

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Estimativas de Schauder

Robson Lucas Soares da Silva

JOÃO PESSOA – PB
JULHO DE 2020

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Estimativas de Schauder

por

Robson Lucas Soares da Silva

sob a orientação do

Prof. Dr. Damião Júnio Gonçalves Araújo

João Pessoa – PB
julho de 2020

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S586e Silva, Robson Lucas Soares da.
Estimativas de Schauder / Robson Lucas Soares da Silva.
- João Pessoa, 2020.
58 f. : il.

Orientação: Damião Júnio Gonçalves Araújo.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Estimativas de Schauder. 2. Equações Diferenciais
Parciais Elípticas. 3. Soluções de Viscosidade. 4.
Equações Totalmente Não-Lineares. I. Araújo, Damião
Júnio Gonçalves. II. Título.

UFPB/BC

CDU 51(043)

Estimativas de Schauder

por

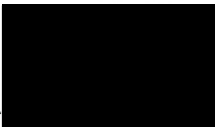
Robson Lucas Soares da Silva ¹

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

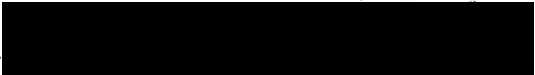
Área de Concentração: Equações Diferenciais Parciais.

Aprovada em 24 de julho de 2020.

Banca Examinadora:


Prof. Dr. Damião Júnio Gonçalves Araújo – UFPB
(Orientador)


Prof. Dr. Diego Marcon Farias – UFRGS
(Examinador Externo)


Prof. Dr. Edgard Almeida Pimentel – PUC-Rio
(Examinador Externo)


Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros – UFPB
(Examinador Interno)


Prof. Dr. Felipe Wallison Chaves Silva – UFPB
(Examinador Interno)

¹O autor foi bolsista da CAPES durante a elaboração desta dissertação.

À minha família...

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus pelo dom da vida, assim como pela oportunidade, sabedoria e conhecimento – sem Ele nada faria sentido.

Em seguida, aos meus pais e irmãos, pelo apoio incondicional e motivação para seguir em frente, em busca dos meus objetivos.

À minha querida Princesa, Jáfia Gileane, pela contribuição incomensurável, em termos de companheirismo, insistência e amor, fundamentais para que minha caminhada se tornasse mais leve e tranquila, sou muito grato.

Não poderia deixar de mencionar os amigos e colegas que conheci no Departamento de Matemática da UFPB. Em especial Angélica, Raoní, Railane, Johnatan (Boy John), Lenin, Lázaro, Joyce, Thiago e Renato. Em particular, alguns foram imprescindíveis para elaboração desse trabalho, sendo eles Ginaldo – o qual contribuiu sempre que solicitado; Raoni, com algumas dúvidas pontuais; além de Harish Shrivastava, que contribuiu de maneira ímpar. Aqui vale adicionar Pedro, um amigo que ganhei desde o primeiro dia de aula, sua ajuda foi contínua durante todo o mestrado.

Aos meus amigos, colegas e professores da graduação do IFRN, cujo incentivo foi determinante.

A todos os professores do Programa de Pós-Graduação em Matemática – PPGMAT – os quais tive algum contato, principalmente ao meu orientador, o professor Dr. Damião Araújo, cuja contribuição foi significativa – academicamente, profissionalmente e certamente com a escrita deste trabalho. Também tive a oportunidade e o prazer de cursar a disciplina de Equações Diferenciais Parciais Elípticas I (com participação de Harish Shrivastava), sendo fundamental para o meu estudo na Teoria de Schauder, isto é, um pré-requisito para a minha dissertação.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal Superior (CAPES) como principal agência de fomento, que foi indispensável para o andamento e conclusão das atividades.

A todos, sou imensamente grato.

Resumo

Neste trabalho, fizemos um estudo sobre regularidade de soluções de equações diferenciais parciais de segunda ordem. Mais precisamente, na obtenção de estimativas universais de regularidade $C^{2,\alpha}$, conhecidas como estimativas de Schauder. Dividimos o trabalho em três partes: na primeira parte, estudamos resultados de soluções $C^{2,\alpha}$ de Equações de Poisson que são α -Hölder contínuas. Na segunda, estudamos a regularidade $C^{2,\alpha}$ de um operador linear elíptico de segunda ordem, com coeficientes C^α , por meio de uma estimativa interior. Por último, estudamos a regularidade $C^{2,\alpha}$ de soluções no sentido de viscosidade para equações de segunda ordem totalmente não-lineares.

Palavras-chave: Estimativas de Schauder, Equações Diferenciais Parciais Elípticas, Soluções de Viscosidade, Equações Totalmente Não-Lineares.

Abstract

In this work, we study regularity of solutions of second order PDE's. More precisely, we study universal $C^{2,\alpha}$ regularity estimates of solutions, which are also known as Schauder estimates. We divide the thesis in three parts: in the first part, we study results of $C^{2,\alpha}$ solutions of Poisson Equations which are a-priori α -Hölder continuous. In the second part, we study $C^{2,\alpha}$ regularity of solutions of linear second order elliptic PDE's, with C^α coefficients, through an interior estimate. Finally, we study the $C^{2,\alpha}$ regularity of viscosity solutions of fully non-linear second order elliptic PDE's.

Keywords: Schauder Estimates, Partial Differential Equations, Viscosity Solutions, Fully non-linear Equations.

Sumário

Introdução	1
1 O caso Laplaciano	3
1.1 O Princípio do Máximo Aproximado	3
1.2 O Método de Energia	12
1.3 O Método de Compacidade	18
1.4 Estimativas de Schauder via Propriedades do tipo Liouville	24
2 Operadores Lineares Uniformemente Elípticos	30
3 Operadores Uniformemente Elípticos Totalmente Não-Lineares	40
3.1 Soluções de Viscosidade	41
3.2 Regularidade $C^{2,\alpha}$ de Soluções de Viscosidade	41
Referências Bibliográficas	48

Notações

Abaixo, listamos algumas notações utilizadas na dissertação.

- e_i denota o i -ésimo vetor da base canônica do $\mathbb{R}^n$;
- $u_i = D_i u$ denota a i -ésima derivada parcial da função u ;
- $u_{ij} = D_{ij} u$ denota a i -ésima derivada parcial da função $D_j u$;
- $D^2 u$ denota a matriz hessiana da função u ;
- $|\gamma| = n$ denota o multi-índice de $D^\gamma u$, onde $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{N}^n$;
- $\text{tr } A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ denota o traço da matriz $A = (a_{ij})$;
- $\text{tr}(AB) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} b_{ij}$ ou simplesmente $a_{ij} b_{ij}$ denota o traço da matriz AB ;
- $B_r(x)$ denota a bola de centro $x \in \mathbb{R}^n$ e raio r ;
- B_r denota a bola de centro $0 \in \mathbb{R}^n$ e raio r ;
- $|B_1|$ denota o volume de B_1 ;
- $C, C_1, C_2, \dots$ denotam constantes positivas, possivelmente diferentes;
- $|\cdot|$ denota a norma euclidiana do $\mathbb{R}^n$;
- $a \cdot b = \sum_{i=1}^n a_i b_i$ ou simplesmente $a_i b_i$ denota o produto interno de $a = (a_1, \dots, a_n)$ e $b = (b_1, \dots, b_n)$;

- $\oint_{\Omega} f$ representa a integral média de f sobre Ω , onde, por definição, tem-se

$$\oint_{\Omega} f := \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f;$$

- $f * g$ denota a convolução das funções f e g , dada por

$$f * g(x) = \int_{\Omega} f(x - y)g(y)dy;$$

- $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ ou $\|\cdot\|_{L^p}$, com $1 \leq p < \infty$, denotam a norma do espaço $L^p(\Omega)$, isto é,

$$\|\cdot\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |\cdot|^p \right)^{\frac{1}{p}};$$

- $\|u\|_{H^1(\Omega)} = \|u\|_{L^2} + \sum_{i=1}^n \|D_i u\|_{L^2}.$

- $H^1 := W^{1,2}$ representa o *Espaço de Sobolev* associado à norma

$$\|u\|_{W^{1,2}(B_1)} := \left(\sum_{|\gamma| \leq 2} \int_{B_1} |D^{\gamma} u|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Introdução

A busca por regularidade de uma solução nos diz o quão suave ela é, usando ingredientes universais como dimensão, estrutura do domínio e da equação. O nosso trabalho busca estudar algumas ferramentas da Teoria de Schauder, que formam um conjunto de resultados, elaborados por Juliusz Schauder (1934 - 1937), cujo objetivo é a busca de regularidade de soluções de Equações Diferenciais Parciais.

Com base nisso, estudamos inicialmente as Equações de Poisson $\Delta u = f$ em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Motivado por isso e embasado nas notas [16], o Capítulo 1 se concentra no uso da Teoria de Schauder através do seguinte resultado: dada uma função f α -Hölder contínua, as soluções clássicas da equação $\Delta u = f$ são de classe $C_{\text{loc}}^{2,\alpha}$. Isso quer dizer – em outras palavras – que se o traço da matriz *Hessiana* de uma função u for α -Hölder contínua, então cada entrada dessa matriz é uma função localmente α -Hölder contínua. Isso se configura da seguinte maneira: seja D^2u a matriz hessiana de u

$$D^2u = \begin{bmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

então, temos

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n u_{ii} \in C^\alpha \implies u_{ij} \in C^\alpha, \forall i, j \leq n.$$

Dito isso, fazemos a demonstração desse resultado de três formas: a primeira é pelo Princípio do Máximo, cujo foco é o uso do Princípio do Máximo forte; a segunda forma é feita a partir do Método de Energia, que se utiliza da teoria de soluções fracas de EDP's; por último, o Método de Compacidade, em que por meio de sequências usamos a compacidade do problema para provar o teorema.

Por se tratar de um trabalho cujo foco central é o estudo de estimativas $C^{2,\alpha}$, nos Capítulos 2 e 3 abordamos esse tema para operadores mais gerais. No Capítulo 2, em particular, estudamos essas estimativas de um operador linear elíptico de segunda ordem com coeficientes de primeira e segunda ordem. Isso foi feito a partir do chamado *Teorema de Estimativa Interior de Schauder*, o qual exprime uma desigualdade envol-

vendo a norma $C^{2,\alpha}$ de uma função u em B_1 e a norma $C^{0,\alpha}$ do operador em questão e da norma L^∞ de u , ambos em B_2 .

Ainda sobre o Capítulo 2, a prova do teorema nele contido é feita de uma forma mais moderna, em termos de técnicas mais acessíveis. Historicamente, assim como feito no livro [1], Estimativas de Schauder são feitas tendo como base a utilização do chamado *Potencial Newtoniano* $u = \Gamma * f$. O teorema foi escrito originalmente no artigo [12], e reescrito com essas adaptações nas notas [5].

Por fim, no Capítulo 3, na mesma perspectiva do Capítulo 2, apresentamos as estimativas $C^{2,\alpha}$, só que dessa vez em soluções de viscosidade em equações totalmente não-lineares de segunda ordem uniformemente elípticas. Baseado no livro [9], estudamos equações totalmente não-lineares, da forma $F : \text{Sym}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(D^2u(x)) = f(x)$, para obtermos tal regularidade de soluções no sentido de viscosidade.

No texto, a menos que seja mencionado o contrário, tratamos de soluções clássicas de EDP's.

Capítulo 1

O caso Laplaciano

Fundamentado principalmente por [16], o objetivo deste capítulo é mostrar através da Teoria de Schauder o seguinte resultado: se u é solução de

$$-\Delta u = f \quad \text{em} \quad B_1,$$

com f α -Hölder contínua, então u é localmente $C^{2,\alpha}$, denotado por $C_{\text{loc}}^{2,\alpha}$, isto é, para todos $1 \leq i, j \leq n$, temos que u_{ij} é α -Hölder contínua.

Isso foi feito, primeiramente, com o Princípio do Máximo Aproximado; em seguida, fizemos uso do Método de Energia; por último, o Método de Compacidade, que é muito útil no capítulo seguinte, onde usamos a compacidade conseguimos regularidade $C^{2,\alpha}$ para operadores uniformemente elípticos lineares, e não somente para soluções C^2 definidas em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

O nosso estudo, nessa dissertação, é focado em estimativas locais; mais precisamente estamos preocupados com estimativas num subdomínio de Ω , digamos $B_r \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$.

1.1 O Princípio do Máximo Aproximado

Ao estudarmos Equações Diferenciais Parciais, é comum começarmos com este que é um resultado clássico, cuja utilização e consequências atreladas são inúmeras; estamos falando do Princípio do Máximo. O qual afirma que dada uma função $u \in C^2(B_1) \cap C^2(\bar{B}_1)$, subharmônica em B_1 , isto é, $\Delta u \geq 0$ em B_1 , vale a seguinte estimativa:

$$\sup_{B_1} u \leq \sup_{\partial B_1} u.$$

Antes de começarmos com os resultados dessa seção, concentremo-nos em algumas definições que são necessárias no decorrer do texto.

Definição 1.1. Uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é dita α -Hölder contínua, quando é válido que

$$|f|_\alpha := \sup_{x \neq y \in \mathbb{R}^n} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} < +\infty.$$

Definição 1.2. Dizemos que u é $C^{2,\alpha}(\Omega)$ em $x_0 \in \Omega$, quando que existe um polinômio de segunda ordem da forma

$$P(x) = \frac{1}{2}(x - x_0)^T A(x - x_0) + B(x - x_0) + C,$$

tal que

$$|u(x) - P(x)| \leq D|x - x_0|^{2+\alpha},$$

para $|x - x_0| \leq 1$. No caso afirmativo, A, B e C representam, respectivamente, as seguintes matrizes $n \times n$: $D^2u(x_0), Du(x_0)$ e $u(x_0)$

Considerando o tratamento de soluções $C^2(B_1)$ e os respectivos laplacianos, obtemos, como consequência do princípio do máximo, o seguinte resultado:

Lema 1.1. Suponha que $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, com $u \in C^2(\Omega)$, é solução da equação

$$-\Delta u = f \quad \text{em} \quad B_1 \subset \Omega.$$

Então é válida a seguinte estimativa:

$$u(x) \leq \sup_{\partial B_1} u + \frac{1 - |x|^2}{2n} \sup_{B_1} f, \quad \forall x \in B_1. \quad (1.1)$$

Demonstração. A fim de usarmos o Princípio do Máximo, considere a função

$$\begin{aligned} v : \Omega \subset \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto v(x) := u(x) - \sup_{\partial B_1} u - \frac{1 - |x|^2}{2n} \sup_{B_1} f. \end{aligned}$$

Note que v é subharmônica. De fato,

$$\begin{aligned} \Delta v(x) &= \Delta \left(u - \sup_{\partial B_1} u - \frac{1 - |\cdot|^2}{2n} \sup_{B_1} f \right) (x) \\ &= \Delta u(x) - \Delta \left(\frac{1 - |\cdot|^2}{2n} \sup_{B_1} f \right) (x) \\ &= \Delta u(x) - \sup_{B_1} f \cdot \Delta \left(\frac{1 - |\cdot|^2}{2n} \right) (x) \\ &= \Delta u(x) + \sup_{B_1} f. \end{aligned}$$

Por hipótese, $-\Delta u(x) = f(x), \forall x \in B_1$. Daí,

$$\Delta v(x) = -f(x) + \sup_{B_1}(f) \geq 0,$$

pois $\sup_{B_1} f \geq f(x), \forall x \in B_1$. Portanto, v é subharmônica em $B_1 \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$. Agora, aplicando o Princípio do Máximo em v , obtemos

$$\sup_{B_1} v \leq \sup_{\partial B_1} v,$$

o que acarreta

$$u(x) - \sup_{\partial B_1} u - \frac{1 - |x|^2}{2n} \sup_{B_1} f \leq \sup_{\partial B_1} v = 0.$$

Portanto,

$$u(x) \leq \sup_{\partial B_1} u + \frac{1 - |x|^2}{2n} \sup_{B_1} f.$$

□

Como corolário, obtemos o seguinte resultado, que é de suma importância para a demonstração do lema que antecede o principal resultado nessa seção.

Corolário 1.2. Suponha que $u \in C^2(\Omega)$ é uma solução de

$$-\Delta u = f \quad \text{em} \quad B_1 \subset \Omega.$$

Então

$$\|u\|_{L^\infty(B_1)} \leq \|u\|_{L^\infty(\partial B_1)} + \frac{1}{2n} \|f\|_{L^\infty(B_1)}.$$

Demonstração. Aplicando o Lema 1.1 na função $g(x) = -u(x)$, como $-\Delta u = f$, segue que $-\Delta g = -\Delta(-u) = -f$ em B_1 . A partir disso garantimos a seguinte estimativa:

$$g(x) \leq \sup_{\partial B_1} g + \frac{1 - |x|^2}{2n} \sup_{B_1}(-f).$$

Isso infere que

$$-u(x) \leq -\inf_{\partial B_1} u - \frac{1 - |x|^2}{2n} \inf_{B_1} f.$$

Equivalentemente,

$$u(x) \geq \inf_{\partial B_1} u + \frac{1 - |x|^2}{2n} \inf_{B_1} f.$$

A partir disso, temos

$$u(x) \leq \sup_{\partial B_1} u + \frac{1 - |x|^2}{2n} \sup_{B_1} f \quad \text{e} \quad u(x) \geq \inf_{\partial B_1} u + \frac{1 - |x|^2}{2n} \inf_{B_1} f.$$

Daí,

$$\begin{aligned} u(x) &\leq \sup_{\partial B_1} u + \frac{1 - |x|^2}{2n} \sup_{B_1} f \\ &\leq \|u\|_{L^\infty(\partial B_1)} + \frac{1}{2n} \|f\|_{L^\infty(B_1)}. \end{aligned}$$

Além disso, como $\inf(\varphi) \geq \inf(-|\varphi|) = -\sup(|\varphi|)$, temos que

$$u(x) \geq \inf_{\partial B_1} u + \frac{1 - |x|^2}{2n} \inf_{B_1} (f) \geq -\|u\|_{L^\infty(\partial B_1)} - \frac{1 - |x|^2}{2n} \|f\|_{L^\infty(B_1)}.$$

Portanto,

$$\|u\|_{L^\infty(B_1)} \leq \|u\|_{L^\infty(\partial B_1)} + \frac{1}{2n} \|f\|_{L^\infty(B_1)}$$

□

Mais precisamente, este corolário afirma que a solução dessa equação na norma L^∞ é controlada por um múltiplo da norma L^∞ do seu laplaciano e a norma L^∞ no seu bordo.

Lema 1.3. Fixado um $0 < \alpha < 1$, existem constantes universais C_0 , λ e ϵ_0 , com $0 < \lambda < 1$, tais que, para qualquer função f e u solução de

$$-\Delta u = f \quad \text{em } B_1,$$

com $\|u\|_{L^\infty(B_1)} \leq 1$ e $\|f\|_{L^\infty(B_1)} \leq \epsilon_0$, existe um polinômio de segunda ordem da forma.

$$P(x) = \frac{1}{2} x^T A x + Bx + C,$$

tal que

$$|u(x) - P(x)| \leq \lambda^{2+\alpha}, \quad \text{para } |x| \leq \lambda \quad \text{e} \quad |A| + |B| + |C| \leq C_0.$$

Em outras palavras, u é $C^{2,\alpha}$ em 0.

Antes de demonstrar o lema, vejamos algumas considerações. O resultado principal dessa seção está atrelado à busca de regularidade $C^{2,\alpha}$. De fato, por consequência da definição, temos que uma função $C^{2,\alpha}$, depois de subtraída de um polinômio de segunda ordem, decai como $C|x|^{2+\alpha}$. Na prática, isso se torna muito trabalhoso e torna a busca por esse polinômio mais difícil. Para contornar esse problema, vamos usar uma técnica muito importante da Análise Moderna. Ao invés de demonstrarmos infinitas desigualdades, vamos mostrar essas desigualdades em bolas com raios dispostos

em série geométrica, também chamada de *bolas diádicas*. Para ilustrar isso, segue a proposição:

Proposição 1.4. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. Para todo $x \in B_1$

$$|u(x) - P(x)| \leq C|x|^{2+\alpha}.$$

2. Para cada $k \in \{0, 1, \dots\}$,

$$|u(x) - P(x)| \leq C\lambda^{k(2+\alpha)}, \quad \forall x \in B_1; \text{ tal que } |x| \leq \lambda.$$

Demonstração. Suponhamos que 1 é válida. Se tomarmos $|x| \leq \lambda^k$, para $k \in \{0, 1, \dots\}$, segue que $|x|^{2+\alpha} \leq \lambda^{k(2+\alpha)}$. Daí,

$$|u(x) - P(x)| \leq C|x|^{2+\alpha} \leq C\lambda^{k(2+\alpha)}.$$

Portanto, $|u(x) - P(x)| \leq C\lambda^{k(2+\alpha)}$ para $k = 0, 1, \dots$, e $|x| \leq \lambda^k$.

Reciprocamente, supondo que 2 é válida, dado $x \in B_1$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\lambda^{k+1} \leq |x| \leq \lambda^k, \quad \lambda \in (0, 1).$$

Com isso, obtemos

$$\begin{aligned} |u(x) - P(x)| &\leq C\lambda^{k(2+\alpha)} \\ &= C\lambda^{k(2+\alpha)} \frac{\lambda^{2+\alpha}}{\lambda^{2+\alpha}} \\ &= C \frac{\lambda^{(k+1)(2+\alpha)}}{\lambda^{2+\alpha}} \\ &\leq C \frac{|x|^{2+\alpha}}{\lambda^{2+\alpha}} \\ &\leq C_1 |x|^{2+\alpha}, \end{aligned}$$

onde $C_1 := \frac{C}{\lambda^{2+\alpha}} > 0$. □

A afirmação 2 significa que o polinômio de Taylor de u , que é de segunda ordem, é exatamente igual a P na origem. A partir da validade dessa equivalência, é mais prático e útil demonstrarmos a segunda afirmação para a primeira ser obtida como consequência. Na prática, provamos 2 da seguinte forma: vamos mostrar que para

cada $k = 0, 1, \dots$, existe um polinômio de segundo grau P_k , tal que

$$|u(x) - P_k(x)| \leq C\lambda^{k(2+\alpha)}, \quad \text{com } |x| \leq \lambda^k.$$

Além disso, P_k decai da seguinte forma:

$$|P_k(x) - P_{k-1}(x)| \leq 2C\lambda^{k(2+\alpha)}, \quad \text{para } |x| \leq \lambda^k.$$

Dito isto, seguimos com a prova do Lema.

Demonstração do Lema 1.3. Considere $h : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função harmônica tal que $h = u$ na fronteira de $B_1 \subset \Omega$. Agora defina $g := u - h$, e veja que

$$\begin{cases} -\Delta g = f & \text{em } B_1 \\ g = 0 & \text{sobre } \partial B_1. \end{cases}$$

Daí, pelo Corolário 1.2, obtemos,

$$\|g\|_{L^\infty(B_1)} - \|g\|_{L^\infty(\partial B_1)} \leq \frac{1}{2n} \|f\|_{L^\infty(B_1)}.$$

Por outro lado, note que como $\|g\|_{L^\infty(\partial B_1)} = 0$, é válido que

$$|u(x) - h(x)| = |g(x)| \leq \|g\|_{L^\infty(B_1)} \leq \frac{1}{2n} \|f\|_{L^\infty(B_1)}.$$

Pelo Princípio do Máximo, segue que

$$|h| \leq \sup_{B_1} |h| = \sup_{\partial B_1} |h| = \sup_{\partial B_1} |u| \leq 1, \quad \text{pois } |u| \leq 1.$$

Agora, tomando o Polinômio de Talyor de h na origem, obtemos

$$P(x) = \frac{1}{2} x^T D^2 h(0) x + Dh(0)x + h(0)$$

que é um polinômio de segunda ordem, harmônico e com coeficientes limitados.

A seguinte proposição é imprescindível para a nossa prova e demais resultados posteriores. Ela exprime uma estimativa da derivada de funções harmônicas.

Proposição 1.5. Sob as hipóteses feitas acima, h satisfaz a seguinte estimativa

$$|h(x) - P(x)| \leq \frac{C}{6} |x|^3, \quad \forall x \in B_{\frac{1}{2}}.$$

Demonstração. De fato, como h é hamônica, por resultados da teoria de funções

hamônicas, h é analítica; mais especificamente, encontramos esse resultado em [[2], Teorema 10, p. 31]. Com isso, fazendo a expansão de Taylor de h , depois de subtraída do polinômio de segunda ordem P , obtemos

$$|h(x) - P(x)| \leq \frac{1}{6}|x|^3 \sup_{B_{\frac{1}{2}}(x)} |\nabla^3 h| \leq \frac{C}{6}|x|^3, \quad \forall x \in B_{\frac{1}{2}};$$

uma vez que é válido $\sup_{B_{\frac{1}{2}}(x)} |\nabla^3 h| \leq C$. □

Dando prosseguimento a prova do Lema, observe que

$$\begin{aligned} |u(x) - P(x)| &= |u(x) - h(x) + h(x) - P(x)| \\ &\leq |u(x) - h(x)| + |h(x) - P(x)| \\ &\leq \frac{1}{2n} \sup_{B_1} |f(x)| + \frac{C}{6}|x|^3. \end{aligned}$$

Posto isso, basta tomarmos λ suficientemente pequeno de modo que

$$\frac{C}{6}|x|^3 \leq \frac{1}{2}\lambda^{2+\alpha}, \quad \text{para } |x| \leq \lambda,$$

e tomando ϵ_0 tal que

$$\frac{1}{2n} \sup_{B_1} |f(x)| \leq \frac{1}{2n} \epsilon_0 \leq \frac{\lambda^{2+\alpha}}{2}.$$

Por fim, obtemos

$$|u(x) - P(x)| \leq \frac{\lambda^{2+\alpha}}{2} + \frac{\lambda^{2+\alpha}}{2} = \lambda^{2+\alpha}.$$

A limitação da soma dos coeficientes de P , segue do fato de cada parcela ser limitada, fato demonstrado mais geralmente para funções harmônicas em [[4], Proposição 1.13, p. 5], o que conclui a prova. □

Finalmente, podemos provar o teorema principal:

Teorema 1.6. *Suponha que $u \in C^2(\Omega)$ é solução de*

$$-\Delta u = f \quad \text{em } B_1 \subset \Omega.$$

Além disso, suponha que f é α -Hölder contínua em 0. Então u é $C^{2,\alpha}$ em 0. Mais precisamente, u é tal que

$$|u(x) - P(x)| \leq D|x|^{2+\alpha}$$

onde

$$P(x) = \frac{1}{2}x^T A x + Bx + C,$$

para $|x|$ universalmente pequeno, com

$$|D| \leq C_0 (|f|_{C^\alpha(0)} + |f(0)| + \|u\|_{L^\infty(B_1)})$$

e

$$|A| + |B| + |C| \leq C_0 (|f|_{C^\alpha(0)} + |f(0)| + \|u\|_{L^\infty(B_1)}) ,$$

em que C_0 é uma constante universal que depende apenas da dimensão.

Demonstração. Primeiramente iremos discutir acerca da normalização das estimativas. De fato, podemos assumir sem perda de generalidade que $f(0) = 0$. Caso contrário, seja $v(x) = u(x) - \frac{f(0)}{2n}|x|^2$. Então,

$$\begin{aligned} \Delta v &= \Delta \left(u - \frac{f(0)}{2n}|x|^2 \right) \\ &= \Delta u - \frac{f(0)}{2n} \Delta(|x|^2) \\ &= \Delta u - \frac{f(0)}{2n} 2n \\ &= f(x) - f(0). \end{aligned}$$

Essa igualdade garante que as estimativas de v podem ser importadas para u . Dando prosseguimento, assumindo que $\|u\|_{L^\infty(B_1)} \leq 1$ e $|f|_\alpha(0) \leq \epsilon_0$, onde ϵ_0 é a constante do Lema 1.3, considere

$$v(x) = \epsilon_0 \frac{u(x)}{\|u\|_{L^\infty(B_1)} + |f|_{C^\alpha(0)}},$$

que satisfaz,

$$\|v\|_{L^\infty(B_1)} = \sup_{B_1} \left| \epsilon_0 \frac{u}{\|u\|_{L^\infty(B_1)} + |f|_{C^\alpha(0)}} \right|$$

e

$$\Delta v = \frac{\epsilon_0}{\|u\|_{L^\infty(B_1)} + |f|_{C^\alpha(0)}} \Delta u.$$

Além disso, lembra que, por definição

$$|\Delta v|_{C^\alpha(0)} = \sup_{|x| \leq 1} \frac{|\Delta v(x) - \Delta v(0)|}{|x|^\alpha}.$$

Dessa forma, temos que $\|v\|_{L^\infty(B_1)} \leq 1$ e $|\Delta v|_\alpha(0) \leq \epsilon_0$. Por conseguinte, o argumento por indução: existem polinômios harmônicos

$$P_k(x) = \frac{1}{2} x^T A_k x + B_k x + C_k,$$

tais que

$$|u(x) - P_k(x)| \leq \lambda^{k(2+\alpha)} \quad |x| \leq \lambda^k$$

e

$$\begin{aligned} |A_k - A_{k+1}| &\leq C\lambda^{k\alpha} \\ |B_k - B_{k+1}| &\leq C\lambda^{k(\alpha+1)} \\ |C_k - C_{k+1}| &\leq C\lambda^{k(\alpha+2)}. \end{aligned}$$

Com isso, se $k = 0$, cai exatamente na normalização sobre u como comentada acima. Se $k = 1$, temos o caso do Lema 1.3. Prosseguindo o argumento indutivo, se supusermos que a afirmação é válida para k , vejamos que também é válida para $k + 1$. Para isso, considere o seguinte *reescalonamento*

$$w(x) = \frac{(u - P_k)(\lambda^k x)}{\lambda^{k(2+\alpha)}}.$$

A partir disso, é válido que

$$\Delta w = \Delta \left(\frac{(u - P_k)(\lambda^k x)}{\lambda^{k(2+\alpha)}} \right) = \Delta \left(\frac{u(\lambda^k x)}{\lambda^{k(2+\alpha)}} \right) - \Delta \left(\frac{P_k(\lambda^k x)}{\lambda^{k(2+\alpha)}} \right) = \frac{\lambda^{2k} f(\lambda^k x)}{\lambda^{k(2+\alpha)}} = \frac{f(\lambda^k x)}{\lambda^{k\alpha}},$$

pois, por hipótese de indução, P_k é harmônico. Além disso,

$$|w(x)| = \left| \frac{(u - P_k)(\lambda^k x)}{\lambda^{k(2+\alpha)}} \right| \leq \frac{\lambda^{k(2+\alpha)}}{\lambda^{k(2+\alpha)}} = 1, \quad \forall x \in B_1.$$

Pelo o que acabamos de provar sobre w , podemos evidentemente usar o Lema 1.3, no qual garante a existência de um polinômio harmônico P com coeficientes limitados satisfazendo,

$$|w(x) - P(x)| \leq \lambda^{2+\alpha}, \quad |x| \leq \lambda,$$

onde

$$\sup_{|x| \leq 1} \frac{|f(\lambda^k x)|}{\lambda^{\alpha k}} \leq |f|_{C^\alpha(0)} \leq \epsilon_0.$$

Podemos agora fazer a seguinte majoração

$$|w(x) - P(x)| = \left| \frac{(u - P_k)(\lambda^k x)}{\lambda^{k(2+\alpha)}} - P(x) \right| \leq \lambda^{\alpha+2}$$

e

$$|u(\lambda^k x) - P_k(\lambda^k x) - \lambda^{k(\alpha+2)} P(x)| \leq \lambda^{(2+\alpha)(k+1)},$$

o que acarreta em

$$\left| u(x) - P_k(x) - \lambda^{k(\alpha+2)} P\left(\frac{x}{\lambda^k}\right) \right| \leq \lambda^{(2+\alpha)(k+1)}.$$

Ao tomarmos $P_{k+1}(x) = P_k(x) + \lambda^{k(\alpha+2)} P\left(\frac{x}{\lambda^k}\right)$, o argumento de indução está finalizado. Por fim, note que A_k, B_k e C_k , possivelmente ao longo de subsequências, convergem respectivamente para A_∞, B_∞ e C_∞ . Além do mais, o polinômio limite

$$P_\infty(x) = \frac{1}{2} x^T A_\infty x + B_\infty x + C_\infty,$$

cumpre

$$|P_k(x) - P_\infty(x)| \leq C \lambda^{k(2+\alpha)}, \quad |x| \leq \lambda^k.$$

Consequentemente para $\lambda^{k+1} \leq |x| \leq \lambda^k$, segue que,

$$\begin{aligned} |u(x) - P_\infty(x)| &\leq |u(x) - P_k(x)| + |P_k(x) - P_\infty(x)| \\ &\leq \lambda^{k(2+\alpha)} + C|x|^{2+\alpha} \\ &= \frac{1}{\lambda^{2+\alpha}} \lambda^{(2+\alpha)(k+1)} + C|x|^{2+\alpha} \\ &\leq \frac{|x|^{2+\alpha}}{\lambda^{2+\alpha}} + C|x|^{2+\alpha} \\ &= |x|^{2+\alpha} \left(\frac{1}{\lambda^{2+\alpha}} + C \right). \end{aligned}$$

□

1.2 O Método de Energia

Nesta seção, com uma nova perspectiva, tratamos do mesmo problema fazendo uso do Método de Energia. Abordamos aqui soluções de equações diferenciais no sentido fraco. Para isto, consideramos uma caracterização para funções α -Hölder num sentido de integrais, o qual descrevemos no decorrer da seção. Assim como feito na seção anterior, iniciamos com alguns resultados necessários para a obtenção do resultado principal.

Antes de começarmos com os resultados propriamente ditos, faz sentido aqui definirmos o que vem a ser uma solução fraca de uma EDP. Isso se faz necessário em virtude do Método de Energia, que tem como natureza as soluções fracas.

Definição 1.3. Considere a seguinte equação

$$-D_j(a_{ij}(x)D_i u) + c(x)u = f(x).$$

Dizemos que $u \in H^1(\Omega)$ é *solução fraca* da EDP acima se satisfaz

$$\int_{\Omega} a_{ij} D_i u D_j \varphi + cu\varphi = \int_{\Omega} f\varphi, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Mais geralmente, assumimos que

1. O coeficiente $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ é uniformemente elíptico, isto é, para alguma constante positiva λ é válido

$$a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2, \quad \forall x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n;$$

2. O coeficiente $c \in L^{\frac{n}{2}}(\Omega)$ e $f \in L^{\frac{2n}{n+2}}(\Omega)$.

Definição 1.4. Diremos que f é α -Hölder contínua na origem no sentido L^2 , quando

$$[f]_{\mathcal{L}^{2,\alpha}}(0) := \sup_{0 < r \leq 1} \frac{1}{r^\alpha} \sqrt{\int_{B_r} |f(x) - f(0)|^2} < +\infty,$$

onde $f(0)$ é definido como $f(0) := \lim_{r \rightarrow 0} \int_{B_r} f$.

Definição 1.5. Dizemos que u é $C^{2,\alpha}$ na origem na semi-norma H^1 , sempre que

$$[u]_{H^{1,2+\alpha}}(0) := \inf_{\mathcal{P}_2} \sup_{0 < r \leq 1} \frac{1}{r^{1+\alpha}} \sqrt{\int_{B_r} |\nabla(u(x) - P_2(x))|^2} < +\infty,$$

onde $\mathcal{P}_2$ é o conjunto dos polinômios de segunda ordem.

Agora fornecemos uma estimativa do tipo Caccioppoli para soluções fracas do Problema de Dirichlet.

Lema 1.7. Suponha que $u \in H^1(\Omega) \cap C^2(\Omega)$ é solução fraca de

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{em } B_1 \\ u = 0 & \text{sobre } \partial B_1. \end{cases}$$

Então a seguinte estimativa é válida

$$\int_{B_1} |\nabla u|^2 \leq C \int_{B_1} f^2.$$

Demonstração. Inicialmente, observe que

$$\int_{B_1} f^2 = \int_{B_1} (\Delta u)^2 = \int_{B_1} \sum_{i,j=1}^n u_{ii} u_{jj}.$$

Daí, usando o Teorema de Green e o fato que $u = 0$ sobre ∂B_1 , conseguimos

$$\int_{B_1} \sum_{i,j=1}^n u_{ii} u_{jj} = - \int_{B_1} \sum_{i,j=1}^n u_{jii} u_j = \int_{B_1} \sum_{i,j=1}^n u_{ij} u_{ij} = \int_{B_1} |D^2 u|^2.$$

Portanto,

$$\int_{B_1} f^2 = \int_{B_1} |D^2 u|^2. \quad (1.2)$$

A Desigualdade de Poincaré e o fato de $Du \in H^1$, nos garantem a estimativa

$$\int_{B_1} |Du|^2 \leq C \int_{B_1} |D^2 u|^2. \quad (1.3)$$

Por fim, usando (1.2) e (1.3), obtemos

$$\int_{B_1} |Du|^2 \leq C \int_{B_1} f^2.$$

□

Lema 1.8. Fixado um $0 < \alpha < 1$, existem constantes universais C_0 , λ e ϵ_0 , com $0 < \lambda < 1$, tais que para

$$\int_{B_1} f^2 \leq \epsilon_0^2$$

e

$$\int_{B_1} |\nabla u|^2 \leq 1,$$

e u solução de

$$-\Delta u = f \quad \text{em } B_1,$$

existe um polinômio harmônico de segunda ordem

$$P(x) = \frac{1}{2} x^T A x + Bx + C,$$

tal que

$$\lambda^2 \int_{B_1} |\nabla u - P|^2 \leq \lambda^{2(2+\alpha)}, \quad \text{para } |A| + |B| + |C| \leq C_0,$$

onde C_0 é uma constante universal.

Demonstração. Considere $v \in H^1(\Omega)$ solução fraca de

$$\begin{cases} -\Delta v = f & \text{em } B_1 \\ v = 0 & \text{sobre } \partial B_1. \end{cases}$$

Neste caso, estamos nas condições do lema anterior, o qual vai assegurar

$$\int_{B_1} |\nabla v|^2 \leq C \int_{B_1} f^2 = C \int_{B_1} |f|^2. \quad (1.4)$$

Por conseguinte, defina $h = u - v$. Desse modo h é harmônica. De fato, $\Delta h = \Delta(u - v) = \Delta u - \Delta v = 0$. Além disso, veja que

$$\int_{B_1} |\nabla h|^2 \leq 2 \int_{B_1} |\nabla u|^2 + 2 \int_{B_1} |\nabla v|^2 \leq 2|B_1| + 2C \int_{B_1} |f|^2. \quad (1.5)$$

Com efeito, pela identidade do paralelogramo, obtemos

$$|\nabla u - \nabla v|^2 + |\nabla u + \nabla v|^2 = 2(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2),$$

daí, por $|\nabla u + \nabla v|^2 \geq 0$, segue que

$$|\nabla u - \nabla v|^2 \leq 2|\nabla u|^2 + 2|\nabla v|^2.$$

Por hipótese, $\int_{B_1} |\nabla u|^2 \leq 1$. Isso junto com (1.4), implica que (1.5) é válido. Em seguida, considere P o Polinômio de Taylor de ordem dois de h em 0. Daí,

$$\begin{aligned} \lambda^2 \int_{B_\lambda} |\nabla(u - P)|^2 &\leq 2\lambda^2 \int_{B_\lambda} |\nabla(u - h)|^2 + 2\lambda^2 \int_{B_\lambda} |\nabla(h - P)|^2 \\ &= 2\lambda^2 \int_{B_\lambda} |\nabla v|^2 + 2\lambda^2 \int_{B_\lambda} |\nabla(h - P)|^2 \\ &\leq 2\lambda^2 |B_\lambda|^{-1} C \int_{B_1} f^2 + 2\lambda^2 |B_\lambda|^{-1} \int_{B_\lambda} |\nabla(h - P)|^2. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Por outro lado, pela Proposição 1.5, tem-se

$$|\nabla(h - P)| \leq C_0 |x|^3. \quad (1.7)$$

Portanto, de (1.6) e (1.7), obtemos

$$\lambda^2 \int_{B_\lambda} |\nabla(u - P)|^2 \leq 2\lambda^{2-n} C \epsilon_0^2 + 2\lambda^2 C \lambda^6 |B_\lambda|.$$

O lema fica provado, quando tomamos λ e ϵ_0 suficientemente pequenos de modo que a desigualdade desejada seja obtida. Mais precisamente, tomamos λ tal que

$$2\lambda^2 C \lambda^6 |B_\lambda| \leq \frac{\lambda^{2(2+\alpha)}}{2},$$

e ϵ_0 tal que

$$2\lambda^{2-n} C \epsilon_0^2 \leq \frac{\lambda^{2(2+\alpha)}}{2}.$$

□

O próximo resultado tem semelhança com o Teorema 1.6, fornecendo a regularidade $C^{2,\alpha}$ de uma solução de $-\Delta u = f$ em B_1 . A principal diferença, neste caso, é que estamos lidando com a função f α -Hölder contínua em 0 no sentido L^2 e u ser $C^{2,\alpha}$ no 0 na semi-norma H^1 .

Teorema 1.9. *Suponha que u é solução fraca de*

$$-\Delta u = f \quad \text{em } B_1$$

e que f seja α -Hölder contínua na origem no sentido L^2 . Então u é $C^{2,\alpha}$ na origem na semi-norma H^1 . Além disso, os coeficientes de $\mathcal{P}_2$ e $[u]_{H^{1,2+\alpha}}(0)$ são limitados por $[f]_{\mathcal{L}^{2,\alpha}}(0)$ e $\left(\int_{B_1} |\nabla u|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ como

$$[u]_{H^{1,2+\alpha}}(0) \leq C \left([f]_{\mathcal{L}^{2,\alpha}}(0) + \left(\int_{B_1} |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \right).$$

Demonstração. O argumento também é semelhante ao do Teorema 1.6. Só que nesse caso, estamos lidando com a solução fraca da equação, com isso, buscaremos a regularidade $C^{2,\alpha}$ no sentido fraco, como na Definição 1.5. A normalização pode ser feita como segue, isto é, tomando $[f]_{\mathcal{L}^{2,\alpha}}(0)$ pequeno e

$$\int_{B_1} |\nabla u|^2 dx \leq 1.$$

Para provarmos o resultado, usaremos o argumento indutivo. Mais precisamente, supomos que existem polinômios harmônicos

$$P_k(x) = \frac{1}{2} x^T A_k x + B_k x + C_k,$$

satisfazendo

$$\lambda^{2k} \int_{B_{\lambda^k}} |\nabla(u - P_k)|^2 \leq \lambda^{2k(2+\alpha)},$$

onde

$$|A_k - A_{k+1}| \leq C\lambda^{k\alpha} \quad \text{e} \quad |B_k - B_{k+1}| \leq C\lambda^{k(\alpha+1)}.$$

Inicialmente, para $k = 0$, é o caso de normalização como feito no Teorema 1.6. Se $k = 1$ caímos no caso do lema anterior. Em seguida, prosseguindo o argumento indutivo, supomos que tal afirmação é válida para k , e consideramos o reescalonamento

$$w(x) = \frac{(u - P_k)(\lambda^k x)}{\lambda^{k(2+\alpha)}}.$$

Dessa forma, obtemos

$$\nabla w = \frac{f(\lambda^k x)}{\lambda^{k\alpha}} \quad \text{e} \quad \int_{B_1} |\nabla w|^2 dx \leq 1.$$

Estamos agora sob as hipóteses do lema anterior, o qual, nesse caso, garante a existência de um polinômio P com coeficientes limitados, tal que

$$\lambda^2 \int_{B_\lambda} |\nabla(w - P)|^2 \leq \lambda^{2(2+\alpha)},$$

desde que

$$\int_{B_1} \frac{|f(\lambda^k x)|^2}{\lambda^{k\alpha}} \leq ([f]_{\mathcal{L}^{2,\alpha}}(0))^2 \leq \epsilon_0^2.$$

Por conseguinte, para concluirmos o argumento indutivo

$$\lambda^2 \int_{B_{\lambda^k}} \left| \nabla \left(\frac{(u - P_k)(\lambda^k x)}{\lambda^{k(2+\alpha)}} - p \right) \right|^2 \leq \lambda^{2(2+\alpha)},$$

fazemos o seguinte:

$$\begin{aligned} & \lambda^2 \int_{B_{\lambda^k}} \left| \nabla \left(\frac{u(\lambda^k x) - P_k(\lambda^k x) - \lambda^{k(2+\alpha)} P}{\lambda^{k(2+\alpha)}} \right) \right|^2 \leq \lambda^{2(2+\alpha)} \\ & \Leftrightarrow \frac{\lambda^2}{\lambda^{k(2+\alpha)}} \int_{B_{\lambda^k}} |\nabla (u(\lambda^k x) - P_k(\lambda^k x) - \lambda^{k(2+\alpha)} P)|^2 \leq \lambda^{2(2+\alpha)} \\ & \Leftrightarrow \lambda^{2(k+1)} \int_{B_{\lambda^{k+1}}} \left| \nabla \left(u(x) - P_k(x) - \lambda^{k(2+\alpha)} P \left(\frac{x}{\lambda^k} \right) \right) \right|^2 \leq \lambda^{2(k+1)(2+\alpha)}. \end{aligned}$$

A conclusão se dá ao tomarmos

$$P_{k+1}(x) := P_k(x) + \lambda^{k(2+\alpha)} P \left(\frac{x}{\lambda^k} \right),$$

para que consigamos a validade da afirmação referida para $k + 1$. Por fim, note que A_k

e B_k , possivelmente ao longo de subsequências, convergem para A_∞ e B_∞ , respectivamente. Segue que o polinômio

$$P_\infty(x) = \frac{1}{2}x^T A_\infty x + B_\infty x$$

cumpre

$$\lambda^{2k} \int_{B_{\lambda^k}} |\nabla(P_k - P_\infty)|^2 \leq C \lambda^{2k(2+\alpha)}.$$

Consequentemente, se considerarmos $\lambda^{k+1} \leq r \leq \lambda^k$, e usarmos novamente a identidade do paralelogramo, temos que

$$\begin{aligned} r^2 \int_{B_r} |\nabla(u - P)|^2 &\leq 2r^2 \int_{B_r} |\nabla(u - P_k)|^2 + 2r^2 \int_{B_r} |\nabla(P_k - P)|^2 \\ &\leq 2 \int_{B_{\lambda^k}} |\nabla(u - P_k)|^2 + 2 \int_{B_{\lambda^k}} |\nabla(P_k - P)|^2 \\ &\leq (1 + C) \lambda^{2k(2+\alpha)} \\ &= \frac{1 + C}{\lambda^{2(2+\alpha)}} \lambda^{2(k+1)(2+\alpha)} \\ &\leq \frac{1 + C}{\lambda^{2(2+\alpha)}} r^{2(2+\alpha)}. \end{aligned}$$

□

1.3 O Método de Compacidade

Dando prosseguimento, os próximos resultados trazem à tona o Método de compacidade, também chamado de método indireto ou método blow-up. A vantagem desse método em relação ao Princípio do Máximo e ao método de Energia, é que ele não requer solubilidade do Problema de Dirichlet.

Lema 1.10. (Estimativa do tipo Caccioppoli) Suponha que $u \in C^2(\Omega)$ satisfaz

$$-\Delta u = f \quad \text{em } B_1 \subset \Omega.$$

Então para toda função suave η com suporte compacto em B_1 , é válido que

$$\int_{B_1} \eta^2 |\nabla u|^2 dx \leq \int_{B_1} \eta^2 f^2 dx + \int_{B_1} (4|\nabla \eta|^2 + \eta^2) u^2 dx.$$

Demonstração. O presente resultado é um tipo de desigualdade de Caccioppoli. A prova se dá, considerando a equação inicial, e multiplicando por $\eta^2 u$ em ambos os

lados da igualdade,

$$\int_{B_1} \eta^2 u (-\Delta u) dx = \int_{B_1} \eta^2 u f dx.$$

Em seguida, por *integração por partes*, obtemos

$$\int_{B_1} \eta^2 u (-\Delta u) = - \int_{B_1} \eta^2 u \partial_{ii} u = \int_{B_1} \eta^2 |\nabla u|^2 + 2 \int_{B_1} \eta \nabla \eta \cdot u \nabla u,$$

e então,

$$\int_{B_1} \eta^2 u f = \int_{B_1} \eta^2 |\nabla u|^2 + 2 \int_{B_1} \eta \nabla \eta \cdot u \nabla u,$$

que é equivalente a

$$\int_{B_1} \eta^2 |\nabla u|^2 = \int_{B_1} \eta^2 u f - 2 \int_{B_1} \eta \nabla \eta \cdot u \nabla u.$$

Usando a *Desigualdade de Young*, conseguimos a seguinte estimativa

$$\int_{B_1} \eta^2 u f - 2 \int_{B_1} \eta \nabla \eta \cdot u \nabla u \leq \frac{1}{2} \int_{B_1} \eta^2 f^2 + \frac{1}{2} \int_{B_1} \eta^2 u^2 + \frac{1}{2} \int_{B_1} \eta^2 |\nabla u|^2 + 2 \int_{B_1} |\nabla \eta|^2 u^2,$$

aplicando na desigualdade acima e cancelando a parcela $\frac{1}{2} \int_{B_1} \eta^2 |\nabla u|^2$, chegamos ao resultado. $\square$

Teorema 1.11. *Para todo $\epsilon > 0$, existe um $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, tal que para toda solução fraca de*

$$-\Delta u = f \quad \text{em } B_1$$

com

$$\int_{B_1} u^2 dx \leq 1 \quad \text{e} \quad \int_{B_1} f^2 dx \leq \delta^2,$$

existe uma função harmônica h tal que

$$\int_{B_{1/2}} |u - h|^2 \leq \epsilon^2.$$

Demonstração. Diferentemente dos argumentos anteriores, vamos provar tal afirmação por contradição. E tal técnica enfatizará o Método de Compacidade. Com efeito, negar a afirmação do teorema, é equivalente a afirmar que existem $\epsilon_0 > 0$ e sequências $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(f)_{n \in \mathbb{N}}$, satisfazendo

$$-\Delta u_n = f_n;$$

$$\int_{B_1} u_n^2 dx \leq 1$$

e

$$\int_{B_1} |f_n|^2 dx \leq \frac{1}{n}, \quad (1.8)$$

mas de tal forma que para qualquer função harmônica h em $B_{1/2}$, tem-se

$$\int_{B_{1/2}} |u_n - h|^2 \geq \epsilon_0^2. \quad (1.9)$$

Uma vez que u_n é solução fraca de $-\Delta u_n = f_n$, podemos usar o lema anterior, considerando $\eta \in C^\infty(B_1)$ de suporte compacto, tal que $\eta \equiv 1$ em $B_{1/2}$. Assim, segue que

$$\int_{B_{1/2}} |\nabla u_n|^2 \leq C.$$

De fato, o Lema 1.10 garante, no nosso caso, que

$$\begin{aligned} \int_{B_{1/2}} |\nabla u_n|^2 dx &\leq \int_{B_{1/2}} f^2 dx + \int_{B_{1/2}} u^2 dx \\ &\leq \frac{1}{n} + 1 \\ &\leq C. \end{aligned}$$

Mais precisamente, a desigualdade acima afirma que a integral da norma ao quadrado do gradiente de u_n , dividido por $|B_{1/2}|$, é limitada. Podemos então garantir que nessas condições a sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, possui uma subsequência u_{n_k} , tal qual cumpre

$$u_{n_k} \rightarrow u \text{ fracamente em } H^1(B_{1/2})$$

$$u_{n_k} \rightarrow u \text{ fortemente em } L^2(B_{1/2}).$$

Estes dois fatos sendo justificados a seguir: inicialmente, por $\int_{B_{1/2}} |\nabla u_n|^2 dx \leq C$, temos que, por H_1 ser *reflexivo*, u_n é limitada em $H^1(B_{1/2})$, logo possui uma subsequência convergindo fracamente em $H^1(B_{1/2})$. Para o segundo, note que por [[2], Teorema 1, p. 272] H^1 é imerso compactamente em L^2 , isso nos garante que a aplicação identidade

$$i : H^1 \rightarrow L^2$$

é compacta. Dessa forma, $u_{n_k} \rightarrow u$ fortemente em $L^2(B_{1/2})$; uma vez que aplicações compactas tornam sequências fracas em sequências fortes. Efetivamente, são esses dois fatos que justificam o nome do método.

Nosso objetivo agora é mostrar que u , nessas condições, é harmônica em $B_{1/2}$, para que ocorra uma contradição em função de (1.9). De fato, dada uma função teste

$\varphi \in C_0^\infty(B_{1/2})$, é válido que

$$\int_{B_{1/2}} \nabla \varphi \cdot \nabla u_n = \int_{B_{1/2}} \varphi f_n dx$$

donde, fazendo n tender a infinito, por (1.8), nós temos

$$\int_{B_{1/2}} \nabla \varphi \cdot \nabla u = 0.$$

Portanto u é harmônica em $B_{1/2}$, o que é uma contradição, como queríamos. $\square$

Lema 1.12. Fixado $0 < \alpha < 1$, existem constantes C_0 , λ e δ , com $0 < \lambda < 1$ e $\delta > 0$, tais que para qualquer função f e solução de

$$-\Delta u = f \quad \text{em } B_1$$

com

$$\int_{B_1} u^2 dx \leq 1 \quad \text{e} \quad \int_{B_1} f^2 dx \leq \delta^2,$$

existe um polinômio harmônico de ordem dois da forma

$$P(x) = \frac{1}{2} x^T A x + Bx + C$$

tal que

$$\int_{B_1} |u - P|^2 \leq \lambda^{2(2+\alpha)}.$$

Além disso,

$$|A| + |B| + |C| \leq C_0,$$

onde C_0 é uma constante universal.

Demonstração. Pelo resultado anterior, sob nossas hipóteses, existe uma função harmônica h que satisfaz

$$\int_{B_{1/2}} |u - h|^2 \leq \epsilon^2,$$

em que $\epsilon < 1$. Consequentemente,

$$\int_{B_{1/2}} |h|^2 \leq 2 \int_{B_{1/2}} |u|^2 + 2 \int_{B_{1/2}} |u - h|^2 \leq 2|B_1| + 2\epsilon^2 \leq 2(|B_1| + 1).$$

Usando estimativas sobre funções harmônicas, obtemos

$$|\nabla^2 h(x)|^2 \leq C \int_{B_1} |u|^2 \leq C, \quad \forall x \in B_{1/4}(0).$$

Dessa forma, considere o Polinômio de Taylor de segunda ordem de h em 0

$$P(x) = \frac{1}{2}x^T D^2 h(0)x + Dh(0)x + h(0),$$

para que pela Proposição 1.5 consigamos

$$|(h - P)(x)| \leq C_0 |x|^3, \forall x \in B_{1/4}(0).$$

Portanto, para cada $0 < \lambda < \frac{1}{4}$, temos que

$$\begin{aligned} \int_{B_\lambda} |u - P|^2 dx &\leq 2 \int_{B_\lambda} |u - h|^2 dx + 2 \int_{B_\lambda} |h - P|^2 dx \\ &\leq \frac{2\epsilon^2}{|B_\lambda|} + 2C_0^2 \lambda^6. \end{aligned}$$

E então, tomando $\delta = \delta(\epsilon)$ tal que ϵ cumpra

$$\frac{2\epsilon^2}{|B_\lambda|} \leq \frac{1}{2} \lambda^{2(2+\alpha)},$$

e λ tal que

$$2C_0^2 \lambda^6 \leq \frac{1}{2} \lambda^{2(2+\alpha)}.$$

As limitações das constantes se dá pelo fato de P ser harmônico. $\square$

Teorema 1.13. *Fixado um $0 < \alpha < 1$, existe uma constante C_0 tal que para toda solução fraca u de*

$$-\Delta u = f \quad \text{em } B_1,$$

para $[f]_{\mathcal{L}^{2,\alpha}}(0) < \infty$, existe um polinômio de segunda ordem $P(x) = \frac{1}{2}x^T Ax + Bx + C$, tal que

$$\int_{B_r} |u - P|^2 \leq C_1 r^{2(2+\alpha)},$$

onde a constante C_1 depende de $\int_{B_1} u^2 dx$ e $[f]_{\mathcal{L}^{2,\alpha}}(0)$. Mais que isso, é válido que

$$-\Delta P = f(0)$$

e

$$C_1^2 + |A|^2 + |B|^2 + |C|^2 \leq C_0 \left([f]_{\mathcal{L}^{2,\alpha}}(0)^2 + |f(0)|^2 + \int_{B_1} u^2 dx \right),$$

onde $f(0)$ é definido como em 1.4.

Demonstração. A normalização pode ser feita como antes, isto é, fazendo

$$f(0) < \delta_0 \quad \text{e} \quad [f]_{\mathcal{L}^{2,\alpha}}(0) \leq \delta_0.$$

E, também,

$$\int_{B_1} u^2 dx \leq 1.$$

Por indução, suponha que existem polinômios harmônicos,

$$P_k(x) = \frac{1}{2} x^T A_k x + B_k x + C_k$$

tais que

$$\int_{B_{\lambda^k}} |u - P_k|^2 \leq \lambda^{2k(2+\alpha)},$$

satisfazendo

$$\begin{aligned} |A_k - A_{k+1}| &\leq C \lambda^{k\alpha} \\ |B_k - B_{k+1}| &\leq C \lambda^{k(\alpha+1)} \\ |C_k - C_{k+1}| &\leq C \lambda^{k(\alpha+2)}. \end{aligned}$$

Fazendo $k = 0$, é o caso das condições sobre u . Se $k = 1$, cai exatamente no lema anterior. Assumindo tal afirmação válida para k , considere o seguinte reescalonamento

$$w(x) = \frac{(u - P_k)(\lambda^k x)}{\lambda^{k(2+\alpha)}}.$$

Com isso, temos que

$$-\Delta w = \frac{f(\lambda^k x)}{\lambda^{k\alpha}} \quad \text{e} \quad \int_{B_1} w^2 dx \leq 1.$$

Então, aplicando o lema anterior, existe um polinômio harmônico P o qual possui coeficientes limitados, tal que

$$\int_{B_\lambda} |w - P|^2 \leq \lambda^{2(2+\alpha)}$$

provido de

$$\int_{B_1} \frac{|f(\lambda^k x)|^2}{\lambda^{2\alpha k}} \leq [f]_{\mathcal{L}^{2,\alpha}}(0)^2 \leq \delta^2.$$

Assim, podemos majorar da seguinte maneira,

$$\begin{aligned} \int_{B_\lambda} \left| \frac{(u - P_k)(\lambda^k x)}{\lambda^{k(2+\alpha)}} - P \right|^2 &\leq \lambda^{2(2+\alpha)} \\ \int_{B_\lambda} \left| \frac{u(\lambda^k x) - P_k(\lambda^k x) - \lambda^{k(2+\alpha)} P}{\lambda^{k(2+\alpha)}} \right|^2 &\leq \lambda^{2(2+\alpha)} \\ \int_{B_{\lambda^{k+1}}} \left| u(x) - P_k(x) - \lambda^{k(2+\alpha)} P \left(\frac{x}{\lambda^k} \right) \right|^2 &\leq \lambda^{2(k+1)(2+\alpha)}. \end{aligned}$$

O que prova que a afirmação é válida para $k + 1$, escrevendo

$$P_{k+1}(x) = P_k(x) + \lambda^{k(2+\alpha)} P \left(\frac{x}{\lambda^k} \right).$$

Por fim, veja novamente que as sequências A_k , B_k e C_k convergem, possivelmente ao longo de subsequências, para A_∞ , B_∞ e C_∞ , respectivamente. Dessa forma, o polinômio

$$P_{\infty(x)} = \frac{1}{2} x^T A_\infty x + B_\infty x + C_\infty,$$

satisfaz

$$|P_k(x) - P_\infty(x)| \leq C \lambda^{k(2+\alpha)},$$

para qualquer que seja o x tal que $|x| \leq \lambda^k$. Consequentemente, uma vez que para $\lambda^{k+1} \leq r \leq \lambda^k$, tem-se

$$\begin{aligned} \int_{B_r} |u(x) - P_\infty(x)|^2 &\leq 2 \int_{B_r} |u(x) - P_k(x)|^2 + \frac{2}{|B_r|} \int_{B_r} |P_k(x) - P_\infty(x)|^2 \\ &\leq 2 \int_{B_r} |u(x) - P_k(x)|^2 + 2 \int_{B_r} |P_k(x) - P(x)|^2 \\ &\leq (1 + C) \lambda^{2k(2+\alpha)} \\ &\leq \frac{1 + C}{\lambda^{2(2+\alpha)}} r^{2(2+\alpha)}, \end{aligned}$$

e assim o resultado está provado. □

1.4 Estimativas de Schauder via Propriedades do tipo Liouville

Esta seção se resume em dois resultados, os quais serão imprescindíveis no próximo capítulo. De fato, o primeiro deles mostra uma estimativa da Hessiana através da

norma semi-norma $|\cdot|_{C^\alpha}$, tal qual no laplaciano, na mesma semi-norma. O segundo, garante que uma função harmônica é um polinômio quadrático, desde que a mesma, na norma $L^\infty(B_r)$, seja limitada para todo $r > 0$.

Teorema 1.14 (Estimativa Fundamental de Schauder em $\mathbb{R}^n$). *Dada uma função $u \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)$, existe uma constante $C = C(\alpha, n)$ tal que*

$$|D^2u|_{C^\alpha} \leq C|\Delta u|_{C^\alpha} \quad (1.10)$$

onde α representa a constante de Hölder, na semi-norma $|\cdot|_{C^\alpha}$ e n é a dimensão do domínio de u .

Vamos demonstrar essa afirmação usando o seguinte resultado:

Lema 1.15 (Resultado do tipo Liouville). Sejam $C, \epsilon > 0$ constantes. Se u é uma função harmônica que cumpre

$$\sup_{B_r(x_0)} |u| \leq Cr^{3-\epsilon}$$

para todo $r > 0$, então u é um polinômio quadrático.

Demonstração. Por hipótese, u é harmônica, o que acarreta por [[2], Teorema 7, p. 29], a seguinte estimativa da derivada

$$|D^\gamma u(x_0)| \leq \frac{C_k}{r^{k+n}} \|u\|_{L^1(B(x_0, r))}, \quad (1.11)$$

ou alternativamente, em [[4], Proposição 1.13, p. 5], a estimativa

$$|D^\gamma u(x_0)| \leq \frac{n^k e^{k-1} k!}{r^k} \max_{B(x_0, r)} |u|,$$

para todo multi-índice γ com $|\gamma| = k$. Ao usarmos a hipótese de limitação da norma L^∞ em $B(x_0, r)$ e (1.11), obtemos

$$|D^\gamma u(x_0)| \leq \frac{C_k}{r^{k+n}} Cr^{3-\epsilon} = \frac{C_1}{r^{k+n+\epsilon-3}}.$$

Então fazendo $r \rightarrow \infty$, para $k > 2$, temos que $D^\gamma u(x_0) = 0$. Portanto u é um polinômio quadrático. $\square$

Demonstração do Teorema 1.14. Fazemos a prova por contradição. Com efeito, negar tal afirmação é equivalente a dizer que existe uma sequência $u_k \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ satisfazendo

$$|D^2u_k|_{C^\alpha} > k|\Delta u_k|_{C^\alpha}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Em seguida, trocando u_k por $\lambda_k u_k$, donde $\lambda_k = |D^2 u_k|_{C^\alpha}^{-1}$, podemos então assumir que

$$|D^2 u_k|_{C^\alpha} = 1 \quad \text{e} \quad |\Delta u_k|_{C^\alpha} < k^{-1} \quad (1.12)$$

uma vez que

$$|D^2(\lambda_k u_k)|_{C^\alpha} = |\lambda_k D^2 u_k|_{C^\alpha} = |\lambda_k| |D^2 u_k|_{C^\alpha} = |D^2 u_k|_{C^\alpha}^{-1} |D^2 u_k|_{C^\alpha} = 1.$$

Com isso, obtemos

$$\sup_{x \neq y \in \mathbb{R}^n} \frac{|D^2 u_k(x) - D^2 u_k(y)|}{|x - y|^\alpha} = 1.$$

Isso significa, por definição de supremo, que dado $\epsilon > 0$, existem x_ϵ e $y_\epsilon \in \mathbb{R}^n$ tais que

$$1 - \epsilon < \frac{|D^2 u_k(x_\epsilon) - D^2 u_k(y_\epsilon)|}{|x_\epsilon - y_\epsilon|^\alpha}.$$

Agora, fazendo $x_\epsilon = x_k + h_k e_l$ e $y_\epsilon = x_k$, tome $\epsilon > 0$ de modo que

$$\frac{|D^2 u_k(x_k + h_k e_l) - D^2 u_k(x_k)|}{h_k^\alpha} \geq \frac{1}{2n^3}. \quad (1.13)$$

Note que este denominador foi obtido através do fato de e_l ser um vetor do $\mathbb{R}^n$, unitário, de modo que é a direção da derivada, a qual cumpre a estimativa acima. Mais precisamente, isso significa que existem $i, j, l \in \{1, \dots, n\}$, tais que para todo $k \in \mathbb{N}$, existem $x_k \in \mathbb{R}^n$ e $h_k > 0$, satisfazendo

$$\frac{|D_{ij}^2 u_k(x_k + h_k e_l) - D_{ij}^2 u_k(x_k)|}{h_k^\alpha} \geq \frac{1}{2n^3}.$$

Agora, fazendo uma mudança de x_k para a origem e adequando h_k de maneira apropriada, consideremos a seguinte função

$$\tilde{u}_k(x) = h_k^{-2-\alpha} u_k(x_k + h_k x).$$

Usando (1.12) e (1.13) em $\tilde{u}_k$, segue que é válido

$$|D^2 \tilde{u}_k|_{C^\alpha} = 1, \quad |\Delta \tilde{u}_k|_{C^\alpha} < k^{-1} \quad \text{e} \quad |D_{ij}^2 \tilde{u}_k(e_l) - D_{ij}^2 \tilde{u}_k(0)| \geq \frac{1}{2n^3}. \quad (1.14)$$

De fato, a primeira igualdade é obtida através do cálculo da segunda derivada de $\tilde{u}_k$ e a semi-norma $|\cdot|_\alpha$, isto é

$$D\tilde{u}_k(x) = h_k^{-2-\alpha} h_k Du_k(x_k + h_k x) = h_k^{-1-\alpha} Du_k(x_k + h_k x),$$

$$D^2 \tilde{u}_k(x) = h_k^{-1-\alpha} h_k D^2 u_k(x_k + h_k x) = h_k^{-\alpha} D^2 u_k(x_k + h_k x).$$

Com isso, segue que

$$\begin{aligned} |D^2 \tilde{u}_k|_{C^\alpha} &= |h_k^{-\alpha} D^2 u_k(x_k + h_k \cdot)|_{C^\alpha} \\ &= \sup_{x \neq y \in \mathbb{R}^n} \frac{|h_k^{-\alpha} D^2 u_k(x_k + h_k x) - h_k^{-\alpha} D^2 u_k(x_k + h_k y)|}{|x - y|^\alpha} \\ &= \sup_{x \neq y \in \mathbb{R}^n} \frac{|h_k^{-\alpha} (D^2 u_k(x_k + h_k x) - D^2 u_k(x_k + h_k y))|}{|x - y|^\alpha} \\ &= \sup_{x \neq y \in \mathbb{R}^n} \frac{|D^2 u_k(x_k + h_k x) - D^2 u_k(x_k + h_k y)|}{|h_k x - h_k y|^\alpha} \\ &= |D^2 u_k|_{C^\alpha} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Seguindo o mesmo raciocínio, conseguimos a primeira desigualdade fazendo

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{u}_k(x) &= \sum_{i=1}^n h_k^{-\alpha} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i^2}(x_k + h_k x) \\ &= h_k^{-\alpha} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i^2}(x_k + h_k x) \\ &= h_k^{-\alpha} \Delta u_k(x_k + h_k x), \end{aligned}$$

para então obtermos

$$\begin{aligned} |\Delta \tilde{u}_k|_{C^\alpha} &= |h_k^{-\alpha} \Delta u_k(x_k + h_k \cdot)|_{C^\alpha} \\ &= \sup_{x \neq y \in \mathbb{R}^n} \frac{|h_k^{-\alpha} \Delta u_k(x_k + h_k x) - h_k^{-\alpha} \Delta u_k(x_k + h_k y)|}{|x - y|^\alpha} \\ &= \sup_{x \neq y \in \mathbb{R}^n} \frac{|h_k^{-\alpha} (\Delta u_k(x_k + h_k x) - \Delta u_k(x_k + h_k y))|}{|x - y|^\alpha} \\ &= \sup_{x \neq y \in \mathbb{R}^n} \frac{|\Delta u_k(x_k + h_k x) - \Delta u_k(x_k + h_k y)|}{|h_k x - h_k y|^\alpha} \\ &= |\Delta u_k|_{C^\alpha} \\ &< k^{-1}. \end{aligned}$$

Por fim, a última desigualdade

$$\begin{aligned}
 |D_{ij}^2 \tilde{u}_k(e_l) - D_{ij}^2 \tilde{u}_k(0)| &= |h_k^{-\alpha} D_{ij}^2 u_k(x_k + h_k e_l) - h_k^{-\alpha} D_{ij}^2 u_k(x_k)| \\
 &= |h_k^{-\alpha} (D_{ij}^2 u_k(x_k + h_k e_l) - D_{ij}^2 u_k(x_k))| \\
 &= \frac{|D_{ij}^2 u_k(x_k + h_k e_l) - D_{ij}^2 u_k(x_k)|}{h_k^\alpha} \\
 &\geq \frac{1}{2n^3}.
 \end{aligned}$$

Dando prosseguimento a prova, considere, nesse caso, uma nova função $\bar{u}_k$ definida por

$$\bar{u}_k(x) = \tilde{u}_k(x) - P(x),$$

onde P é um polinômio de segunda ordem da seguinte forma

$$P(x) := \tilde{u}_k(0) + D\tilde{u}_k(0)x + \frac{1}{2}x^T D^2\tilde{u}_k(0)x.$$

Com essas hipóteses, note que $\bar{u}_k$ satisfaz

$$\bar{u}_k(0) = 0, \quad D\bar{u}_k(0) = 0 \quad \text{e} \quad D^2\bar{u}_k(0) = 0.$$

Com efeito, a primeira igualdade segue do fato de

$$\begin{aligned}
 \bar{u}_k(0) &= \tilde{u}_k(0) - P(0) \\
 &= \tilde{u}_k(0) - (\tilde{u}_k(0) + D\tilde{u}_k(0)0 + \frac{1}{2}0^T D^2\tilde{u}_k(0)0) \\
 &= \tilde{u}_k(0) - \tilde{u}_k(0) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

A segunda, segue de

$$D\bar{u}_k(0) = D(\tilde{u}_k(0) - P(0)) = D\tilde{u}_k(0) - DP(0) = 0,$$

onde usamos que $DP(0) = D\tilde{u}_k(0)$. E por último,

$$D^2\bar{u}_k(0) = D^2(\tilde{u}_k(0) - P(0)) = D^2\tilde{u}_k(0) - D^2P(0) = 0,$$

pois é válido que $D^2P(0) = D^2\tilde{u}_k(0)$. Além disso, essa função cumpre (1.13), como fizemos acima. Por compacidade, do mesmo modo como feito na seção anterior, garantimos, a menos de uma subsequência, que se deve ter $u_k \rightarrow u$, de modo que $u \in C_{\text{loc}}^2$.

Perceba que esse limite possui as seguintes propriedades

1. $u(0) = 0$;
2. $Du(0) = 0$;
3. $D^2u(0) = 0$;
4. $|D^2u|_{C^\alpha} \leq 1$;
5. $\Delta u = 0$;
6. $D_{ij}^2(e_l) \neq 0$.

Sendo esta última propriedade fundamental para o nosso argumento, em virtude do uso do Lema 1.15 em u para garantirmos que ele é um polinômio de segunda ordem, fazendo com que D^2u seja constante, o que contradiz o fato de $D_{ij}^2(e_l) \neq 0$. $\square$

Capítulo 2

Operadores Lineares Uniformemente Elípticos

Após os resultados que tinham como objetivo buscar regularidade $C^{2,\alpha}$ de soluções, o capítulo anterior foi finalizado com resultados referentes às estimativas de Liouville que nos deram ferramentas necessárias para este capítulo, cujo objetivo é mostrar uma estimativa para um operador elíptico - mais geral - em termos das normas $C^{2,\alpha}$, C^α e L^∞ num domínio suave $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Fazemos isso embasado em [5].

Primeiramente apresentamos algumas definições para nossa discussão, a saber, o operador a ser tratado, bem como suas propriedades. Em seguida, enunciamos e demonstramos dois lemas os quais são base do teorema central desse capítulo - denominado Estimativa Interior de Schauder.

No nosso caso, estudamos resultados de funções definidas num domínio suave $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, isto é, um subconjunto limitado e conexo do $\mathbb{R}^n$ com fronteira suave. Considere o seguinte operador na forma não-divergente.

$$Lu(x) := a^{ij}(x)D_{ij}^2u(x) + b^i(x)D_iu(x) + c(x)u(x) \quad \text{para } x \in \Omega, \quad (2.1)$$

em que $u \in C^2(\Omega)$ e a^{ij} , b^i e c são funções $C^\alpha(\Omega)$, com $\alpha \in (0, 1)$ sendo a constante de Hölder. Isso significa que

$$\|a^{ij}\|_{C^\alpha(\Omega)}, \quad \|b^i\|_{C^\alpha(\Omega)}, \quad \|c\|_{C^\alpha(\Omega)} \leq \Lambda, \quad (2.2)$$

para alguma constante $\Lambda > 0$. Além disso, adicionamos a hipótese de que esse operador seja uniformemente elíptico, ou seja, L satisfaz

$$a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2, \quad \forall x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (2.3)$$

onde λ é uma contante positiva.

Agora definimos algumas normas que são úteis no decorrer do capítulo. A primeira é estabelecida em funções $C^{k,\alpha}$, para que em particular possamos manusear a norma de funções $C^{2,\alpha}$ - objeto fundamental deste trabalho. A norma $C^{k,\alpha}(\Omega)$, para todo inteiro $k \geq 0$ e $\alpha \in (0, 1)$, é definida como

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} := \sum_{|\gamma| \leq k} \|D^\gamma u\|_{L^\infty(\Omega)} + \sum_{|\gamma|=k} |D^\gamma u|_{C^\alpha}.$$

Outra norma, não menos importante, é a norma $\|\cdot\|_{C^k}$, definida por

$$\|f\|_{C^k(\Omega)} := \sum_{|\gamma| \leq k} \|D^\gamma f\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

A seguir, os lemas fundamentais do teorema principal.

Lema 2.1. Dada $v \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)$, existe uma constante C_1 , dependendo de α, n e λ , tal que

$$|D^2 v|_\alpha \leq C_1 |a^{ij} D_{ij}^2 v|_\alpha.$$

Demonstração. Fazendo uma mudança de coordenadas linear

$$T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

tal que (TAT^{-1}) é uma matriz diagonal; onde $A = (a^{ij})$ é uma matriz simétrica positiva definida com autovalores limitados entre λ e λ^{-1} .

Escrevendo $\Gamma^{ij} = (TAT^{-1})$, note que a afirmação seguinte é verificada

AFIRMAÇÃO: Para toda $v \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)$, existe uma constante $C_1 = C_1(\alpha, n, \lambda)$, tal que $|D^2 v|_\alpha \leq C |\Gamma v|_\alpha$.

De fato, considerando a aplicação

$$S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$x_i \mapsto \frac{x_i}{\sqrt{\Gamma_i}}$$

daí, veja que para $w = v(Sx)$ e usando o Teorema 1.14, concluímos a demonstração da afirmação.

Em seguida, note que $|\Gamma v|_\alpha \leq |Av|_\alpha$, onde

$$Av = \sum_{i,j=1}^n A_{ij} D_{ij} v \quad \text{e} \quad \Gamma v = \sum_{i,j=1}^n \Gamma_i \partial_{ii} v.$$

Com efeito, observe que

$$\begin{aligned}
 |\Gamma v|_\alpha &= \sup_{x \neq y \in \mathbb{R}^n} \frac{|\Gamma v(x) - \Gamma v(y)|}{|x - y|^\alpha} \\
 &= \sup_{x \neq y \in \mathbb{R}^n} \frac{|\Gamma_i \partial_{ii} v(x) - \Gamma_i \partial_{ii} v(y)|}{|x - y|^\alpha} \\
 &= \sup_{x \neq y \in \mathbb{R}^n} \frac{|\operatorname{tr}(\Gamma_i \partial_{ii} v(x) - \Gamma_i \partial_{ii} v(y))|}{|x - y|^\alpha}.
 \end{aligned}$$

Denotando $M = D^2 v(x) - D^2 v(y)$, veja que

$$\operatorname{tr}(\Gamma M) = \operatorname{tr}(T A T^{-1} M) = \operatorname{tr}(A M)$$

uma vez que tais matrizes são simétricas. Visto isso, temos que

$$\begin{aligned}
 \sup_{x \neq y \in \mathbb{R}^n} \frac{|\operatorname{tr}(\Gamma_i \partial_{ii} v(x) - \Gamma_i \partial_{ii} v(y))|}{|x - y|^\alpha} &= \sup_{x \neq y \in \mathbb{R}^n} \frac{|\operatorname{tr}(\Gamma M)|}{|x - y|^\alpha} \\
 &= \sup_{x \neq y \in \mathbb{R}^n} \frac{|\operatorname{tr}(A M)|}{|x - y|^\alpha} \\
 &= \sup_{x \neq y \in \mathbb{R}^n} \frac{|\operatorname{tr}(A_{ij} D_{ij} v(x) - A_{ij} D_{ij} v(y))|}{|x - y|^\alpha} \\
 &\leq \sup_{x \neq y \in \mathbb{R}^n} \frac{|A_{ij} D_{ij} v(x) - A_{ij} D_{ij} v(y)|}{|x - y|^\alpha} \\
 &= |A v|_\alpha.
 \end{aligned}$$

Com isso, segue que

$$|D^2 v|_\alpha \leq C_1 |\Gamma v|_\alpha = C_1 |A v|_\alpha.$$

□

Lema 2.2. Dada $u \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)$, existe uma constante C_3 dependendo de n, α, λ e Λ tal que

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(B_1)} \leq C_3 (\|Lu\|_{C^\alpha(B_2)} + \|u\|_{C^2(B_2)}).$$

Demonstração. Considere $x_0 \in B_1 = B_1(0)$ e $v \in C^{2,\alpha}(B_\rho(x_0))$, com $\rho < 1$. Considere também o operador L da hipótese do teorema com os coeficientes fixos, isto é

$$a^{ij}(x_0) D_{ij}^2 v = Lv - (a^{ij} - a^{ij}(x_0)) D_{ij}^2 v - b^i D_i v - cv. \quad (2.4)$$

O que segue é válido e pode ser provado facilmente

$$|fg|_\alpha \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}|g|_\alpha + |f|_\alpha\|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)},$$

para todas $f, g \in C^\alpha(\mathbb{R}^n) = C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)$. De posse desse resultado, utilizando-o na igualdade acima, segue que

$$|(a^{ij} - a^{ij}(x_0))D_{ij}^2 v|_\alpha \leq \|a^{ij} - a^{ij}(x_0)\|_{L^\infty(B_\rho(x_0))}|D_{ij}^2 v|_\alpha + |a^{ij} - a^{ij}(x_0)|_\alpha \|D_{ij}^2 v\|_{L^\infty(B_\rho(x_0))}.$$

Agora usando a hipótese (2.2) na desigualdade acima, obtemos

$$|(a^{ij} - a^{ij}(x_0))D^2 v|_\alpha \leq \Lambda \rho^\alpha |D_{ij}^2 v|_\alpha + \Lambda \|D^2 v\|_{L(B_\rho(x_0))}, \quad (2.5)$$

sendo a primeira parcela do lado direito justificada pelo seguinte: dados $x \in B_\rho(x_0)$ e $\alpha \in (0, 1)$, temos que

$$\begin{aligned} |x - x_0| \leq \rho &\Leftrightarrow \frac{1}{|x - x_0|} \geq \frac{1}{\rho} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{|x - x_0|^\alpha} \geq \frac{1}{\rho^\alpha} \\ &\Leftrightarrow \frac{|a^{ij}(x) - a^{ij}(x_0)|}{\rho^\alpha} \leq \frac{|a^{ij}(x) - a^{ij}(x_0)|}{|x - x_0|^\alpha} \\ &\Leftrightarrow |a^{ij}(x) - a^{ij}(x_0)| \leq \rho^\alpha \frac{|a^{ij}(x) - a^{ij}(x_0)|}{|x - x_0|^\alpha} \leq \rho^\alpha |a^{ij}|_\alpha. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \|a^{ij} - a^{ij}(x_0)\|_{L^\infty(B_\rho(x_0))} &\leq \rho^\alpha |a^{ij}|_\alpha \\ &\leq \rho^\alpha \Lambda \end{aligned}$$

pois $\|a^{ij}\|_{C^\alpha(B_\rho(x_0))} = \|a^{ij}\|_{L^\infty(B_\rho(x_0))} + |a^{ij}|_\alpha \leq \Lambda$, o que nos traz $|a^{ij}|_\alpha \leq \Lambda$. E a segunda, pelo que segue

$$\begin{aligned} |a^{ij}(x) - a^{ij}(x_0)|_\alpha &= \sup_{x \neq y \in \mathbb{R}^n} \frac{|a^{ij}(x) - a^{ij}(x_0) - (a^{ij}(y) - a^{ij}(x_0))|}{|x - y|^\alpha} \\ &= \sup_{x \neq y \in \mathbb{R}^n} \frac{|a^{ij}(x) - a^{ij}(y)|}{|x - y|^\alpha} \\ &= |a^{ij}|_\alpha \\ &\leq \Lambda. \end{aligned}$$

Em seguida, escolhendo um ρ suficientemente pequeno tal que $C_1 \Lambda \rho^\alpha \leq \frac{1}{2}$, segue do Lema 2.1 e de (2.5) que

$$\begin{aligned}
 |D_{ij}^2 v|_\alpha &\leq C_1 |a^{ij} D_{ij}^2 v|_\alpha \\
 &= C_1 \left(|Lv - (a^{ij} - a^{ij}(x_0)) D_{ij}^2 v - b^i D_i v - cv|_\alpha \right) \\
 &\leq C_1 (|Lv|_\alpha + |(a^{ij} - a^{ij}(x_0)) D_{ij}^2 v|_\alpha + |b^i v|_\alpha + |cv|_\alpha) \\
 &\leq C_1 (|Lv|_\alpha + \Lambda \|D^2 v\|_{L^\infty(B_\rho(x_0))} + |b^i v|_\alpha + |cv|_\alpha) + \frac{1}{2} |D_{ij}^2 v|_\alpha.
 \end{aligned}$$

Dessa forma, passando o termo $\frac{1}{2} |D_{ij}^2 v|_\alpha$ para o lado esquerdo, podemos garantir a existência de uma constante $C_2 = C_2(n, \alpha, \lambda, \Lambda)$ tal que

$$|D_{ij}^2 v|_\alpha \leq C_2 (|Lv|_\alpha + \|D^2 v\|_{L^\infty(B_\rho(x_0))} + \|v\|_{L^\infty(B_\rho(x_0))}).$$

Observe que as duas últimas parcelas do lado direito formam uma norma equivalente a norma $\|v\|_{C^2(B_\rho(x_0))}$, sendo esta, por definição, da seguinte forma

$$\|v\|_{C^2(B_\rho(x_0))} = \sum_{|\gamma| \leq k} \|D^\gamma v\|_{L^\infty(B_\rho(x_0))} = \|D^2 v\|_{L^\infty(B_\rho(x_0))} + \|Dv\|_{L^\infty(B_\rho(x_0))} + \|v\|_{L^\infty(B_\rho(x_0))}.$$

Acoplando esse fato à desigualdade acima, obtemos

$$|D^2 v|_\alpha \leq C_2 (|Lv|_\alpha + \|v\|_{C^2(B_\rho(x_0))}). \quad (2.6)$$

Como tal estimativa é válida para qualquer função $v \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)$, podemos aplicar a função $v = \xi u$, em que u é uma função $C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ e ξ é uma função corte definida de maneira apropriada. Uma vez que B_1 é compacta, podemos assim por meio de uma cobertura aberta, de bolas $B_{3/2}(x_i)$, conseguir uma subcobertura finita dessas bolas em B_1 . Em outras palavras, existem

$$\{x_1, \dots, x_m\} \in B_{3/2}(0) \quad \text{tais que} \quad \bigcup_{i=1}^m B_{3/2}(x_i) \supset B_1.$$

Dessa forma, pela *Partição da Unidade*, existe

$$\{\xi_k\}, \quad \text{tal que} \quad \xi_k \in C_c^\infty(B_\rho(x_0)), \quad \sum_{k=1}^m \xi_k = 1, \quad 0 \leq \xi_k \leq 1, \quad \forall k = 1, \dots, m.$$

Assim, para todo $k = 1, \dots, m$, tem-se

$$\begin{aligned} |D^2u|_{C^\alpha(B_\rho(x_k))} &\leq C \left(|Lu|_{C^\alpha(B_\rho(x_k))} + \|u\|_{C^\alpha(B_\rho(x_k))} \right) \\ &\leq C \left(\|Lu\|_{C^\alpha(B_2)} + \|u\|_{C^2(B_2)} \right). \end{aligned}$$

Mas como

$$|D^2u|_{C^\alpha(B_1)} \leq \sum_{k=1}^m |D^2u|_{C^\alpha(B_\rho(x_k))}$$

que por sua vez, pela desigualdade anterior,

$$\sum_{k=1}^m |D^2u|_{C^\alpha(B_\rho(x_k))} \leq Cn \left(\|Lu\|_{C^\alpha(B_2)} + \|u\|_{C^2(B_2)} \right).$$

Agora, somando $Cn\|u\|_{L^\infty(B_2)}$ em ambos os lados da desigualdade, conseguimos

$$|D^2u|_{C^\alpha(B_1)} + Cn\|u\|_{L^\infty(B_2)} \leq Cn \left(\|Lu\|_{C^\alpha(B_2)} + \|u\|_{C^2(B_2)} + \|u\|_{L^\infty(B_2)} \right),$$

donde

$$|D^2u|_{C^\alpha(B_1)} + Cn\|u\|_{L^\infty(B_1)} \leq |D^2u|_{C^\alpha(B_1)} + Cn\|u\|_{L^\infty(B_2)}.$$

Portanto,

$$|D^2u|_{C^\alpha(B_1)} + Cn\|u\|_{L^\infty(B_1)} \leq Cn \left(\|Lu\|_{C^\alpha(B_2)} + \|u\|_{C^2(B_2)} + \|u\|_{L^\infty(B_2)} \right).$$

Usando o fato de $\|u\|_{C^{2,\alpha}}$ ser equivalente à $a\|u\|_{L^\infty} + b|D^2u|_\alpha$, com a e b constantes positivas, temos que

$$\begin{aligned} \|u\|_{C^{2,\alpha}(B_1)} &\leq |D^2u|_{C^\alpha(B_1)} + Cn\|u\|_{L^\infty(B_1)} \\ &\leq C_3 \left(\|Lu\|_{C^\alpha(B_2)} + \|u\|_{C^2(B_2)} \right), \end{aligned}$$

para alguma constante $C_3 = C_3(n, \alpha, \lambda, \Lambda)$.

□

A seguir, a Estimativa Interior de Schauder.

Teorema 2.3 (Estimativa Interior de Schauder). *Seja L é um operador diferencial linear de segunda ordem da forma (2.1) em $\Omega = B_2$ satisfazendo a continuidade Hölder como em (2.2) e a elipticidade uniforme (2.3). Então existe uma constante $C = C(n, \alpha, \lambda, \Lambda)$ tal que*

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(B_1)} \leq C \left(\|Lu\|_{C^\alpha(B_2)} + \|u\|_{L^\infty(B_2)} \right).$$

Demonstração. Pelo Lema 2.2, veja que para chegarmos na desigualdade desejada resta apenas substituímos, no lado direito, a norma C^2 pela norma L^∞ . E para isto, recorreremos a desigualdade de interpolação a seguir (ver em [[1], Lema 6.32, p. 130])

$$\|v\|_{C^2(B_1)} \leq \epsilon \|v\|_{C^{2,\alpha}(B_1)} + C_\epsilon \|v\|_{L^\infty(B_1)}, \quad (2.7)$$

que é válida para qualquer função $v \in C^{2,\alpha}(B_1)$ e qualquer $\epsilon > 0$, donde C_ϵ é uma constante que depende de n e α . A fim do uso de tal desigualdade, considere o número

$$Q := \sup_{x \in B_2} d(x, \partial B_2)^2 |D^2 u(x)|,$$

o qual está bem definido em virtude de $u \in C^{2,\alpha}(B_2)$ e que por $x \in B_2$, temos que $0 \leq d(x, \partial B_2) \leq 2$ para que $0 \leq d(x, \partial B_2)^2 \leq 4$.

Dado $x_0 \in B_2$, arbitrário, considere $\rho = \frac{1}{3}d(x_0, \partial B_2)$ tal qual satisfaz $0 \leq \rho \leq \frac{2}{3} < 1$. Agora, consideramos a função

$$\tilde{u}(x) := u(x_0 + \rho x), \quad x \in B_2.$$

a qual é solução de

$$\tilde{L}\tilde{u}(x) = \rho^2 Lu(x_0 + \rho x)$$

onde o operador $\tilde{L}$ é definido como

$$\tilde{L} = a^{ij}(x_0 + \rho x)D_{ij}^2 + \rho b^i(x_0 + \rho x) + \rho^2 c(x_0 + \rho x).$$

Com efeito, se considerarmos o operador L e aplicarmos a $u(x_0 + \rho x)$, conseguimos

$$Lu(x_0 + \rho x) = a^{ij}(x_0 + \rho x)D_{ij}^2 u(x_0 + \rho x) + b^i(x_0 + \rho x)D_i u(x_0 + \rho x) + c(x_0 + \rho x)u(x_0 + \rho x)$$

para que

$$\begin{aligned} \rho^2 Lu(x_0 + \rho x) &= \rho^2 a^{ij}(x_0 + \rho x)D_{ij}^2 u(x_0 + \rho x) + \rho^2 b^i(x_0 + \rho x)D_i u(x_0 + \rho x) \\ &\quad + \rho^2 c(x_0 + \rho x)u(x_0 + \rho x). \end{aligned}$$

Por outro lado, veja que

$$\begin{aligned}
& \tilde{L}\tilde{u}(x) \\
&= a^{ij}(x_0 + \rho x)D_{ij}^2\tilde{u}(x) + \rho b^i(x_0 + \rho x)D_i\tilde{u}(x) + \rho^2 c(x_0 + \rho x)\tilde{u}(x) \\
&= a^{ij}(x_0 + \rho x)D_{ij}^2u(x_0 + \rho x) + \rho b^i(x_0 + \rho x)D_iu(x_0 + \rho x) + \rho^2 c(x_0 + \rho x)u(x_0 + \rho x) \\
&= \rho^2 a^{ij}(x_0 + \rho x)D_{ij}^2u(x_0 + \rho x) + \rho^2 b^i(x_0 + \rho x)D_iu(x_0 + \rho x) + \rho^2 c(x_0 + \rho x)u(x_0 + \rho x) \\
&= \rho^2 (a^{ij}(x_0 + \rho x)D_{ij}^2u(x_0 + \rho x) + b^i(x_0 + \rho x)D_iu(x_0 + \rho x) + c(x_0 + \rho x)u(x_0 + \rho x)).
\end{aligned}$$

e então obtemos a igualdade $\tilde{L}\tilde{u}(x) = \rho^2 Lu(x_0 + \rho x)$. Portanto, considerando que $\rho \leq 1$ e que $\tilde{u} \in C^{2,\alpha}(B_2)$, juntamente com o Lema 2.2, temos que

$$\begin{aligned}
\|\tilde{u}\|_{C^{2,\alpha}(B_1)} &\leq C_3 \left(\|\tilde{L}\tilde{u}\|_{C^\alpha(B_2)} + \|\tilde{u}\|_{C^2(B_2)} \right) \\
&= C_3 \left(\rho^2 \|Lu(x_0 + \rho x)\|_{C^\alpha(B_2)} + \|u(x_0 + \rho x)\|_{C^2(B_2)} \right) \\
&= C_3 \left(\rho^2 \|Lu\|_{C^\alpha(B_{2\rho}(x_0))} + \|u\|_{C^2(B_{2\rho}(x_0))} \right) \\
&= C_3 \left(\rho^2 \|Lu\|_{C^\alpha(B_{2\rho}(x_0))} + \|u\|_{L^\infty(B_{2\rho}(x_0))} + \rho^2 \|D^2u\|_{L^\infty(B_{2\rho}(x_0))} \right) \\
&\leq C_3 \left(\|Lu\|_{C^\alpha(B_2)} + \|u\|_{L^\infty(B_2)} + \rho^2 \|D^2u\|_{L^\infty(B_{2\rho}(x_0))} \right). \tag{2.8}
\end{aligned}$$

Tudo isso foi feito, para que escolhendo $\epsilon = \min\{1, \frac{1}{18}C_3^{-1}\} > 0$, possamos inferir que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{9}d(x_0, \partial B_2)^2 |D^2u(x_0)| &\leq \rho^2 \|D^2u\|_{L^\infty(B_\rho(x_0))} \\
&= \|D^2\tilde{u}\|_{L^\infty(B_1)},
\end{aligned}$$

onde é obtida através da definição de ρ , e a igualdade é justificada por

$$\|D^2\tilde{u}\|_{L^\infty(B_1)} = \|D^2u(x_0 + \rho x)\|_{L^\infty(B_1)} = \rho^2 \|D^2u(x_0 + \rho x)\|_{L^\infty(B_1)} = \rho^2 \|D^2u\|_{L^\infty(B_\rho(x_0))}$$

pois $x_0 + \rho x \in B_\rho(x_0)$, sempre que $x \in B_1$. Em seguida, usando (2.7) em $\|D^2\tilde{u}\|_{L^\infty(B_1)}$, segue que

$$\|D^2\tilde{u}\|_{L^\infty(B_1)} \leq \epsilon \|\tilde{u}\|_{C^{2,\alpha}(B_1)} + C_\epsilon \|\tilde{u}\|_{L^\infty(B_1)},$$

em virtude de

$$\|\tilde{u}\|_{C^2(B_1)} \leq \epsilon \|\tilde{u}\|_{C^{2,\alpha}(B_1)} + C_\epsilon \|\tilde{u}\|_{L^\infty(B_1)}.$$

Por definição da norma C^2 , temos que

$$\|\tilde{u}\|_{L^\infty(B_1)} + \|D\tilde{u}\|_{L^\infty(B_1)} + \|D^2\tilde{u}\|_{L^\infty(B_1)} \leq \epsilon \|\tilde{u}\|_{C^{2,\alpha}(B_1)} + C_\epsilon \|\tilde{u}\|_{L^\infty(B_1)},$$

isto é,

$$\begin{aligned} \|D^2\tilde{u}\|_{L^\infty(B_1)} &\leq \epsilon\|\tilde{u}\|_{C^{2,\alpha}(B_1)} + C_\epsilon\|\tilde{u}\|_{L^\infty(B_1)} - \|\tilde{u}\|_{L^\infty(B_1)} - \|D\tilde{u}\|_{L^\infty(B_1)} \\ &\leq \epsilon\|\tilde{u}\|_{C^{2,\alpha}(B_1)} + C_\epsilon\|\tilde{u}\|_{L^\infty(B_1)}. \end{aligned}$$

Daí, pela estimativa (2.8), obtemos,

$$\begin{aligned} &\epsilon\|\tilde{u}\|_{C^{2,\alpha}(B_1)} + C_\epsilon\|\tilde{u}\|_{L^\infty(B_1)} \\ &\leq \epsilon C_3 \left(\|Lu\|_{C^\alpha(B_2)} + \|u\|_{L^\infty(B_2)} + \rho^2 \|D^2u\|_{L^\infty(B_{2\rho}(x_0))} \right) + C_\epsilon\|\tilde{u}\|_{L^\infty(B_1)} \\ &= \epsilon C_3 \|Lu\|_{C^\alpha(B_2)} + \epsilon C_3 \|u\|_{L^\infty(B_2)} + \epsilon C_3 \rho^2 \|D^2u\|_{L^\infty(B_{2\rho}(x_0))} + C_\epsilon\|\tilde{u}\|_{L^\infty(B_1)} \\ &\leq C_3 \|Lu\|_{C^\alpha(B_2)} + C_3 \|u\|_{L^\infty(B_2)} + \epsilon C_3 \rho^2 \|D^2u\|_{L^\infty(B_{2\rho}(x_0))} + C_\epsilon\|\tilde{u}\|_{L^\infty(B_1)} \\ &\leq C_3 \left(\|Lu\|_{C^\alpha(B_2)} + \|u\|_{L^\infty(B_2)} \right) + \epsilon C_3 \rho^2 \|D^2u\|_{L^\infty(B_{2\rho}(x_0))} \\ &+ C_\epsilon \left(\|Lu\|_{C^\alpha(B_2)} + \|u\|_{L^\infty(B_2)} \right) \\ &= (C_3 + C_\epsilon) \left(\|Lu\|_{C^\alpha(B_2)} + \|u\|_{L^\infty(B_2)} \right) + \epsilon C_3 \rho^2 \|D^2u\|_{L^\infty(B_{2\rho}(x_0))} \\ &\leq (C_3 + C_\epsilon) \left(\|Lu\|_{C^\alpha(B_2)} + \|u\|_{L^\infty(B_2)} \right) + \frac{1}{18}Q. \end{aligned}$$

Ao final, conseguimos a seguinte desigualdade

$$\frac{1}{9}d(x_0, \partial B_2)^2 |D^2u(x_0)| \leq (C_3 + C_\epsilon) \left(\|Lu\|_{C^\alpha(B_2)} + \|u\|_{L^\infty(B_2)} \right) + \frac{1}{18}Q,$$

a qual é equivalente a

$$2d(x_0, \partial B_2)^2 |D^2u(x_0)| \leq 18 (C_3 + C_\epsilon) \left(\|Lu\|_{C^\alpha(B_2)} + \|u\|_{L^\infty(B_2)} \right) + Q,$$

isto é

$$d(x_0, \partial B_2)^2 |D^2u(x_0)| \leq 18 (C_3 + C_\epsilon) \left(\|Lu\|_{C^\alpha(B_2)} + \|u\|_{L^\infty(B_2)} \right).$$

Portanto,

$$Q \leq 18 (C_3 + C_\epsilon) \left(\|Lu\|_{C^\alpha(B_2)} + \|u\|_{L^\infty(B_2)} \right).$$

Uma vez que $x_0 \in B_2$ é, arbitrário, temos que

$$\frac{1}{4} \sup_{x \in B_{3/2}} |D^2u| \leq Q \leq 18 (C_3 + C_\epsilon) \left(\|Lu\|_{C^\alpha(B_2)} + \|u\|_{L^\infty(B_2)} \right), \quad (2.9)$$

sendo a primeira desigualdade justificada da seguinte maneira: dado $x \in B_{3/2}$, é válido

que

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \leq d(x, \partial B_2) &\Rightarrow \frac{1}{4} \leq d(x, \partial B_2)^2 \\
 &\Leftrightarrow \frac{1}{4} |D^2 u| \leq d(x, \partial B_2)^2 |D^2 u| \\
 &\Leftrightarrow \sup_{x \in B_{3/2}} \frac{1}{4} |D^2 u| \leq \sup_{x \in B_{3/2}} d(x, \partial B_2)^2 |D^2 u| \\
 &\Leftrightarrow \frac{1}{4} \sup_{x \in B_{3/2}} |D^2 u| \leq \sup_{x \in B_{3/2}} d(x, \partial B_2)^2 |D^2 u|,
 \end{aligned}$$

como

$$\sup_{x \in B_{3/2}} d(x, \partial B_2)^2 |D^2 u| \leq \sup_{x \in B_2} d(x, \partial B_2)^2 |D^2 u| = Q,$$

segue que

$$\frac{1}{4} \sup_{x \in B_{3/2}} |D^2 u| \leq Q.$$

Agora, considerando o Lema 2.2, inferimos que

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(B_1)} \leq C \left(\|Lu\|_{C^\alpha(B_{3/2})} + \|u\|_{C^2(B_{3/2})} \right).$$

Em seguida, note que

$$\begin{aligned}
 \|u\|_{C^2(B_{3/2})} &\leq C \left(\|u\|_{L^\infty(B_{3/2})} + \|D^2 u\|_{L^\infty(B_{3/2})} \right) \\
 &\leq C \left(\|u\|_{L^\infty(B_2)} + \|D^2 u\|_{L^\infty(B_{3/2})} \right),
 \end{aligned}$$

daí, por (2.9), segue que

$$\|u\|_{C^2(B_{3/2})} \leq C \left(\|u\|_{L^\infty(B_2)} + \|Lu\|_{C^\alpha(B_2)} \right).$$

Como

$$\begin{aligned}
 \|u\|_{C^2(B_1)} &\leq \|u\|_{C^2(B_{3/2})} \\
 &\leq C \left(\|u\|_{L^\infty(B_2)} + \|Lu\|_{C^\alpha(B_2)} \right),
 \end{aligned}$$

o teorema está provado. □

Capítulo 3

Operadores Uniformemente Elípticos Totalmente Não-Lineares

Nosso objetivo neste capítulo é abordar as estimativas $C^{2,\alpha}$ para soluções no sentido de viscosidade, a qual abordamos a seguir. Estudamos estimativas de regularidade dessas soluções em equações totalmente não-lineares de segunda ordem uniformemente elípticas. Embasado em [9], estudamos a regularidade de soluções de viscosidade de equações da forma

$$F(D^2u(x)) = f(x), \quad (3.1)$$

onde u e f são funções definidas num domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, e $F(M)$ é uma função com valores reais definida em S , que é o espaço real $n \times n$ das matrizes simétricas. Vamos assumir que F é uniformemente elíptica, isto é,

Definição 3.1. Dizemos que F é uniformemente elíptica se existem duas constantes positivas $\lambda \leq \Lambda$, chamadas de constantes de elipticidade, tais que para toda matriz $M \in S$ é válido

$$\lambda\|N\| \leq F(M + N) - F(M) \leq \Lambda\|N\|, \quad \forall N \geq 0.$$

Aqui $N \geq 0$ significa que $\langle Nx, x \rangle \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$, isto é, representa uma matrix simétrica não-negativa definida. Além disso, $\|M\|$ denota a seguinte norma

$$\|M\| := \sup_{|x|=1} |Mx|.$$

Portanto $\|N\|$ é igual ao máximo autovalor de N , desde que $N \geq 0$. Dessa forma, a equação da forma (3.1) nas condições que foram mencionadas, é chamada equação totalmente não-linear de segunda ordem uniformemente elíptica. Nessas condições, $\Delta u = \text{tr}(D^2u)$ é um caso particular, onde, para este caso $\lambda = \Lambda = 1$.

Definição 3.2. Dizemos que F possui estimativas $C^{2,\bar{\alpha}}$ *a priori*, se existem constantes $\bar{\lambda}$ e c_e , com $0 < \bar{\lambda} < 1$ e $c_e > 0$, tais que para cada matriz simétrica M e $w_0 \in C(\partial B_1)$, com $F(M) = 0$, existe

$$w \in C^2(B_1) \cap C(\bar{B}_1) \cap C^{2,\bar{\alpha}}(B_{1/2})$$

satisfazendo

$$\begin{cases} F(D^2w + M) = 0 & \text{em } B_1 \\ w = w_0 & \text{sobre } \partial B_1 \end{cases}$$

e

$$\|w\|_{C^{2,\bar{\alpha}}(B_{1/2})} \leq c_e \|w\|_{L^\infty(B_1)}.$$

Pela Proposição 1.5, podemos observar que o Laplaciano satisfaz as condições da definição 3.2.

3.1 Soluções de Viscosidade

Relembremos que uma função definida em Ω tem máximo local em $x_0 \in \Omega$ (respectivamente mínimo local) sempre que $v(x) \leq v(x_0)$, para todo x numa vizinhança de x_0 (respectivamente $v(x) \geq v(x_0)$).

Definição 3.3. Uma função contínua u em Ω é dita subsolução de viscosidade de (3.1) em Ω , quando é válida a seguinte condição: se $x_0 \in \Omega$ e $\varphi \in C^2(\Omega)$ e $u - \varphi$ tem máximo local em x_0 , então

$$F(D^2\varphi(x_0)) \geq f(x_0). \quad (3.2)$$

Respectivamente, definimos supersolução de viscosidade.

Definição 3.4. Uma função contínua u em Ω é dita supersolução de viscosidade de (3.1) em Ω , quando é válida a seguinte condição: se $x_0 \in \Omega$ e $\varphi \in C^2(\Omega)$ e $u - \varphi$ tem mínimo local em x_0 , então

$$F(D^2\varphi(x_0)) \leq f(x_0). \quad (3.3)$$

Dizemos que u é solução de viscosidade de (3.1) quando satisfaz (3.2) e (3.3). Dessa forma, em particular, se $u \in C^2$, a solução coincide no sentido clássico.

3.2 Regularidade $C^{2,\alpha}$ de Soluções de Viscosidade

O seguinte lema é uma consequência direta do Lema 7.9 em [9].

Lema 3.1. Considere uma solução de viscosidade de

$$F(D^2u) = f, \quad \text{em } B_{8\sqrt{n}}$$

tal que $\|u\|_{L^\infty(B_{8\sqrt{n}})} \leq 1$. Além disso, assuma que $F(D^2w) = 0$ tem estimativas $C^{1,1}$ interior. Então existe $h \in C^2(\bar{B}_{6\sqrt{n}})$ tal que

$$\|h\|_{C^{1,1}(\bar{B}_{6\sqrt{n}})} \leq c(n)c_e$$

e

$$\|u - h\|_{L^\infty(B_{6\sqrt{n}})} \leq C\|f\|_{L^n(B_{8\sqrt{n}})}, \quad (3.4)$$

onde C é uma constante que depende de n, λ, Λ, c_e .

Lema 3.2. Suponha que F é um operador uniformemente elíptico tal que $F(0) = f(0) = 0$, que possui estimativas $C^{2,\bar{\alpha}}$ a priori, e que u é solução de viscosidade de

$$F(D^2u) = f \quad \text{em } B_1,$$

com $\|u\|_{L^\infty(B_1)} \leq 1$. Então existem uma constante $0 < \mu < 1$, dependendo apenas de $n, \lambda, \Lambda, c_e, \bar{\alpha}$ e α e uma sequência polinomial

$$P_k(x) = A_k + B_k x + \frac{1}{2} x^T C_k x,$$

tal que, para todo inteiro $k \geq 0$,

$$F(C_k) = 0, \quad (3.5)$$

$$\|u - P_k\|_{L^\infty(B_{\mu^k})} \leq \mu^{k(2+\alpha)} \quad (3.6)$$

e

$$|A_k - A_{k-1}| + \mu^{k-1}|B_k - B_{k-1}| + \mu^{2(k-1)}\|C_k - C_{k-1}\| \leq 13c_e\mu^{(k-1)(2+\alpha)}, \quad (3.7)$$

onde $P_0 \equiv P_{-1} \equiv 0$.

Demonstração. Inicialmente, tome μ suficientemente pequeno de modo que

$$\mu^\alpha \leq \frac{1}{2}, \quad \mu \leq \frac{7}{16}, \quad 28c_e\mu^{\bar{\alpha}} \leq \mu^\alpha. \quad (3.8)$$

Tome também $\epsilon \in (0, 1)$, tal que

$$2C\epsilon^\gamma \leq c_e\mu^{2+\bar{\alpha}}, \quad (3.9)$$

em que C é a constante em (3.4), no lema anterior. Além disso, tome $\delta > 0$ tal que

$$2(1 + 26c_e)c(n)\delta = \epsilon,$$

$c(n)$ sendo uma constante que depende apenas de n . Como queremos mostrar que o resultado é válido para todo inteiro $k \geq 0$, inicialmente note que para $k = 0$, o lema é válido pois

$$P_0 \equiv P_{-1} \equiv 0, \quad F(0) = 0 \quad \text{e} \quad \|u\|_{L^\infty(B_1)} \leq 1.$$

Agora, indutivamente, suponha que o lema é válido para $k \leq i$. Nosso objetivo então é provar que o resultado é válido para $k = i + 1$, com $i \geq 0$. Para isso, considere o seguinte reescalonamento

$$v(y) = \frac{(u - P_i)(\mu^i y)}{\mu^{i(2+\alpha)}}, \quad y \in B_1.$$

Note que a função v satisfaz

$$\mu^{-i\alpha} F(\mu^{i\alpha} D^2 v(y) + C_i) = \mu^{-i\alpha} f(\mu^i y).$$

Com isso, temos que $F_i(D^2 v(y)) = f_i(y)$ em B_1 , onde

$$F_i(M) = \mu^{-i\alpha} (F(\mu^{i\alpha} M + C_i) - F(C_i)),$$

$$f_i(y) = \mu^{-i\alpha} (f(\mu^i y) - F(C_i)).$$

De fato,

$$\begin{aligned} F_i(D^2 v(y)) &= \mu^{-i\alpha} (F(\mu^{i\alpha} D^2 v(y) + C_i) - F(C_i)) \\ &= \mu^{-i\alpha} f(\mu^i y) \\ &= f_i(y). \end{aligned}$$

Note que $F_i(D^2 w) = 0$ tem estimativas $C^{2,\bar{\alpha}}$ interiores, pois, pela definição da F_i , temos que isso é equivalente a

$$F(D^2(\mu^{i\alpha} w) + C_i) = 0.$$

Com isso, temos também que $F(C_i) = 0$. Por outro lado, observe que

$$|f_i(y)| \leq \mu^{-i\alpha} (|f(\mu^i y)|)$$

para que como consequência

$$\begin{aligned}\|f_i\|_{L^n(B_1)} &\leq \mu^{-i\alpha} \mu^{-i} (\|f\|_{L^n(B_{\mu^i})}) \\ &\leq c(n)\delta(1 + 1 + 26c_e) \\ &\leq \epsilon.\end{aligned}$$

Com isso, o Lema 3.1 nos dá a existência de uma $h \in C^2(\bar{B}_{3/4})$ que satisfaz

$$\|v - h\|_{L^\infty(B_{1/2})} \leq C\epsilon \leq 2C\epsilon.$$

Na verdade, mais precisamente, o lema garante que existe $h \in C^2(\bar{B}_{3/4})$ tal que

$$\|v - h\|_{L^\infty(B_{3/4})} \leq C\epsilon,$$

mas

$$\|v - h\|_{L^\infty(B_{3/4})} \leq \|v - h\|_{L^\infty(B_{1/2})}.$$

Ainda sobre o Lema 3.1, pela sua prova (ver [[9], p. 67]), h satisfaz

$$\begin{cases} F_i(D^2h) = 0 & \text{em } B_{7/8} \\ h = v & \text{sobre } \partial B_{7/8}. \end{cases}$$

Consequentemente,

$$F(\mu^{i\alpha} D^2h + C_i) = 0 \quad \text{em } B_{7/8}. \quad (3.10)$$

Por nossa hipótese sobre estimativas interiores $C^{2,\bar{\alpha}}$, temos que

$$\begin{aligned}\|h\|_{C^{2,\bar{\alpha}}(\bar{B}_{7/16})} &\leq \|h\|_{C^{2,\bar{\alpha}}(\bar{B}_{1/2})} \\ &\leq c_e \|v\|_{L^\infty(\partial B_{7/8})} \\ &\leq c_e.\end{aligned} \quad (3.11)$$

Isso assegura, por (3.8) e (3.9), que para o seguinte polinômio de segundo grau

$$\bar{P}(y) = h(0) + Dh(0)y + \frac{1}{2}y^T D^2h(0)y,$$

ocorra que

$$\begin{aligned}\|h - \bar{P}\|_{L^\infty(B_\mu)} &\leq c_e \left(\frac{16}{7}\right)^{2+\bar{\alpha}} \mu^{2+\bar{\alpha}} \\ &\leq 28c_e \mu^{2+\bar{\alpha}}.\end{aligned}$$

Reescalando novamente, obtemos

$$|u(x) - P_i(x) - \mu^{i(2+\alpha)} \bar{P}(\mu^{-i}x)| \leq \mu^{(i+1)(2+\alpha)}.$$

Dessa forma, nosso argumento de indução fica concluído para $k = i + 1$, primeiramente para (3.6), definindo

$$P_{i+1}(x) = P_i(x) + \mu^{i(2+\alpha)} \bar{P}(\mu^{-i}x).$$

Em seguida para (3.5), segue do fato de $C_{i+1} = C_i + \mu^{i\alpha} D^2 h(0)$, o qual traz por consequência junto com (3.10) que

$$F(C_{i+1}) = 0.$$

Por fim, (3.7) segue do fato de (3.11) e da seguinte estimativa

$$\begin{aligned} |A_{i+1} - A_i| &+ \mu^i |B_{i+1} - B_i| + \mu^{2i} \|C_{i+1} - C_i\| \\ &\leq \mu^{i(2+\alpha)} (|h(0)| + |Dh(0)| + \|D^2 h(0)\|) \\ &\leq \mu^{i(2+\alpha)} c_e \left(1 + \frac{16}{7} + \left(\frac{16}{7} \right)^2 \right) \\ &\leq 13c_e \mu^{i(2+\alpha)}. \end{aligned}$$

□

Lema 3.3. Sob as mesmas hipóteses do lema anterior e supondo que existe uma constante suficientemente pequena $\delta > 0$, que depende apenas de $n, \lambda, \Lambda, c_e, \bar{\alpha}$ e α tal que

$$\left(\int_{B_r} |f|^n \right)^{1/n} \leq \delta r_0^\alpha, \quad \forall r \leq r_0. \quad (3.12)$$

Existe um polinômio de segundo grau P tal que

$$\|u - P\|_{L^\infty(B_r)} \leq C r^{2+\alpha}, \quad \forall r \leq 1, \quad (3.13)$$

e

$$|DP(0)| + \|D^2 P\| \leq C, \quad (3.14)$$

para alguma constante $C > 0$, tal que $C = C(n, \lambda, \Lambda, c_e, \bar{\alpha}, \alpha)$.

Demonstração. Observe primeiro que, pelo lema anterior, $\{P_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente em B_1 para um polinômio de segunda ordem P , o qual satisfaz (3.14) pelo fato de ser harmônico.

A desigualdade (3.13) é obtida notando que para todo inteiro $k \geq 0$, tem-se

$$\begin{aligned}
 \|u - P\|_{L^\infty(B_{\mu^k})} &= \|u - P_k + P_k - P\|_{L^\infty(B_{\mu^k})} \\
 &\leq \|u - P_k\|_{L^\infty(B_{\mu^k})} + \|P_k - P\|_{L^\infty(B_{\mu^k})} \\
 &\leq \|u - P_k\|_{L^\infty(B_{\mu^k})} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \|P_i - P_{i-1}\|_{L^\infty(B_{\mu^k})} \\
 &\leq \mu^{k(2+\alpha)} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \left(|A_i - A_{i-1}| + \mu^k |B_i - B_{i-1}| + \frac{1}{2} \mu^{2k} \|C_i - C_{i-1}\| \right) \\
 &\leq \mu^{k(2+\alpha)} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \left(\mu^{(i-1)(2+\alpha)} + \mu^k \mu^{(i-1)(2+\alpha)} + \mu^{2k} \mu^{\alpha(i-1)} \right) \\
 &\leq C \mu^{k(2+\alpha)}.
 \end{aligned}$$

□

O próximo teorema é a junção dos lemas anteriores dessa seção, o qual vai garantir a regularidade $C^{2,\alpha}$ de solução de viscosidade, isto é, o resultado principal deste capítulo.

Teorema 3.4. *Considere F e f como no Lema 3.2, ambas contínuas com constantes de elipticidade λ e Λ . Nessas condições, assuma ainda que $0 < \alpha < \bar{\alpha}$, $r_0 > 0$, $C_1 > 0$, $C_2 > 0$,*

$$\left(\int_{B_r} |f|^n \right)^{1/n} \leq C_2 r_0^{-\alpha} r^\alpha, \quad \forall r \leq r_0, \quad (3.15)$$

e que u seja solução de viscosidade de

$$F(D^2u) = f \quad \text{em} \quad B_{r_0}.$$

Então u é $C^{2,\alpha}$ na origem, isto é, existe um polinômio de segundo grau P tal que

$$\|u - P\|_{L^\infty(B_r(0))} \leq C_3 r_0^{-(2+\alpha)} r^{2+\alpha}, \quad \forall r \leq r_1, \quad (3.16)$$

$$r_0 |DP(0)| + r_0^2 \|D^2P\| \leq C_3, \quad (3.17)$$

$$C_3 \leq C \left(\|u\|_{L^\infty(B_{r_0}(0))} + r_0^2 (C_2 + 1) \right), \quad (3.18)$$

e

$$r_1 = C^{-1} r_0, \quad (3.19)$$

onde $C > 1$ depende apenas de $n, \lambda, \Lambda, c_e, \bar{\alpha}, \alpha$ e C_1 .

Demonstração. Provaremos esse teorema usando o Lema 3.3 por meio de um reescalo-

namento. Com efeito, para u em questão, considere

$$\tilde{u}(y) := \frac{r_1^{-2}u(r_1y)}{r_1^{-2}\|u\|_{L^\infty(B_{r_0})} + \delta^{-1}C_2} = \frac{r_1^{-2}u(r_1y)}{K}, \quad y \in B_1,$$

se $K \geq 1$. Caso contrário, considere $\tilde{u}(y) = r_1^{-2}u(r_1y)$. No primeiro caso (se $K \geq 1$), é válido que

$$\frac{1}{K}F(KD^2\tilde{u}(r_1y)) = \frac{f(r_1y)}{K} =: \tilde{f}(y).$$

Veja que $\|\tilde{u}\|_{L^\infty(B_1)} \leq 1$. Em seguida, vamos as conclusões do teorema. Se $r_1 \leq r_0$ é tomado de modo que $C_1r_0^{-\alpha}r_1 \leq \delta$, obtemos (3.19). As estimativas (3.16), (3.17) e (3.18) são obtidas por meio do reescalonamento de u e do uso do Lema 3.3. $\square$

Referências Bibliográficas

- [1] D. Gilbarg, N. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer, 1998.
- [2] Evans, L. C. *Partial Differential Equations*, AMS, 2010.
- [3] H. Brézis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2011.
- [4] Han, Qing, Lin, Fanghua, *Elliptic Partial Differential Equations*, AMS, 2000.
- [5] Haslhofer, Robert, *Schauder Estimates*, http://www.math.toronto.edu/roberth/pde2/schauder_estimates.pdf, Notas de Aula.
- [6] John, F., *Partial Differential Equations*, Reprint of the fourth edition, Applied Mathematical Sciences 1, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [7] Luis A. Caffarelli, *A localization property of viscosity solutions to the Monge-Ampère equation and their strict convexity*, Annals of Mathematics 131 (1990), 129-134.
- [8] Luis A. Caffarelli, *Elliptic second order equations*, Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano, Vol LVIII (1988), 253 - 284.
- [9] Luis A. Caffarelli, Xavier Cabré, *Fully Nonlinear Elliptic Equations*, AMS.
- [10] Luis A. Caffarelli, *Interior a priori estimates for solutions of fully nonlinear equations*, Annals of Mathematics 130 (1989), 189-213.
- [11] Luis A. Caffarelli, *Interior $W^{2,p}$ estimates for solutions of the Monge-Ampère equation*, Annals of Mathematics 131 (1990), 135-150.
- [12] L. Simon, *Schauder estimates by scaling*, Calc. Var. PDE 5(5):391 - 407, 1997.
- [13] Nirenberg L, *On elliptic partial differential equations*, Ann. Scuola Norm Sup. Pisa 13 (1959), 115-162.

- [14] Protter, M. H. e Weinberger, H F., *Maximum Principles in Differential Equations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, Nj, 1967.
- [15] Silva, Rubens Neves e, *Uma Introdução à Teoria de Regularidade Elíptica Via Métodos Variacionais*, Dissertação de mestrado, UFPB, 2018.
- [16] Wang, Lihe. *Regularity Theory*, <http://homepage.divms.uiowa.edu/~lwang/WangKorea.pdf>, Notas de Aula.