

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Doutorado em Matemática

Desigualdades de Bohnenblust–Hille, de Hardy–Littlewood e de Khinchin

por

Djair Paulino dos Santos

João Pessoa - PB

Outubro/2020

Desigualdades de Bohnenblust–Hille, de Hardy–Littlewood e de Khinchin

por

Djair Paulino dos Santos 

sob orientação do

Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino

sob coorientação do

Prof. Dr. Daniel Núñez Alarcón

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

João Pessoa - PB

Outubro/2020

[†]Este trabalho contou com apoio financeiro parcial da CAPES.

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S237d Santos, Djair Paulino dos.

Desigualdades de Bohnenblust-Hille, de Hardy-Littlewood e de Khinchin / Djair Paulino dos Santos. - João Pessoa, 2020.

100 f. : il.

Orientação: Daniel Marinho Pellegrino.

Coorientação: Daniel Núñez Alarcón.

Tese (Doutorado) - UFPB/CCEN.

1. Matemática. 2. Desigualdades de Hardy-Littlewood. 3. Desigualdades de Khinchin. 4. Operadores múltiplo somantes. 5. Formas multilineares. 6. Desigualdades de Bohnenblust-Hille. I. Pellegrino, Daniel Marinho. II. Alarcón, Daniel Núñez. III. Título.

UFPB/BC

CDU 51(043)

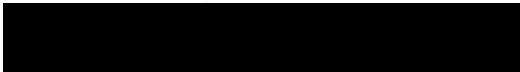
Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Doutorado em Matemática

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Área de concentração: Análise

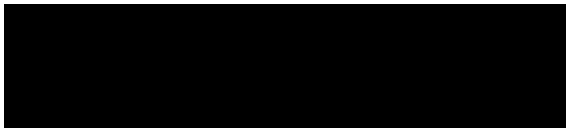
Data de aprovação: 05 de outubro de 2020

Comissão examinadora:



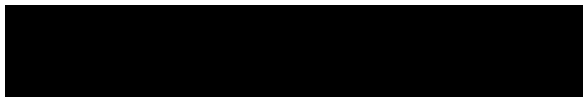
Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino

Universidade Federal da Paraíba - Orientador



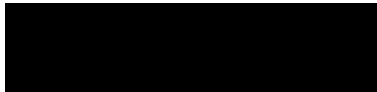
Prof. Dr. Danilo Júnior Gonçalves Araújo

Universidade Federal da Paraíba - Examinador interno



Prof. Dr. Eduardo Vasconcelos Oliveira/Teixeira

University of Central Florida - Examinador externo



Prof. Dra. Maria Pilar Rueda Segado

Universitat de València - Examinador externo

João Pessoa - PB

Outubro de 2020

Resumo

Neste trabalho, apresentamos variações de três desigualdades clássicas e investigamos as constantes e expoentes ótimos envolvidos. No Capítulo 1, provamos uma versão multilinear da desigualdade de Bohnenblust–Hille para índices uniformemente limitados; no Capítulo 2, demonstramos desigualdades de Hardy–Littlewood para formas m -lineares $T : \ell_{p_1} \times \cdots \times \ell_{p_m} \longrightarrow \mathbb{K}$ no caso $1/p_1 + \cdots + 1/p_m \geq 1$, que até então nunca havia sido investigado por questões técnicas. Finalmente, no Capítulo 3, apresentamos variações da desigualdade múltipla de Khinchin.

Palavras-chave: Desigualdades de Bohnenblust–Hille; Desigualdades de Hardy–Littlewood; Desigualdades de Khinchin; Operadores múltiplo somantes; Formas multilineares.

Abstract

In this work we present variations of three classical inequalities and we investigate the corresponding optimal constants and exponents. In Chapter 1 we prove a multilinear version of the Bohnenblust–Hille inequality for uniformly bounded indexes; In Chapter 2 we prove Hardy–Littlewood like inequalities for m -linear forms $T : \ell_{p_1} \times \cdots \times \ell_{p_m} \longrightarrow \mathbb{K}$ in the case $1/p_1 + \cdots + 1/p_m \geq 1$, which until then have never been investigated for technical reasons. Finally, in Chapter 3 we present variations of the multiple Khinchin inequality.

Keywords: Bohnenblust–Hille inequalities; Hardy–Littlewood inequalities; Khinchin inequalities; Multiple summing operators; Multilinear forms.

Agradecimentos

A Deus, por sua infinita bondade e por guiar meus passos.

Aos meus pais, Eleni e José Pedro, pelos valores ensinados e pelos meus estudos.

Aos meus irmãos, Davi, Cleciana, Catiana, José, Janiel e Jessé, por me incentivarem e por me ajudarem sempre que possível.

A todos os meus professores, do pré-escolar a pós-graduação, por cada detalhe que me ensinaram.

Ao meu orientador Daniel Pellegrino, por toda dedicação, ensinamentos, compreensão, disponibilidade, paciência, ajuda e orientação.

Ao meu coorientador Daniel Núñez, pelos ensinamentos e pela orientação.

Ao professor Joedson dos Santos, pelo apoio e pelos trabalhos desenvolvidos.

Aos membros da banca por terem aceitado o convite e pelas contribuições dadas.

Aos meus amigos que estiveram presentes. Em especial Deivid, Sâmya, Pedro, Talison, Sylvia, Castelo, Breno, Lindinês, Ediene, Fernando, Juuh, Camila, Hector e Tony.

Aos colegas de disciplinas, por todos os momentos de estudos e conhecimento compartilhado. Em especial Laise e Dayane, pela amizade.

À Janiely, por tanta compreensão, incentivo, ajuda, correções, paciência, momentos de escuta, etc.

Ao meu amigo Jonathas Phillipe, pela amizade e pela convivência nesta trajetória.

Ao IFRN, em especial ao meu campus João Câmara, pelo afastamento concedido na reta final do meu doutorado.

À CAPES, pelo apoio financeiro nos primeiros semestres.

Ao meu companheiro inseparável, Djair Paulino, por tantas horas de dedicação, pela vontade de querer aprender, pela garra, pelo esforço e pelo empenho neste doutorado.

“Ninguém ignora tudo. Ninguém sabe tudo. Todos nós sabemos alguma coisa. Todos nós ignoramos alguma coisa. Por isso aprendemos sempre.”

Paulo Freire

Dedicatória

*À minha amada mãe, Eleni,
e ao meu querido pai, José Pedro.*

Sumário

Introdução	1
Notação e terminologia	11
1 Desigualdades de Bohnenblust–Hille	15
1.1 Observações sobre desigualdades de Bohnenblust–Hille com restrições	15
1.2 Desigualdade de Bohnenblust–Hille polinomial com restrições	20
1.3 Desigualdade de Bohnenblust–Hille multilinear com restrições	23
2 Desigualdades de Hardy–Littlewood	29
2.1 Desigualdades críticas de Hardy–Littlewood	30
2.2 Desigualdades supercríticas de Hardy–Littlewood	42
2.2.1 O caso trilinear	48
2.2.2 O caso m -linear	53
3 Desigualdades de Khinchin	63
3.1 Constantes de desigualdades do tipo Khinchin	66
3.2 Constantes de desigualdades do tipo Kahane	73
Apêndices	
A Resultados auxiliares	80
A.1 Resultados clássicos	80
A.2 Resultados de apoio	82
Referências	85

Introdução

Em 1923, A. Khinchin [46] provou que existe uma constante $C > 0$ tal que, para todo inteiro positivo n e qualquer sequência de escalares $(a_i)_{i=1}^{\infty}$, tem-se

$$\left(\sum_{i=1}^n |a_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \cdot \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^n r_i(t) a_i \right| dt, \quad (1)$$

onde $r_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ são as chamadas funções de Rademacher, $r_i(t) := \text{sign}(\sin 2^i \pi t)$. Essa desigualdade, que surgiu no campo da Probabilidade e possui aplicações em Análise, ficou conhecida como desigualdade (ℓ_1, ℓ_2) de Khinchin ([19, p. 21]).

Dois anos depois, J. E. Littlewood [19, p. 23], possivelmente desconhecendo o artigo de Khinchin, provou desigualdades semelhantes (veja [49] e [51]). Dentre elas, sua desigualdade (ℓ_1, ℓ_2) , que garante a existência de uma constante $C > 0$ tal que

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n |T(e_i, e_j)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \cdot \|T\|, \quad (2)$$

para toda forma bilinear $T : \ell_{\infty}^n \times \ell_{\infty}^n \rightarrow \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n .

A partir da desigualdade (ℓ_1, ℓ_2) de Khinchin e, aparentemente, desconhecendo a desigualdade apresentada em 1930 por Littlewood, W. Orlicz [19, p. 24], em 1933, provou sua desigualdade (ℓ_2, ℓ_1) , a qual afirma que existe uma constante $C > 0$ satisfazendo

$$\left(\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n |T(e_i, e_j)| \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \cdot \|T\|, \quad (3)$$

para toda forma bilinear $T : \ell_{\infty}^n \times \ell_{\infty}^n \rightarrow \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n . Sabe-se que as desigualdades (1), (2) e (3) são equivalentes, ou seja, é possível provar uma assumindo qualquer outra verdadeira (veja [19, p. 25]).

Em 1930, respondendo a um questionamento do seu professor P. J. Daniell sobre a existência de certas funções de variação limitada, Littlewood [50] provou que

$$\left(\sum_{i,j=1}^n |T(e_i, e_j)|^{\frac{4}{3}} \right)^{\frac{3}{4}} \leq \sqrt{2} \|T\|, \quad (4)$$

para toda forma bilinear $T: \ell_\infty^n \times \ell_\infty^n \longrightarrow \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n . Essa desigualdade ficou conhecida como a desigualdade 4/3 de Littlewood. Acima, o expoente 4/3 é ótimo, isto é, se $r < 4/3$, então não existe constante C , sem depender de n , que satisfaça a desigualdade

$$\left(\sum_{i,j=1}^n |T(e_i, e_j)|^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq C \|T\|,$$

para toda forma bilinear $T: \ell_\infty^n \times \ell_\infty^n \longrightarrow \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n . Sabe-se que $\sqrt{2}$ é a constante ótima no caso real (veja [38]) mas o valor exato da melhor constante satisfazendo (4) ainda é um problema aberto no caso complexo. Aparentemente, o melhor que se sabe a respeito da constante ótima do caso complexo é que ela pertence ao intervalo $[1, 2/\sqrt{\pi}]$ (veja [79], por exemplo).

No ano seguinte, com o objetivo de resolver o problema da convergência absoluta de Bohr (confira [35] para mais detalhes), H. F. Bohnenblust e E. C. Hille [21] generalizaram a desigualdade 4/3 de Littlewood para formas multilineares, provando que existe uma constante ótima $B_{\mathbb{K},m}^{\text{mult}} \geq 1$ tal que

$$\left(\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n |T(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq B_{\mathbb{K},m}^{\text{mult}} \|T\|, \quad (5)$$

para toda forma m -linear $T: \ell_\infty^n \times \dots \times \ell_\infty^n \longrightarrow \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n ; e que o expoente $\frac{2m}{m+1}$ é ótimo no mesmo sentido que o expoente da desigualdade 4/3 de Littlewood. A desigualdade em (5) ficou conhecida como a desigualdade de Bohnenblust–Hille e possui sua versão polinomial, que também foi provada em [21]. Além das diversas aplicações das estimativas de $B_{\mathbb{C},m}^{\text{mult}}$ em Análise, tais como Teoria dos Operadores, Análise Harmônica, Análise Complexa, Análise de Fourier e Teoria Analítica dos Números (veja [34] e suas referências), o crescimento exato das constantes $B_{\mathbb{R},m}^{\text{mult}}$ é importante em Teoria de Informação Quântica (veja, por exemplo, [56]).

Originalmente, Bohnenblust e Hille mostraram que $B_{\mathbb{K},m}^{\text{mult}} \leq m^{\frac{m+1}{2m}} 2^{\frac{m-1}{2}}$; outras limitações superiores foram obtidas em [31], [45] e [79]. Em 2012, foi mostrado em

[39] que as constantes ótimas tem, no máximo, crescimento subexponencial. No ano seguinte, em [62], foi provado que essa estimativa é subpolinomial. As melhores cotas superiores de $B_{\mathbb{K},m}^{\text{mult}}$ conhecidas até hoje foram apresentadas em 2014 no artigo [17], onde foi provada a existência de uma constante $C > 0$ tal que

$$B_{\mathbb{C},m}^{\text{mult}} \leq C m^{\frac{1-\gamma}{2}} \quad \text{e} \quad B_{\mathbb{R},m}^{\text{mult}} \leq C m^{\frac{2-\log 2-\gamma}{2}},$$

sendo γ a constante de Euler–Mascheroni. Mais precisamente, foi provado em [17] que

$$B_{\mathbb{C},m}^{\text{mult}} \leq \prod_{j=2}^m \Gamma\left(2 - \frac{1}{j}\right)^{\frac{j}{2-2j}}$$

e

$$B_{\mathbb{R},m}^{\text{mult}} \leq \prod_{j=2}^m 2^{\frac{1}{2j-2}}, \quad \text{quando } 2 \leq m \leq 13,$$

$$B_{\mathbb{R},m}^{\text{mult}} \leq 2^{\frac{446381}{55440} - \frac{m}{2}} \prod_{j=14}^m \left(\frac{\Gamma(\frac{3}{2} - \frac{1}{j})}{\sqrt{\pi}} \right)^{\frac{j}{2-2j}}, \quad \text{quando } m \geq 14.$$

No caso complexo, temos conhecimento apenas da estimativa inferior trivial $B_{\mathbb{C},m}^{\text{mult}} \geq 1$. Até 2014, as melhores cotas inferiores para o caso real também eram as triviais. No entanto, em [38], foi mostrado que $B_{\mathbb{R},m}^{\text{mult}} \geq 2^{1-\frac{1}{m}}$. Essas são as melhores limitações inferiores que se conhece; em [71, Universality Conjecture], foi conjecturado que as constantes ótimas no caso real são exatamente $2^{1-\frac{1}{m}}$. Observe que encontrar a constante ótima $B_{\mathbb{R},m}^{\text{mult}}$ da desigualdade de Bohnenblust–Hille ([5]) é equivalente a resolver, para cada n inteiro positivo, o seguinte problema de otimização:

$$B_{\mathbb{R},m}^{\text{mult}}(n) := \sup_{T \in B_{\mathcal{L}(^m \ell_{\infty}^n)}} \left(\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n |T(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}}, \quad (6)$$

onde $\mathcal{L}(^m \ell_{\infty}^n)$ é o conjunto das formas m -lineares $T : \ell_{\infty}^n \times \dots \times \ell_{\infty}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Nesse caso, $B_{\mathbb{R},m}^{\text{mult}} = \sup_n B_{\mathbb{R},m}^{\text{mult}}(n)$.

Como aplicação do Teorema de Krein–Milman (veja, por exemplo, [81, Chapter 8]), o supremo em ([6]) pode ser tomado apenas no conjunto $\text{ext}(B_{\mathcal{L}(^m \ell_{\infty}^n)})$ dos pontos extremos da bola $B_{\mathcal{L}(^m \ell_{\infty}^n)}$, que é um conjunto finito (veja [30, Theorem 15]). Dessa forma, o problema de encontrar as constantes ótimas da desigualdade de Bohnenblust–Hille pode ser resolvido estudando a geometria da bola $B_{\mathcal{L}(^m \ell_{\infty}^n)}$ e seus respectivos pontos extremos. Em [30, p. 12], foi apresentado um algoritmo que permite encontrar todos os

pontos do conjunto $\text{ext}(B_{\mathcal{L}(\ell_\infty^m)})$, solucionando assim, pelo menos formalmente, o problema das constantes da desigualdade de Bohnenblust–Hille para o caso real truncado. Posteriormente, em [85], esse algoritmo foi implementado no Software Mathematica por F. Vieira Costa Junior, inclusive, para o caso particular $m = n = 3$, foi corroborada a conjectura universal de [71, p. 4].

Em 1934, G. H. Hardy e Littlewood [44] forneceram uma versão da desigualdade 4/3 de Littlewood, trocando-se os espaços $\ell_\infty^n \times \ell_\infty^n$ por $\ell_p^n \times \ell_q^n$, para certos valores de $p, q \in (1, \infty]$. Eles provaram que se $0 \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq \frac{1}{2}$, então existe uma constante $C_{p,q}^{\mathbb{K}} \geq 1$ satisfazendo

$$\left(\sum_{i,j=1}^n |T(e_i, e_j)|^{\frac{4}{3-2(\frac{1}{p}+\frac{1}{q})}} \right)^{\frac{3-2(\frac{1}{p}+\frac{1}{q})}{4}} \leq C_{p,q}^{\mathbb{K}} \|T\|,$$

para toda forma bilinear $T: \ell_p^n \times \ell_q^n \rightarrow \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n ; e o expoente $\frac{4}{3-2(\frac{1}{p}+\frac{1}{q})}$ é ótimo. Já para o caso em que $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1$ foi provada a existência de uma constante $D_{p,q}^{\mathbb{K}} \geq 1$ tal que

$$\left(\sum_{i,j=1}^n |T(e_i, e_j)|^{\frac{1}{1-(\frac{1}{p}+\frac{1}{q})}} \right)^{1-(\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} \leq D_{p,q}^{\mathbb{K}} \|T\|,$$

para toda forma bilinear $T: \ell_p^n \times \ell_q^n \rightarrow \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n . Assim como anteriormente, o expoente $\frac{1}{1-(\frac{1}{p}+\frac{1}{q})}$ também é ótimo.

Em 1981, T. Praciano–Pereira [77] generalizou uma das desigualdades de Hardy–Littlewood para o caso multilinear, provando que: se $m \geq 1$, $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_m) \in (1, \infty]^m$ e $0 \leq \left| \frac{1}{\mathbf{p}} \right| \leq \frac{1}{2}$, então existe uma constante ótima $C_{m,\mathbf{p}}^{\mathbb{K}} \geq 1$ que satisfaz

$$\left(\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n |T(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})|^{\frac{2m}{m+1-2\left| \frac{1}{\mathbf{p}} \right|}} \right)^{\frac{m+1-2\left| \frac{1}{\mathbf{p}} \right|}{2m}} \leq C_{m,\mathbf{p}}^{\mathbb{K}} \|T\|, \quad (7)$$

para toda forma m -linear $T: \ell_{p_1}^n \times \dots \times \ell_{p_m}^n \rightarrow \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n . Observe que escolhendo $p_1 = \dots = p_m = \infty$ a desigualdade de Bohnenblust–Hille é recuperada. Os valores exatos das constantes $C_{m,\mathbf{p}}^{\mathbb{K}}$ ainda são desconhecidos. Esses valores e o comportamento assintótico da sequência $(C_{m,\mathbf{p}}^{\mathbb{K}})_{m=1}^\infty$ possuem aplicações em Matemática e em Física (veja [56]). Em [77], Praciano–Pereira mostrou que $C_{m,\mathbf{p}}^{\mathbb{K}} \leq (\sqrt{2})^{m-1}$. Alguns trabalhos foram desenvolvidos com o objetivo de melhorar essas estimativas. Em 2014, foi mostrado, em [13, Theorem 1.1], que $C_{m,\mathbf{p}}^{\mathbb{K}} \leq (\sigma(\mathbb{K}))^{2(m-1)\left| \frac{1}{\mathbf{p}} \right|} (B_{\mathbb{K},m}^{\text{mult}})^{1-2\left| \frac{1}{\mathbf{p}} \right|}$,

onde $\sigma(\mathbb{R}) = \sqrt{2}$ e $\sigma(\mathbb{C}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$; essa é a melhor cota superior que se sabe. Em [11, Theorem 1.2], foi mostrado que, no caso real e quando $p_1 = \dots = p_m = p$, se tem $C_{m,p}^{\mathbb{R}} > 1$ (veja também [24]); para os outros casos, aparentemente, não se conhece limitações inferiores diferentes das triviais, isto é, $C_{m,\mathbf{p}}^{\mathbb{K}} \geq 1$.

A outra desigualdade de Hardy–Littlewood só foi generalizada em 2016 por V. Dimant e P. Sevilla–Peris [37]. Eles provaram que para $m \geq 1$, $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_m) \in (1, \infty]^m$ e $\frac{1}{2} \leq \left| \frac{1}{\mathbf{p}} \right| < 1$, existe uma constante ótima $D_{m,\mathbf{p}}^{\mathbb{K}} \geq 1$ satisfazendo

$$\left(\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n |T(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})|^{\frac{1}{1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|}} \right)^{1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|} \leq D_{m,\mathbf{p}}^{\mathbb{K}} \|T\|, \quad (8)$$

para toda forma m -linear $T : \ell_{p_1}^n \times \dots \times \ell_{p_m}^n \rightarrow \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n . Além disso, $D_{m,\mathbf{p}}^{\mathbb{K}} \leq (\sqrt{2})^{m-1}$. Descobrir estimativas melhores para as constantes em (8) tem chamado a atenção de alguns pesquisadores (veja [9], [27] e [59]). Em [4, Theorem 3.3], estabeleceu-se que $D_{m,\mathbf{p}}^{\mathbb{K}} \leq 2^{(m-1)(1-\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|)}$ (veja também [9, Theorem 2.2] para um resultado mais geral). Para $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_m) \in (1, \infty]^m$ tal que $\frac{1}{2} \leq \left| \frac{1}{\mathbf{p}} \right| < 1$, ainda não se conhecem cotas inferiores diferentes das triviais $D_{m,\mathbf{p}}^{\mathbb{K}} \geq 1$. No caso particular em que $1 < p_i \leq 2$, para algum $i \in \{1, \dots, m\}$, foi mostrado, em [9, Corollary 2.3], que $D_{m,\mathbf{p}}^{\mathbb{K}} = 1$; um caso mais restrito já tinha sido provado em [14, Theorem 3.2]. Em [27], foi provado que $D_{m,p_1}^{\mathbb{K}} \leq D_{m,p_2}^{\mathbb{K}}$ sempre que $m < p_1 \leq p_2 \leq 2m$ e que $D_{m+1,p}^{\mathbb{K}} \leq D_{m,p}^{\mathbb{K}}$ desde que $m+1 < p \leq 2m$.

Os expoentes das desigualdades de Hardy–Littlewood em (7) e em (8) são ótimos no sentido que se os diminuirmos, não existirá desigualdade de modo que a constante não dependa de n . No entanto, olhando essas desigualdades sob o ponto de vista dos operadores múltiplo somantes, como no [72, Theorem 3.2] (essencialmente provado em [74, Corollary 3.20]), podemos analisá-las em uma nova vertente, explorando os expoentes no sentido anisotrópico, isto é, variantes com expoentes associados a cada índice eventualmente diferentes. Em 2017, com a publicação dos artigos [7], [14], [16] e [72], novos teoremas de inclusão para operadores múltiplo somantes vieram à tona e contribuíram para um melhor entendimento das desigualdades de Hardy–Littlewood (veja, por exemplo, [27] e [59] e suas referências).

Em todas as desigualdades apresentadas é natural avaliar a otimalidade dos resultados sob dois aspectos: os expoentes e as constantes. No caso dos expoentes, existe

ainda a ótica relacionada à busca de expoentes mistos (não necessariamente iguais) ótimos e suas respectivas melhores constantes. De modo geral, este trabalho investiga a otimalidade em diferentes perspectivas: no Capítulo 1, as constantes de variantes das desigualdades de Bohnenblust–Hille multilinear e polinomial; no Capítulo 2, os expoentes mistos de desigualdades de Hardy–Littlewood para o caso (até então não investigado) $\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right| \geq 1$ e, no Capítulo 3, as constantes de desigualdades do tipo Khinchin e do tipo Kahane.

Além das desigualdades clássicas de Bohnenblust–Hille para polinômios e formas multilineares, alguns autores têm estudado essas desigualdades para algumas classes restritas. Por exemplo, a desigualdade de Bohnenblust–Hille multilinear para formas unimodulares (quando os coeficientes são ± 1) foi estudada por D. Pellegrino e E. Teixeira em [71] e a desigualdade de Bohnenblust–Hille para polinômios com índices em cada monômio uniformemente limitados foi estudada por D. Carando, A. Defant e Sevilla–Peris em [26] e, posteriormente, por M. Maia, T. Nogueira e Pellegrino em [53].

No Capítulo 1, revisitaremos as desigualdades multilineares e polinomiais de Bohnenblust–Hille e provaremos algumas novas propriedades, principalmente considerando classes restritas de formas multilineares e de polinômios. Nosso principal resultado deste capítulo é uma versão multilinear de um teorema devido a Maia, Nogueira e Pellegrino [53]. Mais precisamente:

Teorema 1 *Sejam m e M inteiros positivos, com $M \leq m$. Então existe uma constante universal $\eta_M \geq 1$ tal que*

$$\left(\sum_{\text{card}\{i_1, \dots, i_m\} \leq M} |T(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq \eta_M \|T\|,$$

para toda forma m -linear contínua $T: c_0 \times \dots \times c_0 \longrightarrow \mathbb{K}$. Além disso, se $\overline{B}_{m,M}^{\mathbb{R}}$ é a constante ótima do caso real, então

$$2 \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \overline{B}_{m,M}^{\mathbb{R}} \leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \overline{B}_{m,M}^{\mathbb{R}} \leq M^{\frac{M+1}{2}}, \text{ se } M \geq 3,$$

$$\sqrt{2} \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \overline{B}_{m,M}^{\mathbb{R}} \leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \overline{B}_{m,M}^{\mathbb{R}} \leq \sqrt{8}, \text{ se } M = 2.$$

O conteúdo deste capítulo foi publicado em

- D. Paulino, D. Pellegrino, J. Santos, *Remarks on the Bohnenblust–Hille inequalities*. *Port. Math.* **76** (2020), no. 3–4, 395–406.

Como é conhecido, existe uma forte relação entre as desigualdades de Hardy–Littlewood/Bohnenblust–Hille e a teoria dos operadores múltiplo somantes. Sabemos que as primeiras podem ser interpretadas como resultados de inclusão da última, veja [72, Theorem 3.2], por exemplo. Olhando sob essa perspectiva, a desigualdade 4/3 de Littlewood pode ser vista como o início da teoria dos operadores múltiplo somantes.

A noção de operadores lineares absolutamente somantes teve início com os trabalhos de A. Grothendieck na década de 1950. Posteriormente, A. Pietsch [75] introduziu o conceito de operador absolutamente p -somante e B. Mitiagin e A. Pelczynski [55] generalizaram a definição para operadores absolutamente (r, p) -somantes. Em 1968, E. Lindenstrauss e Pelczyński [48] reescreveram o *Résumé* de Grothendieck de uma forma mais compreensível, contribuindo para deixar os operadores somantes em destaque. Desde então, o tema tem constituído um vasto campo de pesquisa em Teoria de Espaços de Banach. Uma das mais relevantes extensões dos operadores absolutamente somantes para o contexto multilinear é a noção de operadores múltiplo somantes, introduzida, independentemente, em 2003/2004 por M. C. Matos e D. Pérez-García (veja [54] e [78]). Para outros conceitos relacionados, indicamos [23].

Além do próprio interesse na teoria dos operadores múltiplo somantes, resultados de inclusão e de coincidência têm fortes aplicações nas desigualdades de Hardy–Littlewood; em [27], por exemplo, foi mostrado que a desigualdade (8) de Dimant e Sevilla–Peris é uma consequência da desigualdade (7) de Praciano–Pereira. No Capítulo 2, inspirado no resultado de inclusão para operadores múltiplo somantes de N. Albuquerque e L. Rezende [7, Theorem 3], provaremos uma versão mais geral desse teorema, o qual pode ser assim enunciado:

Teorema 2 (Teorema de Inclusão estendido) *Sejam m um inteiro positivo, $r \in [1, \infty]$ e $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{s} \in [1, \infty]^m$ tais que $q_k \geq p_k$, para $k = 2, \dots, m$. Se $q_1 \geq p_1$ e*

$$\frac{1}{r} - \left| \frac{1}{\mathbf{p}} \right| + \left| \frac{1}{\mathbf{q}} \right| > 0$$

ou se $q_1 > p_1$ e

$$\frac{1}{r} - \left| \frac{1}{\mathbf{p}} \right| + \left| \frac{1}{\mathbf{q}} \right| \geq 0,$$

então

$$\Pi_{(r; \mathbf{p})}^m(X_1, \dots, X_m; Y) \subset \Pi_{(\mathbf{s}; \mathbf{q})}^m(X_1, \dots, X_m; Y),$$

para quaisquer espaços de Banach $X_1, \dots, X_m, Y$, com

$$\frac{1}{s_k} - \left| \frac{1}{\mathbf{q}} \right|_{\geq k} = \frac{1}{r} - \left| \frac{1}{\mathbf{p}} \right|_{\geq k},$$

para $k = 1, \dots, m$; e o operador inclusão tem norma 1.

Como corolário do Teorema de Inclusão estendido, provaremos uma desigualdade de Hardy–Littlewood no sentido anisotrópico para o caso $p = m$ (que chamaremos de caso crítico) e, usando uma técnica diferente e o resultado principal de [7], provaremos um resultado análogo, mas com expoentes e constantes melhores. Nosso resultado principal do Capítulo 2 é:

Teorema 3 *Para todo $m \geq 2$, temos*

$$\sup_{1 \leq i_1 \leq n} \left(\sum_{i_2=1}^n \left(\dots \left(\sum_{i_m=1}^n |T(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})|^{s_m} \right)^{\frac{s_{m-1}}{s_m}} \dots \right)^{\frac{s_2}{s_3}} \right)^{\frac{1}{s_2}} \leq 2^{\frac{m-2}{2}} \|T\|, \quad (9)$$

para toda forma m -linear $T : \ell_m^n \times \dots \times \ell_m^n \longrightarrow \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n , com

$$s_k = \frac{2m(m-1)}{mk - 2k + 2},$$

para $k = 2, \dots, m$. Além disso, a norma do supremo não pode ser trocada por uma p -norma (com $p < \infty$), $s_2 = m$ é ótimo e, para $m > 2$, os expoentes ótimos s_k satisfazendo [9] são tais que

$$s_k \geq \frac{m}{k-1}, \quad k = 3, \dots, m.$$

O teorema anterior foi o primeiro a apresentar uma desigualdade de Hardy–Littlewood para formas m -lineares $T : \ell_{p_1}^n \times \dots \times \ell_{p_m}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ quando

$$\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_m} \geq 1. \quad (10)$$

Esse caso (que será chamado de supercrítico) foi ignorado no passado por razões técnicas e possui muitos problemas a serem resolvidos. Até então, os pesquisadores se detiveram a investigar as desigualdades de Hardy–Littlewood somente para formas m -lineares definidas em espaços $\ell_{p_1}^n \times \dots \times \ell_{p_m}^n$ satisfazendo

$$\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_m} < 1. \quad (11)$$

Neste capítulo, apresentaremos também resultados que permitem associar desigualdades de Hardy–Littlewood para espaços do tipo (11) com outras para espaços satisfazendo (10) e vice-versa. Com isso, apresentaremos algumas desigualdades de Hardy–Littlewood no caso supercrítico. Dentre os resultados, provaremos:

Teorema 4 *Sejam $m \geq 2$ inteiro, $p \in (1, 2m]$, $k := \min\{x \in \{0, 1, \dots, m-1\} : p > m-x\}$ e $A = \{i \in \{1, \dots, m-1\} : i \leq k\}$. Então existe uma constante $C \geq 1$ (não dependendo de n) tal que*

$$\sup_{j_i, i \in A} \left(\sum_{j_{k+1}, \dots, j_m=1}^n |T(e_{j_1}, \dots, e_{j_m})|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \|T\|,$$

para toda forma m -linear $T : \ell_p^n \times \dots \times \ell_p^n \longrightarrow \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n , se, e somente se,

$$q \geq \frac{p}{p - (m - k)}.$$

Além disso, nenhum supremo pode ser melhorado.

Ainda no Capítulo 2, apresentaremos condições necessárias e suficientes para os expoentes satisfazendo o Teorema 3 quando $m = 3$, mais precisamente:

Corolário 1 *Para toda forma 3-linear $T : \ell_3^n \times \ell_3^n \times \ell_3^n \longrightarrow \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n , existe uma constante $C \geq 1$ (não dependendo de n) tal que*

$$\left(\sum_{i_1=1}^n \left(\sum_{i_2=1}^n \left(\sum_{i_3=1}^n |T(e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_3})|^{q_3} \right)^{\frac{q_2}{q_3}} \right)^{\frac{q_1}{q_2}} \right)^{\frac{1}{q_1}} \leq C \|T\|$$

se, e somente se, $q_1 = \infty$, $q_2 \geq 3$, $q_3 \geq 3/2$ e $\frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} \leq \frac{5}{6}$.

Analisaremos também a constante do corolário anterior quando consideramos expoentes que não satisfazem as condições ótimas. Os resultados principais do Capítulo 2 podem ser encontrados também nos artigos:

- D. Paulino, *Critical Hardy–Littlewood inequality for multilinear forms. Rend. Circ. Mat. Palermo, II. 69 (2020), 369–380.*
- D. Núñez–Alarcón, D. Paulino, D. Pellegrino, *Super-critical Hardy–Littlewood inequalities for multilinear forms. An. Acad. Brasil. Ciênc., to appear.*

É indiscutível a importância da desigualdade de Khinchin no estudo das desigualdades de Bohnenblust–Hille e Hardy–Littlewood; os artigos [4], [13], [30], [35], [59], [67] e [71] são alguns dos muitos trabalhos que evidenciam tal relevância. A desigualdade de Khinchin foi obtida em 1923 por Khinchin [46] e garante que, para qualquer $p > 0$, existem constantes $A_p, B_p > 0$ tais que

$$A_p \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^1 \left| \sum_{i=1}^n r_i(t) a_i \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq B_p \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (12)$$

para toda sequência de escalares $(a_i)_{i=1}^n$ e todo inteiro positivo n . Acima, $r_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ são as chamadas funções de Rademacher, onde $r_i(t) := \text{sign}(\sin 2^i \pi t)$. Em [82] foi provado por Szarek que $A_1 = (\sqrt{2})^{-1}$ é ótima, solucionando um problema de longa data colocado por Littlewood [43]. Mais tarde, U. Haagerup em [42] simplificou a abordagem de S. Szarek e forneceu as constantes ótimas para $p \neq 1$ (veja também [47], [83] e [86]).

A desigualdade (12) também apresenta versão para somas múltiplas. O caso bilinear real pode ser encontrado em [52, Chapter IX, Problem 3.6] e o caso complexo em [32, p. 455]. Os trabalhos desenvolvidos em [13, Theorem 1.1] e em [35] são exemplos da utilidade e aplicabilidade da versão múltipla da desigualdade de Khinchin: para quaisquer inteiros positivos m, n e escalares $a_{i_1, \dots, i_m}$, $i_1, \dots, i_m = 1, \dots, n$, temos

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n |a_{i_1, \dots, i_m}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq A_p^{-m} \left(\int_{[0,1]^m} \left| \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n a_{i_1, \dots, i_m} r_{i_1}(t_1) \cdots r_{i_m}(t_m) \right|^p dt_1 \cdots dt_m \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \quad (13)$$

Ao Capítulo 3, reservaremos algumas abordagens referentes à desigualdade de Khinchin múltipla, apresentaremos variantes da desigualdade em (13) quando trocamos a norma ℓ_2 do lado esquerdo por uma norma ℓ_r , com $0 < r < 2$ e, posteriormente, com $r \geq 2$. Nessa perspectiva, investigaremos as constantes dessas nossas versões e apresentaremos resultados análogos considerando a desigualdade de Kahane [36, Theorem 11.1, p. 211]. Dentre outros resultados, provaremos o seguinte:

Teorema 5 *Sejam m e n inteiros positivos e $(a_{i_1, \dots, i_m})_{i_1, \dots, i_m=1}^n$ uma sequência de es-*

calares reais. Se $r \in (0, 2)$, então existe uma constante $C_{m,p} > 0$ tal que

$$\left(\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n |a_{i_1, \dots, i_m}|^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq C_{m,p} n^{m(\frac{1}{r} - \frac{1}{2})} \left(\int_{[0,1]^m} \left| \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n a_{i_1, \dots, i_m} r_{i_1}(t_1) \cdots r_{i_m}(t_m) \right|^p dt_1 \cdots dt_m \right)^{\frac{1}{p}}$$

e o expoente $m(\frac{1}{r} - \frac{1}{2})$ é ótimo.

O conteúdo deste capítulo foi publicado em

- *D. Pellegrino, D. Santos, J. Santos, Optimal blow up rate for the constants of Khinchin type inequalities. Quaest. Math. **41** (2018), no. 3, 303–318.*

Notação e terminologia

Nesta tese, $\mathbb{K}$ denotará o corpo dos números reais ($\mathbb{R}$) ou dos números complexos ($\mathbb{C}$). As letras X e Y , com ou sem índices, representarão espaços de Banach sobre o corpo $\mathbb{K}$. O dual topológico de X e sua bola unitária fechada serão denotados, respectivamente, por X^* e B_{X^*} . Para $\mathbf{p} \in [1, \infty]^m$ e para cada $k \in \{1, \dots, m\}$, seguiremos a notação usual e definiremos

$$\left| \frac{1}{\mathbf{p}} \right|_{\geq k} := \frac{1}{p_k} + \dots + \frac{1}{p_m}.$$

Quando $k = 1$, escreveremos $\left| \frac{1}{\mathbf{p}} \right|$ para representar $\left| \frac{1}{\mathbf{p}} \right|_{\geq 1}$. E, aqui, estamos adotando a convenção $\frac{1}{\infty} = 0$ e r^* denotará o conjugado de r , o qual é definido por

$$\frac{1}{r^*} = 1 - \frac{1}{r}.$$

O conjunto de todas as sequências $x := (x_i)_{i=1}^\infty$, com $x_i \in X$, tais que

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^\infty \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \quad (14)$$

é chamado espaço das sequências p -somáveis em X e será representado por $\ell_p(X)$, e o conjunto de todas as sequências $x := (x_i)_{i=1}^\infty$, com $x_i \in X$, tais que

$$\|x\|_{w,p} := \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^\infty |\varphi(x_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \quad (15)$$

é chamado espaço das sequências fracamente p -somáveis em X e será representado por $\ell_p^w(X)$, com $p \in [1, \infty)$. Sabemos que $\ell_p(X)$ (resp. $\ell_p^w(X)$) é um espaço de Banach com a norma definida pela expressão (14) (resp. (15)). O espaço de todas as sequências

$x = (x_i)_{i=1}^\infty$, com $x_i \in X$, limitadas será representado por $\ell_\infty(X)$, o qual é de Banach com a chamada “norma do supremo”:

$$\|x\|_\infty := \sup_i \|x_i\|.$$

No caso em que $X = \mathbb{K}$, usaremos apenas ℓ_p (resp. ℓ_p^w) em vez de $\ell_p(\mathbb{K})$ (resp. $\ell_p^w(X)$), $p \in [1, \infty)$, e ℓ_∞ para representar $\ell_\infty(X)$. A notação ℓ_p^n representará o espaço $\mathbb{K}^n$ com a norma definida em (14), se $1 \leq p < \infty$, ou com a norma do supremo, se $p = \infty$.

Por c_0 denotaremos o espaço de todas as seqüências reais $(a_j)_{j=1}^\infty$ tais que $\lim_{j \rightarrow \infty} a_j = 0$, o qual é de Banach munido com a norma do supremo. O espaço vetorial de todas as transformações $T : X_1 \times \cdots \times X_m \longrightarrow Y$ lineares e contínuas será denotado por $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$ e munido com a norma do supremo, definida por

$$\|T\| := \sup\{\|T(x_1, \dots, x_m)\| : x_i \in B_{X_i}, i = 1, \dots, m\};$$

tornando-se, assim, de Banach. Para mais detalhes sobre a teoria de operadores multilineares em espaços de Banach indicamos [57]. Para maior comodidade do leitor, lembramos também que o dual topológico de c_0 , denotado por $(c_0)^*$, é isometricamente isomorfo ao espaço das seqüências absolutamente somáveis ℓ_1 e, para $p \in (1, \infty)$, ℓ_{p^*} é isometricamente isomorfo a $(\ell_p)^*$ (veja [22]).

Seguindo as notações de [44], os espaços $\ell_{p_1} \times \cdots \times \ell_{p_m}$, com $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_m) \in [1, \infty]^m$, serão descritos como espaços do tipo α , quando $\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right| \geq 1$; ou do tipo β , quando $\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right| < 1$.

A cardinalidade de um conjunto X será representada por $\text{card}(X)$. Usaremos também a notação $\lfloor x \rfloor$ para representar o maior inteiro menor do que ou igual a x , i.e., $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$.

Uma função $P : c_0 \longrightarrow \mathbb{K}$ é um polinômio m -homogêneo contínuo quando existe uma forma m -linear contínua $\hat{P} : c_0 \times \cdots \times c_0 \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que $P(x) = \hat{P}(x, \dots, x)$ para todo $x \in c_0$. Para uma seqüência $\alpha = (\alpha_i)_{i=1}^\infty$ em $\mathbb{N} \cup \{0\}$ definimos $|\alpha| := \sum \alpha_i$ e também $x^\alpha := \prod_i x_i^{\alpha_i}$. Usaremos a notação $c_\alpha(P)$ para representar o coeficiente do monômio x^α .

Para $r, p \geq 1$, um operador linear $T : X \longrightarrow Y$ é dito absolutamente $(r; p)$ -somante se existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left(\sum_{i=1}^n \|T(x_i)\|^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq C \|(x_i)_{i=1}^n\|_{w,p},$$

para todo inteiro positivo n e para toda sequência $(x_i)_{i=1}^\infty$ em $\ell_p^w(X)$.

É conveniente relembrar a versão anisotrópica de operadores múltiplo somantes (os conceitos básicos desta teoria são esboçados em [8]): para $\mathbf{r}, \mathbf{p} \in [1, \infty]^m$, um operador m -linear $T : X_1 \times \cdots \times X_m \longrightarrow Y$ é múltiplo $(\mathbf{r}; \mathbf{p})$ -somante se existe uma constante $C > 0$ tal que para toda sequência $x^{(j)} := (x_{i_j}^{(j)})_{i_j \in \mathbb{N}}, j = 1, \dots, m$, vale que

$$\left(\sum_{i_1=1}^n \left(\cdots \left(\sum_{i_m=1}^n \left\| T(x_{i_1}^{(1)}, \dots, x_{i_m}^{(m)}) \right\|^{r_m} \right)^{\frac{r_{m-1}}{r_m}} \cdots \right)^{\frac{r_1}{r_2}} \right)^{\frac{1}{r_1}} \leq C \prod_{j=1}^m \left\| (x_{i_j}^{(j)})_{i_j=1}^n \right\|_{w, p_j}, \quad (16)$$

para todo inteiro positivo n . Quando $r_i = \infty$, consideramos a norma do supremo em vez da respectiva norma ℓ_{r_i} . A classe dos operadores múltiplo $(\mathbf{r}; \mathbf{p})$ -somantes é um espaço de Banach com a norma definida pelo ínfimo de todas as constantes satisfazendo (16). Seguindo as convenções usuais, o espaço de tais operadores será denotado por $\Pi_{(\mathbf{r}; \mathbf{p})}^m(X_1, \dots, X_m; Y)$. Quando $r_1 = \cdots = r_m = r$, escrevemos $(r; \mathbf{p})$ em vez de $(\mathbf{r}; \mathbf{p})$.

Durante todo o texto, $B_{\mathbb{K}; m}^{\text{mult}}$ e $B_{\mathbb{K}; m}^{\text{pol}}$ representarão as constantes ótimas das desigualdades de Bohnenblust–Hille para formas m -lineares $T : c_0 \times \cdots \times c_0 \longrightarrow \mathbb{K}$ e para polinômios m -homogêneos $P : c_0 \longrightarrow \mathbb{K}$, respectivamente. Já a notação $D_{m, \mathbf{p}, \mathbf{q}}^{\mathbb{K}}$ indicará a constante ótima da desigualdade de Hardy–Littlewood para formas $T : \ell_{p_1} \times \cdots \times \ell_{p_m} \longrightarrow \mathbb{K}$ quando $\frac{1}{2} \leq \left| \frac{1}{\mathbf{p}} \right| < 1$ e para expoentes $\mathbf{q} := (q_1, \dots, q_m)$. Trocaremos $D_{m, \mathbf{p}, \mathbf{q}}^{\mathbb{K}}$ por $C_{m, \mathbf{p}, \mathbf{q}}^{\mathbb{K}}$ quando $0 < \left| \frac{1}{\mathbf{p}} \right| \leq \frac{1}{2}$. Usaremos simplesmente $D_{m, \mathbf{p}}^{\mathbb{K}}$ quando $q_1 = \cdots = q_m = \left(1 - \left| \frac{1}{\mathbf{p}} \right| \right)^{-1}$ e $D_{m, p}^{\mathbb{K}}$ quando, além disso, $p_1 = \cdots = p_m = p$. Analogamente, usaremos $C_{m, \mathbf{p}}^{\mathbb{K}}$ quando $q_1 = \cdots = q_m = \frac{2m}{m+1-2\left| \frac{1}{\mathbf{p}} \right|}$ e $C_{m, p}^{\mathbb{K}}$ se, além disso, $p_1 = \cdots = p_m = p$.

Capítulo 1

Desigualdades de Bohnenblust–Hille

Neste capítulo, revisitaremos as desigualdades multilineares e polinomiais de Bohnenblust–Hille e provaremos novas propriedades. O capítulo está dividido em três seções. Na seção 1, apresentaremos resultados já obtidos sobre essas desigualdades para formas e polinômios com alguma restrição e provaremos uma relação entre as constantes ótimas das desigualdades de Bohnenblust–Hille polinomial e multilinear. Na seção 2, imitaremos a prova do [53, Theorem 1.2] para apresentarmos um resultado mais geral da desigualdade de Bohnenblust–Hille para polinômios uniformemente limitados. Na seção 3, apresentaremos o nosso resultado principal do capítulo: uma versão multilinear de um resultado devido a Maia, Nogueira e Pellegrino [53]. Este capítulo é essencialmente o artigo

[65] D. Paulino, D. Pellegrino, J. Santos, Remarks on the Bohnenblust–Hille inequalities. *Port. Math.* **76** (2019), 395–406.

1.1 Observações sobre desigualdades de Bohnenblust–Hille com restrições

A desigualdade 4/3 de Littlewood [50], provada em 1930, afirma que

$$\left(\sum_{i,j=1}^{\infty} |T(e_i, e_j)|^{\frac{4}{3}} \right)^{\frac{3}{4}} \leq \sqrt{2} \|T\|, \quad (1.1)$$

para toda forma bilinear contínua $T: c_0 \times c_0 \longrightarrow \mathbb{K}$; e o expoente $4/3$ é ótimo. No caso real, a constante $\sqrt{2}$ é ótima (veja [38]). A desigualdade (1.1) foi talvez um dos principais pilares do início de muitas outras importantes para formas multilineares, tais como a desigualdade de Bohnenblust–Hille [21], de 1931. Em notações modernas, ela afirma que para todo m inteiro positivo, existe uma constante ótima $B_{\mathbb{K},m}^{\text{mult}} \geq 1$ tal que

$$\left(\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^{\infty} |T(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq B_{\mathbb{K},m}^{\text{mult}} \|T\|, \quad (1.2)$$

para toda forma m -linear contínua $T: c_0 \times \dots \times c_0 \longrightarrow \mathbb{K}$. Além disso, o expoente $\frac{2m}{m+1}$ é ótimo, ou seja, não pode ser trocado por um valor menor, e $B_{\mathbb{K},m}^{\text{mult}} \leq m^{\frac{m+1}{2m}} 2^{\frac{m-1}{2}}$.

Essa desigualdade surgiu com o intuito de resolver o *Problema da Convergência Absoluta de Bohr*, que consiste, basicamente, em determinar a largura máxima L de uma faixa vertical do plano complexo, na qual a série de Dirichlet $\sum_n a_n \cdot n^{-s}$ converge uniformemente, mas não absolutamente. Em 1913, Bohr já tinha provado que $L \leq 1/2$. Em 1931, Bohnenblust e Hille, a partir de sua desigualdade, mostraram que $L = 1/2$. Para detalhes históricos a respeito do problema, e algumas demonstrações da desigualdade de Bohnenblust–Hille, indicamos [35].

Alguns anos depois, outras estimativas superiores foram obtidas para a constante $B_{\mathbb{K},m}^{\text{mult}}$ de (1.2), por exemplo: [31] (1973), [45] (1978) e [79] (1995). Na última década, vários trabalhos buscaram melhorar essas estimativas ou até mesmo descobrir o comportamento assintótico da sequência $(B_{\mathbb{K},m}^{\text{mult}})_m$, tais como, [17], [58] e [69]. Em [39] (2012) foi mostrado que as constantes ótimas têm no máximo crescimento subexponencial. No ano seguinte, houve grande avanço nessa direção quando [62] mostraram que essa estimativa é subpolinomial. Os valores exatos das constantes $B_{\mathbb{K},m}^{\text{mult}}$ ainda são desconhecidos e bastante importantes para aplicações no campo da Física e da Matemática, como em Análise Combinatória e Teoria da Informação Quântica, algumas dessas aplicabilidades podem ser encontradas em [10], [15] e [56] e suas referências.

No caso complexo, temos conhecimento apenas da estimativa inferior trivial $B_{\mathbb{C},m}^{\text{mult}} \geq 1$. Até 2014, as melhores cotas inferiores para o caso real também eram as triviais, no entanto, em [38], foi mostrado que $B_{\mathbb{R},m}^{\text{mult}} \geq 2^{1-\frac{1}{m}}$. Desde então, não houve melhoria nessas limitações inferiores. Já as menores cotas superiores para as constantes da desigualdade de Bohnenblust–Hille multilinear foram obtidas por Bayart,

Pellegrino e Seoane-Sepúlveda em [17, Corollaries 3.2 e 3.3], onde foi provado que existe uma constante $C > 0$ que satisfaz

$$B_{\mathbb{C},m}^{\text{mult}} \leq C m^{\frac{1-\gamma}{2}} \quad \text{e} \quad B_{\mathbb{R},m}^{\text{mult}} \leq C m^{\frac{2-\log 2-\gamma}{2}}, \quad (1.3)$$

onde γ é a constante de Euler–Mascheroni. É bem sabido que a constante $C = 1,3$ satisfaz (1.3) (veja [29]); numericamente, $\frac{1-\gamma}{2} \simeq 0,211392$ e $\frac{2-\log 2-\gamma}{2} \simeq 0,36482$. Avanços recentes sugerem que as estimativas acima estão longe de serem ótimas; conjectura-se que para escalares reais, as constantes ótimas são surpreendentemente $B_{\mathbb{R},m}^{\text{mult}} = 2^{1-1/m}$ e, no caso complexo, por vezes, conjectura-se que as constantes ótimas são as triviais (veja [85] e suas referências). Em [30], a partir do estudo da geometria da bola $B_{\mathcal{L}(m\ell_\infty)}$ e dos seus respectivos pontos extremos, foi apresentado um algoritmo que permite resolver, ao menos formalmente, o problema das constantes ótimas no caso real truncado.

A versão polinomial da desigualdade de Bohnenblust–Hille, também apresentada em [21], em notações atuais, afirma que existe uma constante ótima $B_{\mathbb{K},m}^{\text{pol}} \geq 1$ tal que

$$\left(\sum_{|\alpha|=m} |c_\alpha(P)|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq B_{\mathbb{K},m}^{\text{pol}} \|P\|,$$

para todo polinômio m -homogêneo contínuo $P : c_0 \rightarrow \mathbb{K}$, e o expoente $\frac{2m}{m+1}$ é ótimo. Obter limitações para as constantes $B_{\mathbb{K},m}^{\text{pol}}$ também tem chamado a atenção de alguns pesquisadores. Em 2011, Defant et al. [33] provaram que

$$B_{\mathbb{C},m}^{\text{pol}} \leq 2^{\frac{m-1}{2}} \left(1 + \frac{1}{m-1} \right)^{m-1} \sqrt{m}$$

e isso implica que existe $C \geq 1$ tal que $B_{\mathbb{C},m}^{\text{pol}} \leq C^m$, para todo m . Em 2014, [17, Corollaries 5.3 e 5.4], foi provado que, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\kappa > 0$ tal que, para todo $m \geq 1$,

$$B_{\mathbb{C},m}^{\text{pol}} \leq \kappa (1 + \varepsilon)^m.$$

E essa nova estimativa foi usada, ainda em [17, section 6], para mostrar que o comportamento assintótico exato do raio de Bohr m -dimensional é $\sqrt{\frac{\log(m)}{m}}$. No caso real, veja [25], temos

$$B_{\mathbb{R},m}^{\text{pol}} \leq (2 + \varepsilon)^m,$$

para qualquer $\varepsilon > 0$. Em relação às estimativas inferiores, sabemos (veja [25] e [60]) que

$$B_{\mathbb{C},m}^{\text{pol}} \geq (1 + 2^{1-m})^{\frac{1}{2m}} > 1 \quad \text{e} \quad B_{\mathbb{R},m}^{\text{pol}} > \left(\frac{2\sqrt[4]{3}}{\sqrt{5}} \right)^m > (1.17)^m.$$

Observando as limitações superiores para as desigualdades de Bohnenblust–Hille polinomial e multilinear, parece natural esperar que $B_{\mathbb{K},m}^{\text{mult}} \leq B_{\mathbb{K},m}^{\text{pol}}$ para todo m . No entanto, as melhores limitações inferiores para $B_{\mathbb{C},m}^{\text{pol}}$ são quase as triviais (veja [60]) e, nessa perspectiva, a desigualdade $B_{\mathbb{K},m}^{\text{mult}} \leq B_{\mathbb{K},m}^{\text{pol}}$ não é tão evidente. De fato, não encontramos nenhuma informação na literatura nessa direção e, por isso, apresentaremos uma prova de que a constante multilinear ótima é dominada pela constante polinomial.

Proposição 1.1.1 *A constante ótima da desigualdade de Bohnenblust–Hille multilinear é menor que ou igual a constante ótima da desigualdade de Bohnenblust–Hille polinomial, isto é,*

$$B_{\mathbb{K},m}^{\text{mult}} \leq B_{\mathbb{K},m}^{\text{pol}}, \quad \text{para todo } m.$$

Demonstração. Seja $T: c_0 \times \cdots \times c_0 \longrightarrow \mathbb{K}$ uma forma m -linear contínua. Escreva $\mathbb{N} = \mathbb{N}_1 \cup \cdots \cup \mathbb{N}_m$ como uma união disjunta, de modo que $\text{card}(\mathbb{N}) = \text{card}(\mathbb{N}_r)$, para cada $r = 1, \dots, m$. Sejam $\sigma_i: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}_i$, $i = 1, \dots, m$, bijeções. Defina $T_1: c_0 \times \cdots \times c_0 \longrightarrow \mathbb{K}$ por

$$T_1 \left((x_j^1)_{j=1}^\infty, \dots, (x_j^m)_{j=1}^\infty \right) = T \left((x_{\sigma_1(j)}^1)_{j=1}^\infty, \dots, (x_{\sigma_m(j)}^m)_{j=1}^\infty \right).$$

Note que T_1 tem os mesmos coeficientes de T e, portanto, $\|T_1\| = \|T\|$. Agora, considere o polinômio $P: c_0 \longrightarrow \mathbb{K}$, definido por $P(x) = T_1(x, \dots, x)$. Observe que $\|P\| \leq \|T_1\|$. Então

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^\infty |T(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} &= \left(\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^\infty |T_1(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \\ &= \left(\sum_{|\alpha|=m} |c_\alpha(P)|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \\ &\leq B_{\mathbb{K},m}^{\text{pol}} \|P\| \\ &\leq B_{\mathbb{K},m}^{\text{pol}} \|T\|. \end{aligned}$$

Logo $B_{\mathbb{K},m}^{\text{mult}} \leq B_{\mathbb{K},m}^{\text{pol}}$ para todo m . ■

Observação 1.1.2 *O mesmo argumento usado na prova da Proposição [1.1.1](#) pode ser usado para mostrar que um fenômeno similar acontece com as desigualdades de Hardy–Littlewood.*

Além das desigualdades clássicas de Bohnenblust–Hille para polinômios e formas multilineares, alguns autores têm estudado essas desigualdades para classes restritas. Por exemplo, a desigualdade de Bohnenblust–Hille multilinear para formas unimodulares (quando os coeficientes são ± 1) foi estudada por Pellegrino e Teixeira em [\[71\]](#). Um resultado fundamental sobre formas multilineares unimodulares é a desigualdade de Kahane–Salem–Zygmund (KSZ):

Teorema 1.1.3 *(veja [\[70\]](#), Theorem 1.1) Sejam m e n inteiros positivos. Existem uma constante universal $C_m > 0$, dependendo somente de m , e uma forma m -linear $T_{m,n}: c_0 \times \cdots \times c_0 \longrightarrow \mathbb{K}$ do tipo*

$$T_{m,n}(z^{(1)}, \dots, z^{(m)}) = \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n \pm z_{i_1}^{(1)} \cdots z_{i_m}^{(m)}$$

tais que

$$\|T_{m,n}\| \leq C_m \cdot n^{\frac{m+1}{2}}.$$

Uma vez que a forma dada pela desigualdade de Kahane–Salem–Zygmund é unimodular, podemos facilmente provar que o expoente ótimo da desigualdade de Bohnenblust–Hille

$$\left(\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^{\infty} |T(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq B_{\mathbb{K},m}^{\text{mult}} \|T\|$$

restrita às formas unimodulares também é $\frac{2m}{m+1}$.

Versões polinomiais da desigualdade de KSZ são consequências naturais da respectiva versão multilinear; contudo os coeficientes não são mais unimodulares (veja [\[20\]](#), Theorem 4). Uma versão polinomial do Teorema [1.1.3](#), para polinômios com coeficientes $\{0, -1, 1\}$, foi recentemente apresentada por [\[84\]](#):

Teorema 1.1.4 *(veja [\[84\]](#), Theorem 2.3) Sejam m e n inteiros positivos. Existem uma constante $C_m > 0$ e um polinômio m -homogêneo $P_m: c_0 \longrightarrow \mathbb{K}$ da forma*

$$P_m(x) = \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^{\infty} \delta_{i_1, \dots, i_m} x_{i_1} \cdots x_{i_m},$$

com $\delta_{i_1, \dots, i_m} \in \{0, 1, -1\}$, tais que

$$\|P_m\| \leq C_m n^{\frac{m+1}{2}}$$

e

$$\text{card}\{\delta_{i_1, \dots, i_m} \neq 0\} = n^m.$$

Como consequência, quase imediata, do resultado acima, o expoente $\frac{2m}{m+1}$ da desigualdade de Bohnenblust–Hille

$$\left(\sum_{|\alpha|=m} |c_\alpha(P)|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq B_{\mathbb{K}, m}^{\text{pol}} \|P\|$$

restrita aos polinômios com coeficientes $\{0, -1, 1\}$ é ótimo.

Outras desigualdades de Bohnenblust–Hille com restrições foram estudadas por Carando, Defant e Sevilla–Peris em [26] e por Maia, Nogueira e Pellegrino em [53]. Eles investigaram a desigualdade de Bohnenblust–Hille para polinômios com índices em cada monômio uniformemente limitados.

Para inteiros positivos m e M , com $M \leq m$, definimos

$$\omega(\alpha) = \text{card}\{i : \alpha_i \neq 0\}$$

e

$$\Lambda_{M, m} = \{\alpha : |\alpha| = m, \omega(\alpha) \leq M\}.$$

Em [53] foi provado que para quaisquer inteiros positivos m e M , com $M \leq m$, existe uma constante $k_M \geq 1$ tal que

$$\left(\sum_{\alpha \in \Lambda_{M, m}} |c_\alpha(P)|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq k_M \|P\|, \quad (1.4)$$

para todo polinômio m -homogêneo contínuo $P : c_0 \rightarrow \mathbb{C}$, ou seja, é possível obter uma constante universal que não depende do valor de m .

1.2 Desigualdade de Bohnenblust–Hille polinomial com restrições

Observando a prova da desigualdade (1.4) em [53], notamos que a constante k_M é obtida como uma consequência da desigualdade mais forte com expoente $\frac{2M}{M+1}$ em vez

de $\frac{2m}{m+1}$. Uma pergunta natural é se podemos melhorar o expoente $\frac{2M}{M+1}$. O próximo resultado dá uma limitação inferior para o expoente ótimo.

Proposição 1.2.1 *Sejam m e M inteiros positivos, com $M \leq m$, e seja $r \in (0, \infty)$. Se existe uma constante $k_M^{\mathbb{C}}$ (não dependendo de m) tal que*

$$\left(\sum_{\alpha \in \Lambda_{M,m}} |c_{\alpha}(P)|^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq k_M^{\mathbb{C}} \|P\|,$$

para todo polinômio m -homogêneo contínuo $P : c_0 \rightarrow \mathbb{C}$, então $r \geq \frac{2(M-1)}{M}$.

Demonstração. Seja $P : c_0 \rightarrow \mathbb{C}$ um polinômio $(M-1)$ -homogêneo contínuo. Defina o polinômio m -homogêneo $P_1 : c_0 \rightarrow \mathbb{C}$ por $P_1(x) = x_1^{m-M+1} \cdot P(x)$. Note que cada monômio de P_1 tem no máximo M índices distintos e que $\|P_1\| \leq \|P\|$. Portanto

$$\left(\sum_{|\alpha|=M-1} |c_{\alpha}(P)|^r \right)^{\frac{1}{r}} = \left(\sum_{\alpha \in \Lambda_{M,m}} |c_{\alpha}(P_1)|^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq k_M^{\mathbb{C}} \|P_1\| \leq k_M^{\mathbb{C}} \|P\|.$$

Uma vez que essa desigualdade vale para todo polinômio $(M-1)$ -homogêneo contínuo $P : c_0 \rightarrow \mathbb{C}$, concluimos da otimalidade do expoente $\frac{2(M-1)}{M}$ da desigualdade de Bohnenblust–Hille (para polinômio $(M-1)$ -homogêneo) que $r \geq \frac{2(M-1)}{M}$. ■

Finalizaremos esta seção imitando a prova da demonstração de (1.4) em [53] para obtermos um resultado mais geral:

Proposição 1.2.2 *Sejam m , M e k inteiros positivos, com $M \leq k < m$. Então existe uma constante $\lambda_{k,M} > 0$ (não dependendo de m) tal que*

$$\left(\sum_{\alpha \in \Lambda_{M,m}} |c_{\alpha}(P)|^{\frac{2mM}{mM+k}} \right)^{\frac{mM+k}{2mM}} \leq \lambda_{k,M} \cdot \|P\|,$$

para todo polinômio m -homogêneo contínuo $P : c_0 \rightarrow \mathbb{C}$.

Demonstração. Seja $P : c_0 \rightarrow \mathbb{C}$ um polinômio m -homogêneo contínuo. Da prova de [25, Proposition 4.1] e da prova de [53, Theorem 1.2], sabemos que

$$\left(\sum_{\alpha \in \Lambda_{M,m}} |c_{\alpha}(P)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|P\| \quad (1.5)$$

e

$$\left(\sum_{\alpha \in \Lambda_{M,m}} |c_{\alpha}(P)|^{\frac{2M}{M+1}} \right)^{\frac{M+1}{2M}} \leq \binom{m+M-1}{m}^{\frac{M+1}{2M}} \cdot \frac{m!}{(\lfloor \frac{m}{M} \rfloor!)^M} \cdot C_M \cdot e^m \|P\|. \quad (1.6)$$

Considere $\theta = \frac{k}{m}$, com $M \leq k < m$. Então

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{\frac{2M}{M+1}} + \frac{1-\theta}{2} = \frac{k}{m} \cdot \frac{M+1}{2M} + \frac{m-k}{m} \cdot \frac{1}{2} = \frac{mM+k}{2mM}.$$

Portanto

$$r = \frac{2mM}{mM+k}.$$

Pela desigualdade de Hölder interpolativa (Teorema [A.4](#) no apêndice) e pelas desigualdades [\(1.5\)](#) e [\(1.6\)](#), temos

$$\begin{aligned} \left(\sum_{\alpha \in \Lambda_{M,m}} |c_\alpha(P)|^r \right)^{\frac{1}{r}} &\leq \left[\left(\sum_{\alpha \in \Lambda_{M,m}} |c_\alpha(P)|^{\frac{2M}{M+1}} \right)^{\frac{M+1}{2M}} \right]^{\frac{k}{m}} \cdot \left[\left(\sum_{\alpha \in \Lambda_{M,m}} |c_\alpha(P)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{1-\frac{k}{m}} \\ &\leq \left[\binom{m+M-1}{m}^{\frac{M+1}{2M}} \cdot \frac{m!}{(\lfloor \frac{m}{M} \rfloor!)^M} \cdot C_M \cdot e^m \|P\| \right]^{\frac{k}{m}} \cdot \|P\|^{1-\frac{k}{m}} \\ &= \binom{m+M-1}{m}^{\frac{k(M+1)}{2mM}} \cdot \left[\frac{m!}{(\lfloor \frac{m}{M} \rfloor!)^M} \right]^{\frac{k}{m}} \cdot C_M^{\frac{k}{m}} \cdot e^k \cdot \|P\|. \end{aligned}$$

Pela fórmula de Stirling, sabemos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m!}{\sqrt{2\pi m} \left(\frac{m}{e}\right)^m} = 1.$$

Assim, podemos provar que

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\frac{m!}{(\lfloor \frac{m}{M} \rfloor!)^M} \right]^{\frac{k}{m}} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\frac{\sqrt{2\pi m} \left(\frac{m}{e}\right)^m}{\left(\sqrt{2\pi \frac{m}{M}} \left(\frac{m}{eM}\right)^{\frac{m}{M}}\right)^M} \right]^{\frac{k}{m}} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\frac{\sqrt{2\pi m} \left(\frac{m}{e}\right)^m}{\left(\sqrt{2\pi \frac{m}{M}}\right)^M \left(\frac{m}{e}\right)^m \left(\frac{1}{M}\right)^m} \right]^{\frac{k}{m}} \\ &= M^k \cdot \left[\frac{\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sqrt{2\pi m}\right)^{\frac{k}{m}}}{\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sqrt{2\pi \frac{m}{M}}\right)^{\frac{kM}{m}}} \right]. \end{aligned}$$

E como $\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sqrt{2\pi m}\right)^{\frac{k}{m}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sqrt{2\pi \frac{m}{M}}\right)^{\frac{kM}{m}} = 1$, concluímos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left[\frac{m!}{(\lfloor \frac{m}{M} \rfloor!)^M} \right]^{\frac{k}{m}} = M^k.$$

Temos também

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \binom{m+M-1}{m}^{\frac{k(M+1)}{2mM}} = \lim_{m \rightarrow \infty} C_M^{\frac{k}{m}} = 1,$$

portanto existe uma constante $\lambda_{k,M}$ tal que

$$\left(\sum_{\alpha \in \Lambda_{M,m}} |c_\alpha(P)|^{\frac{2mM}{mM+k}} \right)^{\frac{mM+k}{2mM}} \leq \lambda_{k,M} \cdot \|P\|,$$

finalizando a prova. ■

Observação 1.2.3 *Considerando m suficientemente grande no teorema anterior, podemos considerar $\lambda_{k,M} = e^k \cdot M^k$. Particularmente, quando $k = M$, temos o resultado principal de [53]. Note ainda que $r < \frac{2m}{m+1}$ para todo $k > M$.*

1.3 Desigualdade de Bohnenblust–Hille multilinear com restrições

O próximo teorema é um tipo de versão multilinear do resultado principal de [53]; como veremos, diferentemente do caso polinomial, o nosso também tem interesse no caso real.

Teorema 1.3.1 *Sejam m e M inteiros positivos, com $M \leq m$. Então existe uma constante $\eta_M \geq 1$ (não dependendo de m) tal que*

$$\left(\sum_{\text{card}\{i_1, \dots, i_m\} \leq M} |T(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq \eta_M \|T\|, \quad (1.7)$$

para toda forma m -linear contínua $T: c_0 \times \dots \times c_0 \longrightarrow \mathbb{K}$. Além disso, se $\overline{B}_{m,M}^{\mathbb{R}}$ é a constante ótima no caso real, então

$$\begin{aligned} 2 &\leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \overline{B}_{m,M}^{\mathbb{R}} \leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \overline{B}_{m,M}^{\mathbb{R}} \leq M^{\frac{M+1}{2}}, \text{ se } M \geq 3, \\ \sqrt{2} &\leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \overline{B}_{m,M}^{\mathbb{R}} \leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \overline{B}_{m,M}^{\mathbb{R}} \leq \sqrt{8}, \text{ se } M = 2. \end{aligned}$$

Observação 1.3.2 *É interessante observar que o resultado acima está intimamente ligado ao resultado principal de [3], mas enquanto em [3] as constantes são contrativas quando M está fixo e $m \rightarrow \infty$, em nosso teorema, para escalares reais, as constantes não convergem para 1.*

Vamos iniciar estabelecendo algumas notações. Seja n um inteiro positivo. De agora em diante, e_i^n denotará a n -upla $(e_i, \dots, e_i)$ e, de modo mais geral, se $n_1, \dots, n_k$

são inteiros positivos tais que $n_1 + \dots + n_k = m$, então $(e_{i_1}^{n_1}, \dots, e_{i_k}^{n_k})$ representa a m -upla

$$(e_{i_1}, \overset{n_1 \text{ vezes}}{\dots}, e_{i_1}, \dots, e_{i_k}, \overset{n_k \text{ vezes}}{\dots}, e_{i_k}).$$

A seguinte desigualdade de Bohnenblust–Hille por blocos, recentemente provada em [3], desempenha um papel fundamental na prova do Teorema 1.3.1.

Teorema 1.3.3 (veja [3, Theorem 3.1]) *Sejam $m, M, n_1, \dots, n_M$ inteiros positivos tais que $M \leq m$ e $n_1 + \dots + n_M = m$. Então, para toda forma m -linear contínua $T : c_0 \times \dots \times c_0 \rightarrow \mathbb{K}$,*

$$\left(\sum_{i_1, \dots, i_M=1}^{\infty} |T(e_{i_1}^{n_1}, \dots, e_{i_M}^{n_M})|^{\frac{2M}{M+1}} \right)^{\frac{M+1}{2M}} \leq B_{\mathbb{K}, M}^{\text{mult}} \|T\|.$$

Além disso, o expoente $\frac{2M}{M+1}$ é ótimo.

Necessitaremos também da seguinte consequência da desigualdade de Khinchin:

Lema 1.3.4 (veja [71, p. 14]) *Para toda forma m -linear contínua $T : c_0 \times \dots \times c_0 \rightarrow \mathbb{K}$, temos*

$$\left(\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^{\infty} |T(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|T\|.$$

Para provarmos a primeira parte do Teorema 1.3.1, usaremos o Teorema 1.3.3, o Lema 1.3.4 (que é válido para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) e um argumento de interpolação. Para analisarmos a constante quando $m \rightarrow \infty$, usaremos formas m -lineares específicas, que já foram usadas em outros trabalhos, como em [71].

Prova do Teorema 1.3.1: Seja $T : c_0 \times \dots \times c_0 \rightarrow \mathbb{K}$ uma forma m -linear contínua. Agora, para cada escolha de $i_1, \dots, i_m \in \{1, \dots, M\}$, considere a soma

$$\sum_{j_{i_1}, \dots, j_{i_m}=1}^{\infty} |T(e_{j_{i_1}}, \dots, e_{j_{i_m}})|^{\frac{2M}{M+1}}.$$

Observe que

$$\sum_{\text{card}\{i_1, \dots, i_m\} \leq M} |T(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})|^{\frac{2M}{M+1}} \leq \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^M \left(\sum_{j_{i_1}, \dots, j_{i_m}=1}^{\infty} |T(e_{j_{i_1}}, \dots, e_{j_{i_m}})|^{\frac{2M}{M+1}} \right).$$

Pelo Teorema 1.3.3 (que também é válido se os índices iguais não estão necessariamente juntos), temos

$$\sum_{\text{card}\{i_1, \dots, i_m\} \leq M} |T(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})|^{\frac{2M}{M+1}} \leq \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^M (B_{\mathbb{K}, M}^{\text{mult}})^{\frac{2M}{M+1}} \|T\|^{\frac{2M}{M+1}}$$

$$= M^m (B_{\mathbb{K},M}^{\text{mult}})^{\frac{2M}{M+1}} \|T\|^{\frac{2M}{M+1}}.$$

Portanto

$$\left(\sum_{\text{card}\{i_1, \dots, i_m\} \leq M} |T(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})|^{\frac{2M}{M+1}} \right)^{\frac{M+1}{2M}} \leq M^{\frac{m(M+1)}{2M}} B_{\mathbb{K},M}^{\text{mult}} \|T\|. \quad (1.8)$$

Aplicando o Lema [1.3.4](#), concluimos que

$$\left(\sum_{\text{card}\{i_1, \dots, i_m\} \leq M} |T(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^{\infty} |T(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|T\|. \quad (1.9)$$

Seja $\theta = M/m$. Note que

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{\frac{2M}{M+1}} + \frac{1-\theta}{2} = \frac{M}{m} \cdot \frac{M+1}{2M} + \frac{m-M}{m} \cdot \frac{1}{2} = \frac{m+1}{2m}.$$

Assim, usando a desigualdade de Hölder interpolativa (Teorema [A.4](#) no apêndice), com $\theta = M/m$, e as desigualdades [\(1.8\)](#) e [\(1.9\)](#), obtemos

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{\text{card}\{i_1, \dots, i_m\} \leq M} |T(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \\ & \leq \left(\sum_{\text{card}\{i_1, \dots, i_m\} \leq M} |T(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})|^{\frac{2M}{M+1}} \right)^{\frac{M+1}{2M} \cdot \theta} \cdot \left(\sum_{\text{card}\{i_1, \dots, i_m\} \leq M} |T(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})|^2 \right)^{\frac{1-\theta}{2}} \\ & \leq \left(M^{\frac{m(M+1)}{2M}} B_{\mathbb{K},M}^{\text{mult}} \|T\| \right)^{\theta} \cdot (\|T\|)^{1-\theta} \\ & = M^{\frac{M+1}{2}} (B_{\mathbb{K},M}^{\text{mult}})^{\frac{M}{m}} \|T\|. \end{aligned}$$

Por [\(1.3\)](#) utilizando $C = 1, 3$, segue que

$$\begin{aligned} \left(\sum_{\text{card}\{i_1, \dots, i_m\} \leq M} |T(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} & \leq M^{\frac{M+1}{2}} (1, 3M^{0,365})^{\frac{M}{m}} \|T\| \\ & = (1, 3)^{\frac{M}{m}} M^{\frac{0,365M}{m} + \frac{M+1}{2}} \|T\|. \end{aligned}$$

Seja $\overline{B}_{m,M}^{\mathbb{R}}$ a constante ótima da desigualdade [\(1.7\)](#) para escalares reais. Considere, assim como em [\[71\]](#), p. 15], a forma bilinear $T_2 : c_0 \times c_0 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$T_2(x, y) = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 - x_2 y_2.$$

Para $m = 3$, considere $T_3 : c_0 \times c_0 \times c_0 \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} T_3(x, y, z) &= (z_1 + z_2)(x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 - x_2y_2) \\ &\quad + (z_1 - z_2)(x_3y_1 + x_3y_2 + x_4y_1 - x_4y_2). \end{aligned}$$

Observe que T_3 tem no máximo três índices distintos em cada monômio e que $\|T_3\| = 4$.

Para $m = 4$, defina a forma $T_4 : c_0 \times c_0 \times c_0 \times c_0 \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} T_4(x, y, z, w) &= (w_1 + w_2)((z_1 + z_2)(x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 - x_2y_2) \\ &\quad + (z_1 - z_2)(x_3y_1 + x_3y_2 + x_4y_1 - x_4y_2)) \\ &\quad + (w_1 - w_2)((z_1 + z_2)(x_5y_1 + x_5y_2 + x_6y_1 - x_6y_2) \\ &\quad + (z_1 - z_2)(x_7y_1 + x_7y_2 + x_8y_1 - x_8y_2)). \end{aligned}$$

Assim como anteriormente, T_4 tem no máximo três índices em cada monômio. Note que $\|T_4\| = 8$. E, de maneira geral, defina, por indução, a forma m -linear $T_m : c_0 \times \cdots \times c_0 \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} T_m(x^{(1)}, \dots, x^{(m)}) &= (x_1^{(m)} + x_2^{(m)}) T_{m-1}(x^{(1)}, \dots, x^{(m-1)}) + \\ &\quad (x_1^{(m)} - x_2^{(m)}) T_{m-1}(B^{2^{m-1}}(x^{(1)}), x^{(2)}, \dots, x^{(m-1)}), \end{aligned}$$

com $B^{2^{m-1}} : c_0 \longrightarrow c_0$, dada por $B^{2^{m-1}}(x^{(1)}) = (x_{2^{m-1}+1}^{(1)}, x_{2^{m-1}+2}^{(1)}, \dots)$. Note que cada monômio de T_m tem no máximo três índices distintos, que $\|T_m\| = 2^{m-1}$ e que

$$\left(\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^{\infty} |T_m(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} = (2^{2(m-1)})^{\frac{m+1}{2m}} = 2^{\frac{(m-1)(m+1)}{m}}.$$

Portanto, considerando essa forma T_m em [\(1.7\)](#), temos

$$2^{\frac{(m-1)(m+1)}{m}} \leq \eta_M 2^{m-1},$$

ou seja,

$$\eta_M \geq 2^{\frac{(m-1)}{m}}.$$

Assim

$$\overline{B}_{m,M}^{\mathbb{R}} \geq 2^{\frac{(m-1)}{m}}, \text{ para todo } M \geq 3,$$

e, portanto,

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} \overline{B}_{m,M}^{\mathbb{R}} \geq 2, \text{ se } M \geq 3.$$

Vamos agora analisar o caso $M = 2$. Se m é par, consideramos a forma m -linear dada por

$$R_m(x^{(1)}, \dots, x^{(m)}) = \prod_{k=1}^{m/2} \left(x_1^{(2k-1)} x_1^{(2k)} + x_1^{(2k-1)} x_2^{(2k)} + x_2^{(2k-1)} x_1^{(2k)} - x_2^{(2k-1)} x_2^{(2k)} \right).$$

Podemos facilmente provar que

$$\|R_m\| = 2^{m/2}.$$

Como R_m tem precisamente $4^{m/2}$ monômios, substituindo R_m em (1.7), concluimos que

$$\left(4^{\frac{m}{2}}\right)^{\frac{m+1}{2m}} = (2^m)^{\frac{m+1}{2m}} = 2^{\frac{m+1}{2}} \leq \eta_M 2^{\frac{m}{2}}.$$

Então $\eta_M \geq 2^{\frac{1}{2}}$ e

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \overline{B}_{2k,2}^{\mathbb{R}} \geq \sqrt{2}. \quad (1.10)$$

Quando m é ímpar, consideramos a forma m -linear dada por

$$A_m(x^{(1)}, \dots, x^{(m)}) = x_1^{(m)} \cdot \prod_{k=1}^{\frac{m-1}{2}} \left(x_1^{(2k-1)} x_1^{(2k)} + x_1^{(2k-1)} x_2^{(2k)} + x_2^{(2k-1)} x_1^{(2k)} - x_2^{(2k-1)} x_2^{(2k)} \right).$$

Podemos provar que

$$\|A_m\| = 2^{\frac{m-1}{2}}.$$

E, como A_m tem exatamente $4^{(m-1)/2}$ monômios, substituindo A_m em (1.7), concluimos que

$$\left(4^{\frac{m-1}{2}}\right)^{\frac{m+1}{2m}} = 2^{(m-1) \cdot \frac{m+1}{2m}} = 2^{\frac{m^2-1}{2m}} \leq \eta_M 2^{\frac{m-1}{2}}.$$

Então $\eta_M \geq 2^{\frac{m-1}{2m}}$ e

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \overline{B}_{2k-1,2}^{\mathbb{R}} \geq \sqrt{2}. \quad (1.11)$$

Logo, de (1.10) e de (1.11), temos

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} \overline{B}_{m,2}^{\mathbb{R}} \geq \sqrt{2}.$$

É natural imaginar até que ponto o Teorema 1.3.1 pode ser aprimorado. Apresentaremos abaixo alguns problemas em aberto que surgem do nosso principal resultado:

Problema 1.3.5 *Quais são as estimativas de $\liminf_{m \rightarrow \infty} \overline{B}_{m,M}^{\mathbb{C}}$ e $\limsup_{m \rightarrow \infty} \overline{B}_{m,M}^{\mathbb{C}}$?*

Problema 1.3.6 *Quais são os valores ótimos do caso real para a constante $\overline{B}_{m,M}^{\mathbb{R}}$?*

O Problema 1.3.6 pode ser muito complicado. Alguns problemas intermediários são:

Problema 1.3.7 *Quais são os valores ótimos de $\liminf_{m \rightarrow \infty} \overline{B}_{m,M}^{\mathbb{R}}$ e $\limsup_{m \rightarrow \infty} \overline{B}_{m,M}^{\mathbb{R}}$?*

Problema 1.3.8 *É possível melhorar (assintoticamente falando) a estimativa superior $M^{\frac{M+1}{2}}$?*

Capítulo 2

Desigualdades de Hardy–Littlewood

As desigualdades de Hardy–Littlewood para formas m -lineares $T : \ell_{p_1}^n \times \cdots \times \ell_{p_m}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ foram investigadas somente para o caso do tipo β , isto é, quando

$$\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_m} < 1.$$

Neste capítulo, trataremos do outro caso (tipo α), ou seja, quando

$$\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_m} \geq 1. \tag{2.1}$$

Até então, por motivos técnicos, não existia desigualdade de Hardy–Littlewood nesse cenário. No entanto, considerando um ambiente anisotrópico, ou seja, com expoentes não necessariamente iguais, percebemos que o caso de espaços satisfazendo [\(2.1\)](#) é admissível.

O capítulo está dividido em duas seções. Na primeira delas, apresentaremos uma ampliação do teorema de inclusão para operadores múltiplo somantes provado em [\[7, Theorem 3\]](#) e demonstraremos desigualdades de Hardy–Littlewood no sentido anisotrópico para formas m -lineares $T : \ell_m^n \times \cdots \times \ell_m^n \longrightarrow \mathbb{K}$, que chamaremos de caso crítico. A desigualdade de Hardy–Littlewood que apresentaremos é a primeira a investigar o caso $p \leq m$. O conteúdo desta seção foi publicado no artigo:

[\[64\]](#) D. Paulino, Critical Hardy–Littlewood inequality for multilinear forms.

Rend. Circ. Mat. Palermo, II. **69** (2020), 369–380.

Na segunda seção, continuando o trabalho de [64], investigaremos desigualdades de Hardy–Littlewood para formas definidas em espaços satisfazendo (2.1) (tipo α). Essas desigualdades serão chamadas de supercríticas e obtidas a partir de outras desigualdades de Hardy–Littlewood clássicas (tipo β). Com efeito, nesta seção provaremos dois lemas que permitem, sob certas condições, obter uma desigualdade de Hardy–Littlewood para formas em espaços do tipo α a partir de outra para formas em espaços do tipo β - e vice-versa. Usando esses lemas, apresentaremos também a solução final a respeito dos expoentes do caso 3-linear crítico. Os resultados desta seção podem também ser encontrados no artigo:

[61] D. Núñez–Alarcón, D. Paulino, D. Pellegrino, Super-critical Hardy–Littlewood inequalities for multilinear forms. An. Acad. Brasil. Ciênc., to appear.

2.1 Desigualdades críticas de Hardy–Littlewood

As desigualdades de Hardy–Littlewood para formas bilineares foram obtidas em 1934 por Hardy e Littlewood [44] como uma generalização natural da desigualdade 4/3 de Littlewood [50] de 1930, considerando formas $T : \ell_p^n \times \ell_q^n \rightarrow \mathbb{K}$, para certos valores de $p, q \in (1, \infty]$, em vez de formas $T : \ell_\infty^n \times \ell_\infty^n \rightarrow \mathbb{K}$. Os resultados de [44], em uma apresentação moderna e um pouco mais geral, podem ser resumidos pelos dois teoremas seguintes:

Teorema 2.1.1 (veja [63] e [14, Theorem 3.2]) *Sejam $a, b \in (0, \infty)$, $q \in (1, 2]$ e $p \in (2, \infty]$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) *Existe uma constante $C \geq 1$ (não dependendo de n) tal que*

$$\left(\sum_{i_1=1}^n \left(\sum_{i_2=1}^n |T(e_{i_1}, e_{i_2})|^a \right)^{\frac{b}{a}} \right)^{\frac{1}{b}} \leq C \|T\|,$$

para toda forma bilinear $T : \ell_p^n \times \ell_q^n \rightarrow \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n .

(b) *Os expoentes a, b satisfazem*

$$(a, b) \in \left[\frac{q}{q-1}, \infty \right) \times \left[\frac{1}{1 - \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right)}, \infty \right).$$

Além disso, a constante $C = 1$ é ótima.

Teorema 2.1.2 (veja [72, Theorem 5.1]) *Sejam $a, b \in (0, \infty)$ e $p, q \in [2, \infty]$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) *Existe uma constante $C \geq 1$ (não dependendo de n) tal que*

$$\left(\sum_{i_1=1}^n \left(\sum_{i_2=1}^n |T(e_{i_1}, e_{i_2})|^a \right)^{\frac{b}{a}} \right)^{\frac{1}{b}} \leq C \|T\|,$$

para toda forma bilinear $T : \ell_p^n \times \ell_q^n \longrightarrow \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n .

(b) *Os expoentes a, b satisfazem*

$$(a, b) \in \left[\frac{q}{q-1}, \infty \right) \times \left[\frac{1}{1 - \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right)}, \infty \right)$$

e

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq \frac{3}{2} - \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right). \quad (2.2)$$

Como (2.2) é trivialmente verificada sob as condições do Teorema 2.1.1, podemos unificar os dois teoremas acima do seguinte modo:

Teorema 2.1.3 *Sejam $a, b \in (0, \infty)$, $q \in (1, \infty]$ e $p \in [2, \infty]$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) *Existe uma constante $C \geq 1$ (não dependendo de n) tal que*

$$\left(\sum_{i_1=1}^n \left(\sum_{i_2=1}^n |T(e_{i_1}, e_{i_2})|^a \right)^{\frac{b}{a}} \right)^{\frac{1}{b}} \leq C \|T\|,$$

para toda forma bilinear $T : \ell_p^n \times \ell_q^n \longrightarrow \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n .

(b) *Os expoentes a, b satisfazem*

$$(a, b) \in \left[\frac{q}{q-1}, \infty \right) \times \left[\frac{1}{1 - \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right)}, \infty \right)$$

e

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq \frac{3}{2} - \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right).$$

No contexto multilinear, considerando $p_1 = \cdots = p_m = p$, a desigualdade de Hardy–Littlewood/Praciano–Pereira [77] pode ser escrita como: dados $m \geq 1$ e $p \geq 2m$, existe uma constante $C_{m,p}^{\mathbb{K}} \geq 1$ tal que

$$\left(\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n |T(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})|^{\frac{2mp}{pm+p-2m}} \right)^{\frac{pm+p-2m}{2mp}} \leq C_{m,p}^{\mathbb{K}} \|T\|, \quad (2.3)$$

para toda forma m -linear $T : \ell_p^n \times \cdots \times \ell_p^n \longrightarrow \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n . Observe que o caso $p = \infty$ é exatamente a desigualdade de Bohnenblust–Hille. A desigualdade de Hardy–Littlewood/Dimant–Sevilla–Peris [37] afirma que para $m \geq 1$ inteiro e $m < p \leq 2m$, existe uma constante $D_{m,p}^{\mathbb{K}} \geq 1$ tal que

$$\left(\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n |T(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})|^{\frac{p}{p-m}} \right)^{\frac{p-m}{p}} \leq D_{m,p}^{\mathbb{K}} \|T\|, \quad (2.4)$$

para toda forma m -linear $T : \ell_p^n \times \cdots \times \ell_p^n \longrightarrow \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n .

Essas desigualdades para formas m -lineares $T : \ell_p^n \times \cdots \times \ell_p^n \longrightarrow \mathbb{K}$ foram investigadas somente para o caso $p > m$ (tipo β), pois, no caso $p \leq m$, a existência de uma constante $C > 0$ (sem depender de n) que satisfaça

$$\left(\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n |T(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \|T\|, \quad (2.5)$$

para toda forma m -linear $T : \ell_p^n \times \cdots \times \ell_p^n \longrightarrow \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n , implica $q = \infty$. Com efeito, para cada inteiro positivo n , consideremos a forma m -linear $T_n : \ell_p^n \times \cdots \times \ell_p^n \longrightarrow \mathbb{K}$, definida por

$$T_n(x^{(1)}, \dots, x^{(m)}) = \sum_{i=1}^n x_i^{(1)} \cdots x_i^{(m)}.$$

Como $p \leq m$, dado $x \in \ell_p^n$, temos $\|x\|_m \leq \|x\|_p$ (veja Proposição A.3 no apêndice). Assim, usando a desigualdade de Höder (Teorema A.3 no apêndice), segue que

$$\begin{aligned} \|T_n\| &= \sup_{\|x^{(k)}\|_p \leq 1, \ k=1, \dots, m} |T_n(x^{(1)}, \dots, x^{(m)})| \\ &= \sup_{\|x^{(k)}\|_p \leq 1, \ k=1, \dots, m} \left| \sum_{i=1}^n x_i^{(1)} \cdots x_i^{(m)} \right| \\ &\leq \sup_{\|x^{(k)}\|_p \leq 1, \ k=1, \dots, m} \sum_{i=1}^n |x_i^{(1)} \cdots x_i^{(m)}| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sup_{\|x^{(k)}\|_m \leq 1, k=1, \dots, m} \sum_{i=1}^n |x_i^{(1)} \cdots x_i^{(m)}| \\
&\leq \sup_{\|x^{(k)}\|_m \leq 1, k=1, \dots, m} \left(\sum_{i=1}^n |x_i^{(1)}|^m \right)^{\frac{1}{m}} \cdots \left(\sum_{i=1}^n |x_i^{(m)}|^m \right)^{\frac{1}{m}} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Substituindo a forma T_n em (2.5), obtemos $n^{\frac{1}{q}} \leq C$, para todo inteiro positivo n . Logo $q = \infty$ e somos obrigados a usar a norma do supremo em (2.5), o que torna o caso $p \leq m$ desinteressante (por ser trivial). No entanto, se mudarmos o ponto de vista e em vez de expoentes iguais $(q, \dots, q)$ considerarmos expoentes mistos $(q_1, \dots, q_m)$, percebemos que o preço a se pagar quando $p \leq m$ não é tão alto quanto se imaginava. Mais precisamente, em vez de considerarmos todos os expoentes iguais a infinito basta termos alguns, a depender do valor de p . Informações ainda mais precisas serão abordadas neste capítulo.

Como sabemos, os expoentes das desigualdades de Hardy–Littlewood em (2.3) e em (2.4) são ótimos quando exigimos que todos os expoentes sejam iguais, isto é, a constante passa a depender de n quando se considera expoentes menores, no entanto, não são ótimos quando permitimos somas mistas do lado esquerdo. Em [6], a versão anisotrópica da desigualdade de Hardy–Littlewood/Praciano–Pereira foi finalmente estabelecida (veja também [80], Theorem 1.2] para uma versão completa quando $p_1 = \dots = p_m = \infty$):

Teorema 2.1.4 (veja [6], Theorem 1.2]) *Sejam $p_1, \dots, p_m \in [2, \infty]$ tais que*

$$\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_m} \leq \frac{1}{2}$$

e

$$q_1, \dots, q_m \in \left[\frac{1}{1 - \left(\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_m} \right)}, 2 \right].$$

As seguintes afirmações são equivalentes:

(a) *Existe uma constante $C \geq 1$ (não dependendo de n) tal que*

$$\left(\sum_{i_1=1}^n \left(\cdots \left(\sum_{i_m=1}^n |T(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})|^{q_m} \right)^{\frac{q_{m-1}}{q_m}} \cdots \right)^{\frac{q_1}{q_2}} \right)^{\frac{1}{q_1}} \leq C \|T\|,$$

para toda forma m -linear $T : \ell_{p_1}^n \times \dots \times \ell_{p_m}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n .

(b) A desigualdade

$$\frac{1}{q_1} + \cdots + \frac{1}{q_m} \leq \frac{m+1}{2} - \left(\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_m} \right)$$

é satisfeita.

A versão anisotrópica da desigualdade de Hardy–Littlewood/Dimant–Sevilla–Peris ainda não está totalmente completa, mas em [14] foi dada a seguinte resposta parcial (que também generaliza o Teorema 2.1.1):

Teorema 2.1.5 (veja [14, Theorem 3.2]) *Sejam $m \geq 2$ um inteiro, $q_1, \dots, q_m \in (0, \infty)$, $p_1, \dots, p_{m-1} \in (2, \infty]$ e $p_m \in (1, 2]$, com*

$$\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_m} < 1.$$

As seguintes afirmações são equivalentes:

(a) *Existe uma constante $C \geq 1$ (não dependendo de n) tal que*

$$\left(\sum_{i_1=1}^n \left(\cdots \left(\sum_{i_m=1}^n |T(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})|^{q_m} \right)^{\frac{q_{m-1}}{q_m}} \cdots \right)^{\frac{q_1}{q_2}} \right)^{\frac{1}{q_1}} \leq C \|T\|,$$

para toda forma m -linear $T : \ell_{p_1}^n \times \cdots \times \ell_{p_m}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n .

(b) *Os expoentes $q_1, \dots, q_m$ satisfazem*

$$q_1 \geq \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_m} \right)}, q_2 \geq \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_m} \right)}, \dots, q_m \geq \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{p_m} \right)}.$$

Além disso, a constante ótima é $C = 1$.

Assim como foi mencionado, nesta seção, apresentaremos desigualdades de Hardy–Littlewood no sentido anisotrópico quando $p = m$. Até então, por se pensar esse caso somente com os expoentes iguais, tínhamos conhecimento apenas da desigualdade absolutamente trivial (podemos dizer quase uma tautologia): para qualquer inteiro positivo m temos

$$\sup_{1 \leq i_1, \dots, i_m \leq n} |T(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})| \leq \|T\|,$$

para toda forma m -linear $T : \ell_m^n \times \cdots \times \ell_m^n \longrightarrow \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n .

É sabido que existe uma íntima relação entre as desigualdades de Hardy–Littlewood/Bohnenblust–Hille e a teoria dos operadores múltiplo somantes, mais precisamente, as primeiras podem ser interpretadas como resultados de inclusão da última. O próximo resultado, essencialmente provado em [74, Corollary 3.20], traz os detalhes dessa interpretação:

Teorema 2.1.6 (veja [72, Theorem 3.2]) *Sejam $(p_1, \dots, p_m) \in [1, \infty]^m$ e $q_1, \dots, q_m \in (0, \infty]$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) *Existe uma constante $C \geq 1$ (não dependendo de n) tal que*

$$\left(\sum_{i_1=1}^n \left(\dots \left(\sum_{i_m=1}^n |T(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})|^{q_m} \right)^{\frac{q_{m-1}}{q_m}} \dots \right)^{\frac{q_1}{q_2}} \right)^{\frac{1}{q_1}} \leq C \|T\|,$$

para toda forma m -linear $T : \ell_{p_1}^n \times \dots \times \ell_{p_m}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n .

(b) *Para quaisquer espaços de Banach $X_1, \dots, X_m, Y$, temos*

$$\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y) = \Pi_{(q_1, \dots, q_m; p_1^*, \dots, p_m^*)}^m(X_1, \dots, X_m; Y).$$

Observação 2.1.7 Usando o Teorema 2.1.6, podemos concluir, considerando $p = 2m$ na desigualdade (2.3), que todo operador linear contínuo $T : X_1 \times \dots \times X_m \longrightarrow Y$ definido entre espaços de Banach é múltiplo $(2, \dots, 2; (2m)^*, \dots, (2m)^*)$ -somante.

O seguinte teorema de inclusão foi essencial para provarmos a desigualdade de Hardy–Littlewood para o caso crítico e, posteriormente, estendermos para outros espaços do tipo α :

Teorema 2.1.8 (veja [7, Theorem 3]) *Sejam m um inteiro positivo, $r \in [1, \infty)$ e $\mathbf{s}, \mathbf{p}, \mathbf{q} \in [1, \infty)^m$ tais que $q_k \geq p_k$, para $k = 1, \dots, m$, e*

$$\frac{1}{r} - \left| \frac{1}{\mathbf{p}} \right| + \left| \frac{1}{\mathbf{q}} \right| > 0.$$

Então

$$\Pi_{(r; \mathbf{p})}^m(X_1, \dots, X_m; Y) \subset \Pi_{(\mathbf{s}; \mathbf{q})}^m(X_1, \dots, X_m; Y),$$

para quaisquer espaços de Banach $X_1, \dots, X_m, Y$, com

$$\frac{1}{s_k} - \left| \frac{1}{\mathbf{q}} \right|_{\geq k} = \frac{1}{r} - \left| \frac{1}{\mathbf{p}} \right|_{\geq k},$$

para cada $k \in \{1, \dots, m\}$; e o operador inclusão tem norma 1.

A prova é técnica, como esperado, e uma das principais ferramentas é a seguinte desigualdade de Minkowski (veja [40, Corollary 5.4.2]):

Desigualdade de Minkowski: Para quaisquer $0 < p \leq q < \infty$ e para qualquer matriz escalar $(a_{ij})_{i,j=1}^n$, temos

$$\left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}|^q \right)^{\frac{p}{q}} \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (2.6)$$

No entanto, é simples verificar que essa desigualdade é também válida para $q = \infty$, trocando a norma ℓ_q pela norma do supremo. Basta notar que

$$\sup_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^n \left(\sup_{1 \leq i \leq n} |a_{ij}| \right)^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Usando esse fato e imitando a prova do Teorema 2.1.8 em [7], podemos fornecer a seguinte melhoria:

Teorema 2.1.9 (Teorema de Inclusão estendido) *Sejam m um inteiro positivo, $r \in [1, \infty)$ e $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{s} \in [1, \infty]^m$ tais que $q_k \geq p_k$, para $k = 2, \dots, m$. Se $q_1 \geq p_1$ e*

$$\frac{1}{r} - \left| \frac{1}{\mathbf{p}} \right| + \left| \frac{1}{\mathbf{q}} \right| > 0$$

ou se $q_1 > p_1$ e

$$\frac{1}{r} - \left| \frac{1}{\mathbf{p}} \right| + \left| \frac{1}{\mathbf{q}} \right| \geq 0,$$

então

$$\Pi_{(r;\mathbf{p})}^m(X_1, \dots, X_m; Y) \subset \Pi_{(\mathbf{s};\mathbf{q})}^m(X_1, \dots, X_m; Y),$$

para quaisquer espaços de Banach $X_1, \dots, X_m, Y$, com

$$\frac{1}{s_k} - \left| \frac{1}{\mathbf{q}} \right|_{\geq k} = \frac{1}{r} - \left| \frac{1}{\mathbf{p}} \right|_{\geq k},$$

para cada $k \in \{1, \dots, m\}$; e o operador inclusão tem norma 1.

Demonstração. Se supusermos $q_1 \geq p_1$ e

$$\frac{1}{r} - \left| \frac{1}{\mathbf{p}} \right| + \left| \frac{1}{\mathbf{q}} \right| > 0$$

precisamos apenas seguir a prova de [7 Theorem 3], observando que não há problema técnico em considerar $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{s} \in [1, \infty]^m$ e visto que (2.6) é válida para $q = \infty$. Desse modo, vamos supor $q_1 > p_1$ e

$$\frac{1}{r} - \left| \frac{1}{\mathbf{p}} \right| + \left| \frac{1}{\mathbf{q}} \right| \geq 0.$$

Por razões óbvias, vamos lidar somente com o caso

$$\frac{1}{r} - \left| \frac{1}{\mathbf{p}} \right| + \left| \frac{1}{\mathbf{q}} \right| = 0.$$

Seja

$$T \in \Pi_{(r;\mathbf{p})}^m(X_1, \dots, X_m; Y)$$

e considere $\bar{\mathbf{q}} = (p_1, q_2, q_3, \dots, q_m)$. Note que

$$\frac{1}{r} - \left| \frac{1}{\mathbf{p}} \right| + \left| \frac{1}{\bar{\mathbf{q}}} \right| = \frac{1}{r} - \left| \frac{1}{\mathbf{p}} \right| + \left| \frac{1}{\bar{\mathbf{q}}} \right| + \left(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1} \right) = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1} > 0,$$

pois $q_1 > p_1$ e

$$\frac{1}{r} - \left| \frac{1}{\mathbf{p}} \right| + \left| \frac{1}{\bar{\mathbf{q}}} \right| = 0.$$

Portanto, pela hipótese e pelo Teorema [2.1.8](#),

$$T \in \Pi_{(\bar{\mathbf{s}};\bar{\mathbf{q}})}^m(X_1, \dots, X_m; Y),$$

com

$$\frac{1}{\bar{s}_k} = \frac{1}{r} - \left| \frac{1}{\mathbf{p}} \right|_{\geq k} + \left| \frac{1}{\bar{\mathbf{q}}} \right|_{\geq k},$$

isto é, $\bar{s}_k = s_k$, para $k = 2, \dots, m$, e $\bar{s}_1 = s_2$. Assim, existe $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i_1=1}^n \left(\sum_{i_2=1}^n \left(\dots \left(\sum_{i_m=1}^n \left| T \left(x_{i_1}^{(1)}, x_{i_2}^{(2)}, \dots, x_{i_m}^{(m)} \right) \right|^{s_m} \right)^{\frac{s_{m-1}}{s_m}} \dots \right)^{\frac{s_2}{s_3}} \right)^{\frac{s_2}{s_2}} \right)^{\frac{1}{s_2}} \\ & \leq C \cdot \left(\prod_{k=2}^m \left\| \left(x_{i_k}^{(k)} \right)_{i_k=1}^n \right\|_{w, q_k} \right) \cdot \left\| \left(x_{i_1}^{(1)} \right)_{i_1=1}^n \right\|_{w, p_1}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

para quaisquer $x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \in X_k$, $k = 1, \dots, m$. Fixemos as sequências $(x_{i_2}^{(2)})_{i_2=1}^n, \dots, (x_{i_m}^{(m)})_{i_m=1}^n$ em $X_2, \dots, X_m$, respectivamente, e consideremos o operador linear contínuo $T_1 : X_1 \longrightarrow \ell_{(s_2, \dots, s_m)}(Y)$, definido por

$$T_1(x) = \left(T \left(x, x_{i_2}^{(2)}, \dots, x_{i_m}^{(m)} \right) \right)_{i_2, \dots, i_m=1}^n.$$

Pela desigualdade [\(2.7\)](#),

$$T_1 \in \Pi_{(s_2; p_1)}(X_1; \ell_{(s_2, \dots, s_m)}(Y)).$$

Agora, pelo Teorema de Inclusão (Teorema [A.1](#) no apêndice), sabemos que

$T_1 \in \Pi_{(t; q_1)}(X_1; \ell_{(s_2, \dots, s_m)}(Y))$, para todo $t \geq s_2$ satisfazendo

$$\frac{1}{p_1} - \frac{1}{s_2} \leq \frac{1}{q_1} - \frac{1}{t}. \quad (2.8)$$

Como $t = s_1$ satisfaz a desigualdade (2.8), $T_1 \in \Pi_{(s_1; q_1)}(X_1; \ell_{(s_2, \dots, s_m)}(Y))$ e, portanto,

$$\left(\sum_{i_1=1}^n \|T_1(x_{i_1}^{(1)})\|^{s_1} \right)^{\frac{1}{s_1}} \leq C_1 \left\| (x_{i_1=1}^{(1)})^n \right\|_{w, q_1},$$

com $C_1 = C \cdot \prod_{k=2}^m \left\| (x_{i_k=1}^{(k)})^n \right\|_{w, q_k}$. Logo $T \in \Pi_{(\mathbf{s}; \mathbf{q})}^m(X_1, \dots, X_m; Y)$. ■

Além do próprio interesse na teoria dos operadores múltiplo somantes, resultados de inclusão e de coincidência têm fortes aplicações nas desigualdades de Hardy–Littlewood, por exemplo, como foi mostrado em [27], a desigualdade (2.4) de Dimant e Sevilla–Peris é uma consequência da desigualdade (2.3) de Praciano–Pereira. De fato, fazendo $p = 2m$ na desigualdade (2.3), obtemos que todo operador m -linear é $(2; (2m)^*)$ -somante (veja Teorema 2.1.6). Pelo Teorema de Inclusão (A.1 no apêndice), concluimos que todo operador m -linear é $(\frac{p}{p-m}; p^*)$ -somante, com $m < p \leq 2m$, e isso implica exatamente (veja Teorema 2.1.6) a desigualdade (2.4).

Como corolário do Teorema (de inclusão) 2.1.9, podemos provar a seguinte desigualdade crítica de Hardy–Littlewood:

Corolário 2.1.10 *Para todo $m \geq 2$ inteiro, temos*

$$\sup_{1 \leq i_1 \leq n} \left(\sum_{i_2=1}^n \left(\dots \left(\sum_{i_m=1}^n |T(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})|^{s_m} \right)^{\frac{s_{m-1}}{s_m}} \dots \right)^{\frac{s_2}{s_3}} \right)^{\frac{1}{s_2}} \leq 2^{\frac{m-1}{2}} \|T\|,$$

para toda forma m -linear $T : \ell_m^n \times \dots \times \ell_m^n \longrightarrow \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n , com

$$s_k = \frac{2m}{k-1}, \quad k = 2, \dots, m.$$

Demonstração. Pelo Observação 2.1.7 sabemos que toda forma m -linear contínua é múltiplo $(2; (2m)^*, \dots, (2m)^*)$ -somante com constante $2^{\frac{m-1}{2}}$. Sejam

$$\mathbf{p} = ((2m)^*, \dots, (2m)^*) \quad \text{e} \quad \mathbf{q} = (m^*, \dots, m^*).$$

Note que

$$\frac{1}{2} - \left| \frac{1}{\mathbf{p}} \right| + \left| \frac{1}{\mathbf{q}} \right| = 0.$$

Assim, pelo Teorema 2.1.9, concluimos que toda forma m -linear contínua é múltiplo $(\mathbf{s}; \mathbf{q})$ -somante, com

$$\frac{1}{s_k} - \left| \frac{1}{\mathbf{q}} \right|_{\geq k} = \frac{1}{2} - \left| \frac{1}{\mathbf{p}} \right|_{\geq k}.$$

Como, em ℓ_m^n , $\|(e_i)_{i=1}^n\|_{w,m^*} = 1$ (veja Proposição A.3 no apêndice), segue que

$$\sup_{1 \leq i_1 \leq n} \left(\sum_{i_2=1}^n \left(\dots \left(\sum_{i_m=1}^n |T(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})|^{s_m} \right)^{\frac{s_{m-1}}{s_m}} \dots \right)^{\frac{s_2}{s_3}} \right)^{\frac{1}{s_2}} \leq 2^{\frac{m-1}{2}} \|T\|,$$

para toda forma m -linear $T : \ell_m^n \times \dots \times \ell_m^n \rightarrow \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n , com $s_k = 2m/(k-1)$, para todo $k = 2, \dots, m$. ■

Se fixarmos uma entrada e , ao invés de trabalharmos com formas m -lineares, optarmos por formas $(m-1)$ -lineares, podemos usar o Teorema 2.1.8 para melhorar o corolário anterior. O resultado principal desta seção afirma que:

Teorema 2.1.11 *Para todo $m \geq 2$ inteiro, temos*

$$\sup_{1 \leq i_1 \leq n} \left(\sum_{i_2=1}^n \left(\dots \left(\sum_{i_m=1}^n |T(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})|^{s_m} \right)^{\frac{s_{m-1}}{s_m}} \dots \right)^{\frac{s_2}{s_3}} \right)^{\frac{1}{s_2}} \leq 2^{\frac{m-2}{2}} \|T\|, \quad (2.9)$$

para toda forma m -linear $T : \ell_m^n \times \dots \times \ell_m^n \rightarrow \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n , com

$$s_k = \frac{2m(m-1)}{mk - 2k + 2}, \quad k = 2, \dots, m.$$

Além disso, a norma do supremo não pode ser trocada por uma p -norma, com $p < \infty$, $s_2 = m$ é ótimo e, para $m > 2$, os expoentes ótimos s_k satisfazendo (2.9) são tais que

$$s_k \geq \frac{m}{k-1}, \quad k = 3, \dots, m.$$

Demonstração. Vamos fixar uma das variáveis (digamos a primeira) e trabalhar com as formas multilineares de $X_2 \times \dots \times X_m$ em $\mathbb{K}$. Da desigualdade de Hardy–Littlewood para formas $(m-1)$ -lineares, sabemos que, para qualquer vetor fixado $a_1 \in X_1$, $T(a_1, \cdot, \dots, \cdot)$ é múltiplo $(2; (2(m-1))^*, \dots, (2(m-1))^*)$ -somante (veja Observação 2.1.7). Então

$$\sup_{\|x_{i_1}^{(1)}\| \leq 1} \left(\sum_{i_2, \dots, i_m=1}^n |T(x_{i_1}^{(1)}, \dots, x_{i_m}^{(m)})|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \|T\| \prod_{k=2}^m \left\| \left(x_{i_k}^{(k)} \right)_{i_k=1}^n \right\|_{w, (2m-2)^*},$$

para toda forma m -linear contínua de $X_1 \times \dots \times X_m$ em $\mathbb{K}$ e

$$C = 2^{\frac{(m-1)-1}{2}}.$$

Fixemos a_1 em X_1 e consideremos a forma $(m-1)$ -linear

$$\bar{T} := T(a_1, \cdot, \dots, \cdot).$$

Sabemos que $\bar{T}$ é $(2; (2(m-1))^*, \dots, (2(m-1))^*)$ -somante e queremos um resultado do tipo $(\mathbf{t}; m^*, \dots, m^*)$ -somante para $\bar{T}$ (veja Teorema [2.1.6](#)). Como

$$\frac{1}{r} - \left| \frac{1}{\mathbf{p}} \right| + \left| \frac{1}{\mathbf{q}} \right| = \frac{1}{2} - \frac{m-1}{(2(m-1))^*} + \frac{m-1}{m^*} > 0,$$

podemos aplicar o Teorema [2.1.8](#) para a forma $\bar{T}$. Logo, $\bar{T}$ é múltiplo $(\mathbf{t}; m^*, \dots, m^*)$ -somante, com

$$\frac{1}{t_k} - \frac{(m-1) - k + 1}{m^*} = \frac{1}{2} - \frac{(m-1) - k + 1}{(2(m-1))^*},$$

para todo $k = 1, \dots, m-1$, ou seja,

$$t_k = \frac{2m(m-1)}{m + mk - 2k}.$$

Assim, concluímos que

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i_2=1}^n \left(\dots \left(\sum_{i_m=1}^n \left| \bar{T}(x_{i_2}^{(2)}, \dots, x_{i_m}^{(m)}) \right|^{t_{m-1}} \right)^{\frac{t_{m-2}}{t_{m-1}}} \dots \right)^{\frac{t_1}{t_2}} \right)^{\frac{1}{t_1}} \\ & \leq 2^{\frac{m-2}{2}} \|\bar{T}\| \prod_{k=2}^m \left\| \left(x_{i_k}^{(k)} \right)_{i_k=1}^n \right\|_{w, m^*}. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i_2=1}^n \left(\dots \left(\sum_{i_m=1}^n \left| T(a_1, x_{i_2}^{(2)}, \dots, x_{i_m}^{(m)}) \right|^{t_{m-1}} \right)^{\frac{t_{m-2}}{t_{m-1}}} \dots \right)^{\frac{t_1}{t_2}} \right)^{\frac{1}{t_1}} \\ & \leq 2^{\frac{m-2}{2}} \|T\| \|a_1\| \prod_{k=2}^m \left\| \left(x_{i_k}^{(k)} \right)_{i_k=1}^n \right\|_{w, m^*}, \end{aligned}$$

para todo a_1 fixado. Em outras palavras,

$$\begin{aligned} & \sup_{\|x_{i_1}^{(1)}\| \leq 1} \left(\sum_{i_2=1}^n \left(\dots \left(\sum_{i_m=1}^n \left| T(x_{i_1}^{(1)}, \dots, x_{i_m}^{(m)}) \right|^{s_m} \right)^{\frac{s_{m-1}}{s_m}} \dots \right)^{\frac{s_2}{s_3}} \right)^{\frac{1}{s_2}} \\ & \leq 2^{\frac{m-2}{2}} \|T\| \prod_{k=2}^m \left\| \left(x_{i_k}^{(k)} \right)_{i_k=1}^n \right\|_{w, m^*}, \end{aligned}$$

para

$$s_k = t_{k-1} = \frac{2m(m-1)}{mk - 2k + 2}$$

e toda forma m -linear de $X_1 \times \dots \times X_m$ em $\mathbb{K}$. E a prova está concluída, pois, em ℓ_m^n , $\|(e_i)_{i=1}^n\|_{w, m^*} = 1$ (Proposição [A.3](#) no apêndice). Vamos agora provar as estimativas

dos expoentes ótimos. Consideremos $T_{n,m} : \ell_m^n \times \cdots \times \ell_m^n \longrightarrow \mathbb{K}$ dada por

$$T_{n,m}(x^{(1)}, \dots, x^{(m)}) = \sum_{i=1}^n x_i^{(1)} \cdots x_i^{(m)}.$$

Note que

$$\|T_{n,m}\| = 1.$$

Assim, se existe C tal que

$$\left(\sum_{i_1=1}^n \left(\cdots \left(\sum_{i_m=1}^n |T_{n,m}(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})|^{s_m} \right)^{\frac{s_{m-1}}{s_m}} \cdots \right)^{\frac{s_1}{s_2}} \right)^{\frac{1}{s_1}} \leq C \|T_{n,m}\|,$$

então

$$n^{\frac{1}{s_1}} \leq C$$

e, como n é arbitrário, isso significa que s_1 não pode ser um número real positivo. Logo

$$\sup_{1 \leq i_1 \leq n} \left(\sum_{i_2=1}^n \left(\cdots \left(\sum_{i_m=1}^n |T(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})|^{s_m} \right)^{\frac{s_{m-1}}{s_m}} \cdots \right)^{\frac{s_2}{s_3}} \right)^{\frac{1}{s_2}} \leq C \|T\|, \quad (2.10)$$

para toda forma m -linear $T : \ell_m^n \times \cdots \times \ell_m^n \longrightarrow \mathbb{K}$. Vamos agora estimar os outros expoentes. Consideremos

$$T_{n,m-1}(x^{(1)}, \dots, x^{(m)}) = x_1^{(1)} \sum_{i=1}^n x_i^{(2)} \cdots x_i^{(m)}.$$

Note que

$$\|T_{n,m-1}\| = n^{1/m}.$$

Substituindo $T_{n,m-1}$ em (2.10), temos

$$n^{1/s_2} \leq C n^{1/m},$$

para todo n e, portanto,

$$s_2 \geq m.$$

Para lidar com s_3 , consideramos

$$T_{n,m-2}(x^{(1)}, \dots, x^{(m)}) = x_1^{(1)} x_1^{(2)} \left(\sum_{i=1}^n x_i^{(3)} \cdots x_i^{(m)} \right).$$

Uma vez que

$$\|T_{n,m-2}\| = n^{\frac{2}{m}},$$

substituindo $T_{n,m-2}$ em (2.10), obtemos

$$n^{1/s_3} \leq Cn^{2/m},$$

para todo n , e assim

$$s_3 \geq \frac{m}{2}.$$

Seguindo essa linha, mostra-se que

$$s_k \geq \frac{m}{k-1},$$

para todo $k = 3, \dots, m$. ■

Como consequência, podemos dar uma prova alternativa quando $p = q = 2$ do caso crítico apresentado em [72, Proposition 6.3]:

Corolário 2.1.12 *Sejam $a, b \in (0, \infty]$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) *Existe uma constante C (não dependendo de n) tal que*

$$\left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n |T(e_i, e_j)|^a \right)^{\frac{b}{a}} \right)^{\frac{1}{b}} \leq C \|T\|,$$

para toda forma bilinear $T: \ell_2^n \times \ell_2^n \longrightarrow \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n .

(b) *Os expoentes a, b satisfazem*

$$b = \infty \text{ e } a \geq 2.$$

Além disso, a constante ótima é $C = 1$.

2.2 Desigualdades supercríticas de Hardy–Littlewood

Na seção anterior, apresentamos [64] o primeiro trabalho que abordou desigualdades de Hardy–Littlewood para formas m -lineares $T: \ell_{p_1}^n \times \dots \times \ell_{p_m}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ definidas em espaços do tipo α , isto é, quando

$$\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_m} \geq 1. \tag{2.11}$$

Como vimos, foi mostrado que:

Teorema 2.2.1 (veja [64, Theorem 1]) Para todo $m \geq 2$ inteiro, temos

$$\sup_{1 \leq i_1 \leq n} \left(\sum_{i_2=1}^n \left(\cdots \left(\sum_{i_m=1}^n |T(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})|^{s_m} \right)^{\frac{s_{m-1}}{s_m}} \cdots \right)^{\frac{s_2}{s_3}} \right)^{\frac{1}{s_2}} \leq 2^{\frac{m-2}{2}} \|T\|, \quad (2.12)$$

para toda forma m -linear $T : \ell_m^n \times \cdots \times \ell_m^n \longrightarrow \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n , com

$$s_k = \frac{2m(m-1)}{mk - 2k + 2}, \quad k = 2, \dots, m.$$

Além disso, a norma do supremo não pode ser trocada por uma p -norma, com $p < \infty$, $s_2 = m$ é ótimo e, quando $m > 2$, os expoentes ótimos s_k satisfazendo (2.12) são tais que

$$s_k \geq \frac{m}{k-1}, \quad k = 3, \dots, m.$$

O Teorema 2.2.1 é chamado de crítico porque trata de espaços satisfazendo uma condição especial de (2.11). Esse caso geral, como mencionado no início do capítulo, será chamado de supercrítico. Nesta seção, apresentaremos desigualdades de Hardy–Littlewood supercríticas (caso supercrítico). Iniciaremos provando dois lemas simples, embora muito úteis, que serão usados no restante do capítulo.

Para $S = \{s_1, \dots, s_k\} \subset \{1, \dots, m\}$, definimos

$$\widehat{S} := \{1, \dots, m\} \setminus S$$

e a notação $\mathbf{i}_S$ significará $(i_{s_1}, \dots, i_{s_k})$. Se $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_m) \in (0, \infty]^m$ e $S = \{s_1, \dots, s_k\}$, definimos

$$\left| \frac{1}{\mathbf{p}} \right|_S := \frac{1}{p_{s_1}} + \cdots + \frac{1}{p_{s_k}}.$$

Nesta seção, a frase “nenhum supremo pode ser melhorado” significa que nenhuma das normas do supremo pode ser trocada por uma p -norma, com $p < \infty$, sem que a constante dependa de n .

Os lemas afirmam que:

Lema 2.2.2 Sejam $k \in \{1, \dots, m\}$ e $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_m) \in [1, \infty]^m$. Se existe uma constante $C \geq 1$ (não dependendo de n) tal que

$$\left(\sum_{i_{s_1}=1}^n \left(\sum_{i_{s_2}=1}^n \cdots \left(\sum_{i_{s_m}=1}^n |T(e_{i_{s_1}}, \dots, e_{i_{s_m}})|^{q_m} \right)^{\frac{q_{m-1}}{q_m}} \cdots \right)^{\frac{q_1}{q_2}} \right)^{\frac{1}{q_1}} \leq C \|T\|,$$

para toda forma m -linear $T: \ell_{p_{s_1}}^n \times \cdots \times \ell_{p_{s_m}}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n , então

$$\left(\sum_{i_{s_{k+1}}=1}^n \left(\sum_{i_{s_{k+2}}=1}^n \cdots \left(\sum_{i_{s_m}=1}^n |A(e_{i_{s_{k+1}}}, \dots, e_{i_{s_m}})|^{q_m} \right)^{\frac{q_m-1}{q_m}} \cdots \right)^{\frac{q_{k+1}}{q_{k+2}}} \right)^{\frac{1}{q_{k+1}}} \leq C \|A\|,$$

para toda forma $(m-k)$ -linear $A: \ell_{p_{s_{k+1}}}^n \times \cdots \times \ell_{p_{s_m}}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n .

Demonstração. Para simplificar a notação, podemos supor $(s_1, \dots, s_m) = (1, \dots, m)$.

Por hipótese, existe uma constante $C \geq 1$ tal que

$$\left(\sum_{i_1=1}^n \left(\sum_{i_2=1}^n \cdots \left(\sum_{i_m=1}^n |T(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})|^{q_m} \right)^{\frac{q_m-1}{q_m}} \cdots \right)^{\frac{q_1}{q_2}} \right)^{\frac{1}{q_1}} \leq C \|T\|,$$

para toda forma m -linear $T: \ell_{p_1}^n \times \cdots \times \ell_{p_m}^n \longrightarrow \mathbb{K}$. Dada uma forma $(m-k)$ -linear

$A: \ell_{p_{k+1}}^n \times \cdots \times \ell_{p_m}^n \longrightarrow \mathbb{K}$, definimos a forma m -linear $T: \ell_{p_1}^n \times \cdots \times \ell_{p_m}^n \longrightarrow \mathbb{K}$,

$$T(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)}) = x_1^{(1)} \cdots x_1^{(k)} A(x^{(k+1)}, x^{(k+2)}, \dots, x^{(m)}).$$

É fácil provar que $\|T\| = \|A\|$; então, pela hipótese acima, existe uma constante $C \geq 1$ tal que

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i_{k+1}=1}^n \left(\sum_{i_{k+2}=1}^n \cdots \left(\sum_{i_m=1}^n |A(e_{i_{k+1}}, \dots, e_{i_m})|^{q_m} \right)^{\frac{q_m-1}{q_m}} \cdots \right)^{\frac{q_{k+1}}{q_{k+2}}} \right)^{\frac{1}{q_{k+1}}} \\ &= \sup_{\mathbf{i}_{\{k+1, \dots, m\}}} \left(\sum_{i_{k+1}=1}^n \left(\sum_{i_{k+2}=1}^n \cdots \left(\sum_{i_m=1}^n |e_1^{(1)} \cdots e_1^{(k)} A(e_{i_{k+1}}, \dots, e_{i_m})|^{q_m} \right)^{\frac{q_m-1}{q_m}} \cdots \right)^{\frac{q_{k+1}}{q_{k+2}}} \right)^{\frac{1}{q_{k+1}}} \\ &= \sup_{\mathbf{i}_{\{k+1, \dots, m\}}} \left(\sum_{i_{k+1}=1}^n \left(\sum_{i_{k+2}=1}^n \cdots \left(\sum_{i_m=1}^n |T(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})|^{q_m} \right)^{\frac{q_m-1}{q_m}} \cdots \right)^{\frac{q_{k+1}}{q_{k+2}}} \right)^{\frac{1}{q_{k+1}}} \\ &\leq \left(\sum_{i_1=1}^n \left(\sum_{i_2=1}^n \cdots \left(\sum_{i_m=1}^n |T(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})|^{q_m} \right)^{\frac{q_m-1}{q_m}} \cdots \right)^{\frac{q_1}{q_2}} \right)^{\frac{1}{q_1}} \\ &\leq C \|T\| \end{aligned}$$

$$= C \|A\|.$$

■

Lema 2.2.3 *Sejam $k \in \{1, \dots, m\}$, $S = \{s_1, \dots, s_k\} \subset \{1, \dots, m\}$ e $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_m) \in [1, \infty]^m$. Se existe uma constante $C \geq 1$ (não dependendo de n) tal que*

$$\left(\sum_{i_{s_1}=1}^n \left(\sum_{i_{s_2}=1}^n \cdots \left(\sum_{i_{s_k}=1}^n |A(e_{i_{s_1}}, \dots, e_{i_{s_k}})|^{q_k} \right)^{\frac{q_k-1}{q_k}} \cdots \right)^{\frac{q_1}{q_2}} \right)^{\frac{1}{q_1}} \leq C \|A\|,$$

para toda forma k -linear $A: \ell_{p_{s_1}}^n \times \cdots \times \ell_{p_{s_k}}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n , então

$$\sup_{\mathbf{i}_{\hat{S}}} \left(\sum_{i_{s_1}=1}^n \left(\sum_{i_{s_2}=1}^n \cdots \left(\sum_{i_{s_k}=1}^n |T(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})|^{q_k} \right)^{\frac{q_k-1}{q_k}} \cdots \right)^{\frac{q_1}{q_2}} \right)^{\frac{1}{q_1}} \leq C \|T\|,$$

para toda forma m -linear $T: \ell_{p_1}^n \times \cdots \times \ell_{p_m}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n . Além disso, se

$$\left| \frac{1}{\mathbf{p}} \right|_S < 1$$

e, para todo $j \in \widehat{S}$,

$$\left| \frac{1}{\mathbf{p}} \right|_{S \cup \{j\}} \geq 1,$$

nenhum supremo pode ser melhorado.

Demonstração. Para simplificar a notação, podemos supor $(s_1, \dots, s_k) = (1, \dots, k)$.

Vamos fixar as últimas $m - k$ variáveis e trabalhar com a forma k -linear $A: \ell_{p_1}^n \times \cdots \times \ell_{p_k}^n \longrightarrow \mathbb{K}$. Como

$$\left(\sum_{i_1=1}^n \left(\sum_{i_2=1}^n \cdots \left(\sum_{i_k=1}^n |A(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})|^{q_k} \right)^{\frac{q_k-1}{q_k}} \cdots \right)^{\frac{q_1}{q_2}} \right)^{\frac{1}{q_1}} \leq C \|A\|$$

para toda forma k -linear $A: \ell_{p_1}^n \times \cdots \times \ell_{p_k}^n \longrightarrow \mathbb{K}$, sabemos que existe uma constante $C \geq 1$ tal que, para quaisquer vetores fixados $e_{i_{k+1}}, \dots, e_{i_m}$, temos

$$\left(\sum_{i_{s_1}=1}^n \left(\sum_{i_{s_2}=1}^n \cdots \left(\sum_{i_{s_k}=1}^n |T(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})|^{q_k} \right)^{\frac{q_k-1}{q_k}} \cdots \right)^{\frac{q_1}{q_2}} \right)^{\frac{1}{q_1}}$$

$$\leq C \|T(\cdot, \dots, \cdot, e_{i_{k+1}}, \dots, e_{i_m})\|,$$

para toda forma m -linear $T: \ell_{p_1}^n \times \dots \times \ell_{p_m}^n \longrightarrow \mathbb{K}$. Então existe uma constante $C \geq 1$ tal que

$$\begin{aligned} & \sup_{\mathbf{i}_{\widehat{S}}} \left(\sum_{i_{s_1}=1}^n \left(\sum_{i_{s_2}=1}^n \cdots \left(\sum_{i_{s_k}=1}^n |T(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})|^{q_k} \right)^{\frac{q_{k-1}}{q_k}} \cdots \right)^{\frac{q_1}{q_2}} \right)^{\frac{1}{q_1}} \\ & \leq C \sup_{\mathbf{i}_{\widehat{S}}} \|T(\cdot, \dots, \cdot, e_{i_{k+1}}, \dots, e_{i_m})\| \\ & \leq C \|T\|, \end{aligned}$$

para toda forma m -linear $T: \ell_{p_1}^n \times \dots \times \ell_{p_m}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n .

Agora vamos provar que nenhuma norma do supremo pode ser trocada por uma r -norma, com $r < \infty$. De fato, nesse caso temos $m - k$ supremos, dos quais nenhum pode ser melhorado. Caso contrário, haveria $j \in \widehat{S}$, $r \in (0, \infty)$ e $C \geq 1$ tais que

$$\sup_{\mathbf{i}_{\widehat{S} \cup \{j\}}} \left(\sum_{i_j=1}^n \left(\sum_{i_{s_1}=1}^n \left(\sum_{i_{s_2}=1}^n \cdots \left(\sum_{i_{s_k}=1}^n |T(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})|^{q_k} \right)^{\frac{q_{k-1}}{q_k}} \cdots \right)^{\frac{q_1}{q_2}} \right)^{\frac{r}{q_1}} \right)^{\frac{1}{r}} \leq C \|T\|,$$

para toda forma m -linear $T: \ell_{p_1}^n \times \dots \times \ell_{p_m}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n . Usando o Lema [2.2.2](#), isso implicaria a existência de uma constante $C \geq 1$ tal que

$$\left(\sum_{i_j=1}^n \left(\sum_{i_{s_1}=1}^n \left(\sum_{i_{s_2}=1}^n \cdots \left(\sum_{i_{s_k}=1}^n |A(e_{i_j}, e_{i_{s_1}}, \dots, e_{i_{s_k}})|^{q_k} \right)^{\frac{q_{k-1}}{q_k}} \cdots \right)^{\frac{q_1}{q_2}} \right)^{\frac{r}{q_1}} \right)^{\frac{1}{r}} \leq C \|A\|,$$

para toda forma $(k+1)$ -linear $A: \ell_{p_j}^n \times \ell_{p_{s_1}}^n \times \dots \times \ell_{p_{s_k}}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n .

Considere $q = \max\{q_1, \dots, q_k, r\}$, pela monotonicidade da norma ℓ_p , concluimos que existe uma constante $C \geq 1$ tal que

$$\left(\sum_{i_j, i_{s_1}, \dots, i_{s_k}=1}^n |A(e_{i_j}, e_{i_{s_1}}, \dots, e_{i_{s_k}})|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \|A\|,$$

para toda forma $(k+1)$ -linear $A: \ell_{p_j}^n \times \ell_{p_{s_1}}^n \times \dots \times \ell_{p_{s_k}}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n . Mas isso é impossível devido a hipótese $\left| \frac{1}{\mathbf{p}} \right|_{\widehat{S} \cup \{j\}} \geq 1$. ■

Como uma primeira ilustração natural da utilidade dos lemas acima, apresentaremos uma prova alternativa de [72, Proposition 6.3]: se $q \in (1, \infty]$, sabemos que

$$\left(\sum_{j=1}^n |T(e_j)|^a \right)^{\frac{1}{a}} \leq \|T\|$$

para toda forma linear $T: \ell_q^n \rightarrow \mathbb{K}$ se, e somente se, $a \geq \frac{q}{q-1}$. Assim, para $a, b \in (0, \infty]$ e $p, q \in (1, \infty]$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$, aplicamos o Lema 2.2.2 e o Lema 2.2.3 para obter:

Proposição 2.2.4 (veja [72, Proposition 6.3]) *Sejam $a, b \in (0, \infty]$ e $p, q \in (1, \infty]$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$. Temos*

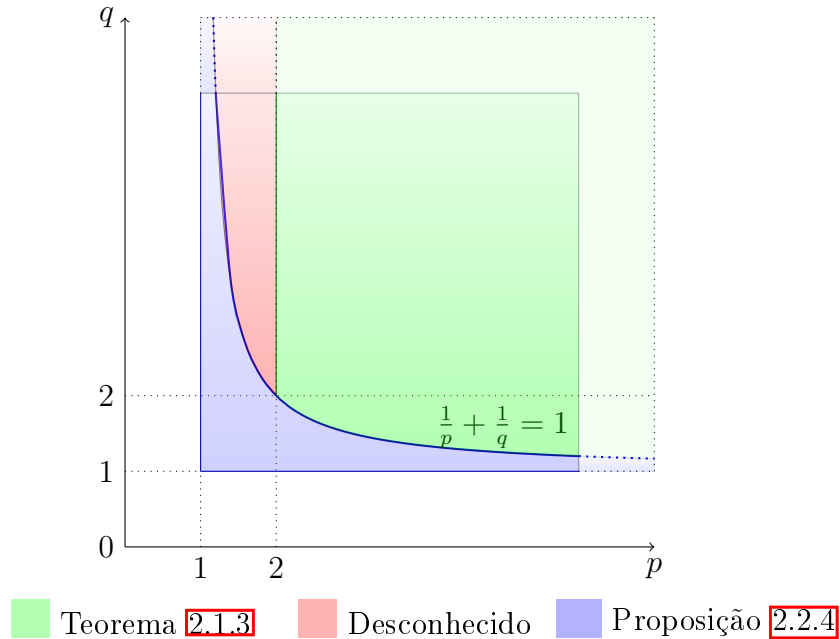
$$\left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n |T(e_i, e_j)|^a \right)^{\frac{b}{a}} \right)^{\frac{1}{b}} \leq \|T\|$$

para toda forma bilinear $T: \ell_p^n \times \ell_q^n \rightarrow \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n se, e somente se, os expoentes a, b satisfazem

$$b = \infty \quad e \quad a \geq \frac{q}{q-1}.$$

A Figura 2.1 abaixo elucida as informações até então conhecidas sobre as condições ótimas para os expoentes das desigualdades de Hardy–Littlewood para formas $T: \ell_p^n \times \ell_q^n \rightarrow \mathbb{K}$ de acordo com os valores de p e q .

Figura 2.1: Caso bilinear.



Fonte: Autoria própria.

2.2.1 O caso trilinear

Usando o Teorema 2.1.11 para formas 3-lineares, obtemos

$$\sup_{1 \leq i_1 \leq n} \left(\sum_{i_2=1}^n \left(\sum_{i_3=1}^n |T(e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_3})|^{q_3} \right)^{\frac{q_2}{q_3}} \right)^{\frac{1}{q_2}} \leq \sqrt{2} \|T\|, \quad (2.13)$$

para toda forma 3-linear $T : \ell_3^n \times \ell_3^n \times \ell_3^n \longrightarrow \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n , com $q_2 = 3$ e $q_3 = 12/5$. Além disso, $q_1 = \infty$ e $q_2 = 3$ são ótimos e o expoente ótimo q_3 satisfazendo (2.13) é tal que $q_3 \geq 3/2$. Nesta subseção, apresentaremos as condições ótimas para os expoentes nesse caso.

Como consequência do Lema 2.2.2 e do Lema 2.2.3, provaremos a seguir uma caracterização das desigualdades de Hardy–Littlewood para formas 3-lineares em um caso específico de espaços do tipo α .

Proposição 2.2.5 *Sejam $q_1, q_2, q_3 \in (0, \infty]$, $p, r \in (1, \infty]$ e $q \in [2, \infty]$ tais que $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \geq 1$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) *Existe uma constante $C \geq 1$ (não dependendo de n) tal que*

$$\left(\sum_{i_1=1}^n \left(\sum_{i_2=1}^n \left(\sum_{i_3=1}^n |T(e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_3})|^{q_3} \right)^{\frac{q_2}{q_3}} \right)^{\frac{q_1}{q_2}} \right)^{\frac{1}{q_1}} \leq C \|T\|,$$

para toda forma 3-linear $T : \ell_p^n \times \ell_q^n \times \ell_r^n \longrightarrow \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n .

(b) *Os expoentes q_1, q_2, q_3 satisfazem*

$$q_1 = \infty, \quad q_2 \geq \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{r}\right)}, \quad q_3 \geq \frac{r}{r-1}$$

e

$$\frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} \leq \frac{3}{2} - \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{r}\right).$$

Demonstração. Como $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$, pelo Teorema 2.1.3, existe uma constante $C \geq 1$ tal que

$$\left(\sum_{j_2=1}^n \left(\sum_{j_3=1}^n |A(e_{j_2}, e_{j_3})|^{q_3} \right)^{\frac{q_2}{q_3}} \right)^{\frac{1}{q_2}} \leq C \|A\|,$$

para toda forma bilinear $A : \ell_q^n \times \ell_r^n \longrightarrow \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n , se, e somente se,

$$q_2 \geq \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{r}\right)}, \quad q_3 \geq \frac{r}{r-1}$$

e

$$\frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} \leq \frac{3}{2} - \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{r} \right).$$

Combinando essa equivalência com o fato de que $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \geq 1$, podemos usar o Lema 2.2.2 e o Lema 2.2.3 para concluir a prova. ■

Como corolário da proposição anterior, obtemos:

Corolário 2.2.6 *Seja $2 < p \leq 3$. Existe uma constante $C \geq 1$ (não dependendo de n) tal que*

$$\left(\sum_{i_1=1}^n \left(\sum_{i_2=1}^n \left(\sum_{i_3=1}^n |T(e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_3})|^{q_3} \right)^{\frac{q_2}{q_3}} \right)^{\frac{q_1}{q_2}} \right)^{\frac{1}{q_1}} \leq C \|T\|,$$

para toda forma 3-linear $T : \ell_p^n \times \ell_p^n \times \ell_p^n \rightarrow \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n , se, e somente se, $q_1 = \infty$, $q_2 \geq \frac{p}{p-2}$, $q_3 \geq \frac{p}{p-1}$ e $\frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} \leq \frac{3}{2} - \frac{2}{p}$.

Observação 2.2.7 *Quando escolhemos $p = 3$ no Corolário 2.2.6, obtemos a caracterização completa do Teorema 2.1.11 crítico para formas 3-lineares.*

As condições ótimas dos expoentes do corolário anterior significam que se considerarmos valores q_1, q_2 ou q_3 que não as satisfazem, com certeza a constante dependerá de n . A seguir, analisaremos as constantes do Corolário 2.2.6 nesse contexto, ou seja, quando consideramos expoentes não admissíveis. A figura 2.2 facilitará o entendimento da prova.

Proposição 2.2.8 *Sejam r_1, r_2, r_3 expoentes não admissíveis do Corolário 2.2.6. E considere as regiões indicadas na figura 2.2 de acordo com os valores de r_2 e r_3 : R_1 (vermelho), R_2 (laranja), R_3 (amarelo) e R_4 (verde). Então:*

- (i) *Se (r_2, r_3) está em R_1 ou R_2 , então existe uma constante $C \geq 1$ (não dependendo de n e nem de n_1) tal que*

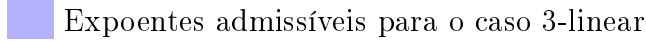
$$\left(\sum_{i=1}^{n_1} \left(\sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n |T(e_i, e_j, e_k)|^{r_3} \right)^{\frac{r_2}{r_3}} \right)^{\frac{r_1}{r_2}} \right)^{\frac{1}{r_1}} \leq C \cdot n_1^{\frac{1}{r_1}} \cdot n^{\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} - (\frac{3}{2} - \frac{2}{p})} \|T\|,$$

para toda forma 3-linear $T : \ell_p^{n_1} \times \ell_p^n \times \ell_p^n \rightarrow \mathbb{K}$ e quaisquer inteiros positivos n e n_1 . Além disso, o expoente de n é ótimo e, se $n_1 \leq n$, o expoente de n_1 é ótimo.

- (ii) *Se (r_2, r_3) está em R_3 , então existe uma constante $C \geq 1$ (não dependendo de n e nem de n_1) tal que*

$$\left(\sum_{i=1}^{n_1} \left(\sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n |T(e_i, e_j, e_k)|^{r_3} \right)^{\frac{r_2}{r_3}} \right)^{\frac{r_1}{r_2}} \right)^{\frac{1}{r_1}} \leq C \cdot n_1^{\frac{1}{r_1}} \cdot n^{\frac{1}{r_3} - \frac{(p-1)}{p}} \|T\|,$$

Figura 2.2: Caso 3-linear crítico.



Fonte: Autoria própria.

para toda forma 3-linear $T : \ell_p^{n_1} \times \ell_p^n \times \ell_p^n \longrightarrow \mathbb{K}$ e quaisquer inteiros positivos n e n_1 . Além disso, o expoente de n é ótimo e, se $n_1 \leq n$, o expoente de n_1 é ótimo.

(iii) Se (r_2, r_3) está em R_4 , então existe uma constante $C \geq 1$ (não dependendo de n e nem de n_1) tal que

$$\left(\sum_{i=1}^{n_1} \left(\sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n |T(e_i, e_j, e_k)|^{r_3} \right)^{\frac{r_2}{r_3}} \right)^{\frac{r_1}{r_2}} \right)^{\frac{1}{r_1}} \leq C \cdot n_1^{\frac{1}{r_1}} n^{\frac{1}{r_2} - \frac{(p-2)}{p}} \|T\|,$$

para toda forma 3-linear $T : \ell_p^{n_1} \times \ell_p^n \times \ell_p^n \longrightarrow \mathbb{K}$ e quaisquer inteiros positivos n e n_1 . Além disso, o expoente de n é ótimo e, se $n_1 \leq n$, o expoente de n_1 é ótimo.

Demonstração. (i) Assuma que (r_2, r_3) está na região R_1 . Seja $\delta > 0$ tal que

$$\frac{1}{r_3} + \frac{1}{\delta} = \frac{3}{2} - \frac{2}{p}.$$

Pela desigualdade de Hölder para somas mistas (Teorema A.3 no apêndice), se $\frac{1}{s} + \frac{1}{\delta} = \frac{1}{r_2}$, então

$$\left(\sum_{i=1}^{n_1} \left(\sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n |T(e_i, e_j, e_k)|^{r_3} \right)^{\frac{r_2}{r_3}} \right)^{\frac{r_1}{r_2}} \right)^{\frac{1}{r_1}}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sup_i \left(\sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n |T(e_i, e_j, e_k)|^{r_3} \right)^{\frac{\delta}{r_3}} \right)^{\frac{1}{\delta}} \times \left(\sum_{i=1}^{n_1} \left(\sum_{j=1}^n \left(\sup_k |1| \right)^s \right)^{\frac{r_1}{s}} \right)^{\frac{1}{r_1}} \\
&\leq C \|T\| \cdot n_1^{\frac{1}{r_1}} \cdot n^{\frac{1}{s}} \\
&= C \|T\| \cdot n_1^{\frac{1}{r_1}} \cdot n^{\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} - \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{p}\right)}.
\end{aligned}$$

Seja $A_n : \ell_p^n \times \ell_p^n \longrightarrow \mathbb{K}$ a forma dada pela desigualdade de Kahane–Salem–Zygmund do Teorema [A.2](#) no apêndice e defina $S_n : \ell_p^{n_1} \times \ell_p^n \times \ell_p^n \longrightarrow \mathbb{K}$ por $S_n(x, y, z) = x_1 \cdot A_n(y, z)$. Note que $\|S_n\| = \|A_n\|$. Sejam $t, t_1 > 0$ tais que

$$\left(\sum_{i=1}^{n_1} \left(\sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n |T(e_i, e_j, e_k)|^{r_3} \right)^{\frac{r_2}{r_3}} \right)^{\frac{r_1}{r_2}} \right)^{\frac{1}{r_1}} \leq C \|T\| \cdot n^t \cdot n_1^{t_1}, \quad (2.14)$$

para toda forma 3-linear $T : \ell_p^{n_1} \times \ell_p^n \times \ell_p^n \longrightarrow \mathbb{K}$, todo inteiro positivo n e todo inteiro positivo n_1 . Substituindo S_n em [\(2.14\)](#), obtemos

$$n^{\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}} \leq C n^{\frac{3}{2} - \frac{2}{p}} \cdot n^t \cdot n_1^{t_1}.$$

Como n é arbitrário, concluímos que $t \geq \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} - \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{p}\right)$. Para a otimalidade de t_1 , vamos definir a forma $T_{n_1} : \ell_p^{n_1} \times \ell_p^n \times \ell_p^n \longrightarrow \mathbb{K}$, dada por

$$T_{n_1}(x, y, z) = \sum_{j=1}^{n_1} x_j y_j z_j.$$

Observe que $\|T_{n_1}\| \leq 1$. Substituindo a forma T_{n_1} na desigualdade [\(2.14\)](#), obtemos $n_1^{\frac{1}{r_1}} \leq C \cdot n^t \cdot n_1^{t_1}$, para todo n_1 . Logo $t_1 \geq \frac{1}{r_1}$.

Agora, vamos considerar que (r_2, r_3) está na região R_2 . Sejam $s_1, s_2 > 0$ tais que

$$\frac{1}{r_3} = \frac{1}{\frac{p}{p-1}} + \frac{1}{s_1} \quad \text{e} \quad \frac{1}{r_2} = \frac{1}{\frac{2p}{p-2}} + \frac{1}{s_2}.$$

Usando mais uma vez a desigualdade de Hölder para somas mistas (Teorema [A.3](#) no apêndice), temos

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i=1}^{n_1} \left(\sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n |T(e_i, e_j, e_k)|^{r_3} \right)^{\frac{r_2}{r_3}} \right)^{\frac{r_1}{r_2}} \right)^{\frac{1}{r_1}} \\
&\leq \sup_i \left(\sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n |T(e_i, e_j, e_k)|^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{\frac{2p}{p-2}}{\frac{p}{p-1}}} \right)^{\frac{1}{\frac{2p}{p-2}}} \times \left(\sum_{i=1}^{n_1} \left(\sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n |1|^{s_1} \right)^{\frac{s_2}{s_1}} \right)^{\frac{r_1}{s_2}} \right)^{\frac{1}{r_1}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C\|T\| \cdot n_1^{\frac{1}{r_1}} \cdot n^{\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2}} \\
&= C\|T\| \cdot n_1^{\frac{1}{r_1}} \cdot n^{\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} - \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{p}\right)}.
\end{aligned}$$

Para mostrar a otimalidade dos expoentes é só repetir o que fizemos no caso de (r_2, r_3) pertencer a região R_1 .

(ii) Pela desigualdade de Hölder para somas mistas (Teorema [A.3](#) no apêndice), se $\frac{1}{\frac{p}{p-1}} + \frac{1}{\delta} = \frac{1}{r_3}$, então

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i=1}^{n_1} \left(\sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n |T(e_i, e_j, e_k)|^{r_3} \right)^{\frac{r_2}{r_3}} \right)^{\frac{r_1}{r_2}} \right)^{\frac{1}{r_1}} \\
&\leq \sup_i \left(\sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n |T(e_i, e_j, e_k)|^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{r_2}{p-1}} \right)^{\frac{1}{r_2}} \times \left(\sum_{i=1}^{n_1} \left(\sup_j \left(\sum_{k=1}^n |T(e_i, e_j, e_k)|^\delta \right)^{\frac{1}{\delta}} \right)^{r_1} \right)^{\frac{1}{r_1}} \\
&\leq C\|T\| \cdot n_1^{\frac{1}{r_1}} \cdot n^{\frac{1}{\delta}} \\
&= C\|T\| \cdot n_1^{\frac{1}{r_1}} \cdot n^{\frac{1}{r_3} - \frac{(p-1)}{p}}.
\end{aligned}$$

Considere a forma $A_n : \ell_p^{n_1} \times \ell_p^n \times \ell_p^n \longrightarrow \mathbb{K}$ dada por

$$A_n(x, y, z) = x_1 y_1 \sum_{j=1}^n z_j.$$

Note que $\|A_n\| = n^{\frac{p-1}{p}}$. Substituindo A_n em [\(2.14\)](#), obtemos

$$n^{\frac{1}{r_3}} \leq C n^{\frac{p-1}{p}} \cdot n^t \cdot n_1^{t_1}.$$

Portanto, como vale para todo $n, t \geq \frac{1}{r_3} - \frac{(p-1)}{p}$. Assim como no caso anterior, mostra-se a otimalidade do expoente de n_1 considerando a forma

$$T_{n_1}(x, y, z) = \sum_{j=1}^{n_1} x_j y_j z_j.$$

(iii) Novamente, pela desigualdade de Hölder, dado $\delta > 0$ tal que $\frac{1}{\frac{p}{p-2}} + \frac{1}{\delta} = \frac{1}{r_2}$, temos

$$\left(\sum_{i=1}^{n_1} \left(\sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n |T(e_i, e_j, e_k)|^{r_3} \right)^{\frac{r_2}{r_3}} \right)^{\frac{r_1}{r_2}} \right)^{\frac{1}{r_1}}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sup_i \left(\sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n |T(e_i, e_j, e_k)|^{r_3} \right)^{\frac{p}{p-2}} \right)^{\frac{1}{p-2}} \times \left(\sum_{i=1}^{n_1} \left(\sum_{j=1}^n \left(\sup_k |1| \right)^\delta \right)^{\frac{r_1}{\delta}} \right)^{\frac{1}{r_1}} \\
&\leq C \|T\| \cdot n_1^{\frac{1}{r_1}} \cdot n^{\frac{1}{\delta}} \\
&= C \|T\| \cdot n_1^{\frac{1}{r_1}} \cdot n^{\frac{1}{r_2} - \frac{1}{3}}.
\end{aligned}$$

Para provar que o expoente de n é ótimo, considere a forma dada por

$$A_n(x, y, z) = x_1 \sum_{j=1}^n y_j z_j.$$

Note que $\|A_n\| = n^{\frac{(p-2)}{p}}$. Substituindo A_n em (2.14), obtemos

$$n^{\frac{1}{r_2}} \leq C n^{\frac{p-2}{p}} \cdot n^t \cdot n_1^{t_1},$$

ou seja, $t \geq \frac{1}{r_2} - \frac{p-2}{p}$. A prova da otimalidade do expoente de n_1 é igual aos casos anteriores. ■

2.2.2 O caso m -linear

Agora usaremos os Lemas 2.2.2 e 2.2.3 para obter versões de desigualdades de Hardy–Littlewood para formas m -lineares no contexto supercrítico. Nosso principal resultado desta seção é o próximo teorema.

Teorema 2.2.9 *Sejam $m \geq 2$ um inteiro, $p \in (1, 2m]$, $k := \min\{x \in \{0, 1, \dots, m-1\} : p > m - x\}$ e $A = \{i \in \{1, \dots, m-1\} : i \leq k\}$. Então existe uma constante $C \geq 1$ (não dependendo de n) tal que*

$$\sup_{j_i, i \in A} \left(\sum_{j_{k+1}, \dots, j_m=1}^n |T(e_{j_1}, \dots, e_{j_m})|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \|T\|,$$

para toda forma m -linear $T : \ell_p^n \times \dots \times \ell_p^n \longrightarrow \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n , se, e somente se,

$$q \geq \frac{p}{p - (m - k)}.$$

Além disso, nenhum supremo pode ser melhorado.

Demonstração. O caso $k = 0$ é exatamente a desigualdade de Dimant e Sevilla–Peris (2.4), então podemos assumir $k \geq 1$. Como $p \in (m - k, m - k + 1]$, temos

$$\frac{1}{m - k + 1} \leq \frac{1}{p} < \frac{1}{m - k}$$

e, portanto,

$$\frac{m-k}{m-k+1} \leq \frac{m-k}{p} < 1.$$

Por outro lado

$$1 \leq \frac{m-k+1}{p}.$$

Por (2.4), existe uma constante $C \geq 1$ tal que

$$\left(\sum_{j_{k+1}, \dots, j_m=1}^n |T(e_{j_{k+1}}, \dots, e_{j_m})|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \|T\|,$$

para toda forma $(m-k)$ -linear $T: \ell_p^n \times \dots \times \ell_p^n \rightarrow \mathbb{K}$ e para todo inteiro positivo n , se, e somente se,

$$q \geq \frac{p}{p-(m-k)}.$$

Aplicando essa equivalência e o Lema 2.2.3 com $S = \{k+1, k+2, \dots, m\} \subset \{1, \dots, m\}$, obtemos que se

$$q \geq \frac{p}{p-(m-k)},$$

então

$$\sup_{j_1, \dots, j_k} \left(\sum_{j_{k+1}, \dots, j_m=1}^n |T(e_{j_1}, \dots, e_{j_m})|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \|T\|.$$

Reciprocamente, usando o Lema 2.2.2, concluímos que se vale a desigualdade

$$\sup_{j_1, \dots, j_k} \left(\sum_{j_{k+1}, \dots, j_m=1}^n |T(e_{j_1}, \dots, e_{j_m})|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \|T\|,$$

então nenhum supremo pode ser melhorado. Pela desigualdade em (2.4) para formas $(m-k)$ -lineares, concluímos que

$$q \geq \frac{p}{p-(m-k)}.$$

■

A seguir, apresentaremos uma versão supercrítica do Teorema 2.1.5:

Teorema 2.2.10 *Sejam $m \geq 2$ inteiro, $k \in \{1, \dots, m-1\}$, $q_1, \dots, q_m \in (0, \infty]$, $p_1, \dots, p_k \in [1, \infty]$, $p_{k+1}, \dots, p_{m-1} \in (2, \infty]$ e $p_m \in (1, 2]$ tais que*

$$\frac{1}{p_{k+1}} + \dots + \frac{1}{p_m} < 1$$

e

$$\frac{1}{p_j} + \frac{1}{p_{k+1}} + \cdots + \frac{1}{p_m} \geq 1,$$

para todo $j \in \{1, \dots, k\}$. As seguintes afirmações são equivalentes:

(a) Existe uma constante $C \geq 1$ (não dependendo de n) tal que

$$\left(\sum_{i_1=1}^n \left(\sum_{i_2=1}^n \cdots \left(\sum_{i_m=1}^n |T(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})|^{q_m} \right)^{\frac{q_{m-1}}{q_m}} \cdots \right)^{\frac{q_1}{q_2}} \right)^{\frac{1}{q_1}} \leq C \|T\|,$$

para toda forma m -linear $T: \ell_{p_1}^n \times \cdots \times \ell_{p_m}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n .

(b) Os expoentes satisfazem

$$q_1 = \cdots = q_k = \infty \text{ e } q_i \geq \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{p_i} + \cdots + \frac{1}{p_m} \right)}, i = k+1, \dots, m.$$

Além disso, a constante ótima é $C = 1$.

Demonstração. Assuma que vale (a), o Lema 2.2.3 garante que nenhum supremo pode ser melhorado. Usando o Lema 2.2.2, existe uma constante $C \geq 1$ tal que

$$\left(\sum_{i_{k+1}=1}^n \left(\sum_{i_{k+2}=1}^n \cdots \left(\sum_{i_m=1}^n |A(e_{i_{k+1}}, \dots, e_{i_m})|^{q_m} \right)^{\frac{q_{m-1}}{q_m}} \cdots \right)^{\frac{q_{k+1}}{q_{k+2}}} \right)^{\frac{1}{q_{k+1}}} \leq C \|A\|,$$

para toda forma $(m-k)$ -linear $A: \ell_{p_{k+1}}^n \times \cdots \times \ell_{p_m}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ e todo n . Aplicando o Teorema 2.1.5 para formas $(m-k)$ -lineares, concluimos que

$$q_i \geq \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{p_i} + \cdots + \frac{1}{p_m} \right)},$$

para $i = k+1, \dots, m$.

Reciprocamente, pelo Teorema 2.1.5, existe $C \geq 1$ tal que

$$\left(\sum_{i_{k+1}=1}^n \left(\sum_{i_{k+2}=1}^n \cdots \left(\sum_{i_m=1}^n |A(e_{i_{k+1}}, \dots, e_{i_m})|^{q_m} \right)^{\frac{q_{m-1}}{q_m}} \cdots \right)^{\frac{q_{k+1}}{q_{k+2}}} \right)^{\frac{1}{q_{k+1}}} \leq C \|A\|,$$

para toda forma $(m-k)$ -linear $A: \ell_{p_{k+1}}^n \times \cdots \times \ell_{p_m}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n . A conclusão do item (a) segue do Lema 2.2.3. ■

Analogamente, conseguimos apresentar a versão supercrítica do Teorema 2.1.4:

Teorema 2.2.11 *Sejam $p_1, \dots, p_k \in [1, 2]$ e $p_{k+1}, \dots, p_m \in [2, \infty]$ tais que*

$$\frac{1}{p_{k+1}} + \dots + \frac{1}{p_m} \leq \frac{1}{2}$$

e

$$\frac{1}{p_j} + \frac{1}{p_{k+1}} + \dots + \frac{1}{p_m} \geq 1,$$

para todo $j \in \{1, \dots, k\}$, e sejam

$$q_{k+1}, \dots, q_m \in \left[\frac{1}{1 - \left(\frac{1}{p_{k+1}} + \dots + \frac{1}{p_m} \right)}, 2 \right].$$

As seguintes afirmações são equivalentes:

(a) *Existe uma constante $C \geq 1$ (não dependendo de n) tal que*

$$\left(\sum_{i_1=1}^n \left(\dots \left(\sum_{i_m=1}^n |T(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})|^{q_m} \right)^{\frac{q_{m-1}}{q_m}} \dots \right)^{\frac{q_1}{q_2}} \right)^{\frac{1}{q_1}} \leq C \|T\|,$$

para toda forma m -linear $T : \ell_{p_1}^n \times \dots \times \ell_{p_m}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n .

(b) *$q_1 = \dots = q_k = \infty$ e a desigualdade*

$$\frac{1}{q_{k+1}} + \dots + \frac{1}{q_m} \leq \frac{(m-k)+1}{2} - \left(\frac{1}{p_{k+1}} + \dots + \frac{1}{p_m} \right)$$

é verificada.

Demonstração. Assuma que vale (a), o Lema 2.2.3 afirma que nenhum supremo pode ser melhorado, isto é, $q_1 = \dots = q_k = \infty$. Agora, o Lema 2.2.2 garante a existência de uma constante $C \geq 1$ tal que

$$\left(\sum_{i_{k+1}=1}^n \left(\sum_{i_{k+2}=1}^n \dots \left(\sum_{i_m=1}^n |A(e_{i_{k+1}}, \dots, e_{i_m})|^{q_m} \right)^{\frac{q_{m-1}}{q_m}} \dots \right)^{\frac{q_{k+1}}{q_{k+2}}} \right)^{\frac{1}{q_{k+1}}} \leq C \|A\|,$$

para toda forma $(m-k)$ -linear $A : \ell_{p_{k+1}}^n \times \dots \times \ell_{p_m}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n .

Pelo Teorema 2.1.4 para formas $(m-k)$ -lineares $T : \ell_{p_{k+1}}^n \times \dots \times \ell_{p_m}^n \longrightarrow \mathbb{K}$, concluimos que

$$\frac{1}{q_{k+1}} + \dots + \frac{1}{q_m} \leq \frac{(m-k)+1}{2} - \left(\frac{1}{p_{k+1}} + \dots + \frac{1}{p_m} \right).$$

Reciprocamente, pelo Teorema 2.1.4, existe $C \geq 1$ tal que

$$\left(\sum_{i_{k+1}=1}^n \left(\sum_{i_{k+2}=1}^n \cdots \left(\sum_{i_m=1}^n |A(e_{i_{k+1}}, \dots, e_{i_m})|^{q_m} \right)^{\frac{q_m-1}{q_m}} \cdots \right)^{\frac{q_{k+1}}{q_{k+2}}} \right)^{\frac{1}{q_{k+1}}} \leq C \|A\|,$$

para toda forma $(m-k)$ -linear $A : \ell_{p_{k+1}}^n \times \cdots \times \ell_{p_m}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ e todo n . Finalmente, o item (a) é consequência do Lema 2.2.3. ■

O próximo resultado mostra que a condição $\frac{1}{p_j} + \frac{1}{p_{k+1}} + \cdots + \frac{1}{p_m} \geq 1$, para todo $j \in \{1, \dots, k\}$, pode ser evitada:

Teorema 2.2.12 *Sejam $p_1, \dots, p_k \in [1, 2]$ e $p_{k+1}, \dots, p_m \in [2, \infty]$ tais que*

$$\frac{1}{p_{k+1}} + \cdots + \frac{1}{p_m} \leq \frac{1}{2}$$

e sejam

$$q_{k+1}, \dots, q_m \in \left[\frac{1}{1 - \left(\frac{1}{p_{k+1}} + \cdots + \frac{1}{p_m} \right)}, 2 \right],$$

com

$$\frac{1}{q_{k+1}} + \cdots + \frac{1}{q_m} = \frac{(m-k)+1}{2} - \left(\frac{1}{p_{k+1}} + \cdots + \frac{1}{p_m} \right).$$

As seguintes afirmações são equivalentes:

(a) *Existe uma constante $C \geq 1$ (não dependendo de n) tal que*

$$\left(\sum_{i_1=1}^n \left(\cdots \left(\sum_{i_m=1}^n |T(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})|^{q_m} \right)^{\frac{q_m-1}{q_m}} \cdots \right)^{\frac{q_1}{q_2}} \right)^{\frac{1}{q_1}} \leq C \|T\|,$$

para toda forma m -linear $T : \ell_{p_1}^n \times \cdots \times \ell_{p_m}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n .

(b) $q_1 = \cdots = q_k = \infty$.

Demonstração. Suponha, por absurdo, que vale (a) e $q_k < \infty$. Nesse caso, o Lema 2.2.2 garante a existência de uma constante C tal que

$$\left(\sum_{i_k=1}^n \left(\cdots \left(\sum_{i_m=1}^n |T(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})|^{q_m} \right)^{\frac{q_m-1}{q_m}} \cdots \right)^{\frac{q_k}{q_{k+1}}} \right)^{\frac{1}{q_k}} \leq C \|T\|$$

para toda forma $(m-k+1)$ -linear $T : \ell_{p_k}^n \times \cdots \times \ell_{p_m}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n . Para cada forma $(m-k+1)$ -linear $T : \ell_{p_k}^n \times \cdots \times \ell_{p_m}^n \longrightarrow \mathbb{K}$, definimos uma forma

$(m - k + 1)$ -linear A com a mesma lei de T , mas com domínio $\ell_2^n \times \ell_{p_{k+1}}^n \times \cdots \times \ell_{p_m}^n$.

Assim, existe uma constante C tal que

$$\begin{aligned}
& \left(\sum_{i_k=1}^n \left(\cdots \left(\sum_{i_m=1}^n |A(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})|^{q_m} \right)^{\frac{q_m-1}{q_m}} \cdots \right)^{\frac{q_k-1}{q_{k+1}}} \right)^{\frac{1}{q_k}} \\
&= \left(\sum_{i_k=1}^n \left(\cdots \left(\sum_{i_m=1}^n |T(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})|^{q_m} \right)^{\frac{q_m-1}{q_m}} \cdots \right)^{\frac{q_k-1}{q_{k+1}}} \right)^{\frac{1}{q_k}} \\
&\leq C \|T\| \\
&\leq C \|A\|,
\end{aligned} \tag{2.15}$$

para toda forma $(m - k + 1)$ -linear $A : \ell_2^n \times \ell_{p_{k+1}}^n \times \cdots \times \ell_{p_m}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ e todo n , e os expoentes satisfazem

$$\begin{aligned}
\frac{1}{q_k} + \frac{1}{q_{k+1}} + \cdots + \frac{1}{q_m} &= \frac{1}{q_k} + \frac{(m - k) + 1}{2} - \left(\frac{1}{p_{k+1}} + \cdots + \frac{1}{p_m} \right) \\
&> \frac{(m - k) + 1}{2} - \left(\frac{1}{p_{k+1}} + \cdots + \frac{1}{p_m} \right) \\
&= \frac{(m - k + 1) + 1}{2} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{p_{k+1}} + \cdots + \frac{1}{p_m} \right).
\end{aligned}$$

Por outro lado, substituindo a forma unimodular $(m - k + 1)$ -linear da desigualdade Kahane–Salem–Zygmund (do Teorema [A.2](#) no apêndice) em [\(2.15\)](#), obtemos

$$n^{\frac{1}{q_k} + \cdots + \frac{1}{q_m}} \leq C \cdot C_m \cdot n^{\frac{(m-k+1)+1}{2} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{p_{k+1}} + \cdots + \frac{1}{p_m} \right)}.$$

Como isso é válido para todo n , concluímos que

$$\frac{1}{q_k} + \cdots + \frac{1}{q_m} \leq \frac{(m - k + 1) + 1}{2} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{p_{k+1}} + \cdots + \frac{1}{p_m} \right),$$

e isso é uma contradição. Logo $q_k = \infty$. Finalmente, o fato de $q_1 = \cdots = q_{k-1} = \infty$ é uma consequência do Lema [2.2.3](#), pois, como $p_1, \dots, p_k \in [1, 2]$,

$$\frac{1}{p_j} + \frac{1}{p_k} + \frac{1}{p_{k+1}} + \cdots + \frac{1}{p_m} \geq 1,$$

para todo $j \in \{1, \dots, k - 1\}$.

A outra implicação é consequência do Teorema [2.1.4](#) e do Lema [2.2.3](#). ■

Vale ressaltar que os teoremas acima são independentes, ou seja, um teorema não implica o outro. Por exemplo, se $m = 4$, $k = 2$, $p_1 = p_2 = 2$ e $p_3 = p_4 = 8$,

nada podemos concluir pelo Teorema 2.2.11. No entanto, usando o Teorema 2.2.12, concluimos que se $q_3, q_4 \in [4/3, 2]$ e $\frac{1}{q_3} + \frac{1}{q_4} = \frac{5}{4}$, então existe uma constante $C \geq 1$ (não dependendo de n) tal que

$$\left(\sum_{i_1=1}^n \left(\cdots \left(\sum_{i_4=1}^n |T(e_{i_1}, \dots, e_{i_4})|^{q_4} \right)^{\frac{q_3}{q_4}} \cdots \right)^{\frac{q_1}{q_2}} \right)^{\frac{1}{q_1}} \leq C \|T\|,$$

para toda forma 4-linear $T : \ell_2^n \times \ell_2^n \times \ell_8^n \times \ell_8^n \longrightarrow \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n , se, e somente se, $q_1 = q_2 = \infty$. Por outro lado, escolhendo $m = 4, k = 1, p_1 = 3/2, p_2 = p_3 = p_4 = 9, q_2 = q_3 = q_4 = 2$, usando o Teorema 2.2.12, não podemos garantir que existe desigualdade de Hardy–Littlewood para esses expoentes. Contudo, usando o Teorema 2.2.11, concluimos que existe uma constante $C \geq 1$ (não dependendo de n) tal que

$$\sup_{1 \leq i_1 \leq n} \left(\sum_{i_2=1}^n \left(\sum_{i_3=1}^n \left(\sum_{i_4=1}^n |T(e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_3}, e_{i_4})|^{q_4} \right)^{\frac{q_3}{q_4}} \right)^{\frac{q_2}{q_3}} \right)^{\frac{1}{q_2}} \leq C \|T\|,$$

para toda forma 4-linear $T : \ell_2^n \times \ell_9^n \times \ell_9^n \times \ell_9^n \longrightarrow \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n .

Em [7], como consequência de um resultado de inclusão para operadores múltiplos somantes foi provado:

Teorema 2.2.13 (veja [7, Corollary 2]) *Sejam m inteiro positivo e $p_1, \dots, p_m \in (1, 2m]$, com $\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_m} < 1$. Então*

$$\left(\sum_{i_1=1}^n \left(\cdots \left(\sum_{i_m=1}^n |T(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})|^{q_m} \right)^{\frac{q_{m-1}}{q_m}} \cdots \right)^{\frac{q_1}{q_2}} \right)^{\frac{1}{q_1}} \leq 2^{\frac{m-1}{2}} \|T\|,$$

para toda forma m -linear $T : \ell_{p_1}^n \times \dots \times \ell_{p_m}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n , com

$$\frac{1}{q_i} = \frac{1}{2} + \frac{(m-i+1)}{2m} - \left(\frac{1}{p_i} + \dots + \frac{1}{p_m} \right),$$

para todo $i = 1, \dots, m$.

Agora, uma versão supercrítica do Teorema 2.2.13, com condições sobre os expoentes ótimos, pode ser enunciada:

Teorema 2.2.14 *Sejam $m \geq 2$ inteiro, $k \in \{1, \dots, m-1\}$, $p_1, \dots, p_k \in [1, \infty]$ e $p_{k+1}, \dots, p_m \in (1, 2(m-k)]$ tais que*

$$\frac{1}{p_{k+1}} + \dots + \frac{1}{p_m} < 1$$

e

$$\frac{1}{p_j} + \frac{1}{p_{k+1}} + \dots + \frac{1}{p_m} \geq 1,$$

para todo $j \in \{1, \dots, k\}$. Então

$$\left(\sum_{j_1=1}^n \left(\dots \left(\sum_{j_m=1}^n |T(e_{j_1}, \dots, e_{j_m})|^{q_m} \right)^{\frac{q_{m-1}}{q_m}} \dots \right)^{\frac{q_1}{q_2}} \right)^{\frac{1}{q_1}} \leq 2^{\frac{m-k-1}{2}} \|T\|, \quad (2.16)$$

para toda forma m -linear $T : \ell_{p_1}^n \times \dots \times \ell_{p_m}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n , com $q_1 = \dots = q_k = \infty$ e

$$\frac{1}{q_i} = \frac{1}{2} + \frac{(m-i+1)}{2(m-k)} - \left(\frac{1}{p_i} + \dots + \frac{1}{p_m} \right),$$

para todo $i = k+1, \dots, m$. Além disso, $q_1 = \dots = q_k = \infty$ são ótimos e os expoentes ótimos q_i satisfazendo (2.16) são tais que

$$q_i \geq \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{p_i} + \dots + \frac{1}{p_m} \right)}, \quad i = k+1, \dots, m, \quad (2.17)$$

e satisfazem a desigualdade

$$\frac{1}{q_{k+1}} + \dots + \frac{1}{q_m} \leq \frac{(m-k)+1}{2} - \left(\frac{1}{p_{k+1}} + \dots + \frac{1}{p_m} \right). \quad (2.18)$$

Demonstração. Pelo Teorema 2.2.13, temos

$$\left(\sum_{i_{k+1}=1}^n \left(\dots \left(\sum_{i_m=1}^n |T(e_{i_{k+1}}, \dots, e_{i_m})|^{q_m} \right)^{\frac{q_{m-1}}{q_m}} \dots \right)^{\frac{q_{k+1}}{q_{k+2}}} \right)^{\frac{1}{q_{k+1}}} \leq 2^{\frac{m-k-1}{2}} \|T\|, \quad (2.19)$$

para toda forma $(m-k)$ -linear $T : \ell_{p_{k+1}}^n \times \dots \times \ell_{p_m}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n , com

$$\frac{1}{q_i} = \frac{1}{2} + \frac{(m-i+1)}{2(m-k)} - \left(\frac{1}{p_i} + \dots + \frac{1}{p_m} \right),$$

para todo $i = k+1, \dots, m$. Usando o Lema 2.2.3, obtemos a desigualdade (2.16) e que os expoentes $q_1 = \dots = q_k = \infty$ não podem ser melhorados. Agora, pelo [14, Lemma 3.1] ou imitando a prova do Teorema 2.1.11, obtemos

$$q_i \geq \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{p_i} + \dots + \frac{1}{p_m} \right)}, \quad i = k+1, \dots, m.$$

Provaremos agora que os expoentes satisfazem a desigualdade (2.18). Observe que, se $k \neq m-1$, então existe $i \in \{k+1, \dots, m\}$ tal que $p_i \geq 2$, uma vez $\frac{1}{p_{k+1}} + \dots + \frac{1}{p_m} < 1$. Assim, substituindo a forma da desigualdade Kahane–Salem–Zigmund (Teorema A.2 no apêndice) em (2.19), obtemos

$$n^{\frac{1}{q_{k+1}} + \dots + \frac{1}{q_m}} \leq n^{\frac{(m-k)+1}{2} - \left(\frac{1}{p_{k+1}} + \dots + \frac{1}{p_m}\right)}.$$

Como n é arbitrário, concluímos que

$$\frac{1}{q_{k+1}} + \dots + \frac{1}{q_m} \leq \frac{(m-k)+1}{2} - \left(\frac{1}{p_{k+1}} + \dots + \frac{1}{p_m}\right).$$

No caso em que $k = m-1$, as condições (2.17) e (2.18) são equivalentes e não há o que fazer. ■

Observe que fazendo $k = 1$ e $p_1 = \dots = p_m = m$ no Teorema 2.2.14, obtemos como corolário a seguinte versão mais forte do nosso teorema crítico (veja Teorema 2.1.11):

Corolário 2.2.15 *Para todo $m \geq 2$ inteiro, temos*

$$\sup_{1 \leq i_1 \leq n} \left(\sum_{i_2=1}^n \left(\dots \left(\sum_{i_m=1}^n |T(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})|^{s_m} \right)^{\frac{s_{m-1}}{s_m}} \dots \right)^{\frac{s_2}{s_3}} \right)^{\frac{1}{s_2}} \leq 2^{\frac{m-2}{2}} \|T\|, \quad (2.20)$$

para toda forma m -linear $T : \ell_m^n \times \dots \times \ell_m^n \longrightarrow \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n , com

$$s_k = \frac{2m(m-1)}{mk - 2k + 2}, \quad k = 2, \dots, m.$$

Além disso, $s_1 = \infty$ e $s_2 = m$ são ótimos e, para $m \geq 2$, os expoentes ótimos s_k satisfazendo (2.20) são tais que

$$s_k \geq \frac{m}{k-1}, \quad k = 2, \dots, m, \quad e \quad \sum_{k=2}^m \frac{1}{s_k} \leq \frac{m}{2} - \frac{(m-1)}{m}. \quad (2.21)$$

Como consequência do Corolário 2.2.15, concluímos que para $m > 2$ não existe desigualdade de Hardy–Littlewood para formas m -lineares $T : \ell_m^n \times \dots \times \ell_m^n \longrightarrow \mathbb{K}$ com expoentes $(\infty, m, m/2, \dots, m/(m-1))$.

Finalizaremos este capítulo com alguns problemas sobre as desigualdades de Hardy–Littlewood críticas e supercríticas:

Problema 2.2.16 *Quais são os expoentes ótimos da desigualdade (2.20) do Corolário 2.2.15?*

Problema 2.2.17 *As condições em (2.21) dos expoentes satisfazendo a desigualdade (2.20) são ótimas?*

Um problema ainda mais geral pode ser assim enunciado:

Problema 2.2.18 *As condições (2.17) e (2.18) do Teorema 2.2.14 são ótimas?*

Ainda não temos resposta para o problema anterior no caso geral. Entretanto, pelo Corolário 2.2.6, sabemos que, para $m = 3$, $k = 1$ e $2 < p \leq 3$, a resposta para o Problema 2.2.17 é positiva. E a respeito desse caso particular, alguns perguntas surgem:

Problema 2.2.19 *Quais são as constantes ótimas do Corolário 2.2.6? Existem $p \in (2, 3]$ e expoentes admissíveis q_2, q_3 para os quais a constante $\sqrt{2}$ é ótima?*

Capítulo 3

Desigualdades de Khinchin

A desigualdade de Khinchin foi formulada em 1923 por Khinchin [46] para estimar o comportamento assintótico de certos experimentos aleatórios. O seguinte exemplo fornece uma ilustração do seu alcance. Suponha que se tenha n números reais $a_1, \dots, a_n$ e uma moeda honesta. Após jogar a moeda, escolhe-se $\alpha_1 = a_1$, se aparecer cara, ou escolhe-se $\alpha_1 = -a_1$, se aparecer coroa. Jogando a moeda novamente, escolhe-se $\alpha_2 = \alpha_1 + a_1$, se aparecer cara, ou escolhe-se $\alpha_2 = \alpha_1 - a_1$, se aparecer coroa. Depois de ter lançado a moeda k vezes, o próximo lançamento resultará no número

$$\alpha_{k+1} := \alpha_k + a_{k+1},$$

se aparecer cara, ou em

$$\alpha_{k+1} := \alpha_k - a_{k+1},$$

se aparecer coroa. Concluídas as n etapas, qual deve ser o valor esperado de

$$|\alpha_n| = \left| \sum_{k=1}^n \pm a_k \right|?$$

A desigualdade de Khinchin, em algum sentido, resolve esse problema, uma vez que fornece limitações inferiores e superiores para esse valor esperado, dependendo somente dos números reais $a_1, \dots, a_n$. Hoje em dia, ela é uma ferramenta probabilística muito importante, com profundas aplicações em Análise Matemática. Em particular, como vimos nos primeiros capítulos, ela é fundamental no estudo das desigualdades de Bohnenblust–Hille e Hardy–Littlewood; os artigos [4], [13], [30], [35], [59], [67] e [71]

são alguns dos muitos que evidenciam essas aplicações. A desigualdade de Khinchin afirma que para qualquer $p > 0$ existem constantes $A_p, B_p > 0$ tais que

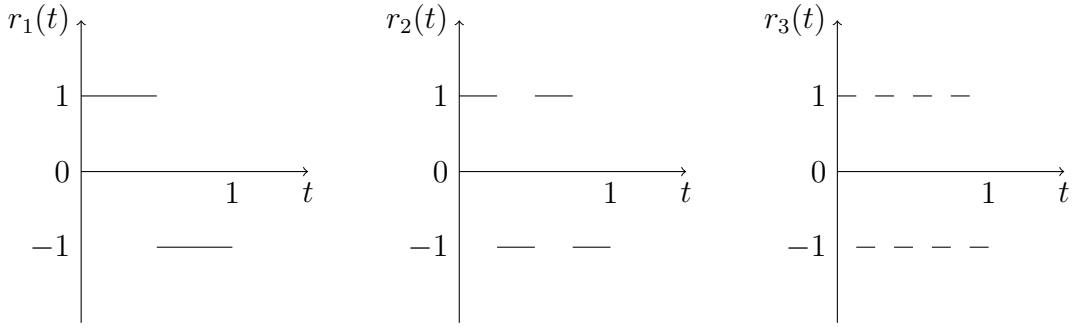
$$A_p \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^1 \left| \sum_{i=1}^n r_i(t) a_i \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq B_p \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

para toda sequência de escalares $(a_i)_{i=1}^n$ e todo inteiro positivo n . Acima, $(r_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R})_{i=1}^\infty$ é uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas definidas por

$$r_i(t) := \text{sign}(\sin 2^i \pi t),$$

chamadas funções de Rademacher. Veja abaixo (Figura 3.1) os gráficos de r_1, r_2 e r_3 :

Figura 3.1: Gráficos das primeiras funções de Rademacher



Fonte: Autoria própria.

Como as constantes ótimas A_p e B_p são as mesmas para escalares reais e complexos (veja [32, Ex. 26.9, p. 361]), é suficiente trabalharmos com escalares reais. Em [82] foi provado por Szarek que $A_1 = (\sqrt{2})^{-1}$ é ótima, solucionando um problema de longa data colocado por Littlewood [43]. Mais tarde, Haagerup [42] simplificou a abordagem de Szarek e forneceu as constantes ótimas para $p \neq 1$ (veja também [47], [83] e [86]). Ele provou que as constantes ótimas A_p e B_p da desigualdade de Khinchin são

$$A_p = \begin{cases} 2^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}}, & \text{se } p \in (0, p_0]; \\ 2^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{\Gamma((p+1)/2)}{\sqrt{\pi}} \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{se } p \in (p_0, 2); \\ 1, & \text{se } p \in [2, \infty); \end{cases}$$

e

$$B_p = \begin{cases} 1, & \text{se } p \in (0, 2]; \\ 2^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{\Gamma((p+1)/2)}{\sqrt{\pi}} \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{se } p \in (2, \infty); \end{cases}$$

onde Γ representa a Função Gama e p_0 é o número real pertencendo ao intervalo $(1, 2)$ que cumpre $\Gamma((p_0 + 1)/2) = \sqrt{\pi}/2$ (sabe-se que $p_0 \approx 1,84742$).

A desigualdade de Khinchin é também válida, e útil, para somas múltiplas (veja [76]). É bem conhecido que independentemente da escolha dos inteiros positivos m, n e dos escalares $a_{i_1, \dots, i_m}, i_1, \dots, i_m = 1, \dots, n$,

$$\left(\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n |a_{i_1, \dots, i_m}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq A_p^{-m} \left(\int_{[0,1]^m} \left| \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n a_{i_1, \dots, i_m} r_{i_1}(t_1) \cdots r_{i_m}(t_m) \right|^p dt_1 \cdots dt_m \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (3.1)$$

Ressaltamos que, mesmo no caso simples $m = 2$, a sequência de variáveis aleatórias $(r_i \cdot r_j : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R})_{i,j=1}^\infty$ não é independente (veja [66, p. 142]). Com efeito, sejam $r_{ij} := r_i \cdot r_j$ e λ a medida de Lebesgue nos borelianos de $[0, 1]^2$. Considere as variáveis aleatórias r_{11}, r_{12}, r_{21} e r_{22} . Note que

$$\lambda(r_{11}^{-1}(1)) \cdot \lambda(r_{12}^{-1}(1)) \cdot \lambda(r_{21}^{-1}(1)) \cdot \lambda(r_{22}^{-1}(-1)) = \frac{1}{8}.$$

No entanto,

$$\lambda(r_{11}^{-1}(1) \cap r_{12}^{-1}(1) \cap r_{21}^{-1}(1) \cap r_{22}^{-1}(-1)) = \lambda(\emptyset) = 0.$$

Este capítulo está dividido em duas seções, nas quais exploraremos as desigualdades múltiplas de Khinchin e de Kahane. Na seção 1, apresentaremos variações da desigualdade de Khinchin múltipla. Mais especificamente, analisaremos o comportamento da constante quando escolhemos uma norma ℓ_r , com $r < 2$, no lado esquerdo da desigualdade (3.1) e exibiremos a constante ótima quando mudamos por uma norma ℓ_r , com $r > 2$. Na seção 2, veremos que existem resultados análogos aos apresentados na seção 1 para espaços de cotipo 2 e, nesse contexto, apresentaremos desigualdades do tipo Kahane. O conteúdo deste capítulo é essencialmente o artigo

[68] D. Pellegrino, D. Santos, J. Santos, Optimal blow up rate for the constants of Khinchin type inequalities. Quaest. Math. **41** (2018), no. 3, 303–318.

3.1 Constantes de desigualdades do tipo Khinchin

Nesta seção, investigaremos as constantes em (3.1), à medida que n cresce, quando a norma ℓ_2 no lado esquerdo é substituída por uma norma ℓ_r , com $0 < r < 2$, e apresentaremos a constante ótima quando trocamos por uma norma ℓ_r , com $r \geq 2$. Começamos com o seguinte resultado:

Teorema 3.1.1 *Sejam m, n inteiros positivos e $(a_{i_1, \dots, i_m})_{i_1, \dots, i_m=1}^n$ uma sequência de escalares reais. Se $r \in (0, 2)$, então existe uma constante $C_{m,p} > 0$ tal que*

$$\left(\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n |a_{i_1, \dots, i_m}|^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq C_{m,p} n^{m(\frac{1}{r} - \frac{1}{2})} \left(\int_{[0,1]^m} \left| \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n a_{i_1, \dots, i_m} r_{i_1}(t_1) \cdots r_{i_m}(t_m) \right|^p dt_1 \cdots dt_m \right)^{\frac{1}{p}},$$

e o expoente $m(\frac{1}{r} - \frac{1}{2})$ é ótimo.

A principal técnica na prova do resultado acima aparece na busca da otimalidade do expoente. Para essa tarefa usaremos, entre outros resultados, uma ferramenta probabilística poderosa chamada desigualdade de Kahane–Salem–Zygmund:

Teorema 3.1.2 (veja [70, Theorem 1.1]) *Sejam m e n inteiros positivos. Existem uma constante universal $C_m > 0$, dependendo somente de m , e uma forma m -linear $T_{m,n}: c_0 \times \cdots \times c_0 \rightarrow \mathbb{R}$ do tipo*

$$T_{m,n}(z^{(1)}, \dots, z^{(m)}) = \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n \pm z_{i_1}^{(1)} \cdots z_{i_m}^{(m)}$$

tais que

$$\|T_{m,n}\| \leq C_m n^{\frac{m+1}{2}}.$$

Como será visto, provaremos a otimalidade do expoente de n no Teorema 3.1.1 considerando, para todo i_{m+1} ,

$$a_{i_1, \dots, i_m}^{(i_{m+1})} = T_{m+1,n}(e_{i_1}, \dots, e_{i_{m+1}}).$$

A prova do Teorema 3.1.1: Inicialmente, vamos mostrar que existem um expoente $t_{m,r} > 0$ e uma constante $C_{m,p} > 0$ tais que

$$\left(\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n |a_{i_1, \dots, i_m}|^r \right)^{\frac{1}{r}} \tag{3.2}$$

$$\leq C_{m,p} n^{t_{m,r}} \left(\int_{[0,1]^m} \left| \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n r_{i_1}(t_1) \cdots r_{i_m}(t_m) a_{i_1, \dots, i_m} \right|^p dt_1 \cdots dt_m \right)^{1/p},$$

para qualquer sequência $(a_{i_1, \dots, i_m})_{i_1, \dots, i_m=1}^n$ e todo inteiro positivo n .

Seja $s > 0$ tal que $\frac{1}{r} = \frac{1}{2} + \frac{1}{s}$. Pela desigualdade de Hölder como no Teorema [A.3](#) (apêndice) e pela desigualdade de Khinchin como em [\(3.1\)](#), para $p = 1$, temos

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n |a_{i_1, \dots, i_m}|^r \right)^{\frac{1}{r}} \\ & \leq \left(\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n |a_{i_1, \dots, i_m}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n 1^s \right)^{\frac{1}{s}} \\ & \leq A_1^{-m} \left(\int_{[0,1]^m} \left| \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n r_{i_1}(t_1) \cdots r_{i_m}(t_m) a_{i_1, \dots, i_m} \right| dt_1 \cdots dt_m \right) \cdot n^{\frac{m}{s}} \\ & = 2^{\frac{m}{2}} n^{m(\frac{1}{r} - \frac{1}{2})} \int_{[0,1]^m} \left| \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n r_{i_1}(t_1) \cdots r_{i_m}(t_m) a_{i_1, \dots, i_m} \right| dt_1 \cdots dt_m. \end{aligned}$$

Agora mostraremos que a melhor estimativa para o expoente $t_{m,r}$ em [\(3.2\)](#), no caso $p = 1$, é precisamente $m(\frac{1}{r} - \frac{1}{2})$. De fato, seja $T_{m+1,n}$ a forma $(m+1)$ -linear dada pela desigualdade de Kahane–Salem–Zygmund (Teorema [3.1.2](#)). Então

$$\begin{aligned} & \sum_{i_{m+1}=1}^n \left(\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n |T_{m+1,n}(e_{i_1}, \dots, e_{i_m}, e_{i_{m+1}})|^r \right)^{\frac{1}{r}} \\ & \leq \sum_{i_{m+1}=1}^n C_{m,p} n^{t_{m,r}} \int_{[0,1]^m} \left| \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n r_{i_1}(t_1) \cdots r_{i_m}(t_m) T_{m+1,n}(e_{i_1}, \dots, e_{i_m}, e_{i_{m+1}}) \right| dt_1 \cdots dt_m \\ & = C_{m,p} n^{t_{m,r}} \int_{[0,1]^m} \sum_{i_{m+1}=1}^n \left| T_{m+1,n} \left(\sum_{i_1=1}^n r_{i_1}(t_1) e_{i_1}, \dots, \sum_{i_m=1}^n r_{i_m}(t_m) e_{i_m}, e_{i_{m+1}} \right) \right| dt_1 \cdots dt_m. \end{aligned}$$

Lembrando que o funcional linear $T_{m+1,n}(\sum_{i_1=1}^n r_{i_1}(t_1) e_{i_1}, \dots, \sum_{i_m=1}^n r_{i_m}(t_m) e_{i_m}, \cdot)$ é absolutamente $(1;1)$ -somante, com norma 1-somante igual à norma do supremo (veja Proposição [A.1](#) no apêndice), e que vale a dualidade $(c_0)^* = \ell_1$, temos

$$\begin{aligned} & \int_{[0,1]^m} \sum_{i_{m+1}=1}^n \left| T_{m+1,n} \left(\sum_{i_1=1}^n r_{i_1}(t_1) e_{i_1}, \dots, \sum_{i_m=1}^n r_{i_m}(t_m) e_{i_m}, e_{i_{m+1}} \right) \right| dt_1 \cdots dt_m \\ & \leq \sup_{t_1, \dots, t_m \in [0,1]} \left\| T_{m+1,n} \left(\sum_{i_1=1}^n r_{i_1}(t_1) e_{i_1}, \dots, \sum_{i_m=1}^n r_{i_m}(t_m) e_{i_m}, \cdot \right) \right\| \sup_{\varphi \in B_{(c_0)^*}} \sum_{i_{m+1}=1}^n |\varphi(e_{i_{m+1}})| \\ & = \sup_{t_1, \dots, t_m \in [0,1]} \left\| T_{m+1,n} \left(\sum_{i_1=1}^n r_{i_1}(t_1) e_{i_1}, \dots, \sum_{i_m=1}^n r_{i_m}(t_m) e_{i_m}, \cdot \right) \right\| \end{aligned}$$

$$\leq \sup_{t_1, \dots, t_m \in [0,1]} \|T_{m+1,n}\| \left\| \sum_{i_1=1}^n r_{i_1}(t_1) e_{i_1} \right\|_{c_0} \cdots \left\| \sum_{i_m=1}^n r_{i_m}(t_m) e_{i_m} \right\|_{c_0}$$

$$= \|T_{m+1,n}\|,$$

pois

$$\sup_{\varphi \in B_{(c_0)^*}} \sum_{i_{m+1}=1}^n |\varphi(e_{i_{m+1}})| = 1.$$

Por outro lado,

$$\sum_{i_{m+1}=1}^n \left(\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n |T_{m+1,n}(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})|^r \right)^{\frac{1}{r}} = n \cdot n^{\frac{m}{r}}.$$

Assim

$$n^{1+\frac{m}{r}} \leq C_{m,p} n^{t_{m,r}} C_{m+1} n^{\frac{m+2}{2}},$$

para todo n . Como n é arbitrário, temos

$$t_{m,r} \geq m \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2} \right).$$

Pela desigualdade de Khinchin Múltipla [76, p. 701] deduzimos que, para quaisquer $p, q > 0$ e todo inteiro positivo m , existe uma constante $C_{m,p,q} > 0$ tal que

$$\left(\int_{[0,1]^m} \left| \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n a_{i_1, \dots, i_m} r_{i_1}(t_1) \cdots r_{i_m}(t_m) \right|^p dt_1 \cdots dt_m \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq C_{m,p,q} \left(\int_{[0,1]^m} \left| \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n a_{i_1, \dots, i_m} r_{i_1}(t_1) \cdots r_{i_m}(t_m) \right|^q dt_1 \cdots dt_m \right)^{\frac{1}{q}}$$

e, assim, concluímos que o expoente ótimo $t_{m,r}$ independe do valor de p , finalizando a demonstração. ■

Observação 3.1.3 Se $r_j \in (0, 2)$, para todo $j = 1, \dots, m$, usando a desigualdade de Hölder mista (veja Teorema A.3 no apêndice) e repetindo os argumentos da prova do Teorema 3.1.1 podemos provar que existe uma constante $C_{m,p} > 0$ tal que

$$\left(\sum_{i_1=1}^n \left(\sum_{i_2=1}^n \left(\cdots \left(\sum_{i_m=1}^n |a_{i_1, \dots, i_m}|^{r_m} \right)^{\frac{1}{r_m}} \cdots \right)^{\frac{r_2}{r_3}} \right)^{\frac{r_1}{r_2}} \right)^{\frac{1}{r_1}}$$

$$\leq C_{m,p} \cdot n^{\left(\sum_{j=1}^m \frac{1}{r_j} \right) - \frac{m}{2}} \left(\int_{[0,1]^m} \left| \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n r_{i_1}(t_1) \cdots r_{i_m}(t_m) a_{i_1, \dots, i_m} \right|^p dt_1 \cdots dt_m \right)^{1/p}$$

e que o expoente $\left(\sum_{j=1}^m \frac{1}{r_j} \right) - \frac{m}{2}$ é ótimo.

Sabe-se, pela monotonicidade da norma ℓ_p , que se considerarmos um número r , com $r \geq 2$, então

$$\left(\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n |a_{i_1, \dots, i_m}|^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n |a_{i_1, \dots, i_m}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Portanto, existe uma desigualdade de Khinchin múltipla como em (3.1), quando se considera no lado esquerdo a norma ℓ_r , com $r \geq 2$, em vez da norma ℓ_2 , possivelmente a constante nesse novo caso será melhor que A_p^{-m} . No próximo resultado, exibiremos a constante ótima quando $r \geq 2$ e $p = 1$. Mais precisamente, provaremos que:

Proposição 3.1.4 *Sejam m e n inteiros positivos e seja $(a_{i_1, \dots, i_m})_{i_1, \dots, i_m=1}^n$ uma sequência de escalares reais. Se $r \in [2, \infty)$, então*

$$\left(\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n |a_{i_1, \dots, i_m}|^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq 2^{\frac{m}{r}} \int_{[0,1]^m} \left| \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n r_{i_1}(t_1) \cdots r_{i_m}(t_m) a_{i_1, \dots, i_m} \right| dt_1 \cdots dt_m,$$

e a estimativa $2^{\frac{m}{r}}$ é ótima.

Para a prova da otimalidade da Proposição 3.1.4 precisaremos das formas m -lineares $R_m : c_0 \times \cdots \times c_0 \rightarrow \mathbb{R}$ definidas indutivamente do seguinte modo: para $m = 2$, definimos

$$R_2(x^{(1)}, x^{(2)}) = x_1^{(1)} x_1^{(2)} + x_1^{(1)} x_2^{(2)} + x_2^{(1)} x_1^{(2)} - x_2^{(1)} x_2^{(2)}.$$

Definimos R_3 , a partir da R_2 , por

$$\begin{aligned} R_3(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}) &= (x_1^{(1)} + x_2^{(1)}) (x_1^{(2)} x_1^{(3)} + x_1^{(2)} x_2^{(3)} + x_2^{(2)} x_1^{(3)} - x_2^{(2)} x_2^{(3)}) \\ &\quad + (x_1^{(1)} - x_2^{(1)}) (x_3^{(2)} x_3^{(3)} + x_3^{(2)} x_4^{(3)} + x_4^{(2)} x_3^{(3)} - x_4^{(2)} x_4^{(3)}). \end{aligned}$$

E, de maneira geral, uma vez definida R_{m-1} , definimos R_m por

$$\begin{aligned} R_m(x^{(1)}, \dots, x^{(m)}) &= (x_1^{(1)} + x_2^{(1)}) R_{m-1}(x^{(2)}, \dots, x^{(m)}) \\ &\quad + (x_1^{(1)} - x_2^{(1)}) R_{m-1}(B^{2^{m-2}}(x^{(2)}), \dots, B^{2^{m-2}}(x^{(m)})), \end{aligned}$$

onde $B^{2^{m-2}}(x_1, x_2, x_3, \dots) := (x_{2^{m-2}+1}, x_{2^{m-2}+2}, x_{2^{m-2}+3}, \dots)$, para mais detalhes indicamos [67]. Na demonstração usaremos, para todo i_{m+1} ,

$$a_{i_1, \dots, i_m}^{(i_{m+1})} = R_{m+1}(e_{i_1}, \dots, e_{i_{m+1}}).$$

Observe (veja [67]) que cada R_m é composta por precisamente 2^{2m-2} monômios e que

$$\|R_m\| = 2^{m-1}.$$

Note também que cada R_m tem exatamente 2^{m-1} monômios envolvendo cada uma das 2^{m-1} primeiras coordenadas da última variável $x^{(m)}$.

Finalmente, necessitaremos de uma versão com “índices múltiplos” do Princípio de Contração, cuja prova será apresentada em seguida por questão de completude.

Lema 3.1.5 *Para quaisquer m e n inteiros positivos e vetores $y_{i_1, \dots, i_m}$ no espaço de Banach Y , $i_1, \dots, i_m = 1, \dots, n$, temos*

$$\max_{\substack{i_k=1, \dots, n \\ k=1, \dots, m}} \|y_{i_1, \dots, i_m}\| \leq \int_{[0,1]^m} \left\| \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n r_{i_1}(t_1) \cdots r_{i_m}(t_m) y_{i_1, \dots, i_m} \right\| dt_1 \cdots dt_m.$$

Demonstração. Para o caso $m = 1$, considere $p = 1$, $A = \{1\}$ e $B = \{1, \dots, n\}$ em [36, Theorem 12.2]. Assim

$$\int_{[0,1]} \left\| \sum_{i_1 \in \{1\}} r_{i_1}(t_1) y_{i_1} \right\| dt_1 \leq \int_{[0,1]} \left\| \sum_{i_1=1}^n r_{i_1}(t_1) y_{i_1} \right\| dt_1,$$

e isso implica que

$$\|y_1\| \leq \int_{[0,1]} \left\| \sum_{i_1=1}^n r_{i_1}(t_1) y_{i_1} \right\| dt_1.$$

O mesmo argumento vale quando se escolhe $A = \{2\}, \dots, A = \{n\}$ e, portanto,

$$\max_{i_1=1, \dots, n} \|y_{i_1}\| \leq \int_{[0,1]} \left\| \sum_{i_1=1}^n r_{i_1}(t_1) y_{i_1} \right\| dt_1.$$

Vamos supor, como hipótese de indução, que o resultado é válido para $m - 1$. Temos

$$\begin{aligned} & \int_{[0,1]^m} \left\| \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n r_{i_1}(t_1) \cdots r_{i_m}(t_m) y_{i_1, \dots, i_m} \right\| dt_1 \cdots dt_m \\ &= \int_{[0,1]^{m-1}} \left(\int_0^1 \left\| \sum_{i_1=1}^n r_{i_1}(t_1) \left(\sum_{i_2, \dots, i_m=1}^n r_{i_2}(t_2) \cdots r_{i_m}(t_m) y_{i_1, \dots, i_m} \right) \right\| dt_1 \right) dt_2 \cdots dt_m. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Pelo caso $m = 1$, temos

$$\begin{aligned} & \max_{i_1=1, \dots, n} \left\| \sum_{i_2, \dots, i_m=1}^n r_{i_2}(t_2) \cdots r_{i_m}(t_m) y_{i_1, \dots, i_m} \right\| \\ & \leq \int_0^1 \left\| \sum_{i_1=1}^n r_{i_1}(t_1) \left(\sum_{i_2, \dots, i_m=1}^n r_{i_2}(t_2) \cdots r_{i_m}(t_m) y_{i_1, \dots, i_m} \right) \right\| dt_1. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Por (3.3) e (3.4), concluimos que

$$\begin{aligned} & \int_{[0,1]^m} \left\| \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n r_{i_1}(t_1) \cdots r_{i_m}(t_m) y_{i_1, \dots, i_m} \right\| dt_1 \cdots dt_m \\ & \geq \int_{[0,1]^{m-1}} \max_{i_1=1, \dots, n} \left\| \sum_{i_2, \dots, i_m=1}^n r_{i_2}(t_2) \cdots r_{i_m}(t_m) y_{i_1, \dots, i_m} \right\| dt_2 \cdots dt_m \\ & \geq \int_{[0,1]^{m-1}} \left\| \sum_{i_2, \dots, i_m=1}^n r_{i_2}(t_2) \cdots r_{i_m}(t_m) y_{i_1, \dots, i_m} \right\| dt_2 \cdots dt_m, \end{aligned}$$

para todo $i_1 = 1, \dots, n$. Pela hipótese de indução, temos

$$\int_{[0,1]^{m-1}} \left\| \sum_{i_2, \dots, i_m=1}^n r_{i_2}(t_2) \cdots r_{i_m}(t_m) y_{i_1, \dots, i_m} \right\| dt_2 \cdots dt_m \geq \max_{\substack{i_k=1, \dots, n \\ k=2, \dots, m}} \|y_{i_1, \dots, i_m}\|$$

e, como isso é válido para todo $i_1 = 1, \dots, n$, a prova está concluída. ■

Demonstração da Proposição 3.1.4: Vamos denotar por C_r a constante ótima satisfazendo

$$\left(\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n |a_{i_1, \dots, i_m}|^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq C_r \int_{[0,1]^m} \left| \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n r_{i_1}(t_1) \cdots r_{i_m}(t_m) a_{i_1, \dots, i_m} \right| dt_1 \cdots dt_m,$$

para toda sequência de escalares $(a_{i_1, \dots, i_m})_{i_1, \dots, i_m=1}^n$ e todo inteiro positivo n .

Pela desigualdade de Hölder como no Teorema A.4 (apêndice), se $\theta \in (0, 1)$ e $u, s, t \in [1, \infty]$ satisfazem

$$\frac{1}{u} = \frac{\theta}{s} + \frac{1-\theta}{t},$$

então

$$\|(a_i)_{i=1}^n\|_{\ell_u} \leq \|(a_i)_{i=1}^n\|_{\ell_s}^\theta \|(a_i)_{i=1}^n\|_{\ell_t}^{1-\theta}. \quad (3.5)$$

Seja $\theta = \frac{2}{r}$. Como

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{2} + \frac{1-\theta}{\infty},$$

por (3.5), temos

$$\left(\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n |a_{i_1, \dots, i_m}|^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n |a_{i_1, \dots, i_m}|^2 \right)^{\frac{\theta}{2}} \cdot \left(\max_{\substack{i_k=1, \dots, n \\ k=1, \dots, m}} |a_{i_1, \dots, i_m}| \right)^{1-\theta}. \quad (3.6)$$

Por (3.1), lembrando que $A_1 = (\sqrt{2})^{-1}$, concluimos que

$$\left(\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n |a_{i_1, \dots, i_m}|^2 \right)^{1/2} \leq 2^{\frac{m}{2}} \int_{[0,1]^m} \left| \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n r_{i_1}(t_1) \cdots r_{i_m}(t_m) a_{i_1, \dots, i_m} \right| dt_1 \cdots dt_m \quad (3.7)$$

e, do Lema [3.1.5](#), temos

$$\max_{\substack{i_k=1,\dots,n \\ k=1,\dots,m}} |a_{i_1,\dots,i_m}| \leq \int_{[0,1]^m} \left| \sum_{i_1,\dots,i_m=1}^n r_{i_1}(t_1) \cdots r_{i_m}(t_m) a_{i_1,\dots,i_m} \right| dt_1 \cdots dt_m. \quad (3.8)$$

Portanto, combinando [\(3.6\)](#), [\(3.7\)](#) e [\(3.8\)](#), segue que

$$\left(\sum_{i_1,\dots,i_m=1}^n |a_{i_1,\dots,i_m}|^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq 2^{\frac{m}{r}} \int_{[0,1]^m} \left| \sum_{i_1,\dots,i_m=1}^n r_{i_1}(t_1) \cdots r_{i_m}(t_m) a_{i_1,\dots,i_m} \right| dt_1 \cdots dt_m.$$

Agora vamos provar que a constante $2^{\frac{m}{r}}$ é ótima. Seja R_{m+1} a forma $(m+1)$ -linear definida no início da seção. Como o funcional linear

$$R_{m+1} \left(\sum_{i_1=1}^{2^m} r_{i_1}(t_1) e_{i_1}, \dots, \sum_{i_m=1}^{2^m} r_{i_m}(t_m) e_{i_m}, \cdot \right)$$

é absolutamente $(1; 1)$ -somante, com norma 1-somante igual à norma do supremo (veja Proposição [A.1](#) no apêndice), temos

$$\begin{aligned} & \sum_{i_{m+1}=1}^{2^m} \left(\sum_{i_1,\dots,i_m=1}^{2^m} |R_{m+1}(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_{m+1}})|^r \right)^{\frac{1}{r}} \\ & \leq \sum_{i_{m+1}=1}^{2^m} C_r \int_{[0,1]^m} \left| \sum_{i_1,\dots,i_m=1}^{2^m} r_{i_1}(t_1) \cdots r_{i_m}(t_m) R_{m+1}(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_{m+1}}) \right| dt_1 \cdots dt_m \\ & = C_r \int_{[0,1]^m} \sum_{i_{m+1}=1}^{2^m} \left| R_{m+1} \left(\sum_{i_1=1}^{2^m} r_{i_1}(t_1) e_{i_1}, \dots, \sum_{i_m=1}^{2^m} r_{i_m}(t_m) e_{i_m}, e_{i_{m+1}} \right) \right| dt_1 \cdots dt_m \\ & \leq C_r \sup_{t_1, \dots, t_m \in [0,1]} \left\| R_{m+1} \left(\sum_{i_1=1}^{2^m} r_{i_1}(t_1) e_{i_1}, \dots, \sum_{i_m=1}^{2^m} r_{i_m}(t_m) e_{i_m}, \cdot \right) \right\| \sup_{\varphi \in B_{(c_0)^*}} \sum_{i_{m+1}=1}^{2^m} |\varphi(e_{i_{m+1}})| \\ & \leq C_r \sup_{t_1, \dots, t_m \in [0,1]} \|R_{m+1}\| \left\| \sum_{i_1=1}^{2^m} r_{i_1}(t_1) e_{i_1} \right\|_{c_0} \cdots \left\| \sum_{i_m=1}^{2^m} r_{i_m}(t_m) e_{i_m} \right\|_{c_0} \\ & \leq 2^m C_r, \end{aligned}$$

já que

$$\|R_{m+1}\| = 2^m \quad \text{e} \quad \sup_{\varphi \in B_{(c_0)^*}} \sum_{i_{m+1}=1}^{2^m} |\varphi(e_{i_{m+1}})| = 1.$$

Por outro lado, como R_{m+1} tem exatamente 2^m monômios envolvendo cada uma das 2^m primeiras coordenadas da última variável, para cada $i_{m+1} \in \{1, \dots, 2^m\}$, temos

$$\left(\sum_{i_1,\dots,i_m=1}^{2^m} |R_{m+1}(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_{m+1}})|^r \right) = 2^m,$$

já que a soma acima tem exatamente 2^m termos e cada um deles tem módulo 1. Como R_{m+1} tem um total de 2^{2m} monômios, finalmente obtemos

$$\sum_{i_{m+1}=1}^{2^m} \left(\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^{2^m} |R_{m+1}(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_{m+1}})|^r \right)^{\frac{1}{r}} = 2^m \cdot (2^m)^{\frac{1}{r}}.$$

Assim

$$2^m \cdot 2^{\frac{m}{r}} \leq 2^m C_r$$

e concluimos que

$$C_r \geq 2^{\frac{m}{r}},$$

completando a prova. ■

3.2 Constantes de desigualdades do tipo Kahane

Nesta seção, apresentaremos uma versão do Teorema 3.1.1 para espaços de cotipo 2 e uma versão da Proposição 3.1.4 para espaços de Hilbert.

Sejam $2 \leq q < \infty$ e $s > 0$. Um espaço de Banach Y tem cotipo q (indicamos [36, Chapter 11] e [78] para mais detalhes e propriedades) se existe uma constante $C > 0$ tal que, independentemente da escolha de uma quantidade finita de vetores $y_1, \dots, y_n \in Y$,

$$\left(\sum_{k=1}^n \|y_k\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_{[0,1]} \left\| \sum_{k=1}^n r_k(t)y_k \right\|^s dt \right)^{\frac{1}{s}}. \quad (3.9)$$

Quando $s = q$, a menor de todas as constantes satisfazendo (3.9) será denotada por $c_q(Y)$. A desigualdade de Kahane abaixo mostra que a escolha de s não é relevante, módulo a constante envolvida:

Teorema 3.2.1 (veja [36, Theorem 11.1]) *Se $p, q \in (0, \infty)$, então existe uma constante $K_{p,q} > 0$ para a qual vale*

$$\left(\int_{[0,1]} \left\| \sum_{k=1}^n r_k(t)y_k \right\|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \leq K_{p,q} \left(\int_{[0,1]} \left\| \sum_{k=1}^n r_k(t)y_k \right\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}},$$

independentemente da escolha do espaço de Banach Y , do inteiro positivo n e dos vetores $y_1, \dots, y_n \in Y$.

De agora em diante, $K_{p,q}$ denotará a constante ótima da desigualdade de Kahane. Como acontece para a desigualdade de Khinchin, também temos uma tipo Kahane para índices múltiplos, a chamada desigualdade de Kahane–Khinchin múltipla:

Teorema 3.2.2 (veja [1] ou [76, p. 702]) Sejam $p, q \in (0, \infty)$. Então

$$\left(\int_{[0,1]^m} \left\| \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n y_{i_1, \dots, i_m} r_{i_1}(t_1) \cdots r_{i_m}(t_m) \right\|^q dt_1 \cdots dt_m \right)^{\frac{1}{q}} \\ \leq K_{p,q}^m \left(\int_{[0,1]^m} \left\| \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n y_{i_1, \dots, i_m} r_{i_1}(t_1) \cdots r_{i_m}(t_m) \right\|^p dt_1 \cdots dt_m \right)^{\frac{1}{p}},$$

para todo espaço de Banach Y e toda sequência $(y_{i_1, \dots, i_m})_{i_1, \dots, i_m=1}^n$ em Y .

O resultado seguinte mostra como espaços de cotipo q se comportam com somas em múltiplos índices, conhecido como a desigualdade de cotipo múltipla:

Teorema 3.2.3 (veja [78, Lemma 3.9]) Seja Y um espaço de cotipo q . Se $(y_{i_1, \dots, i_m})_{i_1, \dots, i_m=1}^n$ é uma matriz em Y , então

$$\left(\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n \|y_{i_1, \dots, i_m}\|^q \right)^{1/q} \\ \leq c_q(Y)^m \left(\int_{[0,1]^m} \left\| \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n y_{i_1, \dots, i_m} r_{i_1}(t_1) \cdots r_{i_m}(t_m) \right\|^q dt_1 \cdots dt_m \right)^{1/q}.$$

Pela desigualdade de cotipo múltipla (Teorema 3.2.3) e pela desigualdade de Kahane–Khinchin múltipla (Teorema 3.2.2), sabemos que

$$\left(\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n \|y_{i_1, \dots, i_m}\|^q \right)^{1/q} \\ \leq c_q(Y)^m K_{s,q}^m \left(\int_{[0,1]^m} \left\| \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n y_{i_1, \dots, i_m} r_{i_1}(t_1) \cdots r_{i_m}(t_m) \right\|^s dt_1 \cdots dt_m \right)^{\frac{1}{s}}, \quad (3.10)$$

para todo $s > 0$.

Nosso próximo resultado mostra como é o crescimento da constante resultante quando consideramos espaços de cotipo 2 e trocamos a norma ℓ_2 por uma norma ℓ_r , $r < 2$, no lado esquerdo da desigualdade (3.10).

Teorema 3.2.4 Sejam $Y \neq \{0\}$ um espaço de cotipo 2 e $p \in (0, \infty)$. Se $r \in (0, 2)$ e $(y_{i_1, \dots, i_m})_{i_1, \dots, i_m=1}^n$ é uma matriz em Y , então existe uma constante $c_{m,p} > 0$ tal que

$$\left(\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n \|y_{i_1, \dots, i_m}\|^r \right)^{1/r} \\ \leq c_{m,p} n^{m(\frac{1}{r} - \frac{1}{2})} \left(\int_{[0,1]^m} \left\| \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n y_{i_1, \dots, i_m} r_{i_1}(t_1) \cdots r_{i_m}(t_m) \right\|^p dt_1 \cdots dt_m \right)^{\frac{1}{p}},$$

e o expoente $m(\frac{1}{r} - \frac{1}{2})$ é ótimo.

Demonstração. A prova é análoga à do Teorema 3.1.1. Seja $s > 0$ tal que $\frac{1}{r} = \frac{1}{2} + \frac{1}{s}$, pela desigualdade de Hölder (Teorema A.3 no apêndice), temos

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n \|y_{i_1, \dots, i_m}\|^r \right)^{\frac{1}{r}} &\leq \left(\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n \|y_{i_1, \dots, i_m}\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n |1|^s \right)^{\frac{1}{s}} \\ &= n^{m \cdot (\frac{1}{r} - \frac{1}{2})} \cdot \left(\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n \|y_{i_1, \dots, i_m}\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Usando o fato de Y ter cotipo 2 e a desigualdade de Kahane–Khinchin múltipla, segue que

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n \|y_{i_1, \dots, i_m}\|^r \right)^{\frac{1}{r}} \\ &\leq c_2(Y)^m K_{1,2}^m n^{m(\frac{1}{r} - \frac{1}{2})} \int_{[0,1]^m} \left\| \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n r_{i_1}(t_1) \cdots r_{i_m}(t_m) y_{i_1, \dots, i_m} \right\| dt_1 \cdots dt_m. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Para provar a otimalidade do expoente $m(\frac{1}{r} - \frac{1}{2})$, vamos supor que

$$\left(\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n \|y_{i_1, \dots, i_m}\|^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq c_m n^t \int_{[0,1]^m} \left\| \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n r_{i_1}(t_1) \cdots r_{i_m}(t_m) y_{i_1, \dots, i_m} \right\| dt_1 \cdots dt_m,$$

para certos $c_m > 0$ e $t > 0$. Considere a forma $(m+1)$ -linear $T_{m+1,n}$ dada pela desigualdade de Kahane–Salem–Zygmund (Teorema 3.1.2) e defina

$$y_{i_1, \dots, i_m}^{(i_{m+1})} = T_{m+1,n}(e_{i_1}, \dots, e_{i_{m+1}})y,$$

para $y \in Y$ fixado com $\|y\| = 1$. Pela dualidade $(c_0)^* = \ell_1$ e usando o fato de que o funcional linear $\Psi_{m+1,n} := T_{m+1,n}(\sum_{i_1=1}^n r_{i_1}(t_1)e_{i_1}, \dots, \sum_{i_m=1}^n r_{i_m}(t_m)e_{i_m}, \cdot)$ é absolutamente $(1; 1)$ -somante, com norma 1-somante igual à norma do supremo (veja Proposição A.1 no apêndice), temos

$$\begin{aligned} &\sum_{i_{m+1}=1}^n \left(\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n \|y_{i_1, \dots, i_m}^{(i_{m+1})}\|^r \right)^{\frac{1}{r}} \\ &\leq \sum_{i_{m+1}=1}^n c_m n^t \int_{[0,1]^m} \left\| \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n r_{i_1}(t_1) \cdots r_{i_m}(t_m) y_{i_1, \dots, i_m}^{(i_{m+1})} \right\| dt_1 \cdots dt_m \\ &= \sum_{i_{m+1}=1}^n c_m n^t \int_{[0,1]^m} \left| \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n r_{i_1}(t_1) \cdots r_{i_m}(t_m) T_{m+1,n}(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_{m+1}}) \right| dt_1 \cdots dt_m \\ &= c_m n^t \int_{[0,1]^m} \sum_{i_{m+1}=1}^n \left| T_{m+1,n} \left(\sum_{i_1=1}^n r_{i_1}(t_1)e_{i_1}, \dots, \sum_{i_m=1}^n r_{i_m}(t_m)e_{i_m}, e_{i_{m+1}} \right) \right| dt_1 \cdots dt_m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq c_m n^t \sup_{t_1, \dots, t_m \in [0,1]} \|\Psi_{m+1,n}\| \cdot \sup_{\varphi \in B_{(c_0)^*}} \sum_{i_{m+1}=1}^n |\varphi(e_{i_{m+1}})| \\
&\leq c_m n^t \sup_{t_1, \dots, t_m \in [0,1]} \|T_{m+1,n}\| \left\| \sum_{i_1=1}^n r_{i_1}(t_1) e_{i_1} \right\|_{c_0} \cdots \left\| \sum_{i_m=1}^n r_{i_m}(t_m) e_{i_m} \right\|_{c_0} \\
&\leq c_m n^t K_{m+1} n^{\frac{m+2}{2}},
\end{aligned}$$

pois

$$\sup_{\varphi \in B_{(c_0)^*}} \sum_{i_{m+1}=1}^n |\varphi(e_{i_{m+1}})| = 1.$$

Logo

$$n^{1+\frac{m}{r}} \leq c_m n^t K_{m+1} n^{\frac{m+2}{2}},$$

para todo n . Como n é arbitrário, temos

$$t \geq m \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2} \right).$$

Pelo Teorema 3.2.2, sabemos que a mesma estimativa vale quando mudamos a norma- L_1 em (3.11) por qualquer norma- L_p . ■

Observação 3.2.5 *Um resultado similar ao apresentado na Observação 3.1.3 vale para esse caso de espaços de cotipo 2.*

Quando Y é um espaço de Hilbert podemos provar um resultado semelhante ao da Proposição 3.1.4:

Teorema 3.2.6 *Sejam m e n inteiros positivos e $(y_{i_1, \dots, i_m})_{i_1, \dots, i_m=1}^n$ uma sequência em um espaço de Hilbert Y . Se $r \in [2, \infty)$, então*

$$\left(\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n \|y_{i_1, \dots, i_m}\|^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq 2^{\frac{m}{r}} \int_{[0,1]^m} \left\| \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n r_{i_1}(t_1) \cdots r_{i_m}(t_m) y_{i_1, \dots, i_m} \right\| dt_1 \cdots dt_m,$$

e a constante $2^{\frac{m}{r}}$ é ótima.

Demonstração. A prova é semelhante à demonstração da Proposição 3.1.4. Seja $r \geq 2$. Vamos denotar por C_r a constante ótima satisfazendo

$$\left(\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n \|y_{i_1, \dots, i_m}\|^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq C_r \int_{[0,1]^m} \left\| \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n r_{i_1}(t_1) \cdots r_{i_m}(t_m) y_{i_1, \dots, i_m} \right\| dt_1 \cdots dt_m,$$

para toda sequência de vetores $(y_{i_1, \dots, i_m})_{i_1, \dots, i_m=1}^n$ em Y e para qualquer n . Sabe-se que $K_{1,2} = \sqrt{2}$ e $c_2(Y) = 1$ (veja [47] e [36], Corollary 11.8). Seja $\theta = \frac{2}{r}$. Usando a

desigualdade de Hölder interpolativa (Teorema A.4 no apêndice), a desigualdade (3.10) e o Lema 3.1.5, concluímos que

$$\begin{aligned}
& \left(\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n \|y_{i_1, \dots, i_m}\|^r \right)^{\frac{1}{r}} \\
& \leq \left(\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n \|y_{i_1, \dots, i_m}\|^2 \right)^{\frac{\theta}{2}} \cdot \left(\max_{\substack{i_k=1, \dots, n \\ k=1, \dots, m}} \|y_{i_1, \dots, i_m}\| \right)^{1-\theta} \\
& \leq \left(c_2(Y)^m K_{1,2}^m \int_{[0,1]^m} \left\| \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n r_{i_1}(t_1) \cdots r_{i_m}(t_m) y_{i_1, \dots, i_m} \right\| dt_1 \cdots dt_m \right)^{\theta} \\
& \quad \times \left(\int_{[0,1]^m} \left\| \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n r_{i_1}(t_1) \cdots r_{i_m}(t_m) y_{i_1, \dots, i_m} \right\| dt_1 \cdots dt_m \right)^{1-\theta} \\
& = 2^{\frac{m}{r}} \int_{[0,1]^m} \left\| \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n r_{i_1}(t_1) \cdots r_{i_m}(t_m) y_{i_1, \dots, i_m} \right\| dt_1 \cdots dt_m.
\end{aligned}$$

Agora vamos provar que a constante $2^{\frac{m}{r}}$ é ótima. Sejam

$$y_{i_1, \dots, i_m}^{(i_{m+1})} = R_{m+1}(e_{i_1}, \dots, e_{i_{m+1}})y,$$

onde $y \in Y$ é um vetor fixado com $\|y\| = 1$ e R_{m+1} é a forma usada na Proposição 3.1.4. Usando a dualidade $(c_0)^* = \ell_1$, temos

$$\begin{aligned}
& \sum_{i_{m+1}=1}^{2^m} \left(\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^{2^m} \|y_{i_1, \dots, i_m}^{(i_{m+1})}\|^r \right)^{\frac{1}{r}} \\
& \leq \sum_{i_{m+1}=1}^{2^m} C_r \int_{[0,1]^m} \left| \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^{2^m} r_{i_1}(t_1) \cdots r_{i_m}(t_m) R_{m+1}(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_{m+1}}) \right| dt_1 \cdots dt_m \\
& = C_r \int_{[0,1]^m} \sum_{i_{m+1}=1}^{2^m} \left| R_{m+1} \left(\sum_{i_1=1}^{2^m} r_{i_1}(t_1) e_{i_1}, \dots, \sum_{i_m=1}^{2^m} r_{i_m}(t_m) e_{i_m}, e_{i_{m+1}} \right) \right| dt_1 \cdots dt_m \\
& \leq C_r \sup_{t_1, \dots, t_m \in [0,1]} \sum_{i_{m+1}=1}^{2^m} \left| R_{m+1} \left(\sum_{i_1=1}^{2^m} r_{i_1}(t_1) e_{i_1}, \dots, \sum_{i_m=1}^{2^m} r_{i_m}(t_m) e_{i_m}, e_{i_{m+1}} \right) \right| \\
& \leq C_r \sup_{t_1, \dots, t_m \in [0,1]} \left\| R_{m+1} \left(\sum_{i_1=1}^{2^m} r_{i_1}(t_1) e_{i_1}, \dots, \sum_{i_m=1}^{2^m} r_{i_m}(t_m) e_{i_m}, \cdot \right) \right\| \sup_{\varphi \in B_{c_0^*}} \sum_{i_{m+1}=1}^{2^m} |\varphi(e_{i_{m+1}})| \\
& \leq C_r \sup_{t_1, \dots, t_m \in [0,1]} \|R_{m+1}\| \left\| \sum_{i_1=1}^{2^m} r_{i_1}(t_1) e_{i_1} \right\|_{c_0} \cdots \left\| \sum_{i_m=1}^{2^m} r_{i_m}(t_m) e_{i_m} \right\|_{c_0} \\
& \leq 2^m C_r.
\end{aligned}$$

Como observado na prova da Proposição [3.1.4](#), em R_{m+1} há exatamente 2^m monômios envolvendo cada uma das 2^m primeiras coordenadas da sua última variável. Assim,

$$\sum_{i_{m+1}=1}^{2^m} \left(\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^{2^m} \|R_{m+1}(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_m}) y\|^r \right)^{\frac{1}{r}} = 2^m \cdot (2^m)^{\frac{1}{r}}.$$

Logo

$$2^m \cdot 2^{\frac{m}{r}} \leq 2^m C_r$$

e concluimos que

$$C_r \geq 2^{\frac{m}{r}},$$

finalizando a prova. ■

Apêndices

Apêndice A

Resultados auxiliares

Este apêndice é destinado a apresentar resultados usados nas demonstrações dos nossos teoremas e que preferimos não colocar no corpo do texto. Também apresentaremos resultados folclóricos que tornarão o texto mais autossuficiente.

A.1 Resultados clássicos

O teorema de inclusão a seguir é muito usado como ferramenta na prova de resultados de inclusão e de coincidência. Um exemplo é o nosso teorema de inclusão estendido, demonstrado no Capítulo 2.

Teorema A.1 (veja [36, Theorem 10.4]) *Sejam $s \geq r$ e $q \geq p$. Se*

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{r} \leq \frac{1}{q} - \frac{1}{s},$$

então todo operador linear absolutamente $(r; p)$ -somante é também absolutamente $(s; q)$ -somante.

A desigualdade de Kahane–Salem–Zygmund (KSZ) fornece formas multilineares com coeficientes ± 1 e com normas relativamente pequenas. Essa desigualdade possui várias aplicações, sendo muito útil para certos problemas de otimalidade, como, por exemplo, os expoentes ótimos das desigualdades de Hardy–Littlewood e Bohnenblust–Hille. Em algumas ocasiões na tese, usamos a seguinte versão da KSZ, recentemente provada em [70]:

Teorema A.2 (veja [70, Theorem 1.1]) *Sejam m e n inteiros positivos e sejam $p_1, \dots, p_m \in [1, \infty]$. Então existem uma constante universal C (dependendo somente de m), uma escolha de sinais $\varepsilon_j = \pm 1$ e uma forma m -linear $A_{m,n} : \ell_{p_1}^n \times \dots \times \ell_{p_m}^n \rightarrow \mathbb{K}$ do tipo*

$$A_{m,n}(z^{(1)}, \dots, z^{(m)}) = \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n \pm z_{i_1}^{(1)} \dots z_{i_m}^{(m)},$$

tais que

$$\|A_{m,n}\| \leq C \cdot n^{\frac{1}{\min\{\max\{2, p_k^*\}\}} + \sum_{k=1}^m \max\{\frac{1}{2} - \frac{1}{p_k}, 0\}}.$$

Além disso, o expoente $\frac{1}{\min\{\max\{2, p_k^*\}\}} + \sum_{k=1}^m \max\{\frac{1}{2} - \frac{1}{p_k}, 0\}$ é ótimo.

A desigualdade de Hölder foi apresentada em [18] para espaços L_p e, desde então, algumas versões surgiram. Apresentamos a seguir duas delas e recomendamos [5] para mais detalhes históricos, outras versões e aplicações.

Teorema A.3 (veja [5] e [18]) *Sejam m , n e N inteiros positivos e sejam $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_m)$, $\mathbf{q}(1) = (q_1(1), \dots, q_m(1))$, $\dots$, $\mathbf{q}(N) = (q_1(N), \dots, q_m(N)) \in (0, \infty]^m$ tais que*

$$\frac{1}{r_i} = \frac{1}{q_i(1)} + \dots + \frac{1}{q_i(N)}, \quad i \in \{1, 2, \dots, m\},$$

e seja $\mathbf{a}_k := (a_{\mathbf{i}}^k)_{\mathbf{i} \in \mathbb{N}^m}$, $k = 1, \dots, N$, uma matriz escalar. Então

$$\left\| \prod_{k=1}^N \mathbf{a}_k \right\|_{\mathbf{r}} \leq \prod_{k=1}^N \|\mathbf{a}_k\|_{\mathbf{q}(k)}.$$

Em particular, se $\mathbf{r}, \mathbf{q}(1), \dots, \mathbf{q}(N) \in [1, \infty)^m$, temos

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i_1=1}^n \left(\dots \left(\sum_{i_m=1}^n |a_{\mathbf{i}}^1 \dots a_{\mathbf{i}}^N|^{r_m} \right)^{\frac{r_{m-1}}{r_m}} \dots \right)^{\frac{r_1}{r_2}} \right)^{\frac{1}{r_1}} \\ & \leq \prod_{k=1}^N \left[\left(\sum_{i_1=1}^n \left(\dots \left(\sum_{i_m=1}^n |a_{\mathbf{i}}^k|^{q_m(k)} \right)^{\frac{q_{m-1}(k)}{q_m(k)}} \dots \right)^{\frac{q_1(k)}{q_2(k)}} \right)^{\frac{1}{q_1(k)}} \right]. \end{aligned}$$

Para um número positivo θ , definiremos $\mathbf{a}^\theta := (a_{\mathbf{i}}^\theta)_{\mathbf{i} \in \mathbb{N}^m}$. Não é difícil ver que

$$\|\mathbf{a}^\theta\|_{\mathbf{q}/\theta} = \|\mathbf{a}\|_{\mathbf{q}}^\theta,$$

onde $\mathbf{q}/\theta := (q_1/\theta, \dots, q_m/\theta)$.

Teorema A.4 (veja [5] e [18]) Sejam m, n e N inteiros positivos, $\mathbf{r}, \mathbf{q}(1), \dots, \mathbf{q}(N) \in (0, \infty]^m$ e sejam $\theta_1, \dots, \theta_N \in [0, 1]$ tais que $\theta_1 + \dots + \theta_N = 1$ e

$$\frac{1}{r_i} = \frac{\theta_1}{q_i(1)} + \dots + \frac{\theta_N}{q_i(N)}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Então, para toda matriz escalar $\mathbf{a} := (a_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \mathbb{N}^m}$, temos

$$\|\mathbf{a}\|_{\mathbf{r}} \leq \prod_{k=1}^N \|\mathbf{a}\|_{\mathbf{q}(k)}^{\theta_k}.$$

Em particular, se $\mathbf{r}, \mathbf{q}(1), \dots, \mathbf{q}(N) \in [1, \infty)^m$, a desigualdade acima pode ser reescrita

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i_1=1}^n \left(\dots \left(\sum_{i_m=1}^n |a_{\mathbf{i}}|^{r_m} \right)^{\frac{r_{m-1}}{r_m}} \dots \right)^{\frac{r_1}{r_2}} \right)^{\frac{1}{r_1}} \\ & \leq \prod_{k=1}^N \left[\left(\sum_{i_1=1}^n \left(\dots \left(\sum_{i_m=1}^n |a_{\mathbf{i}}|^{q_m(k)} \right)^{\frac{q_{m-1}(k)}{q_m(k)}} \dots \right)^{\frac{q_1(k)}{q_2(k)}} \right)^{\frac{1}{q_1(k)}} \right]^{\theta_k}. \end{aligned}$$

A.2 Resultados de apoio

Nesta seção, apresentaremos alguns resultados folclóricos muito usados em trabalhos nessa linha de pesquisa. Apresentaremos a prova porque não achamos referência com a demonstração detalhada.

Proposição A.1 *Todo funcional linear $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ é $(1, 1)$ -somante e sua norma $(1, 1)$ -somante coincide com a norma do supremo.*

Demonstração. Queremos mostrar que existe $C > 0$ tal

$$\sum_{i=1}^n |f(x_i)| \leq C \cdot \|(x_i)_{i=1}^n\|_{w,1}, \quad (\text{A.1})$$

para todo n inteiro positivo e quaisquer $x_1, \dots, x_n$ vetores em X . Se $f = 0$ a desigualdade acima é claramente satisfeita. Vamos assumir então $f \neq 0$. Observe que $(1/\|f\|) \cdot f \in B_{X^*}$. Assim

$$\sum_{i=1}^n \frac{|f(x_i)|}{\|f\|} \leq \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^n |\varphi(x_i)| \right),$$

o que implica

$$\sum_{i=1}^n |f(x_i)| \leq \|f\| \cdot \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^n |\varphi(x_i)| \right) = \|f\| \cdot \|(x_i)_{i=1}^n\|_{w,1}.$$

Logo f é $(1,1)$ -somante e $\|f\|_{(1,1)} \leq \|f\|_{\text{sup}}$. Por outro lado, seja $x \in X$ e considere $x_1 = \dots = x_n = x$ em (A.1). Assim

$$\|f(x)\| \leq C \cdot \|x\|, \text{ para todo } x \in X,$$

e, portanto, $\|f\|_{\text{sup}} \leq C$, para todo C satisfazendo (A.1). Logo $\|f\|_{\text{sup}} \leq \|f\|_{(1,1)}$ e concluimos que $\|f\|_{\text{sup}} = \|f\|_{(1,1)}$. ■

O próximo resultado, embora simples, foi muito útil em várias ocasiões:

Proposição A.2 (Inclusão em espaços ℓ_p) *Se $1 \leq p \leq q \leq \infty$, então $\ell_p \subseteq \ell_q$ e $\|\cdot\|_q \leq \|\cdot\|_p$.*

Demonstração. Seja $a := (a_i)_{i=1}^\infty \in \ell_p$. Como

$$|a_j| \leq \left(\sum_{i=1}^\infty |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} := \|a\|_p, \text{ para todo } j = 1, 2, \dots \quad (\text{A.2})$$

o caso $q = \infty$ é imediato e consideraremos $q < \infty$. Note que, para todo $j = 1, 2, \dots$

$$|a_j|^q = |a_j|^p \cdot |a_j|^{q-p} \leq |a_j|^p \cdot \|a\|_p^{q-p}.$$

Assim, somando em j , cada membro da desigualdade acima, obtemos

$$\sum_{j=1}^\infty |a_j|^q \leq \|a\|_p^{q-p} \cdot \sum_{j=1}^\infty |a_j|^p = \|a\|_p^q.$$

Logo,

$$\left(\sum_{j=1}^\infty |a_j|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \|a\|_p < \infty.$$

■

Proposição A.3 *Em ℓ_p , tem-se $\|(e_i)_i^n\|_{w,m^*} = 1$, sempre que $p \geq m$.*

Demonstração. Como $p \geq m$, então $p^* \leq m^*$. Assim

$$\|(e_i)_i^n\|_{w,m^*} = \sup_{\varphi \in B_{(\ell_p)^*}} \left(\sum_{i=1}^n |\varphi(e_i)|^{m^*} \right)^{\frac{1}{m^*}}$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{Prop. \text{A.2}}{\leq} \sup_{\varphi \in B_{(\ell_p)^*}} \left(\sum_{i=1}^n |\varphi(e_i)|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \\
& \stackrel{dualidade}{=} \sup_{\varphi \in B_{(\ell_p)^*}} \|\varphi\|_{(\ell_p)^*} \\
& = 1.
\end{aligned}$$

Considerando o funcional $\varphi((x_j)_j) = x_1$, mostra-se a outra desigualdade. ■

Referências Bibliográficas

- [1] D. Achour, L. Mezrag, On the Cohen strongly p -summing multilinear operators. J. Math. Anal. Appl. **327** (2007), no. 1, 550–563.
- [2] R. A. Adams, J. J. F. Fournier, Sobolev spaces. Second edition. Pure and Applied Mathematics, 140. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2003
- [3] N. Albuquerque, G. Araújo, W. Cavalcante, T. Nogueira, D. Núñez–Alarcón, D. Pellegrino, P. Rueda, On summability of multilinear operators and applications. Ann. Funct. Anal. **9** (2018), no. 4, 574–590.
- [4] N. Albuquerque, G. Araújo, M. Maia, T. Nogueira, D. Pellegrino, J. Santos, Optimal Hardy–Littlewood inequalities uniformly bounded by a universal constant. Ann. Math. Blaise Pascal **25** (2018), no. 1, 1–20.
- [5] N. Albuquerque, G. Araújo, D. Pellegrino, J. B. Seoane-Sepúlveda, Hölder’s inequality: some recent and unexpected applications. Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin **24** (2017), no. 2, 199–225.
- [6] N. Albuquerque, F. Bayart, D. Pellegrino, J. B. Seoane–Sepúlveda, Sharp generalizations of the multilinear Bohnenblust–Hille inequality. J. Funct. Anal. **266** (2014), no. 6, 3726–3740.
- [7] N. Albuquerque, L. Rezende, Anisotropic regularity principle in sequence spaces and applications. Commun. Contemp. Math. **20** (2018), no. 7, 1750087, 14 pp.
- [8] G. Araújo, Some classical inequalities, summability of multilinear operators and strange functions, PhD Thesis, UFPB-UFCG, 2016.

- [9] G. Araújo, K. Câmara, Universal bounds for the Hardy–Littlewood inequalities on multilinear forms. *Results Math.* **73** (2018), no. 3, Paper No. 124, 10 pp.
- [10] G. Araújo, D. Pellegrino, A Gale–Berlekamp permutation-switching problem in higher dimensions. *European J. Combin.* **77** (2019), 17–30.
- [11] G. Araújo, D. Pellegrino, Lower bounds for the constants of the Hardy–Littlewood inequalities. *Linear Algebra Appl.* **463** (2014), 10–15.
- [12] G. Araújo, D. Pellegrino, On the constants of the Bohnenblust–Hille and Hardy–Littlewood inequalities. *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)* **48** (2017), no. 1, 141–169.
- [13] G. Araújo, D. Pellegrino, D. D. da Silva e Silva, On the upper bounds for the constants of the Hardy–Littlewood inequality. *J. Funct. Anal.* **267** (2014), no. 6, 1878–1888.
- [14] R. Aron, D. Núñez–Alarcón, D. Pellegrino, D. M. Serrano–Rodríguez, Optimal exponents for Hardy–Littlewood inequalities for m -linear operators. *Linear Algebra Appl.* **531** (2017), 399–422.
- [15] S. Arunachalam, S. Chakraborty, M. Koucky, N. Saurabh, R. de Wolf, Improved bounds on Fourier entropy and Min-entropy. *Electron. Colloquium Comput. Complexity (ECCC)*. **25** (2018), 167.
- [16] F. Bayart, Multiple summing maps: Coordinatewise summability, inclusion theorems and p -Sidon sets. *J. Funct. Anal.* **274** (2018), no. 4, 1129–1154.
- [17] F. Bayart, D. Pellegrino, J. B. Seoane–Sepúlveda, The Bohr radius of the n -dimensional polydisc is equivalent to $\sqrt{(\log n)/n}$. *Adv. Math.* **264** (2014), 726–746.
- [18] A. Benedek, R. Panzone, The space L_p , with mixed norm. *Duke Math. J.* **28** (1961), 301–324.
- [19] R. Blei, *Analysis in Integer and Fractional Dimensions*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 71. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [20] H. P. Boas, Majorant series. *J. Korean Math. Soc.* **37** (2000), no. 2, 321–337.

- [21] H. F. Bohnenblust, E. Hille, On the absolute convergence of Dirichlet series. *Ann. of Math.* **32** (1931), no. 3, 600–622.
- [22] G. Botelho, D. Pellegrino, E. Teixeira, *Fundamentos de análise funcional*. Coleção Textos Universitários. SBM, Rio de Janeiro, 2015.
- [23] E. Çaliskan, D. Pellegrino, On the multilinear generalizations of the concept of absolutely summing operators. *Rocky Mountain J. Math.* **37** (2007), no. 4, 1137–1154.
- [24] J. R. Campos, W. Cavalcante, V. V. Fávaro, D. Pellegrino, D. Serrano-Rodríguez, Polynomial and multilinear Hardy-Littlewood inequalities: analytical and numerical approaches. *Math. Inequal. Appl.* **21** (2018), no. 2, 329–344.
- [25] J. R. Campos, P. Jiménez-Rodríguez, G. A. Muñoz-Fernández, D. Pellegrino, J. B. Seoane-Sepúlveda, On the real polynomial Bohnenblust–Hille inequality. *Linear Algebra Appl.* **465** (2015), 391–400.
- [26] D. Carando, A. Defant, P. Sevilla-Peris, The Bohnenblust–Hille inequality combined with an inequality of Helson. *Proc. Amer. Math. Soc.* **143** (2015), no. 12, 5233–5238.
- [27] W. Cavalcante, Some applications of the Regularity Principle in sequence spaces. *Positivity*. **22** (2018), no. 1, 191–198.
- [28] W. Cavalcante, D. Núñez-Alarcón, Remarks on an inequality of Hardy and Littlewood. *Quaest. Math.* **39** (2016), no. 8, 1101–1113.
- [29] W. Cavalcante, D. Pellegrino, Bohnenblust–Hille inequalities: analytical and computational aspects. *An. Acad. Brasil. Ciênc.* **91** (2019), no. 1, suppl. 1, e20170398, 19 pp.
- [30] W. Cavalcante, D. Pellegrino, E. Teixeira, Geometry of multilinear forms. *Commun. Contemp. Math.* **22** (2020), no. 2, 1950011, 26 pp.
- [31] A. M. Davie, Quotient algebras of uniform algebras. *J. Lond. Math. Soc.* **7** (1973) 31–40.

- [32] A. Defant, K. Floret, Tensor norms and operator ideals. North-Holland Mathematics Studies, 176. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1993.
- [33] A. Defant, L. Frerick, J. Ortega–Cerdà, M. Ounaïes, K. Seip, The Bohnenblust–Hille inequality for homogeneous polynomials is hypercontractive. *Ann. of Math.* (2) **174** (2011), no. 1, 485–497.
- [34] A. Defant, D. Popa, U. Schwaerting, Coordinatewise multiple summing operators in Banach spaces. *J. Funct. Anal.* **259** (2010), no. 1, 220–242.
- [35] A. Defant, P. Sevilla-Peris, The Bohnenblust–Hille cycle of ideas from a modern point of view. *Funct. Approx. Comment. Math.* **50** (2014), no. 1, [2013 on table of contents], 55–127.
- [36] J. Diestel, H. Jarchow, A. Tonge, Absolutely summing operators. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 43. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [37] V. Dimant, P. Sevilla-Peris, Summation of coefficients of polynomials on ℓ_p spaces. *Publ. Mat.* **60** (2016), no. 2, 289–310.
- [38] D. Diniz, G. A. Muñoz–Fernández, D. Pellegrino, J. B. Seoane–Sepúlveda, Lower bounds for the constants in the Bohnenblust–Hille inequality: the case of real scalars. *Proc. Amer. Math. Soc.* **142** (2014), no. 2, 575–580.
- [39] D. Diniz, G. A. Muñoz–Fernández, D. Pellegrino, J. B. Seoane–Sepúlveda, The asymptotic growth of the constants in the Bohnenblust–Hille inequality is optimal. *J. Funct. Anal.* **263** (2012), no. 2, 415–428.
- [40] D. J. H. Garling, Inequalities: a journey into linear analysis. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.
- [41] A. Grothendieck, Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques. *Bol. Soc. Mat. Sao Paulo* **8** (1956), 1–79.
- [42] U. Haagerup, The best constants in the Khintchine inequality. *Studia Math.* **70** (1981), no. 3, 231–283 (1982).

- [43] R. R. Hall, On a conjecture of Littlewood. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **78** (1975), no. 3, 443–445.
- [44] G. Hardy, J. E. Littlewood, Bilinear forms bounded in space $[p, q]$. *Quart. J. Math.* **5** (1934), no. 1, 241–254.
- [45] S. Kaijser, Some results in the metric theory of tensor products. *Studia Math.* **63** (1978), no. 2, 157–170.
- [46] A. Khintchine, Über dyadische Brüche. (German) *Math. Z.* **18** (1923), no. 1, 109–116.
- [47] R. Latała, K. Oleszkiewicz, On the best constant in the Khinchin–Kahane inequality. *Studia Math.* **109** (1994), no. 1, 101–104.
- [48] J. Lindenstrauss, A. Pelczyński, Absolutely summing operators in L_p -spaces and their applications. *Studia Math.* **29** (1968), 275–326.
- [49] J. E. Littlewood, A theorem on power series, *Proc. London Math. Soc.* **23** (1925), 94–103.
- [50] J. E. Littlewood, On bounded bilinear forms in an infinite number of variables. *Quart. J. (Oxford Ser.)* **1** (1930), 164–174.
- [51] J. E. Littlewood, On inequalities in the theory of functions, *Proc. London Math. Soc.* **23** (1925), 481–519.
- [52] B. M. Makarov, M. G. Goluzina, A. A. Lodkin, A. N. Podkorytov, Selected problems in real analysis. *Translations of Mathematical Monographs*, 107. American Mathematical Society, Providence, RI, 1992.
- [53] M. Maia, T. Nogueira, D. Pellegrino, The Bohnenblust–Hille inequality for polynomials whose monomials have a uniformly bounded number of variable. *Integral Equations Operator Theory* **88** (2017), 143–149.
- [54] M. C. Matos, Fully absolutely summing and Hilbert–Schmidt multilinear mappings. *Collect. Math.* **54** (2003), no. 2, 111–136.

- [55] B. S. Mitiagin, A. Pelczyński, Nuclear operators and approximative dimension. Proceedings International Congress of Mathematics, Moscow, 1966, 366–372.
- [56] A. Montanaro, Some applications of hypercontractive inequalities in quantum information theory. J. Math. Phys. **53** (2012), no. 12, 122206, 15 pp.
- [57] J. Mujica, Complex analysis in Banach spaces. North-Holland Mathematics Studies, 120. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1986.
- [58] G. A. Muñoz-Fernández, D. Pellegrino, J. B. Seoane-Sepúlveda, Estimates for the asymptotic behaviour of the constants in the Bohnenblust-Hille inequality. Linear Multilinear Algebra **60** (2012), no. 5, 573–582.
- [59] A. Nunes, A new estimate for the constants of an inequality due to Hardy and Littlewood. Linear Algebra Appl. **526** (2017), 27–34.
- [60] D. Núñez-Alarcón, A note on the polynomial Bohnenblust–Hille inequality. J. Math. Anal. Appl. **407** (2013), no. 1, 179–181.
- [61] D. Núñez-Alarcón, D. Paulino, D. Pellegrino, Super-critical Hardy–Littlewood inequalities for multilinear forms. An. Acad. Brasil. Ciênc., to appear.
- [62] D. Núñez-Alarcón, D. Pellegrino, J. B. Seoane-Sepúlveda, D. M. Serrano-Rodríguez, There exist multilinear Bohnenblust–Hille constants $(C_n)_{n=1}^{\infty}$ with $\lim_{n \rightarrow \infty} (C_{n+1} - C_n) = 0$. J. Funct. Anal. **264**(2) (2013), 429–463.
- [63] B. Osikiewicz, A. Tonge, An interpolation approach to Hardy–Littlewood inequalities for norms of operators on sequence spaces. Linear Algebra Appl. **331** (2001), no. 1-3, 1–9.
- [64] D. Paulino, Critical Hardy–Littlewood inequality for multilinear forms. Rend. Circ. Mat. Palermo, II. **69** (2020), 369–380.
- [65] D. Paulino, D. Pellegrino, J. Santos, Remarks on the Bohnenblust–Hille inequalities. Port. Math. **76** (2020), no. 3–4, 395–406.
- [66] D. Pellegrino, Aplicações entre espaços de Banach relacionadas à convergência de séries, PhD Thesis, UNICAMP, 2002.

- [67] D. Pellegrino, The optimal constants of the mixed (ℓ_1, ℓ_2) -Littlewood inequality. *J. Number Theory* **160** (2016), 11–18.
- [68] D. Pellegrino, D. Santos, J. Santos, Optimal blow up rate for the constants of Khinchin type inequalities. *Quaest. Math.* **41** (2018), no. 3, 303–318.
- [69] D. Pellegrino, J. B. Seoane-Sepúlveda, New upper bounds for the constants in the Bohnenblust-Hille inequality. *J. Math. Anal. Appl.* **386** (2012), no. 1, 300–307.
- [70] D. Pellegrino, D. Serrano-Rodríguez, J. Silva, On unimodular multilinear forms with small norms on sequence spaces. *Linear Algebra Appl.* **595** (2020), 24–32.
- [71] D. Pellegrino, E. Teixeira, Towards sharp Bohnenblust–Hille constants. *Commun. Contemp. Math.* **20** (2018), no. 3, 1750029, 33 pp.
- [72] D. Pellegrino, J. Santos, D. Serrano-Rodríguez, E. Teixeira, A regularity principle in sequence spaces and applications. *Bull. Sci. Math.* **141** (2017), no. 8, 802–837.
- [73] D. Pérez-García, I. Villanueva, Multiple summing operators on Banach spaces. *J. Math. Anal. Appl.* **285** (2003), no. 1, 86–96.
- [74] D. Pérez-García, I. Villanueva, Multiple summing operators on $C(K)$ spaces. *Ark. Mat.* **42** (2004), no. 1, 153–171.
- [75] A. Pietsch, Absolut p -summierende Abbildungen in normierten Räumen. *Studia Math.* **27** (1967), 333–353.
- [76] D. Popa, Multiple Rademacher means and their applications. *J. Math. Anal. Appl.* **386** (2012), no. 2, 699–708.
- [77] T. Praciano-Pereira, On bounded multilinear forms on a class of ℓ_p spaces. *J. Math. Anal. Appl.* **81** (1981), no. 2, 561–568.
- [78] D. Pérez-García, Aplicaciones multilineales absolutamente sumantes, PhD Thesis, Universidad Complutense de Madrid, 2004.
- [79] H. Queffélec, Bohr’s vision of ordinary Dirichlet series; old and new results. *J. Anal.* **3** (1995), 43–60.

- [80] J. Santos, T. Velanga, On the Bohnenblust–Hille inequality for multilinear forms. *Results Math.* **72** (2017), 239–244.
- [81] B. Simon, *Convexity: an analytic viewpoint*. Cambridge Tracts in Mathematics, 187. Cambridge University Press, New York, 2011.
- [82] S. J. Szarek, On the best constants in the Khinchin inequality. *Studia Math.* **58** (1976), no. 2, 197–208.
- [83] B. Tomaszewski, A simple and elementary proof of the Khintchine inequality with the best constant. *Bull. Sci. Math. (2)* **111** (1987), no. 1, 103–109.
- [84] D. Tomaz, Hardy–Littlewood inequalities for multipolynomials. *Adv. Oper. Theory* **4** (2019), no. 3, 688–697.
- [85] F. Vieira Costa Junior, The optimal multilinear Bohnenblust–Hille constants: a computational solution for the real case. *Numer. Funct. Anal. Optim.* **39** (2018), no. 15, 1656–1668.
- [86] R. M. G. Young, On the best possible constants in the Khintchine inequality. *J. London Math. Soc. (2)* **14** (1976), no. 3, 496–504.