



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT



Um estudo sobre as leis dos cossenos, senos, tangentes e cotangentes explorando os pacotes gráficos do $\text{\LaTeX}$: ‘animate’, ‘tikz’, ‘tkz-base’ e ‘tkz-euclide’

por

Marconi Ferreira Lima

2025



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT



Um estudo sobre as leis dos cossenos, senos, tangentes e cotangentes explorando os pacotes gráficos do $\text{\LaTeX}$: ‘animate’, ‘tikz’, ‘tkz-base’ e ‘tkz-euclide’[†]

por

Marconi Ferreira Lima

sob a orientação do

Prof. Dr. Flank David Morais Bezerra

Dissertação apresentada ao Corpo Docente
do Mestrado Profissional em Matemática em
Rede Nacional - PROFMAT/CCEN/UFPB,
como requisito parcial para a obtenção do
título de Mestre em Matemática.

Julho 2025

João Pessoa - PB

[†]O presente trabalho foi realizado com apoio da CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de
Nível Superior.

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

L732e Lima, Marconi Ferreira.

Um estudo sobre as leis dos cossenos, senos, tangentes e cotangentes explorando os pacotes gráficos do LATEX: 'animate', 'tikz', 'tkz-base' e 'tkz-euclide' / Marconi Ferreira Lima. - João Pessoa, 2025.
77 f. : il.

Orientação: Flank David Moraes Bezerra.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN/PROFMAT.

1. Matemática. 2. Lei dos cossenos. 3. Lei dos senos. 4. Lei das tangentes. 5. Lei das cotangentes. 6. Animações com Latex. I. Bezerra, Flank David Moraes. II. Título.

UFPB/BC

CDU 51(043)

Um estudo sobre as leis dos cossenos, senos, tangentes e cotangentes explorando os pacotes gráficos do L^AT_EX: ‘animate’, ‘tikz’, ‘tkz-base’ e ‘tkz-euclide’

por

Marconi Ferreira Lima

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT/CCEN/UFPB, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

 Documento assinado digitalmente
FLANK DAVID MORAIS BEZERRA
Data: 02/11/2025 09:50:56-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Flank David Moraes Bezerra - UFPB (Orientador)

 Documento assinado digitalmente
EDUARDO GONCALVES DOS SANTOS
Data: 10/11/2025 16:36:21-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Eduardo Gonçalves dos Santos - UFPB

 Documento assinado digitalmente
MARCELA DUARTE FERRARI
Data: 11/11/2025 09:02:59-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Profa. Dra. Marcela Duarte Ferrari - UEM

 Documento assinado digitalmente
RENATA DE FARIAS LIMEIRA CARVALHO
Data: 02/11/2025 10:44:36-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Profa. Dra. Renata de Farias Limeira Carvalho - UFMA

Julho/ 2025

Agradecimentos

Agradeço ao professor Dr. Flank David Moraes Bezerra pela referência de profissional, pelo apoio e ideia para a elaboração dessa dissertação, bem como a todos os professores que, além de lecionarem as matérias do núcleo básico, foram sempre muito atenciosos com todos os mestrandos.

Agradeço aos meus colegas de turma, que contribuíram na construção do meu conhecimento e pelos momentos inesquecíveis de descontração durante o curso.

Agradeço também à minha esposa Rose, que sempre me incentivou na jornada em busca da realização do desejo de progredir no meu trabalho.

Dedicatória

*A todos os que se alegram com o nosso
sucesso!*

Resumo

Neste trabalho dissertamos sobre alguns resultados da trigonometria, mais precisamente, estudamos as leis dos cossenos, senos, tangentes e cotangentes explorando os pacotes gráficos do $\text{\LaTeX}$: ‘animate’, ‘tikz’, ‘tkz-base’ e ‘tkz-euclide’. Apresentamos demonstrações geométricas e “demonstrações sem palavras” desses resultados, bem como algumas generalizações. Por fim, exploramos alguns generalizações desses resultados no contexto da geometria esférica, e disponibilizamos alguns dos conjuntos de elementos $\text{\LaTeX}$ necessários para a produção da maioria das figuras presentes aqui.

Palavras-chave: geometria esférica; lei dos cossenos; leis das cotangentes; leis dos senos; lei das tangentes; pacotes gráficos do $\text{\LaTeX}$.

Abstract

In this work we discuss some results of trigonometry, more precisely, we study the laws of cosines, sines, tangents and cotangents exploring the graphical packages of $\text{\LaTeX}$: ‘animate’, ‘tikz’, ‘tkz-base’ and ‘tkz-euclide’. We present geometric proofs and “proof without words” of these results, as well as some curious consequences. Finally, we explore some generalizations of these results in the context of spherical geometry, and we provide some of the $\text{\LaTeX}$ element sets needed to produce most of the figures presented here.

Key-words: spherical geometry; laws of cosines; laws of sines; laws of tangents; laws of cotangents; graphical packages of $\text{\LaTeX}$.

Introdução

A trigonometria está contemplada na Base Nacional Comum Curricular (BNCC). No Ensino Fundamental (9º ano), ela aparece dentro do contexto da ‘Geometria’, e no Ensino Médio, dentro de ‘Geometrias e medidas’. A BNCC inclui a trigonometria em habilidades como a de demonstrar relações métricas no triângulo retângulo, identificar as características das funções seno e cosseno, e resolver problemas envolvendo fenômenos periódicos. Inclusive a BNCC enfatiza a utilização de tecnologias digitais para explorar as funções trigonométricas e a comparação entre diferentes representações (ciclo trigonométrico e plano cartesiano), veja mais detalhes em [3]. Destacamos também que a BNCC traz o “pensamento computacional”, veja [12], como uma habilidade no Ensino Médio [3].

Neste trabalho, dissertamos sobre as leis dos cossenos, lei dos senos, lei das tangentes e lei das cotangentes, apresentamos as versões clássicas destes resultados, uma demonstração, exploramos o apelo intuitivo geométrico destes resultados usando os pacotes gráficos do L^AT_EX ‘animate’, ‘tikz’, ‘tkz-base’ e ‘tkz-euclide’, bem como apresentamos algumas consequências.

O trabalho está estruturado da seguinte forma:

O Capítulo 1 intitulado ‘Geometria plana’ é dedicado às versões clássicas das leis dos cossenos, lei dos senos, lei das tangentes, lei das cotangentes, e algumas consequências. A lei dos cossenos é apresentada como uma generalização do teorema de Pitágoras (Neto, 2022, p. 139), conforme Figura 1, fundamental para a resolução de problemas envolvendo triângulos quando se conhecem todos os três lados ou dois lados e o ângulo adjacente a eles.

Figura 1: o teorema de Pitágoras

Fonte: Elaborada pelo autor.

As demonstrações cobrem os casos de ângulos agudos, retos e obtusos. O capítulo inclui demonstrações com apoio visual baseadas em áreas, além de um corolário específico e o teorema da mediana. A lei dos senos define a relação entre os lados de um triângulo, seus ângulos opostos e o raio da circunferência circunscrita ao triângulo. Apresenta demonstrações com apoio visual e aborda o “caso ambíguo”, onde a lei pode resultar em duas soluções distintas para um dos ângulos, explicando as condições para sua ocorrência e como resolvê-lo. O capítulo também inclui o teorema de que o maior lado de um triângulo é oposto ao maior ângulo interno. A lei das tangentes é formulada com relações específicas para triângulos não isósceles e não retângulos. A dissertação oferece duas abordagens para sua demonstração: uma baseada na semelhança de triângulos e outra alternativa utilizando a lei dos senos e transformações de soma em produto. Demonstrações com apoio visual também são exploradas. A lei das cotangentes relaciona os ângulos internos de um triângulo, seu semiperímetro e o raio da circunferência inscrita. É utilizada para demonstrar a fórmula de Heron (Neto, 2022, p. 247), que calcula a área de um triângulo a partir dos comprimentos de seus lados e semiperímetro. O capítulo encerra com aplicações práticas das leis dos cossenos e senos, como o cálculo da distância de um satélite a uma estação ou a distância através de um rio, e a estimativa do comprimento de um túnel ou a distância entre embarcações.

O Capítulo 2 intitulado ‘Um breve contexto histórico sobre as leis dos cossenos, senos e tangentes’ é dedicado a um apanhado histórico sobre tais leis. Este capítulo explora a evolução histórica das leis já citadas. Menciona as ideias precursoras de Euclides

em “Os Elementos”, a contribuição de Hiparco de Niceia (considerado o fundador da trigonometria), e o uso indireto por Brahmagupta. Destaca a influência dos matemáticos árabes, como al-Khwarizmi e al-Battani, que lidaram com a trigonometria esférica em soluções astronômicas. É ressaltado que Nasir al-Din al-Tusi (século XIII) enunciou e demonstrou explicitamente a versão plana da lei dos senos e fez uma análise completa da trigonometria esférica, incluindo a lei das tangentes, da qual Abu al-Wafa (século X) é amplamente creditado por declarar e utilizar sistematicamente. As contribuições de Jamshid Kashi e a sistematização da trigonometria na Europa por Regiomontanus também são abordadas.

O Capítulo 3 intitulado ‘Trigonometria esférica’ é dedicado às noções básicas da geometria esférica, e às leis dos senos, cossenos e tangentes neste contexto. Apresenta definições básicas de esfera, círculo máximo, ângulo esférico e triângulo esférico. Em seguida, detalha e demonstra as versões esféricas das leis mencionadas.

Destacamos que foram disponibilizados alguns dos conjuntos de elementos L^AT_EX necessários para a produção da maioria das figuras apresentadas aqui neste trabalho. Acreditamos que isso poderá contribuir com o leitor no processo de ensino e aprendizagem de todos os temas aqui tratados. A fim de usar os códigos L^AT_EX disponíveis aqui recomendamos que o leitor edite o preâmbulo do seu texto TEX inserindo os seguintes pacotes: ‘animate’, ‘tikz’, ‘tkz-base’, ‘tkz-euclide’ e ‘xcolor’. Além disso, essa iniciativa tem como propósito o exercício do pensamento computacional que é uma das competências elencadas na BNCC para os estudantes.

A BNCC aborda o pensamento computacional de forma transversal, ou seja, integrado a diferentes áreas do conhecimento, e não apenas em disciplinas específicas das ‘Ciências da Computação’.

Finalmente, para reprodução das animações, recomendamos que o leitor use o leitor de texto PDF ‘Adobe Acrobat Reader’ em um computador. Também, recomendamos que o leitor consulte o recurso didático associados à presente dissertação para ter acesso a outras animações de autoria do próprio autor, em formato de artigo científico, a ser submetido para publicação.

Sumário

Introdução	viii
Notações	xiv
1 Geometria plana	1
1.1 lei dos cossenos	1
1.1.1 Apoio visual da lei dos cossenos	7
1.2 lei dos senos	12
1.2.1 Apoio visual da lei dos senos	15
1.2.2 O caso ambíguo	21
1.3 Lei das tangentes	25
1.3.1 Apoio visual da lei das tangentes	29
1.4 Lei das cotangentes	31
1.4.1 Demonstração da fórmula de Heron usando a lei das cotangentes . .	35
1.5 lei dos senos: aplicações	37
1.6 lei dos cossenos: aplicações	39
2 Um breve contexto histórico sobre as leis dos cossenos, senos e tangentes	45
3 Trigonometria esférica	49
3.1 Definições básicas	49
3.2 Lei dos cossenos e senos	51
Referências Bibliográficas	63

Lista de Figuras

1	o teorema de Pitágoras	ix
1.1	lei dos cossenos.	1
1.2	a lei dos cossenos: o caso $\hat{A} < 90^\circ$	2
1.3	lei dos cossenos: o caso $\hat{A} = 90^\circ$	3
1.4	lei dos cossenos: o caso $\hat{A} > 90^\circ$	4
1.5	Aspecto visual da lei dos cossenos	7
1.6	Aspecto visual da lei dos cossenos	8
1.7	lei dos cossenos.	9
1.8	Imagem extraída do Instagram: @mathinity	10
1.9	lei dos cossenos.	10
1.10	lei dos senos.	13
1.11	lei dos senos: caso em que ABC é acutângulo.	13
1.12	Aspecto visual da lei dos senos	16
1.13	Aspecto visual da lei dos senos	16
1.14	lei dos senos.	21
1.15	Lei das tangentes.	25
1.16	Demonstração - lei das tangentes	26
1.17	Aspecto visual da lei das tangentes	30
1.18	Aspecto visual da lei das tangentes com $\theta = \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2}$ e $\omega = \frac{\hat{A} - \hat{B}}{2}$	30
1.19	Lei das cotangentes.	31
1.20	Demonstração - lei das cotangentes.	32
1.21	Fórmula de Heron.	35
1.22	Exemplo 1: aplicação da lei dos senos.	37
1.23	Exemplo 2: aplicação da lei dos senos.	38

1.24	Exemplo 3: aplicação da lei dos senos.	38
1.25	Exemplo 1: aplicação da lei dos cossenos.	39
1.26	Exemplo 2: aplicação da lei dos cossenos.	40
1.27	Exemplo 3: aplicação da lei dos cossenos.	41
3.1	A esfera de centro O e raio R , e com círculos máximos.	50
3.2	Definição de ângulo esférico.	50
3.3	Triângulo esférico	51
3.4	Triângulo esférico de vértices A , B e C	52
3.5	Triângulo esférico para orientar a demonstração.	53

Notações

Letras maiúsculas do alfabeto latino (romano) denotam pontos do plano ou do espaço

$\overleftrightarrow{AB}$ denota a reta determinada pelos pontos A e B .

$\overrightarrow{AB}$ denota a semirreta de origem A .

$\overline{AB}$ denota a medida do segmento de reta que inicia no ponto A e termina no ponto B .

$\widehat{AB}$ denota um arco de circunferência de extremidades A e B

$\hat{A}$ denota a medida do interno a uma polígono com vértice no ponto A

$\angle A$ denota a medida do interno a uma polígono com vértice no ponto A

$\mathbb{R}^3$ denota o espaço euclidiano real tridimensional

$\mathbb{S}[O; R]$ denota a esfera tridimensional centrada no ponto O e de raio R

$Q_1 \approx Q_2$ denota que a quantidade Q_1 é aproximadamente igual à quantidade Q_2

‘cos’ denota a abreviação da função cosseno

‘sen’ denota a abreviação da função seno

‘tg’ denota a abreviação da função tangente

‘cot’ denota a abreviação da função cotangente

Capítulo 1

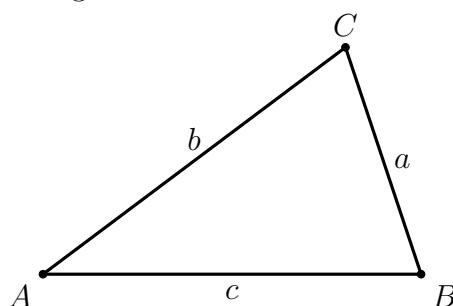
Geometria plana

1.1 lei dos cossenos

Em trigonometria, a lei dos cossenos (também conhecida como fórmula do cosseno ou regra do cosseno) relaciona os comprimentos dos lados de um triângulo ao cosseno de um de seus ângulos internos. Tal lei generaliza o teorema de Pitágoras, que é válido apenas para triângulos retângulos. Sua importância está atrelada à simplicidade para a resolução de um triângulo quando todos os três lados ou dois lados e o ângulo adjacente a eles são fornecidos.

Teorema 1.1 *Se ABC é um triângulo de lados $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$, com ângulos internos medindo $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$, conforme a Figura 1.1 abaixo, então*

Figura 1.1: lei dos cossenos.



Fonte: Elaborada pelo autor.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} \quad (1.1)$$

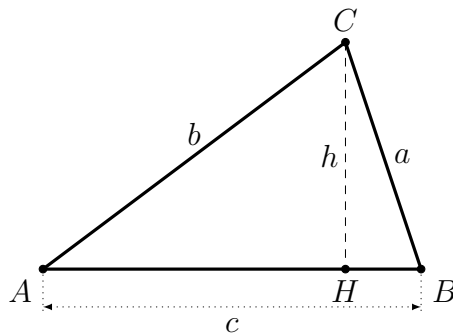
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B} \quad (1.2)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C} \quad (1.3)$$

Demonstração: Demonstraremos a equação (1.1), as equações (1.2) e (1.3) podem ser demonstradas de modo análogo. Seja H o pé da altura relativa ao lado AB e h seu comprimento. Consideremos separadamente os casos $\hat{A} < 90^\circ$, $\hat{A} = 90^\circ$ e $\hat{A} > 90^\circ$:

(a) $\hat{A} < 90^\circ$: neste caso (Figura 1.2), os pontos H e B estão em uma mesma semirreta dentre as determinadas sobre $\overleftrightarrow{AB}$ pelo vértice A , e pela definição de seno e cosseno em triângulo retângulo, temos

Figura 1.2: a lei dos cossenos: o caso $\hat{A} < 90^\circ$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

$$h = b \sin \hat{A}$$

e

$$\overline{AH} = b \cos \hat{A}.$$

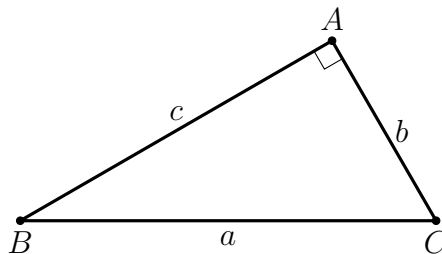
Por outro lado, aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo BCH , obtemos

$$\begin{aligned} a^2 &= h^2 + \overline{BH}^2 = h^2 + (c - \overline{AH})^2 \\ &= (b \operatorname{sen} \hat{A})^2 + (c - b \cos \hat{A})^2 \\ &= b^2(\operatorname{sen}^2 \hat{A} + \cos^2 \hat{A}) + c^2 - 2bc \cos \hat{A} \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} \end{aligned}$$

onde, na última igualdade, utilizamos a relação fundamental da trigonometria [9].

(b) $\hat{A} = 90^\circ$, nesse caso, $\cos \hat{A} = 0$ e segue o teorema de Pitágoras (Figura 1.3) que

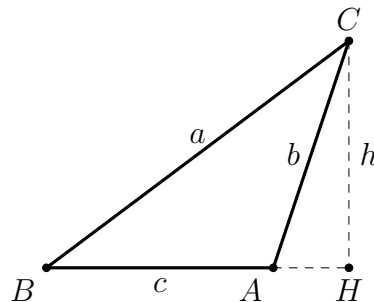
Figura 1.3: lei dos cossenos: o caso $\hat{A} = 90^\circ$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

$$a^2 = b^2 + c^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}.$$

(c) $\hat{A} > 90^\circ$: neste caso (Figura 1.4) os pontos H e B estão em uma mesma semirreta dentre as determinadas sobre $\overleftrightarrow{AB}$ pelo vértice A .

Figura 1.4: lei dos cossenos: o caso $\hat{A} > 90^\circ$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Como $\widehat{CAH} = 180^\circ - \hat{A}$, pela definição de seno e cosseno no triângulo ACH , e utilizando seno e cosseno de ângulos suplementares, temos

$$h = b \sin(180^\circ - \hat{A}) = b \sin \hat{A}$$

e

$$\overline{AH} = b \cos(180^\circ - \hat{A}) = -b \cos \hat{A}.$$

Aplicando novamente o teorema de Pitágoras ao triângulo BCH e a relação fundamental da trigonometria, obtemos

$$\begin{aligned} a^2 &= h^2 + \overline{BH}^2 = h^2 + (c + \overline{AH})^2 \\ &= (b \sin \hat{A})^2 + (c - b \cos \hat{A})^2 \\ &= b^2(\sin^2 \hat{A} + \cos^2 \hat{A}) + c^2 - 2bc \cos \hat{A} \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}. \end{aligned}$$

■

No que segue disponibilizamos o conjunto de elementos $\text{\LaTeX}$ necessários para a produção das figuras acima.

Figura 1.1:

```
\begin{figure}[H]
\centering
\begin{tikzpicture}
```

```

\tkzDefPoints{0/0/A, 5/0/B, 4/3/C}
\tkzDrawSegment[very thick](A,B)
\tkzDrawSegment[very thick](A,C)
\tkzDrawSegment[very thick](B,C)
\tkzDrawPoints[size=0.1cm, fill=black](A,B,C)
\tkzLabelPoints[below left](A)
\tkzLabelPoints[below right](B)
\tkzLabelPoints[above](C)
\tkzLabelSegment[above](A,C){$b$}
\tkzLabelSegment[right](B,C){$a$}
\tkzLabelSegment[below](A,B){$c$}
\end{tikzpicture}
\end{figure}

```

Figura 1.2:

```

\begin{figure}[H]
\centering
\begin{tikzpicture}
\tkzDefPoints{0/0/A, 5/0/B, 4/3/C, 4/0/H}
\tkzDrawSegment[very thick](A,B)
\tkzDrawSegment[very thick](A,C)
\tkzDrawSegment[very thick](B,C)
\tkzDrawSegment[dotted,dim={,-0.5cm,below=1mm,}](A,B)
\tkzDrawPoints[size=0.1cm, fill=black](A,B,C, H)
\tkzLabelPoints[below left](A)
\tkzLabelPoints[below right](B)
\tkzLabelPoints[above](C)
\tkzLabelPoints[below](H)
\tkzDrawSegment[dashed](C,H) \tkzLabelSegment[left=-0.5mm](C,H){$h$}
\tkzLabelSegment[above](A,C){$b$}
\tkzLabelSegment[right](B,C){$a$}
\tkzLabelSegment[below=0.5cm](A,B){$c$}
\end{tikzpicture}

```

\end{figure}

Figura 1.3:

```
\begin{figure}[H]
\centering
\begin{tikzpicture}[scale=1.1]
\tkzDefPoint(0,0){B}
\tkzDefPoint(5,0){C}
\tkzDefTriangle[two angles = 30 and 60](B,C) \tkzGetPoint{A}
\tkzDrawPolygon[very thick](A,B,C)
\tkzLabelSegment(B,C){$a$}
\tkzLabelSegment[above](A,B){$c$}
\tkzLabelSegment[right](A,C){$b$}
\tkzLabelPoints(B,C)
\tkzDrawPoints[size=0.1cm,fill=black](A,B,C)
\tkzLabelPoints[above](A)
\tkzMarkRightAngle[] (B,A,C)
\end{tikzpicture}
\end{figure}
```

Figura 1.4:

```
\begin{figure}[H]
\centering
\begin{tikzpicture}
\tkzDefPoints{0/0/B, 3/0/A, 4/3/C, 4/0/H}
\tkzDrawSegment[very thick](A,B)
\tkzDrawSegment[very thick](C,A)
\tkzDrawSegment[very thick](B,C)
\tkzDrawPoints[size=0.1cm, fill=black](A,B,C, H)
\tkzLabelPoints[below left](A)
\tkzLabelPoints[below left](B)
\tkzLabelPoints[above](C)
\tkzLabelPoints[below](H)
\end{tikzpicture}
\end{figure}
```

```
\tkzDrawSegment[dashed](C,H)
\tkzDrawSegment[dashed](A,H)
\tkzLabelSegment[above](B,C){$a$}
\tkzLabelSegment[below](A,B){$c$}
\tkzLabelSegment[left](A,C){$b$}
\tkzLabelSegment[right](C,H){$h$}
\end{tikzpicture}
\end{figure}
```

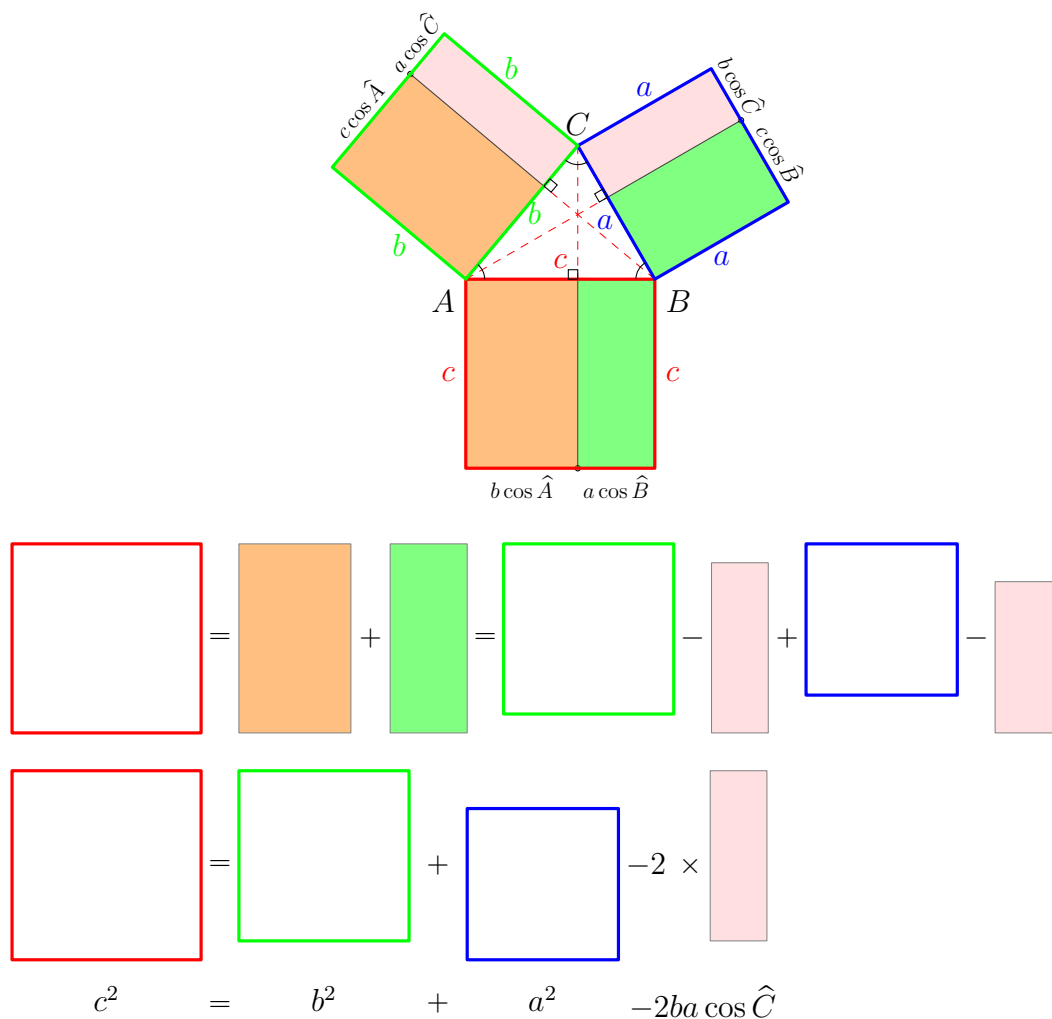
1.1.1 Apoio visual da lei dos cossenos

A seguir, apresentamos duas ideias visuais para a demonstração da lei dos cossenos usando o conceito de áreas de figuras planas.

Figura 1.5: Aspecto visual da lei dos cossenos

Fonte: Adaptada de [2].

Figura 1.6: Aspecto visual da lei dos cossenos



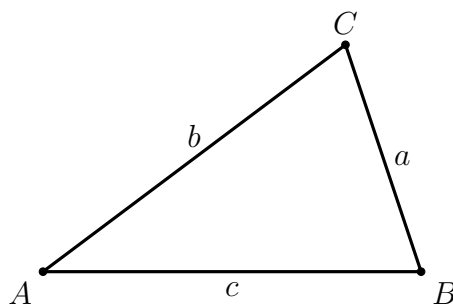
Fonte: Elaborada pelo autor.

Observação 1.1 Perceba que graças ao Teorema 1.1 temos

$$\hat{A} = \arccos\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right).$$

Corolário 1.1 Se ABC é um triângulo de lados $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$, com ângulos internos medindo $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$, conforme a Figura 1.7 abaixo, então

Figura 1.7: lei dos cossenos.



Fonte: Elaborada pelo autor.

$$\sin^2\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) \geq \frac{a}{2\sqrt{bc}}, \quad (1.4)$$

$$\sin^2\left(\frac{\hat{B}}{2}\right) \geq \frac{b}{2\sqrt{ac}},$$

$$\sin^2\left(\frac{\hat{C}}{2}\right) \geq \frac{c}{2\sqrt{ab}}.$$

Demonstração: Provaremos a desigualdade em (1.4). Usando a lei dos cossenos, temos

$$(b - c)^2 + 2bc(1 - \cos \hat{A}) = a^2.$$

Já que

$$1 - \cos \hat{A} = 2 \sin^2\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)$$

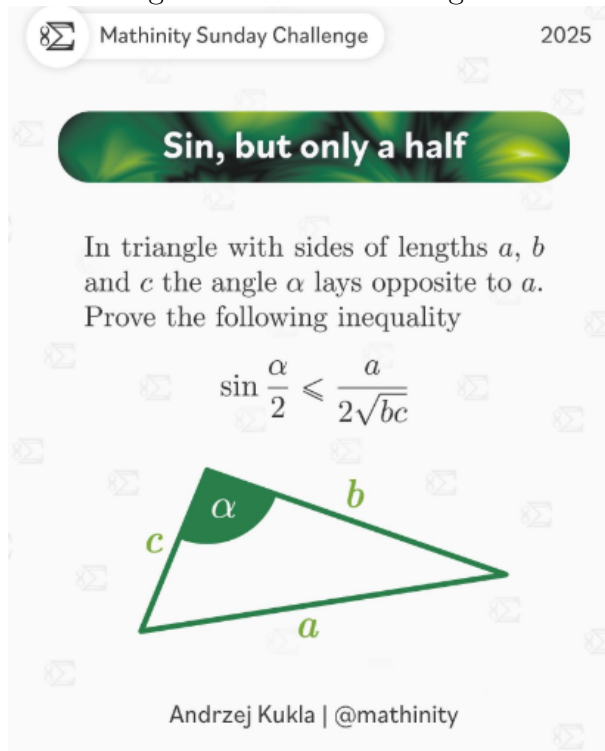
segue que

$$(b - c)^2 + 4bc \sin^2\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) = a^2,$$

onde $(b - c)^2 \geq 0$, e consequentemente, temos (1.4). ■

Observação 1.2 *O resultado acima foi extraído na postagem da rede social Instagram: @mathinity que atualmente possui 94,6 mil seguidores. Mas, destacamos aqui o fato de que a desigualdade contida na postagem, aparentemente possui um erro tipográfico.*

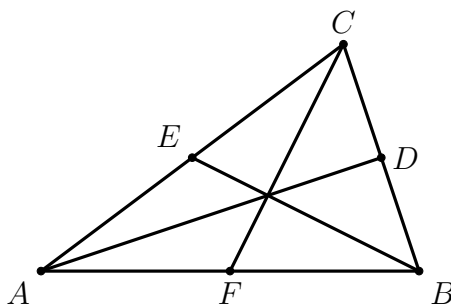
Figura 1.8: Imagem extraída do Instagram: @mathinity



Fonte: Andrzej Kukla, 2025.

Teorema 1.2 (Teorema da Mediana) *Seja ABC um triângulo de lados $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$. Se D é um ponto pertencente ao segmento BC tal que $\overline{BC} = 2\overline{BD}$, E é um ponto pertencente ao segmento AC tal que $\overline{AC} = 2\overline{AE}$ e, F é um ponto pertencente ao segmento AB tal que $\overline{AB} = 2\overline{AF}$, conforme a Figura 1.9 abaixo, então*

Figura 1.9: lei dos cossenos.



Fonte: Elaborada pelo autor.

$$b^2 + c^2 = 2\overline{AD}^2 + \frac{a^2}{2} \quad (1.5)$$

$$a^2 + c^2 = 2\overline{BE}^2 + \frac{b^2}{2},$$

$$a^2 + b^2 = 2\overline{CF}^2 + \frac{c^2}{2}.$$

Demonstração: Considere o triângulo ADC , pela lei dos cossenos, devemos ter

$$b^2 = \overline{AD}^2 + \frac{a^2}{4} - 2\overline{AD}\frac{a}{2}\cos\hat{D},$$

e considerando o triângulo ADB , pela lei dos cossenos, devemos ter

$$c^2 = \overline{AD}^2 + \frac{a^2}{4} - 2\overline{AD}\frac{a}{2}\cos\hat{D}.$$

Embora estejamos escrevendo $\cos\hat{D}$ nas duas situações acima, é preciso perceber que uma quantidade é menos o valor da outra quantidade, em relação aos triângulos ADC e ADB . Logo, somando as identidades acima, obtemos (1.5). ■

No que segue disponibilizamos o conjunto de elementos $\text{\LaTeX}$ necessários para a produção de algumas das figuras acima.

Figura 1.7:

```
\begin{figure}[H]
\centering
\begin{tikzpicture}
\tkzDefPoints{0/0/A, 5/0/B, 4/3/C}
\tkzDrawSegment[very thick](A,B)
\tkzDrawSegment[very thick](A,C)
\tkzDrawSegment[very thick](B,C)
\tkzDrawPoints[size=0.1cm, fill=black](A,B,C)
\tkzLabelPoints[below left](A)
\tkzLabelPoints[below right](B)
\tkzLabelPoints[above](C)
\tkzLabelSegment[above](A,C){$b$}
```

```

\tkzLabelSegment[right] (B,C){$a$}
\tkzLabelSegment[below] (A,B){$c$}
\end{tikzpicture}
\end{figure}

```

Figura 1.9:

```

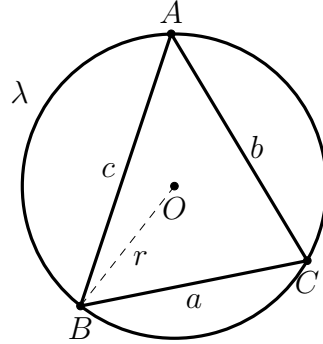
\begin{figure}[H]
\centering
\begin{tikzpicture}
\tkzDefPoints{0/0/A, 5/0/B, 4/3/C, 2.5/0/F, 4.5/1.5/D, 2/1.5/E}
\tkzDrawSegment[very thick] (A,B)
\tkzDrawSegment[very thick] (A,C)
\tkzDrawSegment[very thick] (B,C)
\tkzDrawSegment[very thick] (A,D)
\tkzDrawSegment[very thick] (B,E)
\tkzDrawSegment[very thick] (C,F)
\tkzDrawPoints[size=0.1cm, fill=black] (A,B,C,D,E,F)
\tkzLabelPoints[below left] (A)
\tkzLabelPoints[below right] (B)
\tkzLabelPoints[above] (C)
\tkzLabelPoints[right] (D)
\tkzLabelPoints[below] (F)
\tkzLabelPoints[above left] (E)
\end{tikzpicture}
\end{figure}

```

1.2 lei dos senos

Teorema 1.3 *Se r é o raio da circunferência λ circunscrita a um triângulo de lados $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$, e ângulos internos medindo $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$, conforme a Figura 1.10 abaixo, então*

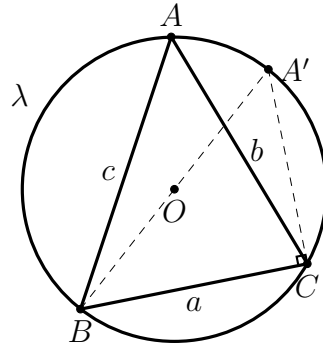
Figura 1.10: lei dos senos.



Fonte: Elaborada pelo autor.

$$\frac{a}{\widehat{\text{sen } A}} = \frac{b}{\widehat{\text{sen } B}} = \frac{c}{\widehat{\text{sen } C}} = 2r. \quad (1.6)$$

Demonstração: Seja ABC um triângulo como no enunciado, com $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$ (Figura 1.10). Supondo ABC acutângulo, triângulo que possui os ângulos internos menores que 90° , (a consideração dos demais casos é análoga), provaremos que $\widehat{\text{sen } A} = \frac{a}{2r}$ (as igualdades $\widehat{\text{sen } B} = \frac{b}{2r}$ e $\widehat{\text{sen } C} = \frac{c}{2r}$ também podem ser demonstradas de modo análogo).

Figura 1.11: lei dos senos: caso em que ABC é acutângulo.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Seja O o centro do círculo λ , circunscrito a ABC , e A' o simétrico de B em relação a O . Então $A' \in \lambda$, e pelo teorema do ângulo inscrito[9] $\widehat{BAC} = \widehat{BA'C} = \widehat{A}$. Por outro lado, como $\overline{BA'}$ é diâmetro de λ , temos $\widehat{BCA'} = 90^\circ$. Então, no triângulo retângulo BCA' ,

temos

$$\operatorname{sen} \hat{A} = \operatorname{sen} B\hat{A}'C = \frac{\overline{BC}}{\overline{BA'}} = \frac{a}{2r}.$$

■

No que segue disponibilizamos o conjunto de elementos $\text{\LaTeX}$ necessários para a produção das figuras acima.

Figura 1.10:

```
\begin{figure}[H]
\centering
\begin{tikzpicture}[scale=0.6]
\tkzDefPoints{0/0/B,5/1/C,2/6/A}
\tkzDefTriangleCenter[circum](A,B,C)
\tkzGetPoint{O}
\tkzDefPointBy[symmetry= center O](B)
\tkzGetPoint{A'}
\tkzDrawPolygon[very thick](A,B,C)
\tkzDrawCircle[very thick, black](O,B)
\tkzDrawPoints[size=0.1cm,fill=black](A,B,C,O)
\tkzDrawSegments[dashed](O,B)
%\tkzLabelPoint[right](A'){\$A'\$}
\tkzLabelPoint[above](A){\$A\$}
\tkzLabelPoint[below](C){\$C\$}
\tkzLabelPoint[below](B){\$B\$}
\tkzLabelPoint[below](O){\$O\$}
\tkzLabelSegment[below right=-.1cm](O,B){\$r\$}
\tkzLabelSegment(B,C){\$a\$}
\tkzLabelSegment[left](B,A){\$c\$}
\tkzLabelSegment[right](A,C){\$b\$}
\tkzLabelCircle[above left,line width=0.5pt,black](O,B)(280){\$\\mathcal{\lambda}\$}
\end{tikzpicture}
\end{figure}
```

Figura 1.11:

```

\begin{figure}[H]
\centering
\begin{tikzpicture}[scale=0.6]
\tkzDefPoints{0/0/B,5/1/C,2/6/A}
\tkzDefTriangleCenter[circum](A,B,C)
\tkzGetPoint{O}
\tkzDefPointBy[symmetry= center O](B)
\tkzGetPoint{A'}
\tkzDrawPolygon[very thick](A,B,C)
\tkzDrawCircle[very thick, black](O,B)
\tkzDrawPoints[size=0.1cm,fill=black](A,B,C,A',O)
\tkzDrawSegments[dashed](B,A' C,A')
\tkzLabelPoint[right](A'){$A'$}
\tkzLabelPoint[above](A){$A$}
\tkzLabelPoint[below](C){$C$}
\tkzLabelPoint[below](B){$B$}
\tkzLabelPoint[below](O){$O$}
\tkzLabelSegment(B,C){$a$}
\tkzLabelSegment[left](B,A){$c$}
\tkzLabelSegment[right](A,C){$b$}
\tkzMarkRightAngle[size=0.2,thick](A',C,B)
\tkzLabelCircle[above left,thick=0.5,black](O,B)(280){$\mathcal{\lambda}$}
\end{tikzpicture}
\end{figure}

```

Observação 1.3 *A lei dos senos pode ser deduzida a partir da lei dos cossenos, e vice-versa.*

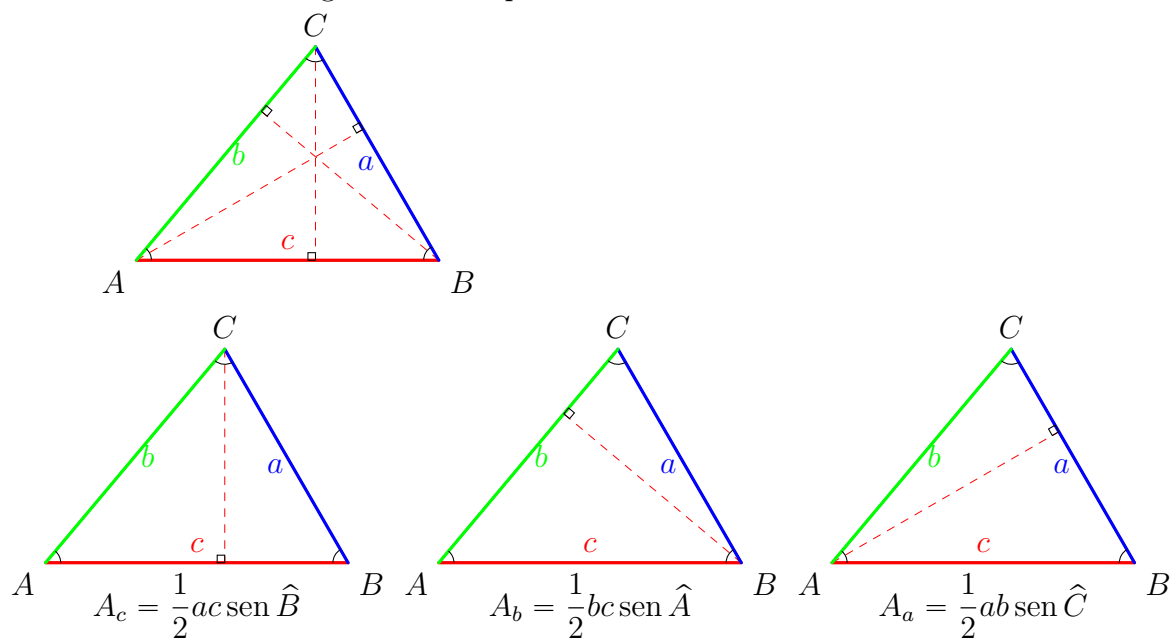
1.2.1 Apoio visual da lei dos senos

A seguir, apresentamos duas ideias visuais para a demonstração da lei dos senos usando o conceito de áreas de figuras planas.

Figura 1.12: Aspecto visual da lei dos senos

Fonte: Adaptada de [2].

Figura 1.13: Aspecto visual da lei dos senos



Fonte: Elaborada pelo autor.

No que segue disponibilizamos o conjunto de elementos $\text{\LaTeX}$ necessários para a produção da figura acima.

```

\begin{figure}[H]
\centering
\begin{tikzpicture}[scale=.4]
\tkzDefPoints{0/0/A, 10/0/B, -2/-10/G, 8/-10/M}
\tkzDefTriangle[two angles= 50 and 60](A,B)
\tkzGetPoint{C}
\tkzDrawPolygon[thick](A,B,C)
\tkzLabelPoints[below left](A)
\tkzLabelPoints[below right](B)
\tkzLabelPoints[above](C)

\tkzLabelSegment[above,red](A,B){$c$}
\tkzLabelSegment[below left=-.15,blue](B,C){$\textbf{\textit{a}}$}
\tkzLabelSegment[below, left=-.4,green](A,C){$\textbf{\textit{b}}$}

\tkzDefLine[altitude](A,B,C)\tkzGetPoint{H_b}
\tkzDefLine[altitude](B,A,C)\tkzGetPoint{H_a}
\tkzDefLine[altitude](B,C,A)\tkzGetPoint{H_c}
\tkzDrawPoints[size=0](H_a,H_b,H_c)
\tkzDrawSegments[red, dashed](A,H_a B,H_b C,H_c)

\tkzDrawPolygon[very thick, red](B,A)
\tkzDrawPolygon[very thick, blue](C,B)
\tkzDrawPolygon[very thick, green](A,C)

\tkzMarkRightAngle[](A,H_c,C)
\tkzMarkRightAngle[](B,H_b,C)
\tkzMarkRightAngle[](A,H_a,C)
\tkzMarkAngle[size=0.5](B,A,C)
\tkzMarkAngle[size=0.5](A,C,B)
\tkzMarkAngle[size=0.5](C,B,A)

\begin{scope}[shift={(-3,-10)}]

```

```

\tkzDefPoints{0/0/A, 10/0/B, -2/-10/G 8/-10/M}
\tkzDefTriangle[two angles= 50 and 60](A,B)
\tkzGetPoint{C}
\tkzDrawPolygon[thick](A,B,C)
\tkzLabelPoints[below left](A)
\tkzLabelPoints[below right](B)
\tkzLabelPoints[above](C)
\tkzDefSquare(B,A) \tkzGetPoints{E}{F}
\tkzDefSquare(C,B) \tkzGetPoints{G}{H}
\tkzDefSquare(A,C) \tkzGetPoints{I}{J}

\tkzLabelSegment[above,red](A,B){$c$}
\tkzLabelSegment[below left=-.15,blue](B,C){$\textbf{\textit{a}}$}
\tkzLabelSegment[below, left=-.4,green](A,C){$\textbf{\textit{b}}$}

\tkzDefLine[altitude](A,B,C)\tkzGetPoint{H_b}
\tkzDefLine[altitude](B,A,C)\tkzGetPoint{H_a}
\tkzDefLine[altitude](B,C,A)\tkzGetPoint{H_c}
\tkzDrawPoints[size=0](H_a,H_b,H_c)
\tkzDrawSegments[red, dashed](C,H_c)

\tkzDrawPolygon[very thick, red](B,A)
\tkzDrawPolygon[very thick, blue](C,B)
\tkzDrawPolygon[very thick, green](A,C)

\tkzMarkRightAngle[](A,H_c,C)
\tkzMarkAngle[size=0.5](B,A,C)
\tkzMarkAngle[size=0.5](A,C,B)
\tkzMarkAngle[size=0.5](C,B,A)
\tkzLabelSegment[below](A,B){$A_c=\dfrac{1}{2}ac\sin\widehat{B}$}
\end{scope}

\begin{scope}[shift={(10,-10)}]

```

```

\tkzDefPoints{0/0/A, 10/0/B, -2/-10/G, 8/-10/M}
\tkzDefTriangle[two angles= 50 and 60](A,B)
\tkzGetPoint{C}
\tkzDrawPolygon[thick](A,B,C)
\tkzLabelPoints[below left](A)
\tkzLabelPoints[below right](B)
\tkzLabelPoints[above](C)
\tkzDefSquare(B,A) \tkzGetPoints{E}{F}
\tkzDefSquare(C,B) \tkzGetPoints{G}{H}
\tkzDefSquare(A,C) \tkzGetPoints{I}{J}

\tkzLabelSegment[above,red](A,B){$c$}
\tkzLabelSegment[below left=-.15,blue](B,C){$\textbf{\textit{a}}$}
\tkzLabelSegment[below, left=-.4,green](A,C){$\textbf{\textit{b}}$}

\tkzDefLine[altitude](A,B,C)\tkzGetPoint{H_b}
\tkzDefLine[altitude](B,A,C)\tkzGetPoint{H_a}
\tkzDefLine[altitude](B,C,A)\tkzGetPoint{H_c}
\tkzDrawPoints[size=0](H_a,H_b,H_c)
\tkzDrawSegments[red, dashed](B,H_b)

\tkzDrawPolygon[very thick, red](B,A)
\tkzDrawPolygon[very thick, blue](C,B)
\tkzDrawPolygon[very thick, green](A,C)

\tkzMarkRightAngle[](B,H_b,C)
\tkzMarkAngle[size=0.5](B,A,C)
\tkzMarkAngle[size=0.5](A,C,B)
\tkzMarkAngle[size=0.5](C,B,A)
\tkzLabelSegment[below](A,B){$A_b=\dfrac{1}{2}bc\sin\widehat{A}$}
\end{scope}

\begin{scope}[shift={(23,-10)}]

```

```

\tkzDefPoints{0/0/A, 10/0/B, -2/-10/G, 8/-10/M}
\tkzDefTriangle[two angles= 50 and 60](A,B)
\tkzGetPoint{C}
\tkzDrawPolygon[thick](A,B,C)
\tkzLabelPoints[below left](A)
\tkzLabelPoints[below right](B)
\tkzLabelPoints[above](C)
\tkzDefSquare(B,A) \tkzGetPoints{E}{F}
\tkzDefSquare(C,B) \tkzGetPoints{G}{H}
\tkzDefSquare(A,C) \tkzGetPoints{I}{J}

\tkzLabelSegment[above,red](A,B){$c$}
\tkzLabelSegment[below left=-.15,blue](B,C){$\textbf{\textit{a}}$}
\tkzLabelSegment[below, left=-.4,green](A,C){$\textbf{\textit{b}}$}

\tkzDefLine[altitude](A,B,C)\tkzGetPoint{H_b}
\tkzDefLine[altitude](B,A,C)\tkzGetPoint{H_a}
\tkzDefLine[altitude](B,C,A)\tkzGetPoint{H_c}
\tkzDrawPoints[size=0](H_a,H_b,H_c)
\tkzDrawSegments[red, dashed](A,H_a)

\tkzDrawPolygon[very thick, red](B,A)
\tkzDrawPolygon[very thick, blue](C,B)
\tkzDrawPolygon[very thick, green](A,C)

\tkzMarkRightAngle[](A,H_a,C)
\tkzMarkAngle[size=0.5](B,A,C)
\tkzMarkAngle[size=0.5](A,C,B)
\tkzMarkAngle[size=0.5](C,B,A)
\tkzLabelSegment[below](A,B){$A_a=\dfrac{1}{2}ab\sin\widehat{C}$}
\end{scope}
\end{tikzpicture}
\end{figure}

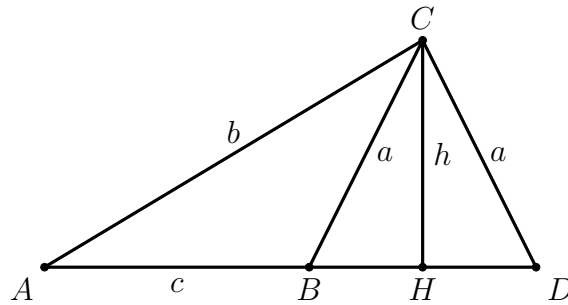
```

1.2.2 O caso ambíguo

O caso ambíguo da lei dos senos ocorre sempre que dados um ângulo e dois lados de um triângulo qualquer, a lei dos senos pode resultar em duas soluções diferentes para um dos ângulos. Isso acontece porque o seno de um ângulo é o mesmo para um ângulo agudo e seu suplemento (ângulo obtuso).

Se ABC é um triângulo de lados $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$, com ângulos internos medindo $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$, conforme a Figura 1.14 abaixo.

Figura 1.14: lei dos senos.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Considere também o triângulo ADC de lados $\overline{AD} = c'$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{DC} = a$, com ângulos internos medindo $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{D}$, conforme a Figura 1.14 acima. Suponha que todas as condições seguintes sejam válidas:

- i) As únicas informações conhecidas são: o ângulo $\hat{A}$ e as medidas dos lados $\overline{BC} = a$ e $\overline{AC} = b$;
- ii) O ângulo $\hat{A}$ é agudo, i.e., $0^\circ < \hat{A} < 90^\circ$;
- iii) A medida do lado $\overline{BC}$ é menor do que a medida do lado $\overline{AC}$;
- iv) A medida do lado $\overline{BC}$ é maior do que a medida do lado $\overline{CH} = h$, onde $h = b \sin \hat{A}$.

Então, usando a lei dos senos, temos

$$\frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{A}}{a}$$

isto é,

$$\hat{B} = \arcsen\left(\frac{b \sen \hat{A}}{a}\right) \quad \text{ou} \quad \hat{B} = \pi - \arcsen\left(\frac{b \sen \hat{A}}{a}\right).$$

A fim de chegar a uma conclusão de escolha de uma só resposta, considere:

- 1) Verifique se a situação em questão é ambígua: o caso ambíguo ocorre quando se conhece um ângulo e os dois lados que o contêm ou quando se conhece um lado e dois ângulos;
- 2) Use a lei dos senos para encontrar um dos ângulos: Calcule o seno do ângulo procurado e, a partir dele, determine os dois possíveis ângulos resposta (agudo e obtuso);
- 3) Verifique qual dos dois ângulos é válido: Analise os dados do problema para determinar qual dos ângulos encontrados é o correto, considerando que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é sempre igual a 180 graus.

No que segue disponibilizamos o conjunto de elementos $\text{\LaTeX}$ necessários para a produção da Figura 1.14.

```
\begin{figure}[H]
\centering
\begin{tikzpicture}
\tkzDefPoints{-1/0/A, 2.5/0/B, 4/3/C, 4/0/H, 5.5/0/D}
\tkzDrawSegment[very thick](A,B)
\tkzDrawSegment[very thick](A,C)
\tkzDrawSegment[very thick](B,C)
\tkzDrawSegment[very thick](D,C)
\tkzDrawSegment[very thick](D,B)
\tkzDrawSegment[very thick](C,H)
\tkzDrawPoints[size=0.1cm, fill=black](A,B,C,D,H)
\tkzLabelPoints[below left](A)
\tkzLabelPoints[below](B)
\tkzLabelPoints[above](C)
\tkzLabelPoints[below right](D)
```

```

\tkzLabelPoints[below](H)
\tkzLabelSegment[above](A,C){$b$}
\tkzLabelSegment[right](B,C){$a$}
\tkzLabelSegment[right](D,C){$a$}
\tkzLabelSegment[below](A,B){$c$}
\tkzLabelSegment[right](C,H){$h$}
\end{tikzpicture}
\end{figure}

```

Teorema 1.4 *Em um triângulo qualquer, o maior lado é oposto ao maior ângulo interno.*

Demonstração: Sejam ABC é um triângulo qualquer de lados $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$, $\overline{BC} = a$, com ângulos internos medindo $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$, e $\hat{C}$ a medida do maior ângulo interno. Se $\hat{C} = 90^\circ$, então o resultado já é bem conhecido. Agora, ou $0^\circ < \hat{C} < 90^\circ$, ou $90^\circ < \hat{C} < 180^\circ$. Nestes casos, $\hat{A} \leq \hat{C}$ e $\hat{B} \leq \hat{C}$, e isto implica que $\text{sen } \hat{A} \leq \text{sen } \hat{C}$ e $\text{sen } \hat{B} \leq \text{sen } \hat{C}$.

Suponha que $0^\circ < \hat{C} < 90^\circ$. Então $0 < \hat{A} < 90^\circ$ e $0 < \hat{B} < 90^\circ$, o que implica que $\text{sen } \hat{A} \leq \text{sen } \hat{C}$ e $\text{sen } \hat{B} \leq \text{sen } \hat{C}$.

Agora, suponha que $90^\circ < \hat{C} < 180^\circ$, então $0^\circ < 180^\circ - \hat{C} < 90^\circ$, bem como $0 < \hat{A} < 90^\circ$ e $0 < \hat{B} < 90^\circ$. Caso $\hat{A} > 180^\circ - \hat{C}$, teríamos $\hat{A} + \hat{C} > 180^\circ$, o que é impossível. Logo, $\hat{A} + \hat{C} \leq 180^\circ$, ou seja, $\hat{A} \leq 180^\circ - \hat{C}$. O mesmo vale para $\hat{B}$, ou seja, temos $\hat{B} \leq 180^\circ - \hat{C}$. Portanto, pelo que já sabemos,

$$\text{sen } \hat{A} \leq \text{sen}(180^\circ - \hat{C}) = \text{sen } \hat{C}$$

e

$$\text{sen } \hat{B} \leq \text{sen}(180^\circ - \hat{C}) = \text{sen } \hat{C}.$$

Finalmente, em qualquer caso, $\text{sen } \hat{A} \leq \text{sen } \hat{C}$, implica que

$$\frac{a}{c} = \frac{\text{sen } \hat{A}}{\text{sen } \hat{C}} \leq \frac{\text{sen } \hat{C}}{\text{sen } \hat{C}} = 1,$$

ou seja

$$a \leq c,$$

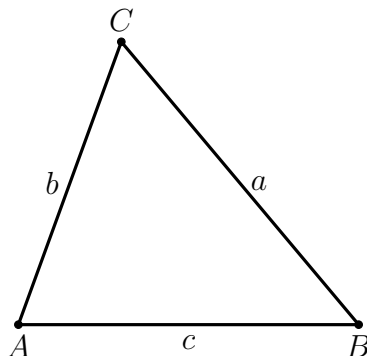
e o mesmo argumento assegura que $b \leq c$, concluindo a demonstração.



1.3 Lei das tangentes

Teorema 1.5 *Se ABC é um triângulo, nem isósceles, nem retângulo, de lados $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$, com ângulos internos medindo $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$, conforme a Figura 1.15 abaixo, então valem as relações seguintes:*

Figura 1.15: Lei das tangentes.



Fonte: Elaborada pelo autor.

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\hat{A} + \hat{B}}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\hat{A} - \hat{B}}{2}\right)}, \quad (1.7)$$

$$\frac{a+c}{a-c} = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\hat{A} + \hat{C}}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\hat{A} - \hat{C}}{2}\right)} \quad (1.8)$$

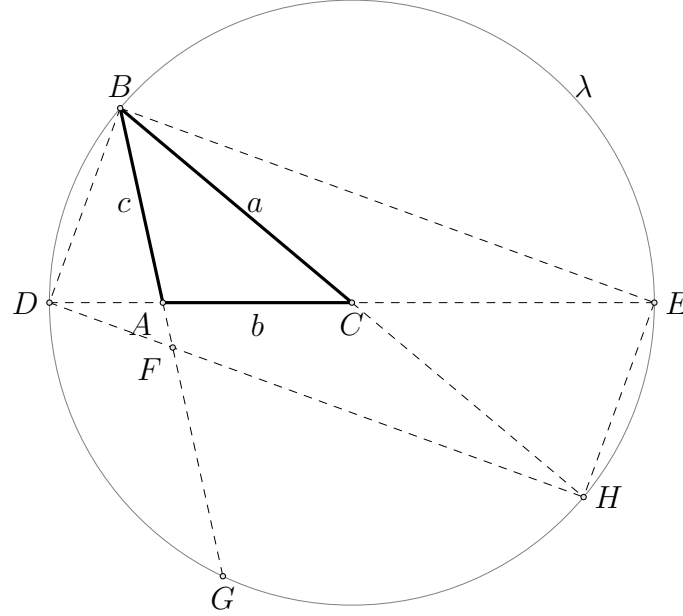
e

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\hat{B} + \hat{C}}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\hat{B} - \hat{C}}{2}\right)}. \quad (1.9)$$

Demonstração: Demonstraremos a equação (1.7). As equações (1.8) e (1.9) podem ser demonstradas de modo análogo.

No triângulo ABC (Figura 1.16) abaixo, considere $a > b$. Trace um círculo λ com centro em C e raio a . Trace a reta $\overleftrightarrow{AC}$, marque os pontos $D, E \in (\lambda \cap \overleftrightarrow{AC})$ e os segmentos BE e BD . Trace $\overline{DH}$ paralelo a $\overline{BE}$ marcando o ponto $H \in \lambda$. Trace $\overrightarrow{BA}$ tais que $G \in (\overrightarrow{BA} \cap \lambda)$ e $F \in (\overline{BG} \cap \overline{DH})$. Agora, obtemos

Figura 1.16: Demonstração - lei das tangentes



Fonte: Elaborada pelo autor.

- $AE = a + b$;
- $AD = a - b$;
- $B\hat{D}A = B\hat{D}E = \frac{1}{2}B\hat{C}E = \frac{1}{2}(\hat{A} + \hat{B})$;
- $A\hat{E}B = D\hat{E}B = \frac{1}{2}\hat{C} = 90^\circ - \frac{1}{2}(\hat{A} + \hat{B}) = C\hat{B}E$;
- $D\hat{B}F = 90^\circ - (\hat{B} + C\hat{B}E) = \frac{1}{2}(\hat{A} - \hat{B})$;
- Os triângulos ABE e ADF são semelhantes pelo caso de semelhança ângulo-ângulo;
- $E\hat{B}D = B\hat{D}F = 90^\circ$.

Primeiro, pela semelhança entre os triângulos ABE e ADF , temos

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{DF}} = \frac{a+b}{a-b}$$

Por outro lado, usando os triângulos retângulos BDE e BDF , obtemos

$$\overline{BE} = \overline{BD} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\hat{A} + \hat{B})$$

e

$$\overline{DF} = \overline{BD} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\hat{A} - \hat{B})$$

Daqui, segue o teorema. ■

No que segue disponibilizamos o conjunto de elementos $\text{\LaTeX}$ necessários para a produção da Figura 1.16.

```
\begin{figure}[H]
\centering
\begin{tikzpicture}
\tkzDefPoints{0/0/C, -2.5/0/A}
\tkzDefPoint(0:4){E}
\tkzDefPoint(140:4){B}
\tkzDefPoint(180:4){D}
\tkzInterLC(B,A)(C,E) \tkzGetSecondPoint{G}
\tkzDrawCircle(C,E)
\tkzDrawSegment[very thick](C,B)
\tkzDrawSegment[very thick](C,A)
\tkzDrawSegment[very thick](B,A)
\tkzDrawSegment[dashed](E,C)
\tkzDrawSegment[dashed](D,A)
\tkzDrawSegment[dashed](B,E)
\tkzDrawSegment[dashed](B,D)
\tkzDrawSegment[dashed](A,G)
\tkzDefLine[parallel=through D](B,E) \tkzGetPoint{H}
\tkzDrawSegment[dashed](E,H)
```

```

\tkzDrawSegment[dashed](C,H)
\tkzDrawSegment[dashed](D,H)
\tkzInterLL(B,G)(D,H) \tkzGetPoint{F}
\tkzDrawPoints(E,B,C,D,A,G,F,H)
\tkzLabelPoints(C,G)
\tkzLabelPoints[left](D)
\tkzLabelPoints[above](B)
\tkzLabelPoints[below left](A)
\tkzLabelPoints[below left](F)
\tkzLabelPoints[right](E,H)
\tkzLabelSegment[right](B,C){$a$}
\tkzLabelSegment[below](A,C){$b$}
\tkzLabelSegment[left](B,A){$c$}
\tkzLabelCircle[above,black](C,D)(220){$\mathcal{\lambda}$}
\end{tikzpicture}
\end{figure}

```

Faremos agora uma demonstração alternativa usando a lei dos senos.

Demonstração: Considere a Figura 1.15 acima. Partindo da lei dos senos e usando a propriedade das proporções, temos

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}}$$

daí,

$$\frac{a}{b} = \frac{\operatorname{sen} \hat{A}}{\operatorname{sen} \hat{B}}$$

o que implica

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{sen} \hat{A} + \operatorname{sen} \hat{B}}{\operatorname{sen} \hat{A} - \operatorname{sen} \hat{B}}.$$

Aplicando a transformação da soma em produto, temos

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{sen} \hat{A} + \operatorname{sen} \hat{B}}{\operatorname{sen} \hat{A} - \operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{2 \operatorname{sen} \left(\frac{\hat{A} + \hat{B}}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\hat{A} - \hat{B}}{2} \right)}{2 \operatorname{sen} \left(\frac{\hat{A} - \hat{B}}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\hat{A} + \hat{B}}{2} \right)} = \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\hat{A} + \hat{B}}{2} \right)}{\operatorname{tg} \left(\frac{\hat{A} - \hat{B}}{2} \right)}.$$

■

Observação 1.4 Considere a Figura 1.15 e perceba que

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\hat{A} \pm \hat{B}}{2} \right) = \frac{\operatorname{sen} \hat{A} \pm \operatorname{sen} \hat{B}}{\cos \hat{A} + \cos \hat{B}},$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\hat{A} \pm \hat{C}}{2} \right) = \frac{\operatorname{sen} \hat{A} \pm \operatorname{sen} \hat{C}}{\cos \hat{A} + \cos \hat{C}},$$

e

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\hat{B} \pm \hat{C}}{2} \right) = \frac{\operatorname{sen} \hat{B} \pm \operatorname{sen} \hat{C}}{\cos \hat{B} + \cos \hat{C}}.$$

Teorema 1.6 Em um triângulo qualquer não retangular ABC , vale a seguinte relação

$$\operatorname{tg} \hat{A} + \operatorname{tg} \hat{B} + \operatorname{tg} \hat{C} = \operatorname{tg} \hat{A} \cdot \operatorname{tg} \hat{B} \cdot \operatorname{tg} \hat{C}.$$

Já que $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi$, temos $\hat{A} + \hat{B} = \pi - \hat{C}$, e

$$\operatorname{tg}(\hat{A} + \hat{B}) = \operatorname{tg}(\pi - \hat{C}) = -\operatorname{tg} \hat{C}.$$

Logo

$$\frac{\operatorname{tg} \hat{A} + \operatorname{tg} \hat{B}}{1 - \operatorname{tg} \hat{A} \operatorname{tg} \hat{B}} = -\operatorname{tg} \hat{C},$$

e o resultado segue.

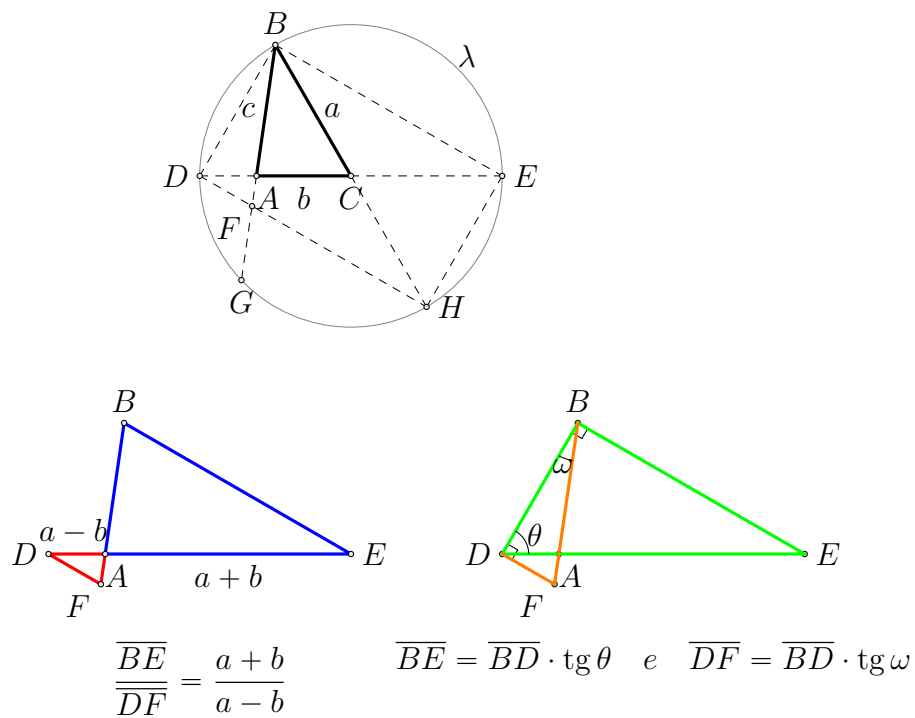
1.3.1 Apoio visual da lei das tangentes

A seguir, apresentamos uma ideia visual da demonstração da lei das tangentes usando semelhança de triângulos e razões trigonométricas no triângulo retângulo.

Figura 1.17: Aspecto visual da lei das tangentes

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 1.18: Aspecto visual da lei das tangentes com $\theta = \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2}$ e $\omega = \frac{\hat{A} - \hat{B}}{2}$

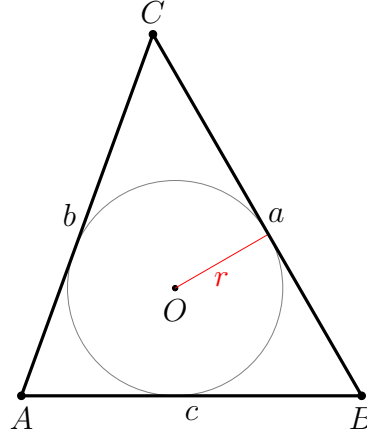


Fonte: Elaborada pelo autor.

1.4 Lei das cotangentes

Teorema 1.7 Se ABC é um triângulo de lados $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$, com ângulos internos medindo $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$, semiperímetro $p = \frac{a+b+c}{2}$, e r o raio da circunferência inscrita ao triângulo ABC , conforme a Figura 1.19 abaixo, então

Figura 1.19: Lei das cotangentes.



Fonte: Elaborada pelo autor.

$$\frac{\cot\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)}{p-a} = \frac{\cot\left(\frac{\hat{B}}{2}\right)}{p-b} = \frac{\cot\left(\frac{\hat{C}}{2}\right)}{p-c} = \frac{1}{r} \quad (1.10)$$

onde r é

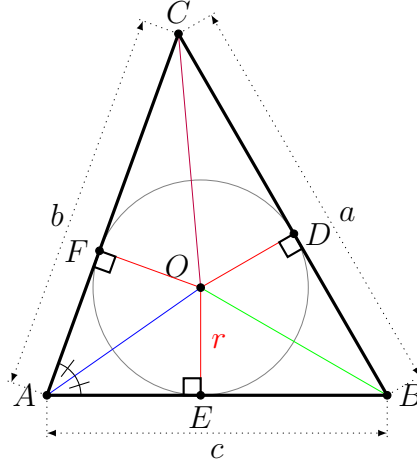
$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}},$$

que é a medida do raio da circunferência inscrita ao triângulo ABC .

Demonstração: Considere (Figura 1.20) abaixo. Provaremos $\frac{\cot\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)}{p-a} = \frac{1}{r}$ (as

igualdades $\frac{\cot\left(\frac{\hat{B}}{2}\right)}{p-b} = \frac{1}{r}$ e $\frac{\cot\left(\frac{\hat{C}}{2}\right)}{p-c} = \frac{1}{r}$ também podem ser demonstradas de modo análogo).

Figura 1.20: Demonstração - lei das cotangentes.



Fonte: Elaborada pelo autor.

De acordo com as propriedades da circunferência inscrita em um triângulo, temos que:

- (i) o centro de uma circunferência inscrita fica no ponto de interseção das bissetrizes internas do triângulo. Assim, $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{BO}$ e $\overrightarrow{CO}$ são bissetrizes dos ângulos A , B e C , respectivamente.
- (ii) o raio de uma circunferência inscrita em um triângulo é perpendicular aos lados do triângulo nos pontos de tangência. Portanto, $\overline{OE}$, $\overline{OD}$ e $\overline{OF}$ são perpendiculares aos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$, respectivamente.

Considere os triângulos retângulos AEO e AFO . Como $\overline{OE} = \overline{OF}$ e $\overline{AO}$ é hipotenusa em comum, então pelo caso de congruência cateto-hipotenusa os dois triângulos são congruentes. Daí,

$$\overline{AE} = \overline{AF}.$$

De maneira análoga, obtemos

$$\overline{CD} = \overline{CF}$$

e

$$\overline{BD} = \overline{BE}.$$

Agora, temos que

$$\overline{AE} = c - \overline{BE} = c - \overline{BD} = c - (a - \overline{CD}) = c - a + \overline{CD} = c - a + \overline{CF} = c - a + (b - \overline{AF})$$

donde,

$$\overline{AE} = c - a + b - \overline{AE}$$

e

$$2\overline{AE} = c - a + b.$$

Adicionando e subtraindo a no segundo membro da equação acima e dividindo ambos os membros por 2, obtemos

$$\overline{AE} = \frac{a + b + c}{2} - a$$

isto é,

$$\overline{AE} = p - a.$$

Assim, considerando o triângulo retângulo AEO e aplicando a definição de cotangente em relação ao ângulo $\frac{\hat{A}}{2}$, obtemos

$$\cot\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) = \frac{\overline{AE}}{\overline{OE}} = \frac{p - a}{r},$$

o que implica

$$\frac{\cot\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)}{p - a} = \frac{1}{r}.$$

Para provarmos a segunda parte, a fórmula para obter o raio, partiremos da fórmula geral de adição:

$$\cot(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{\cot \alpha + \cot \beta + \cot \gamma - \cot \alpha \cdot \cot \beta \cdot \cot \gamma}{1 - \cot \alpha \cdot \cot \beta - \cot \beta \cdot \cot \gamma - \cot \gamma \cdot \cot \alpha} \quad (1.11)$$

onde α , β e γ são ângulos internos de um triângulo.

Aplicando para $\cot \left(\frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{C}}{2} \right) = \cot \frac{\pi}{2} = 0$, obtemos

$$0 = \frac{\cot \left(\frac{\hat{A}}{2} \right) + \cot \left(\frac{\hat{B}}{2} \right) + \cot \left(\frac{\hat{C}}{2} \right) - \cot \left(\frac{\hat{A}}{2} \right) \cdot \cot \left(\frac{\hat{B}}{2} \right) \cdot \cot \left(\frac{\hat{C}}{2} \right)}{1 - \cot \left(\frac{\hat{A}}{2} \right) \cdot \cot \left(\frac{\hat{B}}{2} \right) - \cot \left(\frac{\hat{B}}{2} \right) \cdot \cot \left(\frac{\hat{C}}{2} \right) - \cot \left(\frac{\hat{C}}{2} \right) \cdot \cot \left(\frac{\hat{A}}{2} \right)}$$

ou seja,

$$\cot \left(\frac{\hat{A}}{2} \right) \cdot \cot \left(\frac{\hat{B}}{2} \right) \cdot \cot \left(\frac{\hat{C}}{2} \right) = \cot \left(\frac{\hat{A}}{2} \right) + \cot \left(\frac{\hat{B}}{2} \right) + \cot \left(\frac{\hat{C}}{2} \right).$$

Substituindo os resultados demonstrados em (1.10), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{(p-a)}{r} \cdot \frac{(p-b)}{r} \cdot \frac{(p-c)}{r} &= \frac{(p-a)}{r} + \frac{(p-b)}{r} + \frac{(p-c)}{r} \\ &= \frac{3p - (a+b+c)}{r} \\ &= \frac{3p - 2p}{r} \\ &= \frac{p}{r}. \end{aligned}$$

Multiplicando ambos os membros da equação anterior por r^3 , temos

$$(p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c) = p \cdot r^2$$

o que implica,

$$r = \sqrt{\frac{(p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}{p}}.$$

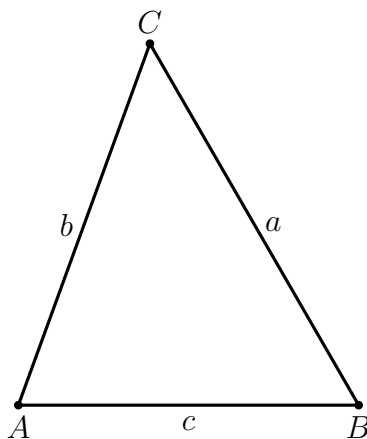
■

1.4.1 Demonstração da fórmula de Heron usando a lei das cotangentes

A fórmula de Heron (ou Teorema de Heron) fornece a área de um triângulo quando conhecidos os comprimentos dos três lados. Essa fórmula relaciona a área do triângulo com o semiperímetro (metade do perímetro) e os comprimentos dos lados.

Teorema 1.8 Se ABC é um triângulo de lados $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$ e semiperímetro $p = \frac{a+b+c}{2}$, então a área S do triângulo é dada por

Figura 1.21: Fórmula de Heron.



Fonte: Elaborada pelo autor.

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \quad (1.12)$$

Demonstração: Da lei das cotangentes, temos

$$\cot\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) + \cot\left(\frac{\hat{B}}{2}\right) + \cot\left(\frac{\hat{C}}{2}\right) = \frac{p}{r}.$$

Aplicando (1.11) para $\cot\left(\frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{C}}{2}\right) = \cot\frac{\pi}{2} = 0$, a equação acima pode ser reescrita como

$$\cot\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) \cdot \cot\left(\frac{\hat{B}}{2}\right) \cdot \cot\left(\frac{\hat{C}}{2}\right) = \frac{p}{r},$$

ou seja,

$$\frac{(p-a)}{r} \cdot \frac{(p-b)}{r} \cdot \frac{(p-c)}{r} = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{r^3} = \frac{p}{r}.$$

Multiplicando ambos os membros da equação anterior por pr^3 , obtemos

$$p(p-a)(p-b)(p-c) = (pr)^2.$$

Como pr é a área S do triângulo ABC em função do raio r da circunferência inscrita e do semiperímetro p , então

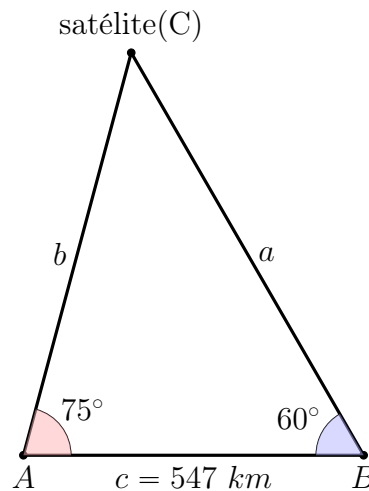
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

■

1.5 lei dos senos: aplicações

Exemplo 1 - Um satélite orbitando a Terra passa diretamente acima de duas estações de observação, que estão a 547 km de distância uma da outra. Em um instante em que o satélite está entre essas duas estações, o ângulo de elevação é observado, simultaneamente, com 60° da estação B e 75° da estação A. Qual é a distância do satélite até a estação A?

Figura 1.22: Exemplo 1: aplicação da lei dos senos.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Solução - Se dois ângulos internos em um triângulo são conhecidos, então o terceiro ângulo pode ser determinado. Pois, a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° . Neste caso, $\widehat{ACB} = 180^\circ - (75^\circ + 60^\circ) = 45^\circ$. Logo, pela lei dos senos, temos

$$\frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}}$$

ou seja,

$$\frac{b}{\sin 60^\circ} = \frac{547}{\sin 45^\circ}$$

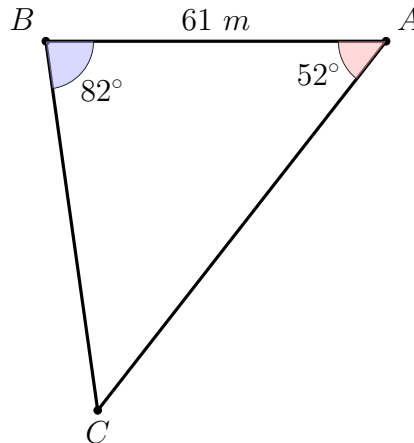
o que implica,

$$b = \frac{547 \times \sin 60^\circ}{\sin 75^\circ} \approx 669,5 \text{ km}.$$

A distância do satélite à estação A é, aproximadamente, 669,5 km.

Exemplo 2 - Para encontrar a distância através de um rio, uma topógrafa escolhe os pontos A e B , que estão a 61 metros de distância em um dos lados do rio (veja a Figura 1.23). Ela então escolhe um ponto de referência C no lado oposto do rio e encontra que $\widehat{ABC} = 82^\circ$ e $\widehat{BAC} = 52^\circ$. Qual é a distância, aproximadamente, entre os pontos B e C ?

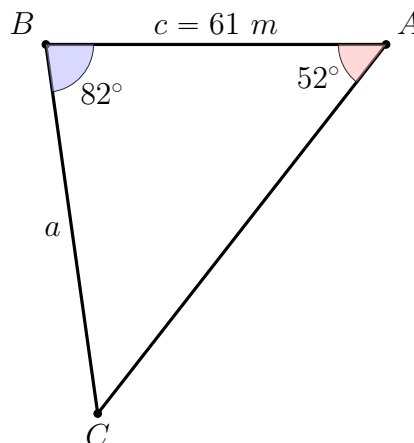
Figura 1.23: Exemplo 2: aplicação da lei dos senos.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Solução - Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° . Então, neste caso, $\widehat{ACB} = 180^\circ - (82^\circ + 52^\circ) = 46^\circ$. Logo, pela lei dos senos, temos

Figura 1.24: Exemplo 3: aplicação da lei dos senos.



Fonte: Elaborada pelo autor.

$$\frac{a}{\widehat{\text{sen } A}} = \frac{c}{\widehat{\text{sen } C}}$$

ou seja,

$$\frac{a}{\text{sen } 52^\circ} = \frac{61}{\text{sen } 46^\circ}$$

o que implica,

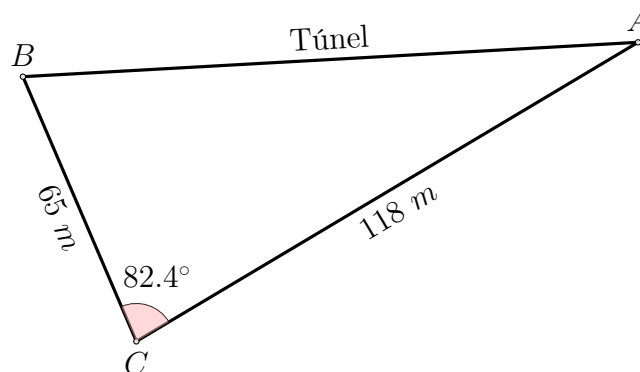
$$a = \frac{61 \times \text{sen } 52^\circ}{\text{sen } 46^\circ} = \frac{61 \times 0,79}{0,72} \approx 67.$$

A distância entre os pontos B e C é, aproximadamente, 67 metros.

1.6 lei dos cossenos: aplicações

Exemplo 1 - Um túnel será construído através de uma montanha. Para estimar o comprimento do túnel, um agrimensor realiza as medições mostradas na Figura 1.25. Use os dados do agrimensor para aproximar o comprimento do túnel.

Figura 1.25: Exemplo 1: aplicação da lei dos cossenos.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Solução - Para aproximar o comprimento $\overline{AB}$ do túnel, utilizamos a lei dos cossenos

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 &= 65^2 + 118^2 - 2 \cdot 65 \cdot 118 \cos 82,4^\circ \\ &\approx 4225 + 13924 - 2029 = 16120\end{aligned}$$

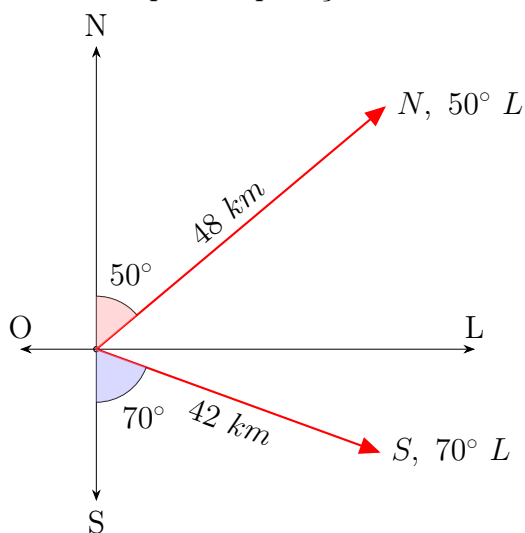
o que implica,

$$\overline{AB} \approx \sqrt{16120} \approx 127.$$

Assim, o túnel terá aproximadamente 127 metros.

Exemplo 2 - Duas embarcações partem do mesmo porto ao mesmo tempo. Uma viaja a uma velocidade de 48 km/h na direção N 50° L e a outra viaja a uma velocidade de 42 km/h na direção S 70° L (veja a Figura 1.26). Qual é a distância entre as duas embarcações após uma hora?

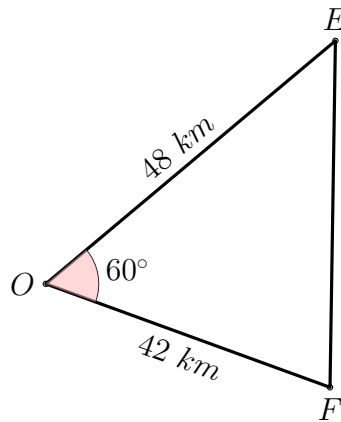
Figura 1.26: Exemplo 2: aplicação da lei dos cossenos.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Solução - A situação apresentada pode ser representada pela Figura 1.27:

Figura 1.27: Exemplo 3: aplicação da lei dos cossenos.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Onde $\overline{EF}$ é a distância entre as embarcações após uma hora. Então, pela lei dos cossenos, temos

$$\begin{aligned}\overline{EF}^2 &= 48^2 + 42^2 - 2 \cdot 48 \cdot 42 \cos 60^\circ \\ &= 2304 + 1764 - 2016 = 2052\end{aligned}$$

o que implica,

$$\overline{EF} = \sqrt{2052} \approx 45.$$

A distância entre as embarcações é, aproximadamente, 45 *km*.

No que segue disponibilizamos o conjunto de elementos $\text{\LaTeX}$ necessários para a produção de algumas das figuras acima.

Figura 1.22:

```
\begin{figure}[H]
\centering
\begin{tikzpicture}[scale=.9]
\tkzDefPoint(0,0){A}
\tkzDefPoint(5,0){B}
\tkzDefTriangle[two angles = 75 and 60](A,B) \tkzGetPoint{C}
\tkzDrawPolygon[very thick](A,B,C)
```

```

\tkzLabelSegment[right](B,C){$a$}
\tkzLabelSegment[below](A,B){$c=547\ km$}
\tkzLabelSegment[left](A,C){$b$}
\tkzDrawPoints(A,B)
\tkzLabelPoints(B)
\tkzLabelPoint[above](C){sat\'elite(C)}
\tkzDrawPoints[size=0.1cm,fill=black](A,B,C)
\tkzLabelPoints[] (A)
\tkzMarkAngle[size=0.7](B,A,C)
\tkzFillAngle[fill=red!30, opacity=0.5, size=0.7](B,A,C)
\tkzLabelAngle[pos=1.1](B,A,C){$75^\circ$}
\tkzMarkAngle[size=0.7](C,B,A)
\tkzFillAngle[fill=blue!30, opacity=0.5, size=0.7](C,B,A)
\tkzLabelAngle[pos=1.1](C,B,A){$60^\circ$}
\end{tikzpicture}
\end{figure}

```

Figura 1.26:

```

\begin{figure}[H]
\centering
\begin{tikzpicture}
\tkzInit[xmin=-3,xmax=5, ymin=-3,ymax=4]
\tkzDefPoints{-1/0/A, 5/0/B, 0/-2/C, 0/4/D, 0/0/O}
\tkzDefShiftPoint[O](40:5){E}
\tkzDefShiftPoint[O](-20:4){F}
\tkzDrawPoints(O)
\tkzDrawSegment[<->,>=Stealth](A,B)
\tkzDrawSegment[<->,>=Stealth](C,D)
\tkzLabelPoint[above](A){O}
\tkzLabelPoint[above](B){L}
\tkzLabelPoint[below](C){S}
\tkzLabelPoint[above](D){N}
\tkzLabelPoint[right](E){$N, \ 50^\circ \ L$}

```

```

\tkzLabelPoint[right](F){$S,\ 70^\circ \ L$}
\tkzDrawSegment[red, -triangle 45, thick](O,E)
\tkzLabelSegment[above, sloped](O,E){$48\ km$}
\tkzDrawSegment[red, -triangle 45, thick](O,F)
\tkzLabelSegment[below, sloped](O,F){$42\ km$}
\tkzMarkAngle[size=0.7](E,O,D)
\tkzFillAngle[fill=red!30, opacity=0.5, size=0.7](E,O,D)
\tkzLabelAngle[pos=1.1](E,O,D){$50^\circ$}
\tkzMarkAngle[size=0.7](C,O,F)
\tkzFillAngle[fill=blue!30, opacity=0.5, size=0.7](C,O,F)
\tkzLabelAngle[pos=1.1](C,O,F){$70^\circ$}
\end{tikzpicture}
\end{figure}

```

Figura 1.27:

```

\begin{figure}[H]
\centering
\begin{tikzpicture}
\tkzInit[xmin=-3,xmax=5, ymin=-3,ymax=4]
\tkzDefPoints{-1/0/A, 5/0/B, 0/-2/C, 0/4/D, 0/0/O}
\tkzDefShiftPoint[O](40:5){E}
\tkzDefShiftPoint[O](-20:4){F}
\tkzDrawPoints(O,E,F)
\tkzDrawPolygon[very thick](O,E,F)
\tkzMarkAngle[size=0.7](F,O,E)
\tkzFillAngle[fill=red!30, opacity=0.5, size=0.7](F,O,E)
\tkzLabelAngle[pos=1.1](F,O,E){$60^\circ$}
\tkzLabelPoints[left](O)
\tkzLabelPoints[above](E)
\tkzLabelPoints[below](F)
\tkzLabelSegment[above, sloped](O,E){$48\ km$}
\tkzLabelSegment[below, sloped](O,F){$42\ km$}
\end{tikzpicture}

```

`\end{figure}`

Capítulo 2

Um breve contexto histórico sobre as leis dos cossenos, senos e tangentes

A lei dos cossenos tem uma longa e surpreendente trajetória que se estende desde a geometria clássica grega até a trigonometria moderna, tendo evoluído de maneira gradual e por meio de contribuições de estudiosos de diversas culturas e regiões.

Uma ideia inicial do que conhecemos hoje como lei dos cossenos está presente na obra de Euclides [6], em *Os Elementos*:

Nos triângulos obtusângulos (acutângulo), o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo obtuso (agudo) é maior do que os quadrados sobre os lados que contêm o ângulo obtuso (agudo) por duas vezes o contido por um dos à volta do ângulo obtuso (agudo), sobre o qual cai a perpendicular, e também pela cortada exteriormente (interiormente) pela perpendicular relativamente ao ângulo obtuso (agudo) (EUCLIDES, 2009, p. 137).

Essas proposições tratam da relação entre os lados de um triângulo (obtusângulo e acutângulo) e são expressas de forma puramente geométrica, sem uso de ângulos medidos numericamente ou razões trigonométricas como conhecemos atualmente.

Em um dos tratados escritos por Euclides e posterior a *Os Elementos*, chamado *Os dados*, ele define um *dado* como um conjunto tal de partes ou relações de uma figura que, tendo-se todas, menos uma delas, então a restante está determinada [7]. Esta noção é a mesma que atualmente é utilizada para resolver triângulos, ou seja, quando sabe-se duas informações, então a terceira é calculada. Assim, as partes $\angle A$, a e r de um triângulo no plano, em que A é um ângulo, a é o lado oposto e r é o raio do círculo

circunscrito, constituem um dado; dadas duas dessas partes, a terceira está determinada. Euclides abordava este problema geometricamente, no entanto, esta relação é semelhante a $a = 2r \sin \hat{A}$, que é parte do que chamamos atualmente de lei dos senos.

É interessante destacar que os gregos possuíam um conhecimento relativamente sólido sobre ângulos e suas medidas. Segundo Carvalho e Roque (2012, p. 136), “até Os Elementos de Euclides, os ângulos eram medidos por múltiplos ou submúltiplos do ângulo reto”. Porém, com o passar dos anos os astrônomos gregos foram adotando o sistema sexagesimal dos babilônios, que já dividiam a circunferência em 360 partes, cada uma correspondendo a um grau, e estabeleciam subdivisões em minutos e segundos.

É devido à necessidade dos astrônomos gregos determinarem o movimento dos astros com precisão que nascem as primeiras ideias sobre trigonometria, sendo, para Carvalho e Roque (2012, p. 136), “Hiparco de Niceia (120 a.E.C.) considerado o fundador da trigonometria”.

O astrônomo indiano Brahmagupta (século VII, d.E.C), em sua obra *Khaṇḍakhadyaka*, também lidou de forma indireta com a lei dos senos no plano dentro de sua teoria planetária. Porém, o uso aparente desse resultado por Brahmagupta não nos permite confirmar se ele possuía conhecimento independente da fórmula.

Entre os séculos VII e XIII, durante o período de expansão do Islã, matemáticos árabes como al-Khwarizmi (século IX) e al-Battani (século IX), traduziram e aperfeiçoaram alguns resultados da matemática desenvolvida pelos gregos. Os estudiosos árabes também estavam motivados em resolver problemas astronômicos. Os estudos se concentravam, fundamentalmente, na trigonometria esférica, que estuda triângulos esféricos, isto é, triângulos sobre a superfície de uma esfera. Conforme van Brummelen (2009, p. 167), “[...] it is possible to find a great deal of spherical trigonometry buried within early Muslim solutions to astronomical problems”. “[...] é possível encontrar uma grande quantidade de trigonometria esférica embutida nas soluções astronômicas dos primeiros matemáticos muçulmanos” (Tradução nossa). É numa destas soluções que al-Khwarizmi apresenta um resultados equivalente à lei dos cossenos para triângulos esféricos.

Um problema idêntico à lei dos cossenos esférica foi resolvido por al-Battani décadas depois. Foi com a contribuição e influência de matemáticos islâmicos que, segundo van Brummelen [11],

[...] may have been the path that led Regiomontanus to the purely trigonometric result. So the early Islamic scientists were certainly capable of finding and using rules of the sophistication and importance of the laws of sines and cosines, but until later the rules remained in their astronomical contexts, and were not posited independently. [...]pode ter sido o caminho que levou Regiomontanus ao resultado puramente trigonométrico. Assim, os primeiros cientistas islâmicos foram certamente capazes de encontrar e usar regras com a sofisticação e importância das leis dos senos e cossenos, mas até mais tarde essas regras permaneceram em seus contextos astronômicos e não foram postas de forma independente (VAN BRUMMELEN, 2009, p. 168, tradução nossa).

Podemos notar que apesar da lei dos cossenos para triângulos esféricos já ser aplicada pelos estudiosos árabes, ela não foi realçada como um resultado que merecesse um destaque.

É com o matemático persa Nasir al-Din al-Tusi (século XIII, d.C.), em seu *Treatise on the Quadrilateral* (Tratado sobre o Quadrilátero), livro III, onde a lei dos senos é enunciada explicitamente e demonstrada. Segundo van Brummelen [11]

The heart of Book III comes next, where two important theorems are demonstrated. The first is an explicit statement of the plane version of the Law of Sines, accompanied by two proofs and explanations on how to apply it to solve triangles. [O ponto central do Livro III vem a seguir, onde dois teoremas importantes são demonstrados. O primeiro é uma declaração explícita da versão plana da Lei dos Senos, acompanhada de duas demonstrações e explicações sobre como aplicá-la para resolver triângulos.] (VAN BRUMMELEN, 2009, p. 188, tradução nossa).

Assim, ao descrever sistematicamente como resolver triângulos por meio de algumas combinações dadas previamente, al-Tusi destaca a lei dos senos para triângulos no plano e dá um passo importante no desenvolvimento da trigonometria plana.

Já no Livro V, al-Tusi, faz uma análise completa da trigonometria esférica conhecida tendo o triângulo como seu foco principal, em vez do quadrilátero. Sua apresentação gira em torno de dois teoremas: a lei dos senos e a lei das tangentes. Com a lei dos senos, ele começa com o caso do triângulo retângulo e oferece uma série de demonstrações. Sobre a lei das tangentes, al-Tusi vai além da demonstração de teoremas e apresenta uma defesa entusiástica do uso das tangentes e de funções relacionadas em geral. O fato de que ele as define cuidadosamente, com uma abordagem geométrica e moderna, como fez Abu al-Wafa (século X, d.e.c), indica que ele acreditava que alguns de seus leitores não necessariamente aceitariam essas relações de forma implícita, ou talvez nem estivessem familiarizados com elas. Assim como a lei dos senos, a lei das tangentes é demonstrada

várias vezes.

A lei das tangentes na esfera, tal qual é entendida hoje como uma relação explícita entre os elementos de um triângulo esférico, foi explicitamente formulada e ganhou destaque na matemática árabe. Ao matemático persa Abu al-Wafa é amplamente creditado como a primeira pessoa a declarar e utilizar sistematicamente a lei das tangentes.

Outro matemático persa que forneceu contribuições importantes sobre as leis dos cossenos e senos foi Jamshid Kashi (século XV). Em seu trabalho denominado *Miftah al-ḥisab* (*A Chave da Aritmética*), ao discutir triângulos escalenos, assim como fez al-Tusi, ele obteve e apresentou fórmulas que correspondem à lei dos cossenos e à lei dos senos no plano [1].

Johannes Müller Regiomontanus, conhecido como Regiomontanus (1436–1476), foi um matemático europeu que notabilizou-se ao sistematizar a trigonometria como um campo separado da astronomia. Em sua obra mais famosa, *De Triangulis Omnimodis Libri Quinque* (Cinco Livros sobre Todos os Tipos de Triângulos), ele utilizou o método dedutivo e axiomático presente no estilo euclidiano de escrita. Ou seja, seguindo as etapas: definições e/ou axiomas, acompanhados de teoremas e suas demonstrações. É no livro V, teorema 2, que a lei dos cossenos para triângulos esféricos é enunciado e demonstrado pela primeira vez na Europa. Essa lei possibilitou o cálculo de lados desconhecidos quando dois lados e o ângulo entre eles eram conhecidos, sendo essencial para o desenvolvimento da astronomia de precisão.

Capítulo 3

Trigonometria esférica

Entre os conceitos fundamentais e resultados clássicos da trigonometria esférica estão a lei dos senos e a lei dos cossenos. Estas leis fornecem relações fundamentais entre os lados e ângulos dos triângulos esféricos, permitindo resolver completamente qualquer triângulo quando algumas de suas partes são conhecidas.

3.1 Definições básicas

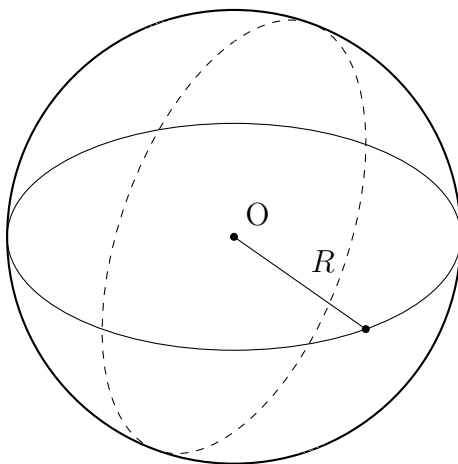
Neste capítulo, estendemos o estudo da lei dos senos e cossenos abordados de um ponto de vista geométrico do plano para um ponto de vista geométrico da esfera. Para tanto, precisamos das definições preliminares apresentadas a seguir.

Definição 3.1.1 *Sejam dados um ponto O do espaço $\mathbb{R}^3$ e um número real positivo R . A esfera, de centro O e raio R , é o lugar geométrico dos pontos do espaço $\mathbb{R}^3$ que distam R de O (veja a Figura 3.1).*

Definição 3.1.2 *A intersecção da esfera com um plano passando pelo seu centro é chamada de círculo máximo da esfera (veja a Figura 3.1).*

O termo ‘círculo máximo’ é devido ao fato de que eles são os círculos de maior raio contidos na esfera.

Figura 3.1: A esfera de centro O e raio R , e com círculos máximos.

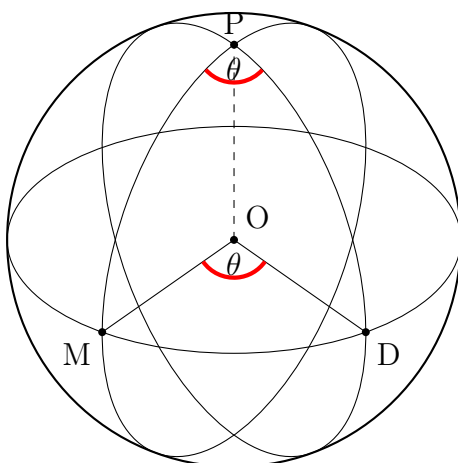


Fonte: elaborada pelo autor.

Definição 3.1.3 *Um ângulo esférico é o ângulo entre dois arcos de círculos máximos, isto é, o ângulo euclidiano entre os dois planos que contêm os arcos de círculos máximos (Figura 3.2).*

Na Figura 3.2, o ângulo entre o plano que contém o arco $\widehat{PM}$ e o plano que contém o arco $\widehat{PD}$ mede θ . Logo, pela Definição 3.1.3, o ângulo no vértice P é o ângulo esférico θ .

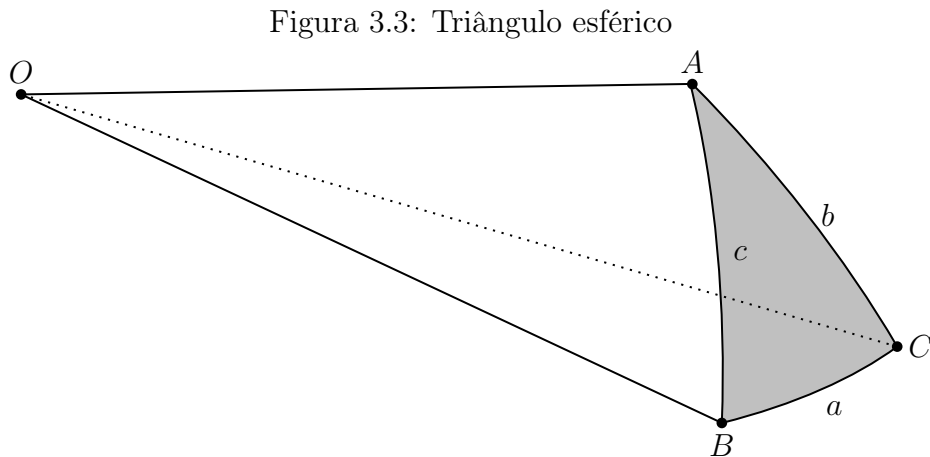
Figura 3.2: Definição de ângulo esférico.



Fonte: elaborada pelo autor.

Definição 3.1.4 *Um triângulo esférico é uma superfície limitada por três arcos de círculos máximos, contido em algum hemisfério, sendo estes arcos menores que um semicírculo máximo (veja a Figura 3.3).*

Na Figura 3.3 temos o triângulo esférico de vértices A , B e C . Seus lados são os arcos a , b e c . Seus ângulos internos são $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$.

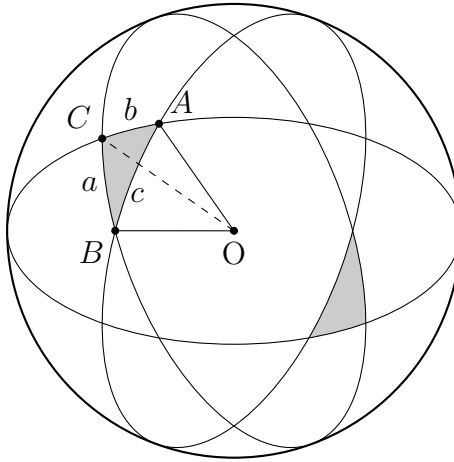


Fonte: elaborada pelo autor.

3.2 Lei dos cossenos e senos

Teorema 3.1 *(Lei dos cossenos) Seja um triângulo esférico de vértices A , B e C , com ângulos internos medindo $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ e cujos lados opostos medem a , b e c , respectivamente, como na Figura 3.4. Então, são verdadeiras:*

Figura 3.4: Triângulo esférico de vértices A , B e C .



Fonte: elaborada pelo autor.

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \sin(b) \cdot \sin(c) \cdot \cos \hat{A} \quad (3.1)$$

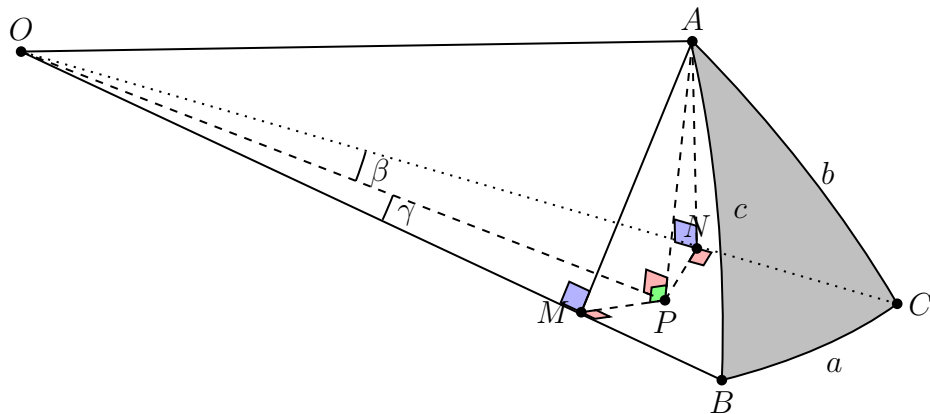
$$\cos(b) = \cos(a) \cdot \cos(c) + \sin(a) \cdot \sin(c) \cdot \cos \hat{B} \quad (3.2)$$

$$\cos(c) = \cos(a) \cdot \cos(b) + \sin(a) \cdot \sin(b) \cdot \cos \hat{C} \quad (3.3)$$

Uma observação interessante é que nos triângulos esféricos tanto os ângulos internos quanto os lados possuem medidas angulares.

Demonstração: Demonstraremos a equação (3.2), as outras duas são obtidas pelo mesmo processo. Considerando a Figura 3.5, temos

Figura 3.5: Triângulo esférico para orientar a demonstração.



Fonte: elaborada pelo autor.

Dos triângulos retângulos euclidianos ANO e NOP , respectivamente, seguem

$$\overline{ON} = \overline{OA} \cdot \cos(b)$$

e

$$\overline{ON} = \overline{OP} \cdot \cos(\beta),$$

e portanto

$$\overline{OA} \cdot \cos(b) = \overline{OP} \cdot \cos(\beta).$$

Como no plano BCO , $\gamma + \beta = a$ implica $\beta = a - \gamma$, obtemos

$$\overline{OA} \cdot \cos(b) = \overline{OP} \cdot \cos(\beta)$$

ou, ainda,

$$\overline{OA} \cdot \cos(b) = \overline{OP} \cdot \cos(a - \gamma).$$

Portanto,

$$\overline{OA} \cdot \cos(b) = \overline{OP} [\cos(a) \cdot \cos(\gamma) + \sin(a) \cdot \sin(\gamma)]. \quad (3.4)$$

No triângulo retângulo euclidiano MOP , temos que $\cos(\gamma) = \frac{\overline{OM}}{\overline{OP}}$ e $\sin(\gamma) = \frac{\overline{MP}}{\overline{OP}}$. Substituindo estes dois resultados em (3.4), obtemos

$$\begin{aligned}\overline{OA} \cdot \cos(b) &= \overline{OP} \left[\cos(a) \cdot \frac{\overline{OM}}{\overline{OP}} + \sin(a) \cdot \frac{\overline{MP}}{\overline{OP}} \right] \\ &= \overline{OM} \cdot \cos(a) + \overline{MP} \cdot \sin(a).\end{aligned}\tag{3.5}$$

No triângulo retângulo euclidiano AMO , como $\overline{OM} = \overline{OA} \cdot \cos(c)$, conclui-se em (3.5) que

$$\overline{OA} \cdot \cos(b) = \overline{OA} \cdot \cos(a) \cdot \cos(c) + \overline{MP} \cdot \sin(a).\tag{3.6}$$

Considerando o triângulo retângulo euclidiano AMP , tem-se

$$\cos \widehat{M} = \frac{\overline{MP}}{\overline{AM}} \Rightarrow \overline{MP} = \overline{AM} \cdot \cos \widehat{M}.$$

Mas, pela Definição 3.1.3, $\angle M$ é igual ao ângulo esférico $\angle B$, já que $\angle M$ é, também, o ângulo euclidiano entre os planos BCO e ABO . Desse modo,

$$\overline{MP} = \overline{AM} \cdot \cos \widehat{M} \Rightarrow \overline{MP} = \overline{AM} \cdot \cos \widehat{B}$$

e substituindo em (3.6), segue

$$\overline{OA} \cdot \cos(b) = \overline{OA} \cdot \cos(a) \cdot \cos(c) + \overline{AM} \cdot \cos \widehat{B} \cdot \sin(a).\tag{3.7}$$

No triângulo retângulo euclidiano AMO , como $\overline{AM} = \overline{OA} \cdot \sin(c)$, conclui-se em (3.7) que

$$\begin{aligned}\overline{OA} \cdot \cos(b) &= \overline{OA} \cdot \cos(a) \cdot \cos(c) + \overline{OA} \cdot \sin(c) \cdot \cos \widehat{B} \cdot \sin(a) \\ \cos(b) &= \cos(a) \cdot \cos(c) + \sin(a) \cdot \sin(c) \cdot \cos \widehat{B}.\end{aligned}$$

■

Teorema 3.2 (*Lei dos senos*) *Seja um triângulo esférico de vértices A , B e C , com ângulos internos medindo $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ e cujos lados opostos medem a , b e c , respectivamente,*

como na Figura 3.4. Então, são verdadeiras:

$$\frac{\text{sen}(a)}{\text{sen } \widehat{A}} = \frac{\text{sen}(b)}{\text{sen } \widehat{B}} = \frac{\text{sen}(c)}{\text{sen } \widehat{C}}. \quad (3.8)$$

Demonstração: Considere a Figura 3.5. Nos triângulos retângulos euclidianos MOP e AMP, temos

$$\overline{AM} = \overline{OA} \cdot \text{sen}(c)$$

e

$$\overline{AM} = \frac{\overline{AP}}{\text{sen } \widehat{M}}.$$

Mas, pela Definição 3.1.3, $\angle M$ é igual ao ângulo esférico $\angle B$, pois $\angle M$ é, também, o ângulo euclidiano entre os planos BCO e ABO . Desse modo,

$$\overline{OA} \cdot \text{sen}(c) = \frac{\overline{AP}}{\text{sen } \widehat{B}}$$

ou seja

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{OA}} = \text{sen } \widehat{B} \cdot \text{sen}(c). \quad (3.9)$$

Nos triângulos retângulos euclidianos ANO e ANP, temos

$$\overline{AN} = \overline{OA} \cdot \text{sen}(b)$$

e

$$\overline{AN} = \frac{\overline{AP}}{\text{sen } \widehat{N}}.$$

Mas, pela Definição 3.1.3, $\angle N$ é igual ao ângulo esférico $\angle C$, pois o $\angle N$ é, também, o ângulo euclidiano entre os planos ACO e BCO . Desse modo,

$$\overline{OA} \cdot \text{sen}(b) = \frac{\overline{AP}}{\text{sen } \widehat{C}}$$

ou seja

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{OA}} = \text{sen } \widehat{C} \cdot \text{sen}(b). \quad (3.10)$$

De (3.9) e (3.10), temos

$$\text{sen } \hat{B} \cdot \text{sen}(c) = \text{sen } \hat{C} \cdot \text{sen}(b)$$

$$\frac{\text{sen}(b)}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{\text{sen}(c)}{\text{sen } \hat{C}}.$$

Isso demonstra que

$$\frac{\text{sen}(b)}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{\text{sen}(c)}{\text{sen } \hat{C}}. \quad (3.11)$$

Repetindo o mesmo processo, demonstra-se que

$$\frac{\text{sen}(b)}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{\text{sen}(a)}{\text{sen } \hat{A}}. \quad (3.12)$$

Portanto, de (3.11) e (3.12), conclui-se

$$\frac{\text{sen}(a)}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{\text{sen}(b)}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{\text{sen}(c)}{\text{sen } \hat{C}}.$$

■

Teorema 3.3 (*Lei das tangentes*) *Seja um triângulo esférico de vértices A , B e C , com ângulos internos medindo $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ e cujos lados opostos medem a , b e c , respectivamente, como na Figura 3.3. Então, são verdadeiras:*

$$\frac{\text{tg}\left(\frac{\hat{A} - \hat{B}}{2}\right)}{\text{tg}\left(\frac{\hat{A} + \hat{B}}{2}\right)} = \frac{\text{tg}\left(\frac{a - b}{2}\right)}{\text{tg}\left(\frac{a + b}{2}\right)}, \quad (3.13)$$

$$\frac{\text{tg}\left(\frac{\hat{A} - \hat{C}}{2}\right)}{\text{tg}\left(\frac{\hat{A} + \hat{C}}{2}\right)} = \frac{\text{tg}\left(\frac{a - c}{2}\right)}{\text{tg}\left(\frac{a + c}{2}\right)},$$

e

$$\frac{\text{tg}\left(\frac{\hat{B} - \hat{C}}{2}\right)}{\text{tg}\left(\frac{\hat{B} + \hat{C}}{2}\right)} = \frac{\text{tg}\left(\frac{b - c}{2}\right)}{\text{tg}\left(\frac{b + c}{2}\right)}.$$

Demonstração: Primeiro, notamos que as seguintes relações são verdadeiras (e

conhecidas como fórmulas de Delambre):

$$\operatorname{sen}\left(\frac{c}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}\right) = \cos\left(\frac{\hat{C}}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right),$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{c}{2}\right) \cos\left(\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\hat{C}}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

$$\cos\left(\frac{c}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}\right) = \cos\left(\frac{\hat{C}}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right),$$

e

$$\cos\left(\frac{c}{2}\right) \cos\left(\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\hat{C}}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right).$$

Consequentemente

$$\operatorname{tg}\left(\frac{a+b}{2}\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{a-b}{2}\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}\right),$$

o que implica que

$$\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}\right)} = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{a-b}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{a+b}{2}\right)}.$$

■

No que segue disponibilizamos o conjunto de elementos $\text{\LaTeX}$ necessários para a produção de algumas das figuras acima.

Figura 3.1:

```
\begin{figure}[H]
\centering
\fill[black] (0,0) circle (1pt) node[above right]{0};
\draw[thick, black] (0) circle (2cm);
\draw[black, dashed, rotate=70, name path=ellipse1] (0) ellipse (2cm and 1cm);
\draw[white,dotted, rotate=-70, name path=ellipse2] (0) ellipse (2cm and 1cm);
\draw[black, name path=ellipse3] (0) ellipse (2cm and 1cm);
\path[name intersections={of=ellipse2 and ellipse3, by={D, E, C,F}}];
\fill[black] (D) circle (1pt);
\draw (0) -- (D);
```

```
\tkzLabelSegment[above right](O,D){$R$}
\end{tikzpicture}
\end{figure}
```

Figura 3.2:

```
\begin{figure}[H]
\centering
\begin{tikzpicture}[scale=1.5, rotate=0]
\fill[black] (0,0) circle (1pt) node[above right] {0};
\draw[thick, black] (0) circle (2cm);
\draw[black, rotate=70, name path=ellipse1] (0) ellipse (2cm and 1cm);
\draw[black, rotate=-70, name path=ellipse2] (0) ellipse (2cm and 1cm);
\draw[black, name path=ellipse3] (0) ellipse (2cm and 1cm);
\path[name intersections={of=ellipse1 and ellipse2, by={P, B}}];
\fill[black] (P) circle (1pt) node[above] {P};
\path[name intersections={of=ellipse1 and ellipse3, by={A, M}}];
\fill[black] (M) circle (1pt) node[below left] {M};
\path[name intersections={of=ellipse2 and ellipse3, by={D, E, C,F}}];
\fill[black] (D) circle (1pt) node[below right] {D};
\draw (0) -- (M);
\draw (0) -- (D);
\coordinate (T) at (-0.25,1.5);
\coordinate (R) at (0.25,1.5);
\draw[dashed] (0) -- (P);
\draw[ultra thick] pic[ draw=red, angle radius=.5cm] {angle=M--0--D}
node[below] {$\theta$};
\draw[ultra thick] pic[ draw=red, angle radius=0.5cm] {angle=T--P--R}
node[above=1.95cm] {$\theta$};
\begin{scope}[on background layer]
\clip(0,0) ellipse (2cm and 1cm);
\clip[rotate=70] (0,0) ellipse (2cm and 1cm);
\end{scope}
\end{tikzpicture}
```

```
\centering
\end{figure}
```

Figura 3.3:

```
\begin{figure}[H]
\centering
\tikzset{every picture/.style={line width=0.75pt}}
\begin{tikzpicture}[x=0.75pt,y=0.75pt,yscale=-1,xscale=1, scale=0.9]
\draw [fill={rgb, 255:red, 0; green, 0; blue, 0 }, fill opacity=0.25]
(381.71,80.07) .. controls (422.3,120.75) and (458.84,167.88) .. (484.5,211.76)
.. controls (463.2,227.42) and (433.04,240.91) .. (396.51,250.07) ..
controls (398.72,192.5) and (393.47,131.99) .. (380.71,80) .. controls
(381.04,80.02) and (381.38,80.05) .. (381.71,80.07) -- cycle ;
\draw[] (380.7,80) -- (44.99,85.25) ;
\draw[] (396.52,250.06) -- (44.99,85.25) ;
\fill[black] (396.52,250.06) circle (2pt) node[below] {$B$};
\fill[black] (44.99,85.25) circle (2pt) node[above] {$O$};
\tkzDefPoints{384/184/N, 368/210/P, 381.71/80.07/A, 44.99/85.25/O, 326/216/M,
396.52/250.06/B, 484.5/211.76/C}
\draw [dash pattern={on 0.84pt off 2.51pt}] (484.5,211.76) -- (44.99,85.25) ;
\fill[black] (484.5,211.76) circle (2pt) node[right] {$C$};
\fill[black] (381.71,80.07) circle (2pt) node[above] {$A$};
\tkzLabelSegment[below right=0.1cm](B,C){$a$}
\tkzLabelSegment[right=0.2cm](A,B){$c$}
\tkzLabelSegment[right=0.2cm](A,C){$b$}
\end{tikzpicture}
\end{figure}
```

Figura 3.4:

```
\begin{figure}[H]
\centering
\begin{tikzpicture}[scale=1.5]
\draw[thick, black] (0,0) circle (2cm);
```

```

\fill[thick,black] (0,0) circle (1pt) node[below] {0};
\draw[black, rotate=70, name path=ellipse1] (0,0) ellipse (2cm and 1cm);
\draw[black, rotate=-70, name path=ellipse2] (0,0) ellipse (2cm and 1cm);
\draw[black, name path=ellipse3] (0,0) ellipse (2cm and 1cm);
\path[name intersections={of=ellipse1 and ellipse2, by={A, B}}];
\fill[black] (B) circle (1pt) node[below left] {$B$};
\path[name intersections={of=ellipse1 and ellipse3, by={A, C}}];
\fill[black] (A) circle (1pt) node[above right] {$A$};
\path[name intersections={of=ellipse2 and ellipse3, by={D, E, C,F}}];
\fill[black] (C) circle (1pt) node[above left] {$C$};
\draw (0,0) -- (A);
\draw (0,0) -- (B);
\draw[dashed] (0,0) -- (C);
\tkzLabelSegment[] (A,B){$c$}
\tkzLabelSegment[above] (A,C){$b$}
\tkzLabelSegment[left] (B,C){$a$}
\begin{scope}[on background layer]
  \clip(0,0) ellipse (2cm and 1cm);
  \clip[rotate=-70] (0,0) ellipse (2cm and 1cm);
\path[fill=black!20, even odd rule](0,0) ellipse (2cm and 1cm)[rotate=70]
(0,0) ellipse (2cm and 1cm);
\end{scope}
\end{tikzpicture}
\end{figure}

```

Figura 3.5:

```

\begin{figure}[H]
\centering
\tikzset{every picture/.style={line width=0.75pt}}
\begin{tikzpicture}[x=0.75pt,y=0.75pt,yscale=-1,xscale=1, scale=0.9]
\draw [fill={rgb, 255:red, 0; green, 0; blue, 0 } ,fill opacity=0.25 ]
(381.71,80.07) .. controls (422.3,120.75) and (458.84,167.88) .. (484.5,211.76) .. cor
\draw(380.7,80) -- (44.99,85.25) ;

```

```

\draw(396.52,250.06) -- (44.99,85.25) ;
\fill[black] (396.52,250.06) circle (2pt) node[below] {$B$};
\fill[black] (44.99,85.25) circle (2pt) node[above] {$O$};
\tkzDefPoints{384/184/N, 368/210/P, 381.71/80.07/A, 44.99/85.25/O, 326/216/M,
396.52/250.06/B, 484.5/211.76/C}
\tkzMarkRightAngle[fill=blue!30,size=.3,draw](A,N,O)
\tkzMarkRightAngle[fill=blue!30,size=.3,draw](O,M,A)
\tkzMarkRightAngle[fill=red!30,size=.3,draw](A,P,O)
\tkzMarkRightAngle[fill=red!30,size=.2,draw](P,M,B)
\tkzMarkRightAngle[fill=red!30,size=.2,draw](P,N,C)
\tkzMarkRightAngle[fill=green!50,size=.2,draw](A,P,M)
\tkzMarkAngle[size=200](P,O,M)
\tkzFillAngle[fill=red!30, opacity=0, size=200](P,O,M)
\tkzLabelAngle[pos=210](P,O,M){$\gamma$}
\draw[dash pattern={on 0.84pt off 2.51pt}] (484.5,211.76) -- (44.99,85.25);
\fill[black] (484.5,211.76) circle (2pt) node[right] {$C$};
\draw[dashed] (381.71,80.07) -- (368,210) ;
\draw[dashed] (44.99,85.25) -- (368,210) ;
\draw[] (381.71,80.07) -- (326,216) ;
\fill[black] (326,216) circle (2pt) node[left] {$M$};
\draw[dashed] (381.71,80.07) -- (384,184) ;
\fill[black] (381.71,80.07) circle (2pt) node[above] {$A$};
\draw[dashed] (368,210) -- (326,216) ;
\draw[dashed] (368,210) -- (384,184) ;
\fill[black] (368,210) circle (2pt) node[below] {$P$};
\fill[black] (384,184) circle (2pt) node[above] {$N$};
\tkzMarkAngle[size=180](N,O,P)
\tkzFillAngle[fill=red!30, opacity=0, size=200](N,O,P)
\tkzLabelAngle[pos=190](N,O,P){$\beta$}
\tkzLabelSegment[below right=0.1cm](B,C){$a$}
\tkzLabelSegment[right=0.2cm](A,B){$c$}
\tkzLabelSegment[right=0.2cm](A,C){$b$}
\end{tikzpicture}

```

`\centering`
`\end{figure}`

Referências Bibliográficas

- [1] AZARIAN, M. K. *Meftab Al-Hesab: A Summary*. Missouri Journal of Mathematical Sciences, n. 2, v. 12, p. 75–95, 2000. Disponível em: <https://projecteuclid.org/journals/missouri-journal-of-mathematical-sciences/volume-12/issue-2/Meftab-Al-Hesab-A-Summary/10.35834/2000/1202075.pdf>. Acesso em 15 de maio de 2025.
- [2] BEZERRA, F. D. M. *Compartilhando práticas com os pacotes gráficos LaTeX ‘Animate’ e ‘TikZ’ na educação matemática elementar*. PMO v.12, n.2, 2024. <https://doi.org/10.21711/2319023x2024/pmo1218>
- [3] BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: Ministério da Educação, 2018. <https://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 04 de maio de 2025.
- [4] CARITÁ, L. A. *Leis dos cossenos e senos esféricos: demonstrações matemáticas para ferramentas astronômicas*. Revista Univap, n. 24, v. 46, p. 10–18, 2018. Disponível em: <https://revista.univap.br/index.php/revistaunivap/article/view/330>. Acesso em 23 de janeiro de 2025.
- [5] DE CARVALHO, J. B. P. ; ROQUE, T. *Tópicos de história da Matemática*. 1^a ed. Rio de Janeiro: SBM - Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.
- [6] EUCLIDES. *Os elementos*. Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: UNESP, 2009.
- [7] EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Editora da UNICAMP, 2004.

- [8] MATHEWS, R. M., The proofs of the law of tangents, *School Science and Mathematics*, (1915), 798–801. <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1111/j.1949-8594.1915.tb16374.x>
- [9] NETO, A. C. M. *Geometria*. 2^a ed. Rio de Janeiro: SBM - Sociedade Brasileira de Matemática, 2022.
- [10] STEWART, J. et al. *Algebra and trigonometry*. 2^a ed. Belmont: Brooks/Cole, 2010.
- [11] VAN BRUMMELEN, G. *The Mathematics of the Heavens and the Earth: The Early History of Trigonometry*. Princeton, NJ: 2009.
- [12] WING, J. *Computational thinking*. *Communications of the ACM*, v. 49, n. 3, p. 33-35, 2006.