelo $f_I = R + \beta(*RR)^2$	59
4.3.2	Modelo $f_{II} = R + \alpha R^2 + \beta(*RR)^2$	61
5	TEORIA DE CAMPO ESPINORIAL NÃO-LOCAL NO ESPAÇO DE MIN-KOWSKI	63
5.1	Modelo de Campo Spin-1/2 Não-Local Livre	63
5.1.1	Fator de Forma do Operador d'Alembertiano $F(\square)$	63
5.1.2	Fator de Forma do Operador de Dirac $F(\gamma^\mu \partial_\mu)$	67
5.1.3	Relação de Dispersão da Teoria Livre de Spin-1/2 Não-Local	71
5.2	Modelo de Campo Spin-1/2 Não-Local Acoplada	74
5.2.1	Interação de Yukawa	74
5.2.2	Ação Efetiva Fermiônica Não-Local de Um-Laço com Acoplamento Yukawa	75
5.2.3	Acoplamento Espinorial Não-local com o Campo Eletromagnético	80
5.2.4	Invariância de Gauge da Ação Acoplada	82
5.3	O Limite Não Relativístico e a Equação de Pauli Não-Local	84
5.3.1	Fator g_s Não-Local	87
6	CONCLUSÃO	89
6.1	Modelos Generalizados de Gravidade Chern-Pontryagin	89
6.2	Modelo de Campo Espinorial Não-Local	90
6.3	Perspectivas Futuras	91
	APÊNDICE A – CÁLCULOS AUXILIARES	92
A.1	Equações de Einstein no Formalismo Lagrangiano	92
A.2	Variação do Termo de Pontryagin na Ação de Chern-Simons	94
A.3	Divergência Covariante do Tensor de Cotton	96
A.4	Divergência das Equações de Campo da Teoria $f(R, *RR)$	97
A.5	Obtenção da Ação Efetiva Fermiônica Não-Local de Um-Laço	99
	APÊNDICE B – TEOREMAS E DEFINIÇÕES	102
B.1	Instabilidades de Ostrogradsky	102
B.2	Teorema de Lovelock	105
B.3	Teorema da Fatoração de Weierstrass	106
B.4	Estruturas Geométricas da Gravitação Quadridimensional	107
	REFERÊNCIAS	108

1 Introdução

A teoria da Relatividade Geral (RG) de Albert Einstein (1879-1955), introduzida, em 1915, pelo desdobramento da teoria da Relatividade Especial (RE), é considerada uma das maiores conquistas da ciência, e uma das mais belas teorias da física, contendo em si uma série de previsões físicas fundamentais, confirmadas experimentalmente com alto grau de precisão no regime infravermelho (IR), ou seja, em grandes distâncias e em tempos tardios [1, 2]. No entanto, a despeito de ser uma consagrada teoria científica, após suas grandes conquistas obtidas nos testes clássicos¹ [3], existem questões em aberto sugerindo ser a gravitação de Einstein incompleta. Pois, a RG carece de previsibilidade no regime ultravioleta (UV), não é perturbativamente renormalizável em seu regime quântico. E, na perspectiva clássica, a RG padece com a presença de singularidades dos buracos negros e cosmológicas, anomalias astrofísicas [4, 5] e, também, a existência de uma quimérica energia escura², sugerida pelas observações no espectro do IR [6, 7].

Assim sendo, o interesse pelo estudo das teorias estendidas³ da gravidade tem ganhado cada vez mais destaque, devido à motivação combinada vindo da física de altas energias, das questões em aberto na cosmologia e astrofísica, e das recentes descobertas cosmológicas, quais sejam: aceleração cósmica [8], ondas gravitacionais de origem cósmica⁴ [9, 10, 11], obtenção da primeira imagem da sombra de um buraco negro supermassivo e da sombra de um buraco negro no centro da nossa Via Láctea [12, 13]. Em síntese, encontra-se duas maneiras principais de estender ou modificar a gravidade de Einstein. Na primeira abordagem, modifica-se a ação de Einstein-Hilbert introduzindo-lhe termos aditivos ao seu setor gravitacional. Dentro da segunda abordagem, tem-se uma descrição completa da gravidade envolvendo, além do campo métrico, algum campo extra escalar (vetorial ou tensorial), que não deve ser confundido com a matéria [14]. Este campo extra é tratado como ingrediente da própria gravidade, podendo assim recuperar, no limite do IR os resultados usuais da gravidade de Einstein [15]. Deve-se notar que nessa abordagem, um papel importante é desempenhado pela adição de novos termos (e/ou campos) destinados à quebra explícita da simetria de Lorentz/CPT ou mesmo para introduzir uma extensão supersimétrica da gravidade.

¹ Cujas previsões estão em concordância com os resultados obtidos no avanço do periélio de Mercúrio, deflexão da luz, *redshift* gravitacional, efeito da dilatação temporal devido à gravidade e o *time delay*.

² Um conceito de energia com força repulsiva e mais forte que a gravidade em grandes distâncias. Com natureza e origem não conhecidas, esta hipotética energia foi introduzida para justificar a expansão acelerada do universo.

³ Neste presente trabalho, os termos teorias estendidas da gravidade e teorias alternativas da gravidade terão o mesmo sentido e significado do termo teorias modificadas da gravitação, os quais são um tipo de teoria da interação gravitacional que generaliza a teoria da RG.

⁴ Detectadas pelo LIGO (*Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory*) que opera em dois observatórios em sincronia, localizados em Louisiana e Washington, nos Estados Unidos.

No contexto histórico, as primeiras tentativas de modificar a RG surgiram logo após sua publicação, aparentemente desencadeadas principalmente pelo simples desejo de questionar a recém-criada teoria. Todavia, rapidamente, apareceram motivações teóricas e fenomenológicas na busca de acrescentar novos termos à ação de Einstein-Hilbert. Em 1918, Hermann Weyl (1885-1955), na tentativa de unificar a gravitação ao eletromagnetismo, acrescentou um grau de liberdade a mais à geometria (pseudo)Riemanniana, dotou o espaço-tempo de uma nova grandeza geométrica⁵, além do tensor métrico, tornando a RG invariante sob transformações $g_{\mu\nu} \rightarrow \Omega^2(x)g_{\mu\nu}$, onde Ω é o fator conforme [16]. Em 1923, Arthur Stanley Eddington (1882-1944), começou a considerar modificações da teoria da RG pela inclusão de invariantes de ordem superior na ação de Einstein-Hilbert [17]. E, após as observações astrofísicas apontarem haver anomalia nos movimentos das estrelas afastadas do centro galáctico e de galáxias dentro dos seus aglomerados [18, 19, 20], apresentou-se a hipótese de que grande parte da massa dos aglomerados e das galáxias é constituída por um novo tipo de matéria, denominada como matéria escura. Diferentemente da matéria usual, esta matéria exótica exerce atração gravitacional sobre outros corpos, mas não interage com eles de nenhuma outra forma [21, 22].

Por sua vez, em 1928, Albert Einstein fez uso do formalismo das tetradas (ou *Vierbein*⁶) na gravitação em uma tentativa de unificar sua teoria com o eletromagnetismo [23]. Posteriormente tal formalismo mostrou-se útil também como forma de derivar leis de conservação e realizar medições em espaços curvos, introduzindo o conceito de paralelismo absoluto. Assim, surgiram as teorias teleparalelas de gravitação modificada, ou seja, teorias de gauge baseadas na geometria de Weitzenböck [24, 25, 26]. Como resultado, o tensor de curvatura é anulado e a torção desempenha o papel de força gravitacional, com o campo fundamental representado por um campo não trivial de tetradas, dando origem à métrica como subproduto (as várias estruturas geométricas da gravitação quadridimensional se encontram na Tabela-B.4).

Ademais, no grau fenomenológico, os levantamentos de supernovas produziram dados observacionais recentes indicando ser o balanço de energia do universo composto de aproximadamente 6% de matéria bariônica comum, 26% de matéria escura, 68% de energia escura e mais uma contribuição quase desprezível de radiação $\sim 10^{-3}\%$ [27]. Deste modo, apenas aproximadamente 6% da composição da matéria e energia do universo é explicada de maneira plausível. Em 1998, foi observado através dos dados fornecidos pelo *Cosmic Microwave Background* (CMB) que o universo se apresenta em processo de expansão acelerada, ao contrário das expectativas anteriores [28]. O modelo mais simples

⁵ Após Einstein ter apontado falhas na teoria, Weyl desistiu do seu modelo extensivo da RG. Atualmente, a gravidade conforme de Weyl continua sendo um tópico ativo de discussão.

⁶ Termo em alemão que significa quatro pernas (*Vielbein* significa muitas pernas). Tal formalismo está em concordância com o princípio da covariância geral na RG, onde as equações em sua forma tensorial independem da base ou do sistema de referência.

que se ajusta adequadamente aos dados observacionais cosmológicos e astrofísicos é o modelo Λ CDM (Λ -Cold Dark Matter), complementado por algum cenário inflacionário, geralmente baseado em algum campo escalar chamado *inflaton* [29]. Além de não explicar a origem do *inflaton* ou a natureza do setor escuro do universo, o modelo Λ CDM está sobrecarregado dos conhecidos problemas da constante cosmológica, segundo o qual o valor observado da constante cosmológica é extravagantemente pequeno, cerca de 121 ordens de magnitude menor, a ser comparado com o seu valor teórico, atribuído ao ajuste fino (*fine-tuning*), à energia do vácuo dos campos de matéria. Vale ressaltar, a teoria quântica de campos (TQC) interpreta a constante cosmológica Λ como sendo a densidade de energia do vácuo associada à flutuação dos campos quânticos, definida em função da velocidade da luz no vácuo c , da constante de Planck h e da constante gravitacional de Newton G [30]. Infelizmente, as tentativas de justificar a magnitude de Λ , através da ideia probabilística do efeito de seleção de observação ou princípio antrópico [31] para o problema da coincidência cosmológica⁷ [32] e, mesmo ainda, a forma fictícia da quintessência para a dinâmica da energia escura [33], tornam o atual modelo cosmológico padrão, Λ CDM, mais um ajuste empírico aos dados observacionais, cuja motivação teórica é apontada ser bastante pobre. As notáveis e recentes observações apanhadas pelo satélite James Webb de exoplanetas, galáxias antigas e de um buraco negro supermassivo no início do universo são descobertas recentes, apontando ser necessária uma remodelação de nossa compreensão da formação de galáxias no universo primitivo. [34, 35].

Não obstante, após estabelecida uma sólida teoria clássica da gravidade e com o sucesso da teoria da eletrodinâmica quântica (*Quantum Electrodynamics*-QED), nas décadas de 1940 e 1950, surgiram várias tentativas de quantizar a teoria gravitacional, da mesma maneira realizada para as demais forças fundamentais da natureza. Nesse panorama, buscou-se por uma possível teoria de campo unificado, baseada na inserção de campos espinoriais no espaço curvo. Em 1960, Roger Penrose formulou uma abordagem espinorial da RG, através da adoção de uma base ortonormal das tetradas, na qual o papel básico dos tensores é assumido pelos espinores [36]. Tal conceito de espinor, introduzido na geometria por Élie Cartan em 1913 [37], foi incorporado na física, por Paul Dirac (1902-1984), a partir da simples exigência da invariância de Lorentz na representação do grupo $SO(1,3)$. Mais tarde, H. Bondi e T. Gold apresentaram discussões interessantes sobre uma teoria de campo espinorial que descreveria o elétron [38]. Destarte, a não obtenção de uma teoria unificada é por existirem complicações decorrentes da própria definição da gravitação de Einstein, pois sendo ela uma teoria de campo simétrico de rank 2 com correspondência direta com a geometria⁸.

⁷ O fato observacional de que os valores atuais das densidades da energia escura e da matéria escura são da mesma ordem de grandeza.

⁸ Algumas abordagens da gravidade quântica foram propostas, como, por exemplo, supergravidade, teoria de cordas, *loop quantum gravity*, teoria do campo unificado, geometria não comutativa. Todas com certo nível de sucesso teórico e deficiências, tais como a falta de uma confirmação empírica.

Neste contexto, em 1962, Utiyama e De Witt, mostraram que implementando termos de curvatura de ordem superior⁹ na ação de Einstein-Hilbert conduz a renormalização em um laço [39, 40]. Em 1977, Stelle demonstrou que termos de derivadas superiores podem levar a complicações no processo de renormalização, mas sob certas condições, as teorias de ordem superior podem ser renormalizáveis [41]. Resultados mais recentes mostram que quando correções quânticas ou advindas da teoria das cordas são levadas em conta, na ação gravitacional efetiva ou a baixas energias, surgem naturalmente invariantes de curvatura de ordem superior [42]. Inclusive, o famoso modelo de gravidade de Starobinsky $f_s(R) = R + \alpha R^2$ é um exemplo da classe particular de teorias, de ordem superior, estudada em modelos de gravidade quântica e do universo primordial, também, sendo uma forma alternativa ao modelo cosmológico padrão, sem a necessidade da hipótese de uma constante cosmológica ou energia escura [43]. Contudo, modelos com termos de derivadas de ordem superior na ação de Einstein-Hilbert, geralmente provocam, em seu nível clássico, inevitáveis instabilidades do tipo Ostrogradsky, resultando em um Hamiltoniano que não é limitado por baixo [44]. E, no nível quântico, tais modelos contêm em seu espectro de partículas os estados “fantasmas” (*ghosts*), graus de liberdade caracterizados por propagadores com sinais “errados” (negativos), que podem destruir o princípio fundamental da unitariedade da teoria quântica [45].

Em contrapartida, mais recentemente, uma abordagem interessante foi o de incorporar o conceito de não localidade no Lagrangiano de Einstein-Hilbert, através da inclusão de fatores de forma contendo derivadas de ordem infinita. Curiosamente, a abordagem não-local, surgiu em 1934, quando Gleb V. Wataghin¹⁰ (1899-1986), sem fazer alusão ao termo não-local, introduziu o fator exponencial $e^{(w^2 - \mathbf{p}^2)/\Pi^2}$, em uma seção transversal, a fim de aniquilar divergências na teoria quântica invariante de Lorentz [46]. A saber, a partir de seus estudos dos objetos de tamanho finito, o propósito original de Wataghin era dar tamanho/forma às partículas adimensionais. Indubitavelmente, os operadores não-locais, ou seja, operadores não polinomiais, quando implementados adequadamente nas teorias de campo, resolve dificuldades fundamentais existentes nas teorias gravitacionais, sendo possível não apenas tornar a teoria renormalizável, mas também livrar-se dos modos fantasmas, não adicionando novos polos ao propagador, que surgem nas teorias de ordem superior. Por estes motivos o estudo de modelos de gravidade não-local tem recebido um considerável estímulo, trazendo uma série de resultados interessantes, por modificar minimamente a RG no regime IR e reproduzir resultados experimentais do modelo cosmológico Λ CDM. Assim, diversos importantes trabalhos foram apresentados seguindo a

⁹ Gravidade de ordem superior refere-se a teorias da gravidade onde o Lagrangiano inclui termos que envolvem derivadas superiores do tensor métrico, como termos quadráticos no tensor de curvatura.

¹⁰ Físico russo-italiano foi um dos pioneiros da física moderna no Brasil, ele formou as primeiras gerações do Departamento de Física da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da USP. Sua trajetória acadêmica, especialmente suas ações no Brasil entre 1934 e 1971, motivou o Instituto de Física da Unicamp adotar o seu nome.

proposta de adicionar termos não-locais à ação para o campo gravitacional. Em 1994, D. Dalvit derivou equações efetivas para o campo gravitacional usando uma aproximação não-local e calculou correções quânticas para o potencial Newtoniano [47]. Já em 1998, C. Wetterich analisou as implicações cosmológicas para um modelo proposto com base numa ação não-local de Einstein-Hilbert [48]. Uma revisão geral sobre os aspectos inerentes à gravitação não-local e como formular uma teoria quântica da gravitação unitária, com comportamento melhorado no regime UV, é apresentada em [49].

Progressivamente, muitos outros importantes modelos estendidos da gravitação foram estabelecidos, dentre os quais podemos citar alguns: gravidade Lovelock, Gauss-Bonnet, Weyl, Brans-Dicke (BD), Galileon, Horava-Lifshitz e $f(R, Q, P)$. Em especial, nos últimos anos, os modelos topológicos têm atraído grande interesse. Por exemplo, os modelos com o termo invariante de Nieh-Yan acoplado a um campo escalar, que incorporam a torção e a não-metricidade, são empregados em cenários das branas e estudos de singularidades cosmológicas [50, 51]. O modelo topológico quadridimensional de Chern-Simons (*Chern-Simons Modified Gravity* - CSMG), originalmente proposto em [52], inclui no Lagrangiano, além do escalar de curvatura R , o termo adicional composto de um campo escalar ϕ , chamado coeficiente (ou escalar) de Chern-Simons (CS), multiplicado pelo termo topológico de Chern-Pontryagin $*RR$. Na formulação não dinâmica, ϕ é tratado como um campo de fundo, sendo a priori uma função prescrita, e sua equação de evolução se reduz a uma restrição diferencial no espaço de soluções permitidas, a chamada restrição de Pontryagin. Na formulação dinâmica, o escalar CS é tratado como um campo dinâmico, dotado com seu próprio tensor energia-momento e equação de evolução. O modelo quadridimensional CSMG, sendo uma extensão natural do modelo gravitacional de CS em três dimensões [53], apresenta algumas propriedades interessantes. Primeiro, dependendo da forma de ϕ , pode gerar explicitamente a quebra da paridade e da simetria de Lorentz, no nível da ação. Em segundo lugar, verificou-se que CSMG partilha algumas soluções com a RG¹¹, como, por exemplo as métricas de Schwarzschild e tipo-Gödel ST-homogêneas. Por outro lado, como contraexemplo, pode-se citar a métrica de Kerr¹² que notavelmente não é uma solução do CSMG, conforme discutido em [54]. Em particular, as métricas tipo-Gödel ST-homogêneas são célebres por gerarem curvas tipo-tempo fechadas (*Closed Time-like Curves* - CTCs) para determinados valores de seus parâmetros, promovendo a violação global da causalidade, mantendo, no entanto, em cada ponto do espaço-tempo a causalidade local, que é assegurada pelo caráter localmente Lorentziano do espaço-tempo [55]. O estudo do universo de Gödel fora verificado, além da RG, com a análise da possibilidade de soluções causais, dentro da gravidade modificada de

¹¹ Pode ser facilmente demonstrado que todas as métricas que atendem à restrição de Pontryagin $*RR = 0$ são soluções simultâneas da RG e destas teorias generalizadas de Chern-Pontryagin.

¹² Uma solução estacionária e axissimétrica da RG onde descreve buracos negros supermassivos e giratórios, que estão presentes no centro da maioria das galáxias e desempenham um papel crítico na evolução de objetos compactos e na emissão de ondas gravitacionais.

Chern-Simons [56, 57], gravidade de Brans-Dicke [58], gravidade $f(R, Q)$ [59], gravidade $f(R, Q, P)$ [60].

Cabe aqui salientar, o invariante topológico de Chern-Pontryagin, $*RR$, aparece naturalmente especificamente compactando as dimensões extras da teoria- M ($D = 11$) para as teorias efetivas quadridimensionais da CSMG. De fato, a teoria das cordas, no seu limite de baixa energia, contém uma correção de cancelamento de anomalias, para a ação de Einstein-Hilbert. Em particular, pode-se citar o modelo Starobinsky-Bel-Robinson (SBR), cuja ação envolve termos quadráticos de Chern-Pontryagin, $(*RR)^2$, seus aspectos cosmológicos foram estudados em [61]. De certo, o estudo das teorias que envolvem o termo $*RR$, com suas generalizações, é motivado pela possibilidade de quebra das simetrias de Lorentz e/ou CPT, justificada, entre várias razões heurísticas, pela: Teoria de cordas, como é sugerida em [62], gravidade quântica em laço, hipótese de comprimento mínimo, não comutatividade espaço-temporal e anisotropia na radiação cósmica de fundo, conhecida como “eixo do mal” [63, 64, 65].

À vista disto, o ordenamento esquemático da presente Tese seguirá a seguinte estrutura: no capítulo 2, iremos retratar à RG em seus diversos formalismos, destacando o formalismo Riemanniano com suas soluções métricas de Schwarzschild, Friedmann-Robertson-Walker (FRW) e (tipo)Gödel. Abordaremos as limitações da gravidade de Einstein em tratar dos problemas da aceleração cósmica e da descrição quântica da gravidade. Finalizaremos o capítulo com a abordagem do campo fermiônico de Dirac em espaços curvos.

No capítulo 3, discorreremos sobre as teorias modificadas de gravitação, apresentaremos vários tipos de teorias, ressaltando dois destacados modelos: a gravidade não-local, que quando bem aplicada, possui a peculiaridade de modificar a teoria, tornando-a renormalizável e unitária; e o modelo de gravidade modificada de Chern-Simons, que tem como atributo em destaque a possibilidade da quebra de simetria de Lorentz e CPT, além de compartilhar algumas soluções com a RG.

No capítulo 4, fundamentado no artigo originalmente publicado [66] e direcionado pela teoria $f(R)$, apresentaremos uma nova classe de teorias estendidas da gravitação denominadas modelos generalizados de gravidade Chern-Pontryagin, cuja ação, ao invés de ser linear ou quadrática em $*RR$, apresenta uma dependência funcional genérica deste objeto e também do escalar de Ricci. Obteremos a ação clássica da teoria e suas respectivas equações do movimento, adotando o protótipo $f_I(R, *RR) = R + \beta(*RR)^2$, analisaremos a consistência das soluções de buracos negros com rotação lenta, e para perturbações em primeira ordem das métricas tipo-Gödel ST-homogêneo, consideraremos, também, uma generalização do modelo Starobinsky, que corresponde a tomar $f_{II}(R, *RR) = R + \alpha R^2 + \beta(*RR)^2$.

No capítulo 5, apresentaremos um modelo de campo espinorial não-local livre, com acoplamento do campo magnético e com acoplamento de Yukawa, no espaço-tempo de Minkowski. Construiremos a nova teoria de campo de spin-1/2 não-local promovendo o operador de Dirac $\not{\partial}$ a um operador não-local, construído com base no operador de Dirac, $\not{\partial}f(\not{\partial})$, em vez do operador de d'Alembert. Derivaremos cuidadosamente suas equações de campo e mostraremos que no seu limite local recupera-se a equação padrão de Dirac. Além disso, obteremos a relação de dispersão das partículas livres de spin-1/2 dentro do modelo não-local.

Ademais, focaremos nos aspectos quânticos desta teoria, em particular, calcularemos a ação efetiva fermiônica de um laço para a teoria de campo de spin-1/2 não-local com acoplamento Yukawa. E, veremos que as contribuições dos efeitos não-locais são significativas no limite UV, enquanto no IR elas são suprimidas por uma escala de corte UV, que foi escolhida para coincidir com a escala de não localidade Λ . Concluiremos o capítulo obtendo uma versão não-local da equação de Pauli no espaço de Minkowski, com avaliação do seu impacto no fator g_s das partículas massivas.

No capítulo 6, forneceremos algumas considerações gerais sobre os temas discutidos neste trabalho. Especialmente, analisaremos os resultados obtidos e apresentados nos capítulos 4 e 5. Concluiremos a Tese expondo nossas perspectivas futuras sobre as possíveis pesquisas no campo das teorias modificadas da gravitação, com destaque as possíveis extensões e aplicações dos modelos originais apresentados: modelos generalizados de gravidade Chern-Pontryagin e modelo de campo espinorial não-local.

Finalmente, no Apêndice-A e no Apêndice-B estão descritos, em detalhes, os cálculos realizados para a obtenção das principais equações utilizadas e alguns teoremas e conceitos, que foram mencionados no corpo desta Tese. Importante destacar, não adotamos uma única assinatura da métrica. E, quando não explicitamente mencionado, estaremos trabalhando com gravidade em quatro dimensões no formalismo Riemanniano, em unidades naturais $c = \hbar = 1$. Alguns outros símbolos e convenções também foram aplicados, sendo eles:

- $\sum_{\mu} X_{\mu} Y^{\mu} = X_{\mu} Y^{\mu}$ - notação de Einstein.
- μ, ν, ρ, \dots - índices de letras gregas para índices do espaço-tempo.
- $X_{[\mu} Y_{\nu]} = \frac{1}{2}(X_{\mu} Y_{\nu} - X_{\nu} Y_{\mu})$ - anti-simetrização dos índices $[\mu, \nu]$.
- $X_{(\mu} Y_{\nu)} = \frac{1}{2}(X_{\mu} Y_{\nu} + X_{\nu} Y_{\mu})$ - simetrização dos índices (μ, ν) .

2 Relatividade Geral

2.1 Uma Teoria de Descrição Essencialmente Geométrica

Diferentemente das demais forças da natureza, representadas por campos definidos no próprio espaço-tempo, a RG de Einstein consiste no fato de que o campo gravitacional se manifesta por meio de modificações da geometria do espaço-tempo [67]. Como resultado disto, a RG se torna uma teoria essencialmente geométrica, contendo conceitos advindos da geometria diferencial, onde cada ponto p na variedade¹ quadridimensional \mathcal{M}^4 é assinalado por um evento no espaço-tempo quadridimensional Euclidiano. Desta maneira, \mathcal{M}^4 e \mathbb{R}^4 são considerados espaços topológicos homeomorfos, com aplicações contínuas e com transformações inversas também contínuas, entre ambos os espaços [68]. Na teoria gravitacional de Einstein, a variedade \mathcal{M}^4 contém quantidades das grandezas físicas e entidades matemáticas essenciais, definidas por uma estrutura diferenciável [69]. Quando fixada uma métrica $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu \otimes dx^\nu$, a variedade \mathcal{M}^4 é chamada de espaço Riemanniano V^4 , que passa a possuir o conceito de distância. A variedade \mathcal{M}^4 contendo estrutura de conexão afim é chamada de espaço conectado afim L^4 , tendo isomorfismo local de espaços tangentes em diferentes pontos na variedade, $x \in \mathcal{M}^4$. Desta maneira, pode-se introduzir a noção de derivada covariante de tensores e definir a noção de transporte paralelo de vetores, caracterizando uma série de objetos geométricos [70]. Assim, o campo gravitacional pode ser descrito de oito maneiras distintas, mediante teorias geométricas cuja classificação depende das estruturas métricas-afins subjacentes, construídas com base em métricas e conexões: o tensor de curvatura da conexão, tensor torção e o tensor de curvatura homotético [71] (ver Apêndice-B.4).

2.1.1 Formalismo Riemanniano: (\mathcal{M}, g)

Aqui, nesta Tese, trataremos nomeadamente da gravidade quadridimensional na descrição Riemanniana, onde a conexão é simétrica e completamente caracterizada pela métrica (\mathcal{M}, g) . Nesta abordagem, mais utilizada nos estudos da gravidade, a ação é descrita por funções de invariantes geométricos completamente caracterizados pela métrica, ou seja, várias contrações do tensor de curvatura de Riemann, suas derivadas covariantes e uma métrica, e possivelmente alguns campos extras escalares, vetoriais ou tensoriais. Ademais, neste formalismo métrico, o produto interno de vetores transportados paralelamente de um ponto a outro, na variedade ao longo de uma curva, é invariante,

¹ Podemos definir a variedade como um espaço topológico contendo em cada ponto de sua superfície uma vizinhança que é homeomorfa ao espaço aberto real. Assim, localmente, \mathcal{M}^D tem correspondência biunívoca com \mathbb{R}^D , sendo D a dimensão do espaço.

ou seja, o comprimento do vetor permanece inalterado durante o transporte paralelo. Matematicamente, isso pode ser expresso pela condição de compatibilidade da métrica, sendo dado pela equação $\nabla_\mu g_{\nu\alpha} = 0$.

Em decorrência do espaço-tempo curvo Riemanniano, o intervalo infinitesimal é dado por $ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu$, sendo o tensor métrico $g_{\mu\nu}(x)$ a única variável dinâmica. Por definição, a métrica é assumida como não degenerada, estabelecendo assim um isomorfismo, entre os espaços tensoriais covariante e contravariante, descrito pela operação de subida e descida de índices. A estrutura métrica Lorentziana forma a base da teoria da RG, cuja assinatura pode ser ± 2 , ou seja, $(-, +, +, +)$ ou $(+, -, -, -)$. Como consequência, todas as quantidades geométricas relevantes são determinadas pela métrica, como, por exemplo, os símbolos de Christoffel²

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2}g^{\rho\alpha}(\partial_\nu g_{\alpha\mu} + \partial_\mu g_{\alpha\nu} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}). \quad (2.1)$$

Utilizando-se da definição dos símbolos de Christoffel (2.1), poderemos definir a derivada covariante de um tensor, e este, por sua vez, é essencial para descrever a dinâmica na RG, pois eles incorporam a curvatura do espaço-tempo. Em sentido amplo, as derivativas covariantes de uma conexão afim arbitrária (não necessariamente métrica) em uma base coordenada são normalmente chamadas de símbolos de Christoffel. Para as variedades (pseudo)Riemannianas, a derivada covariante de um tensor genérico X de grau $(p + q)$, será

$$\begin{aligned} \nabla_\mu X_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} = & \partial_\mu X_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} + \Gamma_{\rho\mu}^{\alpha_1} X_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\rho \alpha_2 \dots \alpha_p} + \dots + \Gamma_{\rho\mu}^{\alpha_p} X_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \rho} \\ & - \Gamma_{\beta_1 \mu}^\sigma X_{\sigma \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} - \dots - \Gamma_{\beta_q \mu}^\sigma X_{\beta_1 \dots \sigma}^{\alpha_1 \dots \alpha_p}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Assim, pela definição da derivada covariante, o formalismo principal da teoria da gravitação é construído, sendo fabricada a dinâmica da métrica na teoria. Na qual a ideia-chave se fundamenta no princípio de que a derivada covariante de um tensor é também um tensor. Deste modo, define-se o tensor de curvatura de Riemann pela seguinte regra

$$[\nabla_\beta, \nabla_\nu]X^\alpha = X^\mu R_{\mu\beta\nu}^\alpha, \quad (2.3)$$

onde, para qualquer X^α , o tensor de curvatura e de Ricci são dados por

$$R_{\mu\beta\nu}^\alpha = \partial_\beta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \partial_\nu \Gamma_{\mu\beta}^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \Gamma_{\sigma\beta}^\alpha - \Gamma_{\sigma\nu}^\alpha \Gamma_{\mu\beta}^\sigma, \quad (2.4)$$

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu}^\alpha = \partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\sigma - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\sigma + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \Gamma_{\alpha\sigma}^\sigma - \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\sigma, \quad (2.5)$$

e o escalar de curvatura de Ricci $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$. Agora, antes da definição da ação da teoria, cumpre sublinhar um pouco sobre o formalismo Lagrangiano. Este potente ferramental

² Assim nomeados por Elwin Bruno Christoffel (1829–1900), são expressões em coordenadas espaciais para a conexão de Levi-Civita derivada do tensor métrico.

matemático teve sua primeira aplicação na mecânica clássica, a partir dos trabalhos pioneiros de Euler, Lagrange e Hamilton [72]. A extensão desse formalismo à mecânica relativística e à eletrodinâmica, particularmente em sua forma covariante, mostrou-se extremamente profícua [73], e rapidamente conduziu à generalização de sua aplicação às teorias de campo em geral, onde se revelou de importância fundamental no processo de quantização de campos [74]. Curiosamente, em 1915, antes do advento da teoria quântica de campos, o matemático alemão David Hilbert (1862-1943) aplicou pela primeira vez o princípio variacional à RG, em sua tentativa de encontrar as equações do campo gravitacional independentemente de Einstein. Hilbert propôs a ação estacionária, conhecida como ação de Einstein-Hilbert, sendo dada por

$$S_{EH} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} R + S_m, \quad (2.6)$$

onde $\kappa^2 = 8\pi Gc^{-4}$, com dimensão de massa³ em um espaço-tempo D -dimensional igual a $2 - D$, G é a constante de Newton, c é a velocidade da luz no vácuo, g é o determinante da métrica e S_m é a ação da fonte de matéria. Observa-se que a ação de Einstein-Hilbert é definida em relação ao escalar de curvatura de Ricci, conseqüentemente, ela envolve derivadas de segunda ordem do tensor métrico, em analogia a ação do campo escalar eletromagnético e outros modelos de teoria de campo onde a ação envolve somente segundas derivadas de sua variável dinâmica⁴. Por definição, o tensor energia-momento é explicitamente dado em função do Lagrangiano da matéria \mathcal{L}_m

$$T_{\mu\nu}^{(m)} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (2.7)$$

As equações de campo de Einstein são obtidas através da variação da ação com respeito ao tensor métrico (os cálculos estão demonstrados no Apêndice-A)

$$\frac{\delta S_{EH}}{\delta g^{\mu\nu}} = G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu}. \quad (2.8)$$

Essas equações de campo de Einstein (2.8) são formuladas de modo que assegure a conservação do tensor energia-momento da matéria $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$, sendo claramente consistente com as identidades de Bianchi $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$, garantindo assim o princípio da equivalência, recuperando a RE na vizinhança de cada ponto no espaço-tempo, de modo que o espaço-tempo local é bem descrito como espaço-tempo de Minkowski, cuja métrica é dada por $ds^2 = \eta_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu$, onde $\eta_{\mu\nu}$ é a matriz diagonal de assinaturas ± 2 . E, também, se reduz à lei da gravidade de Newton no limite de baixas velocidades e campos

³ Na TQC, para $c = \hbar = 1$, uma quantidade física Q terá dimensão n em unidade de massa M , ou seja, $[Q] = n$, quando $[Q] = M^n$. Logo, a ação gravitacional quadridimensional de Einstein-Hilbert é adimensional $[S] = 0$, com elemento de volume $[d^4x] = -4$ e valor negativo para a dimensão da constante gravitacional $[\kappa^2] = -2$.

⁴ Por exemplo, a ação eletrodinâmica é $S_e = -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$.

gravitacionais pouco intensos. Ademais, (2.8) descrevem como a matéria gera gravidade e, inversamente, como a gravidade afeta a matéria, cuja força de acoplamento entre a matéria e gravidade é determinada pela constante gravitacional κ^2 . Quando totalmente escritas, as equações de campo de Einstein são um sistema de dez equações diferenciais parciais de segunda ordem, não lineares e acopladas, por isso são de difícil solução. No entanto, para certas conjecturas simplificadoras, como as de simetrias, obtêm-se várias soluções exatas para (2.8).

2.1.2 Formalismo de Palatini: $(g^{\mu\nu}, \Gamma_{\mu\nu}^\lambda)$

Nas derivações acima, o caráter Riemanniano da estrutura do espaço-tempo foi essencial. No entanto, sabemos, a priori, que a métrica e a conexão são definidas como estruturas independentes em uma variedade diferenciável. Portanto, a partir do ponto de vista geométrico, seria mais natural considerar $g^{\mu\nu}$ e $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ como variáveis dinâmicas independentes da teoria gravitacional. Assim, produzindo dois procedimentos variacionais para duas diferentes suposições, sobre as estruturas geométricas da variedade, resultando em diferentes equações modificadas da gravitação [75]. Nesta situação, a ideia subjacente ao princípio variacional de Palatini é alcançada mantendo-se o tensor de torção nulo, mas sem impor a condição de metricidade (compatibilidade da métrica), dada pela relação $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$. Embora esse método é geralmente atribuído a Palatini, os autores M. Ferraris e M. Francaviglia argumentaram que a abordagem de Palatini, como a conhecemos, foi de fato inventada por Einstein em 1925 [76]. Neste formalismo, a ação de Einstein-Hilbert (2.6) passa a ter a seguinte forma

$$S_P = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}(\Gamma) + S_m, \quad (2.9)$$

onde $R_{\mu\nu}(\Gamma)$ indica que o tensor de Ricci é definido em relação à conexão. Em geral, para teorias modificadas da gravitação, o procedimento de Palatini gera equações de campo diferentes das equações no formalismo métrico. Alguns autores fazem uma distinção entre o formalismo de Palatini e o formalismo métrico-afim, que, além da conexão e da métrica serem independentes, a ação deve incluir derivadas covariantes dos campos de matéria [77]. Como resultado, há um acoplamento direto entre os campos de matéria (como os férmions) e a conexão, podendo ser assimétrica, incluindo a torção na teoria [78]. Existem outras abordagens para obtenção das equações de campos, por exemplo, o método de Einstein-Eddington [79] e o princípio variacional bimétrico⁵, são uma reinterpretação sutil da RG, assumindo a conexão gerada por uma métrica independente. Neste caso, ao contrário do formalismo de Palatini, que promove a ligação num campo fundamental, o princípio variacional resulta numa teoria fisicamente distinta, uma vez que o potencial para a ligação acarreta novos graus de liberdade [80]. Além disso, a métrica geradora de conexão

⁵ Estes formalismos são frequentemente chamados de teorias da gravidade bimétricas ou tensor-tensor, envolvendo dois tensores de posto 2.

permite naturalmente um componente antissimétrico, definindo assim a propagação da torção. A primeira formulação de uma teoria bimétrica parece ser devida a Rosen [81], onde a adição de um tensor extra, não-dinâmico de posto 2, leva à existência de estados de energia não limitados por baixo. Como resultado, a teoria de Rosen prevê a rotação dos pulsares, à medida que ondas gravitacionais com energia negativa são emitidas. Isto viola gravemente as restrições a estes sistemas que foram impostas pelas observações de pulsares de milissegundos [82].

2.1.3 Formalismo de Tetradas: $e^a_\mu(x^\mu)$

A ideia do formalismo de tetradas (*Vielbein*⁶) foi introduzida por Weyl [83] e, de maneira independente, por Fock e Ivanenko [84]. Em 1928, Albert Einstein fez uso também deste formalismo quando tentou unificar o eletromagnetismo à gravitação [23], e Eugene Paul Wigner (1902-1995) para incorporar espinores à teoria gravitacional [85]. O estabelecimento de tetradas na gravitação resultou no conceito de paralelismo absoluto, onde estipula que as tetradas devem ser transportadas paralelamente ao longo da variedade espaço-temporal, garantindo a anulação da sua curvatura.

Por conseguinte, as teorias teleparalelas da gravitação são teorias de gauge baseadas na geometria de Weitzenböck P^4 , onde o tensor de curvatura é anulado e a torção desempenha o papel da força gravitacional, com o campo fundamental representado por um não trivial campo de tetradas, dando origem à métrica como um subproduto. Opostamente, a variedade Riemanniana V^4 onde a torção é considerada nula, não a curvatura, temos a variedade Weitzenböck P^4 , desenvolvida em 1923 [86] a partir da variedade Riemann-Cartan U^4 , equipada com uma métrica e uma conexão com propriedades, curvatura e torção, não nulas. Tendo sua geometria estudada em termos de tetradas e não a partir da métrica e da conexão. A tabela-B.4 expõe a classificação geométrica das variedades quadridimensionais de acordo com suas estruturas métrica-afins subjacentes: o tensor de curvatura da conexão, o tensor de torção e o tensor de curvatura homotético.

Dessarte, sabemos que em cada ponto p de uma variedade \mathcal{M}^4 existe uma infinidade de bases que podem ser escolhidas. Sendo o fibrado de base a estrutura construída das várias escolhas de bases possíveis em todos os pontos p da variedade. Para expandir um vetor v no espaço tangente $T_p\mathcal{M}^4$, geralmente é escolhida a base coordenada, $\{\partial_\mu\}$. Mas, quando medidas estão envolvidas nos cálculos na RG, frequentemente eles são feitas numa base ortonormal local $\{e_a\}$, denominada base não coordenada ou tetradas. Assim sendo, as tetradas define em cada ponto do espaço-tempo um sistema de “coordenadas” não holônomas de Minkowski, como um referencial inercial local que pode ser construído através dos vetores da base de coordenadas, como um campo de um conjunto de 4 vetores ortonormais, um tipo tempo e três do tipo espaço, que são definidos em uma variedade

⁶ Palavra da língua alemã, que significa quatro pernas.

Lorentziana, no intuito de modelar o espaço-tempo na RG. Logo, um vetor v na base $\{\partial_\mu\}$ do espaço tangente $T_p\mathcal{M}$, poderá ser expandido em termos de uma nova base $\{e_a\}$

$$v = v^a e_a = v^\mu \partial_\mu, \quad (2.10)$$

as letras do alfabeto latino e do alfabeto grego são índices específicos que rotulam a base não holonômica e base coordenada, respectivamente. De modo semelhante, um co-vetor u expandido na base das 1-forma $\{dx^\mu\}$ do espaço cotangente $T_p^*\mathcal{M}$, poderá também ser expandido em termos de uma nova base 1-forma $\{e^a\}$, $u = u_a w^a = u_\mu dx^\mu$. Por definição $e^a(e_b) = \delta_b^a$. A relação de mudança de base será dada pelas seguintes equações: $e^a = e_\mu^a(x) dx^\mu$, e sua inversa, $e_a = e_\mu^a(x) \partial_\mu$. A tetrada $e_\mu^a(x)$ é representada por uma matriz de ordem n , dependente da coordenada x^μ no ponto p do espaço tangente $T_p\mathcal{M}^4$. Tendo como inversa a matriz $e_a^\mu(x)$ que geram as consequentes relações

$$e_\mu^a e_a^\nu = \delta_\mu^\nu; \quad e_\mu^a e_b^\mu = \delta_b^a; \quad v^a = e_a^\mu v^\mu \quad \text{e} \quad u_a = e_a^\mu u_\mu, \quad (2.11)$$

cuja relação das componentes da métrica da nova base com a antiga base é

$$g_{ab} = g(e_a, e_b) = g(e_a^\mu \partial_\mu, e_b^\nu \partial_\nu) = e_a^\mu e_b^\nu g(\partial_\mu, \partial_\nu) = e_a^\mu e_b^\nu g_{\mu\nu}, \quad (2.12)$$

$$\therefore \quad g_{\mu\nu} = e_\mu^a e_\nu^b g_{ab} \implies g = g_{ab} e^a e^b, \quad (2.13)$$

onde g está expressado em termos das 1-forma $\{e^a\}$. Das inúmeras possibilidades de bases possíveis, podemos escolher aquela onde as componentes dos vetores ou tensores em $T_p\mathcal{M}^4$ da variedade se transformam de maneira similar às transformações de Lorentz da RE, $g_{ab} = \eta_{ab} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Esta é a base ortonormal que corresponde ao caso em que a métrica, com assinatura Lorentziana $(+, -, -, -)$ é dada pela métrica de Minkowski. Para isso, basta substituímos a métrica pelos campos de tetrada e_μ^a , onde e é o determinante da tetrada, que se relaciona com o determinante da métrica pela seguinte relação $g_{\mu\nu} = e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab}$, implicando em $\sqrt{-g} = e$. Para o escalar de Ricci $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ nos campos de tetrada teremos

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}^\alpha{}_\beta \delta_\alpha^{[\beta} \delta_{\nu]}^{\gamma]} = \frac{1}{4} R^{\alpha\nu}{}_{\beta\gamma} \epsilon^{\beta\gamma\delta\sigma} \epsilon_{\alpha\nu\delta\sigma} = \frac{1}{4} e_a^\alpha e_b^\nu R^{\alpha b}{}_{\beta\gamma} \epsilon^{\beta\gamma\delta\sigma} \epsilon_{\alpha\nu\delta\sigma} = e_a^\alpha e_b^\nu R^{\alpha b}{}_{\alpha\nu}, \quad (2.14)$$

e para o elemento de volume, teremos

$$d^4x \sqrt{-g} = d^4x e = e^{(0)} \wedge e^{(1)} \wedge e^{(2)} \wedge e^{(3)} = -\frac{1}{4!} \varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d, \quad (2.15)$$

aqui o símbolo \wedge representa o produto exterior, o produto dos elementos da base coordenada em todas as combinações antissimétricas, ou seja

$$dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_n} = dx^{[\mu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\mu_n]}, \quad (2.16)$$

onde os índices entre colchetes explicitam a propriedade de antissimetria dos mesmos. Em concordância com o princípio da covariância geral, as equações de Einstein independem da base ou do sistema de referência. Logo, podemos reescrevê-las no formalismo das tetradas

$$R_a^\mu - \frac{1}{2} \delta_a^\mu R = \kappa^2 T_a^{\mu(m)}, \quad (2.17)$$

que multiplicada por $e_{\mu b}$, resultará $R_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab}R = \kappa^2 T_{ab}^{(m)}$. Apresentaremos a seguir algumas das soluções exatas das equações de Einstein.

2.2 Soluções das Equações de Einstein

2.2.1 Métrica de Schwarzschild

Em 1916, Karl Schwarzschild (1873-1916), astrônomo e físico alemão e um dos fundadores da astrofísica moderna, apresentou a primeira solução analítica para as equações de campo de Einstein, para um objeto compacto e estático

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (2.18)$$

onde, $m = GM/c^2$ é massa geométrica e M é a massa gravitacional da fonte de matéria. Observe que na Eq.(2.18) temos duas singularidades, a singularidade física para $r = 0$ e a singularidade matemática para $r = 2m$. Pelo teorema de George David Birkhoff (1884–1944), qualquer solução esfericamente simétrica das equações do campo no vácuo deve ser estática e assintoticamente plana. Assim, para uma fonte esfericamente simétrica, mesmo que seja um objeto com uma distribuição de massa irregular no seu interior, não rotativa e restrita à região $r \leq a$ para algum $a > 2m$, a única solução que descreve o campo gravitacional no exterior ($r > a$) é solução de Schwarzschild. No caso de fonte esfericamente simétrica e carregada, a geometria exterior a fonte é descrita pela métrica de Reissner-Nordström [67]. As classes de soluções da família de Kerr são assintoticamente planas, estacionárias e axialmente simétricas, são soluções das equações de Einstein do vácuo e é parametrizada pela massa M e pelo momento angular por unidade de massa a .

2.2.2 Métricas de Friedmann-Robertson-Walker e de Gödel

Em 1922, Alexander Friedmann (1888-1925) apresentou uma solução exata das equações de campo de Einstein, posteriormente confirmada por Georges Lemaître (1894-1966), que descreve um universo homogêneo e isotrópico em expansão ou contração, conhecida como métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW)⁷. Sendo esta a métrica do modelo cosmológico padrão Λ CDM, dada por:

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right), \quad (2.19)$$

em que $a(t)$ é um fator de escala e $k = 1, 0, -1$, são valores para curvatura positiva, sem curvatura e curvatura negativa, respectivamente.

Em 1949, Kurt Friedrich Gödel (1906-1978) apresentou a primeira solução para um modelo matemático do universo [87], onde solucionou as equações de Einstein para

⁷ Também conhecida como métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW).

um fluido perfeito, como fonte de matéria. Tal fluido com densidade de massa positiva e pressão desprezível é geralmente chamado de poeira. A forma explícita de elemento de linha no espaço-tempo em coordenadas cartesianas, para assinatura -2 , é

$$ds^2 = a^2[(dt + e^x dy)^2 - dx^2 - \frac{e^{2x}}{2} dy^2 - dz^2], \quad (2.20)$$

onde o tensor energia-momento é composto pela densidade de matéria de uma distribuição homogênea de partículas de poeira e da constante cosmológica negativa. Esta solução apresenta uma característica peculiar, a existência de curvas tipo-tempo fechadas (*Closed Time-like Curves* - CTC's), que, por suposição, permitem viagens ao passado, ou seja, o universo de Gödel admite violação da causalidade. A fim de eliminar tal paradoxo, surgiu a proposta do princípio da autoconsistência das soluções das leis da física, onde assevera ocorrer localmente no universo real somente soluções globalmente autoconsistentes, assim não se permite alterar o passado dos eventos [88]. Além disso, existe a proposta da conjectura de proteção cronológica de Hawking, assegurando que efeitos quânticos na gravitação eliminariam quaisquer anomalias causais, devido a existência de CTC's classicamente produzidas [89]. Ademais, os teoremas de Geroch e da singularidade de Hawking-Penrose-Geroch exigem a causalidade na RG [90]. Porém, ha muitos estudos sobre a possibilidade da violação causal na RG, como nas teorias de interação superluminais de grávitons acoplados a escalares, férmions e vetores [91]. As ações efetivas que descrevem a dinâmica de baixa energia das TQC envolvendo a gravidade exibem genericamente violações de causalidade [92], sendo discutida a existência dos táquions superluminais [93, 94]. Descreveremos a seguir a generalização de (2.20), sendo elas chamadas de métricas tipo-Gödel ST-homogêneas⁸.

2.2.3 Métricas Tipo-Gödel ST-Homogêneas

Nesta seção, aplicaremos o procedimento realizado em [95, 96] onde os autores generalizaram o elemento de linha de Gödel (2.20), em coordenadas cilíndricas. Reescrevendo (2.20), para a mesma assinatura -2 , teremos

$$ds^2 = [dt + H(r)d\theta]^2 - D^2(r)d\theta^2 - dr^2 - dz^2, \quad (2.21)$$

onde $H(r)$ e $D(r)$ são funções arbitrárias na coordenada radial. Deste modo, está demonstrado em [95], que para alcançar as métricas tipo-Gödel ST-homogêneas, as funções métricas devem satisfazer as seguintes necessárias e suficientes condições

$$H'(r) = 2\omega D(r), \quad D''(r) = m^2 D(r), \quad (2.22)$$

onde o primo ($'$) significa derivada em relação a r . O par (m^2, ω) caracteriza completamente todas as métricas tipo-Gödel ST-homogêneas. É permitido o parâmetro m assumir qualquer

⁸ Refere-se à homogeneidade do espaço-tempo, onde ST é a abreviação do termo em inglês *Space-Time*.

valor real, $-\infty \leq m^2 \leq \infty$, não tendo esta uma interpretação física, sendo $\omega \neq 0$ a vorticidade. As soluções da Eq.(2.22) definem três classes diferentes de métricas tipo-Gödel para $\omega \neq 0$, dependendo do sinal do parâmetro m^2 . Nomeadamente,

i) *classe hiperbólica*, onde $m^2 > 0$

$$H(r) = \frac{2\omega}{m^2}[\cosh(mr) - 1], \quad D(r) = \frac{1}{m} \sinh(mr); \quad (2.23)$$

ii) *classe trigonométrica*, onde $m^2 = -\mu^2 < 0$

$$H(r) = \frac{2\omega}{\mu^2}[1 - \cos(\mu r)], \quad D(r) = \frac{1}{\mu} \sin(\mu r); \quad (2.24)$$

iii) *classe linear*, onde $m^2 = 0$

$$H(r) = \omega r^2, \quad D(r) = r.$$

Não será considerada aqui a classe degenerada correspondente a $\omega = 0$. A métrica de Gödel é uma solução das equações de Einstein com uma constante cosmológica Λ , suportada por uma poeira de densidade ρ , obtida tomando $m^2 = 2\omega^2 = -2\Lambda = \kappa^2 \rho$. Dessa maneira, a métrica Gödel está inserida na classe hiperbólica das métricas tipo-Gödel. Os diferentes grupos de isometrias dependem das relações entre os parâmetros m^2 e ω^2 . Por exemplo, a classe especial $m^2 = 4\omega^2$ admite G_7 como grupo de isometria, que é o maior grupo admitidos pelas métricas tipo-Gödel. De igual modo a métrica de Gödel (2.20), as métricas tipo-Gödel apresentam a presença CTC's, que são definidas por círculos $C = \{(t, r, \theta, z); t, r, z = \text{const}, \theta \in [0, 2\pi]\}$, em uma região restrita pelo intervalo $r_1 < r < r_2$, onde a função $G(r) = D^2(r) - H^2(r)$ deve ser negativa nesta região.

Foi mostrado em [95] que todas as três classes destas métricas apresentam pelo menos uma região ($r_1 < r < r_2$), onde existem CTC's. Para a **classe linear** $m = 0$, existe uma região não causal $r > r_c$ com curvas temporais fechadas, onde r_c é o raio crítico, definido como o raio máximo que permite a presença de CTC's $r_c = 1/\omega$. Para a **classe trigonométrica** $m^2 = -\mu^2 < 0$, existe uma sequência infinita de regiões causais e não causais alternadas. Para a **classe hiperbólica** de tais espaços-tempo, existe uma região não causal $r > r_c$, onde o raio crítico r_c , quando $0 < m^2 < 4\omega^2$, é dado por

$$\sinh^2\left(\frac{mr_c}{2}\right) = \left(\frac{4\omega^2}{m^2} - 1\right)^{-1}. \quad (2.25)$$

Podemos facilmente deduzir da Eq.(2.25) que quando a relação $m^2 \geq 4\omega^2$ é satisfeita, a presença de CTC's é totalmente evitável, isto é, não há violação de causalidade e, para o caso especial, $m^2 = 4\omega^2$, o raio crítico $r_c \rightarrow \infty$. Doravante, por questão de simplificação, em muitas ocasiões, vamos referir às métricas tipo-Gödel ST-homogêneas como simplesmente métricas tipo-Gödel.

A Figura-1 mostra a violação da causalidade para uma geodésica de um raio de luz emitido no ponto $x = 0.5$, no plano $z = 0$, considerando uma caso particular pertencente à classe linear de métricas tipo-Gödel planas, em coordenadas cartesianas

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + (1 - \alpha_0^2 x^2)dy^2 - 2\alpha_0 x dt dy + dz^2, \quad (2.26)$$

onde α_0 é um parâmetro real positivo. A geodésica descrita na Figura-1 tem coordenada temporal que não aumenta monotonicamente, cujos parâmetros que definem as funções arbitrárias são $\alpha_0 = 2\omega = 0.3$ e $m = 0$. Os pontos A, B, C e D estão contidos na CTC, que cruza o círculo pontilhado, que representa o raio crítico para um observador na origem [97]. As métricas tipo-Gödel têm a feliz propriedade de facilitar a manipulação e estudo

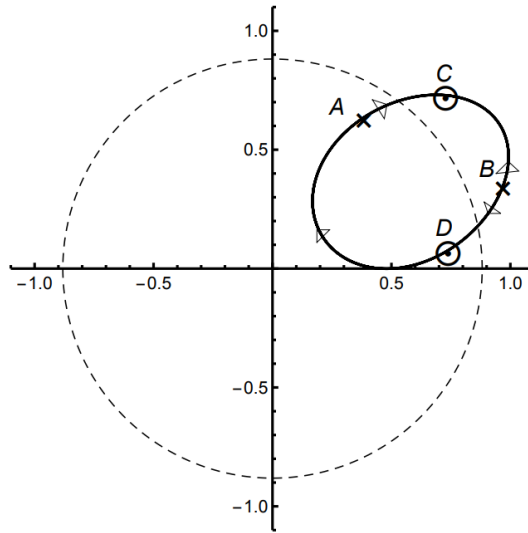


Figura 1 – CTC de um raio de luz representada no plano azimutal $z = 0$ para classe linear plana de métricas tipo-Gödel. Crédito da figura: *Wave fronts in a causality violating Gödel-type metric*, Kling, T. P.; Ahmed, F.; Lalumiere, M., 2020, arXiv:2005.03417 [gr-qc].

das equações de Einstein, convertendo tais equações diferenciais parciais não lineares em equações algébricas. Foi verificado a consistência das soluções do tipo-Gödel dentro da gravidade modificada de CS, com o coeficiente de CS não-dinâmico, para diferentes formas de matéria, incluindo poeira, fluido, campo escalar e campo eletromagnético. Com discussões sobre questões de causalidade, diferentemente da RG, com solução no vácuo e soluções causais hiperbólicas, para matéria fisicamente bem motivada [56]. Ademais, os estudos sobre as métricas tipo-Gödel podem ser vistos na gravitação $f(R)$ [98, 99], na gravitação $f(R, T)$ para fluido perfeito, deixando a violação da causalidade em aberto [100], na gravitação Horava-Lifshitz [101, 102]. Ainda, foi considerado perturbações estacionárias em primeira ordem das métricas tipo-Gödel na gravidade Chern-Simons não-dinâmica [103]. Sendo obtidas soluções analíticas, quando assumidas certas condições para as equações de campo perturbadas, com a métrica expandida. Recorreremos às métricas tipo-Gödel como

ansatz para análise dos modelos de gravidade modificada, que serão apresentados mais adiante.

2.3 Limitações da Gravitação de Einstein

Em princípio, o estudo da gravitação gera duas principais e não triviais tarefas. A primeira tarefa seria o estudo dos aspectos quânticos da teoria (correções quânticas, ação efetiva, renormalização, etc.). A segunda tarefa, em seu aspecto clássico, seria obter as equações de movimento, através das soluções das equações não lineares de Einstein. Neste caso, para encontrarmos e resolvermos as equações de movimento de Einstein, devemos assumir ansatz, ou seja, devemos escolher métricas que permitam simplificar os cálculos, reduzindo o número de variáveis nestas equações, que no caso quadridimensional são dez componentes da métrica. Por exemplo, a métrica FRW se torna uma boa escolha por motivo de ser ela descrita por somente uma incógnita dada pelo fator de escala $a(t)$. Outro exemplo de ansatz seriam as métricas tipo-Gödel, pois, como já mencionado, elas convertem as equações de Einstein em simples equações algébricas. No entanto, como referido, a gravidade de Einstein se depara com duas maiores dificuldades ainda não resolvidas, sendo elas: (i) Uma explicação plausível para a aceleração cósmica; e (ii) Uma consistente descrição quântica da gravidade. Abordaremos, em seguida, de maneira sucinta estes dois grandes problemas existentes na física gravitacional. Primeiramente, iniciaremos nossa abordagem no tema sobre aceleração cósmica.

2.3.1 Aceleração Cósmica

Em 2011, mediante observações de supernovas distantes, os astrofísicos norte-americanos Saul Perlmutter, Brian Schmidt e Adam Riess ganharam o prêmio nobel de Física pela descoberta, em 1998, da expansão acelerada do universo [104]. Com efeito, sendo a RG incapaz de admitir uma possível argumentação teórica para explicar a aceleração cósmica. A tentativa mais simples de resolver o problema se baseia na introdução da constante cosmológica Λ . Esta constante, expressa em unidades do sistema internacional, tem a dimensão de comprimento com grau negativo, isto é, $[L] = -2$. Ou seja, é adicionado à ação de Einstein-Hilbert o termo extra

$$S_{(\Lambda)} = -\frac{1}{\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \Lambda, \quad (2.27)$$

resultando na seguinte ação modificada de Einstein-Hilbert

$$S_{EH}^{(\Lambda)} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2\kappa^2} (R - 2\Lambda) + \mathcal{L}_m[g_{\mu\nu}, \psi] \right], \quad (2.28)$$

que produz as equações proposta por Einstein, em 1917, em sua tentativa de explicar o não colapso do universo.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu}^{(m)}. \quad (2.29)$$

A obtenção das equações de Einstein dentro do formalismo Lagrangiano, sem a constante cosmológica, está descrita no Apêndice-A. No início, em 1917, Λ foi originalmente introduzido por Einstein para fornecer uma solução para um universo estático. Posteriormente, em 1922, Friedmann demonstra matematicamente que as equações de Einstein permanecem válidas num universo dinâmico, qualquer que seja Λ . Em seguida, no ano 1927, Lemaître, baseado nos dados observacionais astronômicas de Hubble, revela um universo em expansão. Especula-se que provavelmente a expansão do universo poderia ter sido prevista um século antes do Hubble, caso o paradoxo de Heinrich W. M. Olbers⁹ (1758-1840) fosse resolvido [105, 106]. Em 1931, Einstein aceitou a teoria de um universo em expansão e propôs, em 1932, com Willem de Sitter (1872-1934), um modelo de um universo em expansão contínua, com constante cosmológica nula. Willem de Sitter provou que para valores negativos de Λ o espaço vazio se expandirá exponencialmente. Mais recentemente, após a descoberta da aceleração cósmica, a ideia da constante cosmológica foi novamente abraçada, mas sem o objetivo de resolver o problema da renormalizabilidade da teoria da gravidade. Para a métrica FRW (2.19), a matéria é dada pelo seguinte fluido relativístico

$$\kappa^2 T_{\mu\nu}^{(m)} = (\rho + p)v_\mu v_\nu + pg_{\mu\nu}, \quad (2.30)$$

onde ρ é a densidade de matéria e p é a pressão. Em muitos casos aplica-se a equação de estado $p = \omega\rho$, com ω sendo a constante característica do tipo de matéria. É fácil de ver que para a métrica FRW, as componentes do tensor de Ricci e o escalar curvatura serão dados por

$$\begin{aligned} R_{00} &= -\frac{3\ddot{a}}{a}; \\ R_{ij} &= \delta_{ij}(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2); \\ R &= 6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Neste caso, a equação de Einstein para a componente (0,0), juntamente com a equação obtida pela diferença entre as equações cujas componentes são (1,1), (2,2), (3,3) e (0,0), são conhecidas como sendo as equações de Friedmann

$$\begin{aligned} \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} &= \frac{8}{3}\pi G\rho; \\ \frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{4}{3}\pi G(\rho + 3p), \end{aligned} \quad (2.32)$$

onde fizemos $c = 1$, e sabendo que k admite o valor $+1$, para o espaço com curvatura positiva, 0 para o espaço sem curvatura, e -1 para o espaço com curvatura negativa. Nestas equações percebe-se claramente que, para a matéria usual, isto é, $\rho \geq 0$ e $p \geq 0$, teremos um universo em desaceleração, contrariando os resultados obtidos recentemente

⁹ Se o universo é estático, infinitamente grande e antigo e com um número infinito de estrelas distribuídas uniformemente, então o céu noturno deveria ser brilhante.

que apontam para um universo em expansão acelerada [28]. Portanto, a presença da constante cosmológica não trivial ($\Lambda \neq 0$) fora inserida, modificando as equações de Friedmann, resultando na adição no lado direito das Eqs.(2.32) o termo $\frac{\Lambda}{3}$. Por exemplo, Willem de Sitter encontrou uma solução maximamente simétrica das equações de campo de Einstein [107], para o vácuo ($\rho = p = 0$) no universo plano ($k = 0$). Logo, a aceleração é $a(t) = a_0 e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t}$, sendo a taxa de expansão caracterizada pelo parâmetro de Hubble $H = \frac{\dot{a}}{a}$, tendo o valor constante para o parâmetro Hubble atual H_0 , com medições de valores entre a faixa de 40 a 90 km/seg por Mpc (um parsec equivale a 3,26 anos-luz, $1\text{Mpc} = 1 \cdot 10^{24}\text{cm}$). Existe também o parâmetro de desaceleração, que mede a taxa de variação da taxa de expansão do universo $q = -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2}$.

O modelo cosmológico padrão ΛCDM ¹⁰, também chamado de “modelo de concordância”, é o modelo cosmológico simples e mais amplamente aceito, porque tem sido bem-sucedido na interpretação de uma ampla gama de observações. Este modelo se utiliza de vários métodos cosmológicos e observáveis astrofísicos, como a radiação cósmica de fundo em micro-ondas (CMB), a nucleossíntese do Big Bang (ou nucleossíntese primordial), a formação e evolução de estruturas em grande escala no universo e o fato de que o universo está se expandindo [108]. Embora o modelo ΛCDM se ajuste razoavelmente bem aos dados observacionais disponíveis, explicando várias observações, ele enfrenta vários desafios teóricos e observacionais, o mais acentuado entre eles é o problema da grande discrepância existente entre os valores da constante cosmológica previsto pela TQC e o observado pela cosmologia [109]. Pois, a constante Λ é interpretada pela física das partículas como a densidade de energia do vácuo, estado de mais baixa energia. Sua contribuição para o vácuo quântico do estado fundamental de todos os campos de matéria conhecidos na escala de Planck, $\rho_{\Lambda}^{(vacuo)} = 10^{74}(\text{GeV})^4$, é 121 ordens de grandeza maior que a densidade de energia obtida por meio de dados observacionais, $\rho_{\Lambda}^{(obs)} = 10^{-47}(\text{GeV})^4$ [109].

Outro problema no modelo cosmológico padrão resulta do teorema da singularidade, pois quando assumimos a condição de energia forte no modelo FRW, ou seja, para $\rho + 3p > 0$ e $\Lambda = 0$, então $\dot{a}(t_0) > 0$, implica que houve uma singularidade inicial em algum tempo finito no passado, onde não é possível aplicar as leis conhecidas da física [110, 111]. Ademais, também questiona-se sobre a tal “coincidência” cosmológica, na qual o período atual, em que estamos medindo, a densidade de energia da matéria escura ρ_{me} é da mesma ordem da densidade de energia da energia escura ρ_{ee} . Consoante os dados observacionais, a igualdade dos valores para os diferentes tipos de densidades de energia ocorreu recentemente, em um desvio para o vermelho $z \approx 0,55$. Portanto, tal fato observacional, $\rho_{me}/\rho_{ee} \sim \mathcal{O}(1)$, parece indicar que estamos atualmente vivendo em um período único da história cósmica, uma enorme coincidência, pois requer muitas condições iniciais especiais (*fine-tuning*)

¹⁰ Composto por energia escura (Λ), matéria escura fria (não bariônica), bárions e radiação (fótons e neutrinos sem massa).

para o universo primordial [112]. Então, a pergunta correspondente: “Por que agora?” constitui o problema da “coincidência” no modelo Λ CDM. Cálculos extraídos do próprio modelo mostra que os valores iniciais das densidades de energia associadas à matéria e a constante cosmológica provavelmente não seriam fixados por processos aleatórios. Na escala de tempo de Planck, as condições iniciais são fortemente ajustadas em 95 ordens de magnitude [113]. Os problemas que surgem das condições iniciais no modelo FRW levaram ao estudo de diferentes modelos FRW alternativos, que sofrem problemas semelhantes de ajuste fino e não se encaixam melhor nas observações que o modelo FRW [114].

2.3.2 A descrição Quântica da Gravidade

De modo suposto, é natural esperar que a gravidade seja quantizada, em analogia com a QED e a teoria de Yang-Mills [115]. Mas, o fato da constante gravitacional ter dimensão negativa κ^2 , precisamente $2 - D$ para um espaço-tempo D -dimensional, torna à gravidade de Einstein uma teoria de campo não renormalizável. Dessa forma, uma robusta descrição da RG, no formalismo da TQC, exige o envolvimento de um número infinito de contratermos, conforme discussão apresentada em [116]. Então, uma consolidada teoria quântica da gravidade permitiria-nos compreender, por exemplo, o comportamento de buracos negros. Uma das dificuldades de formular uma consistente teoria da gravidade quântica é a carência de dados experimentais que possam avaliar as teorias propostas. Pois, a observação direta dos efeitos gravitacionais quânticos só apareceria em escalas próximas ao comprimento de Planck (10^{-35}m), condições nas quais são inacessíveis aos experimentos laboratoriais atuais. Uma outra dificuldade seria devido a interpretação dinâmica do espaço-tempo na RG, diferentemente da MQ com um cenário de espaço-tempo fixo, como encontrado também na mecânica Newtoniana e na RE. Na TQC relativística, assim como na TQC clássica, o espaço-tempo de Minkowski é o pano de fundo fixo. Assim, até certo ponto, a RG pode ser vista como uma teoria relacional, na qual a única informação fisicamente relevante é a relação entre diferentes eventos no espaço-tempo [117]. Ideia esta anteriormente defendida por Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) e o filósofo George Berkeley (1685–1753), que nunca aceitaram os conceitos Newtonianos de espaço e tempo absolutos. Ao invés disto, eles defenderam a ideia de que todo movimento é relativo, sendo o espaço puramente relativo, como o tempo [118].

O princípio da localidade¹¹ impõe obstáculo para a TQC no espaço-tempo curvo com uma métrica fixa, onde campos do operador bosônico/fermiônico super comutam para dois separados eventos do tipo espaço. Mas, na gravidade quântica a métrica é dinâmica, de modo que dois separados eventos do tipo espaço dependerão de seus estados, podendo eles estarem em uma superposição quântica [119]. Uma proposta à aparente

¹¹ Afirma que um objeto é influenciado diretamente apenas pela sua vizinhança imediata. Uma teoria que inclui o princípio da localidade é considerada uma teoria local.

inconsistência da teoria quântica da gravitação se dá pela interpretação geométrica da RG não ser fundamental, mas surgindo qualitativamente de alguma teoria mais primordial [120]. Por exemplo, a gravidade induzida ou emergente propõe ser a curvatura do espaço-tempo e sua dinâmica uma aproximação do campo médio de graus microscópicos de liberdade subjacentes, semelhante à aproximação da mecânica dos fluidos dos condensados de Bose-Einstein [121]. Um ponto de vista oposto seria o da independência de um fundamental campo de fundo, necessitando ser a MQ generalizada por parâmetros onde não foi especificado, a priori, o tempo. Progressos foram alcançados nas duas frentes, conduzindo à teoria das cordas [122] e, por outro lado, à gravitação quântica em laço [123]. Neste cenário, surgem as seguintes questões: (i) A MQ torna-se inconsistente nas vizinhanças das singularidades, onde a RG prediz uma quebra de paradigma; (ii) O princípio da incerteza de Heisenberg não deixa claro como determinar, com precisão absoluta, o campo gravitacional de uma partícula; e (iii) A violação da desigualdade de Bell indica uma influência superluminal, sendo, supostamente, incompatível com a RG, onde a velocidade da luz é a velocidade limite [70].

2.3.3 Linearização da Relatividade Geral

Gerardt Hooft e Veltman desenvolveram um método de linearização da gravidade [40], que é utilizado no estudo de ondas gravitacionais e lentes gravitacionais de campo fraco. Neste método, divide-se a métrica dinâmica $g_{\mu\nu}$ em uma soma da parte de fundo $\tilde{g}_{\mu\nu}$, aqui escolhida ser a métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$, mais um pequeno termo de perturbação de um campo simétrico $h_{\mu\nu}$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \epsilon h_{\mu\nu}, \quad \text{com } |h_{\mu\nu}| \ll 1, \quad (2.33)$$

onde ϵ foi introduzida com a finalidade de alterar a dimensão do campo de flutuação para $[h_{\mu\nu}] = 1$. No regime de sistemas para o qual a curvatura do espaço é pequena, aplica-se a teoria da perturbação para o tensor métrico, como resultado, a ação pode ser expandida em uma série infinita de potências de $h_{\mu\nu}$. Para tal procedimento, teremos o tensor de Ricci e o escalar de Ricci linearizados

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}^{(0)} &= \frac{1}{2}(\partial_\alpha \partial_\mu h^\alpha_\nu + \partial_\alpha \partial_\nu h^\alpha_\mu - \partial_\mu \partial_\nu h - \square h_{\mu\nu}); \\ R^{(0)} &= \eta_{\mu\nu} R^{\mu\nu} = \partial_\mu \partial_\nu h^{\mu\nu} - \square h, \end{aligned} \quad (2.34)$$

onde $h = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} = h^\nu_\nu$. A linearização do Lagrangiano de Einstein-Hilbert $\mathcal{L}^{(0)}$, expandida até a segunda ordem do campo dinâmico, é conhecido como Lagrangiano de Fierz-Pauli [124], sendo ela

$$\mathcal{L}^{(0)} = \frac{1}{4}(\partial_\mu h \partial^\mu h - 2\partial_\mu h \partial_\nu h^{\mu\nu} - \partial_\mu h_{\alpha\beta} \partial^\mu h^{\alpha\beta} + 2\partial_\mu h_{\nu\beta} \partial^\nu h^{\mu\beta}), \quad (2.35)$$

onde os índices de $h_{\mu\nu}$ são levantados e abaixados com o uso da métrica de Minkowski. Por consequência de cálculos diretos, teremos as correspondentes equações de movimento

de segunda ordem, que são as equações de Einstein linearizadas

$$G_{\mu\nu}^{(0)} = \frac{1}{2}(\partial_\alpha \partial_\mu h_\nu^\alpha + \partial_\alpha \partial_\nu h_\mu^\alpha - \partial_\mu \partial_\nu h - \square h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha \partial_\beta h^{\alpha\beta} + \eta_{\mu\nu} \square h) = 0. \quad (2.36)$$

Observa-se que o tensor de Einstein linearizado, $G_{\mu\nu}^{(0)}$, possui simetria de gauge $\delta h_{\mu\nu} = \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu$ e obedece às identidades de Bianchi linearizadas $\partial^\mu G_{\mu\nu} = 0$. O processo de decomposição do espaço-tempo genérico, para o espaço-tempo de Minkowski mais um termo de perturbação (2.33), não é único. Isso se deve ao fato de que diferentes escolhas de coordenadas podem resultar em diferentes formas para $h_{\mu\nu}$. Para capturar esse fenômeno, é introduzida a aplicação da simetria de gauge, assim sendo, escolheremos o termo de fixação de gauge do tipo Feynman $C_\mu = \partial^\nu h_{\nu\mu} - \frac{1}{2} \partial_\mu h$, cujo Lagrangiano de gauge será adicionado ao Lagrangiano \mathcal{L}_0 , resultando em

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - \frac{1}{2} C_\mu C^\mu = \frac{1}{8} (\partial_\mu h \partial^\mu h - 2 \partial_\mu h_{\nu\alpha} \partial^\mu h^{\nu\alpha}). \quad (2.37)$$

Podemos assim obter o propagador no espaço dos momentos

$$\langle h_{\alpha\beta}(-k) h_{\mu\nu}(k) \rangle = \frac{i}{k^2 - i\epsilon} \left(\eta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta} + \eta_{\nu\alpha} \eta_{\mu\beta} - \frac{2}{D-2} \eta_{\mu\nu} \eta_{\alpha\beta} \right), \quad (2.38)$$

para a dimensão $D = 2$ teremos uma singularidade, uma vez que a ação de Einstein-Hilbert (2.6) é um puro termo de superfície. Por fim, poderemos expandir a ação de Einstein-Hilbert (2.6) em séries de $h_{\mu\nu}$, utilizando-se de um campo de fundo genérico $\tilde{g}_{\mu\nu}$ na Eq.(2.33), no lugar da métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$. Neste caso, o determinante da métrica expandido até a segunda ordem de h será

$$\sqrt{|g|} \rightarrow \sqrt{|g|} \left(1 + \frac{h}{2} - \frac{h_\mu^\nu h_\nu^\mu}{4} + \frac{h^2}{8} + \dots \right), \quad (2.39)$$

e a expressão do escalar de curvatura R , também expandido até a segunda ordem em h será

$$\begin{aligned} R \rightarrow R &+ \square h^\beta_\beta - \nabla^\alpha \nabla^\beta h_{\alpha\beta} - R^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \nabla_\alpha (h^\beta_\mu h^{\mu,\alpha}_\beta) + \frac{1}{2} \nabla_\beta [h^\beta_\nu (2h^{\nu\alpha}_{,\alpha} - h^\alpha_{,\nu})] \\ &+ \frac{1}{4} (h^\nu_{\beta,\alpha} + h^\nu_{\alpha,\beta} - h^\nu_{\alpha\beta}) (h^{\beta,\alpha}_\nu + h^{\beta\alpha}_{,\nu} - h^{\alpha,\beta}_\nu) \\ &- \frac{1}{4} (2h^{\nu\alpha}_{,\alpha} - h^\alpha_{,\nu}) h^\beta_{\beta,\nu} - \frac{1}{2} h^{\nu\alpha} h^\beta_{\beta,\nu\alpha} + \frac{1}{2} h^\nu_\alpha \nabla_\beta (h^{\beta,\alpha}_\nu + h^{\beta\alpha}_{,\nu} - h^{\alpha,\beta}_\nu) + h^\nu_\beta h^\beta_\alpha R^\alpha_\nu. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Por meio de expressões (2.39) e (2.40) podemos realizar os cálculos de um laço. Diante disso, o contratermo de um laço decorrente do setor gravitacional puro da RG [40] será

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\sqrt{|g|}}{8\pi^2(D-4)} \left(\frac{R^2}{120} + \frac{7R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}}{20} \right), \quad (2.41)$$

Então, percebe-se, claramente, que para o espaço-tempo quadridimensional a expressão (2.41) diverge. Por consequência desse resultado, podemos considerar a gravidade

de Einstein como uma teoria efetiva¹². De outro modo, a fim de se obter uma teoria renormalizável, podemos estender a ação acrescentando termos com o propósito de cancelar os termos divergentes. Enfim, a RG fora estabelecida como uma teoria científica de extraordinário sucesso, contendo em si resultados precisos quando utilizada nos modelos gravitacionais e cosmológicos, no regime de campos fracos, na escala do sistema solar e estelar. No entanto, no regime de campo forte e em outras escalas, aspectos fenomenológicos e teóricos sugerem correções significativas para os efeitos clássicos e quânticos da RG. Inquestionavelmente, a procura pela construção de uma consistente teoria quântica da gravidade é um bom motivo para uma generalização da gravidade de Einstein.

2.4 Equação de Dirac no Espaço Curvo

Em 1928, Paul Dirac, em sua busca por uma equação relativística para o elétron, modificou a equação de Schrödinger e obteve uma nova equação covariante sob transformação de Lorentz, cuja forma compacta é dada por

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi(x) = 0. \quad (2.42)$$

A equação de Dirac (2.42) desempenha um papel fundamental na MQ “relativística”¹³ e na TQC, descrevendo ela com muita precisão o comportamento das partículas de spin-1/2, e prevendo a existência da antimatéria¹⁴. Quando usada com cuidado, a equação (2.42) tem sido extremamente bem-sucedida, mesmo em sua interpretação para partícula única, uma vez que ela descreve tanto partículas como antipartículas [125]. O espectro relativístico do átomo de hidrogênio, o acoplamento spin-órbita, o fator giromagnético g_s do elétron¹⁵, o grafeno curvo e semimetais [126], a amplitude do espalhamento de Coulomb, são alguns exemplos de cenários e fenômenos descritos pela equação de Dirac, até mesmo em seu limite ultra-relativístico, $m \rightarrow 0$. Porém, em última análise, a melhor abordagem consiste em considerar o espinor de Dirac $\Psi(x)$ como um campo [125]. Devido a grande dificuldade em seu tratamento matemático, são poucas as soluções autoconsistentes na gravidade de Einstein-Dirac ou quando se tenta conectar a equação de Dirac num espaço curvo. Soluções de espinor propagando-se sobre um fundo curvo estão expostas em [127], e soluções cosmológicas com um campo de spin podem ser encontradas em [128, 129]. A

¹² A teoria efetiva da gravidade de Einstein considera a RG uma teoria de campo eficaz em seus limites de aplicabilidade, ou seja, no limite de baixa energia (baixa curvatura) e em escala de distância onde os efeitos quânticos da gravidade são negligíveis.

¹³ Estritamente falando a MQ relativística não existe. O formalismo que aborda, concomitantemente, a MQ e a teoria da relatividade é a TQC.

¹⁴ A primeira evidência experimental da previsão teórica de Dirac ocorreu em 1932, quando Carl David Anderson (1905-1991), em suas pesquisas com raios cósmicos, descobriu o pósitron.

¹⁵ O fator giromagnético é uma constante adimensional que relaciona o momento magnético de spin com o momento magnético orbital da partícula. Para o elétron $g_s = 2$, de acordo com a teoria quântica relativística de Dirac.

equação de Dirac minimamente acoplada à RG usando a TQC, com um único campo de Dirac quantizado canonicamente em um espaço-tempo curvo de fundo, estático e esfericamente simétrico, foi estudada em [130]. Na qual as equações de campo de Einstein foram obtidas pelo valor esperado do tensor energia-momento.

De forma abrangente, podemos afirmar que a generalização de uma equação de onda no espaço Riemanniano é substancialmente determinada pela natureza da partícula em análise. Os férmions, como constituintes cruciais da matéria, são descritos por campos espinoriais. Em contraste, as interações são mediadas por bósons que não têm as mesmas propriedades de transformação dos espinores. Via de regra, as equações tensoriais para bósons são estendidas de uma forma mais simples do que as equações espinoriais para férmions. Nesse contexto, um problema muito interessante é a extensão de uma equação de onda para o campo de Dirac. Os autores em [131] relacionaram o formalismo tensorial, geralmente covariante, a um formalismo espinorial, ambos aplicados à descrição do campo de Dirac em um espaço-tempo Riemanniano, considerando os dois métodos equivalentes e derivando as equações tensoriais das equações espinoriais.

É de conhecimento a pretensão de construir uma teoria gravitacional consistente unificada ao modelo padrão (*Standard Model-SM*) das partículas, que incorpore não somente os espinores, mas também, descreva os bósons como estados vinculados. Em princípio, isto não representaria qualquer problema, uma vez que os bósons podem ser compostos por um número par de férmions. Contudo, numa teoria fundamental, precisamos de bósons com propriedades muito particulares. O gráviton, por exemplo, está ligado a simetria das transformações de coordenadas gerais¹⁶ e as interações são mediadas por bósons de gauge com spin-1. Além disso, campos escalares são necessários para alcançar a quebra espontânea da simetria eletrofraca e, possivelmente também, estender as simetrias, como as grandes simetrias de gauge unificado [132, 133].

Saliente-se, menciona parecer ser a assimetria tempo-espaço um grande obstáculo para o sucesso da unificação das interações da natureza. Decerto, presume-se ser irremissível considerar tal assimetria, representada por equações de movimento e leis de conservação que operam de forma diferente ao longo do tempo e do espaço, nos sistemas físicos que evoluem inevitavelmente ao longo do tempo [134]. Na RG o tempo e o espaço são tratados em uma estrutura unificada, mas existindo entre esses dois conceitos uma básica assimetria relacionada à assinatura da métrica. Já as equações de campo quânticas, com assinatura euclidiana, geralmente admitem soluções para apenas um único estado fundamental, ou às vezes, para estados degenerados. Em contraste, a assinatura das métricas semi-Riemannianas na RG permite muitas soluções complexas com evolução temporal causal

¹⁶ Com difeomorfismo entre as duas variedades diferenciáveis envolvidas na transformação. Ou seja, deve existir uma aplicação entre essas variedades que seja diferenciável, invertível e a sua inversa seja diferenciável.

e não-causal. Dentro das várias tentativas de construir uma teoria unificada, baseada em TQC ou supercordas, a anisotropia espaço-temporal é tratada como um conceito quântico fundamental em escala de altas energias. Outros modelos não incorporam nas suas formulações iniciais a assimetria tempo-espaço, mas sendo gerada por processos de quebra espontânea de simetria, resultante da dinâmica do sistema [135].

Em 1951, Achilles Papapetrou (1907-1997) desenvolveu um método para a derivação das equações covariantes de movimento para partículas-teste em rotação sujeitas ao campo gravitacional [136]. Tal trabalho serviu de inspiração para estudos de modelos de spin em espaço curvo. Estudar a equação de Dirac em um espaço-tempo curvo requer alguns cuidados especiais, pois existem sutilezas enfrentadas ao lidar com campos fermiônicos [137]. Pois, é preciso transformar para suas formas adequadas as matrizes gama, as derivadas parciais e a conexão de spin, para assim considerar suas corretas contribuições geométricas no espaço curvo [138]. Desta forma, tem-se o formalismo de tetradas, discutido na Seção-2.1.3, como o agente ativo da transformação da equação de Dirac usual do espaço-tempo plano para o espaço-tempo curvo. De forma prática, as transformações deverão ocorrer no espinor e nas matrizes de Dirac, conforme veremos a seguir

$$[i\gamma^\mu \nabla_\mu - m]\Psi(x) = 0, \quad (2.43)$$

com

$$\nabla_\mu = \partial_\mu + \Omega_\mu \quad (2.44)$$

e

$$\Omega_\mu = \frac{1}{8}\omega_{ab\mu}(x)[\gamma^a, \gamma^b], \quad (2.45)$$

onde $\omega_{ab\mu}$ são as conexões de spin, uma generalização das conexões afim, ou seja, o objeto matemático que efetua o transporte paralelo em 4 dimensões, definidos por

$$\omega_{ab\mu} = \eta_{ac}\omega_{b\mu}^c = \eta_{ac}\left(e_\nu^c\partial_\mu(e_b^\nu) + e_\nu^c e_b^\sigma \Gamma_{\sigma\mu}^\nu\right), \quad (2.46)$$

onde observa-se ser $\omega_{ab\mu}$ anti-simétrico nos dois primeiros índices. As matrizes de Dirac em espaço-tempo curvo são dadas por $\gamma^\mu = e_a^\mu \gamma^a$, com os índices do alfabeto grego(latino) representando a coordenada geral(local) para o espaço curvo(plano). As matrizes γ^μ devem satisfazer a bem conhecida relação de anti-comutação $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\hat{I}$. Sendo e_a^μ as tetradas, descritas na Seção-2.1.3, que generalizam as transformações entre as coordenadas globais e locais, através da relação entre duas métricas diferentes

$$g_{\mu\nu} = e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab}. \quad (2.47)$$

A seguir abordaremos o tema das teorias modificadas da gravitação, descreveremos alguns de seus mais conhecidos modelos, com suas características mais importantes. Em especial, daremos destaque a gravidade de Chern-Pontryagin e gravidade não-local.

3 Teorias Modificadas da Gravitação

3.1 Modificações no Setor Gravitacional Puro

Na esteira do que foi dito no capítulo anterior, visando estender a RG, surgiram propostas de modificar a gravidade de Einstein com a introdução de termos adicionais ao seu setor gravitacional puro [139]. De início, apareceu o modelo mais simples de gravidade- R^2 . Mas, logo apareceram novos modelos, que incorporaram na ação, outros termos de qualquer grau n no escalar de curvatura. Nos quais foram atribuídos para n valores negativos e, para as teorias exóticas, valores fracionários. Em consequência, foi introduzido o conceito de gravidade $f(R)$, com a implementação, na ação clássica de Einstein-Hilbert, de funções com outros invariantes escalares, não somente com termos de escalar de curvatura [140]. A inclusão dos novos termos é dada por escalares construídos na base do tensor métrico, ou seja, esses escalares são funções do tensor de Riemann e Ricci, suas derivadas covariantes e do escalar de curvatura. No caso mais simples, o Lagrangiano depende de uma função sujeita somente à curvatura escalar $f(R)$

$$S_{f(R)} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} f(R), \quad (3.1)$$

que leva às seguintes equações de campo de quarta ordem em relação ao tensor métrico:

$$f_R R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f g_{\mu\nu} + (g_{\mu\nu} \square - \nabla_\mu \nabla_\nu) f_R = \kappa^2 T_{\mu\nu}^{(m)}, \quad (3.2)$$

onde $f = f(R)$, f_R é a derivada de $f(R)$ com respeito a R , sendo o operador covariante d'Alembertiano definido usualmente como $\square \equiv g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu$. Estas teorias, sob determinados limites, são capazes de resolver algumas inconsistências fornecidas pela RG nas escalas astrofísicas. Podendo ser restaurada a gravidade de Einstein, como um caso particular delas [141]. Dentro deste contexto, o modelo de Starobinsky, proposto em 1980, foi o primeiro modelo a descrever como o universo primordial poderia ter passado por um período extremamente rápido de expansão exponencial - daí o nome inflação de Starobinsky. sendo ele

$$f_s(R) = R + \alpha R^2, \quad (3.3)$$

onde o segundo termo, com $\alpha > 0$, leva as previsões inflacionárias consoantes as medições anisotrópicas das radiações cósmicas de fundo em micro-ondas, realizadas em 2018 pelo satélite Planck [142, 143]. Sabendo ser a gravidade de Einstein muito bem confirmada observacionalmente em seus limites e a curvatura do universo conhecida por ser pequena, é natural sugerir modelos da forma $f(R) = R + \gamma R^n$, com $n \geq 2$, e possuindo o termo de Einstein-Hilbert dominante. Evidentemente, qualquer teoria da gravidade deve ser

compatível com as evidências observacionais, não somente na escala cosmológica primordial, mas também deverá ser submetida aos testes locais e astrofísicos, como os dados obtidos das estrelas compactas. A esse respeito, foi demonstrado que as extensões de RG produzem modificações significativas no regime de gravidade de campo forte. Na última década, estrelas compactas foram estudadas em teorias da gravidade $f(R)$ no formalismo métrico e de Palatini [144, 145]. O desenvolvimento de ideias inspiradas na gravidade $f(R)$, contendo funções de outros invariantes escalares, não somente termos de escalar de curvatura, produziu a gravidade Lovelock, Gauss-Bonnet, $f(R, Q)$ e $f(R, Q, P)$, com $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$, $Q = R^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ e $P = R^\alpha_{\beta\mu\nu} R^\beta_{\alpha}{}^{\mu\nu}$, cuja ação (ver referência [146]) tem a seguinte forma:

$$S_{f(RPQ)} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} f(R, Q, P), \quad (3.4)$$

com as respectivas equações de campo

$$\begin{aligned} f_R R_{\mu\nu} - \frac{f}{2} g_{\mu\nu} + 2f_Q R_{(\mu} R_{\nu)\beta} + g_{\mu\nu} \square f_R - \nabla_{(\mu} \nabla_{\nu)} f_R + \square(f_Q R_{\mu\nu}) - 2\nabla_\lambda \left[\nabla_{(\mu} (f_Q R_{\nu)}^\lambda) \right] + \\ + g_{\mu\nu} \nabla_\alpha \nabla_\sigma (f_Q R^{\alpha\sigma}) + 2f_P R_{\alpha\beta\sigma\mu} R^{\alpha\beta\sigma}{}_\nu - 4\nabla_\alpha \nabla_\beta [f_P R^\alpha_{(\mu\nu)}{}^\beta] = \kappa^2 T_{\mu\nu}^{(m)}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

onde $f_R \equiv \frac{\partial f}{\partial R}$, $f_Q \equiv \frac{\partial f}{\partial Q}$ e $f_P \equiv \frac{\partial f}{\partial P}$.

As equações (3.5), de segunda ordem nas curvaturas (de quarta ordem nas derivadas), são consideradas uma generalização das equações de movimento de outras teorias da gravidade. Por exemplo, é de fácil verificação que (3.5) se tornará nas equações de movimento para os modelos de gravidade $f(R, Q)$ e $f(R)$, quando definimos $P = 0$ e $P = Q = 0$, respectivamente. E, ao avocarmos $f(R, Q, P) = R$, recuperaremos as equações de Einstein (2.8). Verifica-se ser a conhecida gravidade de Stelle um caso particular da gravidade $f(R, Q, P)$, tendo ela a seguinte ação

$$S_{Stelle} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} (R + \alpha R^2 + \beta R^{\mu\nu} R_{\mu\nu}). \quad (3.6)$$

No caso acima citado da gravidade de Gauss-Bonnet, seu modelo foi construído mediante o termo topológico de superfície (derivada total em quatro dimensões), conhecido como invariante de Gauss-Bonnet $\mathcal{G} = R^2 - 4R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + R^{\mu\nu\alpha\beta} R_{\mu\nu\alpha\beta}$, sua ação é

$$S_{\mathcal{G}} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} f(\mathcal{G}). \quad (3.7)$$

De acordo com o teorema generalizado de Gauss-Bonnet¹, no espaço-tempo quadridimensional, \mathcal{G} é um termo de superfície, sua integração sobre a variedade \mathcal{M} é uma derivada total, ou seja, uma característica (ou densidade) de Euler $\chi(\mathcal{M})$. A característica de Euler é um invariante topológico da variedade \mathcal{M} , que descreve a forma de uma

¹ O teorema de Gauss-Bonnet afirma que a curvatura gaussiana total de uma superfície fechada é igual a $2\pi\chi$, onde $\chi = \chi(\mathcal{M})$ é a característica de Euler da superfície, um invariante topológico.

superfície ou objeto geométrico². Neste caso, o quadrado do tensor de Riemann não é independente, podendo ser ele fornecido em função do tensor Ricci e do escalar de Ricci. O termo aditivo na ação (3.7) corresponde exatamente à estrutura da divergência em um laço que surge na gravidade de Einstein (2.41). Portanto, conclui-se ser a gravidade de Gauss-Bonnet (3.7) renormalizável em um laço.

Certamente, uma generalização da RG para dimensões superiores³, na sua abordagem métrica, pode ser pensando através da conhecida teoria (ou modelo) de gravidade de Lovelock, onde a ação contém, entre outros termos, o termo quadrático de Gauss-Bonnet, ou seja, a característica quadridimensional de Euler estendida às dimensões $D > 4$, que está presente na ação efetiva de baixa energia da teoria das cordas heteróticas e nas compactificações hexadimensionais da teoria-M, com especial atenção à sua propriedade de ser livre dos estados “ghosts”, no espaço de Minkowski. Tais estados “fantasmas” cria espectro de partículas com graus de liberdade caracterizados por propagadores com sinais “errados” (sinais negativos), por consequência, destrói o princípio fundamental da MQ da conservação da probabilidade de sistemas em evolução temporal [147].

Em geral, a teoria de Lovelock representa um cenário muito interessante para estudos da modificação da gravidade, com a intenção de plotar valores obtidos de dados observacionais, devido à presença de termos de curvatura de ordem superior na ação. A Lagrangiana de Lovelock é dada pela seguinte expressão

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{L}_L}{\sqrt{-g}} &= \sum_{n=0}^N b_n \mathcal{L}_n = b_0 \mathcal{L}_0 + b_1 \mathcal{L}_1 + b_2 \mathcal{L}_2 + \cdots + b_N \mathcal{L}_N \\ &= b_0 + b_1 R + b_2 \mathcal{R}^2 + b_3 \mathcal{O}(R^3), \end{aligned} \quad (3.8)$$

onde os b_i s são constantes e \mathcal{R}^2 é o termo quadrático de Gauss-Bonnet \mathcal{G} . Um outro exemplo paradigmático na classe de modelos $f(R)$ é a gravidade de Weyl, uma teoria baseada na ação de Weyl (S_W) conformalmente invariante⁴, onde o Lagrangiano é dado pelo quadrado do tensor de Weyl

$$S_W = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} C_{\mu\nu\alpha\beta} C^{\mu\nu\alpha\beta}, \quad (3.9)$$

onde $C^{\mu\nu\alpha\beta}$ é o tensor de Weyl. As suas respectivas equações de campo de quarta ordem não são manifestamente unitárias [148]. No SM, uma invariância conforme local é alcançada quando um termo gravitacional adequado é adicionado à ação. Esta abordagem gera as massas para os bósons vetoriais e campos de matéria semelhantes ao mecanismo de Higgs, sem a tradicional quebra espontânea de simetria [149].

² Para superfícies fechadas, $\chi(\mathcal{M}) = n_v - n_a + n_f$, onde n_v é o número de vértices, n_a o número de arestas e n_f o número de faces. A característica de Euler é um número inteiro que permanece constante mesmo quando a superfície é deformada, desde que não haja cortes ou colagens.

³ Para $D = 3$ e 4 a gravidade de Lovelock e de Einstein são semelhantes.

⁴ Invariante sob transformações de Weyl $g^{\mu\nu} \rightarrow \Omega^2(x)g^{\mu\nu}$, sendo $\Omega^2(x)$ uma função no espaço-tempo.

3.1.1 Gravidade Escalar-Tensorial

Em 1937, Paul Dirac, com sua hipótese dos números grandes, inseriu pela primeira vez a ideia de um campo escalar atuando no setor gravitacional [150]. Dirac, em suas pesquisas motivadas pela constante cosmológica, na tentativa de encontrar uma explicação para os valores de certas constantes da natureza. Ele formulou a hipótese que as constantes adimensionais não devem ser puros números matemáticos, que aparecem nas leis fundamentais da física, mas sim variáveis que caracterizam o estado atual do universo [151]. Neste parecer, adicionar um campo escalar na gravidade de Einstein, que é descrito pelo tensor métrico usual, consiste no método mais simples objetivando a generalização dos fenômenos gravitacionais. Pois o campo escalar, sendo um invariante de Lorentz, é a entidade física mais simples que existe [152]. Ressalta-se, um campo escalar no setor gravitacional surge, por exemplo, no contexto de teorias do tipo Kaluza-Klein e teorias de cordas, quando considerados dimensões superiores [153].

Fundamentado na ideia de Dirac, os modelos gravitacionais escalar-tensoriais promovem a constante gravitacional – que aparece como um parâmetro livre na ação de Einstein-Hilbert, cujo valor é medido experimentalmente – a um campo escalar dinâmico. Tais modelos sugerem uma descrição completa da gravidade quando construída pela composição da métrica usual mais um campo escalar extra ϕ , não relacionado com a matéria, mas sendo uma função da curvatura. A ação escalar-tensorial tem a seguinte forma genérica

$$S_\phi = \int d^4x \sqrt{-g} f(R, \mathcal{L}(\phi)), \quad (3.10)$$

onde f é uma função que abrange o setor geométrico e da matéria conforme discutido em [154]. Neste aspecto, o modelo de gravidade $f(R)$ é dinamicamente equivalente aos modelos gravitacionais cuja ação é dada pela soma do termo habitual de Einstein, mais um novo termo dependente de um campo escalar extra [155]. Por conseguinte, modelos descritos por *scalaron* surgem como uma alternativa à matéria escura [156, 157]. Sob outro enfoque, foram propostos modelos de cenários inflacionários que envolvem um campo escalar dinâmico, minimamente acoplado à gravidade, chamado de quintessência⁵, que são conhecidos por descrever a expansão acelerada do universo [159, 160]. A vantagem destes modelos consiste no fato do campo de quintessência possuir um valor de massa muito pequeno, estimado em cerca de 10^{-33} eV, sendo assim muito mais razoável do ponto de vista teórico, diante do problema do valor extremamente pequeno da constante cosmológica [161]. A gravidade de Brans-Dicke (BD), Galileon e Chern-Simons, estão entre os modelos que se utilizam da motivação da gravidade escalar-tensorial para modelos cosmológico conhecidos, por tratar da expansão acelerada do universo [162]. A gravidade BD, um dos exemplos mais antigos de gravitação modificada, originalmente proposto em 1961

⁵ Uma forma hipotética de energia do vácuo, primeiramente proposta, em 1988, por Ratra e Peebles. Em 1998, o termo “quintessência” foi introduzido pela primeira vez por Robert R. Caldwell, Rahul Dave e Paul Steinhardt [158], como sendo uma quinta força fundamental.

[163], baseia-se na ideia de que o próprio espaço possui características geométricas além daquelas geradas pela matéria, conforme sugere o chamado princípio de Mach⁶ [164, 165]. Sendo, portanto, sua ação uma generalização da ação de Einstein-Hilbert, tendo a seguinte configuração

$$S_{BD} = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\phi R + \frac{\omega}{\phi} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + 16\pi \mathcal{L}_{mat} \right), \quad (3.11)$$

onde $\phi \neq 0$ desempenha o papel da constante gravitacional efetiva, não contribuindo com o Lagrangiano da matéria \mathcal{L}_{mat} . Para o caso particular, assumindo $\phi = \frac{1}{2k^2}$, recupera-se a gravidade de Einstein. Uma vantagem desta teoria consiste no fato de que a constante de acoplamento ω é adimensional, em substituição da constante usual de dimensão negativa, que compromete a renormalização da gravidade. Além disso, neste caso a constante gravitacional tem uma origem dinâmica relacionada com um valor assintótico de ϕ .

3.1.2 Gravidade Vetor-Tensorial

No caso da gravidade vetor-tensorial, são introduzidos campos vetoriais com direções privilegiadas no espaço-tempo, sendo eles tratados não como um campo de matéria, mas como ingredientes da própria gravidade. O aspecto mais importante desses modelos é a possibilidade do estudo no contexto da quebra espontânea de simetria de Lorentz [166]. Os exemplos conhecidos dessas teorias são a gravidade Einstein-aether [167] e a gravidade *bumblebee* [168], tendo esta a seguinte ação

$$S_{bee} = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{16\pi G} (R + \xi B^\mu B^\nu R_{\mu\nu}) - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - V(B^\mu B_\mu \pm b^2) \right), \quad (3.12)$$

onde ξ é uma constante adimensional, $B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$ é o tensor stress para o campo *bumblebee* B_μ e V é o potencial vetor que possui um conjunto infinito de mínimos $B_{0\mu}$ satisfazendo a condição $B_0^\mu B_{0\mu} = \pm b^2$, aqui, os sinais positivo e negativo refletem o tipo do vetor $B_{0\mu}$, se este é do tipo tempo ou do tipo espaço, sendo $b^2 > 0$.

3.1.3 Gravidade Horava-Lifshitz

Em 2009, Petr Horava propôs seu modelo de gravidade, conhecido como gravidade Horava-Lifshitz, na tentativa de resolver o problema dos diferentes conceitos de tempo na TQC e na RG, tratando o conceito quântico como o mais fundamental, assumindo uma forte anisotropia espaço-temporal, em altos níveis de energia [169]. Desta maneira, o princípio da covariância geral foi sacrificado a fim de conciliar a desejada renormalizabilidade com

⁶ Em 1893, Ernst Waldfried Josef Wenzel Mach (1838-1916) questionou o conceito de movimento ao afirmar que a inércia de qualquer sistema é o resultado da interação desse sistema com o resto do universo. A ideia subjacente no princípio de Mach está na origem da inércia ou da massa de uma partícula definida como quantidade dinâmica determinada pelo ambiente, em particular, pelo resto da matéria no universo.

ausência de fantasmas [170]. Possuindo o conceito relativista de tempo, com invariância de Lorentz, emergindo a grandes distâncias, e a velocidade da luz tendendo ao infinito em altas energias. Neste contexto, deve-se notar que a quebra da covariância geral também é discutida nos modelos da gravidade sem forte assimetria espaço-tempo, que apresentam quebra de simetria de Lorentz (QSL).

O modelo de gravidade modificada Horava-Lifshitz é um candidato na busca de resolver o problema da energia escura, para estudos dos buracos negros e dos efeitos da invariância de Lorentz em baixas energias [171]. No entanto, sua descrição quântica é bastante problemática, pois envolve estruturas complicadas em sua ação clássica, potencialmente implicando em um número muito grande de contribuições divergentes, não sendo possível afirmar com certeza se é renormalizável multiplicativamente [111]. Ademais, embora tenha havido progresso em sua reformulação inicial, inconsistências observacionais continuam presentes no atual modelo. Por exemplo, as observações de ondas gravitacionais emitidas pela fusão de certas estrelas de nêutrons contrariam as previsões feitas pela gravidade Horava-Lifshitz [172, 173].

Outros Modelos Modificados - Existem muitos outros modelos de gravitação modificada, todos derivados dos intensos estudos ao longo das últimas décadas, em grande parte motivados pelo rápido progresso no campo da cosmologia observacional, que permitiram testes mais precisos em diferentes níveis de escalas do universo. Entre muitos modelos, podemos citar a gravidade Einstein-Cartan-Sciama-Kibble [174], gravidade escalar-tensor-vetorial [175], bigravidade [176], os modelos de condensação de fantasmas [177] e modelos de dimensões extras, incluindo Kaluza-Klein [178], Randall-Sundrum [179], Dvali-Gabadadze-Porrati [180] e modelos *brane-worlds* de co-dimensão superior [181]. E, também o formalismo pós-Friedmanniano parametrizado, usado para restringir desvios da RG na cosmologia e adequado para comparação com dados em grandes escalas cosmológicas [182]. Em especial, na seção seguinte, daremos ênfase ao modelo de gravitação modificada de Chern-Pontryagin e, ao final deste capítulo, falaremos dos modelos não-locais da gravitação. Estas duas teorias servirão de fundamento para a formulação de novas classes de modelos que serão apresentadas no Capítulo-4 e Capítulo-5.

3.2 Modelos Topológicos de Chern-Simons

Uma das extensões da gravidade que tem atraído grande interesse nos últimos anos é a gravidade modificada quadridimensional de Chern-Simons (CSMG), originalmente proposta em [52], como um modelo gravitacional topológico massivo [53]. Vale ressaltar, o termo de Chern-Simons (CS) foi descoberto pelo russo Albert Schwarz (1934-), dentro do contexto da geometria diferencial, em teorias das classes características. Posteriormente, este termo foi estudado por Shiing-Shen Chern (1911-2004) e James Harris Simons (1938-

2024), sempre como sendo propriedades globais das curvaturas nas variedades suaves \mathcal{M} [183]. A segunda classe característica de Chern é o invariante topológico⁷ de Chern-Pontryagin, definido como a contração do tensor de Riemann com o seu dual *RR . A integral deste termo numa variedade fechada quadridimensional é definida como o número (ou densidade) de Pontryagin [184]. Na física, essas classes características surgiram no cálculo da anomalia de corrente quiral nas teorias de gauge. Em sistemas onde a corrente é conservada no regime clássico, mas quando consideradas correções quânticas, esta mesma corrente passa a ser dissipada ou alterada⁸ [185]. Na próxima seção, apresentaremos o início do surgimento do termo CS na gravitação, que ocorreu no cenário tridimensional das teorias de gauge (não)abelianas, no contexto da eletrodinâmica massiva.

3.2.1 Modelos de Chern-Simons Tridimensionais

Em 1981, Deser, Jackiw e Templeton apresetaram modelos vetoriais de gauge e gravitacional, no espaço-tempo tridimensional [53], formulando assim as teorias de gauge topológicas e massivas. Neste trabalho, os modelos gravitacionais são constituídos com termos de derivadas de terceira ordem, mas livres de fantasmas e causal. Quando inserido na teoria de gauge abeliana⁹, o novo termo invariante de gauge de origem topológica dá surgimento à massa para o campo de gauge. A Lagrangiana de CS não-abeliana foi apresentada na seguinte forma

$$\mathcal{L}_{CS}^{(A)} = \epsilon^{\mu\nu\alpha} (A_\mu^a \partial_\nu A_\alpha^a + \frac{2}{3} f^{abc} A_\mu^a A_\nu^b A_\alpha^c), \quad (3.13)$$

onde $A_\mu = A_\mu^a T^a$ é o campo de gauge dado pela estrutura algébrica dos grupos de Lie¹⁰, f^{abc} são as constantes da estrutura e $\epsilon^{\mu\nu\alpha}$ é o símbolo de Levi-Civita, com valores assumidos $+1, 0, -1$. Estudos do modelo planar decorrente da redução dimensional da eletrodinâmica de Maxwell com o termo Carroll-Field-Jackiw (violador de Lorentz), com soluções que indicam a clara manifestação da anisotropia espacial, o que é consistente com a existência de uma direção privilegiada no espaço [186]. Tendo sua forma não-abeliana construída na gravitação tridimensional, cuja a ação é

$$S_{CS} = \frac{1}{2\kappa^2\rho} \int d^3x \epsilon^{\mu\nu\alpha} (\omega_{\mu a}^b \partial_\nu \omega_{\alpha b}^a + \frac{2}{3} \omega_{\mu a}^b \omega_{\nu b}^c \omega_{\alpha c}^a), \quad (3.14)$$

onde ω é a conexão de spin (2.46) e ρ é uma constante com dimensão de massa $[\rho] = 1$. No formalismo Riemanniano as conexões são os símbolos de Christoffel, construídos de

⁷ Em duas dimensões, temos a característica de Euler $\chi(S) = 2 - 2b$ como um outro exemplo de invariante topológico, onde b é o gênero da superfície fechada S .

⁸ A não conservação resulta em uma quebra da simetria quiral, que pode ter consequências importantes, como a quebra da unitariedade e da renormalizabilidade da teoria.

⁹ O eletromagnetismo é uma teoria de gauge abeliana devido à natureza única da carga elétrica (positiva e negativa) e à simetria do grupo comutativo $U(1)$ que a descreve. Diferentemente da cromodinâmica quântica (QCD), teoria de gauge não-abeliana, onde existem múltiplos tipos de carga/cores.

¹⁰ As álgebras de Lie foram introduzidas como ferramenta para o estudo das rotações infinitesimais.

modo usual, da variável dinâmica fundamental, o tensor métrico. Logo, a ação (3.14) se apresentará no modo

$$S_{CS} = \frac{1}{2\kappa^2\rho} \int d^3x \epsilon^{\mu\nu\alpha} (\Gamma_{\mu\sigma}^\beta \partial_\nu \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma + \frac{2}{3} \Gamma_{\mu\sigma}^\beta \Gamma_{\nu\beta}^\delta \Gamma_{\alpha\delta}^\sigma). \quad (3.15)$$

Na variação da ação (3.15) obtém-se

$$\delta S_{CS} = \frac{1}{\kappa^2\rho} \int d^3x \epsilon^{\alpha\beta\mu} \nabla_\alpha R_\beta^\nu \delta g_{\mu\nu} = -\frac{1}{\kappa^2\rho} \int d^3x C^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}, \quad (3.16)$$

onde R_μ^ν é o tensor de Ricci no espaço tridimensional, ∇_μ é a derivada covariante efetivada em três dimensões, e

$$C^{\mu\nu} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \left(\epsilon^{\mu\alpha\beta} \nabla_\alpha R_\beta^\nu + \epsilon^{\nu\alpha\beta} \nabla_\alpha R_\beta^\mu \right), \quad (3.17)$$

é o tensor de Cotton tridimensional simétrico $C^{\mu\nu} = C^{\nu\mu}$ e de traço nulo $g_{\mu\nu} C^{\mu\nu} = 0$. As equações de Einstein modificadas, para o vácuo, são facilmente obtidas, sendo elas

$$G^{\mu\nu} + \rho^{-1} C^{\mu\nu} = 0. \quad (3.18)$$

Utilizando-se do procedimento descrito na Seção-2.3.3, ou seja, linearizando a ação gravitacional CS (3.15), teremos

$$S_{CS}^{(0)} = \frac{1}{2\rho} \int d^3x h^{\mu\nu} \epsilon_{\alpha\mu\gamma} \partial^\gamma (\square \eta_{\delta\nu} - \partial_\delta \partial_\nu) h^{\delta\alpha}. \quad (3.19)$$

A ação linearizada (3.19) é invariante de gauge sob a transformação $\delta h_{\mu\nu} = \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu$ e, apesar de conter termos de altas derivadas, suas equações de movimento não apresentam problemas quanto ao surgimento dos estados de energia negativa [187].

3.2.2 Gravidade Modificada de Chern-Simons Quadridimensional

A generalização da teoria CS gravitacional em quatro dimensões foi realizada em [188], com o envolvimento de alguns passos não corriqueiros. Primeiramente, se fez necessária a seguinte substituição $\epsilon^{\mu\nu\alpha} \rightarrow v_\gamma \epsilon^{\gamma\mu\nu\alpha}$, onde v_γ faz o papel de converter o termo CS no termo abeliano de Carrol-Field-Jackiw (CFJ), $\mathcal{L}_{CFJ} = \epsilon^{\gamma\mu\nu\alpha} v_\gamma A_\mu \partial_\nu A_\alpha$. Desta maneira, os autores do artigo original pôde definir o termo CS do Lagrangiano gravitacional quadridimensional

$$S_{CS} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x v_\gamma \epsilon^{\gamma\mu\nu\alpha} (\Gamma_{\mu\sigma}^\beta \partial_\nu \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma + \frac{2}{3} \Gamma_{\mu a}^\beta \Gamma_{\nu b}^c \Gamma_{\alpha c}^\sigma), \quad (3.20)$$

com sua forma linearizada

$$S_{CS}^{(0)} = -\frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x h^{\mu\nu} \epsilon_{\alpha\mu\rho\gamma} v^\gamma \partial^\rho (\square \eta_{\delta\nu} - \partial_\delta \partial_\nu) h^{\delta\alpha}, \quad (3.21)$$

igualmente a ação linearizada em 3D (3.19), a ação linearizada em 4D é invariante de gauge sob a transformação $\delta h_{\mu\nu} = \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu$. Da ação (3.20) podemos definir a corrente topológica

$$K^\gamma \equiv \varepsilon^{\gamma\mu\nu\alpha} (\Gamma_{\mu\sigma}^\beta \partial_\nu \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma + \frac{2}{3} \Gamma_{\mu\sigma}^\beta \Gamma_{\nu\beta}^\delta \Gamma_{\alpha\delta}^\sigma), \quad (3.22)$$

onde

$$\varepsilon^{\gamma\mu\nu\alpha} = \frac{\epsilon^{\gamma\mu\nu\alpha}}{\sqrt{-g}} \quad (3.23)$$

é o tensor contravariante¹¹ totalmente antissimétrico de Levi-Civita, definido a partir do símbolo de Levi-Civita. A divergência de (3.22) será

$$\nabla_\mu K^\mu = \frac{1}{2} {}^*R^\beta{}_\alpha{}^{\delta\rho} R^\alpha{}_{\beta\delta\rho} \equiv \frac{1}{2} {}^*RR, \quad (3.24)$$

onde o tensor dual de Riemann contém contração com o tensor de Levi-Civita

$${}^*R^\beta{}_\alpha{}^{\delta\rho} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\delta\rho\mu\nu} R^\beta{}_{\alpha\mu\nu}. \quad (3.25)$$

Pelas propriedades topológicas da densidade de Chern-Pontryagin, a integral de *RR no espaço-tempo é um termo de superfície. Por isso, para incluí-lo na ação de forma consistente, deve-se introduzir um novo campo ϕ , denominado coeficiente CS. Como resultado, podemos acrescentar à ação usual de Einstein-Hilbert o novo termo proporcional a ϕ que chamamos de ação CS:

$$S_{CS} = -\frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \frac{v_\mu K^\mu}{2} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \frac{\phi}{4} {}^*RR, \quad (3.26)$$

onde $v_\mu = \nabla_\mu \phi$. Ao analisarmos a paridade da ação CS, perceberemos que o produto de tensores de curvatura de Riemann tem paridade par, mas o tensor de Levi-Civita tem paridade ímpar, exigindo do campo CS uma paridade ímpar, portanto, ϕ seria um pseudo-escalar. Isto considerado, $\phi {}^*RR$ torna-se um invariante por transformações de paridade, conforme se espera de todos os termos da ação da teoria. Quando v_μ passa a ser uma função das coordenadas do espaço-tempo, não um vetor constante, então, em geral, o termo CS gravitacional quebra a simetria CPT. Sob outra perspectiva, ϕ pode ser tratado como um campo externo não-dinâmico, e v_μ um vetor constante. Nesta situação, CSMG quadridimensional torna-se o primeiro exemplo de modelo gravitacional com QSL. A ação completa de CSMG é composta pela ação de Einstein-Hilbert (2.6) mais a ação de CS (3.26)

$$S_{(EH+CS)} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \left(R + \frac{1}{4} \phi {}^*RR \right) + S_m. \quad (3.27)$$

A variação do termo geométrico de (3.27), com respeito à métrica, resultará

$$\delta S_{(EH+CS)} - \delta S_m = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} [(G^{\mu\nu} + C^{\mu\nu}) \delta g_{\mu\nu}] + \Sigma_{EH} + \Sigma_{CS}. \quad (3.28)$$

¹¹ As componentes de um tensor (contravariante) covariante se transformam da mesma (oposta) forma à transformação dos vetores da base, utilizando-se da (do inverso da) matriz de transformação da base. O vetor (posição) gradiente é um exemplo de um tensor (contravariante) covariante.

Sendo $G^{\mu\nu}$ o tensor de Einstein, $C^{\mu\nu}$ é o tensor de Cotton¹², Σ_{EH} e Σ_{CS} são termos de superfície, que surgem da variação da ação de Einstein-Hilbert e de Chern-Simons, respectivamente. Para variedades compactas e sem fronteiras, estes termos de contorno são identicamente nulos. Em contrapartida, para variedades com contorno, os termos de fronteira não são triviais. Neste caso, objetivando o cancelamento de tais termos, se faz necessário adicionar a ação de Gibbons-Hawking-York S_{GHY} à ação de Einstein-Hilbert [189, 190].

$$S_{GHY} = \frac{1}{\kappa^2} \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{\mathbf{g}} \epsilon T, \quad (3.29)$$

onde $\partial\mathcal{M}$ é o contorno da variedade \mathcal{M} , \mathbf{g} é o determinante da métrica induzida no contorno $\mathbf{g}_{\mu\nu}$, T é o traço do tensor de curvatura extrínseco, ϵ é igual $-1(+1)$ quando o vetor normal ao contorno é tipo-espaço(tipo-tempo), para a assinatura $(+, -, -, -)$, x^i são as coordenadas no contorno, com $(i = 1, 2, 3)$. O tensor de curvatura extrínseco, também conhecido como segunda forma fundamental, é uma forma quadrática no plano tangente da superfície no espaço euclidiano, que juntamente com a primeira forma fundamental, serve para definir invariantes extrínsecos da superfície, suas curvaturas principais. Geralmente, tal forma quadrática é definida para uma subvariedade suave imersa em uma variedade (pseuda)Riemanniana [191]. Aqui assumiremos, por hipótese, condições de contorno que asseguram que os termos de fronteira desaparecem. A forma explícita do tensor de Cotton em (3.28) é:

$$C^{\mu\nu} \equiv -\frac{1}{2} \left[v_\alpha \varepsilon^{\mu\alpha\beta\lambda} (\nabla_\beta R^\nu{}_\lambda + \varepsilon^{\nu\alpha\beta\lambda} \nabla_\beta R^\mu{}_\lambda) + v_{\sigma\alpha} (*R^{\sigma\nu\mu\alpha} + *R^{\sigma\mu\nu\alpha}) \right], \quad (3.30)$$

sendo este um tensor quadridimensional de rank 2, simétrico de traço nulo. Os cálculos realizados para a obtenção de $C^{\mu\nu}$ e sua divergência estão contidos no Apêndice-A.2. Sendo esta divergência dada pela seguinte equação

$$\nabla_\mu C^{\mu\nu} = \frac{1}{8} v^\nu *RR, \quad (3.31)$$

onde $v_{\sigma\alpha} = \nabla_\sigma v_\alpha$. No que se refere as equações de movimento oriundas da variação da ação (3.27), elas serão facilmente alcançadas pela soma dos resultados provenientes da variação da ação de Einstein-Hilbert (2.8) e da variação da ação de CS (3.20). Desta forma obteremos as seguintes equações modificadas de Einstein

$$G^{\mu\nu} + C^{\mu\nu} = \kappa^2 T_{(m)}^{\mu\nu}, \quad (3.32)$$

onde a conservação do tensor energia-momento $\nabla_\mu T_{(m)}^{\mu\nu} = 0$ e a conservação do tensor de Einstein, garantida pelas identidades de Bianchi $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$, demandam nulidade para a divergência do tensor de Cotton (3.31). Neste caso, podemos assumir $\phi = const.$, que implica em $v^\nu = 0$, que por sua vez anula todas as componentes de $C^{\mu\nu}$, recuperando assim,

¹² De início, o tensor de Cotton-York foi definido em terceira ordem. No contexto das identidades Bianchi, o tensor de Cotton está presente em qualquer dimensão D .

de modo trivial e direto, a RG. Por outro lado, temos uma situação interessante quando assumimos $v^\nu \neq 0$. Desta maneira, geraremos uma adicional condição de consistência, conhecida como vínculo de Pontryagin

$${}^*RR = 0, \quad (3.33)$$

que restringe o número de soluções permitidas para as equações modificadas de Einstein (3.32). Contudo, muitas soluções da RG persiste na teoria modificada de CS. Por exemplo, as métricas com simetria rotacional, cujas componentes não nulas do tensor de Riemann têm a estrutura $R_{[\mu\nu][\alpha\beta]}$, ou seja, $R_{0101}, R_{0202}, \dots$, estão entre aquelas métricas que satisfazem a condição de consistência extra dada por (3.33) [187]. Nestas circunstâncias estão as métricas estáticas e esfericamente simétricas de Schwarzschild e Reissner-Nordström. Por outro lado, pode-se citar a métrica de Kerr¹³ como um notável contraexemplo de solução da CSMG, pois para esta métrica ${}^*RR \neq 0$, conforme discutido em [192, 193].

3.2.3 Gravidade Modificada de Chern-Simons Dinâmico

Na generalização do CSMG, o chamado CSMG dinâmico (DCSMG), o termo cinético e um potencial para o campo dinâmico ϕ é adicionado na ação (3.26), produzindo a seguinte ação

$$S_\phi = \frac{\beta}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} \nabla^\mu \phi \nabla_\mu \phi + V(\phi) \right), \quad (3.34)$$

onde β é uma constante de acoplamento adimensional. Assim sendo, o campo dinâmico ϕ é dotado com seu próprio tensor energia-momento. Quando variamos $S_{(EH+CS+\phi)}$, em relação a ϕ , obteremos a equação de evolução de ϕ

$${}^*RR = 4\beta \left(\square\phi - \frac{\partial V}{\partial\phi} \right). \quad (3.35)$$

No caso da ação $S_{(EH+CS+\phi)}$, para $\phi = \text{const}$, a gravidade CS, dinâmica ($\beta \neq 0$) e não-dinâmica ($\beta = 0$), se reduz a RG. Pois, a densidade de Pontryagin é a divergência total da corrente topológica de CS, conforme a Eq.(3.24). No modelo não-dinâmico, não há razões físicas bem motivadas para escolhas específicas do campo escalar, que geralmente é escolhido com o objetivo de simplificar as equações. Distintivamente, no modelo dinâmico a arbitrariedade na escolha de ϕ é reduzida ou mesmo completamente eliminada. Pois, embora se possa prescrever livremente as condições iniciais para o campo, para uma grande classe de espaço-tempo, a solução da equação ondulatória que ele deve satisfazer, impele a evolução do campo para um único estado, independente das condições iniciais [194]. A DCSMG foi utilizada para estudos de várias questões relacionadas às ondas gravitacionais [195, 196, 197], com invariância projetiva desenvolvida na extensão métrica-afim [198], para

¹³ Descreve a geometria do espaço-tempo vazio em torno de um buraco negro rotativo, sem carga e axialmente simétrico, com um horizonte de eventos quasi-esférico.

análise de buracos negros giratórios numericamente estáveis às perturbações da métrica de ordem inicial [199] e para cálculos das frequências orbitais dos buracos negros rotativos, utilizando-se da métrica de Kerr deformada, próximo ao horizonte de eventos [200]. Convém frisar, o invariante topológico de Chern-Pontryagin também aparece naturalmente no contexto da teoria das cordas/M, especificamente, compactando as dimensões extras¹⁴ da teoria M ($D = 11$) para teorias efetivas da gravidade [201, 202]. Em particular, pode-se citar o modelo Starobinsky-Bel-Robinson (SBR), cuja ação envolve termos quadráticos de Chern-Pontryagin, $(*RR)^2$, seus aspectos cosmológicos foram estudados em [203]. Outro modelo interessante inspirado em cordas, intimamente relacionado ao modelo SBR, é a teoria da gravidade efetiva de Einstein-Grisaru-Zanon, que foi investigada em [204].

3.3 Invariância de Lorentz

As simetrias desempenham um papel fundamental na nossa compreensão das leis da natureza. A teoria dos grupos, por exemplo, se utilizam de técnicas de simetrias como ferramentas indispensáveis nos estudos dos sistemas quânticos. Em 1931, Wigner formulou um teorema onde afirma que a invariância dos observáveis sob certa transformação (rotação, translação e CPT) implica na existência de um operador unitário no espaço de estados de Hilbert [205]. O teorema de Emmy Noether (1882-1935), quando aplicado classicamente, incorpora as simetrias diretamente aos observáveis físicos [206]. O fenômeno da quebra espontânea de simetria, que ocorre em sistemas cuja dinâmica é invariante sob uma transformação de simetria, é o alicerce para o entendimento do comportamento peculiar dos supercondutores, superfluidos, ferromagnetos, e a origem das massas das partículas elementares [207].

No caso específico da simetria de Lorentz, sua legitimidade é verificada com alto grau de precisão [208]. Porém, como acontece em toda e qualquer teoria na física, a simetria de Lorentz também é questionada quanto à existência dos limites inerentes à sua aplicabilidade. Muitas são as razões conhecidas para a QSL, sendo algumas delas: (i) Teoria das cordas; (ii) Possível variabilidade dos valores das constantes fundamentais, especialmente, a velocidade da luz, cuja deformação das relações de dispersão que começou a ser discutida para explicar a aceleração cósmica [209]. E, evidentemente, os cenários que exigem a existência de alguma escala de distância mínima: (iii) Não comutatividade do espaço-tempo, que numa versão mais usada, do tipo-Moyal, envolve um tensor antissimétrico constante de segunda ordem $\Theta_{\mu\nu}$, que claramente não é invariante de Lorentz [210]; (iv) Gravidade quântica em laço, proposto como uma tentativa de quantizar a geometria [211]; e (v) Conceito do espaço-tempo espumante [212, 213].

¹⁴ Não sendo necessariamente as variedades topologicamente triviais Kählerianas de Calabi-Yau, onde a primeira classe de Chern (c_1) é nula ($R_{\mu\nu} = 0$).

Na verdade, as teorias da gravidade quântica preveem a violação da invariância de Lorentz em altíssimas energias, próximas a escala de energia de Planck, inalcançáveis pelas experiências atuais na terra [214, 215]. Podemos afirmar que o início dos estudos sobre a QSL se deram, em 1951, quando Paul Dirac (1902-1984), profundamente influenciado pela descoberta do princípio da relatividade por Einstein, inquiriu a anisotropia espacial, através da existência do éter. Ou seja, na construção de uma nova teoria dos fenômenos eletromagnéticos, Dirac lança um artigo com a proposta da presença de um certo vetor com direção preferencial e onipresente, resultando assim na possibilidade da QSL [216].

Historicamente, no final da década de 1950, a descoberta da quebra de paridade nas interações fracas, despertaram indagações sobre a violação de Lorentz (VL), proporcionando, na década de 1960, a produção de vários artigos sobre temas nesta direção. Por exemplo, o artigo sobre a validade da RE em pequenas distâncias (10^{-16} cm) [217]. Em 1989, conjecturou-se que no limite de baixa energia da corda bosônica, algum vetor, ou, em geral, os campos tensoriais podem adquirir valores esperados diferentes de zero, produzindo assim algumas direções privilegiadas no espaço-tempo e, portanto, resultando na QSL [62]. Neste aspecto, Kostelecky e Samuel incorporaram a condição da violação de Lorentz ao SM, no que hoje é chamado de Modelo Padrão Estendido¹⁵ (*Standard-Model Extension (SME)*). Nesse sentido, logo depois, foi proposto um modelo teórico modificado da QED quadridimensional [218], como resultado do termo adicional denominado termo Carroll-Field-Jackiw (CFJ), sendo ele

$$\mathcal{L}_{CFJ} = \epsilon^{\mu\nu\sigma\alpha} k_\mu A_\nu \partial_\sigma A_\alpha, \quad (3.36)$$

aqui, o k_μ é um vetor constante que produz anisotropia no espaço-tempo, o agente responsável pela QSL. O termo (3.36) pode ser tratado como uma natural extensão quadridimensional do conhecido termo de Chern-Simons, sendo um invariante de gauge. Evidentemente, a introdução do termo CFJ despertou interesse na investigação de suas implicações. No regime clássico, os estudos se concentraram especialmente nas relações de dispersão e questões relacionadas com unitariedade e causalidade. Nesse aspecto, há uma variedade de maneiras de construir extensões da VL para diferentes teorias que descrevem campos escalares, espinor, eletromagnéticos e gravitacionais [219]. Seguramente, a mais importante consequência da QSL é a deformação das relações de dispersão, que leva ao conceito de velocidade variável da luz, como uma proposta das possíveis explicações para a aceleração cósmica. A deformação das relações de dispersão também pode ser implementada nas teorias massivas [220]. Em 2006, Cohen e Glashow apresentaram a *Very Special Relativity* - (VSR), uma teoria de campo construída através do subgrupo $DISIM_b(2)$ (ortócrona e de reversão temporal) contido no grupo de simetria de Lorentz isomórfico e de Poincaré [221], que foi abordado por Bogoslovsky, em 1977 [222, 223].

¹⁵ É uma teoria de campo efetiva que contém o SM, a RG, e todos os operadores possíveis que quebram a simetria de Lorentz.

Mais tarde, Gibbons, Gomis e Pope conectaram essas duas distintas abordagens, quando demonstraram que as simetrias do VSR preservam o elemento de linha encontrado por Bogoslovsky [224, 225].

$$ds = (\eta_{cd} dx^c dx^d)^{\frac{1-b}{2}} (n_a dx^a)^b, \quad (3.37)$$

onde η_{cd} é a métrica de Minkowski, $n = n_a dx^a$ é o campo 1-forma com componentes constantes e b é um parâmetro adimensional. Sendo (3.37) o elemento de linha do espaço plano de Finsler plano, que generaliza o elemento de linha da métrica da RE. No limite $b = 0$, recuperamos o elemento de linha do espaço-tempo Minkowski. Desta forma, no contexto da teoria quântica de campos local ou da conservação CP, a VSR fornece um simulacro da RE [221]. Nos estudos do espectro de energia de um férmion de Dirac, com invariância em um campo magnético estático e homogêneo, as correções de primeira ordem da VSR para o fator g_s do elétron, sugere a possibilidade da VSR ser a causa da origem da massa do neutrino [226]. Outra implicação importante ocorre nos modelos estendidos da eletrodinâmica com VL, onde o comportamento não trivial das possíveis soluções clássicas podem exibir, no vácuo, os fenômenos característicos da propagação de ondas eletromagnéticas em meios não triviais, como a birrefringência [227] e a rotação do plano de polarização [228]. Deste modo, permite-se o uso de tais modelos de VL para descrever de modo eficaz certos fenômenos da matéria condensada [229, 230]. Além disso, muitos modelos de teoria com VL, nem a unitariedade nem a causalidade são atingidos, especialmente quando atribuímos condições especiais para seus parâmetros, geralmente quando estes têm valores pequenos [231, 232]. No regime quântico, as pesquisas ocorreram nas possibilidades da geração de certos termos aditivos de VL pela abordagem perturbativa, nos estudos de renormalizabilidade e sua relação com possíveis anomalias. Além disso, outras extensões da VL foram propostas, não apenas para o campo eletromagnético, mas também para o campo escalar e espinorial, o que permitiu formular o SME, tornando assim a QSL um fenômeno testável experimentalmente [233, 234].

A primeira aplicação, no contexto da QSL, foi realizada na reprodução do termo CFJ (3.36), sendo finito, embora formalmente seja superficialmente divergente e ambíguo [235]. Por conseguinte suscitou discussão sobre as possíveis origens dessas ambiguidades e sua relação com a anomalia quiral [236]. Além disso, foi demonstrado que tais ambiguidades ocorrem não apenas para o termo CFJ, mas também para alguns outros termos de VL, sendo elas também relacionadas com anomalias, generalizações diretas da anomalia quiral e anomalias gravitacionais [188]. A possibilidade de gerar diferentes termos VL, especialmente às modificações para a eletrodinâmica, tem sido estudada em diferentes dimensões de espaço-tempo, $2 \leq D \leq 5$. Também, existem propostas da construção de teorias supersimétricas envolvendo a VL, com a introdução de supercampos extras, cujas componentes estão relacionados com alguns vetores/tensores constantes, com toda a maquinaria dos supergráficos sendo aplicada para obtenção das correções quânticas [237].

3.3.1 Quebra de Simetria de Lorentz e CPT na Gravitação

Em um espaço-tempo plano, a simetria de Lorentz pode ser violada explicitamente por meio da introdução de novos termos proporcionais a vetores constantes (tensores), que não podem ser introduzidos consistentemente no espaço curvo [238]. Pois, a modificação direta dos modelos de gravidade com VL anula também a invariância geral de coordenadas e, por sua vez, desfaz a necessária simetria de gauge para o campo gravitacional. Na gravidade, o único conhecido termo aditivo de quebra de simetria Lorentz-CPT, que possui a propriedade da invariância geral de coordenadas, é o termo gravitacional quadridimensional de Chern-Simons [239]. Muitos problemas relacionados a este termo foram estudados detalhadamente, incluindo a possibilidade de sua geração perturbativa, decorrentes de ambiguidades, que, neste caso, estão ligadas à anomalias gravitacionais. Foi demonstrado que, para uma teoria com VL, é possível que existam transformações de Lorentz distintas, para observador e partícula, especialmente quando campos de fundo fixos estão presentes [240, 241]. No caso dos campos de fundo, ou seja, apenas aqueles representados por vetores ou tensores constantes, transfiguram-se sob transformações de Lorentz do observador, mas não de partícula. Todavia, para os campos dinâmicos as transformações de Lorentz são de partícula e do observador. Sendo assim, as teorias com Lagrangianos com VL continuam sendo invariantes sob transformações de Lorentz do observador, mas não são invariantes sob transformações de Lorentz das partículas¹⁶. Isto permite aplicar a metodologia relativística dentro do quadro das transformações de Lorentz do observador.

Isto posto, no espaço-tempo curvo, o grupo de simetria é o das transformações de coordenadas gerais $x^\mu = x^\mu(x')$, que, ao mesmo tempo, representa em si uma extensão tanto do grupo de Lorentz quanto do grupo de gauge. Em muitos casos a QSL implica também na quebra de simetria CPT. Um exemplo paradigmático é o termo CFJ que preserva a simetria de gauge. Portanto, é natural exigir que as extensões de QSL da gravidade sejam consistentes com a invariância geral de coordenadas, isto é, invariância de gauge. Outra abordagem possível consiste na abordagem do limite de gravidade fraca (linearizado), onde considera apenas a dinâmica do tensor simétrico de flutuação da métrica $h_{\mu\nu}$, neste caso aplica-se os métodos semelhantes usados nos estudos de extensões VL da QED. Há estudos experimentais da QSL para a determinação de possíveis limites de aplicabilidade para a RE, com fortes motivações cosmológicas, como, por exemplo, a possibilidade hipotética de anisotropia da radiação cósmica, chamada de “eixo do mal” [63]. Neste caso específico, foi argumentado que tal anisotropia é atribuída aos métodos inapropriados de análise estatística e não aos efeitos físicos fundamentais [242]. Outra linha importante de estudos experimentais para a possível QSL é baseada em estudos de raios cósmicos. De fato, o efeito Greisen-Zatsepin-Kuzmin (GZK) foi interpretado na ideia de que ele pode ser explicado por uma forte QSL em alguma escala ultra-energética, como

¹⁶ Também denominadas de transformações de Lorentz ativas.

é sugerido pela RE dupla [243]. Nesta proposta, a RE se modifica na escala de energia de Planck passando a ter um segundo invariante, que se junta à velocidade da luz. Mas, sendo a RE de Einstein recuperada nos referenciais inerciais e em baixas energias [244]. Este evento é alcançado por uma modificação não linear da ação do grupo de Lorentz no espaço de momentos, gerada pela adição de uma dilatação a cada *boosts*, de tal forma que a energia de Planck permanece invariante. Visando inserir esta nova teoria na RG, discute-se modificações no princípio da equivalência [243, 245, 246].

Neste sentido, as relações de dispersão devem ser modificadas por termos extras, que se tornam importantes em ultra-altas energias [247, 248, 249]. A emissão de radiação de Cherenkov¹⁷ é vista também como um caso de VL no vácuo [250, 251, 252, 253]. Em 2001, visando detectar matéria escura, o experimento de Polarização do Vácuo com Laser (PVLAS) fez medições da rotação do plano de polarização da luz, com análise da causa do comportamento óptico não-linear em campos magnéticos no vácuo [254]. Foi alegado que essa rotação pode ser atribuída à não-comutatividade espaço-temporal, que representa a si mesma uma das formas conhecidas de QSL, com o parâmetro de não comutatividade sendo estimado em $\gamma \approx 30 GeV^{-2}$ [255]. No entanto, subsequentemente foi argumentado que essa mesma rotação deveria ser atribuída ao acoplamento áxion-fóton, enquanto o impacto da não-comutatividade deve ser inobservável [256].

3.4 Teorias Não-Locais da Gravitação

3.4.1 Aspectos Gerais

Numa teoria local, um objeto é influenciado diretamente somente pela sua vizinhança imediata. Nestas teorias, a causa num ponto x_1 afetará outro ponto x_2 , se houver uma onda ou partícula, entre esses dois pontos, exercendo influência através do espaço, mediando a ação entre a causa em x_1 e o efeito em x_2 . Por outro lado, podemos afirmar que as teorias não-locais são constituídas por elementos que podem interagir ou se correlacionarem, em diferentes pontos do espaço-tempo, sem nenhuma mediação [257]. Dessa forma, a RG é uma teoria estritamente local, diferentemente da gravitação Newtoniana e da interação Coulombiana, pois suas interações ocorrem à distância sem a ação de campos de forças [258]. Objetivando substituir este conceito, Michael Faraday (1791-1867), por volta de 1830, introduziu o conceito de campo, um ente matemático que associa cada ponto no espaço com uma (ou mais) variável dinâmica. Logo, todos os pontos no espaço participam do processo físico, cujos efeitos da ação se propagam de um ponto para os pontos de sua vizinhança. Assim sendo, as equações de Maxwell, com um número finito de derivadas, descrevem a evolução dos campos elétrico e magnético em cada ponto do espaço. Ainda no século XIX, surgiu a proposta alternativa em termos de ação contínua

¹⁷ Radiação emitida por uma partícula carregada, que se move uniformemente no vácuo.

num meio invisível chamado “éter luminífero”¹⁸ [259]. A ideia da existência deste fluido invisível e indetectável que preencheria todo o espaço foi desafiada por experimentos como o de Michelson-Morley [260, 261], e abandonada em favor de modelos mais abstratos, como o vácuo. Historicamente, é estabelecido em 1934 o início dos estudos com abordagens da não localidade, quando Gleb Wataghin (1899-1986), sem fazer referência, em seu artigo, de algum termo derivado da expressão não-local, introduziu um fator de forma exponencial com o propósito de dar tamanho/forma às partículas adimensionais [46]. Posteriormente, em diferentes contextos da física de altas energias, surgiram trabalhos que incorporaram efeitos não-locais [262, 263].

É preciso destacar, uma teoria cineticamente não-local não implica necessariamente em uma teoria dinamicamente não-local. A MQ, por exemplo, é de natureza probabilística e cinematicamente não-local, pois, pelo princípio da incerteza, introduzido em 1927 por Heisenberg [264], onde afirma existir um limite para a precisão de medida para certos pares de propriedades físicas, conhecidas como variáveis canonicamente conjugadas. Diante disso, a posição e o momento não podem ser conhecidos com exatidão por meio de medidas simultâneas. Matematicamente descrita esta incerteza, por Earle Hesse Kennard (1885-1968) e Weyl, pela desigualdade que relaciona o desvio padrão entre estas duas quantidades, $\sigma_x \sigma_p \geq \hbar/2$. Assim sendo, estados quânticos não podem ser localizados no espaço-tempo, e o observável da posição não pode ser medido com precisão arbitrária. Avaliando o caso específico do famoso paradoxo de Einstein-Podolsky-Rosen [265, 266], dois estados emaranhados são separados espacialmente e, ao realizar a medida de um observável em um desses estados, é imediatamente afetado a probabilidade da medida deste mesmo observável no outro estado. Logo, a informação física, entre os estados emaranhados, se propaga sem a mediação de nenhum campo. Mas, importa frisar, nos estados quânticos emaranhados não há violação da causalidade, pois não existe transmissão de qualquer informação/mensagem cuja velocidade seja superior à velocidade da luz [267]. No caso do SM das interações elementares das partículas através da troca de bósons, como fótons para a força eletromagnética e glúons para a força forte, os campos são avaliados em um mesmo ponto, e são governados por Lagrangianas locais, dos quais se derivam as equações de movimento [268].

Nas teorias locais os Lagrangianos são construídos em termos de polinômios de campos e de suas derivadas, uma vez que estamos interessados em observáveis de baixas energias, portanto, a ordem das derivadas é sempre finita $\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(\phi, \partial\phi, \partial^2\phi, \dots, \partial^n\phi)$, onde n é um número inteiro positivo e finito. Para uma teoria ser dinamicamente não-local, a sua ação deve conter a forma não-local. Ou seja, a teoria deve conter em sua estrutura operadores de derivadas covariantes de ordem infinita¹⁹ (sendo n infinito, a equação ainda

¹⁸ Em certo sentido, o problema da procura pelo éter luminífero, no passado, se assemelha ao problema da energia escura, na atualidade.

¹⁹ Quanto maior for a ordem da derivada, mais não-local é a teoria.

pode conter um número finito de soluções, a depender da escolha específica do operador não-local), que são incorporados no Lagrangiano através das funções inteiras, isto é, fatores de forma não polinomiais, que não podem ser apresentados na forma de um produto de multiplicadores primitivos $(z - a_1)(z - a_2) \dots (z - a_n)$, onde a_1, a_2, \dots, a_n são as raízes da função representante do fator de forma [269].

Neste aspecto, foram investigadas generalizações adequadas das equações de movimento das teorias de campos de ordem superior, abandonando-se a condição de localizabilidade ilimitada de qualquer evento espaço-temporal, visando, se possível, conciliar os requisitos de convergência da teoria, de definição positiva da energia do campo livre e de um comportamento estritamente causal do vetor de estado de um sistema físico [270]. Em particular, as correções de um laço foram abordadas como generalização do modelo escalar da QED não-local [271]. Sabe-se que os operadores não-locais emergem naturalmente no limite de baixa energia nas teorias de cordas/M [272, 273], como resultado de correções- α' , onde α' é definido como o inverso da tensão das cordas. Dentro deste contexto, outro exemplo de modelo não-local é dado pela teoria de cordas *p-adic* [274, 275, 276].

3.4.2 Cenário gravitacional

As propostas extensivas da gravitação de Einstein, no contexto das teorias não-locais, surgem com o objetivo maior de resolver o problema do aparecimento de fantasmas e, ao mesmo tempo, manter a teoria renormalizável ou finita no UV [277, 278, 279, 280, 281]. Pois, com o propósito de tornar a RG renormalizável, são incluídos contra-termos de ordem superior da curvatura, que cancelam as divergências na ação efetiva e melhora o seu comportamento UV. Contudo, a presença de tais termos de ordem superior prejudica, no nível quântico, a unitariedade da teoria, levando inevitavelmente ao aparecimento de estados de norma negativa, os chamados fantasmas [282]. No nível clássico, essas teorias geralmente sofrem de instabilidades inevitáveis do tipo Ostrogradsky, resultando em um Hamiltoniano que não é limitado por baixo [283, 284]. Para contornar esses problemas, uma abordagem comum é empregar a teoria de campo, que surge naturalmente no limite de baixa energia da teoria das cordas.

Estas essenciais questões vêm chamando a atenção e, como resultado, muitos modelos clássicos de gravidade não-local foram realizados em diferentes cenários, por exemplo, modelos cosmológicos não-locais [285, 286, 287, 288, 289, 290, 291], soluções não-locais de buracos negros [292, 293] e outras soluções exatas dentro destas teorias não-locais [294, 295, 296, 297], teorias não-locais de gauge e supersimétricas [298, 299], e, também, o mecanismo de Higgs foi investigado dentro das teorias de campos não-locais em [300, 301]. No nível quântico, os modelos gravitacionais onde retrata a matriz S de campo escalar não-local estendida e finita no UV, são extremamente complicados do ponto de vista técnico, pois as equações obtidas nesses modelos são de difíceis soluções

em seus cálculos, sendo a unitariedade e causalidade, os principais problemas a serem resolvidos [302]. Notavelmente, sendo atualmente um método conveniente e poderoso para alcançar soluções consistentes dos problemas fundamentais da gravidade quântica, os modelos de teoria de campos não-locais são considerados uma dos principais caminhos a ser seguido na tentativa de fundir o formalismo da TQC com a RG, assim, tem-se estudado e discutido extensivamente em muitas áreas da física teórica, como TQC não comutativo, teoria de campos de cordas, teoria de campos efetivos e teoria de campos conformes [303, 304, 305, 306, 307, 308]. Um exemplo bastante simples, mas consideravelmente útil, da não localidade aplicada no contexto gravitacional é dado a seguir, onde se modifica a equação de Poisson empenhada à lei da gravidade de Newton para uma partícula pontual.

3.4.3 Equação de Poisson Newtoniana Não-local

Em 1983, o físico israelense Mordehai Milgrom (1946-) propôs modificações nas leis de Newton como forma de explicar anomalias na curva de rotação das galáxias, dando surgimento a dinâmica Newtoniana modificada (*MOND-Modified Newtonian Dynamics*)²⁰ [309]. Entre as propostas da MOND, tem-se a modificação da equação de Poisson da gravidade Newtoniana para uma partícula pontual, a qual é dada por:

$$\nabla^2 \phi(\vec{r}) = 4\pi G m \delta(\vec{r} - \vec{r}_0), \quad (3.38)$$

onde $\phi(\vec{r})$ é o potencial gravitacional, G é a constante gravitacional de Newton, m é a massa pontual localizada em \vec{r}_0 . A equação (3.38) é uma consequência da lei da força do inverso do quadrado, que se baseia, em última análise, em observações do sistema solar que originalmente levaram às leis do movimento planetário de Kepler. Cujas generalizações são as equações do campo gravitacional de Einstein, com previsões consistente em boa concordância com os dados atuais observados do sistema solar [310]. Alterando o termo do laplaciano em (3.38), como descrita a seguir

$$\nabla^2 \left(1 - \frac{\nabla^2}{M^2}\right) \tilde{\phi}(\vec{r}) = 4\pi G m \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0), \quad (3.39)$$

obteremos a solução modificada

$$\tilde{\phi}(\vec{r}) = \phi(\vec{r}) \left(1 - e^{-M\vec{r}}\right), \quad (3.40)$$

onde $\phi(\vec{r}) = -\frac{Gm}{r}$ é a solução da equação de Poisson usual, não modificada. Na equação (3.40), recuperamos a teoria Newtoniana quando $M\vec{r} \gg 1$. A solução para o campo gravitacional modificado $\tilde{\phi}$ é regular em $\vec{r} = \vec{r}_0$. O campo gravitacional é obtido pelo gradiente do potencial escalar $-\nabla_{\vec{r}} \tilde{\phi}(\vec{r}) = \vec{g}(\vec{r})$. Pode-se mostrar que para o caso

²⁰ Teoria que propõe uma modificação das leis de Newton para explicar as propriedades observadas das galáxias. Modificar a lei da gravidade de Newton resulta em gravidade modificada, enquanto modificar a segunda lei de Newton resulta em inércia modificada.

$\vec{r} = \vec{r}_0$ a solução de $\nabla_{\vec{r}} \tilde{\phi}(\vec{r}_0)$ é diferente de zero, logo não representa um caso físico real e mensurável, pois o campo gravitacional na origem da massa pontual m deve ser nulo, $\vec{g}(\vec{r}_0) = 0$. Contudo, podemos introduzir termos de escala de massa M_i ($i = 1, \dots, n$), tendo as funções de Green para tais teorias a seguinte propriedade:

$$G(\vec{r}', \vec{r}) \sim \left[\nabla \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{\nabla^2}{M_i^2} \right) \right]^{-1} = \nabla^{-1} + \sum_{i=1}^n c_i (\nabla^2 - M_i^2)^{-1}, \quad (3.41)$$

onde os coeficientes c_i serão dados pela expressão

$$1 + \sum_{i=1}^n c_i = 0. \quad (3.42)$$

Em análise da equação (3.42), constata-se a existência de pelo menos um valor de i para o qual $c_i < 0$. Como já dito, tal condição, onde c_i possui sinal negativo, pode levar para o sistema físico o surgimento das instabilidades de Ostrogradsky, tanto no regime clássico, quanto no regime quântico o aparecimento dos estados fantasmas. Para contornar tais problemas, a abordagem não-local é formulada na teoria, por intervenção de uma função particular do operador de Laplace inserida na equação de Poisson. Com a exigência de ser esta uma função transcendental de valor complexo e holomórfica em todo o plano complexo²¹, conhecida na literatura como sendo o fator de forma. Para o presente caso, escolheremos uma função inteira do tipo exponencial, $F(\nabla) = e^{-\nabla^2/M^2}$. Assim sendo, teremos a equação de Poisson modificada, sendo agora uma equação não-local

$$\nabla^2 e^{-\nabla^2/M^2} \Phi(\vec{r}) = 4\pi G m \delta(\vec{r} - \vec{r}_0), \quad (3.43)$$

cujos solução é o potencial gravitacional regularizado $\Phi(\vec{r})$, sendo ele dado por

$$\Phi(\vec{r}) = -\frac{Gm}{\vec{r}} \operatorname{erf}\left(\frac{M\vec{r}}{2}\right), \quad (3.44)$$

onde $\operatorname{erf}(x)$ é a função erro de Gauss conhecida pela expressão

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^x e^{-t^2} dt. \quad (3.45)$$

Por fim, no Capítulo-5, trataremos em mais detalhes a teoria de campo não-local, mais especificamente discutiremos os fatores de forma, construídos mediante funções do operador de d'Alembert $F(\square)$. No caso específico de um novo modelo não-local que será apresentado, os fatores de forma serão formulados por funções cujo argumento é o operador de Dirac $F(\not{\partial})$, não o operador de d'Alembert.

²¹ Pelo teorema da fatoração de Weierstrass (ver Apêndice-B.3), uma função complexa $f(z)$ é holomórfica em um ponto z_0 , se existir um disco aberto centrado em z_0 , onde $f(z)$ é derivável em todos os seus pontos. Logo, se $f(z)$ é uma função inteira, ou seja, holomórfica em todo o plano complexo, ela pode ser expressa como uma série de potências do seu argumento.

4 Modelos Generalizados de Chern-Pontryagin

4.1 Ação e Equações de Campo da Teoria

Neste capítulo, apresentaremos uma nova e mais genérica classe de modelos de gravidade modificada, em quatro dimensões, que chamamos de modelos generalizados de gravidade Chern-Pontryagin (GCPMG - *Generalized Chern-Pontryagin Modified Gravity*). Direcionado pelas teorias $f(R)$, GCPMG está originalmente publicado em [66], cuja ação em vez de ser linear ou quadrática do termo topológico de Chern-Pontryagin $*RR$, exibe uma dependência funcional arbitrária e genérica deste objeto e também do escalar de curvatura $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$. Desta forma, podemos definir a ação deste modelo como sendo,

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} f(R, *RR) + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_m(g_{\mu\nu}, \Psi) = S_f + S_m, \quad (4.1)$$

onde $(S_m)\mathcal{L}_m$ é a (ação)Lagrangiana das fontes de matéria, representada simbolicamente por Ψ , e $*RR$ é o termo topológico de Chern-Pontryagin definido pelas equações (3.24) e (3.25), como uma função do tensor contravariante de Levi-Civita (3.23). Conforme demonstrado no Apêndice-A.2, os tensores de Levi-Civita, covariante $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} = \sqrt{-g} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ e contravariante, são totalmente antissimétricos definidos a partir do símbolo de Levi-Civita $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$, cujo valor é +1 para permutação par de seus índices, -1 para permutação ímpar de seus índices e 0 para os demais casos. Observa-se que em certos casos desse modelo, nomeadamente, quando a função $f(R, *RR)$ inclui graus ímpares do termo $*RR$, quebra-se a paridade do modelo, como demonstrado em [52].

Portanto, para obter as equações de movimento, devemos variar (4.1) com respeito à métrica. Para o termo genérico da ação da teoria, teremos

$$\begin{aligned} \delta S_f &= \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \left[\delta\sqrt{-g} f + \sqrt{-g} \delta f \right] \\ &= \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} f + f_R (\delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}) + f_{*RR} \delta(*RR) \right], \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde $f \equiv (R, *RR)$, $f_R \equiv \frac{\partial f}{\partial R}$ e $f_{*RR} \equiv \frac{\partial f}{\partial(*RR)}$. Para os dois primeiros termos de (4.2) temos a solução dada pela Eq.(3.2), decorrente das teorias $f(R)$. Assim sendo, iremos aqui somente obter a variação do último termo de (4.2), para isso, calcularemos a variação da densidade de Chern-Pontryagin dada por

$$\begin{aligned} f_{*RR} \delta(*RR) &= f_{*RR} \left[\frac{1}{2} *RR g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \delta(R^\lambda_{\theta\mu\nu} R^\theta_{\lambda\alpha\beta}) \right] \\ &= \frac{1}{2} f_{*RR} *RR g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + 2 f_{*RR} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} R^\theta_{\lambda\alpha\beta} \nabla_\mu \delta \Gamma^\lambda_{\theta\nu}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

A variação do tensor de Riemann, que se encontra no segundo termo do lado direito de (4.3), fora obtido por meio da identidade de Palatini (A.6). E, o primeiro termo vem da variação do tensor Levi-Civita

$$\delta(\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}) = \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \delta\left(\frac{1}{\sqrt{-g}}\right) = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}}{\sqrt{-g}} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (4.4)$$

Para o segundo termo de (4.3), que definiremos de \tilde{C} , aplicaremos as propriedades (anti)simétricas dos tensores, o método da integração por partes e, também, utilizaremos a equação da variação dos símbolos de Christoffel (A.5). Deste modo, teremos

$$\begin{aligned} \tilde{C} &= -2\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \nabla_\mu \left(R^\theta_{\lambda\alpha\beta} f_{*RR} \right) \frac{1}{2} g^{\lambda\gamma} (\nabla_\theta \delta g_{\nu\gamma} + \nabla_\nu \delta g_{\theta\gamma} - \nabla_\gamma \delta g_{\theta\nu}) \\ &= -\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} R^{\theta\gamma}_{\alpha\beta} \nabla_\mu f_{*RR} (\nabla_\theta \delta g_{\nu\gamma} + \nabla_\nu \delta g_{\theta\gamma} - \nabla_\gamma \delta g_{\theta\nu}) \\ &= -\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} R^{\theta\gamma}_{\alpha\beta} \nabla_\mu f_{*RR} (\nabla_\theta \delta g_{\nu\gamma} - \nabla_\gamma \delta g_{\theta\nu}) \\ &= -2\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} R^{\theta\gamma}_{\alpha\beta} \nabla_\mu f_{*RR} \nabla_\gamma \delta g_{\theta\nu} \\ &= -2\varepsilon^{\mu\alpha\beta\nu} \left(\nabla_\gamma R^{\theta\gamma}_{\alpha\beta} \nabla_\mu f_{*RR} + R^{\theta\gamma}_{\alpha\beta} \nabla_\gamma \nabla_\mu f_{*RR} \right) \delta g_{\theta\nu} \\ &= \left(2\varepsilon^{\mu\alpha\beta\nu} \nabla_\gamma R^{\theta\gamma}_{\alpha\beta} \nabla_\mu f_{*RR} + 4^*R^{(\theta|\gamma\mu|\nu)} \nabla_\gamma \nabla_\mu f_{*RR} \right) \delta g_{\theta\nu}. \end{aligned}$$

Por meio da definição das seguintes quantidades $v_\mu \equiv \nabla_\mu \phi$, $v_{\gamma\mu} \equiv \nabla_\gamma v_\mu$ e $\phi \equiv f_{*RR}$, alcançaremos

$$\begin{aligned} \tilde{C} &= \left(2v_\mu \varepsilon^{\mu\alpha\beta\nu} \nabla_\gamma R^{\theta\gamma}_{\alpha\beta} + 4v_{\gamma\mu} {}^*R^{(\theta|\gamma\mu|\nu)} \right) \delta g_{\theta\nu} \\ &= \left(-2v_\mu \varepsilon^{\mu\alpha\beta\nu} \nabla_\gamma R^{\gamma\theta}_{\alpha\beta} + 4v_{\gamma\mu} {}^*R^{\gamma(\theta\nu)\mu} \right) \delta g_{\theta\nu} \\ &= \left(2v_\mu \varepsilon^{\mu\alpha\beta\nu} (\nabla_\beta R^{\theta}_{\alpha} - \nabla_\alpha R^{\theta}_{\beta}) + 4v_{\gamma\mu} {}^*R^{\gamma(\theta\nu)\mu} \right) \delta g_{\theta\nu} \\ &= 4 \left(v_\mu \varepsilon^{\mu\beta\alpha\nu} \nabla_\alpha R^{\theta}_{\beta} + v_{\gamma\mu} {}^*R^{\gamma(\theta\nu)\mu} \right) \delta g_{\theta\nu}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Substituindo (4.5) em (4.3) e adicionando-a a expressão da variação da ação da gravidade $f(R)$ dada por (3.2), encontraremos o resultado final para a variação da ação (4.2)

$$\begin{aligned} \delta S_f &= \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} f + f_R R_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \square f_R - \nabla_{(\mu} \nabla_{\nu)} f_R \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} {}^*R R f_{*RR} g_{\mu\nu} + 4 \left(v_\lambda \varepsilon^{\lambda\beta\alpha}_{(\mu} \nabla_{|\alpha|} R_{\nu)\beta} + {}^*R^{\gamma}_{(\nu\mu)} \nabla_\gamma \nabla_\lambda f_{*RR} \right) \right] \delta g^{\mu\nu} = 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Do resultado acima, poderemos obter as equações de campo da ação (4.1)

$$\begin{aligned} f_R R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f + g_{\mu\nu} \square f_R - \nabla_{(\mu} \nabla_{\nu)} f_R + \frac{1}{2} {}^*R R f_{*RR} g_{\mu\nu} \\ + 4 \left(v_\lambda \varepsilon^{\lambda\beta\alpha}_{(\mu} \nabla_{|\alpha|} R_{\nu)\beta} + {}^*R^{\gamma}_{(\nu\mu)} \nabla_\gamma \nabla_\lambda f_{*RR} \right) = \kappa^2 T^{(m)}_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

onde $\square \equiv g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu$. Por definição, o tensor energia-momento da contribuição das fontes de matéria é dado pela variação com respeito a métrica do Lagrangiano da matéria, conforme

a equação dada em (A.3). Deste modo, será mais conveniente reescrever as equações de campo (4.7) da seguinte maneira

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \kappa_{eff}^2 T_{\mu\nu}^{(m)} + T_{\mu\nu}^{eff}, \quad (4.8)$$

onde, $\kappa_{eff}^2 \equiv \frac{k^2}{f_R}$, e

$$T_{\mu\nu}^{eff} = \frac{1}{f_R} \left[-\frac{1}{2}f_R Rg_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f - g_{\mu\nu}\square f_R + \nabla_{(\mu}\nabla_{\nu)}f_R - C_{\mu\nu} \right], \quad (4.9)$$

onde definimos o C -tensor

$$C_{\mu\nu} \equiv 4 \left(v_\lambda \varepsilon^{\lambda\beta\alpha}_{(\mu} \nabla_{|\alpha|} R_{\nu)\beta} + {}^*R^\gamma_{(\nu\mu)} \nabla_\gamma \nabla_\lambda f_{*RR} \right) + \frac{1}{2} {}^*R R f_{*RR} g_{\mu\nu}. \quad (4.10)$$

Observa-se facilmente a natureza simétrica do C -tensor. Com relação ao traço de (4.10), teremos para o seu primeiro termo o traço nulo, $4v_\lambda \varepsilon^{\lambda\beta\alpha}_{(\mu} \nabla_{|\alpha|} R^\mu_{\beta)}$, isto se dá devido a contração do tensor de Ricci simétrico com o tensor de Levi-Civita antissimétrico, já o segundo termo, $2\varepsilon^{\gamma\beta\alpha}_{(\mu} R_{\beta\alpha)}^{\mu\lambda} \nabla_\gamma \nabla_\lambda f_{*RR}$, se anula devido a identidade de Bianchi $R^\beta_{[\alpha\mu\lambda]} = 0$. Por consequência, teremos

$$g^{\mu\nu} C_{\mu\nu} = 2f_{*RR} {}^*RR. \quad (4.11)$$

Conforme já mostrado no capítulo anterior (ver também o Apêndice-A.2), o tensor simétrico de Cotton tem traço nulo, logo, podemos dizer que o C -tensor diferencia do tensor de Cotton por um termo genérico dependente da densidade de Chern-Pontryagin. Nos estudos da geometria diferencial, o tensor de Cotton (ou Cotton-York) é um tensor originalmente definido em terceira ordem (3.17), em termos do tensor de Ricci e do tensor de Weyl, sendo conformemente um invariante métrico de uma variedade (pseudo)Riemanniana. No entanto, o tensor de Cotton surge no contexto das identidades Bianchi e está presente em qualquer dimensão D , com aplicações importantes nos estudos das ondas gravitacionais e abordagens das congruências no vácuo dos espaços-tempos estacionários [311, 312].

Nota-se que as equações de campo (4.7) envolvem termos de altas derivadas, cuja presença conduz potencialmente ao surgimento de instabilidades de Ostrogradsky (conforme demonstrado no Apêndice-B.1), em nível perturbativo, conhecidas como estados fantasmas (“ghosts”), abolindo à restrição áurea da unitariedade na teoria quântica de campos [313]. Uma investigação cuidadosa do número de graus de liberdade, usando uma análise canônica, foi realizada para algumas teorias da gravidade de curvatura superior [314], onde foi descoberto que essas teorias possuem pelo menos um modo fantasmagórico. No entanto, essas dificuldades são contornadas seguindo a metodologia empregada nas teorias de campos efetivos¹ (TCE) [315], na qual os modos fantasmagóricos podem ser

¹ TCE é uma técnica aproximativa que, na descrição e análise do comportamento de sistemas físicos, considera apenas certas escalas de energias de interesse

desconsiderados, uma vez que são suprimidos por uma escala típica de alta energia, tornando-os modos pesados para se propagarem no limite de baixa energia. De agora em diante, trataremos os modelos generalizados de gravidade Chern-Pontryagin como TCE.

4.1.1 Equações de Vínculo do Modelo $f = f_1(R) + f_2(*RR)$

Aqui, assumiremos a função genérica do nosso modelo como tendo a seguinte forma: $f(R, *RR) = f_1(R) + f_2(*RR)$. Logo, f é uma função constituída pela soma de duas funções f_1 e f_2 , cada qual composta por somente um destes argumentos, o escalar de Ricci R e o termo topológico de Chern-Pontryagin $*RR$. Desta maneira, a escolha de f simplifica a obtenção das equações de movimento e produz a possibilidade de recuperarmos RG quando adotado certas condições para o modelo. Por exemplo, para o caso particular $f = R + *RR$, as equações de campo (4.7) se reduzem as equações de campo da RG (A.14).

Recorrendo à identidade de Bianchi, $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$, e a conservação do tensor energia-momento, $\nabla^\mu T_{\mu\nu}^{(m)} = 0$, podemos calcular a divergência da Eq.(4.7), conforme cálculos demonstrados no Apêndice-A.4, cujo resultado é

$$\nabla_\mu C^{\mu\nu} = \frac{1}{2} f_{*RR} \nabla^\nu *RR. \quad (4.12)$$

Os cálculos para se obter as equações de vínculo da Eq.(4.7) para o caso específico de um função simples de $f(R)$ foram realizados em [316]. Verifica-se que a divergência do termo entre parênteses da Eq.(4.10) assemelha-se ao vínculo de Pontryagin da teoria de gravidade modificada Chern-Simons (A.31), como demonstrado em [229], onde os autores expõem uma discussão detalhada da consistência de várias métricas conhecidas dentro da DCSMG.

Observa-se que as equações modificadas para $f_2(*RR) \propto (*RR)^n$, com $n \geq 1$, reduzem à gravidade $f(R)$ (para RG se $f_1(R) = R$) para uma variedades de classes de métricas, por exemplo, as estáticas esfericamente simétrica, Friedmann-Robertson-Walker, (A)dS e tipo-Gödel, pois para todas essas métricas $*RR = 0$. De fato, esta condição é nada mais que o vínculo de Pontryagin satisfeito para as métricas, uma vez que a relação específica entre a correspondência do escalar Newman-Penrose é satisfeita, conforme discussão apresentada em [229]. Em princípio tal vínculo também é satisfeito para outras métricas. No entanto, para produzir equações de movimento de campo modificadas não trivialmente é necessário ter $C_{\mu\nu} \neq 0$ que resulta em $*RR \neq 0$. Esta situação, por exemplo, ocorre para a métrica de Kerr, conforme mostrado em [54]. Nota-se também, para a teoria tipo “*agravity*” que não envolve o termo de Einstein-Hilbert [317], mas termos de derivadas superiores estão presentes na sua ação, de modo que $f_1(R) = 0$. As métricas que satisfazem a restrição de Pontryagin resolveriam as equações de movimento de uma maneira trivial, já que neste caso $f_R = 0$ e $f_{*RR} = 0$ se $f(*RR) \propto (*RR)^n$, com $n > 1$.

Outra importante relação é obtida do modelo quando toma-se o traço da Eq.(4.8). Tendo o conhecimento de (4.11), teremos o seu resultado abaixo

$$3\Box f_R + Rf_R - 2f + 2{}^*RRf_{*RR} = \kappa^2 T^{(m)}, \quad (4.13)$$

onde $T^{(m)} = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}^{(m)}$. Como se vê, a equação (4.13) depende da densidade Chern-Pontryagin. Em outras palavras, o traço da equação (4.8) resulta na mesma equação das teorias de gravidade $f(R)$, acrescida de um termo proporcional a *RR . Tal resultado é interessante pois descreve efetivamente uma equação com um grau de liberdade escalar de propagação ($\phi = f_R$), como veremos com mais detalhes na seção seguinte.

4.1.2 Equações de Campo no Frame de Jordan

Começamos esta seção mostrando que os modelos generalizados de gravidade Chern-Pontryagin admitem representações tanto no frame de Jordan como também no frame de Einstein, semelhantemente ao que acontece com as teorias de gravidade $f(R)$. Existe uma certa correspondência entre modelos de gravidade $f(R)$ e gravidade escalar-tensorial, como se pode ver na discussão apresentada no artigo [316].

Para ver como a representação no frame de Jordan emerge com mais detalhes, é útil observar que a ação (4.1) pode ser convertida na seguinte forma

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[f(\phi_1, \phi_2) + \frac{\partial f}{\partial \phi_1} (R - \phi_1) + \frac{\partial f}{\partial \phi_2} ({}^*RR - \phi_2) \right] + S_m(g_{\mu\nu}, \Psi), \quad (4.14)$$

onde ϕ_1 e ϕ_2 são campos escalares auxiliares. Variando a Eq.(4.14) com respeito a ϕ_1 e ϕ_2 , respectivamente, obtemos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \phi_1^2} (R - \phi_1) + \frac{\partial^2 f}{\partial \phi_1 \partial \phi_2} ({}^*RR - \phi_2) = 0; \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \phi_2^2} ({}^*RR - \phi_2) + \frac{\partial^2 f}{\partial \phi_1 \partial \phi_2} (R - \phi_1) = 0, \quad (4.16)$$

cujas soluções é simplesmente dada por

$$R = \phi_1 \quad \text{e} \quad {}^*RR = \phi_2. \quad (4.17)$$

Agora, inserindo a Eq.(4.17) na Eq.(4.14), voltaremos para a Eq.(4.1).

Requerida a seguinte condição

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \phi_1^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi_2^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \phi_1 \partial \phi_2} \right)^2 \neq 0. \quad (4.18)$$

e definindo as seguintes quantidades

$$\frac{\partial f}{\partial \phi_1} \equiv \Phi \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial \phi_2} \equiv \phi, \quad (4.19)$$

desta forma, pode-se reescrever a Eq.(4.14) como uma teoria escalar-tensorial de dois campos no frame de Jordan, ou seja,

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2\kappa^2} \Phi R + \frac{1}{2\kappa^2} \phi {}^*RR - V(\phi, \Phi) \right] + S_m(g_{\mu\nu}, \Psi), \quad (4.20)$$

onde

$$V(\Phi, \phi) = \frac{1}{2\kappa^2} [\phi \phi_2(\phi) + \Phi \phi_1(\Phi) - f(\Phi, \phi)] \quad (4.21)$$

é o potencial de interação entre os dois campos escalares. Observe que o primeiro e o último termo no setor gravitacional da ação (4.20) se assemelham a uma ação de Brans–Dicke com a diferença de que o potencial é composto pelo campo escalar de Brans–Dicke Φ (*scalaron*), além do campo escalar ϕ . O segundo termo na Eq.(4.20) é apenas o termo topológico de Chern-Pontryagin acoplado não minimamente com ϕ , que é frequentemente chamado de termo Chern-Simons [52]. Portanto, partindo da ação (4.1), encontramos uma maneira natural, diferente da proposta original [52], de gerar o termo de Chern-Simons, com ϕ desempenhando o papel do campo de acoplamento CS [54] e sendo um dos dois graus escalares de liberdade que aparecem na representação escalar-tensorial. Nesse sentido, a ação do modelo escrito na representação no frame de Jordan pode ser pensada como uma generalização da gravidade modificada de Chern-Simons. Observe, entretanto, a escolha do modelo, $f_I(R, {}^*RR) = R + \beta({}^*RR)^2$, não admite uma representação escalar-tensorial de dois campos, uma vez que a condição on-shell (4.17) não é garantida porque (4.18) não é válida.

Variando a ação (4.20) em relação aos campos métrico e escalares: $g_{\mu\nu}$, ϕ e Φ , somos capazes de encontrar as seguintes equações de campo na representação no frame de Jordan, a saber,

$$G_{\mu\nu} = \frac{\kappa^2}{\Phi} (T_{\mu\nu}^{(m)} - g_{\mu\nu} V) + \frac{1}{\Phi} (\nabla_\mu \partial_\nu \Phi - g_{\mu\nu} \square \Phi) - \frac{4}{\Phi} C_{\mu\nu}; \quad (4.22)$$

$$R = 2\kappa^2 \frac{\partial V}{\partial \Phi}; \quad (4.23)$$

$${}^*RR = 2\kappa^2 \frac{\partial V}{\partial \phi}, \quad (4.24)$$

onde definimos o tensor de Cotton como

$$C_{\mu\nu} = v_\alpha \epsilon^\alpha_{\beta\sigma(\mu} \nabla^\sigma R^\beta_{\nu)} + v_{\alpha\beta} {}^*R^\alpha_{(\mu\nu)}{}^\beta, \quad (4.25)$$

com $v_\alpha = \nabla_\alpha \phi$ e $v_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha v_\beta$. Aplicando o traço na Eq.(4.22) e combinando-a com a Eq.(4.23), obteremos

$$\square \Phi = \frac{1}{3} \Phi 2\kappa^2 \frac{\partial V}{\partial \Phi} + \frac{1}{3} \kappa^2 (T^{(m)} - 4V), \quad (4.26)$$

o que significa que o *scalaron* cumpre uma equação de um campo dinâmico que depende do traço do tensor energia-momento e também do potencial de interação entre ambos os campos escalares. Por outro lado, o campo CS ϕ satisfaz uma equação não dinâmica (4.24),

cuja solução fornece uma equação $\phi = \phi(\Phi)$, então ϕ pode ser completamente fatorado (on-shell) da Eq.(4.20). Portanto, existe apenas um grau de liberdade de propagação escalar na teoria.

Tomemos agora o exemplo anterior do modelo $f_I(R, {}^*RR) = R + \beta({}^*RR)^2$. Neste caso, o potencial correspondente é simplesmente dado por

$$V(\phi) = \frac{\phi^2}{8\beta\kappa^2}, \quad (4.27)$$

enquanto o *scalaron* se reduz para $\Phi = 1$. Ao inserir esse potencial na Eq.(4.24), encontra-se

$$\phi = 2\beta({}^*RR), \quad (4.28)$$

que pode ser integrada a partir da Eq.(4.22) e, como resultado, obter as equações de campo (4.7) para o modelo particular acima mencionado. Portanto, como esperado, conclui-se que as equações de campo da gravidade generalizada de Chern-Pontryagin no frame de Jordan são equivalentes àsquelas na representação padrão.

4.1.3 Equações de Campo no Frame de Einstein

Para início, consideraremos a transformação conforme da métrica,

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu}, \quad (4.29)$$

onde o til descreve quantidades geométricas no frame de Einstein e Ω é o fator conforme. Observe que esta transformação é consistente apenas se $\partial f / \partial R > 0$. Neste caso, o escalar de Ricci no frame de Einstein está relacionado com o escalar de Ricci no frame de Jordam pela seguinte equação

$$R = \Omega^2 \left[\tilde{R} + 6\tilde{\square} \ln \Omega - 6\tilde{g}^{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\mu \ln \Omega \tilde{\nabla}_\nu \ln \Omega \right]. \quad (4.30)$$

Desta forma, o termo Chern-Pontryagin em (4.29) se transforma como

$${}^*RR = \Omega^4 {}^*\tilde{R}\tilde{R}. \quad (4.31)$$

Usando as expressões acima e escolhendo $\Omega^2 = \Phi$, a ação (4.20), no frame de Einstein, terá a forma

$$\begin{aligned} \tilde{S} &= \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\tilde{R} - \frac{3}{2} \tilde{g}^{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\mu \ln \Phi \tilde{\nabla}_\nu \ln \Phi + \phi {}^*\tilde{R}\tilde{R} - \frac{2\kappa^2}{\Phi^2} V(\phi, \Phi) \right] + \\ &+ S_m(\Phi^{-1} \tilde{g}_{\mu\nu}, \Psi), \end{aligned} \quad (4.32)$$

definindo $\Phi = e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\psi}$, a equação anterior se torna na ação na representação do frame de Einstein.

$$\begin{aligned} \tilde{S} &= \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\frac{1}{2\kappa^2} \tilde{R} - \frac{1}{2} \tilde{g}^{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\mu \psi \tilde{\nabla}_\nu \psi + \frac{1}{2\kappa^2} \phi {}^*\tilde{R}\tilde{R} - U(\phi, \psi) \right] + \\ &+ S_m(e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\psi} \tilde{g}_{\mu\nu}, \Psi), \end{aligned} \quad (4.33)$$

onde o potencial é

$$U(\phi, \psi) = \frac{1}{2\kappa^2 e^{2\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\psi}} \left[\phi \phi_2(\phi) + e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\psi} \phi_1(\psi) - f(\phi, \psi) \right]. \quad (4.34)$$

Pode-se facilmente ver que ψ é o único grau de liberdade escalar de propagação, enquanto o campo de acoplamento CS é um campo não propagador, de acordo com a proposta original da gravidade modificada CS [52].

A fim de ilustrar a representação no frame de Einstein e sua conexão com a gravidade modificada CS, consideremos um outro caso particular correspondente a $f_{II}(R, {}^*RR) = R + \alpha R^2 + \beta ({}^*RR)^2$. Quando comparada com (3.3), a função escolhida f_{II} pode ser considerada como um modelo de Starobinsky generalizado. Neste cenário, o potencial para este modelo específico, no frame de Einstein, assume a forma

$$U(\phi, \psi) = \frac{1}{8\kappa^2 e^{2\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\psi}} \left[\frac{\phi^2}{\beta} + \frac{1}{\alpha} \left(e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\psi} - 1 \right)^2 \right], \quad (4.35)$$

e a ação parece

$$\begin{aligned} \tilde{S} &= \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left\{ \tilde{R} + \phi {}^*\tilde{R}\tilde{R} - \frac{1}{4e^{2\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\psi}} \left[\frac{\phi^2}{\beta} + \frac{1}{\alpha} \left(e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\psi} - 1 \right)^2 \right] \right\} - \\ &- \frac{1}{2} \tilde{g}^{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\mu \psi \tilde{\nabla}_\nu \psi + S_m(e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\psi} \tilde{g}_{\mu\nu}, \Psi), \end{aligned} \quad (4.36)$$

que é a gravidade modificada de Chern-Simons não dinâmica mais um Lagrangiano não trivial dependendo de dois campos escalares em interação. Ao variar a ação (4.33) em relação a $\tilde{g}_{\mu\nu}$, ψ e ϕ , respectivamente, encontramos as seguintes equações de campo

$$\tilde{G}_{\mu\nu} + 4\tilde{C}_{\mu\nu} = \kappa^2 \left(\tilde{T}_{\mu\nu}^{(\psi, \phi)} + \tilde{T}_{\mu\nu}^{(m)} \right); \quad (4.37)$$

$$\frac{{}^*\tilde{R}\tilde{R}}{2\kappa^2} = -\frac{\partial U}{\partial \phi}; \quad (4.38)$$

$$\tilde{\square}\psi = \frac{\partial U}{\partial \psi} + \sqrt{\frac{1}{6}} \kappa \tilde{T}^{(m)}, \quad (4.39)$$

onde definimos as seguintes quantidades: o tensor de Cotton

$$\tilde{C}_{\mu\nu} = \tilde{v}_\alpha \tilde{\epsilon}^\alpha_{\beta\sigma(\mu} \tilde{\nabla}^\sigma \tilde{R}^\beta_{\nu)} + \tilde{v}_{\alpha\beta} {}^*\tilde{R}^\alpha_{(\mu\nu)}{}^\beta, \quad (4.40)$$

com $\tilde{v}_\alpha = \tilde{\nabla}_\alpha \phi$ e $\tilde{v}_{\alpha\beta} = \tilde{\nabla}_\alpha v_\beta$. O tensor energia-momento das fontes de matéria é definido como usual

$$\tilde{T}_{\mu\nu}^{(m)} = -\frac{2}{\sqrt{-\tilde{g}}} \frac{\delta \left[S_m(e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\psi} \tilde{g}_{\mu\nu}, \Psi) \right]}{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}}, \quad (4.41)$$

como resultado, $\tilde{T}^{(m)} \equiv \tilde{g}^{\mu\nu} \tilde{T}_{\mu\nu}^{(m)}$. O tensor energia-momento

$$\tilde{T}_{\mu\nu}^{(\psi, \phi)} = \tilde{\nabla}_\mu \psi \tilde{\nabla}_\nu \psi - \tilde{g}_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \tilde{\nabla}_\alpha \psi \tilde{\nabla}^\alpha \psi + U(\phi, \psi) \right), \quad (4.42)$$

surge das contribuições exclusivas dos campos escalares ϕ e ψ . No caso de um potencial trivial $U = 0$, as soluções tipo-Gödel, no vácuo, das equações de campo (adicionadas por uma constante cosmológica) reduzem-se a uma forma semelhante às aquelas encontradas em [56], a menos que, aqui, \tilde{g} seja a métrica dinâmica. Ao resolver as equações de campo, os autores de [56] encontraram as seguintes soluções para os campos escalares: $\phi = b(z - z_0)$ e $\psi = s(z - z_0)$, onde z_0 é uma constante real arbitrária. Portanto, formalmente, o caso correspondente ao potencial trivial, $U = 0$, apenas se reduz aos encontrados para CSMG [55, 56, 318], como esperado.

Obtidas as equações de campo, nossa intenção é principalmente investigar as possíveis soluções para esta teoria. Para isso, na próxima seção, nos concentraremos em dois tipos diferentes de fundos, a saber, métricas estáticas esfericamente simétricas e do tipo-Gödel. Para a primeira métrica, as soluções são triviais, pois levam a ${}^* \tilde{R} \tilde{R} = 0$ e $\tilde{C}_{\mu\nu} = 0$, enquanto, para a última, a solução não é trivial, pois resulta em ${}^* \tilde{R} \tilde{R} = 0$ e $\tilde{C}_{\mu\nu} \neq 0$.

4.2 Perturbação do espaço-tempo de Schwarzschild

Como dito nas seções anteriores, a métrica de Schwarzschild resolve as equações de movimento da gravidade de Chern-Pontryagin trivialmente, queremos dizer que para tal métrica ${}^* R R = 0$, o que leva ao desaparecimento do C -tensor, assim sendo, é natural considerarmos suas perturbações. Discutiremos aqui perturbações da métrica de Schwarzschild dentro do modelo generalizado de Chern-Pontryagin, adotando primeiramente o protótipo já apresentado nas seções anteriores, ou seja, $f_I(R, {}^* R R) = R + \beta({}^* R R)^2$, onde β é uma constante de acoplamento.

Concentraremos em uma perturbação particular do espaço-tempo de Schwarzschild que descreve soluções de rotação lenta, portanto consideraremos a métrica perturbada dada por

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 \left[d\theta^2 + \sin^2 \theta (d\phi - \omega(r, \theta) dt)^2 \right], \quad (4.43)$$

onde M é a massa de qualquer distribuição de massa esfericamente simétrica e a função $\omega(r, \theta)$ é de primeira ordem em $\epsilon \sim J/M^2$, aqui J é o momento angular. Neste esquema de perturbação, ϵ é considerado um parâmetro pequeno. A seguir, consideramos equações até a primeira ordem em ϵ . Nesta situação, o termo de Chern-Pontryagin para a métrica (4.43) até a primeira ordem em ϵ é diferente de zero

$${}^* R R = \frac{24M\epsilon}{r^3} \left(2 \frac{\partial \omega}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta \partial r} \sin \theta \right). \quad (4.44)$$

Convém salientar, muitos dos resultados fornecidos neste capítulo foram obtidos através de cálculos executados no ambiente do software Wolfram Mathematica Versão 13.3.1.0 e do software GRTensorII²

Agora, vamos resolver as equações de campo (4.8) para o elemento de linha (4.43). Quando considerado até a primeira ordem em ϵ , a única componente do C -tensor que não desaparece é a componente (t, ϕ) . Logo, a única equação de campo resultante será

$$G_{t\phi} - T_{t\phi}^{eff} = 0, \quad (4.45)$$

cuja forma explícita é

$$f_1 + \left(rf_2 + \frac{aL}{r^7} (4f_3 - rf_4) \right) \left(1 - \frac{2M}{r} \right) = 0, \quad (4.46)$$

onde as funções $f_i = f_i(r, \theta)$ acima mencionadas são definidas da seguinte forma

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} \sin \theta + 3 \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \cos \theta; \\ f_2 &= \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} r + 4 \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) \sin \theta; \\ f_3 &= \left(\frac{\partial^3 \omega}{\partial \theta^2 \partial r} - 2 \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) \sin \theta + 3 \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta \partial r} \cos \theta; \\ f_4 &= \left(\frac{\partial^4 \omega}{\partial \theta^2 \partial r^2} - 2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} \right) \sin \theta + 3 \frac{\partial^3 \omega}{\partial \theta \partial r^2} \cos \theta, \end{aligned} \quad (4.47)$$

e as constantes são $a = 1152$ e $L = \beta M^2$, que está relacionado à massa do buraco negro e à constante de acoplamento que acompanha o termo de derivada superior na ação. Agora, resolveremos a equação de campo acima (4.46) usando o método de separação de variáveis. Portanto, vamos assumir $\omega(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$. Ao fazer isso, obtém-se um conjunto de duas equações diferenciais ordinárias, a saber,

$$R'' = CR + (4R' + r) \left(r + \frac{aL}{r^7} (C - 2) \right) \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \quad (4.48)$$

e

$$\Theta'' = C\Theta - 3\Theta' \cot \theta, \quad (4.49)$$

onde o primo representa a derivada em relação aos seus correspondentes argumentos, e C é a constante de separação. Portanto, chegaremos à seguinte solução para a equação angular (4.49)

$$\begin{aligned} \Theta(\theta) &= A {}_2F_1 \left(\frac{3 + \sqrt{9 - 4C}}{4}, \frac{3 - \sqrt{9 - 4C}}{4}, \frac{1}{2}, \cos^2 \theta \right) + \\ &\quad B {}_2F_1 \left(\frac{5 + \sqrt{9 - 4C}}{4}, \frac{5 - \sqrt{9 - 4C}}{4}, \frac{3}{2}, \cos^2 \theta \right) \cos \theta, \end{aligned} \quad (4.50)$$

² GRTensorII, Version 1.79 (R4), 6 February 2001, Developed by Peter Musgrave, Denis Pollney and Kayll Lake, Copyright 1994-2001 by the authors. Latest version available from: <http://grtensor.phy.queensu.ca/> - (C:/Grtii(6)/Metrics).

onde A, B são constantes arbitrárias e ${}_2F_1$ é a função hipergeométrica. A equação radial (4.48) é uma equação diferencial não linear, cuja solução analítica, no caso geral, não pode ser encontrada. Porém, se considerarmos o caso particular onde a constante de separação $C = 0$ nas equações (4.48, 4.49), conseguimos encontrar uma solução analítica. Nesta situação, as soluções angular e radial reduzem-se a

$$R(r) = C_1 + C_2 \int \frac{r^4}{aL + r^8} dr; \quad (4.51)$$

$$\Theta(\theta) = C_3 + C_4 h(\theta), \quad (4.52)$$

onde C_i 's são constantes arbitrárias e $h(\theta) = \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} - \ln \left(\frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \right)$. Para melhor esclarecer esta solução, para as equações (4.51) e (4.52), faremos as seguintes escolhas, a saber: $C_1 = 0$, $C_2 = J$, $C_3 = 1$ e $C_4 = L$. O parâmetro L caracteriza o desvio do nosso modelo em relação à RG. Sendo ele um valor pequeno, suprimido por uma escala típica de alta energia. Consequentemente, podemos expandir (4.51) até a primeira ordem em L , e, portanto, encontrar os efeitos do termo aditivo não-Hilbert em nossa ação. Este procedimento levará à seguinte solução aproximada:

$$\omega(r, \theta) = \frac{J}{r^3} \left[1 + \left(\frac{h(\theta)}{\sin^2 \theta} - \frac{a}{11r^8} \right) L \right] + \mathcal{O}(L^2). \quad (4.53)$$

4.2.1 Efeito Lense-Thirring do Modelo $f_I = R + \beta(*RR)^2$

Em 1913, numa carta endereçada ao filósofo Ernst Mach, Einstein utilizou, pela primeira vez, o termo “*dragging*” em referência ao fenômeno de arrasto do plano de oscilações do pêndulo de Foucault devido a força de Coriolis [319]. Mas, só em 1965 o termo “*frame-dragging*” apareceu pela primeira vez, quando Cohen consignou o arrasto de referenciais para descrever a velocidade angular dos referenciais inerciais dentro de uma casca esférica [320]. No entanto, muito tempo antes, em 1918, os físicos austríacos Joseph Lense (1890-1985) e Hans Thirring (1888-1976), descobriram que as distribuições estacionárias não estáticas de massa-energia altera o espaço-tempo. Em consequência, os corpos nas proximidades desta massa-energia são arrastados, alterando ligeiramente suas órbitas em comparação com a previsão oriunda da gravidade Newtoniana. Assim, Lense e Thirring previram o efeito de arrasto de referenciais (ou efeito Lense-Thirring), posteriormente confirmado através das observações de sistemas estelares e de experimentos, como, por exemplo, da precessão das órbitas de satélites ao redor da Terra, solidificando a teoria de Einstein. Medição obtida em 2002 com os satélites LAGEOS, ao longo de quase 8 anos de dados, confirmaram o efeito Lense-Thirring com valor experimental dentro da margem dos 20% do que é previsto pela RG [321]. Experimento do satélite *Gravity Probe B* (GP-B) mediu a precessão dos giroscópios, com alta precisão do efeito Lense-Thirring, causado pela rotação da Terra [322]. Trabalho sobre a relação entre o princípio de Mach e o efeito de arrasto no espaço-tempo de Kerr e de Gödel foi feito em [323].

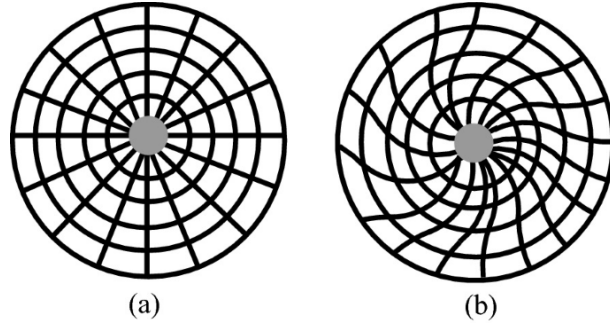


Figura 2 – Representação esquemática das linhas geodésicas: (a) Sem o efeito de arrasto de referenciais; (b) Com o efeito de arrasto de referenciais. Crédito da figura: *Frame Dragging and Geodetic Effect Derived: Two More Tests of GR*. Springer International Publishing, 2020. Manoukian, E. B.

Na figura-2 está representado as linhas do campo gravitacional (a) sem o efeito Lense-Thirring e (b) com o efeito Lense-Thirring previsto pela RG, onde vemos linhas de campo gravitacional distorcidas pelo efeito de arrasto, provocado por um objeto massivo em rotação, ao centro, que distorce e arrasta o espaço-tempo ao seu redor [324]. O coeficiente de arrasto é definido como a razão entre a velocidade angular de uma massa em rotação e a velocidade angular do referencial sob efeito da força de Coriolis [325]. O princípio subjacente das forças de Coriolis é o efeito de arrasto de referenciais, que surgem perto de um corpo em rotação, num referencial fixo às estrelas distantes. A precessão de giroscópios é um evento descrito pelo efeito de arrasto de um sistema de eixos submetidos ao transporte de Fermi-Walker, realizado fisicamente pelos vetores de spin de um conjunto de giroscópios orientadores [326]. Portanto, sendo todos esses efeitos atribuídos à ação de um campo de Coriolis ou de um campo gravitomagnético, gerado pelo movimento de uma fonte massiva [327]. Logo, as previsões relativas aos efeitos de arrasto de referencial gravitomagnético ocorrem entre o campo magnético e o campo relativístico de Coriolis, mais conhecidas em aproximações de campo fraco, mas com versões exatas mantidas em campos arbitrariamente fortes [328]. O arrasto de referenciais provocado pela rotação de um corpo imerso num fluido foi inicialmente proposto em [329], como modelo de estudo de outros efeitos de arrasto de referenciais [330].

Na análise da equação (4.53), percebe-se que o termo entre parênteses é o resultado decorrente do termo em primeira ordem de $\beta(*RR)^2$, contido na ação do nosso modelo. O primeiro termo, $\frac{J}{r^3}$, é a contribuição do efeito de arrasto de referenciais (*frame-dragging*) vindo da RG. Observe que o segundo termo entre parênteses em (4.53) é proporcional a r^{-11} . Consequentemente, este termo é insignificante para valores grandes de r . Neste caso, no limite assintótico para $r \gg 1$, recupera-se RG, como esperado, mais o termo proporcional a função $h(\theta)$, que surge da correção em primeira ordem do parâmetro $L = \beta M^2$.

4.3 Esquema Perturbativo para Métricas Tipo-Gödel ST-Homogêneas

4.3.1 Modelo $f_I = R + \beta(*RR)^2$

Nesta seção, dentro do modelo $f_I(R, *RR) = R + \beta(*RR)^2$, examinaremos a possibilidade da quebra da homogeneidade espaço-temporal para as métricas do tipo-Gödel³, apresentadas na Seção-2.2.3. Para tanto, introduziremos uma abordagem perturbativa, que será discutida em detalhes. Neste processo, substituiremos diretamente as métricas perturbadas nas equações de campo, com o fim de encontrarmos as soluções completas até a primeira ordem no parâmetro da perturbação ξ . Seguiremos o mesmo esquema empregado em [331], onde perturbações de métricas do tipo-Gödel foram consideradas dentro da gravidade modificada de Chern-Simons não-dinâmica. Esta abordagem perturbativa tem a característica de aplicar funções perturbadas estacionárias e, como consequência, funções que dependem apenas das coordenadas (r, θ, z) . Observa-se que a dependência explícita em θ e z sinaliza a possibilidade de quebra de invariância de ambas as translações, ao longo da direção z e simetria axial. Como resultado, as métricas do tipo-Gödel perturbadas não mais possuem homogeneidade espaço-temporal. Neste procedimento, para uma assinatura $+2$, fixaremos as métricas de fundo do tipo Gödel a serem denotadas por $g_{\mu\nu}^{(0)}$, cujo elemento de linha é dado por (2.21), enquanto as correções métricas de primeira ordem são representadas por $\xi g_{\mu\nu}^{(1)}$

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)} + \xi g_{\mu\nu}^{(1)} + \mathcal{O}(\xi^2), \quad (4.54)$$

com seu elemento de linha até a primeira ordem em ξ

$$ds^2 = - \{ [1 + \xi h_0(r, \theta, z)] dt + [1 + \xi h_1(r, \theta, z)] H(r) d\theta \}^2 + [1 + \xi h_2(r, \theta, z)] D(r)^2 d\theta^2 + [1 + \xi h_3(r, \theta, z)] dr^2 + [1 + \xi h_4(r, \theta, z)] dz^2, \quad (4.55)$$

onde $h_{i's}(r, \theta, z)$ representam as funções métricas perturbadas $g_{\mu\nu}^{(1)}$. Como pode ser visto na métrica perturbada (4.55), estamos restringindo nossa análise a perturbações métricas para as quais $g_{\mu\nu}^{(1)} = 0$ para todos os componentes fora da diagonal nesta base de coordenadas, exceto para $g_{t\theta}^{(1)}$. Isso reflete a estrutura da métrica de fundo $g_{\mu\nu}^{(0)}$, cujos únicos componentes diferentes de zero são $g_{t\theta}^{(0)}$ e os outros $g_{\mu\nu}^{(0)}$ com $\mu = \nu$. O termo de Chern-Pontryagin para a métrica perturbada (4.55) até primeira ordem em ξ é dado por

$$\begin{aligned} *RR = 4\xi(m^2 - 4\omega^2) & \left[2\omega \frac{\partial}{\partial z} h_0(r, \theta, z) + 2\omega \frac{\partial}{\partial z} h_1(r, \theta, z) + \omega \frac{\partial}{\partial z} h_2(r, \theta, z) \right. \\ & \left. - \omega \frac{\partial}{\partial z} h_3(r, \theta, z) + \frac{H(r)}{D(r)} \frac{\partial^2}{\partial z \partial r} h_1(r, \theta, z) - \frac{H(r)}{D(r)} \frac{\partial^2}{\partial z \partial r} h_0(r, \theta, z) \right]. \end{aligned} \quad (4.56)$$

³ Como dito na Seção-2.2.3, as métricas do tipo-Gödel se referem às métricas do tipo-Gödel homogêneas no espaço-tempo. Como descritas naquela seção, elas são uma generalização da métrica de Gödel, que permitem a existência de CTCs para certos valores de seus parâmetros.

Com uma simples manipulação, a equação anterior pode ser definida de forma mais conveniente, a saber,

$${}^*RR = 4\xi(m^2 - 4\omega^2) \left(\frac{H(r)}{D(r)} \frac{\partial^2}{\partial z \partial r} P(r, \theta, z) + \omega \frac{\partial}{\partial z} Q(r, \theta, z) \right), \quad (4.57)$$

onde

$$P(r, \theta, z) \equiv h_1(r, \theta, z) - h_0(r, \theta, z); \quad (4.58)$$

$$Q(r, \theta, z) \equiv 2[h_0(r, \theta, z) + h_1(r, \theta, z)] + h_2(r, \theta, z) - h_3(r, \theta, z). \quad (4.59)$$

Agora, resolveremos a equação de Einstein modificada perturbada de primeira ordem (4.7) para o modelo particular $f_I(R, {}^*RR) = R + \beta({}^*RR)^2$. Para começar, vamos considerar a componente- (t, z)

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \theta} h_1(r, \theta, z) - \frac{\partial^2}{\partial z \partial \theta} h_0(r, \theta, z) = 0, \quad (4.60)$$

o que implica $h_0(r, \theta, z) = h_1(r, \theta, z)$. Seguindo o mesmo procedimento, a componente- (θ, z)

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \theta} h_3(r, \theta, z) + 2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \theta} h_1(r, \theta, z) = 0, \quad (4.61)$$

leva à equação de restrição $h_3(r, \theta, z) = -2h_1(r, \theta, z)$. Impondo esta última restrição, encontramos a seguinte componente- (t, r) das equações de Einstein modificadas, ou seja,

$$\begin{aligned} & \left(8 \frac{\partial}{\partial \theta} h_1(r, \theta, z) - \frac{\partial}{\partial \theta} h_2(r, \theta, z) \right) + \\ & 16(4\omega^2 - m^2)^2 \left(6 \frac{\partial^3}{\partial z^2 \partial \theta} h_1(r, \theta, z) - \frac{\partial^3}{\partial z^2 \partial \theta} h_2(r, \theta, z) \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Exigindo $m^2 \neq 4\omega^2$, descobrimos que a única solução é a trivial,

$$h_1(r, \theta, z) = h_2(r, \theta, z) = h_3(r, \theta, z) = 0. \quad (4.63)$$

Deve-se perceber que as Eqs.(4.60), (4.61) e (4.62) são automaticamente satisfeitas considerando perturbações métricas específicas que dependem somente das coordenadas (r, θ) ou (r, z) . Contribuindo assim para a existência de dois casos particulares. O primeiro caso, $h_i(r, \theta, z) = h_i(r, \theta)$, revela a situação física onde as perturbações métricas preservam a simetria axial ao longo da direção z . Este cenário se evidencia trivial, pois leva ao desaparecimento do termo de Chern-Pontryagin (4.56), que por sua vez resulta no desaparecimento do tensor C , assim forçando as equações de campo serem reduzidas às equações da RG. Quanto ao segundo caso, teremos $h_i(r, \theta, z) = h_i(r, z)$, que reflete a situação em que as perturbações métricas quebram a simetria axial ao longo da direção z .

Esta condição requer uma inspeção mais cuidadosa das equações de campo resultantes. Em particular, a componente- (r, z) das equações modificadas de Einstein é dada por

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial z} h_2(r, z) \frac{dD(r)}{dr} - \frac{\partial}{\partial z} h_3(r, z) \frac{dD(r)}{dr} + 2\omega H(r) \frac{\partial}{\partial z} h_0(r, z) - 2\omega H(r) \frac{\partial}{\partial z} h_1(r, z) + \\ & + 2D(r) \frac{\partial^2}{\partial z \partial r} h_0(r, z) + D(r) \frac{\partial^2}{\partial z \partial r} h_2(r, z) = 0, \end{aligned} \quad (4.64)$$

que impondo as seguintes relações entre as funções métricas perturbadas,

$$h_0(r, z) = h_1(r, z) = -\frac{1}{2}h_2(r, z) = -\frac{1}{2}h_3(r, z), \quad (4.65)$$

uma solução particular é encontrada para a componente- zz

$$2h_1(r, z)(m^2 - 3\omega^2) = 0, \quad (4.66)$$

sendo esta uma equação algébrica cuja única solução não trivial é $h_1(r, z) = 0$. Assim, conclui-se que o modelo particular generalizado de Pontryagin $f_I(R, *RR) = R + \beta(*RR)^2$ não suporta perturbações de primeira ordem para as métricas tipo-Gödel. Em contraste, a gravidade modificada de Chern-Simons exibe contribuições em primeira ordem não triviais, conforme demonstrado em [331]. Neste artigo, a teoria perturbada permitiu quebrar a simetria axial e a invariância translacional ao longo da direção z , nas métricas tipo-Gödel. Foi permitida também a perturbação em primeira ordem para o campo pseudoescalar de CS, $\phi = \phi(r, \theta, z)$, embora a restrição de Pontryagin produziu relações não triviais entre as funções métricas perturbadas $h_i(r, \theta, z)$, que não envolveram as perturbações para o campo ϕ .

4.3.2 Modelo $f_{II} = R + \alpha R^2 + \beta(*RR)^2$

Outro exemplo importante a considerar é uma generalização do modelo Starobinsky, que corresponde a tomarmos $f_{II}(R, *RR) = R + \alpha R^2 + \beta(*RR)^2$. Nesta situação procederemos de forma semelhante ao caso anterior para resolver as equações de campo. No entanto, devido à presença de termos de derivadas de ordem superior, as equações de campo são de difíceis resoluções. Por consequência disto, iremos impor uma simplificação. Em particular, consideraremos apenas funções métricas perturbadas que não dependem explicitamente da coordenada θ , ou seja, $h_i(r, \theta, z) = h_i(r, z)$. Lembrando que a escolha $h_i(r, \theta, z) = h_i(r, \theta)$ não é bem motivada, porque as correções de Chern-Pontryagin desaparecem, conforme explicado anteriormente. Para começar, consideraremos a componente- (r, z) das equações de campo

$$\begin{aligned}
& \left[-2D(r)h_2(r''', z') - 4D(r)h_0(r''', z') - 4h_2(r'', z')D(r') - 4h_0(r', z')D(r'') \right. \\
& - 4h_0(r'', z')D(r') - 2D(r)h_2(r', z''') + 2h_3(r', z')D(r'') + 2h_3(r'', z')D(r') \\
& - 4D(r)h_0(r', z''') - 2D(r)h_3(r', z''') - 4h_2(r', z')D(r'') + 4D(r)h_0(r', z')(\ln(D(r')))^2 \\
& - 4\omega H(r)h_1(r', z')\ln D(r') + 8\omega^2 D(r)h_1(r', z')' - 4\omega H(r')h_0(r', z') - 2m^2 h_2(r, z')D(r') \\
& - 4\omega^3 H(r)h_1(r, z') + 28\omega^2 D(r)h_0(r', z') - 2\omega^2 h_3(r, z')D(r') + 4\omega^3 H(r)h_0(r, z') \\
& - 4\omega H(r)h_0(r'', z') + 2m^2 h_3(r, z')D(r') - 14m^2 D(r)h_2(r', z') + 2\omega^2 h_2(r, z')D(r') \\
& + 4\omega H(r)h_0(r', z')\ln D(r') - 4\omega m^2 H(r)h_0(r, z') + 4\omega m^2 H(r)h_1(r, z') \\
& - 2h_3(r', z')(\ln D(r'))^2 D(r) + 4h_2(r', z')(\ln D(r'))^2 D(r) + 10\omega^2 D(r)h_2(r', z') \\
& - 8D(r)m^2 h_3(r', z') + 8\omega^2 D(r)h_3(r', z') + 4\omega H(r')h_1(r', z') - 28m^2 D(r)h_0(r', z') \\
& \left. + 4\omega H(r)h_1(r'', z') \right] \alpha + \omega H(r)h_1(r, z') + \frac{1}{2}h_3(r, z')D(r') - \frac{1}{2}h_2(r, z')D(r') \\
& - h_0(r', z')D(r) - \omega H(r)h_0(r, z') - \frac{1}{2}h_2(r', z')D(r) = 0.
\end{aligned} \tag{4.67}$$

Para fins de simplificar a notação da extensa equação (4.67), foi utilizado na equação acima a representação compacta para as expressões das derivadas parciais

$$\mathbf{f}(x'_1, \dots, x'_m) \equiv \frac{\partial^n f(x_1 \dots, x_m)}{\partial^i x_1 \dots \partial^j x_m}, \tag{4.68}$$

onde \mathbf{f} representa as funções métricas perturbadas $h_i(r, z)$, e as funções arbitrárias das métricas tipo-Gödel $H(r)$ e $D(r)$, e $n = (i + \dots + j)$ é a soma das ordens das derivadas parciais que é retratada pela quantidade dos símbolos prime ('). Observe que (4.67) é uma equação diferencial parcial (EDP) contendo termos de derivadas de ordem superior. A relação particular entre as funções métricas perturbadas, que resolve a Eq.(4.67), são

$$\begin{aligned}
h_0(r, z) &= h_1(r, z) = F(r) + G(z); \\
h_2(r, z) &= h_3(r, z) = -2h_1(r, z).
\end{aligned} \tag{4.69}$$

Embora tenhamos obtido uma solução simples para a componente- (r, z) , esta solução não satisfaz as outras componentes das equações de campo. Na verdade, a conclusão mais natural é que as equações de campo apresentam um conjunto altamente restritivo de EDPs, cuja única solução possível é a trivial, ou seja,

$$h_0(r, z) = h_1(r, z) = h_2(r, z) = h_3(r, z) = 0. \tag{4.70}$$

Portanto, conclui-se que ao impor a quebra de simetria axial ao longo da direção z , o modelo $f_{II}(R, *RR) = R + \alpha R^2 + \beta(*RR)^2$ não suporta perturbações de primeira ordem das métricas tipo-Gödel.

5 Teoria de Campo Espinorial Não-Local no Espaço de Minkowski

5.1 Modelo de Campo Spin-1/2 Não-Local Livre

Neste capítulo, apresentaremos a construção de um novo e consistente modelo de campo de espinor de Dirac não-local, livre e com interação. Na teoria, a implantação da não localidade no setor fermiônico é concebida por meio de fatores de forma definidos como funções do operador Dirac $\not{\partial}$, em vez de fatores de forma gerados por funções do operador d'Alembertiano \square , como normalmente ocorre nas demais teorias não-locais de spin-1/2 discutidas na literatura. Destaca-se, as teorias de espinores não-locais não são bem exploradas, por serem poucas as tentativas de construções modificadas do Lagrangiano não-local do campo de Dirac, expostas na literatura. Em particular, o autor de [332] propôs uma teoria da QED e eletrofraca, na qual foram consideradas extensões não-locais no setor fermiônico. E, extensões não-locais das teorias de gauge finitas (não)abelianas, em [333]. Nesses dois trabalhos, os autores consideraram o fator de forma como sendo uma função do operador de d'Alembert, que parece não ser adequado para descrever uma teoria de campo de spin-1/2 não-local, uma vez que o Lagrangiano de Dirac depende apenas das derivadas de primeira ordem, através do operador de Dirac. Logo, o processo mais natural para se construir uma teoria de campo de spin-1/2 não-local deveria estar fundamentada no operador de Dirac ao invés do operador de d'Alembert. À vista disso, para fundamentar os conceitos da nova teoria que será apresentada, se faz necessário apresentarmos a abordagem não-local aplicada às teorias construídas com Lagrangianos elaborados com fatores de forma compostos por função do operador d'Alembertiano.

5.1.1 Fator de Forma do Operador d'Alembertiano $F(\square)$

Como discutido anteriormente na Seção-3.4, as teorias locais têm seus Lagrangianos construídos em termos de polinômios de campos e de suas derivadas, $\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(\phi, \partial\phi, \dots, \partial^n\phi)$, que descrevem observáveis de baixas energias, onde n é um número inteiro positivo e finito. Em contrapartida, as teorias não-locais, como, por exemplo, TQC não-comutativa, teorias de cordas e as teorias de campos conforme, contêm em si a abordagem de múltiplos campos avaliados em diferentes pontos de espaço-tempo. Neste caso, o Lagrangiano é construído com operadores não polinomiais $F(\square)$, contendo em si derivadas covariantes de ordem infinita, $\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(\phi, \partial\phi, \dots, \partial^n\phi, F(\square)\phi)$. Destarte, o conceito da não localidade pode ser implementado na dinâmica das teorias de campos, ao nível da ação clássica, visando resolver dificuldades fundamentais da gravitação de Einstein [334]. Na verdade, é

notório que uma apropriada extensão não-local da gravitação de Einstein permite resolver os problemas da não renormalização e dos indesejáveis estados de excitação fantasmagórica. Isto se deve ao ótimo comportamento assintótico UV dos correspondentes propagadores, os seus específicos desempenhos com respeito a variável de momento [335]. De maneira geral, isto é realizado mediante a substituição, no Lagrangiano, do operador d'Alembertiano \square por uma função analítica transcendental deste operador de d'Alembert, $F(\square)$, batizada de fator de forma. A representação mais simples de $F(\square)$ é dada pela função exponencial do tipo $e^{f(\square)}$, com $f(\square)$ também sendo uma função inteira analítica. Formalmente, pelo teorema da fatoração de Weierstrass (ver demonstração no Apêndice-B.3), uma função inteira pode ser expressa como uma série de potências de seu argumento. Em particular, temos

$$F(\square) = e^{f(\square_\Lambda)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \square_\Lambda^n, \quad (5.1)$$

onde c_n são os coeficientes adimensionais da série de potências, satisfazendo a condição de $c_0 = 1$, e sendo definido $\square_\Lambda \equiv \square/\Lambda^2$. Aqui, introduzimos Λ , que representa uma escala típica de alta energia, como a escala de Planck, na qual os efeitos não-locais se tornam relevantes. Tal escala, também, torna $f(\square_\Lambda)$ uma função adimensional. À medida que nos aproximemos da escala Λ , queremos dizer $\mathcal{O}(\square/\Lambda^2) \rightarrow 1$, então o regime UV é alcançado. Por outro lado, o regime IR é alcançado quando $\Lambda \rightarrow \infty$ e/ou quando integrando em pequenos momentos, $k \rightarrow 0$. Deste modo, a ação não-local passa a ser

$$S = \int d^4x_1 \left[\frac{1}{2} \phi(x_1) F(\square) \phi(x_1) - V(\phi(x_1)) \right], \quad (5.2)$$

onde $\phi(x_1)$ é o campo escalar dependente das coordenadas em x_1 . Variando a ação (5.2) com respeito ao campo, $\delta S/\delta \phi(x_1) = 0$, obteremos a equação de movimento

$$F(\square) \phi(x_1) - \frac{dV}{d\phi(x_1)} = 0. \quad (5.3)$$

A propriedade da não localidade no termo cinético da ação (5.2) fica notória quando fizermos a seguinte manipulação

$$\begin{aligned} F(\square) \phi(x_1) &= \int d^4k F(-k^2) \delta^{(4)}(k^\mu - i\nabla^\mu) \phi(x_1) \\ &= \int d^4k \int d^4x_2 e^{-ix_2 \cdot k} K(x_2) \delta^{(4)}(k^\mu - i\nabla^\mu) \phi(x_1) \\ &= \int d^4x_2 K(x_2) e^{x_2 \cdot \nabla} \phi(x_1) \\ &= \int d^4x_2 K(x_2) \phi(x_1 + x_2) \\ &= \int d^4x_2 K(x_2 - x_1) \phi(x_2). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Na manipulação acima utilizamos a transformada de Fourier $F(-k^2)$ de $K(x_1 - x_2)$. Na última passagem aplicou-se a mudança de variável. Para o resultado final encontrado

em (5.4) também utilizamos a definição da função delta de Dirac

$$\delta^{(4)}(x_1 - x_2) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{ik \cdot (x_1 - x_2)}. \quad (5.5)$$

A Eq.5.4 revela que, em geral, qualquer função transcendental dos campos pode ser representada por integrais de kernel de operadores diferenciais. Para o caso de $F(\square) = \square^{-1}$, os efeitos não locais de longo alcance são contabilizados, podendo ser eles descritos em termos da função de Green

$$\square^{-1}\phi(x_1) = \int d^4 x_2 G(x_1, x_2)\phi(x_2). \quad (5.6)$$

Quando multiplicado pelo campo $\phi(x_1)$, teremos o resultado para o primeiro termo da ação (5.2)

$$\phi(x_1)F(\square)\phi(x_1) = \int d^4 x_2 \phi(x_1)K(x_2 - x_1)\phi(x_2). \quad (5.7)$$

A Eq.(5.7) relaciona dois campos escalares avaliados em dois pontos diferentes do espaço-tempo através do kernel de deslocalização $K(x_2 - x_1)$. A representação integral do fator de forma é válida para as teorias locais de altas derivadas. Nesta circunstância, o fator de forma é um polinômio finito e seus expoentes são números inteiros positivos [336]. Estranhamente, nota-se que qualquer termo cinético (5.7) pode ser formalmente considerado como uma interação não-local. Mas ele é somente obtido em situações muito especiais, sendo uma função do operador d'Alembertiano

$$K(x_2 - x_1) = F(\square)\delta^{(4)}(x_2 - x_1), \quad (5.8)$$

e como caso particular para $V = 0$ em (5.2), $F(\square)$ determina a relação de dispersão para a teoria de campo escalar não massivo, $F(-k^2) = -k^2 = 0$, cujo kernel é

$$K(x_1) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 k e^{-ik \cdot x_1} F(-k^2) = F(\square_{x_1})\delta^{(4)}(x_1). \quad (5.9)$$

Observa-se que a unitariedade da teoria é garantida pelo fato do fator de forma ser uma função completa do operador d'Alembertiano, evitando assim o surgimento dos conhecidos e inapropriados estados ditos fantasmas. Em vista disso, o propagador não inclui nenhum grau de liberdade adicional na teoria quando comparado com a teoria padrão/local. Aplicando o teorema de fatoração da Weierstrass em (5.8), o fator de forma produzirá a seguinte expressão

$$F(\square) = e^{-f(\square)} \prod_{i=1}^n (\square - m^2), \quad (5.10)$$

e por meio da transformada de Fourier, é possível mostrar que os *ghosts* aparecem quando $n > 1$. Para $n = 1$ e $f(\square) = \square/\Lambda^2$

$$F(\square) = e^{-\square/\Lambda^2} (\square - m^2), \quad (5.11)$$

o inverso de $F(\square)$ é o propagador nu, sendo ele, no espaço dos momentos, dado por

$$G = -\frac{e^{-k^2/\Lambda^2}}{k^2 + m^2}. \quad (5.12)$$

Como esperado, na expressão (5.12) existe apenas um polo real em $k^2 = -m^2$, sem a introdução de modos adicionais no espectro da teoria. Além disso, o comportamento UV da teoria pode ser melhorado escolhendo uma bem motivada função inteira $f(\square)$, sem introduzir graus de liberdade adicionais. Contudo, é importante notar que este requisito por si só não é suficiente para garantir a renormalizabilidade da teoria, conforme indicado na abordagem de supercampo, considerando a generalização do modelo Wess-Zumino em sua versão não-local [298]. Pois, para obtenção de uma teoria unitária deve-se aplicar de maneira apropriada o fator de forma não-local, que é escolhido de acordo com o interesse proposto pelo modelo em questão, podendo ser ele classificado como sendo fraco, forte e muito forte. No primeiro caso a não localidade é classificada como fraca quando o termo cinético (5.7) é uma função analítica do operador d'Alembertiano, então o fator de forma $F(\square)$ admite expansão regular em série de Taylor em torno do ponto $\square = z = 0$, no regime IR. Dentro desta classe de fatores de forma fracamente não-locais, podemos distinguir aqueles que são exponenciais em potências de \square , aqueles que são assintoticamente polinomiais no regime UV [337], e também os que são compostos por potências fracionárias de \square [338]. A gravidade quântica não-local é caracterizado por não localidade fraca e fatores de forma assintoticamente polinomiais, embora pode-se formular a gravidade quântica também com operadores em potências fracionárias [339].

Todavia, o regime forte da não localidade é obtido quando o fator de forma é do tipo \square^{-n} ($n = 1, 2, 3 \dots$) singular em $z = \square = 0$. No caso da não localidade ser classificada como sendo muito forte, o termo cinético (5.7) é composto pelo kernel não convertível para um operador derivativo $F(\square)$, ou seja, $F(\square)$ pode ser escrito formalmente, pois devido aos problemas de divergências da inversa da transformada de Fourier, $F(\square)$ não existe. Em geral, pode-se definir um operador não-local de duas maneiras ou representações diferentes: a representação integral ou representação em série [340]. Os fatores de forma fracamente não-locais admitem ambas as representações, embora possam dar resultados muito diferentes quando aplicados a certas funções sementes. Como exemplo, o operador não-local na representação em série de e^\square não converge, enquanto na representação integral dá-se uma resposta finita, no modelo cosmológico apresentado em [341].

Para o propósito de tornar a teoria quântica da gravidade renormalizável, foram apresentados os fatores de forma de Kuzmin e Tomboulis, assintoticamente polinomiais. E, também, os fatores de forma de Wataghin e Krasnikov [342], genericamente expressos

$$F(\square) = \frac{e^{f(\square)} - 1}{\square}, \quad (5.13)$$

com $f_w(\Box) = -\Box/\Lambda^2$ para Wataghin, e $f_k(\Box) = \Box^2/\Lambda^4$ para Krasnikov. O fator de forma (5.13) não introduz novos polos, logo, teremos apenas a existência do polo advindo do termo de Einstein-Hilbert (5.12). Ele permite não localidade fraca, pois \Box^{-1} é absorvido pelo termo no numerador de ordem \Box . Outros modelos foram criados com mecanismo de eliminação das singularidades clássicas, incluindo em $r = 0$, para uma fonte pontual de Schwarzschild, recuperando a RG quando avaliados para ordem zero desses termos não-locais [343]. Nestes modelos, os efeitos da não localidade passam a ser relevantes para $r < 2/M$, e quando o raio cresce, a solução se aproxima da solução de Schwarzschild. Sua ação não-local é

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \left(R - G_{\mu\nu} \frac{e^{f(-\Box)} - 1}{\Box} R^{\mu\nu} \right), \quad (5.14)$$

com suas respectivas equações de campo

$$G_{\mu\nu} + \mathcal{O}(R^2) = \kappa^2 e^{-f(-\Box)} T_{\mu\nu}^{(m)}, \quad (5.15)$$

onde $T_{\mu\nu}^{(m)}$ é o tensor energia-momento. Neste cenário, foi analisado perturbativamente uma extensão da gravidade de Stelle, envolvendo um número infinito de termos de derivadas, mas sem sofrer o problema da unitariedade devido à presença dos estados de norma negativa (fantasmas) na teoria [344]. Por extensão, investigou-se uma teoria da gravidade (super)renormalizável e livre de fantasmas, sob um ansatz do fator de forma exponencial, oferecendo uma justificativa teórica da origem inflacionária para um modelo cosmológico de Starobinsky [345]. Um modelo de universo acelerado, sem envolver qualquer contribuição da energia escura, com integral de kernel do inverso do operador d'Alembertiano \Box^{-1} , foi considerada em [346]. A seguir apresentaremos uma nova teoria não-local aplicada aos campos de espinores no espaço-tempo de Minkowski, construída com fatores de forma definidos como funções exponencias do operador de Dirac, não de d'Alembert.

5.1.2 Fator de Forma do Operador de Dirac $F(\gamma^\mu \partial_\mu)$

Como referenciado no início deste capítulo, a formulação de uma original teoria de campo de spin de Dirac não-local, que será aqui apresentada, tem a interessante proposta fundamentada na adoção de fatores de forma fabricados por meio de função do operador de Dirac. Convém ressaltar, a presente proposição se confirma ser mais coerente que as teorias espinoriais construídas através de fatores de forma do operador de d'Alembert, em razão do Lagrangiano de Dirac conter apenas termos de derivadas de primeira ordem. Com este conceito em mãos, exibiremos a recém-criada teoria de campo espinorial não-local, que será desenvolvida a partir da modificação do Lagrangiano da teoria, por meio da substituição do operador de Dirac $\not{\partial}$ pelo termo $\not{\partial}F(\not{\partial})$. Dessa maneira, a função inteira do operador de Dirac $F(\not{\partial})$ é o agente responsável pela implementação da propriedade da não localidade no Lagrangiano. Sabendo que a definição do operador de Dirac é $\not{\partial} \equiv \gamma^\mu \partial_\mu$,

onde γ^μ são as matrizes gama, que na representação padrão de Dirac será

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.16)$$

com $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$, onde σ_i são as matrizes de Pauli, bidimensionais, de traço nulo, complexas e hermitiana, que surgem na formulação da equação de Pauli, quando considera a interação do spin de uma partícula com um campo eletromagnético externo. Sendo elas explicitamente dadas por

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5.17)$$

Através da relação de anticomutação padrão, $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}\hat{I}_4$, definida da álgebra de Clifford¹ sobre um espaço pseudo-ortogonal quadridimensional com assinatura métrica -2 , alcançaremos facilmente a forma quadrática do operador de Dirac, expressa em termos do operador d'Alembertiano, $\not{\partial}^2 = \square\hat{I}$. Desta maneira, agora podemos iniciar o processo da construção de um genérico modelo de Lagrangiano livre de spin-1/2 não-local, no espaço de Minkowski, para $\hbar = c = 1$, dado por

$$\mathcal{L}_o = \frac{1}{2}\bar{\Psi}\left(i\overrightarrow{\not{\partial}}F(\not{\partial}) - m\right)\Psi - \frac{1}{2}\bar{\Psi}\left(i\overleftarrow{\not{\partial}}F(\not{\partial}) + m\right)\Psi, \quad (5.18)$$

onde $F(\not{\partial})$ é o fator de forma definido como uma função inteira do operador Dirac $\not{\partial}$. Variando a Eq.(5.18) em relação a $\bar{\Psi}$ e Ψ , obtém-se as respectivas equações não-locais de Dirac

$$\left(i\not{\partial}F(\not{\partial}) - m\right)\Psi = 0 \quad \text{e} \quad \bar{\Psi}\left(i\not{\partial}F(\not{\partial}) + m\right) = 0. \quad (5.19)$$

As equações (5.19) estão inter-relacionadas, sendo a última equação o conjugado hermitiano da primeira. Adotaremos o mesmo procedimento do caso padrão local de “evar ao quadrado” a primeira equação em (5.19). Assim, obteremos a equação não-local

$$\left(\not{\partial}^2 F^2(\not{\partial}) + m^2\right)\Psi = 0. \quad (5.20)$$

Esta equação (5.20) tem aparência da conhecida equação usual/local de Klein-Gordon², uma versão relativista da equação de Schrödinger que descreve partículas sem spin. A depender do fator de forma escolhido, a equação (5.20) não pode ser considerada

¹ A álgebra de Clifford representa um enorme avanço no desenvolvimento da teoria quântica. Esta álgebra específica empregada na equação de Dirac é conhecida hoje como álgebra de Dirac.

² A equação usual de Klein-Gordon não corresponde a uma densidade de probabilidade positivamente definida, e, além disso, é de segunda ordem na derivada temporal, o que impede uma interpretação física simples. Ela descreve uma partícula pontual que se propaga nos dois sentidos temporais e possui uma interpretação na teoria de antipartículas desenvolvida por Feynman e Stueckelberg.

como uma equação de Klein-Gordon não-local. Pois, cada componente do espinor de Dirac não satisfaz uma equação de Klein-Gordon não-local, como ocorre no caso local. Isso ocorre devido à presença de um termo adicional proporcional ao operador de Dirac livre, como será mostrado no final desta seção. O correspondente propagador deste modelo (5.20), será

$$\langle \Psi(-p)\Psi(p) \rangle = \frac{i}{\not{p}\tilde{F}(\not{p}) - m} = \frac{i(\not{p}\tilde{F}(\not{p}) + m)}{p^2\tilde{F}^2(\not{p}) - m^2}, \quad (5.21)$$

onde $\tilde{F}(\not{p})$ é a transformada de Fourier de $F(\not{\partial})$. Como já dito na Seção-5.1.1, $\tilde{F}(\not{p})$ é uma função inteira, que evita a presença de polos adicionais no propagador, isto é, uma função analítica em todo o plano complexo, por isso pode ser ela expandida como uma série de potências de seu argumento (ver demonstração no Apêndice-B.3). É digno de ser destacado, dessemelhançamente do caso usual, aqui no modelo proposto o fator de forma é uma matriz. E, em nosso caso particular, será:

$$F(\not{\partial}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \not{\partial}_{\Lambda}^n, \quad (5.22)$$

onde $\not{\partial}_{\Lambda} \equiv \frac{\not{\partial}}{\Lambda}$ é adimensional, c_n são os coeficientes (adimensionais) da série de potências, satisfazendo a condição $c_0 = 1$, e Λ é a escala típica de altas energias, como a escala de Planck. Agora é importante investigar o espectro do quadrado do operador local de Dirac. Para isso, definiremos λ^2 como sendo o autovalor do operador \square , ou seja, $\not{\partial}^2\Psi = \square\Psi = \lambda^2\Psi$. Então, multiplicando sucessivamente o lado esquerdo desta última equação pelo operador $\not{\partial}$, teremos $\not{\partial}^3\Psi = \not{\partial}\square\Psi = \lambda^2\not{\partial}\Psi$, $\not{\partial}^4\Psi = \lambda^2\not{\partial}^2\Psi = \lambda^4\not{\partial}\Psi$. E, após uma simples manipulação algébrica, conclui-se:

$$\not{\partial}^{2n}\Psi = \lambda^{2n}\Psi; \quad (5.23)$$

$$\not{\partial}^{2n+1}\Psi = \lambda^{2n}\not{\partial}\Psi, \quad (5.24)$$

onde $n \in \mathbb{N}$. Então, com o uso das equações (5.23), (5.24) e expandindo a função exponencial em termos de seno e cosseno, através da fórmula de Euler³, encontraremos o valor para o primeiro termo da equação “tipo” Klein-Gordon (5.20)

$$\not{\partial}^2 F^2(\not{\partial})\Psi = \square \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} \frac{\lambda^{2k}}{\Lambda^{2k}} \hat{I} + \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1} \frac{\lambda^{2k}}{\Lambda^{2k+1}} \not{\partial} \right) \Psi, \quad (5.25)$$

onde os c_{i_s} são os coeficientes da série de potências de $F^2(\not{\partial})$, com $c_0 = 1$. Por questões práticas em busca de resultados mais concretos, é essencial explicitar o aspecto do fator de forma. Em particular, consideraremos o seguinte fator de forma do tipo exponencial, a saber,

$$F_1(\not{\partial}) \equiv e^{-\frac{\not{\partial}}{\Lambda}}. \quad (5.26)$$

³ A fórmula de Euler oferece uma conexão entre a geometria e a álgebra, mostrando como a multiplicação complexa pode ser vista como uma rotação e um alongamento no plano complexo.

Neste caso, podemos reescrevê-lo em série de potências do operador de Dirac, ou seja,

$$F_1(\not{\partial}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n!} \frac{\not{\partial}^{2n}}{\Lambda^{2n}} - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)!} \frac{\not{\partial}^{2m+1}}{\Lambda^{2m+1}}. \quad (5.27)$$

Substituindo as Eqs.(5.23) e (5.24) na Eq.(5.27). E, quando esta equação é aplicada ao campo espinorial, $F_1(\not{\partial})\Psi$, encontraremos

$$\begin{aligned} F_1(\not{\partial}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2n}}{(2n)! \Lambda^{2n}} \hat{I} - \frac{1}{\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2m+1}}{(2m+1)! \Lambda^{2m+1}} \not{\partial} \\ &= \cosh\left(\frac{\lambda}{\Lambda}\right) \hat{I} - \frac{1}{\lambda} \sinh\left(\frac{\lambda}{\Lambda}\right) \not{\partial}, \end{aligned} \quad (5.28)$$

e, como consequência, $F_1^2(\not{\partial})\Psi$, teremos

$$F_1^2(\not{\partial}) = \cosh\left(\frac{2\lambda}{\Lambda}\right) \hat{I} - \frac{1}{\lambda} \sinh\left(\frac{2\lambda}{\Lambda}\right) \not{\partial}. \quad (5.29)$$

Escolhido um outro fator de forma, ligeiramente diferente de (5.26), $F_2(\not{\partial}) \equiv e^{-i\frac{\not{\partial}}{\Lambda}}$, para o mesmo procedimento adotado anteriormente, obteremos facilmente o seguinte resultado

$$F_2^2(\not{\partial}) = \cos\left(\frac{2\lambda}{\Lambda}\right) \hat{I} - \frac{i}{\lambda} \sin\left(\frac{2\lambda}{\Lambda}\right) \not{\partial}. \quad (5.30)$$

Assim, para os dois fatores de forma escolhidos, a equação do tipo Klein-Gordon não-local (5.20) pode ser expressa de uma forma mais compacta, a saber,

$$\left(\square F_i^2(\not{\partial}) + m^2\right)\Psi = 0, \quad \text{para } (i = 1, 2). \quad (5.31)$$

É de fácil verificação que ao tomarmos o limite $\Lambda \rightarrow \infty$ na Eq.(5.31), o termo proporcional ao operador de Dirac desaparece, ou seja, $F_1^2 = F_2^2 = 1$, assim sendo, o caso local é recuperado. Nota-se o fato de que, apesar da semelhança com a equação de Klein-Gordon usual (local), a Eq.(5.31) não é uma equação de Klein-Gordon não-local. Isso acontece devido à presença do operador de Dirac $\not{\partial}$ nas equações (5.29) e (5.30). Portanto, cada componente espinor deve cumprir uma equação mais complexa do que a equação de Klein-Gordon não-local. Da Eq.(5.22), podemos definir $f_1(\square)$ e $f_2(\square)$

$$\begin{aligned} \not{\partial} F(\not{\partial}) &= \not{\partial} \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} \partial^{2n} + \not{\partial} \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m+1} \partial^{2m+1} \\ &= \underbrace{\not{\partial} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_{2n} \frac{\square^n}{\Lambda^{2n}}}_{f_1(\square)} + \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+1} c_{2m+1} \frac{\square^{m+1}}{\Lambda^{2m+1}}}_{f_2(\square)}, \end{aligned} \quad (5.32)$$

que substituindo (5.32) na primeira equação de (5.19), teremos

$$\left[i\not{\partial} f_1(\square) - m + i f_2(\square)\right]\Psi = 0, \quad (5.33)$$

onde $\not{f}_1(\square)$ é um operador matricial não-diagonal, que contém somente termos de derivadas de ordem ímpar, sendo ele coincidente com termos cinéticos propostos em outras teorias de campos não-locais. Em contrapartida, $f_2(\square)$ é um operador matricial diagonal, que contém só termos de derivadas de ordem par, sem analogia a outros termos cinéticos propostos na literatura.

5.1.3 Relação de Dispersão da Teoria Livre de Spin-1/2 Não-Local

A relação de dispersão é frequentemente expressa como uma relação entre a energia e o momento de uma onda/partícula, ou equivalentemente, entre a frequência e comprimento de onda. Em meios dispersivos, diferentes frequências de uma onda podem viajar em velocidades diferentes, a velocidade do grupo pode diferir da velocidade da fase. Por exemplo, na dinâmica dos fluidos, os diferentes comprimentos de ondas que se propagam na superfície da água viajam com diferentes velocidades de fase. Tendo a gravidade e a tensão superficial como forças restauradoras, a água com superfície livre é geralmente considerada um meio dispersivo [347]. Na TQC, foram questionadas as propriedades das funções de 2 pontos, do ponto de vista das representação espectral de Källén-Lehmann e de dispersão geral, onde a estrutura analítica das funções de pontos na teoria das perturbações foi analisada através das equações de Landau e das regras de Cutkosky [348]. Em outro cenário, foi demonstrado a equivalência lógica da causalidade estrita⁴ e da validade de uma relação de dispersão que expressa a parte real de uma amplitude de espalhamento generalizada como uma integral envolvendo sua parte imaginária [349]. Por outro lado, mostrou-se que as relações de dispersão por si só não podem garantir causalidade, por motivo das superposições lineares de ondas planas envolverem uma relação de dispersão de valor único e covariantemente estável $\omega(k)$, sempre se propagando fora do cone de luz, a menos que $\omega(k) = a + bk$. Isto implica que não há noção de causalidade para relações de dispersão individuais, uma vez que a condição matemática da função $\omega(k)$ (com as condições de velocidade de grupo assintótica) não podem servir de condição suficiente para a propagação subluminal em meio dispersivo [350].

Nesta seção, analisaremos a relação de dispersão para o nosso modelo, para tanto, iniciaremos expondo a solução de (5.31), sabendo ser ela dada por uma superposição de ondas planas,

$$\Psi(x) = \int d^4p e^{-ip_\mu x^\mu} \tilde{\Psi}(p), \quad (5.34)$$

onde $\tilde{\Psi}(p)$ é a transformada de Fourier do espinor $\Psi(x)$, e satisfaz a equação de Dirac não-local, no espaço dos momentos

$$\left(p^2 \tilde{F}^2(\not{p}) + m^2\right) \tilde{\Psi} = 0, \quad (5.35)$$

⁴ Relação entre um evento causal A e um segundo evento B (o efeito), estabelecido a velocidade da luz como o limite máximo para a propagação de informação ou matéria.

onde $\tilde{F}(\not{p})$ é a transformada de Fourier dos operadores não-locais (5.29) e (5.30). Soluções não triviais da equação anterior são obtidas exigindo que o determinante da matriz seja nulo $\det S = 0$, onde $S \equiv p^2 \tilde{F}^2(\not{p}) + m^2 \hat{I}$. Desta maneira, reescreveremos o fator de forma (5.29) em função dos operadores não-locais \hat{a}_1 e \hat{a}_2

$$F^2(\not{\theta}) = (\hat{a}_1 \hat{I} + \hat{a}_2 \not{\theta}), \quad (5.36)$$

sendo \hat{a}_1 e \hat{a}_2 obtidos de modo direto por comparação com (5.25) e (5.29)

$$\hat{a}_1 = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} \frac{\lambda^{2k}}{\Lambda^{2k}} = \cosh\left(\frac{2\lambda}{\Lambda}\right), \quad \text{e} \quad \hat{a}_2 = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1} \frac{\lambda^{2k}}{\Lambda^{2k+1}} = -\frac{1}{\lambda} \sinh\left(\frac{2\lambda}{\Lambda}\right), \quad (5.37)$$

sendo estes operadores não-locais definidos no espaço das coordenadas como funções não polinomiais do operador d'Alembertiano, $\hat{a}_1(\square)$ e $\hat{a}_2(\square)$, e quando definidos no espaço dos momentos, serão eles $\hat{b}_1 = \hat{a}_1(p)$ e $\hat{b}_2 = \hat{a}_2(p)$. Desse modo, com o intuito de obter a relação de dispersão não-local explicitamente, teremos

$$\begin{aligned} \det S &= \det \left[p^2 \tilde{F}^2(\not{p}) + m^2 \hat{I} \right] = \det \left[(p^2 \hat{b}_1 + m^2) \hat{I} + p^2 \hat{b}_2 i \not{p} \right] \\ &= \det \left[(p^2 \hat{b}_1 + m^2) \hat{I} \right] \times \det \left[\hat{I} + \frac{p^2 \hat{b}_2 i \not{p}}{p^2 \hat{b}_1 + m^2} \right] \\ &= (p^2 \hat{b}_1 + m^2)^4 \times \det \left[\hat{I} + \frac{p^2 \hat{b}_2 i \not{p}}{p^2 \hat{b}_1 + m^2} \right], \end{aligned} \quad (5.38)$$

onde realizaremos a expansão em séries de potências do termo do determinante, pois a sua solução analítica é de difícil manipulação algébrica. E sabendo que apenas as combinações pares das matrizes gama produzem um traço não trivial, teremos

$$\begin{aligned} \det \left[\hat{I} + \frac{p^2 \hat{b}_2 i \not{p}}{p^2 \hat{b}_1 + m^2} \right] &= e^{\left(\text{Tr} \ln \left[\hat{I} + \frac{p^2 \hat{b}_2 i \not{p}}{p^2 \hat{b}_1 + m^2} \right] \right)} = e^{\left(\text{Tr} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left[\frac{p^2 \hat{b}_2 i \not{p}}{p^2 \hat{b}_1 + m^2} \right]^n \right)} \\ &= e^{\left(-\frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left[\left(\frac{p^2 \hat{b}_2}{p^2 \hat{b}_1 + m^2} \right)^2 p^2 \right]^k \hat{I} \right\} \right)} \\ &= e^{\left(\ln \left[1 - \left(\frac{p^3 \hat{b}_2}{p^2 \hat{b}_1 + m^2} \right)^2 \right] \right)} \\ &= \left[1 - \left(\frac{p^3 \hat{b}_2}{p^2 \hat{b}_1 + m^2} \right)^2 \right]^2. \end{aligned} \quad (5.39)$$

A relação final em (5.38) implica na relação de dispersão

$$p^2 \hat{b}_1 + m^2 = \pm p^3 \hat{b}_2. \quad (5.40)$$

A relação de dispersão (5.40) é obviamente não polinomial, uma vez que \hat{b}_1 e \hat{b}_2 são coeficientes não-locais definidos no espaço dos momentos. Em vista disso, não se pode

garantir soluções analíticas para tal relação, embora existam soluções para alguns casos especiais. Por questão de ilustração, consideraremos os coeficientes não-locais dados por (5.37), definidos na representação dos momentos. Neste caso, a relação de dispersão se reduz a

$$|p|^2 e^{\pm \frac{2|p|}{\Lambda}} = m^2, \quad (5.41)$$

onde $E^2 = |p|^2 + |\vec{p}|^2$. Como esperado da relação não-local (5.41), no seu limite $\Lambda \rightarrow \infty$, recupera-se a relação de dispersão padrão (local). Além disso, (5.41) é uma equação transcendental de Lambert, e apresenta soluções analíticas dadas por

$$|p| = \Lambda W_0 \left(\frac{m}{\Lambda} \right), \quad (5.42)$$

onde $W_0(z)$ é o ramo principal da função $W(z)$ de Lambert, também chamada de função ômega ou logaritmo do produto, que é uma função transcendental complexa de múltiplos valores, definida como o inverso de $f(z) = z e^z$, com $z \in \mathbb{C}$. Essas funções possuem um número infinito de ramos $W_k(z)$, onde $k \in \mathbb{Z}$ [351].

Porém, como estamos interessados apenas em soluções reais, podemos avaliar os resultados para os dois ramos possíveis, a saber: $W_0(z)$ definido no intervalo $z \geq -e^{-1}$ e $W_{-1}(z)$ definido no intervalo $0 > z \geq -e^{-1}$. No entanto, restringiremos nossa solução ao ramo principal porque o ramo inferior, $W_{-1}(z)$, não está bem definido em $z = 0$. Portanto, garante que $|p|$ e m^2 sejam positivos, como deve ser. Na Fig.(3), traçamos o comportamento da solução da Eq.(5.42), $|p|$ em função de Λ , para três diferentes valores da massa: $m = 1$ (linha azul), $m = 2$ (linha amarela) e $m = 3$ (linha verde). Vale ressaltar que à medida que Λ cresce, $|p|$ se aproxima de m , recuperando o resultado padrão, conforme esperado. Desta maneira, observa-se que ao expandir a relação de dispersão (5.42) em torno de $\Lambda \rightarrow \infty$, produzirá

$$E^2 = |\vec{p}|^2 + m^2 - \frac{2m^3}{\Lambda} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\Lambda^2} \right). \quad (5.43)$$

Esta equação exibe a correção de primeira ordem devido aos efeitos não-locais, que permanece invariante sob transformações de paridade: $E \rightarrow -E$ e $|\vec{p}| \rightarrow -|\vec{p}|$, diferentemente dos modelos de quebra de simetria de Lorentz cujas relações de dispersão quebram espontaneamente as transformações de paridade [352, 353, 354]. um caso interessante seria considerar os dois termos de massa na Eq.(5.43) como sendo um único termo de uma certa massa efetiva, que resultaria dos efeitos não-locais. Em última análise, a Eq.(5.43) revela que nossos resultados estão de acordo com modelos fenomenológicos da gravidade quântica, nos quais a relação de dispersão padrão é modificada pela inclusão de termos de escala típica de altas energias (como a escala de Planck), que são suprimidos no regime IR [355, 356, 243].

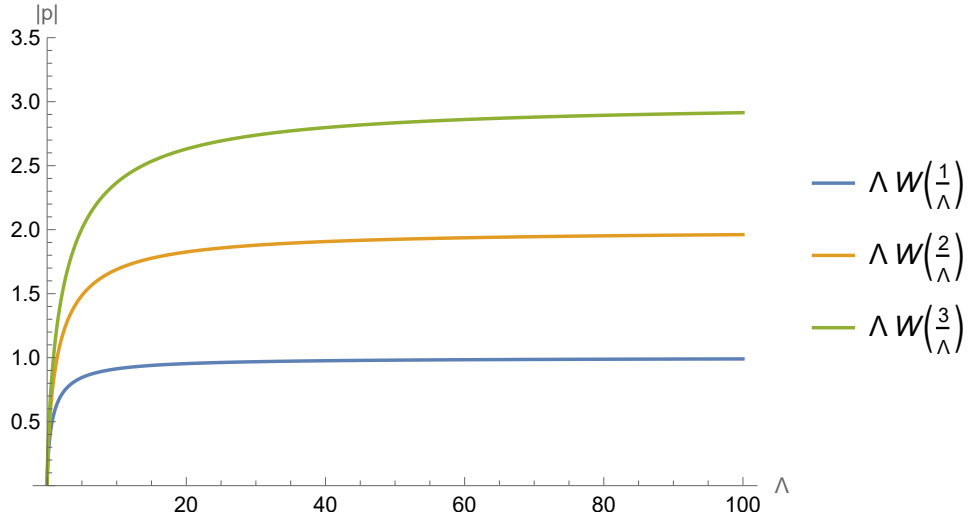


Figura 3 – Gráficos da relação de dispersão não-local dada pela Eq.(5.42) para diferentes valores de massa: $m = 1$ (linha azul), $m = 2$ (linha amarela) e $m = 3$ (linha verde).

5.2 Modelo de Campo Spin-1/2 Não-Local Acoplada

5.2.1 Interação de Yukawa

Para resolver o problema da interação nêutron-próton, em 1935, Hideki Yukawa (1907—1981) combina a ideia de Heisenberg da interação de forças de curto alcance, entre partículas dentro do núcleo, com a ideia de Fermi da partícula de troca [357]. Yukawa apresenta em seu artigo um potencial de interação que inclui um termo de decaimento exponencial e um termo eletromagnético

$$V_Y(r) = -\beta^2 \frac{e^{-\alpha m r}}{r}, \quad (5.44)$$

onde β é a constante de acoplamento. Para $m = 0$, o potencial de Yukawa de curto alcance converte-se no potencial Coulombiano de alcance infinito, com $\beta^2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0}$. Por outro lado, o potencial de Yukawa pode ser também pensado como resultante da modificação da equação da onda eletromagnética, adicionando, sem afetar a invariância relativística, um múltiplo de um campo escalar Φ , para descrever partículas massivas $\square\Phi + \mu^2\Phi = 0$. Neste caso, se considerarmos $\Phi = \Phi(r)$, teremos em coordenadas esféricas, $\nabla^2\Phi = \mu^2\Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Phi)$, o que implica em $\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Phi) = \mu^2(r\Phi)$, cuja solução será dada por (5.44).

Em analogia à QED, que possui o fóton como partícula de troca, Yukawa idealizou a existência de uma partícula de troca como resultado do potencial e do seu correspondente campo, mas com $m \neq 0$, que estaria relacionada com o alcance da interação $(\alpha m)^{-1}$. Sendo o alcance da força nuclear conhecido, Yukawa estimou a massa da partícula mediadora como tendo cerca de 200 vezes a massa do elétron. Em 1947, com o uso das técnicas de

emulsão nuclear em placas fotográficas⁵ desenvolvidas por César Lattes, este e sua equipe descobriram os píons, confirmando a previsão da teoria de Yukawa [358]. Desta forma, foi desenvolvida a teoria da força forte entre hádrons, usada para descrever a força nuclear entre núcleons mediada por píons. E, utilizada no Modelo Padrão (SM) para descrever o acoplamento entre o campo de Higgs e os campos de quarks e léptons sem massa. Através da quebra espontânea de simetria, os férmions adquirem uma massa proporcional ao valor esperado do campo de Higgs no vácuo. Este acoplamento Higgs-férmion foi descrito pela primeira vez por Steven Weinberg em 1967 para modelar massas leptônicas [359].

Em linhas gerais, a interação de Yukawa acopla o campo fermiônico de Dirac Ψ ao campo (pseudo)escalar mesônico ϕ , do tipo $\mathcal{L}_Y(\Phi, \Psi) = -\beta\bar{\Psi}\Phi\Psi$ para mésons escalares e $\mathcal{L}_Y(\Phi, \Psi) = -\beta\bar{\Psi}i\gamma^5\Phi\Psi$ para mésons pseudoescalares, e seu potencial pode ser derivado da amplitude de ordem mais baixa da interação de um par de férmions. O diagrama de

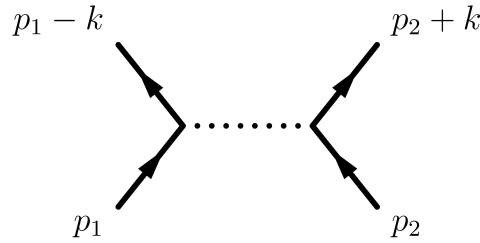


Figura 4 – Diagrama de Feynman: Amplitude de espalhamento para dois férmions, trocando um méson. Crédito da figura: <https://en.wikipedia.org/wiki/Yukawa-potential/media/File:Momentum-exchange.svg>

Feynman (Figura-4) exibe dois férmions com momento inicial p_1 e p_2 , trocando um méson com momento k , a linha pontilhada representando a troca de um méson massivo. Tendo o fator β para cada vértice, a amplitude de Feynman será $-\beta^2 D_F$, sendo o propagador D_F a função de Green da equação de Klein-Gordon obtido da transformada de Fourier do potencial de Yukawa, para $\alpha = 1$,

$$\tilde{V}_Y(k) = -\frac{\beta^2}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \frac{4\pi}{k^2 + \alpha^2 m^2} \implies D_F(x - x') = \frac{4\pi}{k^2 + m^2} \delta(x - x'). \quad (5.45)$$

5.2.2 Ação Efetiva Fermiônica Não-Local de Um-Laço com Acoplamento Yukawa

No nosso modelo não-local, calcularemos a ação efetiva fermiônica de um laço na presença de acoplamento Yukawa. Para começar, adicionaremos o acoplamento Yukawa ao Lagrangiano espinorial não-local (5.18), que produzirá o Lagrangiano dado pela seguinte

⁵ Na época, o uso de emulsões nucleares, uma chapa fotográfica especial, nos experimentos com raios cósmicos que visavam encontrar evidências de partículas subatômicas instáveis, começava a ganhar espaço em substituição ao emprego das câmaras de nuvens, também conhecidas como câmaras de Wilson.

equação

$$\mathcal{L}_Y(\Phi, \Psi) = \bar{\Psi}[i\partial F(\partial) - m + \beta\Phi]\Psi, \quad (5.46)$$

onde β é a constante de acoplamento de Yukawa e Φ é o campo escalar. A equação de campo associada ao Lagrangiano de Yukawa é

$$[i\partial F(\partial) - m + \beta\Phi]\Psi = 0 \implies [\partial^2 F^2(\partial) + (m - \beta\Phi)^2]\Psi = 0, \quad (5.47)$$

onde a última equação em (5.47) é a forma “quadrática” da primeira. Com o propósito de abordar as correções quânticas existentes nos cálculos da ação efetiva fermiônica de um laço, iremos agora revisar, de modo breve, o método do campo de fundo. Para fazer isso, o primeiro ingrediente é permitir que os campos dinâmicos flutuem em torno dos campos de fundo, ou seja,

$$\Psi \rightarrow \Psi + \sqrt{\hbar}\psi \quad \text{e} \quad \bar{\Psi} \rightarrow \bar{\Psi} + \sqrt{\hbar}\bar{\psi}, \quad (5.48)$$

onde Ψ e $\bar{\Psi}$ são os campos de fundo, enquanto ψ e $\bar{\psi}$ são os campos quânticos. O segundo ingrediente é a ação efetiva fermiônica $\Gamma[\Psi, \bar{\Psi}]$, definida como o funcional gerador de funções de Green irreduzíveis de uma partícula (1PI)

$$e^{i\frac{\Gamma[\Psi, \bar{\Psi}]}{\hbar}} = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \, e^{\frac{i}{\hbar}(S[\Psi + \sqrt{\hbar}\psi, \bar{\Psi} + \sqrt{\hbar}\bar{\psi}] + (\bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta))}, \quad (5.49)$$

onde $\bar{\eta}$ e η são variáveis e fontes Grassmanianas para os campos quânticos, ψ e $\bar{\psi}$, respectivamente. Integrar as configurações gerais do campo quântico não é uma tarefa simples, por isso é mais conveniente expandir a ação efetiva em séries de potências de \hbar de modo que

$$\Gamma[\Psi, \bar{\Psi}] = S[\Psi, \bar{\Psi}] + \hbar\Gamma^{(1)}[\Psi, \bar{\Psi}] + \mathcal{O}(\hbar^2), \quad (5.50)$$

com a ação clássica $S[\Psi, \bar{\Psi}]$, e o termo de primeira ordem $\tilde{\Gamma}^{(1)}[\Psi, \bar{\Psi}]$ sendo a ação efetiva fermiônica de um laço cuja forma explícita se lê

$$\Gamma^{(1)}[\Psi, \bar{\Psi}] = -\frac{i}{2} \ln \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi e^{i\bar{\psi}\Delta\psi} = -\frac{i}{2} \ln \det \Delta = -\frac{i}{2} \text{Tr} \ln \Delta, \quad (5.51)$$

onde o núcleo do operador quadrático da ação clássica é

$$\Delta = \left. \frac{\delta S}{\delta \bar{\psi} \delta \psi} \right|_{\bar{\psi}=\bar{\Psi}, \psi=\Psi}. \quad (5.52)$$

É preciso enfatizar, estamos interessados em capturar os efeitos não-locais devidos apenas às flutuações quânticas. Nesse aspecto, utilizaremos o método do campo de fundo, uma técnica que permite calcular os efeitos quânticos sem perda de invariância de gauge presentes nas teorias em seu nível clássico. Nessa abordagem, a ação efetiva é um funcional do campo de fundo que contém, em princípio, toda informação sobre a estrutura quântica associada a teoria. Deste modo, aplicando o método do campo de fundo para a ação

não-local (5.46), e supondo que os campos de fundo do espinor desaparecem, então a contribuição para a ação efetiva fermiônica de um laço será dada por

$$\begin{aligned}\Gamma^{(1)} &= -i\text{Tr} \ln[i\cancel{\partial}F(\cancel{\partial}) - m + \beta\Phi] \\ &= -\frac{i}{2}\text{Tr} \ln \left([i\cancel{\partial}F(\cancel{\partial}) - \tilde{\Phi}][-i\cancel{\partial}F(\cancel{\partial}) - \tilde{\Phi}] \right) \\ &= -\frac{i}{2}\text{Tr} \ln \left(\cancel{\partial}^2 F^2(\cancel{\partial}) + \tilde{\Phi}^2 \right),\end{aligned}\quad (5.53)$$

onde fizemos a redefinição do campo $\tilde{\Phi} = m - \beta\Phi$. Usando os resultados da seção anterior, podemos escrever

$$\begin{aligned}\Gamma^{(1)} &= -\frac{i}{2}\text{Tr} \ln \left(\hat{a}'_1 + \hat{a}'_2 \gamma^\mu \partial_\mu + \tilde{\Phi}^2 \right) \\ &= -\frac{i}{2}\text{Tr} \ln \left(\hat{a}'_1 + \tilde{\Phi}^2 \right) - \frac{i}{2}\text{Tr} \ln \left(1 + \frac{\hat{a}'_2 \gamma^\mu \partial_\mu}{\hat{a}'_1 + \tilde{\Phi}^2} \right),\end{aligned}\quad (5.54)$$

com,

$$\hat{a}'_1 = \square \hat{a}_1 = \square \cosh \delta, \quad \text{e} \quad \hat{a}'_2 = \square \hat{a}_2 = \sqrt{\square} \sinh \delta, \quad (5.55)$$

onde $\delta = \frac{2\sqrt{\square}}{\Lambda}$. Utilizamos (5.37) para definir explicitamente as aparências dos operadores de formas não-locais expostos em (5.55). Para obtermos a solução da ação efetiva (5.54), devemos efetuar a usual rotação de Wick, que é problemática para teorias de campos não-locais, na presença de derivadas de ordem infinita. Uma vez que seu comportamento no infinito, no espaço dos momentos, leva a contribuição não triviais, podendo ser ela alcançada em alguns casos particulares, a depender do fator de forma. Por esta razão, as teorias não-locais só são bem definidas no espaço euclidiano. No caso específico da Eq.(5.54), a usual rotação de Wick não se aplica, pois os fatores de forma podem divergir ao longo de certas direções do plano complexo [360]. Consequentemente, as funções de Green de n pontos (os correlacionadores quânticos) não são bem definidas na assinatura de Minkowski devido à acausalidade. Portanto, iremos primeiramente calcular os correlacionadores quânticos no espaço Euclidiano $SO(4)$ e, em seguida, voltar a considerar os apropriados cálculos analíticos no espaço de Minkowski $SO(1, 3)$. Seguindo essa linha de raciocínio, usaremos a ação efetiva do campo de espinor não-local de um laço no espaço Euclidiano, via a seguinte transformação $i\Gamma^{(1)} \longrightarrow \tilde{\Gamma}^{(1)}$. Assim, teremos

$$\tilde{\Gamma}^{(1)} = \frac{1}{2}\text{Tr} \ln \left(\hat{a}'_1 + \tilde{\Phi}^2 \right) - \frac{i}{2}\text{Tr} \ln \left(1 + i \frac{\hat{a}'_2 \gamma^\mu \partial_\mu}{\hat{a}'_1 + \tilde{\Phi}^2} \right) \equiv \tilde{\Gamma}_1 + \tilde{\Gamma}_2, \quad (5.56)$$

onde, agora no espaço Euclidiano teremos, $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\delta^{\mu\nu}$ e $\partial_\mu = (\partial/\partial x^4, \vec{\nabla})$, levando $\square = (\partial/\partial x^4)^2 + \nabla^2$, com x^4 tendo dimensão espacial. Então, para primeiro termo de (5.56), que denotamos por $\tilde{\Gamma}_1$, envolve apenas o operador não-local \hat{a}'_1 , podendo ser avaliado diretamente através da transformada de Fourier.

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}_1 &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \ln \left[p^2 \cosh \left(\frac{2p}{\Lambda} \right) + \tilde{\Phi}^2 \right] \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \int dp p^3 \ln \left[p^2 \cosh \left(\frac{2p}{\Lambda} \right) + \tilde{\Phi}^2 \right].\end{aligned}\quad (5.57)$$

Esta integral é de difícil solução algébrica, por isso, executaremos o método de aproximação semelhante ao esquema do cálculo adotado em [361], a saber,

$$\tilde{\Gamma}_1 = I_1^{IR} + I_1^{UV}, \quad (5.58)$$

onde

$$\begin{aligned} I_1^{IR} &= \frac{1}{16\pi^2} \int_0^\Omega dp p^3 \left(\ln(p^2 + \tilde{\Phi}^2) + \frac{2p^4}{(\tilde{\Phi}^2 + p^2)\Lambda^2} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda^4}\right) \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \left[\frac{1}{8} \left(4\tilde{\Phi}^4 \ln(\tilde{\Phi}) + 2\tilde{\Phi}^2 \Omega^2 + 2(\Omega^4 - \tilde{\Phi}^4) \ln(\tilde{\Phi}^2 + \Omega^2) \right) \right. \\ &\quad + \frac{1}{\Lambda^2} \tilde{\Phi}^4 \Omega^2 - \frac{1}{2\Lambda^2} \tilde{\Phi}^2 \Omega^4 + \frac{1}{\Lambda^2} \tilde{\Phi}^6 \ln\left(\frac{\tilde{\Phi}^2}{\tilde{\Phi}^2 + \Omega^2}\right) \\ &\quad + \left. \frac{12\tilde{\Phi}^6}{3\Lambda^2} \ln\left(\frac{\tilde{\Phi}^2 + \Omega^2}{\tilde{\Phi}^2}\right) - \frac{12\tilde{\Phi}^6 \Omega^2 + 6\tilde{\Phi}^4 \Omega^4 - 2\tilde{\Phi}^2 \Omega^6 + \Omega^8}{(3\Lambda^2)\tilde{\Phi}^2 + \Omega^2} \right] \\ &\quad + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda^4}\right), \end{aligned} \quad (5.59)$$

com Ω sendo uma escala arbitrária intermediária de massa que satisfaz $\tilde{\Phi} < \Omega < \Lambda$. Esta integral é realizada sobre momentos pequenos (limite IR), o que é uma boa aproximação do resultado exato quando $p \sim \tilde{\Phi} < \Omega \ll \Lambda$ é válido. E, no limite UV, teremos

$$\begin{aligned} I_1^{UV} &= \frac{\tilde{\Phi}^2}{8\pi^2} \int_\Omega^\infty dp p e^{-\frac{2p}{\Lambda}} + \dots \\ &= \frac{\tilde{\Phi}^2}{32\pi^2} \left[(\Lambda^2 + 2\Omega\Lambda) e^{-\frac{2\Omega}{\Lambda}} \right] + \dots, \end{aligned} \quad (5.60)$$

as reticências significam termos irrelevantes ou subdivididos, termos secundários para os resultados obtidos de I_1^{UV} . Deve-se notar que esta integral é uma boa aproximação do resultado exato com $\tilde{\Phi} \ll \Lambda < p$. Combinando ambas as Eqs. (5.59) e (5.60), encontra-se

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_1 &= \frac{1}{16\pi^2} \left[\frac{1}{8} \left(4\tilde{\Phi}^4 \ln(\tilde{\Phi}) + 2\tilde{\Phi}^2 \Omega^2 + 2(\Omega^4 - \tilde{\Phi}^4) \ln(\tilde{\Phi}^2 + \Omega^2) \right) \right. \\ &\quad + \frac{6\tilde{\Phi}^4 \Omega^2 - 3\tilde{\Phi}^2 \Omega^4 + 6\tilde{\Phi}^6 \ln\left(\frac{\tilde{\Phi}^2}{\tilde{\Phi}^2 + \Omega^2}\right)}{6\Lambda^2} \left. + \frac{4}{\Lambda^2} \tilde{\Phi}^6 \ln\left(\frac{\tilde{\Phi}^2 + \Omega^2}{\tilde{\Phi}^2}\right) \right. \\ &\quad - \left. \frac{12\tilde{\Phi}^6 \Omega^2 + 6\tilde{\Phi}^4 \Omega^4 - 2\tilde{\Phi}^2 \Omega^6 + \Omega^8}{3\Lambda^2(\tilde{\Phi}^2 + \Omega^2)} + \frac{\tilde{\Phi}^2 e^{-\frac{2\Omega}{\Lambda}}}{32\pi^2} (\Lambda^2 + 2\Omega\Lambda) \right], \end{aligned} \quad (5.61)$$

e, para o segundo termo $\tilde{\Gamma}_2$, realizaremos o mesmo procedimento anterior. De início, expandiremos este termo em séries de potências

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_2 &= -\frac{i}{2} \text{Tr} \ln \left(1 + \frac{\hat{a}'_2 \gamma^\mu \partial_\mu}{\hat{a}'_1 + \tilde{\Phi}^2} \right) = -\frac{i}{2} \text{Tr} \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(\frac{\hat{a}'_2 \gamma^\mu \partial_\mu}{\hat{a}'_1 + \tilde{\Phi}^2} \right)^n \\ &= \frac{i}{2} \text{Tr} \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{2k} \left(\frac{\hat{a}'_2}{\hat{a}'_1 + \tilde{\Phi}^2} \right)^{2k} \square^k = -\frac{i}{2} \text{Tr} \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k+1}}{2k} \left[\left(\frac{\hat{a}'_2}{\hat{a}'_1 + \tilde{\Phi}^2} \right)^2 \square \right]^k \\ &= -\frac{i}{4} \ln \left[1 + \left(\frac{\hat{a}'_2}{\hat{a}'_1 + \tilde{\Phi}^2} \right)^2 \square \right] = \frac{1}{4} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \ln \left[1 - \left(\frac{p \hat{b}'_2}{\hat{b}'_1 + \tilde{\Phi}^2} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (5.62)$$

Na passagem para a segunda linha de (5.62), levou-se em conta que apenas graus pares de γ^μ produzem traços diferentes de zero, e o fato de que $(\gamma^\mu \partial_\mu)^2 = \square$. No último passo da expressão (5.62) realizou-se a transformada de Fourier e a rotação de Wick, onde $\hat{b}'_1 = \hat{a}'_1(p^2)$ e $\hat{b}'_2 = \hat{a}'_2(p^2)$. Agora, conectando as Eqs. (5.55) em (5.62), encontra-se

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}_2 &= \frac{1}{4} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \ln \left[1 - \left(\frac{p^2 \sinh \theta}{p^2 \cosh \theta + \tilde{\Phi}^2} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{32\pi^2} \int_0^\infty dp p^3 \ln \left[1 - \left(\frac{p^2 \sinh \theta}{p^2 \cosh \theta + \tilde{\Phi}^2} \right)^2 \right],\end{aligned}\quad (5.63)$$

onde $\theta = \frac{2p}{\Lambda}$. Vê-se claramente que esta integral (5.63) diverge no limite UV. Então, em vista disso, precisa-se regularizá-la, o que significa que devemos adotar um esquema de regularização de corte no UV. Sendo assim, definiremos o regulador UV, Λ_{UV} , cumprindo as seguintes condições $\tilde{\Phi} \ll \Omega \ll \Lambda \leq \Lambda_{UV}$. Observe que a integral anterior não pode ser resolvida analiticamente, então realizaremos uma aproximação semelhante a que foi feita para $\tilde{\Gamma}_1$, ou seja,

$$\tilde{\Gamma}_2 = I_2^{IR} + I_2^{UV}, \quad (5.64)$$

onde

$$\begin{aligned}I_2^{IR} &= -\frac{1}{8\pi^2 \Lambda^2} \int_0^\Omega dp \frac{p^9}{(p^2 + \tilde{\Phi}^2)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda^4}\right) \\ &= -\frac{1}{8\pi^2 \Lambda^2} \left[2\tilde{\Phi}^6 \ln \left(\frac{\tilde{\Phi}^2}{\tilde{\Phi}^2 + \Omega^2} \right) + \frac{12\tilde{\Phi}^6 \Omega^2 + 6\tilde{\Phi}^4 \Omega^4 - 2\tilde{\Phi}^2 \Omega^6 + \Omega^8}{6(\tilde{\Phi}^2 + \Omega^2)} \right] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda^4}\right),\end{aligned}\quad (5.65)$$

corresponde à integração sobre pequenos momentos (limite IR), que é uma boa aproximação do resultado exato quando $p \leq \tilde{\Phi} \sim \Omega \ll \Lambda$ é válido, e

$$\begin{aligned}I_2^{UV} &= \frac{\tilde{\Phi}^2}{32\pi^2} \int_\Omega^{\Lambda_{UV}} dp p e^{\frac{2p}{\Lambda}} + \dots \\ &= \frac{\tilde{\Phi}^2 \Lambda}{128\pi^2} \left[(\Lambda - 2\Omega) e^{\frac{2\Omega}{\Lambda}} - (\Lambda - 2\Lambda_{UV}) e^{\frac{2\Lambda_{UV}}{\Lambda}} \right] + \dots,\end{aligned}\quad (5.66)$$

com Λ_{UV} sendo uma escala de massa do regulador de corte de UV. A integral I_2^{UV} é realizada em momentos altos (limite UV) e exibe um termo divergente que pode ser renormalizado adicionando um contratermo na ação. Deve-se notar que esta integral é uma boa aproximação do resultado exato como $\tilde{\Phi} \ll \Omega < \Lambda \leq p \sim \Lambda_{UV}$. Combinando ambas as Eqs. (5.65) e (5.66), encontraremos

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}_2 &= \frac{1}{8\pi^2 \Lambda^2} \left[2\tilde{\Phi}^6 \ln \left(\frac{\tilde{\Phi}^2}{\tilde{\Phi}^2 + \Omega^2} \right) + \frac{12\tilde{\Phi}^6 \Omega^2 + 6\tilde{\Phi}^4 \Omega^4 - 2\tilde{\Phi}^2 \Omega^6 + \Omega^8}{6(\tilde{\Phi}^2 + \Omega^2)} \right] \\ &+ \frac{\tilde{\Phi}^2 \Lambda}{128\pi^2} \left[-e^{\frac{2\Lambda_{UV}}{\Lambda}} (\Lambda - 2\Lambda_{UV}) + e^{\frac{2\Omega}{\Lambda}} (\Lambda - 2\Omega) \right].\end{aligned}\quad (5.67)$$

Portanto, a ação efetiva completa (5.54) é simplesmente dada pela soma das Eqs.(5.61) e (5.67). Agora, investigaremos os limites de IR e UV para obter mais informações sobre os resultados físicos. Observe que no regime IR, ou seja, quando $\Omega \gg \tilde{\Phi}$, a ação efetiva fermiônica de um laço se reduz a

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}_1^{IR} &= I_1^{IR} + I_2^{IR} \\ &= \left[\frac{\tilde{\Phi}^4}{32\pi^2} - \frac{3\tilde{\Phi}^6}{8\pi^2\Lambda^2} \right] \ln\left(\frac{\tilde{\Phi}}{\Omega}\right) + \frac{\Omega^2\tilde{\Phi}^2}{32\pi^2\Lambda^2} (\Omega^2 + \Lambda^2 - 4\tilde{\Phi}^2) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda^4}\right).\end{aligned}\quad (5.68)$$

É importante observar que no limite IR a ação efetiva de um laço é altamente suprimida pela escala de não localidade da massa ($\Lambda \rightarrow \infty$). Assim, neste caso, as principais contribuições para a ação efetiva de um laço provêm do termo local, como esperado. Por outro lado, para sondar o regime UV, é razoável considerar que o regulador UV é da ordem da escala de não localidade da massa, $\Lambda_{UV} = \Lambda$. Neste cenário, a ação efetiva de um laço é

$$\tilde{\Gamma}_1^{UV} = I_1^{UV} + I_2^{UV} = \frac{(5 + e^2)\Lambda^2}{128\pi^2} \tilde{\Phi}^2 + \dots, \quad (5.69)$$

onde (\dots) representa os termos não dominantes. Isto significa que as contribuições não-locais para a ação efetiva fermiônica de um laço tornam-se muito relevantes no limite UV.

5.2.3 Acoplamento Espinorial Não-local com o Campo Eletromagnético

Esta seção tem como objetivo construir uma teoria de campo spin-1/2 não-local minimamente acoplada a um campo eletromagnético com invariância de gauge. Primeiramente, construiremos a ação do modelo não-local com acoplamento, promovendo a derivada parcial para a derivada covariante, permitindo assim estender o cálculo diferencial para o caso de espaços mais gerais de variedades diferenciáveis. Para fazer isso, seguimos a receita tradicional empregada na TQC, através da seguinte prescrição,

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu, \quad (5.70)$$

onde A_μ é o campo de gauge $U(1)$ e q é a carga da partícula. Portanto, a ação não-local de spin-1/2 acoplado com interação será

$$\mathcal{S}_I = \int d^4x \bar{\Psi} \left(i \not{D} F(\not{D}) - m \right) \Psi, \quad (5.71)$$

onde $\not{D} \equiv \gamma^\mu D_\mu$ é o operador covariante de Dirac. A ação (5.71) produz a seguinte equação de campo

$$[i \not{D} F(\not{D}) - m] \Psi = 0 \implies [\not{D}^2 F^2(\not{D}) + m^2] \Psi = 0, \quad (5.72)$$

onde a última equação em (5.72) é a forma “quadrática” da primeira. Usando as propriedades das matrizes gama (5.16), pode-se escrever

$$\not{D}^2 = \left[\square + iq(\partial_\mu A^\mu + A_\mu \partial^\mu) - q^2 A_\mu A^\mu \right] \hat{I} + \frac{q}{2} \sigma^{\mu\nu} \mathbf{F}_{\mu\nu}, \quad (5.73)$$

onde $\mathbf{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ é a intensidade do campo e $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$. Portanto, a equação de campo pode ser escrita de forma compacta, como segue

$$\left[\left(D^2 \hat{I} + \frac{q}{2} \sigma^{\mu\nu} \mathbf{F}_{\mu\nu} \right) F^2(\not{D}) + m^2 \right] \Psi = 0. \quad (5.74)$$

Os mesmos argumentos para o caso livre são aplicados aqui em relação ao fator de forma, para o caso acoplado, isto é, sendo uma função analítica em todo o plano complexo, o fator de forma pode ser expandido como uma série de potências de seu argumento (ver demonstração no Apêndice-B.3). Portanto, este é uma função inteira representada como uma série de potências de \not{D} , isto é,

$$F(\not{D}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\frac{\not{D}}{\Lambda} \right)^n, \quad (5.75)$$

onde c_n são os coeficientes adimensionais, com condição inicial $c_0 = 1$. Neste caso, semelhantemente à Seção-5.1.2, assumiremos o fator de forma em seu aspecto exponencial

$$F(\not{D}) \equiv e^{-\frac{\not{D}}{\Lambda}}. \quad (5.76)$$

Diferentemente do caso livre, o espectro do quadrado do operador de Dirac com interação é mais envolvente. Alternativamente, escreveremos a equação quadrática de Dirac não-local com interação em termos do espectro do operador $\not{\partial}$. Aqui se faz necessário destacar a fórmula Baker-Campbell-Hausdorff (BCH), utilizada para descrever a exponenciação de elementos de uma álgebra de Lie, com operadores matriciais, que não necessariamente comutam $e^A e^B = e^{(A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\frac{1}{12}([A,[A,B]]+[B,[B,A]])+\dots)}$, onde $[A, B]$ é o comutador da álgebra, e os termos posteriores são todos comutadores de comutadores. Portanto, usando a fórmula BCH, a Eq.(5.74) será

$$\left\{ \left(D^2 \hat{I} + \frac{q\sigma^{\mu\nu}}{2} \mathbf{F}_{\mu\nu} \right) \left[e^{-\frac{2iq\mathcal{A}}{\Lambda}} \left(\cosh(2\lambda/\Lambda) \hat{I} - \frac{1}{\lambda} \sinh(2\lambda/\Lambda) \not{\partial} \right) - e^{\frac{2iq}{\Lambda^2} (-2i\sigma^{\mu\nu} A_\mu \partial_\nu - \frac{i}{2} \sigma^{\mu\nu} \mathbf{F}_{\mu\nu} + \partial_\mu A^\mu)} + \mathcal{O}(e^{q^2/\Lambda^3}) \right] + m^2 \right\} \Psi = 0, \quad (5.77)$$

onde $\mathcal{O}(e^{q^2/\Lambda^3})$ surge da fórmula BCH e representa comutadores de ordem superior entre $\not{\partial}$ e \mathcal{A} . Efetivamente, a interação não-local produz uma torre de um número infinito de interações locais não convencionais, envolvendo os campos eletromagnéticos e espinoriais. No nível perturbativo, uma vez que Λ é considerado uma escala típica de alta energia,

isso significa que a constante de acoplamento adimensional $\alpha = \frac{q}{\Lambda} \ll 1$. Assim, os efeitos não-locais no campo eletromagnético são suprimidos na escala de energia de Planck. Em termos práticos, cada vértice dos diagramas de Feynman carregará um fator proporcional a $e^{-i\alpha A}$, que pode ser expandido em séries de potências de α . Como resultado, apenas o termo inicial será relevante numa primeira aproximação, enquanto os outros podem ser negligenciados com segurança. Neste cenário, após algumas manipulações algébricas, a equação quadrática de Dirac não-local com interação terá o seguinte aspecto

$$\left\{ \left[\square + iq(\partial_\mu A^\mu + A_\mu \partial^\mu) - q^2 A_\mu A^\mu + \frac{q}{2} \sigma^{\mu\nu} \mathbf{F}_{\mu\nu} + \dots \right] F^2(\not{\partial}) + m^2 \right\} \Psi = 0, \quad (5.78)$$

De acordo com o esperado, se desconsiderarmos os termos entre colchetes que representam o acoplamento do campo eletromagnético com o operador de Dirac não-local, a equação (5.78) se reduzirá à versão quadrática da equação de Dirac livre não-local (5.31). As reticências representam correções no parâmetro adimensional α . Em derradeira análise de (5.78), é facilmente verificável que o caso local é recuperado, quando o limite $\Lambda \rightarrow \infty$ é alcançado.

5.2.4 Invariância de Gauge da Ação Acoplada

As raízes dos estudos sobre a invariância de gauge datam do ano de 1820, quando a primeira teoria eletrodinâmica foi proposta. Desenvolvimentos subsequentes levaram à descoberta de que diferentes formas do potencial vetor resultam nas mesmas forças observáveis [362]. Em 1926, Vladimir Fock (1898–1974) estendeu a conhecida liberdade de escolha dos potenciais eletromagnéticos, na eletrodinâmica clássica, para a mecânica quântica das partículas carregadas interagindo com campos eletromagnéticos [363]. As teorias de gauge são importantes na descrição de todas as interações fundamentais da natureza. A QED, por exemplo, é uma teoria de gauge abeliana com o grupo de simetria $U(1)$, tendo o quadripotencial eletromagnético como seu campo de gauge, e os fótons como sendo os bósons de gauge. A TQC de Yang-Mills, criada em 1953, cerne do SM, descreve interações entre partículas elementares usando grupos de simetria não abelianos, $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$, através de partículas mediadoras das forças, que podem interagir entre si, o que leva à não linearidade da teoria⁶ [364].

No caso específico da gravitação, o princípio fundamental da equivalência, onde cada ponto do espaço-tempo é permitido escolher um referencial local, pode ser visto como um aspecto da teoria de gauge. Uma vez que as simetrias de gauge podem ser vistas como análogas ao princípio da covariância geral, no qual o sistema de coordenadas pode ser escolhido livremente sob difeomorfismos arbitrários do espaço-tempo. Deste modo, tanto

⁶ Um dos principais desafios na teoria de Yang-Mills vem da propriedade quântica que resulta $m \neq 0$ para partículas elementares que viajem à velocidade da luz. Construir uma teoria de TQC de Yang-Mills matematicamente consistente e bem definida é um dos sete problemas do milênio.

a invariância de gauge quanto a invariância do difeomorfismo refletem uma redundância na descrição da gravitação, com transformações entre medidores que formam um grupo de simetria de Lie, associada aos geradores de grupo da álgebra de Lie. Para cada gerador de grupo surge necessariamente um campo de gauge correspondente, sendo geralmente um campo vetorial [365]. Não obstante, na RG o campo de gauge é o tensor de Lanczos⁷ [366], que para a métrica de Schwarzschild é $H_{trt} = GMr^{-2}$. Neste sentido, a gravitação de Einstein é um tipo de teoria de campo em que o Lagrangiano e, portanto, a dinâmica do próprio sistema, não muda sob transformações locais de acordo com certas famílias suaves de operações do grupo de Lie. Em 1998, Lasenby, Doran e Gull apresentaram a teoria alternativa da gravidade de gauge, a qual postula a existência do gráviton com sendo o bóson de gauge, substituindo o princípio da covariância geral por um princípio de gauge verdadeiro com novos campos de gauge. Esta teoria é construída em um espaço-tempo de fundo plano e emprega campos de gauge para garantir que todas as relações entre quantidades físicas são independentes da posição e orientação dos campos de matéria. Um tensor de spin também pode ser suportado de maneira semelhante à teoria de Einstein–Cartan–Sciama–Kibble [367, 368].

Aqui, daremos uma atenção especial ao processo de verificação da invariância de gauge para o nosso modelo, que descreve um sistema físico onde existe um acoplamento de um campo espinor não-local com um campo Eletromagnético. De modo prático, aplicaremos um formalismo matemático específico para regular os graus de liberdade redundantes no Lagrangiano não-local de (5.71). Tal verificação é valiosa, uma vez que não é tão óbvio perceber que (5.71) é uma ação não-local, pois o seu fator de forma não é uma função linear do operador de Dirac. Neste aspecto, é preciso mostrar que $i\rlap{\not{D}}F(\rlap{\not{D}})\Psi$ torna-se covariantemente sob as seguintes conhecidas transformações de gauge $U(1)$,

$$\begin{aligned} A_\mu &\xrightarrow{U(1)} A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \alpha(x); \\ \Psi &\xrightarrow{U(1)} \Psi' = e^{-iq\alpha(x)} \Psi; \\ \bar{\Psi} &\xrightarrow{U(1)} \bar{\Psi}' = \bar{\Psi} e^{iq\alpha(x)}. \end{aligned} \quad (5.79)$$

Assim sendo, demonstraremos a seguinte transformação de gauge

$$i\rlap{\not{D}}F(\rlap{\not{D}})\Psi \xrightarrow{U(1)} [i\rlap{\not{D}}F(\rlap{\not{D}})\Psi]' = e^{-iq\alpha(x)} i\rlap{\not{D}}F(\rlap{\not{D}})\Psi. \quad (5.80)$$

Após uma simples manipulação algébrica em (5.80), isto é, expandindo o fator de forma em série de potências de seu argumento

$$[i\rlap{\not{D}}F(\rlap{\not{D}})\Psi]' = \left[i\gamma^\mu D_\mu \left(1 - \frac{\gamma^{\nu_1} D_{\nu_1}}{\Lambda} + \frac{\gamma^{\nu_1} \gamma^{\nu_2} D_{\nu_1} D_{\nu_2}}{2\Lambda^2} + \dots \right) \Psi \right]'. \quad (5.81)$$

⁷ Ou potencial de Lanczos, introduzido por Cornelius Lanczos em 1949, é um tensor de posto 3 que gera o tensor de Weyl.

Agora, utilizaremos o método da indução matemática com o fim de provar a invariância de gauge do nosso modelo. De início, analisaremos o termo de ordem zero na série de potências (5.81). Verifica-se de imediato que este termo é apenas o caso do modelo acoplado usual/local, que se transforma covariantemente sob transformações de gauge $U(1)$, ou seja, $[i\gamma^\mu D_\mu \Psi]' = e^{-iq\alpha(x)} i\gamma^\mu D_\mu \Psi$. De igual modo, para o termo de primeira ordem, teremos o seguinte

$$\begin{aligned}
 \left[i\gamma^\mu D_\mu \left(-\frac{\gamma^{\nu_1} D_{\nu_1}}{\Lambda} \right) \Psi \right]' &= -\frac{i\gamma^\mu \gamma^{\nu_1}}{\Lambda} (D_\mu D_{\nu_1} \Psi)' \\
 &= -\frac{i\gamma^\mu \gamma^{\nu_1}}{\Lambda} (\partial_\mu + iqA_\mu + iq\partial_\mu \alpha(x)) e^{-iq\alpha(x)} D_{\nu_1} \Psi \\
 &= -\frac{i\gamma^\mu \gamma^{\nu_1}}{\Lambda} e^{-iq\alpha(x)} (-iq\partial_\mu \alpha(x) + \partial_\mu + iqA_\mu + iq\partial_\mu \alpha(x)) D_{\nu_1} \Psi \\
 &= e^{-iq\alpha(x)} i\gamma^\mu D_\mu \left(-\frac{\gamma^{\nu_1} D_{\nu_1}}{\Lambda} \right) \Psi,
 \end{aligned} \tag{5.82}$$

e por último, calcularemos a transformação do termo genérico j -ésimo, que será

$$\begin{aligned}
 \left[i\gamma^\mu D_\mu \left(\frac{(-1)^j (\gamma^\nu D_\nu)^j}{j! \Lambda^j} \Psi \right) \right]' &= \frac{(-1)^j}{j! \Lambda^j} i\gamma^\mu \gamma^{\nu_1} \dots \gamma^{\nu_j} (D_\mu D_{\nu_1} \dots D_{\nu_j} \Psi)' \\
 &= \frac{(-1)^j}{j! \Lambda^j} i\gamma^\mu \gamma^{\nu_1} \dots \gamma^{\nu_j} D'_\mu D'_{\nu_1} \dots e^{-iq\alpha(x)} (\partial_{\nu_{j-1}} + iqA_{\nu_{j-1}}) D_{\nu_j} \Psi,
 \end{aligned}$$

aplicando sucessivos passos idênticos aos realizados anteriormente; Então, teremos como resultado final

$$\left[i\gamma^\mu D_\mu \left(\frac{(-1)^j (\gamma^\nu D_\nu)^j}{j! \Lambda^j} \Psi \right) \right]' = e^{-iq\alpha(x)} i\gamma^\mu D_\mu \left(\frac{(-1)^j (\gamma^\nu D_\nu)^j}{j! \Lambda^j} \right) \Psi. \tag{5.83}$$

Finalmente, ao substituir (5.83) em (5.81), constata-se que $i\not{D}F(\not{D})\Psi$ converte-se covariantemente sob transformações de gauge $U(1)$. Desta maneira, fica demonstrado que a teoria campo de spin-1/2 não-local minimamente acoplada a um campo eletromagnético (5.71) é invariante sob transformação de gauge.

5.3 O Limite Não Relativístico e a Equação de Pauli Não-Local

Em 1925, Samuel Goudsmit e George Uhlenbeck postularam a existência de uma nova propriedade intrínseca do elétron, que se comportavam como um momento angular, como forma de explicar a multiplicidade dos termos espectrais na estrutura fina devido ao efeito Zeeman anômalo [369]. Posteriormente, Wolfgang Pauli (1900-1958) denominou de spin esta propriedade intrínseca do elétron. E, em 1927, um ano antes de Dirac formular sua equação, Pauli apresentou a equação que descreve partículas de spin-1/2 em interação com o campo eletromagnético, em situações onde os efeitos relativísticos podem ser desprezados [370]. Pauli, na sua análise da equação obtida por Goudsmit e Uhlenbeck, modificou a equação de Schrödinger com a introdução de suas famosas matrizes de spin (5.17).

Na sua forma linearizada, a equação de Pauli é conhecida como equação de Lévy-Leblond [371]. Para o elétron de massa m e carga elétrica q , em um campo eletromagnético descrito pelo potencial vetor magnético \vec{A} e o potencial escalar elétrico ϕ , $\vec{E} = \nabla\phi + \partial_t\vec{A}$, a equação de Pauli é

$$E\Psi(x) = \left[\frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A} \right)^2 + q\phi - \vec{\mu}_s \cdot \vec{B} \right] \Psi(x), \quad (5.84)$$

onde $\vec{\mu}_s \equiv \left(\frac{q\hbar}{2mc} \right) \vec{\sigma}$ é magneton de Bohr, $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ é o campo magnético externo, $\Psi(x)$ é um biespinor, com os usais operadores do momento $\vec{p} = i\hbar\nabla$ e da energia clássica $E = -i\hbar\partial_t$.

Na abordagem local da equação de Dirac, o limite não relativístico é alcançado assumindo um campo de gauge fracamente acoplado aos férmions, o que impede a aceleração das partículas fermiônicas alcance velocidades relativísticas. Agora, estudaremos como este limite é aplicado na equação de Dirac não-local minimamente acoplada a um campo eletromagnético. Para fazer isso, consideremos inicialmente a Eq.(5.72) no espaço de momentos e em unidades naturais,

$$\left[\left(\not{p} - q\not{A} \right) \tilde{F} \left(\frac{\not{p}}{\Lambda} - \rho\not{A} \right) - m \right] \tilde{\Psi}(p) = 0, \quad (5.85)$$

Conforme discutido anteriormente, estamos tratando do limite do campo fraco, com $\rho = \frac{q}{\Lambda} \ll 1$. Aqui, sem perda de generalidade na equação anterior (5.85), podemos assumir com segurança $\rho = 0$, uma vez que nosso objetivo nesta seção é investigar apenas os efeitos da não localidade no limite não relativístico da equação (5.85). Desta maneira, simplificaremos consideravelmente o fator de forma não-local, que não dependerá mais do campo de gauge. Após tais considerações, o próximo passo é selecionarmos explicitamente o fator de forma, que no presente caso será escolhido ser aquele correspondente à transformada de Fourier do fator de forma (5.30). Logo, a Eq.(5.85), será

$$\left[\left(\not{p} - q\not{A} \right) e^{-\frac{\not{p}}{\Lambda}} - m \right] \tilde{\Psi}(p) = 0. \quad (5.86)$$

Portanto, utilizando as matrizes gama (5.16), o fator de forma pode ser convertido na seguinte forma de matriz,

$$\tilde{F}(\not{p}) = e^{-\frac{\not{p}}{\Lambda}} = \begin{pmatrix} \cosh \delta + (E/mc^2) \sinh \delta & (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}/mc) \sinh \delta \\ -(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}/mc) \sinh \delta & \cosh \delta - (E/mc^2) \sinh \delta \end{pmatrix}, \quad (5.87)$$

onde $\delta \equiv mc/\Lambda$. Observe que, por conveniência, restauramos a velocidade da luz c . Assumindo o biespinor $\Psi(p) = (\chi \quad \xi)$ e o potencial vetorial $A_\mu = (\phi/c, \vec{A})$. A Eq. (5.86)

se reduz as seguintes equações para cada espinor

$$(a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12}^* - mc)\chi + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{11}^*)\xi = 0; \quad (5.88)$$

$$(a_{12}b_{11} + a_{11}b_{12}^*)\chi + (a_{12}b_{12} + a_{11}b_{11}^* + mc)\xi = 0, \quad (5.89)$$

onde temos definido

$$\begin{aligned} a_{11} &= (E - q\phi)/c; \quad a_{12} = \vec{\sigma} \cdot \vec{\Pi}; \\ b_{11} &= \cosh \delta - (E/mc^2) \sinh \delta; \quad b_{12} = -(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}/mc) \sinh \delta; \\ b_{22} &= \cosh \delta + (E/mc^2) \sinh \delta \end{aligned} \quad (5.90)$$

com $\vec{\Pi} = \vec{p} - (q/c)\vec{A}$. Vamos agora levar em conta o limite não relativístico, que corresponde a tomar $E \approx mc^2 + E_c$, onde a energia clássica $E_c \equiv \frac{|\vec{p}|^2}{2m}$. Neste caso, considerando o regime de campo fraco, a Eq.(5.89) torna-se

$$\xi = -\frac{1}{mc(1 + e^\delta)} \left((\vec{\sigma} \cdot \vec{\Pi})e^{-\delta} + (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \sinh \delta \right) \chi, \quad (5.91)$$

substituindo a Eq.(5.91) na Eq.(5.88) e usando os coeficientes (5.90), obteremos

$$\begin{aligned} &\left\{ \left(\frac{E_c - q\phi}{c} \right) e^{-\delta} + mc(e^{-\delta} - 1) + \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{\Pi})(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})}{mc} \sinh \delta \right\} \chi = \\ &\frac{1}{mc(1 + e^\delta)} \left\{ (\vec{\sigma} \cdot \vec{\Pi})^2 - (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2 \sinh^2 \delta + (e^\delta - e^{-\delta})(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})(\vec{\sigma} \cdot \vec{\Pi}) \sinh \delta \right\} \chi. \end{aligned} \quad (5.92)$$

Para simplificar (5.92), faremos uso de algumas identidades vetoriais,

$$\begin{aligned} (\vec{\sigma} \cdot \vec{\Pi})(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) &= \frac{1}{2} (\{\sigma_i, \sigma_j\} + [\sigma_i, \sigma_j]) \Pi_i p_j = \vec{\Pi} \cdot \vec{p} + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{\Pi} \times \vec{p}) \\ &= |\vec{\Pi}|^2 + \frac{q}{c} \vec{\Pi} \cdot \vec{A} + i\frac{q}{c} \vec{\sigma} \cdot (\vec{A} \times \vec{p}); \end{aligned} \quad (5.93)$$

$$\begin{aligned} (\vec{\sigma} \cdot \vec{\Pi})^2 &= \frac{1}{2} (\{\sigma_i, \sigma_j\} + [\sigma_i, \sigma_j]) \Pi_i \Pi_j = |\vec{\Pi}|^2 + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{\Pi} \times \vec{\Pi}) \\ &= |\vec{\Pi}|^2 - i\frac{q}{c} \vec{\sigma} \cdot \vec{B}, \end{aligned} \quad (5.94)$$

onde, nas fórmulas acima, utilizamos a identidade $\vec{\Pi} \times \vec{\Pi} = -\frac{q}{c} (\vec{p} \times \vec{A} + \vec{A} \times \vec{p}) = i\frac{q}{c} \vec{B}$. Conectando as Eqs.(5.93) e (5.94) na Eq.(5.92) e após algumas manipulações algébricas, encontra-se a equação de Pauli em sua versão não-local

$$\begin{aligned} E_c \chi &= \left\{ q\phi - mc(1 - e^\delta) + \frac{e^{\delta/2}}{2m} \cosh^{-1}(\delta/2) |\vec{\Pi}|^2 \right. \\ &\quad - \frac{e^{\delta/2} \cosh^{-1}(\delta/2)}{2m} \left[\frac{q}{c} (1 + e^{-\delta} \sinh \delta) \vec{\sigma} \cdot \vec{B} - e^{\delta/2} |\vec{p}|^2 \sinh^2 \delta \right] \\ &\quad \left. - \frac{\sinh \delta}{mc} \left[c\vec{\Pi} \cdot \vec{p} - iq\vec{\sigma} \cdot (\vec{A} \times \vec{p}) - \frac{qe^{-\delta/2} \sinh \delta}{2 \cosh(\delta/2)} (\vec{\Pi} \cdot \vec{A} - \vec{A} \cdot \vec{\Pi}) \right] \right\} \chi. \end{aligned} \quad (5.95)$$

5.3.1 Fator g_s Não-Local

Na física das partículas, existe um fator g para cada momento angular da partícula (spin g_s , orbital g_z e total g_L). Sendo o fator g_s do elétron igual a $2.00231930436092(36)$, com incerteza na medida de $1,8 \cdot 10^{-13}$, o valor medido com maior precisão na física [226, 372]. Onde as contribuições dos efeitos gravitacionais quânticos podem levar a um desvio para o valor do fator g_s do elétron [373]. Na QED, o momento magnético anômalo resulta da contribuição dos efeitos da MQ ao momento magnético da partícula, cuja previsão para o elétron concorda com o valor medido experimentalmente em mais de 10 algarismos significativos. Surpreendentemente, a previsão teórica do valor do momento magnético do elétron é a previsão, verificada experimentalmente, com maior acerto já encontrado na física. Contudo, o SM das partículas não consegue explicar as massas dos neutrinos e a discrepância entre o valor previsto e o valor experimentalmente medido do momento magnético anômalo do múon μ^- [374].

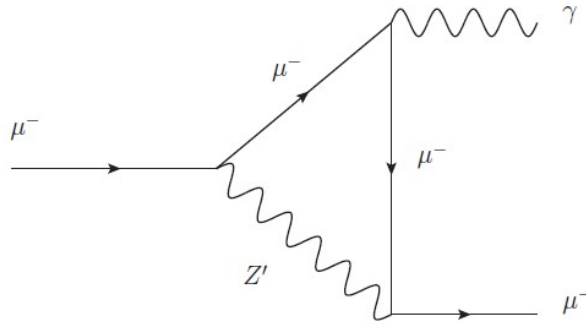


Figura 5 – Diagrama de Feynman: Correções supersimétricas para o fator $(g_s - 2)$ do múon devido ao envolvimento do bóson de gauge Z' . Crédito da Figura: *Supersymmetric gauged $U(1)_{L\mu-L\tau}$ model for neutrinos and the muon $(g_s - 2)$ anomaly*. Banerjee, H.; Byakti, P.; Roy, S.: Physical Review D - (APS).

Os modelos supersimétricos (SUSY), que incorporam novas simetrias colocando bósons e férmions em pé de igualdade, podem fornecer contribuições adicionais para o momento magnético anômalo do múon $(g_s - 2)$ por meio da contribuição, em um laço, advindos do acoplamento bóson-múon, conforme mostrado na Figura-5. O Modelo Mínimo Supersimétrico (*Minimal Supersymmetric Standard Model-MSSM*), contendo cinco bósons de Higgs e um grupo extra de medidores de simetria de gauge $U(1)$, é uma proposta para a solução do problema da hierarquia (discrepância entre as escalas de energia do modelo padrão e a gravidade) e da massa de Higgs estável [375]. Além do mais, ele busca esclarecer os desvios existentes no momento magnético anômalo do múon $(g_s - 2)$, que tem contribuições dos bósons W e Z subdominantes, quando comparadas com as contribuições do bóson de gauge Z' [376]. Outra diferença importante no caso do MSSM deve-se à mistura dos estados associados pela supersimetria aos gauginos (bósons de Gauge) e aos higgsinos (bósons de Higgs), cujos autoestados de massa são conhecidos como charginos e neutralinos.

Estas partículas teóricas, que possuem propriedades peculiares, são conhecidas como superparceiras, estando relacionadas as partículas do SM. As superparceiras desempenham um papel fundamental na possível descoberta da supersimetria na escala de energia de TeV (10^{12} eV) [377, 378]. No MSSM, para cada quark e lépton, existe uma superparceira squark e slepton, respectivamente. No caso do bóson Z, do bóson de Higgs e de um dos neutrinos, o superparceiro é o neutralino, sendo este um candidato a matéria escura. No entanto, apesar do MSSM ter sido amplamente testado no *Large Hadron Collider* - (LHC) do CERN, não foram encontradas evidências claras da existência destas partículas teóricas ou de outras previsões do modelo [379, 380]. No caso da supergravidade (SUGRA), o número de supersimetrias é estabelecido pelo número de campos de spin-3/2, isto é, os gravitinos, que são as superparceiras do gráviton, o quantum do campo de spin-2 [381, 382, 383]. No entanto, a teoria quântica da gravidade, com sua suposição da existência do gráviton, apresenta falhas quando suas interações são analisadas e comparadas com as interações do fóton e de outros bósons de gauge [384, 385].

Para o nosso modelo aqui exposto, verifica-se que quando definido o limite assintótico $\Lambda \rightarrow \infty$ em (5.95) recupera-se a equação de Pauli padrão (local). Também, observa-se que o termo multiplicativo do fator $\vec{\sigma} \cdot \vec{B}$ da equação (5.95) exibe uma correção não-local para a razão giromagnética, fator g_s , das partículas massivas de spin-1/2

$$g_s = 2 \left(\frac{e^{\frac{\delta}{2}}}{\cosh\left(\frac{\delta}{2}\right)} + \frac{\sinh \delta}{e^{\frac{\delta}{2}} \cosh\left(\frac{\delta}{2}\right)} \right). \quad (5.96)$$

Para obter mais informações sobre esse resultado, expandiremos o fator g_s em séries de potências de δ , cujo resultado será

$$g_s = 2 + 3\delta + \mathcal{O}(\delta^2). \quad (5.97)$$

Por fim, como esperado, constata-se que quando a escala da não localidade satisfaz $\Lambda \gg mc$, implicando em $\delta \rightarrow 0$, a equação de Pauli na sua versão não-local reproduz o valor usual/local do fator giromagnético da partícula, isto é, $g_s = 2$ [386]. Este valor clássico previsto pela equação de Pauli difere em 1% do valor observado. Neste cenário, verifica-se que as flutuações quânticas da TQC introduzem pequenas correções, que para o novo modelo aqui apresentado são devidas aos efeitos não-locais. Neste panorama, obtivemos contribuições para o fator g_s , advindas de termos não-locais, por consequência produzindo uma anomalia magnética não trivial puramente de origem não-local, o que implica $(g_s - 2) \neq 0$.

6 CONCLUSÃO

Nesta tese, desenvolvemos estudos sobre teorias modificadas da gravitação, considerando seus aspectos clássicos e quânticos, tanto no campo teórico quanto no fenomenológico. Analisamos questões fundamentais relacionadas às teorias não-locais, à causalidade, à unitariedade, à renormalizabilidade, bem como aos atributos da invariância de Lorentz e à possível quebra da simetria CPT. Foram discutidos diferentes modelos de gravitação modificada, propostos como alternativas para a resolução de problemas ainda em aberto na física gravitacional e no contexto cosmológico. Em particular, apresentamos duas novas classes de modelos: (i) modelos generalizados de gravidade de Chern-Pontryagin; e (ii) um modelo de campo espinorial não-local no espaço de Minkowski.

6.1 Modelos Generalizados de Gravidade Chern-Pontryagin

No Capítulo-4, apresentamos os modelos generalizados de gravidade Chern-Pontryagin que foram construídos através da inclusão de uma função composta pelos termos do escalar de curvatura e do invariante de Chern-Pontryagin $*RR$, na ação de Einstein-Hilbert. Mostramos que estes modelos são motivados pelo fato de que eles, sendo a generalização do modelo de gravidade modificada Chern-Simons (CSMG), permitem a quebra de paridade em determinadas situações. Mais especificamente, quando o Lagrangiano envolve graus ímpares de $*RR$. Neste aspecto, o novo modelo promove os estudos de modelos de sistemas físicos no contexto de quebra de simetria CPT e, com suas adequadas modificações, as construções de modelos com quebra de simetria de Lorentz.

Verificamos algumas métricas conhecidas que resolvem as equações de movimento dos modelos generalizados de Chern-Pontryagin, nomeadamente todas que produzem o resultado $*RR = 0$. Neste caso, as equações de campo reduzem-se às equações modificadas de Einstein das teorias $f(R)$. Em particular, isto é verdade para todas as métricas esfericamente simétricas. Este fato motivou a estudar perturbações de duas métricas bem conhecidas, a saber, Schwarzschild e Tipo-Gödel. Em certo sentido, nossos estudos podem ser tratados como uma continuação do artigo [331] onde as perturbações das métricas do tipo-Gödel foram consideradas dentro do CSMG não-dinâmico. Investigamos a consistência dessas métricas nos modelos específicos $f_I(R, *RR) = R + \beta(*RR)^2$ e $f_{II}(R, *RR) = R + \alpha R^2 + \beta(*RR)^2$. Para as perturbações do buraco negro de Schwarzschild, encontramos um efeito de arrasto de referencial de primeira ordem no parâmetro de perturbação $L = \beta M^2$, além do termo padrão da RG. Para as perturbações das métricas do tipo-Gödel, investigamos tanto perturbações gerais de primeira ordem, quanto aquelas que apresentam

quebra de simetria axial ao longo da direção z . Concluimos que, nesses cenários, todas as funções métricas perturbadas devem ser iguais a zero para garantir consistência com as equações de campo.

Demonstramos que, semelhante às teorias $f(R)$, os modelos generalizados de gravidade Chern-Pontryagin admitem uma representação escalar-tensorial de dois campos, no frame de Jordan e de Einstein, com um potencial de interação para estes dois campos escalares. Nestas representações, fica evidente existir uma certa equivalência entre estes modelos e a gravidade modificada de Chern-Simons. Na verdade, ao descrever a teoria no frame de Einstein, mostramos que a ação desta classe de modelos é, até certo ponto, um caso intermediário entre o CSMG não-dinâmico e o dinâmico. Além disso, conseguimos gerar o termo Chern-Simons de forma mais natural do que na proposta original do CSMG [52].

6.2 Modelo de Campo Espinorial Não-Local

Na segunda proposta, apresentamos no Capítulo-5 a formulação de um novo modelo de teoria de campo de spin-1/2 não-local no espaço plano, na qual o fator de forma não é uma função inteira constituída pelo operador d'Alembertiano, como normalmente ocorre nas demais teorias não-locais de spin-1/2 discutidas na literatura, mas é uma função inteira do operador de Dirac. A ideia principal por trás desta teoria foi que, devido à sua estrutura espinorial, é mais natural considerar um fator de forma que depende do operador de Dirac em vez do operador de d'Alembert. De certa forma, preenchemos uma lacuna na literatura ao propor uma nova teoria para campos fermiônicos não-locais. Pois, por alguma razão desconhecida, existem poucos trabalhos publicados com propostas de modelos não-locais para o campo de Dirac.

Para o modelo de campo espinorial não-local, adotamos fatores de forma exponenciais como funções do operador de Dirac, onde a expressão analítica para as relações de dispersão obtida se aproxima do resultado padrão à medida que os efeitos não-locais são suprimidos, ou seja, quando o fator de escala de energia tende ao infinito $\Lambda \rightarrow \infty$. Outrossim, enquanto ela se afasta do resultado padrão à medida que os efeitos não-locais se tornam relevantes no limite UV, ou seja, como $\Lambda \sim p$, com p representando grandes momentos. Além disso, as equações não-locais de campo alcançadas são compostas por termos do espectro do quadrado do operador livre de Dirac, nas quais cada componente do espinor de Dirac não satisfaz uma equação de Klein-Gordon não-local, diferentemente do caso padrão local. Inclusive, usando um método aproximado, avaliamos as correções quânticas do modelo na presença de um acoplamento Yukawa, para contribuições efetivas de um laço. Concluimos que tal ação efetiva é altamente suprimida por um fator de escala de energia Λ no limite do IR, deixando claro que os efeitos não-locais são não dominantes

neste regime. Em contraste, no limite UV, os efeitos não-locais emergem como termos principais. Demonstramos explicitamente a invariância de gauge para um acoplamento mínimo não-local, entre um campo de gauge $U(1)$ e o campo de spin-1/2, com a obtenção da equação do campo espinorial, que descreve a interação não-local, descrita por uma torre infinita de interações locais incomuns.

6.3 Perspectivas Futuras

Uma continuação natural do estudo dos modelos generalizados de gravidade Chern-Pontryagin seria o de envolver a investigação das perturbações cosmológicas¹ e analisar as implicações da violação da paridade no contexto das ondas gravitacionais. Inclusive, como proposta futura, seria importante verificar a consistência de diferentes soluções conhecidas na RG, além de Schwarzschild e Tipo-Gödel, como, por exemplo, a métrica cosmológica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW), tanto no formalismo Riemanniano como no formalismo de Palatini. Outra tarefa interessante seria incluir no modelo o termo de invariante de Nieh-Yan acoplado a um campo escalar. Este invariante topológico, que está relacionado à anomalia quiral, pode ser estendido para geometrias métricas-afins mais gerais que incorporam a torção e a não-metricidade, sua interpretação é utilizada em cenários de branas e na resolução de singularidades em cosmologias de Bianchi I.

Quanto ao modelo de campo espinorial não-local, nos próximos trabalhos pode-se acrescentar o formalismo não-local para o campo eletromagnético minimamente acoplado, e não somente ao campo fermiônico. A investigação do modelo continuará provavelmente para fatores de forma não-locais mais sofisticados, outros além do gaussiano, como aqueles construídos na base da função de Bessel e da função gama incompleta. Sem dúvida, as próximas pesquisas certamente também estarão na direção de desenvolver o modelo de campo espinorial aplicado aos espaços curvos, primeiramente no formalismo Riemanniano e, em seguida, em espaços com tensor de torção e tensor de curvatura homotético (metricidade) não nulos. Ademais, planejamos estudar os aspectos quânticos do modelo de campo espinorial não-local acoplado com o campo eletromagnético. E mais ainda, analisar os efeitos quânticos em modelos não-locais da gravitação, uma vez que a principal vantagem dessas teorias é a possibilidade da obtenção de resultados consistentes no regime UV. Assim sendo, escavar uma adequada descrição não-local para um modelo de gravidade quântica, em quatro dimensões, que seja renormalizável e unitária. Por fim, uma outra possibilidade de pesquisa futura seria a de estender a abordagem não-local para modelos de campos bosônicos, como também, para modelos supersimétricos.

¹ Pequenas flutuações na uniformidade do universo, que são postas como causas cruciais para a formação das estruturas das galáxias e aglomerados. Logo, a análise do desenvolvimento dessas pequenas desigualdades na densidade inicial do universo primordial, reveladas via colapsos gravitacionais, direciona o entendimento do cosmos com os vazios e as galáxias que conhecemos.

APÊNDICE A – Cálculos Auxiliares

A.1 Equações de Einstein no Formalismo Lagrangiano

Nesta seção, deduziremos as equações de Einstein no formalismo Lagrangiano, cuja ação proposta por Hilbert é dada por

$$S_{EH} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} R + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_m[g_{\mu\nu}, \psi], \quad (\text{A.1})$$

cuja equações de movimento de Einstein são obtidas pelo princípio variacional aplicado em (A.1)

$$\delta S_{EH} = \int d^4x \left[\frac{1}{2\kappa^2} \left(\frac{\sqrt{-g} \delta R}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{R \delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} \right) + \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \delta g^{\mu\nu} = 0 \quad \text{e} \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{R \delta \sqrt{-g}}{\sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu}} = -2\kappa^2 \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m)}{\sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu}} \equiv \kappa^2 T_{\mu\nu}^{(m)}, \quad (\text{A.3})$$

onde $T_{\mu\nu}^{(m)}$ o tensor momento-energia para campos de matéria. para a derivada covariante da variação da métrica e a variação dos símbolos de Christoffel, teremos

$$\nabla_\nu \delta g_{\mu\sigma} = \partial_\nu \delta g_{\mu\sigma} - \Gamma_{\nu\mu}^\alpha \delta g_{\alpha\sigma} - \Gamma_{\nu\sigma}^\alpha \delta g_{\mu\alpha}, \quad (\text{A.4})$$

$$\delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} (\nabla_\mu \delta g_{\nu\sigma} + \nabla_\nu \delta g_{\mu\sigma} - \nabla_\sigma \delta g_{\mu\nu}), \quad (\text{A.5})$$

estas equações inseridas em (2.4) produzirá a identidade de Palatini

$$\delta R^\alpha_{\mu\beta\nu} = \nabla_\beta \delta \Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \nabla_\nu \delta \Gamma^\alpha_{\mu\beta}, \quad (\text{A.6})$$

contraindo os índices α e β de (2.4)

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\alpha \delta \Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \nabla_\nu \delta \Gamma^\alpha_{\mu\alpha} = g^{\alpha\beta} (\nabla_\mu \nabla_\alpha \delta g_{\nu\beta} - \nabla_\mu \nabla_\nu \delta g_{\alpha\beta}), \quad (\text{A.7})$$

onde para o escalar de Ricci R e sua variação δR , teremos

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{\nu\alpha} \partial_\mu \Gamma_{\nu\alpha}^\mu - g^{\nu\alpha} \partial_\alpha \Gamma_{\nu\mu}^\mu + g^{\nu\alpha} \Gamma_{\nu\alpha}^\mu \Gamma_{\mu\rho}^\rho - g^{\nu\alpha} \Gamma_{\nu\mu}^\rho \Gamma_{\alpha\rho}^\mu, \quad (\text{A.8})$$

$$\delta R = R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} (\nabla_\mu \nabla_\alpha \delta g_{\nu\beta} - \nabla_\mu \nabla_\nu \delta g_{\alpha\beta}). \quad (\text{A.9})$$

Ademais, por meio do uso da célebre fórmula de Jacobi, obteremos

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (\text{A.10})$$

Desta forma, em posse de (A.9) e, (A.10), encontraremos a variação da termo geométrico da ação (A.2)

$$\begin{aligned}\delta S_{EH} &= \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} (\nabla_\mu \nabla_\alpha \delta g_{\nu\beta} - \nabla_\mu \nabla_\nu \delta g_{\alpha\beta}) \right] \\ &= \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \left[\sqrt{-g} G_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \nabla_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} (\nabla_\alpha \delta g_{\nu\beta} - \nabla_\nu \delta g_{\alpha\beta})) \right],\end{aligned}\quad (\text{A.11})$$

onde $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$ é o tensor de Einstein. Vamos agora calcular o último termo da Eq.(A.11), para isso definiremos $V^\mu = g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} (\nabla_\alpha \delta g_{\nu\beta} - \nabla_\nu \delta g_{\alpha\beta})$

$$\begin{aligned}\nabla_\mu (\sqrt{-g} V^\mu) &= \sqrt{-g} \nabla_\mu V^\mu = \sqrt{-g} (\partial_\mu V^\mu + \Gamma_{\mu\nu}^\mu V^\nu) \\ &= \sqrt{-g} (\partial_\mu V^\mu + \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} \partial_\nu g_{\mu\alpha} V^\nu) = \partial_\mu (\sqrt{-g} V^\mu),\end{aligned}$$

logo, a Eq.(A.11) torna-se em

$$\delta S_{EH} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \left[\sqrt{-g} G_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} (\nabla_\alpha \delta g_{\nu\beta} - \nabla_\nu \delta g_{\alpha\beta})) \right]. \quad (\text{A.12})$$

O último termo de (A.12) é conhecido como termo de fronteira, cujo valor depende do tipo de espaço na ação em consideração. Por hipótese, aqui assumimos apropriadamente condições de contorno no qual asseguram que o termo de fronteira desapareça, ou seja, ele não contribui para o valor da variação total acima abordada. No caso de variedades com contorno, onde tais termos de fronteira não se anulam, ver discussão na referência [191]. Finalmente chegaremos ao resultado da variação da parte geométrica do Lagrangiano de Einstein-Hilbert

$$\delta S_{EH} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} G_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (\text{A.13})$$

Desta forma, quando consideramos também o termo de matéria no Lagrangiano Eq.(A.1), a equação de movimento (A.3) se reduz as conhecidas equações de Einstein:

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa^2 T_{\mu\nu}^{(m)}}. \quad (\text{A.14})$$

Quando considerada a existência da constante cosmológica, as equações de Einstein terão a seguinte forma:

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu}^{(m)}}. \quad (\text{A.15})$$

A.2 Variação do Termo de Pontryagin na Ação de Chern-Simons

Nesta seção, mostraremos como obter o tensor de Cotton através da variação, com respeito à métrica, do termo de Pontryagin da ação de Chern-Simons, descrita a seguir

$$S_{CS} = \frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-g} \phi {}^*RR, \quad (\text{A.16})$$

onde ${}^*RR = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} R^\sigma_{\tau\mu\nu} R^\tau_{\sigma\alpha\beta}$ é a densidade de Chern-Pontryagin. Os tensores (covariante e contravariante) totalmente antissimétrico de Levi-Civita são: $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} = \sqrt{-g} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ e $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} = (\sqrt{-g})^{-1} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$, cujo valor de ϵ é +1 para permutação par de seus índices, -1 para permutação ímpar de seus índices e 0 para os demais casos. Portanto, variando a ação (A.16), teremos

$$\begin{aligned} \delta S_{CS} &= \frac{1}{4} \int d^4x \delta (\sqrt{-g} \phi {}^*RR) = \frac{1}{4} \int d^4x \delta (\phi \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} R^\sigma_{\tau\mu\nu} R^\tau_{\sigma\alpha\beta}) \\ &= \frac{1}{4} \int d^4x \phi \left(\frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \delta R^\sigma_{\tau\mu\nu} R^\tau_{\sigma\alpha\beta} + \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} R^\sigma_{\tau\mu\nu} \delta R^\tau_{\sigma\alpha\beta} \right) \\ &= \frac{1}{4} \int d^4x \phi \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} R^\sigma_{\tau\mu\nu} \delta R^\tau_{\sigma\alpha\beta} \\ &= -\frac{1}{2} \int d^4x \phi \epsilon^{\mu\nu\beta\alpha} R^\sigma_{\tau\mu\nu} \nabla_\alpha \delta \Gamma^\tau_{\sigma\beta}. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Na última passagem acima de (A.17), foi utilizado a identidade de Palatini (A.6). A integração por partes da última igualdade de (A.17), resultará em

$$-\frac{1}{2} \int d^4x \left[\nabla_\alpha (\sqrt{-g} \phi \epsilon^{\mu\nu\beta\alpha} R^\sigma_{\tau\mu\nu} \delta \Gamma^\tau_{\sigma\beta}) - \epsilon^{\mu\nu\beta\alpha} (v_\alpha R^\sigma_{\tau\mu\nu} + \phi \nabla_\alpha R^\sigma_{\tau\mu\nu}) \delta \Gamma^\tau_{\sigma\beta} \right], \quad (\text{A.18})$$

onde $v_\alpha \equiv \nabla_\alpha \phi$. O primeiro termo de (A.18) se reduz à um termo de contorno, contribuindo de modo trivial, sendo ele considerado a derivada covariante de uma densidade tensorial

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha (\sqrt{-g} J^\alpha) &= \partial_\alpha (\sqrt{-g} J^\alpha) + \sqrt{-g} J^\lambda \Gamma^\alpha_{\lambda\alpha} - \sqrt{-g} J^\lambda \Gamma^\alpha_{\lambda\alpha} \\ &= \partial_\alpha (\sqrt{-g} J^\alpha). \end{aligned}$$

Pois na geometria Riemanniana tem-se $\Gamma^\lambda_{\lambda\alpha} = \partial_\alpha \ln \sqrt{-g}$. Analisando o terceiro termo de (A.18), através da identidade de Bianchi, se verá que tal termo também é identicamente nulo

$$\nabla_{[\alpha} R^\sigma_{|\tau|\mu\nu]} = 0. \quad (\text{A.19})$$

Portanto, a Eq.(A.18) se reduz à apenas ao termo proporcional a v_α . Desta maneira, quando substituída a expressão da variação dos símbolos de Christoffel (A.5) no termo remanescente em (A.18), a variação do termo de Pontryagin da ação de Chern-Simons resultará na seguinte forma

$$\delta S_{CS} = \frac{1}{4} \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\beta\alpha} v_\alpha R^\sigma_{\mu\nu} (-\nabla_\lambda \delta g_{\sigma\beta} + \nabla_\sigma \delta g_{\beta\lambda} + \nabla_\beta \delta g_{\lambda\sigma}). \quad (\text{A.20})$$

Verifica-se que o último termo da Eq.(A.20) desaparece quando contraído o tensor simétrico $\delta g_{\lambda\sigma}$ com o tensor antissimétrico de Riemann, nos índices λ e σ . Após a permutação entre os índices λ e σ no primeiro termo de (A.20), teremos

$$\delta S_{CS} = \frac{1}{2} \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\beta\alpha} v_\alpha R_{\mu\nu}^{\sigma\lambda} \nabla_\sigma \delta g_{\beta\lambda}. \quad (\text{A.21})$$

Semelhantemente ao procedimento anterior realizado em (A.17), podemos integrar por partes a Eq.(A.21). Neste caso, surgirá, também, um termo de contorno cuja contribuição é nula.

$$\delta S_{CS} = -\frac{1}{2} \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\beta\alpha} \left(v_\alpha \nabla_\sigma R_{\mu\nu}^{\sigma\lambda} + v_{\sigma\alpha} R_{\mu\nu}^{\sigma\lambda} \right) \delta g_{\beta\lambda}, \quad (\text{A.22})$$

onde $v_{\sigma\alpha} \equiv \nabla_\sigma \nabla_\alpha \phi = \nabla_\sigma v_\alpha$. Podemos usar a identidade de Bianchi $\nabla_\sigma R_{\mu\nu}^{\sigma\lambda} = \nabla_\mu R_{\nu}^{\lambda} - \nabla_\nu R_{\mu}^{\lambda}$ para simplificar a equação anterior, além disso o segundo termo pode ser expresso em termos do tensor de Riemann dual, desta forma obtemos

$$\begin{aligned} \delta S_{CS} &= - \int d^4x \sqrt{-g} \left(v_\alpha \epsilon^{\beta\alpha\mu\nu} \nabla_\mu R_{\nu}^{\lambda} + v_{\sigma\alpha} {}^*R^{\sigma\lambda\beta\alpha} \right) \delta g_{\beta\lambda} \\ &= -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left(v_\alpha \epsilon^{\beta\alpha\mu\nu} \nabla_\mu R_{\nu}^{\lambda} + v_\alpha \epsilon^{\lambda\alpha\mu\nu} \nabla_\mu R_{\nu}^{\beta} + v_{\sigma\alpha} {}^*R^{\sigma\lambda\beta\alpha} + v_{\sigma\alpha} {}^*R^{\sigma\beta\lambda\alpha} \right) \delta g_{\beta\lambda} \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} C^{\beta\lambda}. \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Portanto, o tensor de Cotton é obtido através da variação, com respeito à métrica, do termo de Pontryagin da ação de Chern-Simons, sendo explicitamente definido como sendo

$$C^{\mu\nu} \equiv -\frac{1}{2} \left[v_\alpha (\epsilon^{\mu\alpha\beta\lambda} \nabla_\beta R_{\lambda}^{\nu} + \epsilon^{\nu\alpha\beta\lambda} \nabla_\beta R_{\lambda}^{\mu}) + v_{\sigma\alpha} ({}^*R^{\sigma\nu\mu\alpha} + {}^*R^{\sigma\mu\nu\alpha}) \right]. \quad (\text{A.24})$$

É de fácil constatação a natureza simétrica do tensor de Cotton. Ademais, como veremos a seguir, o tensor de Cotton possui traço nulo

$$g_{\mu\nu} C^{\mu\nu} = -v_\alpha \epsilon^{\alpha\mu\beta\lambda} \nabla_\beta R_{\mu\lambda} - \frac{1}{2} v_{\sigma\alpha} \epsilon^{\alpha\mu\beta\lambda} R_{\mu\beta\lambda}^{\sigma} = 0, \quad (\text{A.25})$$

onde o primeiro termo de (A.25) é nulo, pois existe a contração do tensor de Ricci simétrico com o tensor de Levi-Civita antissimétrico, enquanto que o segundo termo se anula devido a identidade de Bianchi $R_{[\mu\beta\lambda]}^{\alpha} = 0$.

A.3 Divergência Covariante do Tensor de Cotton

Com o uso de tensor de Riemann dual e (A.23), podemos redefinir o tensor de Cotton (A.24)

$$C^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\nabla_\tau \left(v_\alpha {}^*R^{\tau\mu\alpha\nu} + v_\alpha {}^*R^{\tau\nu\alpha\mu} \right). \quad (\text{A.26})$$

Usando a antissimetria de ${}^*R^{\tau\mu\alpha\nu}$ em $[\tau, \mu]$, podemos apresentar

$$\nabla_\mu C^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\nabla_\tau \nabla_\mu (v_\alpha {}^*R^{\tau\nu\alpha\mu}) + \frac{1}{2}[\nabla_\tau, \nabla_\mu] \left(v_\alpha {}^*R^{\tau\nu\alpha\mu} + \frac{1}{2}v_\alpha {}^*R^{\tau\mu\alpha\nu} \right). \quad (\text{A.27})$$

A primeira contribuição para $\nabla_\mu C^{\mu\nu}$ é vazia. Isto é estabelecido notando o que ocorre com

$$\nabla_\mu (v_\alpha {}^*R^{\tau\nu\alpha\mu}) = v_{\mu\alpha} {}^*R^{\tau\nu\alpha\mu} + v_\alpha \varepsilon^{\alpha\mu\sigma\beta} \nabla_\mu R^{\tau\nu}_{\sigma\beta}. \quad (\text{A.28})$$

O primeiro termo do lado direito de (A.28) é nulo, pois há contração do tensor antissimétrico ${}^*R^{\tau\nu\alpha\mu}$ com o tensor simétrico $v_{\mu\alpha}$, com respeito aos seus índices $[\alpha, \mu]$. Nota-se, também, que não há contribuição para o segundo termo, pois a identidade de Bianchi é satisfeita para o tensor de Riemann. Portanto, o termo remanescente de (A.27) envolve o comutador das derivadas covariantes, e leva a

$$\begin{aligned} \nabla_\mu C^{\mu\nu} &= \frac{v_\alpha}{2} \left[\left({}^*R^{\lambda\nu\alpha\mu} + \frac{1}{2}{}^*R^{\lambda\mu\alpha\nu} \right) R^\tau_{\lambda\mu\tau} + {}^*R^{\tau\lambda\alpha\mu} R^\nu_{\lambda\mu\tau} + \frac{1}{2}{}^*R^{\tau\lambda\alpha\nu} R^\mu_{\lambda\mu\tau} \right. \\ &\quad \left. + {}^*R^{\tau\nu\alpha\lambda} R^\mu_{\lambda\mu\tau} + \frac{1}{2}{}^*R^{\tau\mu\alpha\lambda} R^\nu_{\lambda\mu\tau} \right] \\ &= \frac{v_\alpha}{2} \left[- \left({}^*R^{\lambda\nu\alpha\mu} + \frac{1}{2}{}^*R^{\lambda\mu\alpha\nu} \right) R_{\lambda\mu} + \left({}^*R^{\tau\nu\alpha\lambda} + \frac{1}{2}{}^*R^{\tau\lambda\alpha\nu} \right) R_{\lambda\tau} \right. \\ &\quad \left. + \left({}^*R^{\tau\lambda\alpha\mu} + \frac{1}{2}{}^*R^{\tau\mu\alpha\lambda} \right) R^\nu_{\lambda\mu\tau} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

Nesta equação, as quantidades envolvendo o tensor de Ricci desaparecem devido à sua simetria. O último termo entre colchetes é expandido usando a antissimetria de ${}^*R^{\tau\lambda\alpha\mu}$ em $[\tau, \lambda]$. Assim ficamos com

$$\begin{aligned} \nabla_\mu C^{\mu\nu} &= \frac{v_\alpha}{4} \left[{}^*R^{\tau\lambda\alpha\mu} (R^\nu_{\lambda\mu\tau} - R^\nu_{\tau\mu\lambda}) + {}^*R^{\tau\mu\alpha\lambda} R^\nu_{\lambda\mu\tau} \right] \\ &= \frac{v_\alpha}{4} \left[{}^*R^{\tau\lambda\alpha\mu} R^\nu_{\mu\lambda\tau} + {}^*R^{\tau\mu\alpha\lambda} R^\nu_{\lambda\mu\tau} \right] \\ &= \frac{v_\alpha}{2} {}^*R^{\tau\lambda\alpha\mu} R_{\lambda\tau}{}^\nu{}_\mu. \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

As propriedades cíclicas do tensor de Riemann permitiram as passagens de uma expressão para a outra em (A.30). Finalmente usando a identidade

$${}^*R^\tau{}_\lambda{}^{\alpha\mu} R^\lambda_{\tau\nu\mu} = \frac{1}{4}\delta^\alpha_\nu {}^*RR,$$

resultará em

$$\boxed{\nabla_\mu C^{\mu\nu} = \frac{v^\nu}{8} {}^*RR} \quad (\text{A.31})$$

A.4 Divergência das Equações de Campo da Teoria $f(R, {}^*RR)$

Nesta seção, calcularemos a divergência das equações de campo modificadas (4.7)

$$\begin{aligned} f_R R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f + g_{\mu\nu} \square f_R - \nabla_{(\mu} \nabla_{\nu)} f_R + \frac{1}{2} {}^*RR f_{{}^*RR} g_{\mu\nu} \\ + 4 \left(v_\lambda \varepsilon^{\lambda\beta\alpha}{}_{(\mu} \nabla_{|\alpha|} R_{\nu)\beta} + {}^*R_{(\nu\mu)}^\gamma{}^\lambda \nabla_\gamma \nabla_\lambda f_{{}^*RR} \right) = \kappa^2 T_{\mu\nu}^{(m)}. \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

Para início, apresentaremos as seguintes identidades de Bianchi, contraídas e não contraídas,

$$\begin{aligned} 0 &= R_{\theta\mu\gamma}^\nu + R_{\mu\gamma\theta}^\nu + R_{\gamma\theta\mu}^\nu; \\ 0 &= \nabla_\delta R_{\alpha\beta\mu\nu} + \nabla_\nu R_{\alpha\beta\delta\mu} + \nabla_\mu R_{\alpha\beta\nu\delta}; \\ 0 &= \nabla^\alpha R_{\alpha\beta\mu\nu} + \nabla_\nu R_{\beta\mu} - \nabla_\mu R_{\beta\nu;\mu}; \\ 0 &= 2\nabla^\mu R_{\mu\nu} - \nabla_\nu R; \\ 0 &= 2\nabla_{\mu\nu} R_{\mu\nu} - \square R. \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

Pela conservação de energia, $\nabla_\mu T_{(m)}^{\mu\nu} = 0$, a divergência das equações de campo modificadas (4.7), terão a seguinte forma

$$\begin{aligned} -\nabla_\mu C^{\mu\nu} &= \nabla_\mu (f_R R^{\mu\nu}) - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu f + g^{\mu\nu} \nabla_\mu \square f_R - \nabla_\mu \nabla^{(\mu} \nabla^{\nu)} f_R \\ &= (\nabla_\mu f_R) R^{\mu\nu} + f_R \nabla_\mu R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \nabla^\nu f + \nabla^\nu \square f_R - \square \nabla^\nu f_R, \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

onde o último termo de (A.34), encontraremos

$$\begin{aligned} \square \nabla^\nu f_R &= g^{\mu\alpha} \nabla_\mu \nabla_\alpha \nabla^\nu f_R = g^{\mu\alpha} \nabla_\mu \nabla^\nu \nabla_\alpha f_R = g^{\mu\alpha} \nabla_\mu \nabla^\nu \Phi_\alpha \\ &= g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \nabla_\mu \nabla_\beta \Phi_\alpha = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} ([\nabla_\mu, \nabla_\beta] + \nabla_\beta \nabla_\mu) \Phi_\alpha \\ &= g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} [-\Phi_\lambda R_{\alpha\mu\beta}^\lambda + \nabla_\beta \nabla_\mu \Phi_\alpha] \\ &= -(\nabla_\lambda f_R) R_{\mu}^{\lambda\mu\nu} + \nabla^\nu \nabla^\alpha \nabla_\alpha f_R \\ &= (\nabla_\lambda f_R) R^{\lambda\nu} + \nabla^\nu \square f_R. \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

Substituindo a quarta equação de (A.33) e (A.35) em (A.34), chegaremos a Eq.(4.12), conforme os passos demonstrados a seguir

$$\begin{aligned} -\nabla_\mu C^{\mu\nu} &= (\nabla_\mu f_R) R^{\mu\nu} + \frac{1}{2} f_R \nabla^\nu R - \frac{1}{2} \nabla^\nu f + \nabla^\nu \square f_R - (\nabla_\lambda f_R) R^{\lambda\nu} - \nabla^\nu \square f_R \\ &= \frac{1}{2} f_R \nabla^\nu R - \frac{1}{2} (f_R \nabla^\nu R + f_{{}^*RR} \nabla^\nu {}^*RR), \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

enfim, a divergência covariante do C -tensor da teoria $f(R, {}^*RR)$ será

$$\boxed{\nabla_\mu C^{\mu\nu} = \frac{1}{2} f_{{}^*RR} \nabla^\nu {}^*RR}. \quad (\text{A.37})$$

Agora, vamos calcular a divergência do termo entre colchetes do C -tensor (4.10)

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu \chi^{\mu\nu} &= 4\nabla_\mu \left(v_\lambda \varepsilon^{\lambda\beta\alpha(\mu} \nabla_\alpha R^\nu_{\beta)} + {}^*R^{\gamma(\nu\mu)\lambda} \nabla_\gamma \nabla_\lambda f_{RR} \right) \\
&= 4\nabla_\mu \nabla_\gamma \left(v_\lambda f_{RR} {}^*R^{\gamma(\nu\mu)\lambda} \right) \\
&= 4([\nabla_\mu, \nabla_\gamma] + \nabla_\gamma \nabla_\mu) \nabla_\lambda f_{RR} {}^*R^{\gamma(\nu\mu)\lambda} \\
&= 4\nabla_\gamma \nabla_\mu \nabla_\lambda f_{RR} {}^*R^{\gamma(\nu\mu)\lambda} + 4[\nabla_\mu, \nabla_\gamma] \nabla_\lambda f_{RR} {}^*R^{\gamma(\nu\mu)\lambda},
\end{aligned} \tag{A.38}$$

sendo nulo o primeiro termo desta equação, devido a simetria dos índices (μ, λ) . Logo

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu \chi^{\mu\nu} &= 4[\nabla_\mu, \nabla_\gamma] \nabla_\lambda f_{RR} {}^*R^{\gamma\nu\mu\lambda} + \frac{1}{2} {}^*R^{\gamma\mu\nu\lambda} \\
&= 4v_\lambda \left({}^*R^{\theta\nu\mu\lambda} R^\gamma_{\theta\mu\gamma} + {}^*R^{\gamma\theta\mu\lambda} R^\nu_{\theta\mu\gamma} + {}^*R^{\gamma\nu\theta\lambda} R^\mu_{\theta\mu\gamma} + \frac{1}{2} {}^*R^{\theta\mu\nu\lambda} R^\gamma_{\theta\mu\gamma} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} {}^*R^{\gamma\theta\nu\lambda} R^\mu_{\theta\mu\gamma} + \frac{1}{2} {}^*R^{\gamma\mu\theta\lambda} R^\nu_{\theta\mu\gamma} \right) \\
&= 4v_\lambda \left[\left({}^*R^{\theta\nu\mu\lambda} + \frac{1}{2} {}^*R^{\theta\mu\nu\lambda} \right) R^\gamma_{\theta\mu\gamma} + {}^*R^{\gamma\theta\mu\lambda} R^\nu_{\theta\mu\gamma} + \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{2} {}^*R^{\gamma\theta\nu\lambda} R^\mu_{\theta\mu\gamma} + {}^*R^{\gamma\nu\theta\lambda} R^\mu_{\theta\mu\gamma} + \frac{1}{2} {}^*R^{\gamma\mu\theta\lambda} R^\nu_{\theta\mu\gamma} \right] \\
&= 4v_\lambda \left[\left({}^*R^{\theta\nu\mu\lambda} + \frac{1}{2} {}^*R^{\theta\mu\nu\lambda} \right) R_{\theta\mu} + \left({}^*R^{\gamma\theta\mu\lambda} + \frac{1}{2} {}^*R^{\gamma\mu\theta\lambda} \right) R^\nu_{\theta\mu\gamma} + \left({}^*R^{\mu\nu\theta\lambda} + \frac{1}{2} {}^*R^{\mu\theta\nu\lambda} \right) R_{\theta\mu} \right] \\
&= 4v_\lambda \left[\left({}^*R^{\mu\nu\theta\lambda} - {}^*R^{\theta\nu\mu\lambda} + {}^*R^{\mu\theta\nu\lambda} \right) R_{\theta\mu} + \left({}^*R^{\gamma\theta\mu\lambda} + \frac{1}{2} {}^*R^{\gamma\mu\theta\lambda} \right) R^\nu_{\theta\mu\gamma} \right].
\end{aligned} \tag{A.39}$$

Nota-se que não há contribuição para os termos contidos no primeiro par de parênteses de (A.39), devido à simetria de Ricci nos dois primeiros termos, e à identidade de Bianchi no terceiro termo, logo (A.39) resultará em

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu \chi^{\mu\nu} &= 2v_\lambda \left({}^*R^{\gamma\theta\mu\lambda} (R^\nu_{\theta\mu\gamma} - R^\nu_{\gamma\mu\theta}) + {}^*R^{\gamma\mu\theta\lambda} R^\nu_{\theta\mu\gamma} \right) \\
&= 2v_\lambda \left({}^*R^{\gamma\theta\mu\lambda} R^\nu_{\mu\theta\gamma} + {}^*R^{\gamma\mu\theta\lambda} R^\nu_{\theta\mu\gamma} \right) = 2v_\lambda {}^*R^{\gamma\theta\mu\lambda} (R^\nu_{\mu\theta\gamma} + R^\nu_{\mu\theta\gamma}) \\
&= 2v_\lambda {}^*R^{\gamma\theta\mu\lambda} R^\nu_{\mu\theta\gamma} = 2v_\lambda {}^*R^{\mu\lambda\gamma\theta} R^\nu_{\mu\gamma\theta}.
\end{aligned} \tag{A.40}$$

Na passagem da primeira linha de (A.40) foi utilizado a primeira identidade de Bianchi (A.33). Note que

$${}^*R^{\mu\lambda\gamma\theta} R^\nu_{\mu\gamma\theta} = \frac{1}{4} g^{\lambda\nu} {}^*RR, \tag{A.41}$$

logo

$$\nabla_\mu \chi^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} v_\lambda g^{\lambda\nu} {}^*RR = -\frac{1}{2} v^\nu {}^*RR = -\frac{1}{2} {}^*RR \nabla^\nu f_{RR}. \tag{A.42}$$

Comparando os resultados encontrados em (A.42), (A.37) e (4.10), veremos que eles estão em concordância

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu C^{\mu\nu} &= \nabla_\mu X^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \nabla_\mu (f_{RR} {}^*RR) g^{\mu\nu} \\
&= -\frac{1}{2} {}^*RR \nabla^\nu f_{RR} + \frac{1}{2} f_{RR} \nabla^\nu {}^*RR + \frac{1}{2} {}^*RR \nabla^\nu f_{RR} \\
&= \frac{1}{2} f_{RR} \nabla^\nu {}^*RR.
\end{aligned} \tag{A.43}$$

A.5 Obtenção da Ação Efetiva Fermiônica Não-Local de Um-Laço

Aqui iremos demonstrar os procedimentos adotados no ambiente do software Wolfram Mathematica, com seus respectivos resultados obtidos em respostas aos comandos realizados que resultaram na ação efetiva fermiônica (5.54) descrita na seção (5.2.2).

$$\Gamma_1 = \Gamma_1^{(1)} + \Gamma_1^{(2)} = I_{IR}^{(1)} + I_{UV}^{(1)} + I_{IR}^{(2)} + I_{UV}^{(2)}. \quad (\text{A.44})$$

no limite IR ($\Lambda \gg 1$), ou seja, quando $\tilde{\Phi} \ll p$.

$$\begin{aligned} I_{IR}^{(2)} &= -\frac{1}{8\pi^2\Lambda^2} \int_0^\Omega dp \frac{p^9}{(p^2 + \tilde{\Phi}^2)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda^4}\right) \\ &= -\frac{1}{8\pi^2\Lambda^2} \left[2\tilde{\Phi}^6 \ln\left(\frac{\tilde{\Phi}^2}{\tilde{\Phi}^2 + \Omega^2}\right) + \frac{12\tilde{\Phi}^6\Omega^2 + 6\tilde{\Phi}^4\Omega^4 - 2\tilde{\Phi}^2\Omega^6 + \Omega^8}{6(\tilde{\Phi}^2 + \Omega^2)} \right] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda^4}\right). \end{aligned} \quad (\text{A.45})$$

Nesse caso, iniciamos os cálculos expandindo o termo entre colchetes da equação (5.63)

$$1 - \left[\frac{p^2 \sinh\left(\frac{2p}{\Lambda}\right)}{p^2 \cosh\left(\frac{2p}{\Lambda}\right) + \tilde{\Phi}^2} \right]^2, \quad (\text{A.46})$$

em torno de $\Lambda \gg 1$, por meio do seguinte comando:

$$\text{Series}[1 - ((p^2 * \text{Sinh}[2p/\Lambda]) / (p^2 * \text{Cosh}[2p/\Lambda] + \tilde{\Phi}^2))^2, \{\Lambda, \text{Infinity}, 3\}],$$

que resultou em

$$1 - \frac{4p^6}{(\tilde{\Phi}^2 + p^2)^2 \Lambda^2} + \mathcal{O}(\Lambda^{-4}). \quad (\text{A.47})$$

Agora, expandindo em série do logaritmo da equação acima (A.47), cujo comando no Wolfram Mathematica foi

$$\text{Series}\left[\text{Log}\left[1 - \frac{4p^6}{(\tilde{\Phi}^2 + p^2)^2 \Lambda^2}\right], \{\Lambda, \text{Infinity}, 3\}\right].$$

Integrando o resultado acima, ou seja, colocando-o na forma da Eq.(5.65), foi dado o comando:

$$(1/(32*\text{Pi}^2))*\text{Integrate}\left[-\frac{4k^9}{(a^2 + k^2)^2 L^2}, \{k, 0, \Omega\}, \text{Assumptions} \rightarrow a > 0 \& \& L > 0 \& \& b > 0, \right],$$

cujo resultado obtido foi a expressão

$$-\frac{12\tilde{\Phi}^6\Omega^2 + 6\tilde{\Phi}^4\Omega^4 - 2\tilde{\Phi}^2\Omega^6 + \Omega^8}{(\tilde{\Phi}^2 + \Omega^2)48\Lambda^2\pi^2} + \frac{\tilde{\Phi}^6}{4\Lambda^2\pi^2} \text{Log}\left[1 + \frac{\Omega^2}{\tilde{\Phi}^2}\right],$$

que é o resultado da Eq.(5.65). Agora, faremos o mesmo procedimento para integral (5.57). Neste caso, para o limite IR, teremos o comando “Series” dado por

$$\text{Series}[\text{Log}[p^2 * \text{Cosh}[2 * p/\Lambda] + \tilde{\Phi}^2], \{\Lambda, \text{Infinity}, 3\}],$$

resultando em

$$\text{Log}(\tilde{\Phi}^2 + p^2) + \frac{2p^4}{(\tilde{\Phi}^2 + p^2)^2 \Lambda^2} + \mathcal{O}(\Lambda^{-4})$$

Vamos integrar equação acima (substituir na Eq.(5.57), cujo comando será

$$\text{Integrate} \left[p^3 * \left(\text{Log}[\tilde{\Phi}^2 + p^2] + \frac{2p^4}{(\tilde{\Phi}^2 + p^2)^2 \Lambda^2} \right), \{p, 0, \Omega\}, \right],$$

que resultará em

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6\Lambda^2} \left(6\tilde{\Phi}^4\Omega^2 - 3\tilde{\Phi}^2\Omega^4 + 2\Omega^6 + 6\tilde{\Phi}^6 \text{Log} \left[\frac{\tilde{\Phi}^2}{\tilde{\Phi}^2 + \Omega^2} \right] \right) \\ & + \frac{1}{8} \left(2\tilde{\Phi}^2\Omega^2 - \Omega^4 + 4\tilde{\Phi}^4 \text{Log}[\tilde{\Phi}] + 2 \left(-\tilde{\Phi}^4 + \Omega^4 \right) \text{Log}[\tilde{\Phi}^2 + \Omega^2] \right). \end{aligned} \quad (\text{A.48})$$

Multiplicando (A.48) por $\frac{\pi^2}{16}$, teremos

$$\begin{aligned} & \frac{6\tilde{\Phi}^4\Omega^2 - 3\tilde{\Phi}^2\Omega^4 + 2\Omega^6 + 6\tilde{\Phi}^6 \text{Log} \left(\frac{\tilde{\Phi}^2}{\tilde{\Phi}^2 + \Omega^2} \right)}{96\Lambda^2\pi^2} \\ & + \frac{1}{128\pi^2} \left[2\tilde{\Phi}^2\Omega^2 - \Omega^4 + 4\tilde{\Phi}^4 \text{Log}(\tilde{\Phi}) + 2 \left(-\tilde{\Phi}^4 + \Omega^4 \right) \text{Log}(\tilde{\Phi}^2 + \Omega^2) \right] \\ & - \frac{12\tilde{\Phi}^6\Omega^2 + 6\tilde{\Phi}^4\Omega^4 - 2\tilde{\Phi}^2\Omega^6 + \Omega^8}{(\tilde{\Phi}^2 + \Omega^2)48\Lambda^2\pi^2} + \frac{\tilde{\Phi}^6}{4\Lambda^2\pi^2} \text{Log} \left(\frac{\tilde{\Phi}^2 + \Omega^2}{\tilde{\Phi}^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

Rearrmando os termos de (A.49), obteremos

$$-\frac{12\tilde{\Phi}^6\Omega^2 + 6\tilde{\Phi}^4\Omega^4 - 2\Omega^6 + \Omega^8}{(\tilde{\Phi}^2 + \Omega^2)48\Lambda^2\pi^2} + \frac{\tilde{\Phi}^6}{4\Lambda^2\pi^2} \text{Log} \left(\frac{\tilde{\Phi}^2 + \Omega^2}{\tilde{\Phi}^2} \right). \quad (\text{A.50})$$

Sendo (A.50) a Eq.(5.59). No limite UV, ou seja, $p \approx \Lambda \gg \tilde{\Phi}$. Nesse caso, devemos expandir (5.63) em torno de $\tilde{\Phi}$ pequeno ($\tilde{\Phi} \ll 1$).

$$\text{Log}[1 - ((p^2 * \text{Sinh}[2p/\Lambda]) / ((p^2 * \text{Cosh}[2p/\Lambda]) + (\tilde{\Phi}^2)))^2], \quad (\text{A.51})$$

$$\text{Log} \left[1 - \frac{p^4 \text{Sinh} \left(\frac{2p}{\Lambda} \right)^2}{(\tilde{\Phi}^2 + p^2 \text{Cosh} \left(\frac{2p}{\Lambda} \right))^2} \right], \quad (\text{A.52})$$

$$\text{Series}[\text{Log}[1 - ((p^2 * \text{Sinh}[2p/\Lambda]) / ((p^2 * \text{Cosh}[2p/\Lambda]) + (\tilde{\Phi}^2)))^2], \{\tilde{\Phi}, 0, 4\}]$$

$$\begin{aligned}
& \text{Log} \left[1 - \text{Tanh} \left[\frac{2p}{\Lambda} \right]^2 \right] - \frac{2 \left(\text{Sech} \left[\frac{2p}{\Lambda} \right] \text{Tanh} \left[\frac{2p}{\Lambda} \right]^2 \right) \tilde{\Phi}^2}{p^2 \left(-1 + \text{Tanh} \left[\frac{2p}{\Lambda} \right]^2 \right)} \\
& + \frac{\text{Sech} \left[\frac{2p}{\Lambda} \right]^2 \left(-3 \text{Tanh} \left[\frac{2p}{\Lambda} \right]^2 + \text{Tanh} \left[\frac{2p}{\Lambda} \right]^4 \right) \tilde{\Phi}^4}{p^4 \left(-1 + \text{Tanh} \left[\frac{2p}{\Lambda} \right]^2 \right)^2} + O[\tilde{\Phi}^5], \\
& \text{Log} \left(\text{Sech} \left(\frac{2p}{\Lambda} \right)^2 \right) + \frac{2 \text{Sinh} \left(\frac{2p}{\Lambda} \right) \text{Tanh} \left(\frac{2p}{\Lambda} \right) \tilde{\Phi}^2}{p^2} - \frac{\left(2 + \text{Cosh} \left(\frac{4p}{\Lambda} \right) \right) \text{Tanh} \left(\frac{2p}{\Lambda} \right)^2 \tilde{\Phi}^4}{p^4} + O(\tilde{\Phi})^5.
\end{aligned} \tag{A.53}$$

O primeiro termo não depende do campo de fundo, portanto, pode ser desconsiderado, restando apenas o segundo termo. Apesar de $p \approx \Lambda$, vamos considerar momentos altíssimos ($p \rightarrow \infty$), então o segundo termo se reduz a:

$$\text{Exp}[2 * p/\Lambda] * \tilde{\Phi}^2/p^2 \implies \frac{\tilde{\Phi}^2 e^{\frac{2p}{\Lambda}}}{p^2} \tag{A.54}$$

Substituindo (A.54) em (5.65), encontraremos a integral (5.66):

$$((1/(32 * \text{Pi}^2))) * \text{Integrate}[p * \text{Exp}[2 * p/\Lambda] * \tilde{\Phi}^2, \{p, \Lambda_{UV}, \Omega\}]. \tag{A.55}$$

$$\frac{\tilde{\Phi}^2}{128\pi^2} \left[e^{\frac{2\Lambda_{UV}}{\Lambda}} \Lambda(-2\Lambda_{UV} + \Lambda) - e^{\frac{2\Omega}{\Lambda}} \Lambda(\Lambda - 2\Omega) \right]. \tag{A.56}$$

Que é o resultado correspondente à segunda linha da Eq.(5.67). Procedendo similarmente para a ação $\Gamma_1^{(1)}$, conforme Eq.(5.64). No limite UV, teremos:

$$\text{Series}[\text{Log}[p^2 * \text{Exp}[2 * p/\Lambda]/2 + \tilde{\Phi}^2], \{\tilde{\Phi}, 0, 2\}], \tag{A.57}$$

$$\text{Log} \left(\frac{1}{2} e^{\frac{2p}{\Lambda}} p^2 \right) + \frac{2e^{-\frac{2p}{\Lambda}} \tilde{\Phi}^2}{p^2} + O(\tilde{\Phi}^3). \tag{A.58}$$

O primeiro termo não depende do campo de fundo, então descartaremos ele. Logo, ao integrar o segundo termo de (5.61), obteremos:

$$(\tilde{\Phi}^2/(8 * \text{Pi}^2)) * \text{Integrate} \left[e^{-\frac{2p}{\Lambda}} \tilde{\Phi}^2 * p, \{p, \Lambda_{UV}, \text{Infinity}\} \right], \tag{A.59}$$

$$\frac{\tilde{\Phi}^4 e^{-\frac{2\Lambda_{UV}}{\Lambda}} \Lambda(2\Lambda_{UV} + \Lambda)}{32\pi^2}, \text{ se } \text{Re}(\Lambda) > 0. \tag{A.60}$$

Que corresponde a segunda linha de (5.61)

$$\frac{\tilde{\Phi}^2 \Omega^2}{4} + \frac{\tilde{\Phi}^4 \Omega^2}{\Lambda^2} - \frac{\Omega^4}{8} - \frac{\tilde{\Phi}^2 \Omega^4}{2\Lambda^2} + \frac{\Omega^6}{3L^2} + \frac{1}{2} \tilde{\Phi}^4 \text{Log}(\tilde{\Phi}). \tag{A.61}$$

$$+ \frac{\tilde{\Phi}^6 \text{Log} \left(\frac{\tilde{\Phi}^2}{\tilde{\Phi}^2 + \Omega^2} \right)}{\Lambda^2} - \frac{1}{4} \tilde{\Phi}^4 \text{Log} \left(\tilde{\Phi}^2 + \Omega^2 \right) + \frac{1}{4} \Omega^4 \text{Log} \left(\tilde{\Phi}^2 + \Omega^2 \right). \tag{A.62}$$

APÊNDICE B – Teoremas e Definições

B.1 Instabilidades de Ostrogradsky

Em 1850, Mikhail Ostrogradsky (1801-1862) demonstrou serem possuídos de instabilidades todos os sistemas descritos por teorias clássicas de derivadas superiores [284]. Tais instabilidades, no nível clássico, traduzem-se em decaimentos espontâneos do vácuo, uma vez que estados de vácuo podem decair em estados excitados de partículas e antipartículas, contribuindo positivamente e negativamente, respectivamente, para a Hamiltoniana. Estes decaimentos não só são possíveis, mas são favorecidos se analisados a partir do ponto de vista da entropia [283].

Por outro lado, no nível quântico, também, obter-se-ia um Hamiltoniano que poderia ter valor negativo, sendo capaz de excitar indefinidamente um estado quântico com energias ilimitadas e criar pares de partícula-antipartícula espontaneamente que, por sua vez, decairia em pares de partícula-antipartícula de maior energia levando a um decaimento contínuo do estado de vácuo. Ao contrário do que é visto, por exemplo, na QED. Em síntese, conclui-se que este tipo de teoria é inconciliável com o Universo observado, porque nosso estado fundamental seria atormentado por modos de energia altamente excitados que não se desacoplam, como acontece em uma teoria estável.

A análise realizada por Ostrogradsky implica existir instabilidade linear nos Hamiltonianos associados aos Lagrangianos que dependem de derivada temporal de ordem superior a um, de tal forma que as derivadas de ordem superior não podem ser eliminadas por integração parcial¹. A construção de Ostrogradsky é a seguinte:

Para teorias com o Lagrangiano $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, \dot{x})$ dependente somente de x e \dot{x} , as equações de Euler-Lagrange deste sistema são dadas por

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = 0 \implies \ddot{x} = F(x, \dot{x}) \implies x(t) = x(t, x_0, \dot{x}_0), \quad (\text{B.1})$$

seja o Lagrangiano (B.1) não degenerado $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^2} \neq 0$, as soluções dependerá dos valores iniciais

$$x_0 = x(0) \quad \text{e} \quad \dot{x}_0 = \dot{x}(0), \quad (\text{B.2})$$

isto assegura a existência de duas coordenadas canônicas, $X \equiv x$ e $P \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}$, sendo possível a inversão do espaço de fase onde \dot{x} é dado em termos de X e P . Ou seja, existe uma

¹ Nesse sentido, Isaac Newton (1642-1727) estava certo ao presumir que as leis da física tomam a forma de equações diferenciais de segunda ordem, quando expressas em termos de variáveis dinâmicas fundamentais.

velocidade $V(X, P)$ tal que,

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right|_{\substack{x=X \\ \dot{x}=V}} = P. \quad (\text{B.3})$$

Desse modo, teremos as seguintes equações em coordenadas generalizadas

$$\begin{aligned} \dot{X} &\equiv \frac{\partial H}{\partial P} = V + P \frac{\partial V}{\partial P} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \frac{\partial V}{\partial P} = V; \\ \dot{P} &\equiv -\frac{\partial H}{\partial X} = -P \frac{\partial V}{\partial X} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \frac{\partial V}{\partial X} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}. \end{aligned}$$

O Hamiltoniano² deste sistema é obtido quando aplicado a transformação de Legendre em \dot{x}

$$H(X, P) \equiv P\dot{x} - \mathcal{L} = PV - \mathcal{L} \geq 0, \quad (\text{B.4})$$

com $V = V(X, P)$ e $\mathcal{L} = \mathcal{L}(X, V)$. Sendo (B.4) positivamente definido e, portanto, limitado por baixo.

Um exemplo familiar é o oscilador harmônico simples de massa m e frequência ω , cujo Lagrangiano é,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \implies \ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t) \implies x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin(\omega t),$$

cujas variáveis canônicas são $X = x$, $P = m\dot{x} \implies V(X, P) = \frac{P^2}{m}$, e sua Hamiltoniana possui termos quadráticos em X e P , por isso é limitada por baixo

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{P^2}{m} + m\omega^2 X^2 \right) \geq 0.$$

Outro exemplo de teoria estável, agora no contexto da teoria de campo escalar, é a ação geratriz da equação de Klein-Gordon

$$S = - \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right) \implies (\square - m^2) = 0, \quad (\text{B.5})$$

además, quando definido $P = \dot{\phi}$, como sendo o momento associado do campo ϕ , decorrerá na seguinte densidade Hamiltoniana limitada por baixo

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}P^2 + \frac{1}{2}(\partial_i \phi \partial^i \phi) + \frac{1}{2}m^2 \phi^2 \geq 0. \quad (\text{B.6})$$

Agora considerando um sistema cujo Lagrangiano seja $\mathcal{L}(x, \dot{x}, \ddot{x})$, não degenerado em \ddot{x} . As equações de Euler-Lagrange serão

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{q}} = 0 \implies \ddot{\ddot{x}} = F(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}}) \implies x(t) = x(t, x_0, \dot{x}_0, \ddot{x}_0, \ddot{\ddot{x}}_0). \quad (\text{B.7})$$

² Quando ausente a dependência explícita do tempo, o Hamiltoniano é uma quantidade conservada.

As quatro coordenadas canônicas de Ostrogradsky serão

$$\begin{aligned} X_1 &\equiv x; \\ X_2 &\equiv \dot{x}; \\ P_1 &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{x}}; \\ P_2 &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{x}}. \end{aligned} \tag{B.8}$$

Assim, o Hamiltoniano de Ostrogradsky é obtido pelas transformações de Legendre em $\dot{x} = x^{(1)}$ e $\ddot{x} = x^{(2)}$

$$H \equiv \sum_{i=1}^2 P_i x^i - \mathcal{L} = P_1 X_2 + P_2 A - \mathcal{L}, \tag{B.9}$$

onde

$$\begin{aligned} A &= A(X_1, X_2, P_2); \\ \mathcal{L} &= \mathcal{L}(X_1, X_2, A); \\ H &= H(X_1, X_2, P_1, P_2). \end{aligned} \tag{B.10}$$

Mediante o exposto, percebe-se que o Hamiltoniano de Ostrogradsky (B.9) é linear no momento canônico P_1 , podendo assumir quaisquer valores positivos ou negativos, criando excitação patológica de graus de liberdade de energias positiva e negativa, portanto, atribuindo instabilidades aos sistemas com esta forma.

Enfim, pode-se estender a análise da existência de instabilidades para os sistemas de dimensões maiores que (B.7) cujo Lagrangiano tenha dependência, não degenerada, nos termos de derivadas temporais de ordem $n \geq 3$ (\ddot{x} , \dddot{x} , ...). E, sabendo que quanto maior for a dependência do Lagrangiano nos termos superiores de derivadas do tempo, maior será o espaço de fase, se comparado com o espaço de configuração.

Então, conclui-se que qualquer Lagrangiano não degenerado contendo termos superiores à primeira ordem na derivada temporal sofre da instabilidade de Ostrogradsky. Isto decorre do fato do Lagrangiano depender de um número menor de coordenadas do que o número de coordenadas canônicas, que correspondem aos parâmetros iniciais necessários para especificar o problema.

B.2 Teorema de Lovelock

Em 1971, o físico britânico David Lovelock (1938-) formulou um teorema onde afirma ser as equações de campo de Einstein as únicas equações de movimento possíveis quando provenientes de uma ação gravitacional local, que contém apenas termos de até segunda ordem da derivada da métrica, num espaço-tempo quadridimensional [387, 388], do tipo

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(g_{\mu\nu}), \quad (\text{B.11})$$

onde (B.11) produz as seguintes equações de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dx^i} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu,i}} - \frac{d}{dx^j} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu,ij}} \right) \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}} = 0. \quad (\text{B.12})$$

Nestas condições, as equações (B.12) produzirão a única possível expressão de Euler-Lagrange de segunda ordem

$$\sqrt{-g} \left[a_0 g^{\mu\nu} + a_1 (R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R) \right] = 0, \quad (\text{B.13})$$

onde os a_i são constantes, R o escalar de curvatura e $R_{\mu\nu}$ o tensor de Ricci. Constata-se por analogia que a equação (B.13) tem a mesma aparência da equação de Einstein (A.15), para o vácuo, com constante cosmológica $\Lambda = a_0$. Isto posto, este poderoso teorema impõe limites para uma possível construção de uma teoria gravitacional num espaço Riemanniano quadridimensional, a partir de um princípio de ação envolvendo apenas o tensor métrico e suas derivadas. Pois, as únicas equações de campo que são de segunda ordem ou menos são as equações de Einstein e/ou uma constante cosmológica [389]. Isto não implica, contudo, que a ação de Einstein-Hilbert seja a única ação construída a partir de $g^{\mu\nu}$ que resultará nas equações de Einstein [390]. Na verdade, em quatro dimensões ou menos, verifica-se que a ação mais geral é

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left[a_1 R - 2a_2 + a_3 \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} R^{\rho\sigma}_{\mu\nu} R_{\rho\sigma\alpha\beta} + a_4 (R^2 - 4R^\mu_\nu R^\nu_\mu + R^{\mu\nu}_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta}_{\mu\nu}) \right], \quad (\text{B.14})$$

onde os a_i são constantes. Para qualquer dimensão D do espaço-tempo, o terceiro termo em (B.14) não contribui para as equações de Euler-Lagrange (B.12). E, para $D = 4$, o quarto termo em (B.14) é o termo de Gauss-Bonnet, que também não contribui para (B.12). Portanto, o teorema de Lovelock pode ser interpretado como uma imposição de limites as teorias que se podem construir a partir do tensor métrico, apontando cinco opções ou caminhos para construção de teorias métricas da gravidade com equações de campo diferentes daquelas da RG [391]. Sendo eles: (i) Considerar outros campos além do tensor métrico $g^{\mu\nu}$; (ii) Trabalhar em espaço-tempo com $D \neq 4$; (iii) Aceitar derivadas da métrica de ordem superior a segunda ordem; (iv) Desconsiderar o princípio da localidade; (v) Considerar a ideia de que as equações de campo não surgem da ação; e (vi) Desistir de qualquer equação de campo tensorial de classificação $(2, 0)$, simétrica sob troca de índices ou livres de divergência.

B.3 Teorema da Fatoração de Weierstrass

A função complexa $f(z)$ é holomórfica em um ponto z_0 , se existir um disco aberto centrado em z_0 onde $f(z)$ é derivável em todos os seus pontos. Logo, se $f(z)$ é uma função inteira, ou seja, holomórfica em todo o plano complexo, então existe um logaritmo bem definido de $f(z)$, isto é, existe uma função inteira $g(z)$ tal que

$$e^{g(z)} = f(z). \quad (\text{B.15})$$

Agora, considerando $f(z)$ tendo um número finito de zeros $[a_k]_{k=1}^n$, fora da origem, então $f(z)$ pode ser fatorado como

$$f(z) = z^M e^{g(z)} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{z}{a_k}\right), \quad (\text{B.16})$$

onde M é a ordem de zero de $f(z)$ em $z = 0$ e $g(z)$ é alguma função inteira. Agora, assumindo que $f(z)$ tenha infinitos zeros, além do 0 (zero). Se o produto

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_k}\right), \quad (\text{B.17})$$

converge uniformemente em subconjuntos compactos de \mathbb{C} , então ele define uma função inteira com zeros apenas em $[a_k]$. Portanto, podemos escrever

$$\frac{f(z)}{\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_k}\right)} = z^M e^{g(z)} \implies f(z) = z^M e^{g(z)} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_k}\right). \quad (\text{B.18})$$

Para garantir que o produto $\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_k}\right)$ convirja uniformemente em todo conjunto compacto, basta assumir que a série $\sum \frac{1}{|a_k|}$ convirja. Na verdade, em cada disco $B_R(0)$ para k grande o suficiente, teremos

$$\left| \log\left(1 - \frac{z}{a_k}\right) \right| < \frac{R}{a_k}. \quad (\text{B.19})$$

Então a soma dos logaritmos converge absolutamente. Para encontrar a fatoração para $f(z)$ em geral, temos que modificar fatores do produto infinito para torná-los absolutamente convergentes. Isso pode ser feito por meio de um truque semelhante ao usado na prova do teorema do matemático sueco Gösta Mittag-Leffler (1846-1927), que na análise complexa, diz respeito à existência de funções meromorfas com polos prescritos, podendo ser usado para expressar qualquer função meromorfa como uma soma de frações parciais [392].

B.4 Estruturas Geométricas da Gravitação Quadridimensional

Na abordagem geometrodinâmica³, pode-se descrever o campo gravitacional através de teorias cuja classificação depende das estruturas geométricas definidas na própria variedade quadridimensional suave \mathcal{M}^4 , cuja estrutura de conexão definida nela é chamada de espaço conectado afim (L^4), contendo 3 objetos geométricos básicos: o tensor de curvatura da conexão, o tensor de curvatura homotético e o tensor torção [71], respectivamente descritos a seguir

$$\begin{aligned} R^\alpha_{\beta\mu\nu} &= \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\beta\nu} - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\beta\mu} + \Gamma^\alpha_{\rho\mu} \Gamma^\rho_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha_{\rho\nu} \Gamma^\rho_{\beta\mu}; \\ \Omega_{\mu\nu} &= \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\alpha\nu} - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\alpha\mu}; \\ Q^\alpha_{\mu\nu} &= \Gamma^\alpha_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2} (\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\nu\mu}). \end{aligned}$$

Nas coordenadas locais do transporte paralelo ao longo de um caminho fechado são: a rotação de um vetor $\delta V^\alpha \approx R^\alpha_{\beta\mu\nu} V^\beta ds^{\mu\nu}$, a mudança do comprimento $\delta l \approx l(V) \Omega_{\mu\nu} ds^{\mu\nu}$ e a imagem do contorno no espaço tangente $\xi^\alpha \approx 2Q^\alpha_{\mu\nu} ds^{\mu\nu}$. O estudo sobre as principais definições, abordagens e métodos aplicados à geometria diferencial pode ser encontrado numa exposição mais detalhada em [393]. A tabela-B.4 destaca uma classificação geométrica natural às variedades⁴ de acordo com suas estruturas métrica-afins subjacentes: o tensor de curvatura da conexão $R^\alpha_{\beta\mu\nu} \equiv R$, tensor torção $Q^\alpha_{\mu\nu} \equiv Q$ e o tensor de curvatura homotético $\Omega_{\mu\nu} \equiv \Omega$.

Tabela-B.4: Classificação geométrica das teorias métrico-afins.

Objetos geométricos			Tipo de espaço	Teoria
$R = 0$	$Q = 0$	$\Omega = 0$	M^4 –Minkowski	Relatividade Especial
$R = 0$	$Q \neq 0$	$\Omega = 0$	P^4 –Weitzenböck (Paralelismo absoluto)	Gravidade Gauge Translacional
$R = 0$	$Q = 0$	$\Omega \neq 0$	s/n	s/n
$R = 0$	$Q \neq 0$	$\Omega \neq 0$	s/n	s/n
$R \neq 0$	$Q = 0$	$\Omega = 0$	V^4 –Riemann	Relatividade Geral
$R \neq 0$	$Q = 0$	$\Omega \neq 0$	W^4 –Weyl	Gravidade de Weyl
$R \neq 0$	$Q \neq 0$	$\Omega = 0$	U^4 –Riemann-Cartan	Gravidade Einstein-Cartan
$R \neq 0$	$Q \neq 0$	$\Omega \neq 0$	G^4 –Métrico-afim	Campo Assimétrico (Einstein-Schrödinger)

³ Todo o conteúdo apresentado nesta seção de Apêndice fora retirado da referência [71].

⁴ Onde “s/n” é a abreviação da expressão latina *sine nomine*, que significa “sem nome”, ou seja, se refere a dizer que para o terceiro e quarto caso apresentados na tabela acima o tipo de espaço e sua correspondente teoria não possuem um nome específico.

Referências

- 1 MISNER, C. W.; THORNE, K. S.; WHEELER, J. A. *Gravitation*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2017.
- 2 TURYSHEV, S. G. Experimental tests of general relativity: recent progress and future directions. *Phys.–Usp.*, Uspekhi Fizicheskikh Nauk (UFN) Journal, v. 52, n. 1, p. 1–27, jan. 2009.
- 3 WALD, R. M. *General Relativity*. Chicago, IL: University of Chicago Press, 1984.
- 4 LI, B.; KOYAMA, K. *Modified gravity: Progresses and outlook of theories, numerical techniques and observational tests*. Singapore, Singapore: World Scientific Publishing, 2019.
- 5 BIRKHOFF, G. D. *Relativity and modern physics*. 2. ed. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1927.
- 6 MEASUREMENTS of Ω and Λ from 42 high-redshift supernovae. *Astrophys. J.*, American Astronomical Society, v. 517, n. 2, p. 565–586, jun. 1999.
- 7 COSMOLOGICAL constraints from the SDSS luminous red galaxies. *Phys. Rev.*, American Physical Society (APS), v. 74, n. 12, dez. 2006.
- 8 HINSHAW, G.; LARSON, D.; KOMATSU, E.; SPERGEL, D. N.; BENNETT, C.; DUNKLEY, J.; NOLTA, M.; HALPERN, M.; HILL, R. S.; ODEGARD, N. et al. Nine-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations: cosmological parameter results. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, IOP Publishing, v. 208, n. 2, p. 19, 2013.
- 9 ABBOTT, B. P.; ABBOTT, R.; ABBOTT, T. D.; ABERNATHY, M. R.; ACERNESE, F.; ACKLEY, K.; ADAMS, C.; ADAMS, T.; ADDESSO, P.; ADHIKARI, R. X. et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Physical review letters*, APS, v. 116, n. 6, p. 061102, 2016.
- 10 ABBOTT, B. P. et al. Gw151226: Observation of gravitational waves from a 22-solar-mass binary black hole coalescence. *Phys. Rev. Lett.*, v. 116, n. 24, p. 241103, 2016.
- 11 ABBOTT, B. P.; ABBOTT, R.; ABBOTT, T. D.; ABERNATHY, M. R.; ACERNESE, F.; ACKLEY, K.; ADAMS, C.; ADAMS, T.; ADDESSO, P.; ADHIKARI, R. X. et al. Binary black hole mergers in the first advanced ligo observing run. *Physical Review X*, APS, v. 6, n. 4, p. 041015, 2016.
- 12 COLLABORATION, E. H. T. et al. First m87 event horizon telescope results. i. the shadow of the supermassive black hole. *arXiv preprint arXiv:1906.11238*, 2019.
- 13 AKIYAMA, K.; ALBERDI, A.; ALEF, W.; ALGABA, J. C.; ANANTUA, R.; ASADA, K.; AZULAY, R.; BACH, U.; BACZKO, A.-K.; BALL, D. et al. First sagittarius a* event horizon telescope results. i. the shadow of the supermassive black hole in the

- center of the milky way. *The Astrophysical Journal Letters*, IOP Publishing, v. 930, n. 2, p. L12, 2022.
- 14 PETROV, A.; NASCIMENTO, J. R.; PORFIRIO, P. *Introduction to modified gravity*. Cham, Switzerland: Springer Nature, 2023.
- 15 ZANELLI, J. Lecture notes on Chern-Simons (super-)gravities. second edition (february 2008). 2005.
- 16 WEYL, H. A new extension of relativity theory. *Annalen Phys.*, v. 59, p. 101–133, 1919.
- 17 EDDINGTON, A. S. *The mathematical theory of relativity*. Cambridge, England: Cambridge University Press, 1924.
- 18 RUBIN, V. C.; FORD, W. K. Rotation of the andromeda nebula from a spectroscopic survey of emission regions. *Astrophys. J.*, v. 159, p. 379–403, 1970.
- 19 ZWICKY, F. Die rotverschiebung von extragalaktischen nebeln. *Helv. Phys. Acta*, v. 6, p. 110–127, 1933.
- 20 KAHN, F. D.; WOLTJER, L. Intergalactic matter and the galaxy. *The Astrophysical Journal*, v. 130, p. 705, 1959.
- 21 BERTONE, G.; HOOPER, D. History of dark matter. *Rev. Mod. Phys*, v. 90, n. 4, p. 045002, 2018.
- 22 CLEGG, B. *Dark matter and dark energy*. Basingstoke, England: Icon Books, 2019. (Hot Science).
- 23 EINSTEIN, A. “sitzungsber. preuss. akad. wiss. berlin, 217”. *Math. Phys.*, p. 778–844, 1928.
- 24 HAYASHI, K.; SHIRAFUJI, T. New general relativity. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 19, p. 3524–3553, Jun 1979. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.19.3524>.
- 25 GOLOVNEV, A. The geometrical meaning of the weitzenböck connection. *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, World Scientific Pub Co Pte Ltd, v. 20, n. supp01, dez. 2023.
- 26 PENAS, V. A. Deformed weitzenböck connections and double field theory. *Fortschr. Phys.*, Wiley, v. 67, n. 3, p. 1800077, mar. 2019.
- 27 ASTIER, P. et al. The supernova legacy survey: Measurement of ω_M , ω_Λ and w from the first year data set. *Astron. Astrophys.*, v. 447, p. 31–48, 2005.
- 28 RIESS, A. G. et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *Astron. J.*, v. 116, p. 1009–1038, 1998.
- 29 LAMBOURNE, R. J. A. *Relativity, Gravitation and Cosmology*. Cambridge, England: Cambridge University Press, 2010.
- 30 CARROLL, S. M. The cosmological constant. *Living reviews in relativity*, Springer, v. 4, n. 1, p. 1–56, 2001.

- 31 SUSSKIND, L. The anthropic landscape of string theory. *Arxiv*, p. 247–266, 2 2003.
- 32 FITCH, V. L.; MARLOW, D. R.; DEMENTI, M. A. E. (Ed.). *Critical problems in physics*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1997. (Princeton Series in Physics).
- 33 KISSLINGER, L. S.; DAS, D. A brief review of dark matter. *Int. J. Mod. Phys. A*, v. 34, n. 27, p. 1930013, 2019.
- 34 NANDAL, D.; LOEB, A. Supermassive stars match the spectral signatures of JWST’s little red dots. 2025.
- 35 TRAPPIST-1 JWST Community Initiative; WIT, J. de; DOYON, R.; RACKHAM, B. V.; LIM, O.; DUCROT, E.; KREIDBERG, L.; BENNEKE, B.; RIBAS, I.; BERARDO, D.; NIRLAULA, P.; IYER, A.; SHAPIRO, A.; KOSTOGRYZ, N.; WITZKE, V.; GILLON, M.; AGOL, E.; MEADOWS, V.; BURGASSER, A. J.; OWEN, J. E.; FORTNEY, J. J.; SELSIS, F.; BELLO-ARUFE, A.; BEURS, Z. de; BOLMONT, E.; COWAN, N.; DONG, C.; DRAKE, J. J.; GARCIA, L.; GREENE, T.; HAWORTH, T.; HU, R.; KANE, S. R.; KERVELLA, P.; KOLL, D.; KRISSANSEN-TOTTON, J.; LAGAGE, P.-O.; LICHTENBERG, T.; LUSTIG-YAEGER, J.; LINGAM, M.; TURBET, M.; SEAGER, S.; BARKAOUI, K.; BELL, T. J.; BURDANOV, A.; CADIEUX, C.; CHARNAY, B.; CLOUTIER, R.; COOK, N. J.; CORREIA, A. C. M.; DANG, L.; DAYLAN, T.; DELREZ, L.; EDWARDS, B.; FAUCHEZ, T. J.; FLAGG, L.; FRASCHETTI, F.; HAQQ-MISRA, J.; HUANG, Z.; IRO, N.; JAYAWARDHANA, R.; JEHIN, E.; JIN, M.; KITE, E.; KITZMANN, D.; KRAL, Q.; LAFRENIÈRE, D.; LIBERT, A.-S.; LIU, B.; MOHANTY, S.; MORRIS, B. M.; MURRAY, C. A.; PIAULET, C.; POZUELOS, F. J.; RADICA, M.; RANJAN, S.; RATHCKE, A.; ROY, P.-A.; SCHWIETERMAN, E. W.; TURNER, J. D.; TRIAUD, A.; WAY, M. J. A roadmap for the atmospheric characterization of terrestrial exoplanets with JWST. *Nat. Astron.*, Springer Science and Business Media LLC, v. 8, n. 7, p. 810–818, jul. 2024.
- 36 PENROSE, R. A Spinor approach to general relativity. *Annals Phys.*, v. 10, p. 171–201, 1960.
- 37 CARTAN, E. *The theory of spinors*. Mineola, NY: Dover Publications, 1981. (Dover Books on Mathematics).
- 38 BONDI, H.; GOLD, T. Is there an Æther? *Nature*, Springer Science and Business Media LLC, v. 169, n. 4291, p. 146–146, jan. 1952.
- 39 UTIYAMA, R.; DEWITT, B. S. Renormalization of a classical gravitational field interacting with quantized matter fields. *J. Math. Phys.*, v. 3, p. 608–618, 1962.
- 40 HOOFT, G. ’t; VELTMAN, M. One-loop divergencies in the theory of gravitation. v. 20, n. 1, p. 69–94, 1974.
- 41 STELLE, K. S. Renormalization of higher derivative quantum gravity. *Phys. Rev. D*, v. 16, p. 953–969, 1977.
- 42 VILKOVISKY, G. A. Effective action in quantum gravity. *Class. Quant. Grav.*, v. 9, p. 895–903, 1992.
- 43 STAROBINSKY, A. A. A new type of isotropic cosmological models without singularity. *Phys. Lett. B*, Elsevier BV, p. 99–102, mar 1980.

- 44 OSTROGRADSKY, M. Mémoires sur les équations différentielles, relatives au problème des isopérimètres. *Collection biodiversity*, St.-Petersbourg, v. 6, p. 385, 1838.
- 45 ANTONIADIS, I.; DUDAS, E.; GHILENCEA, D. M. Living with ghosts and their radiative corrections. *Nucl. Phys. B.*, Elsevier BV, v. 767, n. 1-2, p. 29–53, abr. 2007.
- 46 WATAGHIN, G. Über die selbstenergie der elektronen. *Z. Phys.*, v. 88, p. 92–98, 1934.
- 47 DALVIT, D. A.; MAZZITELLI, F. D. Running coupling constants, newtonian potential, and nonlocalities in the effective action. *Phys. Rev. D Part. Fields*, American Physical Society (APS), v. 50, n. 2, p. 1001–1009, jul. 1994.
- 48 WETTERICH, C. Effective nonlocal euclidean gravity. *Gen. Relativ. Gravit.*, Springer Nature, v. 30, n. 1, p. 159–172, jan. 1998.
- 49 MODESTO, L.; RACHWAŁ, L. Nonlocal quantum gravity: A review. *International Journal of Modern Physics D*, v. 26, n. 11, p. 1730020, 2017.
- 50 NIEH, H. T.; YAN, M. L. An identity in Riemann–Cartan geometry. *J. Math. Phys.*, AIP Publishing, v. 23, n. 3, p. 373–374, mar. 1982.
- 51 NIEH, H. T. A torsional topological invariant. *Int. J. Mod. Phys. A*, World Scientific Pub Co Pte Lt, v. 22, n. 29, p. 5237–5244, nov. 2007.
- 52 JACKIW, R.; PI, S. Y. Chern-simons modification of general relativity. *Physical Review D*, v. 68, n. 6, p. 104012, 2003.
- 53 DESER, S.; JACKIW, R.; TEMPLETON, S. Topologically massive gauge theories. *Annals Phys.*, erratum: *Annals Phys.* **185** (1988), 406, v. 140, p. 372–411, 1982.
- 54 YUNES, N.; PRETORIUS, F. Dynamical chern-simons modified gravity. i. spinning black holes in the slow-rotation approximation. *Phys. Rev. D*, arXiv:0902.4669 [gr-qc], v. 79, p. 084043, 2009.
- 55 FURTADO, C.; MARIZ, T.; NASCIMENTO, J. R.; PETROV, A. Y.; SANTOS, A. F. Gödel solution in modified gravity. *Phys. Rev.*, American Physical Society (APS), v. 79, n. 12, jun. 2009.
- 56 PORFIRIO, P.; FONSECA-NETO, J.; NASCIMENTO, J.; PETROV, A. Y.; RICARDO, J.; SANTOS, A. Chern-simons modified gravity and closed timelike curves. *Physical Review D*, APS, v. 94, n. 4, p. 044044, 2016.
- 57 PORFIRIO, P.; FONSECA-NETO, J.; NASCIMENTO, J.; PETROV, A. Y. Causality aspects of the dynamical chern-simons modified gravity. *Physical Review D*, APS, v. 94, n. 10, p. 104057, 2016.
- 58 AGUDELO, J.; NASCIMENTO, J.; PETROV, A. Y.; PORFÍRIO, P.; SANTOS, A. Gödel and gödel-type universes in brans-dicke theory. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 762, p. 96–101, 2016.
- 59 GAMA, F.; NASCIMENTO, J.; PETROV, A. Y.; PORFIRIO, P.; SANTOS, A. Gödel-type solutions within the $f(R, Q)$ gravity. *Physical Review D*, APS, v. 96, n. 6, p. 064020, 2017.

- 60 NASCIMENTO, J. R.; PETROV, A. Y.; PORFIRIO, P. J.; RAMIRES, N. S. Gödel-type solutions within the $f(R, Q, P)$ gravity. *Eur. Phys. J. C*, v. 83, p. 331, 2023.
- 61 KETOV, S. V.; POZDEEVA, E. O.; VERNOV, S. Y. On the superstring-inspired quantum correction to the starobinsky model of inflation. *J. Cosmol. Astropart. Phys.*, IOP Publishing, v. 2022, n. 12, p. 032, dez. 2022.
- 62 KOSTELECKÝ, V. A.; SAMUEL, S. Spontaneous breaking of lorentz symmetry in string theory. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 39, p. 683–685, Jan 1989. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.39.683>.
- 63 LAND, K.; MAGUEIJO, J. Examination of evidence for a preferred axis in the cosmic radiation anisotropy. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society (APS), v. 95, n. 7, p. 071301, ago. 2005.
- 64 BIANCHINI, F.; MANIYAR, A. S. The cosmic microwave background – secondary anisotropies. 2025.
- 65 SANCHIS-LOZANO, M.-A.; SANZ, V. Observable imprints of primordial gravitational waves on the temperature anisotropies of the cosmic microwave background. 2023.
- 66 NASCIMENTO, J. R.; PETROV, A. Y.; PORFÍRIO, P. J.; SILVA, R. N. da. Generalized Chern–Pontryagin models. *Eur. Phys. J. C Part. Fields*, Springer Science and Business Media LLC, v. 84, n. 11, nov. 2024.
- 67 D’INVERNO, R.; VICKERS, J. *Introducing Einstein’s Relativity: A Deeper Understanding*. [S.l.]: Oxford University Press, 2022.
- 68 LIMA, E. L. *Variedades diferenciáveis*. [S.l.: s.n.], 2007.
- 69 SPACETIME and Geometry. [S.l.]: Cambridge University Press, 2019. vii–x p.
- 70 STAMATESCU, I.-O.; SEILER, E. (Ed.). *Approaches to fundamental physics*. 2007. ed. Berlin, Germany: Springer, 2007. (Lecture notes in physics).
- 71 PONOMAREV, V. N.; BARVINSKY, A. O.; OBUKHOV, Y. N.; BARVINSKY, A. *Gauge approach and quantization methods in gravity theory*. [S.l.]: Nuclear Safety Institute of the Russian Academy of Sciences, 2017.
- 72 LANCZOS, C. *The variational principles of mechanics*. Mineola, NY: Dover Publications, 1986. (Dover Books on Physics).
- 73 LANDAU, L. D.; LIFSHITS, E. M. *The Classical Theory of Fields*. Oxford: Pergamon Press, 1975. Volume 2. (Course of Theoretical Physics, Volume 2). ISBN 978-0-08-018176-9.
- 74 RYDER, L. H. *Quantum Field Theory*. 2. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 1996.
- 75 PELDÁN, P. Actions for gravity, with generalizations: a title. *Class. Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 11, n. 5, p. 1087–1132, maio 1994.
- 76 KERNER, R. Cosmology without singularity and nonlinear gravitational lagrangians. *Gen. Relativ. Gravit.*, Springer Nature, v. 14, n. 5, p. 453–469, maio 1982.

- 77 AMARZGUIOUI, M.; ELGARØY, Ø.; MOTA, D. F.; MULTAMÄKI, T. Cosmological constraints on $f(r)$ gravity theories within the palatini approach. *Astron. Astrophys.*, EDP Sciences, v. 454, n. 3, p. 707–714, ago. 2006.
- 78 VITAGLIANO, V.; SOTIRIOU, T. P.; LIBERATI, S. The dynamics of metric-affine gravity. *Ann. Phys. (N. Y.)*, Elsevier BV, v. 326, n. 5, p. 1259–1273, maio 2011.
- 79 CLIFTON, T.; FERREIRA, P. G.; PADILLA, A.; SKORDIS, C. Modified gravity and cosmology. *Phys. Rep.*, Elsevier BV, v. 513, n. 1-3, p. 1–189, mar. 2012.
- 80 JIMÉNEZ, J. B.; GOLOVNEV, A.; KARČIAUSKAS, M.; KOIVISTO, T. S. Bimetric variational principle for general relativity. *Phys. Rev.*, American Physical Society (APS), v. 86, n. 8, out. 2012.
- 81 ROSEN, N. General relativity and flat space. II. *Phys. Rev.*, American Physical Society (APS), v. 57, n. 2, p. 150–153, jan. 1940.
- 82 LEE, D. L.; NI, W.-T.; CAVES, C. M.; WILL, C. M. Theoretical frameworks for testing relativistic gravity. V - Post-Newtonian limit of rosen's theory. *Astrophys. J.*, American Astronomical Society, v. 206, p. 555, jun. 1976.
- 83 WEYL, H. Electron and gravitation. 1. (in german). *Zeitschrift für Physik*, v. 56, p. 330–331, 1929.
- 84 FOCK, V. A.; IVANENKO., D. D. Géometrie quantique linéaire et déplacement parallèle. *Compt. Rend. Acad. Sci. Paris*, v. 188, p. 1470, 1929.
- 85 WIGNER, E. P. Eine bemerkung zu einsteins neuer formulierung des allgemeinen relativitätsprinzips. *Zeitschrift für Physik*, v. 53, p. 592–596, 1929.
- 86 WEITZENBÖCK, R. Invariantentheorie. von dr. roland weitzenböck. *Groningen: P. Noordhoff*, 1923.
- 87 GÖDEL, K. An example of a new type of cosmological solutions of einstein's field equations of gravitation. *Reviews of modern physics*, APS, v. 21, n. 3, p. 447, 1949.
- 88 FRIEDMAN, J.; MORRIS, M. S.; NOVIKOV, I. D.; ECHEVERRIA, F.; KLINKHAMMER, G.; THORNE, K. S.; YURTSEVER, U. Cauchy problem in spacetimes with closed timelike curves. *Phys. Rev. D Part. Fields*, American Physical Society (APS), v. 42, n. 6, p. 1915–1930, set. 1990.
- 89 HAWKING, S. W. Chronology protection conjecture. *Phys. Rev. D Part. Fields*, American Physical Society (APS), v. 46, n. 2, p. 603–611, jul. 1992.
- 90 TIPLER, F. J. Singularities and causality violation. *Ann. Phys. (N. Y.)*, Elsevier BV, v. 108, n. 1, p. 1–36, set. 1977.
- 91 HERTZBERG, M. P. Constraints on gravitation from causality and quantum consistency. *Adv. High Energy Phys.*, Hindawi Limited, v. 2018, p. 1–6, nov. 2018.
- 92 HOLLOWOOD, T. J.; SHORE, G. M. Causality violation, gravitational shockwaves and UV completion. *J. High Energy Phys.*, Springer Science and Business Media LLC, v. 2016, n. 3, mar. 2016.

- 93 DAVIS, M. B.; KREISLER, M. N.; ALVÄGER, T. Search for faster-than-light particles. *Phys. Rev.*, American Physical Society (APS), v. 183, n. 5, p. 1132–1133, jul. 1969.
- 94 JOHRI, V. B.; SRIVASTAVA, S. K. On the existence of tachyons in a bradyon-dominated universe. *Int. J. Math. Math. Sci.*, Wiley, v. 8, n. 2, p. 389–396, jan. 1985.
- 95 REBOUÇAS, M.; TIOMNO, J. Homogeneity of riemannian space-times of gödel type. *Physical Review D*, APS, v. 28, n. 6, p. 1251, 1983.
- 96 TEIXEIRA, A.; REBOUÇAS, M.; ÅMAN, J. Isometries of homogeneous gödel-type spacetimes. *Physical Review D*, APS, v. 32, n. 12, p. 3309, 1985.
- 97 KLING, T. P.; AHMED, F.; LALUMIERE, M. Wave fronts in a causality violating godel-type metric. 2020.
- 98 REBOUÇAS, M.; SANTOS, J. Gödel-type universes in $f(R)$ gravity. *arXiv preprint arXiv:0906.5354*, 2009.
- 99 SANTOS, J.; REBOUÇAS, M.; OLIVEIRA, T. Gödel-type universes in palatini $f(R)$ gravity. *arXiv preprint arXiv:1004.2501*, 2010.
- 100 SANTOS, A. F. Gödel solution in $f(R, T)$ gravity. *Mod. Phys. Lett. A*, v. 28, p. 1350141.
- 101 FURTADO, C.; NASCIMENTO, J. R.; PETROV, A. Y.; SANTOS, A. F. Horava-lifshitz gravity and godel universe. *Phys. Rev. D*, v. 84, p. 047702, 2011. Erratum: *Phys.Rev.D* 84, 069904 (2011).
- 102 FONSECA-NETO, J.; PETROV, A. Y.; REBOUÇAS, M. Gödel-type universes and chronology protection in horava–lifshitz gravity. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 725, n. 4-5, p. 412–418, 2013.
- 103 FURTADO, C.; MARIZ, T.; NASCIMENTO, J. R.; PETROV, A. Y.; SANTOS, A. F. The godel metric in the chern-simons modified gravity. *Int. J. Mod. Phys. Conf. Ser.*, v. 18, p. 145–149, 2012.
- 104 BASSALO, J. M. F. O prêmio nobel de física de 2011. *Cad. Bras. Ensino Fís.*, Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), v. 29, n. 2, set. 2012.
- 105 OLBERS, H. The edinburgh new philosophical journal. In: _____. *Edinburgh, A. and C. Black [etc.]*, 1826. [v.1] (1826), p. 0. <https://www.biodiversitylibrary.org/bibliography/33987>. Disponível em: <https://www.biodiversitylibrary.org/page/2471280>.
- 106 SCIAMA, D. W. *The unity of the universe*. [S.l.]: Dover Publications, 2012.
- 107 EINSTEIN, A.; SITTER, W. D. On the relation between the expansion and the mean density of the universe. *Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A.*, Proceedings of the National Academy of Sciences, v. 18, n. 3, p. 213–214, mar. 1932.
- 108 SUPERNOVA limits on the cosmic equation of state. *Astrophys. J.*, IOP Publishing, v. 509, n. 1, p. 74–79, dez. 1998.

- 109 BOSE, S. *Beyond CDM*. 1. ed. Cham, Switzerland: Springer International Publishing, 2018. (Springer theses).
- 110 WANG, B.; ABDALLA, E.; ATRIO-BARANDELA, F.; PAVON, D. Dark matter and dark energy interactions: Theoretical challenges, cosmological implications and observational signatures. *Rept. Prog. Phys.*, v. 79, n. 9, p. 096901, 2016.
- 111 WANG, A. Hořava gravity at a lifshitz point: A progress report. *Int. J. Mod. Phys. D*, v. 26, n. 07, p. 1730014, 2017.
- 112 VELTEN, H. E. S.; MARTTENS, R. F. vom; ZIMDAHL, W. Aspects of the cosmological “coincidence problem”. *Eur. Phys. J. C Part. Fields*, Springer Science and Business Media LLC, v. 74, n. 11, nov. 2014.
- 113 ZLATEV, I.; WANG, L.; STEINHARDT, P. J. Quintessence, cosmic coincidence, and the cosmological constant. *Phys. Rev. Lett.*, v. 82, p. 896–899, 1999.
- 114 SAMI, M. A primer on problems and prospects of dark energy. *Curr. Sci.*, v. 97, p. 887, 2009.
- 115 HOOFT, G. ’t; VELTMAN, M. Regularization and renormalization of gauge fields. *Nucl. Phys. B.*, Elsevier BV, v. 44, n. 1, p. 189–213, jul. 1972.
- 116 BUCHBINDER, I. L.; ODINTSOV, S. D.; SHAPIRO, I. L. *Renormalization and renormalization group equations in curved space-time*. London/New York: Routledge, 2017. 99–148 p.
- 117 SMOLIN, L. *Three roads to quantum gravity*. New York, NY: Basic Books, 2001. (Science Masters).
- 118 LEIBNIZ, F. von G. W.; ARNAULD, A. *The Leibniz-arnauld correspondence*. New Haven, CT: Yale University Press, 2017. (The Yale Leibniz Series).
- 119 KIEFER, C. *Quantum Gravity*. 3. ed. London, England: Oxford University Press, 2012. (International Series of Monographs on Physics).
- 120 WEINBERG, S. *Gravitation and cosmology*. Nashville, TN: John Wiley & Sons, 1972.
- 121 ALLIS, R. G.; HUNT, T. M. Analysis of exploitation-induced gravity changes at wairakei geothermal field. *Geophysics*, Society of Exploration Geophysicists, v. 51, n. 8, p. 1647–1660, ago. 1986.
- 122 POLCHINSKI, J. *String theory 2 volume hardback set string theory: An introduction to the bosonic string volume 1*. Cambridge, England: Cambridge University Press, 1998. (Cambridge Monographs on Mathematical Physics).
- 123 THIEMANN, T. Loop quantum gravity: An inside view. In: *Approaches to Fundamental Physics*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2007, (Lecture notes in physics). p. 185–263.
- 124 RHAM, C. de; GABADADZE, G. Generalization of the fierz-pauli action. *Phys. Rev.*, American Physical Society (APS), v. 82, n. 4, ago. 2010.

- 125 WEINBERG, S. *The quantum theory of fields: Foundations volume 1*. Cambridge, England: Cambridge University Press, 2013.
- 126 GALLERATI, A. Graphene properties from curved space dirac equation. *Eur. Phys. J. Plus*, Springer Science and Business Media LLC, v. 134, n. 5, maio 2019.
- 127 Chandrasekhar, S. *The mathematical theory of black holes*. [S.l.: s.n.], 1983.
- 128 RIBAS, M. O.; DEVECCHI, F. P.; KREMER, G. M. Fermionic cosmologies with yukawa-type interactions. *EPL*, IOP Publishing, v. 93, n. 1, p. 19002, jan. 2011.
- 129 SAHA, B. Nonlinear spinor field in bianchi type-i cosmology: Inflation, isotropization, and late time acceleration. *Phys. Rev.*, American Physical Society (APS), v. 74, n. 12, dez. 2006.
- 130 KAIN, B. Einstein-Dirac system in semiclassical gravity. *Phys. Rev. D.*, American Physical Society (APS), v. 107, n. 12, jun. 2023.
- 131 RED'KOV, V. M. Dirac-Kahler equation in curved space-time, relation between spinor and tensor formulations. 2011.
- 132 TASSON, J. D. The Standard-Model extension and gravitational tests. 2016.
- 133 CHO, P.; MISIAK, M. $b \rightarrow s \gamma$ decay {in $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)$ extensions} of the standard model. *Phys. Rev. D Part. Fields*, American Physical Society (APS), v. 49, n. 11, p. 5894–5903, jun. 1994.
- 134 VACCARO, J. A. Quantum asymmetry between time and space. *Proc. Math. Phys. Eng. Sci.*, The Royal Society, v. 472, n. 2185, p. 20150670, jan. 2016.
- 135 WETTERICH, C. Pregeometry and spontaneous time-space asymmetry. *arXiv [gr-qc]*, arXiv, 2021.
- 136 PAPAPETROU, A. Spinning test-particles in general relativity. I. *Proc. R. Soc. Lond.*, The Royal Society, v. 209, n. 1097, p. 248–258, out. 1951.
- 137 POPLAWSKI, N. Classical physics: Spacetime and fields. 2009.
- 138 PARKER, L.; TOMS, D. *Cambridge monographs on mathematical physics: Quantum field theory in curved spacetime: Quantized fields and gravity*. Cambridge, England: Cambridge University Press, 2011.
- 139 SHANKARANARAYANAN, S.; JOHNSON, J. P. Modified theories of gravity: Why, how and what? *Gen. Relativ. Gravit.*, Springer Science and Business Media LLC, v. 54, n. 5, maio 2022.
- 140 SOTIRIOU, T. P.; FARAONI, V. $f(R)$ theories of gravity. *Reviews of Modern Physics*, APS, v. 82, n. 1, p. 451, 2010.
- 141 CAPOZZIELLO, S.; TSUJIKAWA, S. Solar system and equivalence principle constraints on $f(r)$ gravity by the chameleon approach. *Phys. Rev.*, American Physical Society (APS), v. 77, n. 10, maio 2008.
- 142 STAROBINSKY, A. A. A new type of isotropic cosmological models without singularity. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 91, n. 1, p. 99–102, 1980.

- 143 ODINTSOV, S.; OIKONOMOU, V.; BANERJEE, S. Dynamics of inflation and dark energy from $f(R, \mathcal{G})$ gravity. *arXiv preprint arXiv:1807.00335*, 2018.
- 144 NUMAJIRI, K.; KATSURAGAWA, T.; NOJIRI, S. Compact star in general $F(R)$ gravity: Inevitable degeneracy problem and non-integer power correction. *Phys. Lett. B*, Elsevier BV, v. 826, n. 136929, p. 136929, mar. 2022.
- 145 BORA, J.; GOGOI, D. J.; GOSWAMI, U. D. Strange stars in $f(r)$ gravity palatini formalism and gravitational wave echoes from them. *J. Cosmol. Astropart. Phys.*, IOP Publishing, v. 2022, n. 09, p. 057, set. 2022.
- 146 BOGDANOS, C.; CAPOZZIELLO, S.; LAURENTIS, M. D.; NESSERIS, S. Massive, massless and ghost modes of gravitational waves from higher-order gravity. *Astroparticle Physics*, Elsevier, v. 34, n. 4, p. 236–244, 2010.
- 147 WEINBERG, S. *The the quantum theory of fields 3 volume hardback set the quantum theory of fields: Foundations volume 1*. Cambridge, England: Cambridge University Press, 1995.
- 148 MANNHEIM, P. D. Conformal gravity challenges string theory. 2007.
- 149 CHUN, S. H.; KIM, Y. S.; CHOI, H. K.; JEONG, I. T.; LEE, W. O.; SUH, K. S.; OH, Y. S.; KIM, K. H.; KHIM, Z. G.; WOO, J. C.; PARK, Y. D. Interplay between carrier and impurity concentrations in annealed $\text{Ga}_{1-x}\text{Mn}_x\text{As}$: intrinsic anomalous hall effect. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society (APS), v. 98, n. 2, p. 026601, jan. 2007.
- 150 BESSA, P.; OTTONI, T. Primeiro passo em direção à modificação da gravidade: Teorias Escalar-Tensoriais e $f(r)$. *Cad. Astro.*, Universidade Federal do Espírito Santo, v. 3, n. 2, p. 128–143, ago. 2022.
- 151 DIRAC, P. A. M. The Cosmological constants. *Nature*, v. 139, p. 323, 1937.
- 152 BARUT, A. O. *Electrodynamics and classical theory of fields and particles*. [S.l.: s.n.], 1980.
- 153 POLCHINSKI, J. *String theory. Vol. 1: An introduction to the bosonic string*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2007. (Cambridge Monographs on Mathematical Physics). ISBN 978-0-511-25227-3, 978-0-521-67227-6, 978-0-521-63303-1.
- 154 TSUJIKAWA, S. Quintessence: a review. *Class. Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 30, n. 21, p. 214003, nov. 2013.
- 155 WOODARD, R. P. Avoiding dark energy with $1/r$ modifications of gravity. *arXiv [astro-ph]*, arXiv, 2006.
- 156 BARMAN, B.; DAS, A.; SIVAKUMAR, R. K.; UDGATA, R. P. Freeze-in production of scalaron dark matter in $f(R)$ gravity. 2025.
- 157 SHTANOV, Y.; SHEIKO, Y. Interactions of the scalaron dark matter in $f(r)$ gravity. 2025.
- 158 CALDWELL, R. R.; DAVE, R.; STEINHARDT, P. J. Cosmological imprint of an energy component with general equation of state. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society (APS), v. 80, n. 8, p. 1582–1585, fev. 1998.

- 159 RATRA, B.; PEEBLES, P. J. Cosmological consequences of a rolling homogeneous scalar field. *Phys. Rev. D Part. Fields*, American Physical Society (APS), v. 37, n. 12, p. 3406–3427, jun. 1988.
- 160 CHIBA, T. Quintessence, the gravitational constant, and gravity. *Phys. Rev. D Part. Fields*, American Physical Society (APS), v. 60, n. 8, set. 1999.
- 161 MARTIN, J. Everything you always wanted to know about the cosmological constant problem (but were afraid to ask). *C. R. Phys.*, Cellule MathDoc/Centre Mersenne, v. 13, n. 6-7, p. 566–665, jul. 2012.
- 162 BELICH, H. J.; FERREIRA, M. M. J.; HELAYEL-NETO, J. A.; ORLANDO, M. T. D. Dimensional reduction of a lorentz and cpt violating chern-simons model. *Phys. Rev. D*, v. 67, p. 125011, 2003.
- 163 BRANS, C.; DICKE, R. H. Mach’s principle and a relativistic theory of gravitation. *Phys. Rev.*, v. 124, p. 925–935, 1961.
- 164 HAWKING, S. W.; ELLIS, G. F. R. Preface. In: *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge: Cambridge University Press, 1973. p. xi–xii.
- 165 BAEYER, H. C. V. *The Fermi solution*. Mineola, NY: Dover Publications, 2001.
- 166 EXIRIFARD, Q. Gravitomagnetic field in tensor-vector-scalar theory. *JCAP*, v. 04, p. 034, 2013.
- 167 HEINICKE, C.; BAEKLER, P.; HEHL, F. W. Einstein-aether theory, violation of lorentz invariance, and metric-affine gravity. *Phys. Rev.*, American Physical Society (APS), v. 72, n. 2, jul. 2005.
- 168 NASCIMENTO, J. R.; PETROV, A. Y.; SANTOS, A. F.; JESUS, W. D. R. Gödel solution in the bumblebee gravity. 2014.
- 169 HOŘAVA, P. Quantum gravity at a lifshitz point. *Phys. Rev.*, American Physical Society (APS), v. 79, n. 8, abr. 2009.
- 170 ZHANG, L.-D.; LI, L.-F.; XU, P.; BIAN, X.; LUO, Z. Constraints on covariant Horava-Lifshitz gravity from precision measurement of planetary gravitomagnetic field. 2024.
- 171 WEINFURTNER, S.; SOTIRIOU, T. P.; VISSER, M. Projectable horava-lifshitz gravity in a nutshell. *J. Phys. Conf. Ser.*, v. 222, 2010.
- 172 CREMINELLI, P.; VERNIZZI, F. Dark energy after GW170817 and GRB170817A. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society (APS), v. 119, n. 25, dez. 2017.
- 173 CHARMOUSIS, C.; NIZ, G.; PADILLA, A.; SAFFIN, P. M. Strong coupling in hořava gravity. *J. High Energy Phys.*, Springer Nature, v. 2009, n. 08, p. 070–070, ago. 2009.
- 174 SZCZYRBA, W. The dynamical structure of the Einstein-Cartan-Sciama-Kibble theory of gravity. *Ann. Phys. (N. Y.)*, Elsevier BV, v. 158, n. 2, p. 320–373, dez. 1984.
- 175 MOFFAT, J. W. Scalar–tensor–vector gravity theory. *J. Cosmol. Astropart. Phys.*, IOP Publishing, v. 2006, n. 03, p. 004–004, mar. 2006.

- 176 FELICE, A. D.; LARROUTUROU, F.; MUKOHYAMA, S.; OLIOSI, M. Minimal theory of bigravity: construction and cosmology. *J. Cosmol. Astropart. Phys.*, IOP Publishing, v. 2021, n. 04, p. 015, abr. 2021.
- 177 HAMED, N. A.; CHENG, H. S.; LUTY, M. A.; MUKOHYAMA, S. Ghost condensation and a consistent IR modification of gravity. *J. High Energy Phys.*, Springer Nature, v. 2004, n. 05, p. 074–074, maio 2004.
- 178 OVERDUIN, J. M.; WESSON, P. S. Kaluza-Klein gravity. *Phys. Rep.*, Elsevier BV, v. 283, n. 5-6, p. 303–378, abr. 1997.
- 179 GARRIGA, J.; TANAKA, T. Gravity in the randall-sundrum brane world. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society (APS), v. 84, n. 13, p. 2778–2781, mar. 2000.
- 180 GREGORY, R.; KALOPER, N.; MYERS, R. C.; PADILLA, A. A new perspective on DGP gravity. *J. High Energy Phys.*, Springer Nature, v. 2007, n. 10, p. 069–069, out. 2007.
- 181 OLASAGASTI, I.; TAMVAKIS, K. Gravity in higher codimension de sitter brane worlds. *Phys. Rev. D Part. Fields*, American Physical Society (APS), v. 68, n. 6, set. 2003.
- 182 BAKER, T.; FERREIRA, P. G.; SKORDIS, C. The parameterized post-friedmann framework for theories of modified gravity: Concepts, formalism, and examples. *Phys. Rev.*, American Physical Society (APS), v. 87, n. 2, jan. 2013.
- 183 CHERN, S.-S.; SIMONS, J. Characteristic forms and geometric invariants. *Ann. Math.*, JSTOR, v. 99, n. 1, p. 48, jan. 1974.
- 184 GE, M.-L.; ZHANG, W. (Ed.). *Differential geometry and physics. Proceedings, 23rd International Conference, Tianjin, China, August 20-26, 2005*. [S.l.: s.n.], 2006.
- 185 ADLER, S. L. Axial vector vertex in spinor electrodynamics. *Phys. Rev.*, v. 177, p. 2426–2438, 1969.
- 186 BELICH, H.; FERREIRA, M. M.; HELAYËL-NETO, J. A.; ORLANDO, M. T. D. Classical solutions in a lorentz-violating Maxwell-Chern-Simons electrodynamics. *Phys. Rev. D Part. Fields*, American Physical Society (APS), v. 68, n. 2, jul. 2003.
- 187 JACKIW, R.; PI, S.-Y. Chern-simons modification of general relativity. *Physical Review D*, APS, v. 68, n. 10, p. 104012, 2003.
- 188 ALVAREZ-GAUMÉ, L.; WITTEN, E. Gravitational anomalies. *Nuclear Physics B*, v. 234, n. 2, p. 269–330, 1984. ISSN 0550-3213. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/055032138490066X>>.
- 189 ERDMENGER, J.; HESS, B.; MATTHAIKAKAKIS, I.; MEYER, R. Universal gibbons-hawking-york term for theories with curvature, torsion and non-metricity. 11 2022.
- 190 GIBBONS, G. W.; HAWKING, S. W. Action integrals and partition functions in quantum gravity. *Phys. Rev. D Part. Fields*, American Physical Society (APS), v. 15, n. 10, p. 2752–2756, maio 1977.
- 191 CARROLL, S. *Spacetime and geometry*. Philadelphia, PA: Pearson Education, 2003.

- 192 KONNO, K.; MATSUYAMA, T.; TANDA, S. Rotating black hole in extended chern-simons modified gravity. *Prog. Theor. Phys.*, arXiv:0902.4767 [gr-qc], v. 122, p. 561–568, 2009.
- 193 ALEXANDER, S.; YUNES, N. Chern-simons modified general relativity. *Phys. Rept.*, arXiv:0907.2562 [hep-th], v. 480, p. 044015, 2009.
- 194 YUNES, N.; SOPENA, C. F. Perturbations of schwarzschild black holes in Chern-Simons modified gravity. *Phys. Rev.*, American Physical Society (APS), v. 77, n. 6, mar. 2008.
- 195 ODINTSOV, S. D.; OIKONOMOU, V. K.; POPOV, A. A. Propagation of gravitational waves in chern-simons axion einstein gravity. *Phys. Rev. D*, arXiv:1909.01324 [gr-qc], v. 100, p. 084009, 2019.
- 196 BOUDET, S.; BOMBACIGNO, F.; MORETTI, F.; OLMO, G. J. Torsional birefringence in metric-affine Chern-Simons gravity: gravitational waves in late-time cosmology. *J. Cosmol. Astropart. Phys.*, IOP Publishing, v. 2023, n. 01, p. 026, jan. 2023.
- 197 BOMBACIGNO, F.; MORETTI, F.; BOUDET, S.; OLMO, G. J. Landau damping for gravitational waves in parity-violating theories. *J. Cosmol. Astropart. Phys.*, IOP Publishing, v. 2023, n. 02, p. 009, fev. 2023.
- 198 BOUDET, S.; BOMBACIGNO, F.; OLMO, G. J.; PORFÍRIO, P. J. Quasinormal modes of schwarzschild black holes in projective invariant Chern-Simons modified gravity. *J. Cosmol. Astropart. Phys.*, IOP Publishing, v. 2022, n. 05, p. 032, maio 2022.
- 199 OKOUNKOVA, M.; SCHEEL, M. A.; TEUKOLSKY, S. A. Evolving metric perturbations in dynamical Chern-Simons gravity. *Phys. Rev. D.*, American Physical Society (APS), v. 99, n. 4, fev. 2019.
- 200 CHEN, B.; STEIN, L. C. Deformation of extremal black holes from stringy interactions. *Phys. Rev. D.*, American Physical Society (APS), v. 97, n. 8, abr. 2018.
- 201 MAARTENS, R.; KOYAMA, K. Brane-world gravity. *Living Rev. Relativ.*, Springer Nature, v. 13, n. 1, p. 5, set. 2010.
- 202 MAARTENS, R. Brane-world gravity. *Living Rev. Relativ.*, Springer Nature, v. 7, n. 1, p. 7, jun. 2004.
- 203 KETOV, S. V. Starobinsky–Bel–Robinson gravity. *Universe*, MDPI AG, v. 8, n. 7, p. 351, jun. 2022.
- 204 CAMPOS, D. R.; KETOV, S. V. Einstein-Grisaru-Zanon gravity. *Phys. Lett. B*, Elsevier BV, v. 855, n. 138811, p. 138811, ago. 2024.
- 205 WIGNER, E. P. Gruppentheorie und ihre anwendung auf die quantenmechanik der atomspektren. *F. Vieweg and Sohn Akt*, 1931.
- 206 E., N. Invariante variationsprobleme. *Math-phys*, TNachr. D. König. Gesellsch. D. Wiss. Zu Göttingen, p. 235–257, 1918.
- 207 THALLER, B. *The Dirac equation*. Berlin, Germany: Springer, 2010. (Theoretical and Mathematical Physics).

- 208 KOSTELECKÝ, V. A.; RUSSELL, N. Data tables for lorentz and CPT violation. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society (APS), v. 83, n. 1, p. 11–31, mar. 2011.
- 209 ALBRECHT, A.; MAGUEIJO, J. Time varying speed of light as a solution to cosmological puzzles. *Phys. Rev. D Part. Fields*, American Physical Society (APS), v. 59, n. 4, jan. 1999.
- 210 SEIBERG, N.; WITTEN, E. String theory and noncommutative geometry. *J. High Energy Phys.*, Springer Nature, v. 1999, n. 09, p. 032–032, set. 1999.
- 211 GAMBINI, R.; PULLIN, J. *A first course in loop quantum gravity*. London, England: Oxford University Press, 2011.
- 212 HAWKING, S.; PAGE, D.; POPE, C. Quantum gravitational bubbles. *Nuclear Physics B*, v. 170, n. 2, p. 283–306, 1980. ISSN 0550-3213. Volume B170 [FSI] No. 3 to follow in Approximately Two Months. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321380901510>.
- 213 BERNADOTTE, S.; KLINKHAMER, F. R. Bounds on length scales of classical spacetime foam models. *Phys. Rev.*, American Physical Society (APS), v. 75, n. 2, jan. 2007.
- 214 ABDALLA, H.; COTTER, G.; BACKES, M.; KASAI, E.; BÖTTCHER, M. Investigating the lorentz invariance violation effect using different cosmological backgrounds. 2023.
- 215 LORENTZ, M.; BRUN, P. Limits on lorentz invariance violation at the planck energy scale from H.E.S.S. spectral analysis of the blazar mrk 501. *arXiv [astro-ph.HE]*, arXiv, 2016.
- 216 DIRAC, P. A. M. Is there an aether? *Nature*, v. 168, p. 906–907, 1951.
- 217 RÉDEI, L. B. Validity of special relativity at small distances and the velocity dependence of the muon lifetime. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 162, p. 1299–1301, Oct 1967. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.162.1299>.
- 218 CARROLL, S. M.; FIELD, G. B.; JACKIW, R. Limits on a lorentz- and parity-violating modification of electrodynamics. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 41, p. 1231–1240, Feb 1990. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.41.1231>.
- 219 KOSTELECKÝ, V. A. Gravity, lorentz violation, and the standard model. *Phys. Rev.*, American Physical Society (APS), v. 69, n. 10, maio 2004.
- 220 AMELINO-CAMELIA, G. Doubly-special relativity: Facts, myths and some key open issues. *Symmetry (Basel)*, MDPI AG, v. 2, n. 1, p. 230–271, mar. 2010.
- 221 COHEN, A. G.; GLASHOW, S. L. Very special relativity. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society (APS), v. 97, n. 2, p. 021601, jul. 2006.
- 222 BOGOSLOVSKY, G. A special-relativistic theory of the locally anisotropic space-time. *II Nuovo Cimento B Series 11*, v. 40, p. 116–133, 1977.

- 223 GOENNER, H. F.; BOGOSLOVSKY, G. Y. A class of anisotropic (finsler-)space-time geometries. *Gen. Relativ. Gravit.*, Springer Science and Business Media LLC, v. 31, n. 9, p. 1383–1394, set. 1999.
- 224 GIBBONS, G. W.; GOMIS, J.; POPE, C. N. General very special relativity is finsler geometry. *Phys. Rev.*, American Physical Society (APS), v. 76, n. 8, out. 2007.
- 225 FUSTER, A.; PABST, C.; PFEIFER, C. Berwald spacetimes and very special relativity. *Phys. Rev. D.*, American Physical Society (APS), v. 98, n. 8, out. 2018.
- 226 KOCH, B.; ASENJO, F.; HOJMAN, S. Almost relevant corrections for direct measurements of electron's g factor. *Phys. Rev. D.*, American Physical Society (APS), v. 105, n. 5, mar. 2022.
- 227 KLINKHAMER, F. R.; RUPP, C. Spacetime foam, CPT anomaly, and photon propagation. *Phys. Rev.*, American Physical Society (APS), v. 70, n. 4, ago. 2004.
- 228 JACKIW, R. Physical instances of noncommuting coordinates. *Nuclear Phys. B Proc. Suppl.*, Elsevier BV, v. 108, p. 30–36, abr. 2002.
- 229 GRUMILLER, D.; YUNES, N. How do black holes spin in chern-simons modified gravity? *Phys. Rev. D*, arXiv:0711.1868 [gr-qc], v. 77, p. 044015, 2008.
- 230 KOSTELECKÝ, V. A.; LEHNERT, R.; MCGINNIS, N.; SCHRECK, M.; SERADJEH, B. Lorentz violation in dirac and weyl semimetals. *Phys. Rev. Res.*, American Physical Society (APS), v. 4, n. 2, maio 2022.
- 231 KOSTELECKÝ, V. A.; LEHNERT, R. Stability, causality, and lorentz and CPT violation. *Phys. Rev. D Part. Fields*, American Physical Society (APS), v. 63, n. 6, fev. 2001.
- 232 KLINKHAMER, F. R.; SCHRECK, M. Consistency of isotropic modified maxwell theory: Microcausality and unitarity. *Nucl. Phys. B.*, Elsevier BV, v. 848, n. 1, p. 90–107, jul. 2011.
- 233 COLLADAY, D.; KOSTELECKÝ, V. A. CPT violation and the standard model. *Phys. Rev. D Part. Fields*, American Physical Society (APS), v. 55, n. 11, p. 6760–6774, jun. 1997.
- 234 COLLADAY, D.; KOSTELECKÝ, V. A. Lorentz-violating extension of the standard model. *Phys. Rev. D Part. Fields*, American Physical Society (APS), v. 58, n. 11, out. 1998.
- 235 MARIZ, T.; NASCIMENTO, J. R.; PETROV, A. Classical aspects of the lorentz symmetry breaking. In: *SpringerBriefs in Physics*. Cham: Springer Nature Switzerland, 2022, (SpringerBriefs in physics). p. 7–23.
- 236 JACKIW, R. When radiative corrections are finite, but undetermined. *Int. J. Mod. Phys. B*, World Scientific Pub Co Pte Lt, v. 14, n. 19n20, p. 2011–2021, ago. 2000.
- 237 SEIBERG, M. S.; KOSTELECKYN, V. A.; EDWARD. Lorentz violation in supersymmetric field theories. *Phys. Rev. D*, v. 65, n. 091701, 2002.

- 238 KOSTELECKY, V. A. Gravity, lorentz violation, and the standard model. *Phys. Rev. D*, arXiv:hep-th/0312310 [hep-th], v. 69, p. 105009, 2004.
- 239 JACKIW, R.; PI, S. Y. Chern-Simons modification of general relativity. *Phys. Rev. D Part. Fields*, American Physical Society (APS), v. 68, n. 10, nov. 2003.
- 240 MATTINGLY, D. Modern tests of lorentz invariance. *Living Rev. Relativ.*, Springer Nature, v. 8, n. 1, p. 5, set. 2005.
- 241 KOSTELECKY, V. A. Topics in Lorentz and CPT violation. In: *International Conference on Orbis Scientiae 2000: The Role of Attractive and Repulsive Gravitational Forces in Cosmic Acceleration of Particles*. [S.l.: s.n.], 2001. p. 57–68.
- 242 LAND, K.; MAGUEIJO, J. The axis of evil revisited. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, Oxford University Press (OUP), v. 378, n. 1, p. 153–158, jun. 2007.
- 243 MAGUEIJO, J.; SMOLIN, L. Lorentz invariance with an invariant energy scale. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society (APS), v. 88, n. 19, p. 190403, maio 2002.
- 244 GREISEN, K. End to the cosmic-ray spectrum? *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society (APS), v. 16, n. 17, p. 748–750, abr. 1966.
- 245 AMELINO-CAMELIA, G. Special treatment. *Nature*, Springer Science and Business Media LLC, v. 418, n. 6893, p. 34–35, jul. 2002.
- 246 AMELINO-CAMELIA, G. Relativity in spacetimes with short-distance structure governed by an observer-independent (planckian) length scale. *Internat. J. Modern Phys. D*, World Scientific Pub Co Pte Lt, v. 11, n. 01, p. 35–59, jan. 2002.
- 247 MAGUEIJO, J.; SMOLIN, L. Gravity’s rainbow. *Class. Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 21, n. 7, p. 1725–1736, abr. 2004.
- 248 BIETENHOLZ, W. Cosmic rays and the search for a lorentz invariance violation. *Phys. Rep.*, Elsevier BV, v. 505, n. 5, p. 145–185, ago. 2011.
- 249 BIETENHOLZ, W. Cosmic rays and the search for a lorentz invariance violation. *Phys. Rep.*, Elsevier BV, v. 505, n. 5, p. 145–185, ago. 2011.
- 250 LEHNERT, R.; POTTING, R. Vacuum čerenkov radiation. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society (APS), v. 93, n. 11, set. 2004.
- 251 LEHNERT, R.; POTTING, R. Čerenkov effect in lorentz-violating vacua. *Phys. Rev.*, American Physical Society (APS), v. 70, n. 12, dez. 2004.
- 252 ALTSCHUL, B. Cerenkov radiation in a lorentz-violating and birefringent vacuum. *Phys. Rev.*, American Physical Society (APS), v. 75, n. 10, maio 2007.
- 253 ALTSCHUL, B. Why cerenkov radiation may not occur, even when it is allowed by lorentz-violating kinematics. *Symmetry*, v. 9, n. 11, 2017. ISSN 2073-8994. Disponível em: <<https://www.mdpi.com/2073-8994/9/11/250>>.
- 254 ZAVATTINI, E.; ZAVATTINI, G.; RUOSO, G.; RAITERI, G.; POLACCO, E.; MILOTTI, E.; LOZZA, V.; KARUZA, M.; GASTALDI, U.; DOMENICO, G. D.; VALLE, F. D.; CIMINO, R.; CARUSOTTO, S.; CANTATORE, G.; BREGANT, M. New PVLAS results and limits on magnetically induced optical rotation and ellipticity in vacuum. *Phys. Rev.*, American Physical Society (APS), v. 77, n. 3, fev. 2008.

- 255 CHAICHIAN, M.; SHEIKH-JABBARI, M. M.; TUREANU, A. Noncommutativity of space and rotation of polarization of light in a background magnetic field. 2005.
- 256 CHATILLON, N.; PINZUL, A. Light propagation in a background field for time-space non-commutativity and axionic non-commutative QED. *Nucl. Phys. B.*, Elsevier BV, v. 764, n. 1-2, p. 95–108, fev. 2007.
- 257 JACKSON, D.; BUFALO, R. Não localidade em teoria de campos e aplicações. *Rev. Bras. Ensino Fís.*, FapUNIFESP (SciELO), v. 44, 2022.
- 258 HESSE, M. B. Action at a distance in classical physics. *Isis*, University of Chicago Press, v. 46, n. 4, p. 337–353, dez. 1955.
- 259 HESSE, M. B. *Forces and fields*. Mineola, NY: Dover Publications, 2005.
- 260 MICHELSON, A. A.; MORLEY, E. W. LVIII. on the relative motion of the earth and the luminiferous Æther. *Lond. Edinb. Dublin Philos. Mag. J. Sci.*, Informa UK Limited, v. 24, n. 151, p. 449–463, dez. 1887.
- 261 EISELE, C.; NEVSKY, A. Y.; SCHILLER, S. Laboratory test of the isotropy of light propagation at the 10⁽⁻¹⁷⁾ level. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society (APS), v. 103, n. 9, p. 090401, ago. 2009.
- 262 PAULI, W. On the hamiltonian structure of non-local field theories. *Il Nuovo Cimento*, Springer Science and Business Media LLC, v. 10, n. 5, p. 648–667, maio 1953.
- 263 HAYASHI, C. Hamiltonian formalism in non-local field theories. *Prog. Theor. Phys.*, Oxford University Press (OUP), v. 10, n. 5, p. 533–548, nov. 1953.
- 264 HEISENBERG, W. Über den anschaulichen inhalt der quantentheoretischen kinematik und mechanik. *Eur. Phys. J. A*, Springer Science and Business Media LLC, v. 43, n. 3-4, p. 172–198, mar. 1927.
- 265 EINSTEIN, A.; PODOLSKY, B.; ROSEN, N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 47, p. 777–780, May 1935. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.47.777>>.
- 266 BELL, J. S. On the einstein podolsky rosen paradox. *Physics Physique Fizika*, American Physical Society, v. 1, p. 195–200, Nov 1964. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysicsPhysiqueFizika.1.195>>.
- 267 GHIRARDI, G. C.; RIMINI, A.; WEBER, T. A general argument against superluminal transmission through the quantum mechanical measurement process. *Lett. Al Nuovo Cimento*, Springer Science and Business Media LLC, v. 27, n. 10, p. 293–298, mar. 1980.
- 268 NOVAES, S. F. Standard model: An introduction. 2000.
- 269 WITTEN, E. Non-commutative geometry and string field theory. *Nuclear Physics B*, v. 268, n. 2, p. 253–294, 1986. ISSN 0550-3213. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321386901550>>.
- 270 PAIS, A.; UHLENBECK, G. E. On field theories with non-localized action. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 79, p. 145–165, Jul 1950. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.79.145>>.

- 271 GAMA, F. S.; NASCIMENTO, J. R.; PETROV, A. Y.; PORFIRIO, P. J. Spontaneous symmetry breaking in the nonlocal scalar QED. abr. 2018.
- 272 KAKU, M.; KIKKAWA, K. Field theory of relativistic strings. i. trees. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 10, p. 1110–1133, Aug 1974. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.10.1110>.
- 273 GREEN, M. B.; SCHWARZ, J. H. Superstring field theory. *Nucl. Phys. B*, Elsevier BV, v. 243, n. 3, p. 475–536, set. 1984.
- 274 FREUND, P. G. O.; WITTEN, E. Adelic string amplitudes. *Phys. Lett. B*, Elsevier BV, v. 199, n. 2, p. 191–194, dez. 1987.
- 275 BREKKE, L.; FREUND, P. G. O.; OLSON, M.; WITTEN, E. Non-archimedean string dynamics. *Nucl. Phys. B*, Elsevier BV, v. 302, n. 3, p. 365–402, jun. 1988.
- 276 MOELLER, N.; ZWIEBACH, B. Dynamics with infinitely many time derivatives and rolling tachyons. *J. High Energy Phys.*, Springer Nature, v. 2002, n. 10, p. 034–034, out. 2002.
- 277 TOMBOULIS, E. T. Superrenormalizable gauge and gravitational theories. 1997.
- 278 MODESTO, L.; CALCAGNI, G. Tree-level scattering amplitudes in nonlocal field theories. *J. High Energy Phys.*, Springer Science and Business Media LLC, v. 2021, n. 10, out. 2021.
- 279 BRISCESE, F.; MODESTO, L. Unattainability of the trans-planckian regime in nonlocal quantum gravity. *J. High Energy Phys.*, Springer Science and Business Media LLC, v. 2020, n. 9, set. 2020.
- 280 BOOS, J.; CARONE, C. D. Asymptotically nonlocal gravity. *J. High Energy Phys.*, Springer Science and Business Media LLC, v. 2023, n. 6, jun. 2023.
- 281 BISWAS, T.; GERWICK, E.; KOIVISTO, T.; MAZUMDAR, A. Towards singularity- and ghost-free theories of gravity. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society (APS), v. 108, n. 3, p. 031101, jan. 2012.
- 282 HAWKING, S. W.; HERTOOG, T. Living with ghosts. *Phys. Rev. D Part. Fields*, American Physical Society (APS), v. 65, n. 10, maio 2002.
- 283 WOODARD, R. P. *The Theorem of Ostrogradsky*. 2015. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1506.02210>.
- 284 OSTROGRADSKY, M. Mémoires sur les équations différentielles, relatives au problème des isopérimètres. *Mem. Acad. St. Petersburg*, v. 6, n. 4, p. 385–517, 1850.
- 285 DIMITRIJEVIC, I.; DRAGOVICH, B.; KOSHELEV, A. S.; RAKIC, Z.; STANKOVIC, J. Cosmological solutions of a nonlocal square root gravity. *Phys. Lett. B*, Elsevier BV, v. 797, n. 134848, p. 134848, out. 2019.
- 286 KOSHELEV, A. S.; MODESTO, L.; RACHWAL, L.; STAROBINSKY, A. A. Occurrence of exact R² inflation in non-local UV-complete gravity. *J. High Energy Phys.*, Springer Science and Business Media LLC, v. 2016, n. 11, nov. 2016.

- 287 KOSHELEV, A. S.; KUMAR, K. S.; STAROBINSKY, A. A. R² inflation to probe non-perturbative quantum gravity. *J. High Energy Phys.*, Springer Science and Business Media LLC, v. 2018, n. 3, mar. 2018.
- 288 KOSHELEV, A. S.; KUMAR, K. S.; MAZUMDAR, A.; STAROBINSKY, A. A. Non-Gaussianities and tensor-to-scalar ratio in non-local r²-like inflation. *J. High Energy Phys.*, Springer Science and Business Media LLC, v. 2020, n. 6, jun. 2020.
- 289 BISWAS, T.; MAZUMDAR, A.; SIEGEL, W. Bouncing universes in string-inspired gravity. *J. Cosmol. Astropart. Phys.*, IOP Publishing, v. 2006, n. 03, p. 009–009, mar. 2006.
- 290 BISWAS, T.; KOIVISTO, T.; MAZUMDAR, A. Towards a resolution of the cosmological singularity in non-local higher derivative theories of gravity. *J. Cosmol. Astropart. Phys.*, IOP Publishing, v. 2010, n. 11, p. 008–008, nov. 2010.
- 291 JHINGAN, S.; NOJIRI, S.; ODINTSOV, S. D.; SAMI, M.; THONGKOOL, I.; ZERBINI, S. Phantom and non-phantom dark energy: The cosmological relevance of non-locally corrected gravity. *Phys. Lett. B*, Elsevier BV, v. 663, n. 5, p. 424–428, jun. 2008.
- 292 LI, Y.-D.; MODESTO, L.; RACHWAŁ, L. Exact solutions and spacetime singularities in nonlocal gravity. *J. High Energy Phys.*, Springer Science and Business Media LLC, v. 2015, n. 12, p. 1–50, dez. 2015.
- 293 BAMBI, C.; MALAFARINA, D.; MODESTO, L. Black supernovae and black holes in non-local gravity. *J. High Energy Phys.*, Springer Science and Business Media LLC, v. 2016, n. 4, p. 1–21, abr. 2016.
- 294 BUONINFANTE, L.; GIACCHINI, B. L.; NETTO, T. d. P. Black holes in non-local gravity. In: *Handbook of Quantum Gravity*. Singapore: Springer Nature Singapore, 2024. p. 1–30.
- 295 BUONINFANTE, L.; MIYASHITA, Y.; YAMAGUCHI, M. Topological defects in nonlocal field theories. *J. High Energy Phys.*, Springer Science and Business Media LLC, v. 2022, n. 11, nov. 2022.
- 296 SILVA, P. J. Ferreira porfirio da; PETROV, A.; ANDRADE, I.; MENEZES, R. Kink solutions in nonlocal scalar field theory models. 2024.
- 297 NASCIMENTO, J. R.; PETROV, A. Y.; PORFÍRIO, P. J. Causal gödel-type metrics in non-local gravity theories. *Eur. Phys. J. C Part. Fields*, Springer Science and Business Media LLC, v. 81, n. 9, set. 2021.
- 298 GAMA, F. S.; NASCIMENTO, J. R.; PETROV, A. Y.; PORFÍRIO, P. J. One-loop effective potential in the nonlocal supersymmetric gauge theory. *Phys. Rev. D.*, American Physical Society (APS), v. 96, n. 10, nov. 2017.
- 299 GAMA, F. S.; NASCIMENTO, J. R.; PETROV, A. Y. Supersymmetric gauge theories with higher derivatives and nonlocal terms in the matter sector. *Phys. Rev. D.*, American Physical Society (APS), v. 101, n. 10, maio 2020.
- 300 MODESTO, L. The higgs mechanism in nonlocal field theory. *J. High Energy Phys.*, Springer Science and Business Media LLC, v. 2021, n. 6, jun. 2021.

- 301 HASHI, M. N.; ISONO, H.; NOUMI, T.; SHIU, G.; SOLER, P. Higgs mechanism in nonlocal field theories. *J. High Energy Phys.*, Springer Science and Business Media LLC, v. 2018, n. 8, ago. 2018.
- 302 EFIMOV, G. V. Non-local quantum theory of the scalar field. *Commun. Math. Phys.*, v. 5, n. 1, p. 42–56, 1967.
- 303 SNYDER, H. S. Quantized space-time. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 71, p. 38–41, Jan 1947. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.71.38>.
- 304 ELIEZER, D. A.; WOODARD, R. P. The problem of nonlocality in string theory. *Nucl. Phys. B.*, Elsevier BV, v. 325, n. 2, p. 389–469, out. 1989.
- 305 BARVINSKY, A. O.; VILKOVISKY, G. A. The generalized schwinger-dewitt technique in gauge theories and quantum gravity. *Phys. Rept.*, v. 119, p. 1–74, 1985.
- 306 WESS, J.; ZUMINO, B. Consequences of anomalous Ward identities. *Phys. Lett. B*, v. 37, p. 95–97, 1971.
- 307 WITTEN, E. Global Aspects of Current Algebra. *Nucl. Phys. B*, v. 223, p. 422–432, 1983.
- 308 NOVIKOV, S.; LETM, I. *Multivalued Functions and Functionals. An Analogue of the Morse Theory*. [s.n.], 2007. Disponível em: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:21063665>.
- 309 MILGROM, M. A modification of the newtonian dynamics as a possible alternative to the hidden mass hypothesis. *Astrophys. J.*, American Astronomical Society, v. 270, p. 365, jul. 1983.
- 310 TURYSHEV, S. G. Experimental tests of general relativity. *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.*, Annual Reviews, v. 58, n. 1, p. 207–248, nov. 2008.
- 311 GARCÍA, A. A.; HEHL, F. W.; HEINICKE, C.; MACÍAS, A. The cotton tensor in riemannian spacetimes. *Class. Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 21, n. 4, p. 1099–1118, fev. 2004.
- 312 BINI, D.; JANTZEN, R. T.; MINIUTTI, G. The cotton, Simon–Mars and Cotton–York tensors in stationary spacetimes. *Class. Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 18, n. 22, p. 4969–4981, nov. 2001.
- 313 HAWKING, S. W.; HERTOG, T. Living with ghosts. *Phys. Rev. D Part. Fields*, American Physical Society (APS), v. 65, n. 10, maio 2002.
- 314 CRISOSTOMI, M.; NOUI, K.; CHARMOUSIS, C.; LANGLOIS, D. Beyond lovelock gravity: Higher derivative metric theories. *Phys. Rev. D.*, American Physical Society (APS), v. 97, n. 4, fev. 2018.
- 315 GEORGI, H. Effective field theory. *Annual review of nuclear and particle science*, Annual Reviews 4139 El Camino Way, PO Box 10139, Palo Alto, CA 94303-0139, USA, v. 43, n. 1, p. 209–252, 1993.
- 316 FELICE, A. D.; TSUJIKAWA, S. S. $f(r)$ theories. *Living Rev. Rel.*, arXiv:1002.4928 [gr-qc], v. 13, p. 3, 2010.

- 317 SALVIO, A.; STRUMIA, A. Agravity. *J. High Energy Phys.*, Springer Science and Business Media LLC, v. 2014, n. 6, jun 2014.
- 318 PORFÍRIO, P. J.; FONSECA-NETO, J. B.; NASCIMENTO, J. R.; PETROV, A. Y. Causality aspects of the dynamical Chern-Simons modified gravity. *Phys. Rev. D.*, American Physical Society (APS), v. 94, n. 10, nov. 2016.
- 319 EINSTEIN, A. The swiss years: Correspondence, 1902-1914 (english translation supplement). v. 5, p. 340, 1913.
- 320 COHEN, J. Dragging of inertial frames by rotating masses. *Relativity Theory and Astrophysics*, American Mathematical Society, VII, p. 200–202, 1965.
- 321 CIUFOLINI, I. Test of general relativity: 1995-2002 measurement of frame-dragging. *arXiv [gr-qc]*, arXiv, 2002.
- 322 CAHILL, R. T. Novel gravity probe B frame-dragging effect. *arXiv [physics.gen-ph]*, arXiv, 2004.
- 323 PRASANNA, A. R. Inertial frame dragging and mach's principle in general relativity. *Class. Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 14, n. 1, p. 227–236, jan. 1997.
- 324 MANOUKIAN, E. B. Frame dragging and geodetic effect derived: Two more tests of gr. In: _____. *100 Years of Fundamental Theoretical Physics in the Palm of Your Hand: Integrated Technical Treatment*. Cham: Springer International Publishing, 2020. p. 417–424. ISBN 978-3-030-51081-7. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-030-51081-7_67>.
- 325 Thirring, H. Über die Wirkung rotierender ferner Massen in der Einsteinschen Gravitationstheorie. *Physikalische Zeitschrift*, v. 19, p. 33, jan. 1918.
- 326 COSTA, L. F.; NATÁRIO, J. The coriolis field. *Am. J. Phys.*, American Association of Physics Teachers (AAPT), v. 84, n. 5, p. 388–395, maio 2016.
- 327 COSTA, L.; NATÁRIO, J. Frame-dragging: Meaning, myths, and misconceptions. *Universe*, MDPI AG, v. 7, n. 10, p. 388, out. 2021.
- 328 MASHHOON, B. Gravitational effects of rotating masses. *Found. Phys.*, Springer Science and Business Media LLC, v. 15, n. 4, p. 497–515, abr. 1985.
- 329 SCHIFF, L. I. Motion of a gyroscope according to einstein's theory of gravitation^{*}. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, v. 46, n. 6, p. 871–882, 1960. Disponível em: <<https://www.pnas.org/doi/abs/10.1073/pnas.46.6.871>>.
- 330 RINDLER, W. The case against space dragging. *Phys. Lett. A*, Elsevier BV, v. 233, n. 1-2, p. 25–29, ago. 1997.
- 331 ALTSCHUL, B.; NASCIMENTO, J. R.; PETROV, A. Y.; PORFÍRIO, P. J. First-order perturbations of gödel-type metrics in non-dynamical Chern–Simons modified gravity. *Class. Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 39, n. 2, p. 025002, jan. 2022.
- 332 MOFFAT, J. W. Finite nonlocal gauge field theory. *Phys. Rev. D Part. Fields*, American Physical Society (APS), v. 41, n. 4, p. 1177–1184, fev. 1990.

- 333 KRASNIKOV, N. V. Nonlocal gauge theories. *Theor. Math. Phys.*, Springer Science and Business Media LLC, v. 73, n. 2, p. 1184–1190, nov. 1987.
- 334 MODESTO, L.; RACHWAŁ, L. Super-renormalizable and finite gravitational theories. *Nucl. Phys. B.*, Elsevier BV, v. 889, p. 228–248, dez. 2014.
- 335 KOSHELEV, A. S.; KUMAR, K. S.; MODESTO, L.; RACHWAŁ, L. Finite quantum gravity in ds and AdS spacetimes. *Phys. Rev. D.*, American Physical Society (APS), v. 98, n. 4, ago. 2018.
- 336 ACCIOLY, A.; AZEREDO, A.; MUKAI, H. Propagator, tree-level unitarity and effective nonrelativistic potential for higher-derivative gravity theories in D dimensions. *J. Math. Phys.*, AIP Publishing, v. 43, n. 1, p. 473–491, jan. 2002.
- 337 KUZMIN, Y. V. THE CONVERGENT NONLOCAL GRAVITATION. (IN RUSSIAN). *Sov. J. Nucl. Phys.*, v. 50, p. 1011–1014, 1989.
- 338 BOLLINI, C. G.; GIAMBIAGI, J. J. Arbitrary powers of D’Alembertians and the Huygens’ principle. *J. Math. Phys.*, AIP Publishing, v. 34, n. 2, p. 610–621, fev. 1993.
- 339 CALCAGNI, G.; RACHWAŁ, L. Ultraviolet-complete quantum field theories with fractional operators. *J. Cosmol. Astropart. Phys.*, IOP Publishing, v. 2023, n. 09, p. 003, set. 2023.
- 340 BENEITO, A. B. i.; CALCAGNI, G.; RACHWAŁ, L. Classical and quantum nonlocal gravity. 2022.
- 341 CALCAGNI, G.; MONTOBIO, M.; NARDELLI, G. Route to nonlocal cosmology. *Phys. Rev.*, American Physical Society (APS), v. 76, n. 12, dez. 2007.
- 342 KRASNIKOV, N. V. Nonlocal gauge theories. *Theor. Math. Phys.*, Springer Science and Business Media LLC, v. 73, n. 2, p. 1184–1190, nov. 1987.
- 343 BISWAS, T.; GERWICK, E.; KOIVISTO, T.; MAZUMDAR, A. Towards singularity- and ghost-free theories of gravity. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society (APS), v. 108, n. 3, p. 031101, jan. 2012.
- 344 MODESTO, L. Super-renormalizable quantum gravity. *Phys. Rev.*, American Physical Society (APS), v. 86, n. 4, ago. 2012.
- 345 BRISCESE, F.; MARCIANÒ, A.; MODESTO, L.; SARIDAKIS, E. N. Inflation in (super-)renormalizable gravity. *Phys. Rev.*, American Physical Society (APS), v. 87, n. 8, abr. 2013.
- 346 DESER, S.; WOODARD, R. P. Nonlocal cosmology. *Physical Review Letters*, APS, v. 99, n. 11, p. 111301, 2007.
- 347 CRAIK, A. D. D. The origins of water wave theory. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, Annual Reviews, v. 36, n. 1, p. 1–28, jan. 2004.
- 348 ZWICKY, R. A brief introduction to dispersion relations and analyticity. 2016.
- 349 TOLL, J. S. Causality and the dispersion relation: Logical foundations. *Phys. Rev.*, American Physical Society (APS), v. 104, n. 6, p. 1760–1770, dez. 1956.

- 350 GAVASSINO, L.; DISCONZI, M.; NORONHA, J. Dispersion relations alone cannot guarantee causality. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society (APS), v. 132, n. 16, p. 162301, abr. 2024.
- 351 MEZO, I. *The Lambert W function*. Philadelphia, PA: Chapman & Hall/CRC, 2024.
- 352 COLLADAY, D.; KOSTELECKÝ, V. A. CPTviolation and the standard model. *Phys. Rev. D Part. Fields*, American Physical Society (APS), v. 55, n. 11, p. 6760–6774, jun. 1997.
- 353 KOSTELECKÝ, V. A.; LEHNERT, R. Stability, causality, and lorentz and CPT violation. *Phys. Rev. D Part. Fields*, American Physical Society (APS), v. 63, n. 6, fev. 2001.
- 354 CARONE, C. D. Aspects and applications of nonlocal lorentz violation. *Phys. Rev. D.*, American Physical Society (APS), v. 102, n. 9, nov. 2020.
- 355 AMELINO-CAMELIA, G.; ELLIS, J.; MAVROMATOS, N. E.; NANOPOULOS, D. V.; SARKAR, S. Tests of quantum gravity from observations of γ -ray bursts. *Nature*, Springer Science and Business Media LLC, v. 393, n. 6687, p. 763–765, jun. 1998.
- 356 ALFARO, J.; MORALES-TECOTL, H. A.; URRUTIA, L. F. Quantum gravity corrections to neutrino propagation. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society (APS), v. 84, n. 11, p. 2318–2321, mar. 2000.
- 357 YUKAWA, H. On the interaction of elementary particles. I. *Progr. Theoret. Phys. Suppl.*, Oxford University Press (OUP), v. 1, p. 1–10, 1955.
- 358 LATTES, C. M. G.; OCCHIALINI, G. P. S.; POWELL, C. F. Observations on the tracks of slow mesons in photographic emulsions. *Nature*, Springer Science and Business Media LLC, v. 160, n. 4066, p. 453–456, out. 1947.
- 359 WEINBERG, S. A model of leptons. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society (APS), v. 19, n. 21, p. 1264–1266, nov. 1967.
- 360 BUONINFANTE, L. *Nonlocal Field theories: Theoretical and Phenomenological Aspects*. Tese (Doutorado), 2019.
- 361 BUCHBINDER, I. L.; GOMES, M.; PETROV, A. Y.; RIVELLES, V. O. Superfield effective action in the noncommutative Wess–Zumino model. *Phys. Lett. B*, Elsevier BV, v. 517, n. 1-2, p. 191–202, set. 2001.
- 362 JACKSON, J. D.; OKUN, L. B. Historical roots of gauge invariance. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society (APS), v. 73, n. 3, p. 663–680, set. 2001.
- 363 FOCK, V. Zur schrödingerschen wellenmechanik. *Zeit. für Phys.*, v. 338, p. 242–250, jul. 1926.
- 364 BAILIN, D.; LOVE, A. Grand unified theory. In: *Introduction to Gauge Field Theory*. New York: Routledge, 2019. p. 298–314.
- 365 FRAMPTON, P. H. *Gauge field theories*. 3. ed. Weinheim, Germany: Wiley-VCH Verlag, 2008.

- 366 LANCZOS, C. Lagrangian multiplier and riemannian spaces. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society (APS), v. 21, n. 3, p. 497–502, jul. 1949.
- 367 LASENBY, A.; DORAN, C.; GULL, S. Gravity, gauge theories and geometric algebra. *Philos. Trans. A Math. Phys. Eng. Sci.*, The Royal Society, v. 356, n. 1737, p. 487–582, mar. 1998.
- 368 BRACKX, F.; DELANGHE, R.; SERRAS, H. (Ed.). *Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics*. 1993. ed. Dordrecht, Netherlands: Springer, 1993. (Fundamental Theories of Physics).
- 369 GOUDSMIT, S.; UHLENBECK, G. Opmerking over de spectra van waterstof in helium. *Physica*, n. 5, p. 266–270, 1925.
- 370 PAULI JR, W. Zur quantenmechanik des magnetischen elektrons. *Z. Phys.*, Springer Science and Business Media LLC, v. 43, n. 9-10, p. 601–623, set. 1927.
- 371 LÉVY-LEBLOND, J.-M. Nonrelativistic particles and wave equations. *Commun. Math. Phys.*, Springer Science and Business Media LLC, v. 6, n. 4, p. 286–311, dez. 1967.
- 372 FAN, X.; MYERS, T. G.; SUKRA, B. A. D.; GABRIELSE, G. Measurement of the electron magnetic moment. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society (APS), v. 130, n. 7, p. 071801, fev. 2023.
- 373 COHEN, A. G.; KAPLAN, D. B. Gravitational contributions to the electron g -factor. 2021.
- 374 MEASUREMENT of the negative muon anomalous magnetic moment to 0.7 ppm. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society (APS), v. 92, n. 16, p. 161802, abr. 2004.
- 375 BANERJEE, H.; BYAKTI, P.; ROY, S. Supersymmetric gauged $U(1)_{L\mu-L\tau}$ model for neutrinos and the muon ($g - 2$) anomaly. *Phys. Rev. D.*, American Physical Society (APS), v. 98, n. 7, out. 2018.
- 376 KESHAVARZI, A.; KHAW, K. S.; YOSHIOKA, T. Muon $g-2$: A review. *Nucl. Phys. B.*, Elsevier BV, v. 975, n. 115675, p. 115675, fev. 2022.
- 377 MOHAPATRA, R. N. *Unification and supersymmetry*. 2. ed. New York, NY: Springer, 2013. (Graduate Texts in Contemporary Physics).
- 378 WESS, J.; BAGGER, J. *Supersymmetry and supergravity*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1992. (Princeton Series in Physics).
- 379 WEINBERG, S. *The quantum theory of fields: Supersymmetry volume 3*. Cambridge, England: Cambridge University Press, 2013.
- 380 ROSS, G. G. *Grand Unified Theories*. Reading, PA: Benjamin-Cummings Publishing Co., Subs. of Addison Wesley Longman, 1984.
- 381 NIEUWENHUIZEN, P. van. Supergravity. *Phys. Rep.*, Elsevier BV, v. 68, n. 4, p. 189–398, fev. 1981.
- 382 NATH, P.; ARNOWITT, R. Generalized super-gauge symmetry as a new framework for unified gauge theories. *Phys. Lett. B*, Elsevier BV, v. 56, n. 2, p. 177–180, abr. 1975.

- 383 FREEDMAN, D. Z.; PROEYEN, A. V. *Supergravity*. Cambridge, England: Cambridge University Press, 2012.
- 384 FEYNMAN, R. P.; MORINIGO, F. B.; WAGNER, W. G.; PINES, D.; HATFIELD, B. F. *Lectures on Gravitation*. Boulder, CO: Perseus Books, 1995. (Frontiers in Physics).
- 385 RANDALL, L. *Warped passages*. Hopewell, VA: Ecco Press, 2005.
- 386 POVH, B.; RITH, K.; SCHOLZ, C.; ZETSCHKE, F. *Particles and nuclei*. 3. ed. Berlin, Germany: Springer, 2002.
- 387 LOVELOCK, D. The uniqueness of the einstein field equations in a four-dimensional space. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, Springer Nature, v. 33, n. 1, p. 54–70, jan. 1969.
- 388 LOVELOCK, D. The einstein tensor and its generalizations. *J. Math. Phys.*, AIP Publishing, v. 12, n. 3, p. 498–501, mar. 1971.
- 389 NAVARRO, A.; NAVARRO, J. Lovelock’s theorem revisited. *J. Geom. Phys.*, Elsevier BV, v. 61, n. 10, p. 1950–1956, out. 2011.
- 390 LOVELOCK, D. The four-dimensionality of space and the einstein tensor. *J. Math. Phys.*, AIP Publishing, v. 13, n. 6, p. 874–876, jun. 1972.
- 391 LOVELOCK, D.; RUND, H. *Tensors, differential forms and variational principles*. Mineola, NY: Dover Publications, 1989. (Dover Books on Mathematics).
- 392 AHLFORS, L. V. *Complex Analysis*. 3. ed. New York, NY: McGraw-Hill Professional, 1978. (International series in pure and applied mathematics).
- 393 DUBROVIN, B. A.; FOMENKO, A. T.; NOVIKOV, S. P. *Modern geometry - methods and applications*. 2. ed. New York, NY: Springer, 2011. (Graduate Texts in Mathematics).