

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Sombreamento e estabilidade estrutural forte em Dinâmica Linear

Mateus Vinicius Santos de Azevedo

João Pessoa – PB
Julho de 2025

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Sombreamento e estabilidade estrutural forte em Dinâmica Linear

por

Mateus Vinicius Santos de Azevedo

sob a orientação de

Prof. Dr. Fernando Vieira Costa Júnior

João Pessoa – PB
Agosto de 2023

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

A994s Azevedo, Mateus Vinicius Santos de.
Sombreamento e estabilidade estrutural forte em
Dinâmica Linear / Mateus Vinicius Santos de Azevedo. -
João Pessoa, 2023.
59 f. : il.

Orientação: Fernando Vieira Costa Júnior.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/Campus I.

1. Matemática - Operadores hiperbólicos. 2. Dinâmica
Linear. 3. Shift com peso. I. Costa Júnior, Fernando
Vieira. II. Título.

UFPB/BC

CDU 51(043)

Sombreamento e estabilidade estrutural forte em Dinâmica Linear

por

Mateus Vinicius Santos de Azevedo 

Dissertação apresentada dia 29 de julho de 2025 ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Fernando Vieira Costa Júnior – UFPB

(Orientador)

Prof. Dr. Nacib André Gurgel Albuquerque – UFPB

(Examinador Interno)

Prof. Dr. Anselmo Baganha Raposo Júnior – UFMA

(Examinador Externo)

¹Este trabalho contou com apoio financeiro da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES.

Aos meus pais, José Maurício de Azevedo e Maria Aparecida dos Santos Azevedo e ao meu irmão, Messias Santos de Azevedo.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, a qual, por sua graça, me fez capaz de concluir meu .

Aos meus pais, Maria Aparecida e José Mauricio. Ao meu irmão, Messias. Agradeço por todo apoio e não deixassem que nada faltasse.

Aos amigos da graduação, Alan , Jeano, Rodrigo, Iarythssa, Lucas e Ligia. Por me apoiarem e acreditarem em mim mesmo estando distante.

A Fernanda, Jaqueline, Aureliana, Jonatã e Aurilio. Por todos os momentos incríveis e engraçados, fazendo com que, mesmo a vida não sendo um bolo de morango, aliviassem o peso que é cursar uma pós-graduação.

A João Pedro, Manoel, Diego, Yasmin, Gustavo Teles, Antonio, Djackson, Fred e Tiago por cada conselho, palavras de incentivo e pelos varios cafezinhos do nosso dia a dia na pós.

A Assuerio, Barreto, Elias, Edson, Gustavo Henrique, Filipe , Anderson, Geivison, Alex, Marcos Gabriel, Fábio, Luis Felipe, Alvaro e Marta. Por todos os momentos divertidos vividos dentro e fora da pós, vocês são incríveis.

A Anderson Silva, Gustavo e Flávia. Conhecidos na graduação em matemática da UFPB mas que guardo com carinho a amizade que construímos. Em especial, a Maria Luiza Xavier Ferreira , que na reta final foi companheira, conselheira e me acolhia nos meus piores momentos. Meus sinceros muito obrigado.

Ao meu orientador Fernando Vieira Costa Jr, por toda paciência, conselhos e disponibilidade em ajudar em cada passo deste trabalho.

A banca examinadora, por se disponibilizar em avaliar este trabalho.

A CAPES, pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho, introduzimos a classe de operadores *hiperbólicos* e sua relação com os conceitos de *sombreamento* e *estabilidade estrutural forte*, já consolidados na dinâmica discreta e na teoria ergódica. A partir disso, estudamos uma caracterização para *shifts* com peso em espaços c_0 ou ℓ_p (com $1 \leq p < \infty$) que satisfazem a propriedade de sombreamento, conforme estabelecido por *N. C. Bernardes Jr.* e *A. Messaoudi* (2020). Por fim, discutimos como *F. Bayart* (2021) demonstrou que, nesse mesmo contexto, a propriedade de sombreamento é equivalente à *estabilidade estrutural forte*.

Palavras-chave: Operadores hiperbólicos, sombreamento, estabilidade estrutural forte, shift com peso.

Abstract

In this work, we present the class of *hyperbolic operators* and their connection with the well-established concepts of *shadowing* and *strong structural stability* in discrete dynamical systems and ergodic theory. We then examine a characterization of *weighted shift operators* on c_0 or ℓ_p spaces (where $1 \leq p < \infty$) satisfying the shadowing property, as demonstrated by *N. C. Bernardes Jr.* and *A. Messaoudi* (2020). Furthermore, we analyze how *F. Bayart* (2021) established that, in this framework, the shadowing property is equivalent to *strong structural stability*.

Keywords: Hyperbolic operators, shadowing property, strong structural stability, weighted shift operators.

Notações

A seguir, listamos algumas notações utilizadas neste trabalho.

- $\mathbb{N}$ - conjunto dos números naturais
- $\mathbb{N}_0$ - $\mathbb{N} \cup \{0\}$
- $\mathbb{Z}$ - conjunto dos números inteiros
- $\mathbb{R}$ - conjunto dos números reais
- $\mathbb{C}$ - conjunto dos números complexos
- $\mathbb{K}$ - corpo dos números reais ou complexos
- $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ - produto cartesiano do corpo $\mathbb{K}$ n -vezes
- $M \oplus N$ - soma direta dos espaços vetoriais M e N
- e_n - vetor $(0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ em que o 1 está na entrada n -ésima
- $\|\cdot\|$ - norma
- $\mathbb{D}$ - elementos cuja norma é menor ou igual a 1
- $\mathbb{T}$ - elementos cuja norma é igual a 1
- T^n - n -ésima iterada do operador T
- T^0 - operador identidade
- B_w - operador deslocamento para trás com peso
- F_w - operador deslocamento para frente com peso

- P_M - operador projeção sobre um subespaço M
- $Lip(\cdot)$ - conjunto dos mapas Lipschitz
- $Lip(\alpha)$ - constante de Lipschitz associada ao mapa α
- $\ell_p(\mathbb{Z})$ - $\left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} : x_n \in \mathbb{K}, \text{ para todo } n \in \mathbb{Z} \text{ e } \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}, 1 \leq p < \infty$
- $c_0(\mathbb{Z})$ - $\left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} : x_n \in \mathbb{K} \text{ para todo } n \in \mathbb{Z} \text{ e } \lim_{|n| \rightarrow \infty} x_n = 0 \right\}$
- (M, d) - espaço métrico M munido da métrica d .
- $\sigma(T)$ - espectro do operador T
- $r(T)$ - raio espectral do operador T
- $\mathcal{L}(X)$ - conjunto dos operadores lineares de X em X
- $GL(X)$ - grupo linear dos operadores invertíveis de X em X

Sumário

Introdução	2
1 Noções Básicas	4
2 Shifts com peso e resultados gerais	15
2.1 Operadores shift com peso e espectro	15
2.2 Ferramentas para sombreamento e estabilidade estrutural forte	18
3 Sombreamento e estabilidade estrutural forte para shifts	22
3.1 Propriedade de sombreamento para shifts	22
3.2 Estabilidade estrutural forte	33
Referências Bibliográficas	49

Introdução

A Dinâmica Linear surgiu como área de estudo a partir dos trabalhos pioneiros de Gethner e Shapiro [9] e Kitai [12] na década de 1980, focando no estudo de operadores lineares em espaços completos e suas propriedades dinâmicas. O interesse inicial concentrou-se na densidade das órbitas desses operadores, o que levou ao desenvolvimento dos conceitos fundamentais de hiperciclicidade e caoticidade. A hiperciclicidade ocorre quando existe um vetor cuja órbita é densa no espaço, enquanto a caoticidade acrescenta a esse conceito a densidade de órbitas periódicas. Inspirados pela Dinâmica Clássica, esses estudos evoluíram para incluir outros conceitos adaptados ao contexto linear, como a propriedade de sombreamento e a estabilidade estrutural forte.

A propriedade de sombreamento, também denominada na literatura como pseudorbit tracing property (POTP) ou apenas *shadowing*, foi inicialmente introduzida nos trabalhos de Bowen [6] e Sinaï [16], consolidando-se como um conceito de extrema relevância na teoria de Sistemas Dinâmicos. Esta propriedade garante que, para toda pseudotrajetória, uma sequência de pontos onde cada iteração apresenta um pequeno erro controlado, existe uma órbita verdadeira do sistema que a aproxima uniformemente. Suas aplicações desempenham um papel crucial na Meteorologia, com modelos climáticos, e na engenharia, em controle de sistemas caóticos. Para um tratamento aprofundado do tema, recomendamos as obras de Palmer [14] e Pilyugin [15], que abordam tanto o desenvolvimento teórico quanto aplicações concretas.

A estabilidade estrutural, cujo estudo seminal foi estabelecido por Andronov e Pontryagin [1], constitui um pilar central na teoria dos sistemas dinâmicos, geometria diferencial e em diversas aplicações matemático-físicas. Este conceito garante que a dinâmica essencial de um sistema permanece invariante sob pequenas perturbações, propriedade estudada por P. Hartman [11] no contexto de equações diferenciais. Sua generalização para a estabilidade estrutural forte amplia o escopo da teoria, exigindo não apenas a robustez topológica das trajetórias, mas também a existência de uma conjugação topológica (ou linear) entre o sistema original e o perturbado. Um protótipo de aplicação ocorre na Teoria do Controle, onde a propriedade assegura a confiabilidade de sistemas dinâmicos sujeitos a incertezas paramétricas ou erros de modelagem.

Este trabalho está organizado em três capítulos. No *Capítulo 1*, são apresentados os fundamentos teóricos necessários para o desenvolvimento da pesquisa, com ênfase nos conceitos básicos da Análise Funcional e nos resultados preliminares que sustentam a demonstração dos principais teoremas abordados no estudo. Particular atenção foi dedicada à exposição das noções iniciais da teoria, particularmente no que diz respeito aos estudos iniciais desenvolvidos no artigo [3], os quais servem como alicerce teórico para as investigações realizadas nos capítulos seguintes. Esta seção introdutória foi elaborada com o objetivo de proporcionar ao leitor uma base conceitual sólida e coerente, essencial para a compreensão dos desenvolvimentos posteriores.

No Capítulo 2, organizamos o conteúdo em duas seções principais, visando uma abordagem didática e conceitualmente clara. Na primeira seção, dedicamo-nos ao estudo dos operadores shift com peso, objetos fundamentais na teoria de sistemas dinâmicos lineares. Esses operadores, cuja análise será desenvolvida nos espaços c_0 e ℓ_p (com $1 \leq p < \infty$), destacam-se tanto por sua versatilidade na modelagem de problemas quanto pela riqueza de propriedades dinâmicas e espectrais que exibem. Na segunda seção, abordamos resultados gerais da dinâmica clássica, com ênfase em como certas propriedades fundamentais - como a invertibilidade do operador ou a existência de conjugação isométrica - preservam características essenciais no que diz respeito ao sombreamento e à estabilidade estrutural forte.

No Capítulo 3, dividimos o conteúdo em duas seções igualmente importantes para o desenvolvimento do trabalho. Ambas fornecem as ferramentas necessárias para as caracterizações apresentadas em [4] e [2]. Para isso, introduzimos Lemas auxiliares e adotamos uma abordagem um pouco menos direta que a original, buscando clareza e facilidade de compreensão para o leitor. No início de cada seção, apresentamos os resultados preliminares que sustentam as demonstrações finais de cada seção, visando guiar o leitor nos conceitos específicos para cada resultado de maneira objetiva.

Capítulo 1

Noções Básicas

Este capítulo tem como objetivo compilar as notações fundamentais e os resultados preliminares essenciais para o desenvolvimento desta pesquisa, apresentando as definições centrais que constituem o embasamento teórico deste trabalho, bem como estabelecemos a classe de operadores amplamente utilizados nos resultados principais deste trabalho, os operadores hiperbólicos, tendo como principais referências os artigos [3], [4], [5], [7] e [8].

Definição 1.1. Sejam X e Y espaços de Banach. Denotamos por $\mathcal{L}(X, Y)$ o espaço dos operadores lineares contínuos entre X e Y . Em particular, se $X = Y$, denotamos apenas por $\mathcal{L}(X)$.

Definição 1.2. Sejam X e Y espaços de Banach. Denotamos por $GL(X, Y)$ o grupo, com a operação composição, dos operadores $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ invertíveis. Em particular, se $X = Y$, denotamos apenas por $GL(X)$.

Definição 1.3. Sejam X e Y espaços de Banach. Denotamos por $U_b(X, Y)$ o espaço de todas as aplicações uniformemente contínuas e limitadas munidas com a norma do supremo

$$\|\varphi\|_\infty = \sup_{x \in X} \|\varphi(x)\|.$$

Para o caso em que $X = Y$, denotamos este espaço apenas por $U_b(X)$.

Observação 1.4. Além disso, com esta norma, $U_b(X, Y)$ é um espaço de Banach.

Definição 1.5. Seja X um espaço de Banach. Dizemos que $T, S \in GL(X)$ são conjugados isometricamente, se existe um homeomorfismo $h : X \rightarrow X$ satisfazendo

$$T \circ h = h \circ S,$$

com $\|h(x) - h(y)\| = \|x - y\|$, para todo $x, y \in X$.

Definição 1.6. Seja X um espaço de Banach. Um operador $P \in \mathcal{L}(X)$ é uma *projeção* se $P^2 = P \circ P = P$.

Proposição 1.7. *Sejam X um espaço de Banach e $Y \subset X$ um subespaço. As seguintes afirmações são equivalentes*

- (a) *Existe uma projeção $P : X \rightarrow X$ cuja imagem coincide com Y . Neste caso, dizemos que P é uma projeção de X sobre Y .*
- (b) *Y é fechado e existe um subespaço fechado $Z \subset X$ tal que $X = Y \oplus Z$, isto é, $E = F + G$ e $F \cap G = \emptyset$.*

Demonstração. Para este resultado, veja [5, Proposição 3.2.2]. □

Definição 1.8. Sejam (M, d_1) e (N, d_2) espaços métricos. Dizemos que uma aplicação $\phi : M \rightarrow N$ é uma *contração* se $Lip(\phi) < 1$, isto é, se existir uma constante $k < 1$ tal que

$$d_2(\phi(x), \phi(y)) \leq kd_1(x, y),$$

para quaisquer $x, y \in M$.

Teorema 1.9 (Teorema do ponto fixo de Banach). *Sejam (M, d) um espaço métrico completo e $\phi : M \rightarrow M$ uma contração. Então, existe um único ponto $x_0 \in M$ tal que $\phi(x_0) = x_0$.*

Demonstração. Para este resultado, veja [5, Teorema 9.4.2]. □

Definição 1.10. Sejam X um espaço de Banach e $T \in \mathcal{L}(X)$. O *espectro* de T , denotado por $\sigma(T)$, é o conjunto dado por

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ é não invertível.}\}$$

Proposição 1.11. *Sejam X um espaço de Banach e $T \in \mathcal{L}(X)$. Então,*

$$\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < \|T\|\}.$$

Além disso, se T é invertível, temos que

$$\sigma(T^{-1}) = \{\lambda^{-1} \in \mathbb{C} : \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Demonstração. Para este resultado, veja [8, Corolário 27.7] e [8, Exercício 27.14]. □

Teorema 1.12. *Sejam X um espaço de Banach e $T \in \mathcal{L}(X)$. Suponha que $\sigma(T) \subset \sigma_1 \cup \sigma_2$, onde $\sigma_1, \sigma_2 \subset \mathbb{C}$ são fechados e disjuntos. Então, existem subespaços fechados não triviais e T -invariantes M_1 e M_2 de modo que $X = M_1 \oplus M_2$,*

$$\sigma(T|_{M_1}) = \sigma_1 \quad \text{e} \quad \sigma(T|_{M_2}) = \sigma_2.$$

Demonstração. Para esta demonstração, veja [10, Teorema B.9]. □

Definição 1.13. Sejam X um espaço de Banach e $T \in \mathcal{L}(X)$. Chamamos de *raio espectral* do operador T o valor denotado por $r(T)$ de modo que

$$r(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Proposição 1.14. *Sejam X um espaço de Banach e $T \in \mathcal{L}(X)$. Então, $r(T)$ satisfaz*

$$r(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \|T\|.$$

Caso T seja um operador invertível, vale

$$\frac{1}{r(T^{-1})} = \inf\{|\lambda| \in \mathbb{C} : \lambda \in \sigma(T^{-1})\}.$$

Demonstração. Para este resultado, veja [8, Teorema 27.12]. □

As definições abaixo servirão para a classe de operadores que será bastante utilizada neste trabalho, tendo em vista sua riqueza de propriedades na teoria de Sistemas Dinâmicos, Teoria Ergódica e Análise Funcional.

Definição 1.15. Sejam X um espaço de Banach e $T \in \mathcal{L}(X)$. Diz-se que T é *hiperbólico* se $\sigma(T) \cap \mathbb{T} = \emptyset$

Definição 1.16. Sejam X um espaço de Banach e $T \in GL(X)$. Diz-se que T é um operador *hiperbólico generalizado* se X é escrito como

$$X = M \oplus N,$$

onde M e N são subespaços fechados de X tal que $T(M) \subset M$, $T^{-1}(N) \subset N$ e

$$\sigma(T|_M) \subset \mathbb{D} \quad \text{e} \quad \sigma(T^{-1}|_N) \subset \mathbb{D}.$$

Lema 1.17. *Sejam X um espaço de Banach e $T \in \mathcal{L}(X)$. Se $\sigma(T) \subset \mathbb{D}$, então existem $t \in (0, 1)$ e $c > 0$ tal que*

$$\|T^n\| \leq ct^n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Seja $T \in \mathcal{L}(X)$, com $\sigma(T) \subset \mathbb{D}$. Daí, podemos definir $t = r(T)$ de modo que $t \in (0, 1)$. Por outro lado, como $\|T^n\|^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} t$, podemos definir $c = \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{\|T^n\|}{t^n} > 0$ de maneira que

$$\frac{\|T^n\|}{t^n} \leq c \implies \|T^n\| \leq ct^n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Observação 1.18. É oportuno mencionar que, o conjunto dos operadores hiperbólicos invertíveis está inteiramente contido no conjunto dos operadores hiperbólicos generalizados, mas não é igual. Com efeito, se $T \in GL(X)$ é um operador hiperbólico generalizado e sendo M e N como na definição, quando $T^{-1}|_M \cap N \neq \emptyset$, então T não é hiperbólico. Operadores deste tipo são ditos shift-hiperbólicos.

Definição 1.19. Sejam (M, d) um espaço métrico e $h : M \rightarrow M$ um homeomorfismo. Diz-se que uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ é uma δ -pseudotrajetória de h se

$$d(h(x_n), x_{n+1}) < \delta, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Aqui apresentamos uma das principais definições deste trabalho, a saber, o conceito de sombreamento, e estabeleceremos condições necessárias e suficientes para que um operador em espaços de Banach possua a propriedade de sombreamento.

Definição 1.20. Sejam (M, d) um espaço métrico e $h : M \rightarrow M$ um homeomorfismo. Dizemos que h possui *propriedade de sombreamento* se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de modo que toda δ -pseudotrajetória $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de h é ε -sombreada por uma trajetória real de h . Ou seja, existe $x \in M$ satisfazendo

$$d(x_n, h^n(x)) < \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Além disso, caso exista uma constante $K > 0$ tal que δ pode ser escolhido de modo que $\varepsilon < K\delta$, então dizemos que h possui *propriedade de Lipschitz-sombreamento*.

A Figura abaixo ilustra uma representação esquemática das relações entre as pseudo-órbitas e as trajetórias exatas, conforme estabelecido nas definições anteriores.

Observação 1.21. Ao considerarmos o caso de mapas não-invertíveis em um espaço métrico (M, d) , podemos definir o conceito de *sombreamento positivo*, onde apenas substituiremos o conjunto $\mathbb{Z}$ por $\mathbb{N}_0$ na definição de sombreamento.

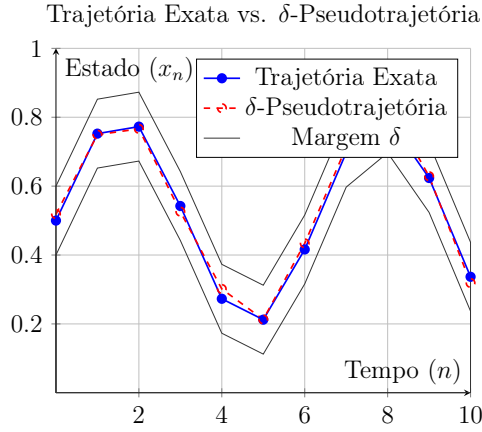


Figura 1.1: Comparação entre uma trajetória exata e uma δ -pseudotrajetória. A região cinza ilustra a margem de erro δ .

Quando lidamos com homeomorfismos lineares, a verificação de que estes possuem sombreamento é simplificada. Com efeito, se a proposição é verificada para um ε_0 , então é válida para qualquer ε . É o que estabelece o próximo resultado.

Proposição 1.22. *Sejam (M, d) um espaço métrico, com d uma métrica homogênea, e $h : M \rightarrow M$ um homeomorfismo linear. Suponha que, para algum $\varepsilon_0 > 0$, existe $\delta_0 > 0$ de modo que para toda δ_0 -pseudotrajetória de T , existe $x \in X$ satisfazendo*

$$d(x_n, h^n(x)) < \varepsilon_0,$$

para cada $n \in \mathbb{Z}$. Então h possui propriedade de sombreamento.

Demonstração. Tome $\varepsilon > 0$ e $(y_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in X$ uma δ -pseudotrajetória de h com $\delta = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \delta_0$. Defina $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in X$ por $x_n = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} y_n$. Então,

$$d(h(y_n), y_{n+1}) < \delta, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Desse modo, pela maneira que definimos $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, da linearidade de h , obtemos

$$d(h(x_n), x_{n+1}) < \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \delta = \delta_0.$$

Logo $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ é uma δ_0 -pseudotrajetória de h e, por hipótese, existe $x \in X$ satisfazendo

$$d(h^n(x), x_n) < \varepsilon_0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Daí, novamente pela linearidade, definindo $y = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} x$, temos

$$d(h^n(y), y_n) = d\left(h^n\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} x\right), y_n\right) < \varepsilon,$$

para cada $n \in \mathbb{Z}$. Portanto, $(y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ é ε -sombreada por uma trajetória real de h . $\square$

O lema a seguir será de grande ajuda para a demonstração de um dos resultados mais importantes deste capítulo, garantindo que pequenas variações induzam correções proporcionais conduzindo, assim, a órbitas aproximadas.

Lema 1.23. *Sejam X um espaço de Banach e $T \in GL(X)$. Então T possui propriedade de sombreadamento se, e somente se, existe uma constante $k > 0$ tal que para toda sequência limitada $(z_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in X$, existe uma sequência $(y_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in X$ tal que*

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}} \|y_n\| \leq k \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|z_n\| \quad e \quad y_{n+1} = Ty_n + z_n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (1.1)$$

Demonstração. Suponha que T possua propriedade de sombreadamento e tomemos $\delta > 0$ a constante associada para $\varepsilon = 1$. Agora, seja $(z_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in X$ uma sequência limitada de modo que $\sup_{n \in \mathbb{Z}} \|z_n\| = L$ e definamos uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de modo que

$$x_{n+1} = Tx_n + \frac{\delta}{L} z_n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Então $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ é δ -pseudotrajetória de T pois, para todo $n \in \mathbb{Z}$, temos

$$\begin{aligned} \|Tx_n - x_{n+1}\| &= \left\| Tx_n - Tx_n + \frac{\delta}{L} z_n \right\| = \left\| \frac{\delta}{L} z_n \right\| \\ \implies \|Tx_n - x_{n+1}\| &\leq \frac{\delta}{L} L = \delta. \end{aligned}$$

Desse modo, como T possui propriedade de sombreadamento, existe $x \in X$ tal que

$$\|x_n - T^n x\| < 1, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Disto e, definindo $y_n = \frac{L}{\delta}(x_n - T^n x)$, temos

$$\|y_n\| = \left\| \frac{L}{\delta}(x_n - T^n x) \right\| \leq \frac{L}{\delta} = k \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|z_n\|$$

com $k = \frac{1}{\delta}$. Com isto, vale a primeira parte de (1.1). Por fim, como $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ é uma δ -pseudotrajetória de T ,

$$y_{n+1} = \frac{L}{\delta}(x_{n+1} - T^{n+1}x) = \frac{L}{\delta} \left(Tx_n + \frac{\delta}{L} z_n - T^{n+1}x \right).$$

Assim,

$$y_{n+1} = T \left(\frac{L}{\delta}(x_n - T^n x) \right) + z_n = Ty_n + z_n$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. Isto conclui a primeira parte da demonstração. Reciprocamente, suponha que para toda sequência limitada $(z_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in X$, exista $(y_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in X$ de modo que vale (1.1). Da Proposição 1.22, é suficiente mostrar apenas para um $\varepsilon > 0$. Considere $\varepsilon = 1$, $\delta = \frac{1}{k}$, com $k > 0$ dado como na hipótese, e $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ uma δ -pseudotrajetória de T . Por (1.1) e definindo a sequência $(z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ por

$$z_n = Tx_n - x_{n+1}.$$

encontramos

$$x_{n+1} - y_{n+1} = T(x_n - y_n).$$

Desse modo,

$$\begin{aligned} x_n - y_n &= T(x_{n-1} - y_{n-1}) \\ &= T(T(x_{n-2} - y_{n-2})) \end{aligned}$$

e, ao repetirmos este processo n -vezes, vemos que

$$x_n - y_n = T^n(x_0 - y_0).$$

Assim,

$$\|x_n - T^n(x_0 - y_0)\| = \|y_n\| \leq k \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|z_n\| \leq k\delta = 1.$$

Portanto, o operador T possui propriedade de sombreamento. $\square$

As próximas definições introduzem o conceito de estabilidade estrutural, crucial para sistemas dinâmicos, em que pequenas perturbações não alteram qualitativamente o seu comportamento. Em seguida, apresentaremos a noção de estabilidade estrutural forte, que frequentemente exige a hipótese de hiperbolicidade e estabelece, assim, uma conexão direta com os conceitos de operadores hiperbólicos discutidos anteriormente.

Definição 1.24. Sejam X um espaço de Banach e $T \in \mathcal{L}(X)$. Dizemos que T é *estruturalmente estável* se existem $\varepsilon > 0$ e $h : X \rightarrow X$ homeomorfismo satisfazendo

$$h \circ (T + \varphi) = T \circ h$$

qualquer que seja $\varphi \in Lip(X)$ com $\|\varphi\|_\infty \leq \varepsilon$ e $Lip(\varphi) \leq \varepsilon$. Ou seja, se h é estruturalmente estável, então uma perturbação Lipschitz suficientemente pequena mantém as propriedades dinâmicas do operador.

Definição 1.25. Sejam X um espaço de Banach e $T \in \mathcal{L}(X)$. Dizemos que T é *fortemente estruturalmente estável* se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para qualquer

$\psi \in Lip(X)$, com $\|\psi\|_\infty \leq \delta$ e $Lip(\psi) \leq \delta$, existe $\varphi : X \rightarrow X$ um homeomorfismo, com $\|\varphi - Id\|_\infty \leq \varepsilon$, tal que

$$T \circ (Id + \varphi) = (Id + \varphi) \circ (T + \psi).$$

Em outras palavras, ao possuir estabilidade estrutural forte, uma perturbação Lipschitz suficientemente pequena mantém suas propriedades dinâmicas a menos de um homeomorfismo próximo à identidade.

Para finalizarmos este capítulo, apresentaremos dois dos resultados mais importantes para a demonstração do resultado principal do Capítulo 3. Os teoremas aqui enunciados mostram que a classe de operadores hiperbólicos é bastante útil no estudo da propriedade de sombreamento. O caso hiperbólico invertível é um resultado clássico da Dinâmica Clássica, tratado em [13] e, posteriormente, estendido para o caso sem a hipótese do operador ser invertível e operadores hiperbólicos generalizados em [3].

Teorema 1.26. *Sejam X um espaço de Banach e $T \in GL(X)$. Se T é hiperbólico, então T possui propriedade de sombreamento.*

Demonstração. Para a demonstração, ver [13, Teorema 1]. □

Teorema 1.27. *Sejam X um espaço de Banach e $T \in \mathcal{L}(X)$. Se T é hiperbólico, não necessariamente invertível, então T possui propriedade de sombreamento.*

Demonstração. Se $T \in \mathcal{L}(X)$ é um operador hiperbólico, então $\sigma(T) \cap \mathbb{T} = \emptyset$ e podemos considerar três casos.

Considere $\sigma(T) \subset \mathbb{D}$ e $T^0 = Id$. Do Lema 1.17, existem $t \in (0, 1)$ e $c \geq 1$ tais que $\|T^n\| \leq ct^n$, para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Dado $\varepsilon > 0$, defina $\delta = \frac{(1-t)\varepsilon}{c}$. Agora, sejam $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ uma δ -pseudotrajetória de T e $y_n = x_n - Tx_{n-1}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Então,

$$x_n = T^n x_0 + \sum_{i=1}^n T^{n-i} y_i,$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $\|y_n\| \leq \delta$, temos

$$\|x_n - T^n x_0\| \leq \sum_{i=1}^n \|T^{n-i} y_i\| \leq \sum_{i=1}^n \|T^{n-i}\| \|y_i\| \leq \sum_{i=1}^n ct^{n-i} \delta \leq \frac{c\delta}{1-t} = \varepsilon,$$

o que nos diz que T é ε -sombreada por uma trajetória real e temos o primeiro caso.

Se $\sigma(T) \subset \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$, então $0 \in \sigma(T)$. Ou seja, T é um operador hiperbólico invertível e, do Teorema 1.26, T possui propriedade de sombreamento.

Por fim, suponha que $\sigma(T) \cap \mathbb{D} \neq \emptyset$ e $\sigma(T) \cap \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}} \neq \emptyset$. Neste caso, defina $\sigma_1 = \sigma(T) \cap \mathbb{D}$ e $\sigma_2 = \sigma(T) \cap \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ de modo que estes formam duas partições não vazias de conjuntos fechados. Do Teorema 1.12, existem subspaços fechados T -invariantes M_1 e M_2 de X tais que

$$X = M_1 \oplus M_2, \quad \sigma(T|_{M_1}) = \sigma_1 \quad \text{e} \quad \sigma(T|_{M_2}) = \sigma_2.$$

Dos casos anteriores, $T|_{M_1}$ e $T|_{M_2}$ possuem propriedade de sombreamento. Provemos que T possui propriedade de sombreamento. Seja $\varepsilon > 0$. Como T restrito a M_1 tem sombreamento, existe δ_1 satisfazendo a definição de sombreamento. Do mesmo modo para T restrito a M_2 , existe δ_2 satisfazendo a propriedade de sombreamento. Sejam P_1 e P_2 as projeções sobre M_1 e M_2 . Note que, se P é uma projeção, vale que

$$P(Tx) = T(Px),$$

pois T é linear. Agora, defina

$$\delta = \min \left\{ \frac{\delta_1}{\|P_1\|}, \frac{\delta_2}{\|P_2\|} \right\}.$$

Daí, seja $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ uma δ -pseudotrajetória de T qualquer. Como P_1 e P_2 são contínuas, é fácil ver que $(P_1 x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ e $(P_2 x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ são δ -pseudotrajetórias de $T|_{M_1}$ e $T|_{M_2}$. De fato,

$$\|P_1 x_{n+1} - T(P_1 x_n)\| = \|P_1 x_{n+1} - P_1(Tx_n)\| \leq \|P_1\| \|x_{n+1} - T(x_n)\| \leq \delta_1,$$

onde tem-se o mesmo para $(P_2 x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$. Então existem trajetórias reais x_1 e x_2 de M_1 e M_2 satisfazendo que

$$\|P_1 x_n - T^n(x_1)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad \|P_2 x_n - T^n(x_2)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Portanto, se $x = x_1 + x_2$, então x será uma trajetória real de T . □

Teorema 1.28. *Sejam X um espaço de Banach e $T \in GL(X)$. Se T é hiperbólico generalizado, então T possui propriedade de sombreamento.*

Demonstração. Seja $T \in GL(X)$ um operador hiperbólico generalizado. Daí, existem $M, N \subset X$ subspaços fechados satisfazendo as condições apresentadas na Definição 1.16. Logo, para cada $x \in X$, existem únicos $x^{(1)} \in M$ e $x^{(2)} \in N$ de maneira que $x = x^{(1)} + x^{(2)}$. Então, pela Proposição 1.7, existem $P_M, P_N \in \mathcal{L}(X)$ projeções que possuem M e N como conjunto imagem, respectivamente. Dessa forma, tomando

$$d = \max\{\|P_M\|, \|P_N\|\},$$

$$\|x_1\| = \|P_M(x)\| \leq \|P_M\|\|x\| \leq d\|x\|$$

Analogamente, tem-se $\|x_2\| \leq d\|x\|$. Da hipótese, temos pelo Lema 1.17 que existem $c > 0$ e $t \in (0, 1)$ tais que

$$\|(T|_M)^n\| \leq ct^n \text{ e } \|(T^{-1}|_N)^n\| \leq ct^n.$$

Agora, seja $(z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ uma sequência limitada em X e, para cada $n \in \mathbb{Z}$, definamos

$$y_n^{(1)} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k z_{n-k-1}^{(1)} \in M, \quad y_n^{(2)} = - \sum_{k=1}^{\infty} T^{-k} z_{n+k-1}^{(2)} \in N$$

e seja,

$$y_n = y_n^{(1)} + y_n^{(2)}.$$

Observe que $(y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ satisfaz a construção enunciada em (1.1), pois

$$y_{n+1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k z_{n-k}^{(1)} - \sum_{k=1}^{\infty} T^{-k} z_{n+k}^{(2)} = T^0 z_n^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} T^k z_{n-k}^{(1)} - \sum_{k=0}^{\infty} T^{-k} z_{n+k}^{(2)} + T^0 z_n^{(2)}.$$

Daí, como T é linear e $z_n = z_n^{(1)} + z_n^{(2)}$, podemos reescrever o lado direito da igualdade como

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= T \left(\sum_{k=1}^{\infty} T^{k-1} z_{n-k}^{(1)} - \sum_{k=0}^{\infty} T^{-k-1} z_{n+k}^{(2)} \right) + z_n \\ &= T \left(\sum_{k=0}^{\infty} T^k z_{n-k-1}^{(1)} - \sum_{k=1}^{\infty} T^{-k} z_{n+k-1}^{(2)} \right) + z_n \\ &= T(y_n^{(1)} + y_n^{(2)}) + z_n \\ &= Ty_n + z_n. \end{aligned}$$

Por fim, basta verificarmos a limitação. Para isto, veja que

$$\|y_n^{(1)}\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|T^k z_{n-k-1}^{(1)}\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|(T|_M)^k\| \|z_{n-k-1}^{(1)}\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} ct^k d \|z_n\| \leq cd \|z_n\| \sum_{k=0}^{\infty} t^k,$$

pois $\|(T|_M)^n\| \leq ct^n$ e $\|z_n^{(1)}\| \leq d\|z_n\|$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. De maneira semelhante, encontramos que

$$\|y_n^{(2)}\| \leq cd \|z_n\| \sum_{k=1}^{\infty} t^k.$$

Portanto, temos

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|y_n\| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} (\|y_n^{(1)}\| + \|y_n^{(2)}\|) \leq c \left(\sum_{k=0}^{\infty} t^k + \sum_{k=1}^{\infty} t^k \right) d \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|z_n\|.$$

Disto e por resultados de séries, obtemos

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|y_n\| \leq \frac{2cd}{1-t} \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|z_n\|.$$

Então, para $k = \frac{2cd}{1-t}$, temos a desigualdade procurada e, pelo Lema 1.23, T possui propriedade de sombreamento. $\square$

Capítulo 2

Shifts com peso e resultados gerais

Neste capítulo são definidos os espaços de Banach empregados ao longo deste trabalho, os quais fornecem a estrutura necessária para a introdução dos shifts com peso, operadores de fundamental relevância na Teoria de Operadores e, em particular, no contexto da Dinâmica Linear. A partir dessas construções, apresenta-se uma caracterização de shifts hiperbólicos, resultado que desempenhará um papel essencial na demonstração do teorema principal do Capítulo 3.

Adicionalmente, são discutidos resultados clássicos da Teoria de Sistemas Dinâmicos, os quais estabelecem que operadores ε -sombreados e fortemente estruturalmente estáveis preservam tais propriedades em seus inversos e em seus operadores conjugados isometricamente.

2.1 Operadores shift com peso e espectro

Definição 2.1. Fixando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, denota-se por $\omega = \mathbb{K}^{\mathbb{Z}}$ o espaço vetorial das sequências bilaterais de números reais ou complexos. Além disso, mesmo que ω não seja um espaço de Banach, este contém importantes subespaços de Banach, dentre eles

$$c_0(\mathbb{Z}) = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} : x_n \in \mathbb{K} \text{ para todo } n \in \mathbb{Z} \text{ e } \lim_{|n| \rightarrow \infty} x_n = 0 \right\}$$

com a norma do supremo

$$\|(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}\|_{\infty} = \sup_{n \in \mathbb{Z}} |x_n|,$$

e fixando $1 \leq p < \infty$, tem-se

$$\ell_p(\mathbb{Z}) = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} : x_n \in \mathbb{K}, \text{ para todo } n \in \mathbb{Z} \text{ e } \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}$$

com a p -norma

$$\|(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}\| = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Definição 2.2. Seja $w = (w_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \omega$ uma sequência de escalares reais. O operador $B_w : \omega \rightarrow \omega$ *backward shift bilateral com peso* é definido por

$$B_w(e_k) = w_k e_{k-1}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Definição 2.3. Seja $w = (w_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \omega$ um peso de escalares reais. O operador $F_w : \omega \rightarrow \omega$ *forward shift bilateral com peso* é definido por

$$F_w(e_k) = w_k e_{k+1}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Observação 2.4. Dizemos que $w = (w_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \omega$ é uma sequência admissível quando B_w for contínuo. É fácil ver que uma sequência w é um peso admissível se, e somente se, é uma sequência limitada. Além disso, se $\inf_{n \in \mathbb{Z}} |w_n| > 0$ e definirmos $w' = \left(\frac{1}{w_n}\right)_{n \in \mathbb{Z}}$, temos que $F_{w'}$ é contínuo e $F_{w'} = B_w^{-1}$.

Proposição 2.5. *Sejam $w = (w_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ um peso admissível e $B_w : \omega \rightarrow \omega$ o backward shift, então*

$$\|B_w^n\| = \sup_{k \in \mathbb{Z}} |w_k \dots w_{k+n-1}|$$

e, caso $\inf_{n \in \mathbb{Z}} |w_n| > 0$,

$$\|B_w^{-n}\| = \sup_{k \in \mathbb{Z}} |w_k \dots w_{k+n-1}|^{-1}.$$

Demonstração. De fato, ao iterarmos uma segunda vez o shift, tem-se

$$B_w^2(e_k) = w_k w_{k-1} e_{k-2}.$$

Repetindo a aplicação n -vezes, vemos

$$B_w^n(e_k) = w_k w_{k-1} \dots w_{k+n-1} e_{k-n}$$

e conclui-se que sua norma será,

$$\|B_w^n\| = \sup_{k \in \mathbb{Z}} \|B_w^n e_k\| = \sup_{k \in \mathbb{Z}} \|w_k w_{k-1} \dots w_{k+n-1} e_{k-n}\| = \sup_{k \in \mathbb{Z}} |w_k w_{k-1} \dots w_{k+n-1}|.$$

Analogamente, prova-se para o inverso. □

O resultado seguinte foi originalmente apresentado no artigo [3], onde o autor o enuncia como uma observação, enunciando-o para o forward shift. No entanto, opta-

mos por adaptá-lo para o backward shift, pois esta formulação se adequa melhor ao nosso contexto e facilita a compreensão do leitor, especialmente em sua aplicação na demonstração do Teorema [3.3](#).

Proposição 2.6. *Sejam $X = \omega$, $w = (w_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ um peso admissível com $\inf_{n \in \mathbb{Z}} |w_n| > 0$ e $B_w : X \rightarrow X$ o backward shift, as seguintes sentenças são equivalentes:*

- (i) B_w é hiperbólico;
- (ii) $\sigma(B_w) \subset \mathbb{D}$ ou $\sigma(B_w^{-1}) \subset \mathbb{D}$;
- (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \in \mathbb{Z}} |w_k \dots w_{k+n-1}|^{\frac{1}{n}} < 1$ ou $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \in \mathbb{Z}} |w_k \dots w_{k+n-1}|^{\frac{1}{n}} > 1$.

Demonstração. $\boxed{(i) \Rightarrow (ii)}$ Se B_w é hiperbólico, então $\sigma(B_w) \cap \mathbb{T} = \emptyset$. Daí, como o espectro do shift B_w é conexo, então para todo $\lambda \in \sigma(B_w)$,

$$|\lambda| < 1 \quad \text{ou} \quad |\lambda| > 1.$$

Se o primeiro caso é válido, então segue que $\sigma(B_w) \subset \mathbb{D}$. Caso contrário, como

$$\sigma(B_w^{-1}) = \{\lambda^{-1} \in \mathbb{C} : \lambda \in \sigma(B_w)\},$$

temos que $\sigma(B_w^{-1}) \subset \mathbb{D}$. Portanto, provamos que (ii) vale.

$\boxed{(ii) \Rightarrow (iii)}$ Suponha que $\sigma(B_w) \subset \mathbb{D}$ ou $\sigma(B_w^{-1}) \subset \mathbb{D}$. Se $\sigma(B_w) \subset \mathbb{D}$, então 1 é cota superior do espectro de B_w e, pela definição de raio espectral, temos que $r(T) < 1$. Ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|B_w^n\|^{\frac{1}{n}} = r(B_w) < 1$$

como $\|B_w^n\| = \sup_{k \in \mathbb{Z}} |w_k \dots w_{k+n-1}|$, então $\sigma(B_w) \subset \mathbb{D}$ satisfaz a primeira desigualdade em (iii). De maneira semelhante, suponha agora que $\sigma(B_w^{-1}) \subset \mathbb{D}$. Daí, temos que

$$\frac{1}{r(B_w^{-1})} = \inf\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(B_w^{-1})\} < 1$$

Desse modo,

$$r(B_w^{-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|B_w^{-n}\|^{\frac{-1}{n}} > 1$$

como $\|B_w^{-n}\| = \sup_{k \in \mathbb{Z}} |w_k \dots w_{k+n-1}|^{-1}$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \in \mathbb{Z}} |w_k \dots w_{k+n-1}|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sup_{k \in \mathbb{Z}} |w_k \dots w_{k+n-1}|^{-1})^{\frac{-1}{n}} > 1$$

donde B_w satisfaz a segunda desigualdade em (iii).

$(iii) \Rightarrow (i)$ Por fim, suponhamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|B_w^n\|^{\frac{1}{n}} < 1$. Daí, pela Proposição 1.14 temos que $r(B_w) < 1$ e consequentemente vale $|\lambda| < 1$, para todo $\lambda \in \sigma(B_w)$. Desse modo, para cada $\lambda \in \sigma(B_w)$, temos que $\lambda \notin \mathbb{B}_w$ e, portanto B_w é hiperbólico. De maneira semelhante, se

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \in \mathbb{Z}} |w_k \dots w_{k+n-1}|^{\frac{1}{n}} > 1$$

temos,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|B_w^{-n}\|^{\frac{-1}{n}} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \in \mathbb{Z}} |w_k \dots w_{k+n-1}|^{\frac{1}{n}} > 1,$$

donde $\frac{1}{r(B_w^{-1})} > 1$. Disto e da Proposição 1.14, vale então que $|\lambda| > 1$ para todo $\lambda \in \sigma(B_w^{-1})$. Portanto, $\sigma(B_w) \cap \mathbb{T} = \emptyset$. $\square$

2.2 Ferramentas para sombreamento e estabilidade estrutural forte

As Proposições 2.7, 2.8, 2.9 e 2.10 constituem resultados clássicos na teoria de propriedade de sombreamento e estabilidade estrutural forte em sistemas dinâmicos. Embora não explicitamente enunciados, esses resultados foram empregados nas demonstrações de teoremas centrais nos trabalhos de [4] e [2], os quais são analisados no Capítulo 3 deste trabalho.

Proposição 2.7. *Sejam X um espaço de Banach e $T \in GL(X)$. Se o operador T possui propriedade de sombreamento, então o operador $S = T^{-1}$ também possui propriedade de sombreamento.*

Demonstração. Tome $\delta > 0$ a constante associada à $\varepsilon = \frac{1}{2}$ da definição de sombreamento para T . Considere agora $(y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ uma δ -pseudotrajetória de S arbitrária. Ou seja,

$$d(S(y_n), y_{n+1}) < \delta, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Daí, definindo uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de modo que $x_n = S(y_{-n})$, temos que

$$d(x_{-n}, Tx_{-(n+1)}) < \delta, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Desse modo, $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ é uma δ -pseudotrajetória de T e, como T possui propriedade de sombreamento, existe $x \in X$ tal que

$$d(x_n, T^n(x)) < \frac{1}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Assim, escrevendo $Tx = y$ de modo que para cada $n \in \mathbb{Z}$,

$$T^n x = T^{n-1} y = T^{-(n+1)} y = S^{-n+1} y$$

então,

$$d(S(y_{-n}), S^{-n+1}(y)) < \frac{1}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

portanto,

$$d(y_{-n+1}, S^{-n+1} y) \leq d(y_{-n+1}, S(y_{-n})) + d(S(y_{-n}), S^{-n+1}(y)) \leq \delta + \frac{1}{2} = 1$$

Logo, qualquer δ -pseudotrajetória $(y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ é ε -sombreada por uma trajetória real. Ou seja, S possui propriedade de sombreamento. $\square$

Proposição 2.8. *Sejam X um espaço de Banach e $T \in GL(X)$. Se o operador T possui estabilidade estrutural forte, então o operador $S = T^{-1}$ também possui estabilidade estrutural forte.*

Demonstração. Seja $T \in GL(X)$ fortemente estruturalmente estável, $\delta_\varepsilon > 0$ correspondente à $\varepsilon > 0$ da definição de estabilidade estrutural forte e definamos

$$\delta = \frac{\delta_\varepsilon}{(\delta_\varepsilon + 1)\|T\|^2} > 0.$$

Daí, tomemos $\beta \in Lip(X)$ de modo que $\|\beta\|_\infty \leq \delta$, $Lip(\beta) \leq \delta$. Escrevendo $S = T^{-1} + \beta$, tem-se que

$$S^{-1} = (T^{-1} + \beta)^{-1} = (Id + T\beta)^{-1} \circ T.$$

Por outro lado,

$$(Id + T\beta)(Id - T\beta + T^2\beta^2 - T^3\beta^3 + \dots) = Id.$$

Logo,

$$S^{-1} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (T\beta)^k \right) \circ T,$$

e podemos definir um homeomorfismo $\alpha = \left(\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (T\beta)^k \right) \circ T$. Daí, das hipóteses sobre β , temos

$$Lip(\alpha) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|T\|^{k+1} Lip(\beta)^k = \|T\|^2 Lip(\beta) \sum_{k=0}^{\infty} \|T\|^k Lip(\beta)^k,$$

ou seja,

$$\text{Lip}(\alpha) \leq \frac{\|T\|^2 \text{Lip}(\beta)}{1 - \|T\| \text{Lip}(\beta)} = \delta_\varepsilon.$$

Além disso, com argumentos semelhantes, temos $\|\alpha\|_\infty \leq \delta_\varepsilon$. Portanto, como T é fortemente estruturalmente estável, existe um homeomorfismo $h : X \rightarrow X$ tal que

$$h \circ (T + \alpha) = T \circ h$$

com $\|h\|_\infty \leq \varepsilon$. Assim,

$$T^{-1} \circ h = h \circ S = h \circ (T^{-1} + \beta),$$

concluindo a demonstração. □

Proposição 2.9. *Sejam X um espaço de Banach e $T, S \in GL(X)$. Se o operador T é conjugado isometricamente à S e possui propriedade de sombreamento, então S também possui propriedade de sombreamento.*

Demonstração. Suponha que T possua propriedade de sombreamento e mostremos que S também poossuirá. Inicialmente, seja $\delta > 0$ correspondente à $\varepsilon > 0$. Agora, tome $(y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ uma δ -pseudotrajetória de S e definamos $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ uma sequência dada por $x_n = h(y_n)$. Daí,

$$\|x_n - T(x_{n+1})\| = \|h^{-1}(x_n) - h^{-1}(T(x_{n+1}))\| = \|y_n - S(y_{n+1})\| < \delta.$$

Logo, $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ é uma δ -pseudotrajetória de T e, como T possui propriedade de sombreamento, existe $x \in X$ tal que

$$\|x_n - T^n(x)\| < \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Portanto, definindo $y = h^{-1}(x)$, concluímos que

$$\|y_n - S^n(y)\| = \|h(y_n) - h(S^n(y))\| = \|x_n - T^n(x)\| < \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

concluindo a demonstração. □

Proposição 2.10. *Sejam X um espaço de Banach e $T, S \in GL(X)$. Se o operador T é conjugado isometricamente à S e possui estabilidade estrutural forte, então S também possui estabilidade estrutural forte.*

Demonstração. Se $T, S \in GL(X)$ são conjugados isometricamente, então existe um

homeomorfismo $h : X \rightarrow X$ de modo que

$$T \circ h = h \circ S,$$

com $\|h(x) - h(y)\| = \|x - y\|$, para todo $x, y \in X$. Como T possui estabilidade estrutural forte, fixemos $1 > \varepsilon > 0$ de modo que exista $\delta > 0$ com respeito a este ε . Agora, tome $\beta \in Lip(X)$, com $\|\beta\|_\infty \leq \delta$ e $Lip(\beta) \leq \delta$, e mostremos que existe um homeomorfismo $\psi : X \rightarrow X$ tal que

$$S \circ \psi = \psi \circ (S + \beta),$$

com $\|\psi\|_\infty \leq \varepsilon$. De fato, definindo $\alpha = h \circ \beta \circ h^{-1}$, das hipóteses sobre β e como $h : X \rightarrow X$ é uma isometria, segue que

$$\|\alpha\|_\infty = \|h \circ \beta \circ h^{-1}\|_\infty = \|\beta \circ h^{-1}\|_\infty \leq \|\beta\|_\infty \leq \delta$$

e $Lip(\alpha) = Lip(\beta) \leq \delta$. Portanto, existe um homeomorfismo $\phi : X \rightarrow X$ tal que

$$T \circ \phi = \phi \circ (T + \alpha)$$

com $\|\phi\|_\infty \leq \varepsilon$. Daí,

$$T \circ \phi = (h \circ S \circ h^{-1}) \circ \phi = (h \circ S) \circ (h^{-1} \circ \phi)$$

por outro lado,

$$\phi \circ (T + \alpha) = \phi \circ (h \circ S \circ h^{-1} + h \circ \beta \circ h^{-1}) = \phi \circ h \circ (S + \beta) \circ h^{-1},$$

assim,

$$(h \circ S) \circ (h^{-1} \circ \phi) = \phi \circ h \circ (S + \beta) \circ h^{-1} \implies S \circ \psi = \psi \circ (S + \beta)$$

com $\psi = h^{-1} \circ \phi \circ h$. Por fim, para verificarmos que $\|\psi\|_\infty \leq \varepsilon$, utilizaremos $\|\phi\|_\infty \leq \varepsilon$ e novamente que h é isometria, teremos que,

$$\|\psi\|_\infty \leq \|h^{-1} \circ \phi \circ h\|_\infty = \|\phi \circ h\|_\infty \leq \|\phi\|_\infty < \varepsilon$$

satisfazendo as condições buscadas e concluindo a demonstração. $\square$

Capítulo 3

Sombreamento e estabilidade estrutural forte para shifts

Neste último capítulo, fixando $X = c_0(\mathbb{Z})$ ou $\ell_p(\mathbb{Z})$ com $1 \leq p < \infty$, caracterizaremos inicialmente os operadores shift nestes espaços que satisfazem a propriedade de sombreamento. Como resultado principal da Seção 2, demonstraremos que essa mesma caracterização se estende a operadores com estabilidade estrutural forte, estabelecendo assim uma conexão fundamental entre essas duas classes de operadores.

3.1 Propriedade de sombreamento para shifts

No início desta seção, iremos mostrar dois lemas que nos auxiliarão a demonstrar o Teorema [3.3](#).

Lema 3.1. *Seja $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \omega$ uma sequência limitada de escalares reais. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k x_{k+1} \cdots x_{k+n}|^{\frac{1}{n}} < 1$;
- (ii) $\sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k x_{k+1} \cdots x_{k+n-1}| < 1$, para algum $n \in \mathbb{N}$;
- (iii) $\sup_{k \in \mathbb{N}} \sum_{n=0}^{\infty} |x_k x_{k+1} \cdots x_{k+n}| < \infty$;
- (iv) $\sup_{k \in \mathbb{N}} \sum_{n=0}^{k-1} |x_k x_{k-1} \cdots x_{k-n}| < \infty$.

Demonstração. $\boxed{(i) \Rightarrow (ii)}$ Por permanência de sinal, temos que esta implicação é válida.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Inicialmente, denotaremos $c = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k x_{k+1} \cdots x_{k+n_0-1}|$, onde n_0 é um valor natural que satisfaz a hipótese. Agora, como $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é limitada então $\sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k| \leq L$, para algum $L > 0$. Definamos

$$M = \sum_{i=0}^{n_0-1} L^i,$$

donde, fixando $k \in \mathbb{N}$, podemos decompor a série como

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_k x_{k+1} \cdots x_{k+n}| = \sum_{n=0}^{n_0-2} |x_k x_{k+1} \cdots x_{k+n}| + \sum_{n=n_0-1}^{2n_0-2} |x_k x_{k+1} \cdots x_{k+n}| + \dots$$

Analisando cada somatório, teremos uma desigualdade da forma

$$\sum_{n=0}^{n_0-2} |x_k x_{k+1} \cdots x_{k+n}| = |x_k| + \dots + |x_k \cdots x_{k+n_0-2}| \leq 1 + L + \dots + L^{n_0-1} = M$$

e para o segundo termo obteremos,

$$\begin{aligned} \sum_{n=n_0-1}^{2n_0-2} |x_k x_{k+1} \cdots x_{k+n}| &= |x_k \cdots x_{k+n_0-1}| + |x_k \cdots x_{k+n_0}| + \dots + |x_k \cdots x_{k+2n_0-2}| \\ &\leq c + cL + \dots + cL^{n_0-1} = cM \end{aligned}$$

e em cada somatório subsequente, teremos um bloco de n_0 elementos multiplicando a mais do que o somatório anterior. Em outras palavras,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_k x_{k+1} \cdots x_{k+n}| \leq \sum_{n=0}^{\infty} c^n M.$$

Como $c < 1$, então esta é uma série geométrica convergente e, do critério da comparação, segue o resultado.

$(ii) \Rightarrow (iv)$ Iremos assumir novamente c, L, M como anteriormente. Note que os termos do somatório se comportam da forma

$$\sum_{n=0}^{k-1} |x_k x_{k-1} \cdots x_{k-n}| = |x_k| + |x_k x_{k-1}| + \dots + |x_k x_{k-1} \cdots x_1|.$$

Observe que, pela forma como definimos M , a soma até o n_0 -ésimo termo será limitada por M . Basta tratar o somatório iniciando do (n_0-1) -ésimo termo. Para isto, considere $j \in \mathbb{N}$ o maior valor de modo que $j n_0 \leq k$. Daí,

$$\sum_{n=n_0-1}^{k-1} |x_k \cdots x_{k-n}| = |x_k \cdots x_{jn_0} \cdots x_{k-(n_0-1)}| + \dots + |x_k \cdots x_{n_0}| + \dots + |x_k \cdots x_1|.$$

Como $c = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k x_{k+1} \cdots x_{k+n_0-1}|$, então temos no máximo j blocos limitados pelo valor c no último termo da série. Porém, como $jn_0 \leq k$, temos que este, no máximo, será limitado por $L^{n_0-1}c^j$. De maneira análoga, sempre que o produtório finaliza sua sequência em x_i , com $1 \leq i \leq n_0$, este termo será limitado por no máximo $L^{n_0-i}c^j$. Recursivamente, temos que a cada bloco finalizando em $tn_0 < tn_0 + i \leq (t+1)n_0$ com $t < j$, este será limitado por no máximo $L^{n_0-i}c^{j-t}$. Assim,

$$\sum_{n=n_0-1}^{k-1} |x_k \cdots x_{k-n}| \leq (1 + L + L^2 + \dots + L^{n_0-1})c + \dots + (1 + L + L^2 + \dots + L^{n_0-1})c^j.$$

Por fim, tem-se

$$\sum_{n=n_0-1}^{k-1} |x_k \cdots x_{k-n}| \leq M \sum_{j=0}^{\infty} c^j.$$

Novamente do fato que $c < 1$, esta é uma série geométrica convergente e, portanto, limitada.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Seja $K > 0$ tal que $R_k = \sum_{n=0}^{\infty} |x_k \cdots x_{k+n}| \leq K$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Agora, também teremos que

$$R_k = |x_k|(1 + |x_{k+1}| + |x_{k+1}x_{k+2}| + \dots) = |x_k| \left(1 + \sum_{n=0}^{\infty} |x_{k+1} \cdots x_{k+n+1}| \right)$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Desse modo, obtemos que $|x_k| = \frac{R_k}{1 + R_{k+1}}$ para cada k natural e portanto por uma simples permutação de ordem,

$$|x_k x_{k+1} \cdots x_{k+n}| = \frac{R_k}{(1 + R_{k+n+1})} \frac{R_{k+1}}{(1 + R_{k+2})} \cdots \frac{R_{k+n}}{(1 + R_{k+n+1})}.$$

Daí, temos da limitação $|x_k x_{k+1} \cdots x_{k+n}| \leq K \cdot \left(\frac{K}{1 + K} \right)^n$. Logo, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k x_{k+1} \cdots x_{k+n}|^{\frac{1}{n}} < 1,$$

como queríamos.

(iv) $\Rightarrow$ (i) Análogo à construção anterior, apenas alterando a série infinita para uma série finita de qualquer que seja $k \in \mathbb{N}$. Assim temos a demonstração do lema

apresentado. □

O seguinte resultado foi obtido como parte da demonstração do Teorema [3.3](#) em [\[4\]](#). Para maior clareza expositiva, resolvemos apresentar o mesmo separadamente com demonstração completa antes de prosseguir com a prova principal.

Lema 3.2. *Sejam $w = (w_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ uma sequência admissível e $B_w : X \rightarrow X$ o shift com peso. Suponha que*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \in \mathbb{N}} |w_{-k} w_{-k-1} \cdots w_{-k-n}|^{\frac{1}{n}} > 1 \quad e \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \in \mathbb{N}} |w_k w_{k+1} \cdots w_{k+n}|^{\frac{1}{n}} < 1.$$

Então B_w não possui propriedade de sombreamento.

Demonstração. Suponha que B_w possua propriedade de sombreamento. Deste modo, tomemos $\delta > 0$ que corresponde à $\varepsilon = 1$ da definição de sombreamento. Vamos construir uma δ -pseudotrajetória de B_w do seguinte modo:

$$y_0 = e_0, \quad y_n = B_w(y_{n-1}) + \delta e_0 \quad \text{para } n \geq 1, \quad y_n = B_w^{-1}(y_{n+1} + \delta e_0) \quad \text{para } n \leq -1.$$

Agora, para cada $n \in \mathbb{N}$, escrevemos

$$\begin{aligned} y_n &= B_w(B_w(y_{n-2}) + \delta e_0) + \delta e_0 \\ &= B_w^2(B_w(y_{n-3}) + \delta e_0) + \delta w_0 e_{-1} + \delta e_0 \\ &= B_w^3(B_w(y_{n-4}) + \delta e_0) + \delta w_0 w_{-1} e_{-2} + \delta w_0 e_{-1} + \delta e_0 \\ &\vdots \\ &= w_0 \cdots w_{-n+1} e_{-n} + \cdots + \delta w_0 e_{-1} + \delta e_0 \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} y_{-n} &= B_w^{-1}(B_w^{-1}(y_{n+2} + \delta e_0)) + B_w^{-1}(\delta e_0) \\ &= B_w^{-2}(B_w^{-1}(y_{n+3} + \delta e_0)) + B_w^{-2}(\delta e_0) + \frac{\delta}{w_1} e_1 \\ &= B_w^{-3}(B_w^{-1}(y_{n+4} + \delta e_0)) + B_w^{-3}(\delta e_0) + \frac{\delta}{w_1 w_2} e_2 + \frac{\delta}{w_1} e_1 \\ &\vdots \\ &= \frac{\delta + 1}{w_1 \cdots w_n} e_n + \cdots + \frac{\delta}{w_1 w_2} e_2 + \frac{\delta}{w_1} e_1. \end{aligned}$$

Donde, por B_w possuir propriedade de sombreamento, existe $b = (b_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ tal que

$$\|y_n - B_w^n(b)\| < 1, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}. \quad (3.1)$$

Agora, para cada $k \geq 1$ e cada $n \geq 0$, observemos que a $(-k-(n+1))$ -ésima coordenada de $B_w^{n+1}(b)$ é dada por $w_{-k-n} \cdots w_{-k-1} w_{-k} b_{-k}$ e, por (3.1),

$$\|y_{n+1} - B_w^{n+1}(b)\| < 1.$$

Porém, a $(-k-(n+1))$ -ésima coordenada de y_{n+1} é nula para todo $k \geq 1$. Ou seja,

$$|w_{-k-n} \cdots w_{-k-1} w_{-k} b_{-k}| < 1.$$

Assim, temos que $b_{-k} = 0$, pois, caso contrário,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \in \mathbb{N}} |w_{-k-n} \cdots w_{-k-1} w_{-k}|^{\frac{1}{n}} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \in \mathbb{N}} |w_{-k-n} \cdots w_{-k-1} w_{-k}|^{\frac{1}{n}} |b_{-k}|^{\frac{1}{n}} \leq 1,$$

o que negaria uma das hipóteses. De maneira equivalente, para cada $k \geq 1$ e $n \geq 0$, a coordenada $(k+(n+1))$ de $B_w^{-(n+1)}(b)$ é dada por $(w_k w_{k+1} \cdots w_{k+n})^{-1} b_k$ e,

$$\|y_{-(n+1)} - B_w^{-(n+1)}(b)\| < 1.$$

Como a $(k+(n+1))$ -ésima coordenada de y_{n+1} é nula para todo $k \geq 1$, temos

$$\left| \frac{1}{w_k w_{k+1} \cdots w_{k+n}} b_k \right| < 1.$$

Portanto, caso $b_k \neq 0$, teríamos que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \in \mathbb{N}} \left| \frac{1}{w_k w_{k+1} \cdots w_{k+n}} b_k \right|^{\frac{1}{n}} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \in \mathbb{N}} \left| \frac{1}{w_k w_{k+1} \cdots w_{k+n}} \right|^{\frac{1}{n}} |b_k|^{\frac{1}{n}} \leq 1$$

ou seja,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \in \mathbb{N}} \left| \frac{1}{w_k w_{k+1} \cdots w_{k+n}} \right|^{\frac{1}{n}} \leq 1.$$

Então, teremos que $b = b_0 e_0$, o que contradiz (3.1). De fato, se $X = \ell_p(\mathbb{Z})$, para cada $n \in \mathbb{N}$, a desigualdade em (3.1) diz que

$$\begin{aligned} \|y_n - B^n(b_0 e_0)\|_p^p &= \sum_{k=0}^{\infty} |y_k - w_k \cdots w_{k-n+1} b_k|^p \\ &= (1 - b_0)^p |w_0 \cdots w_{-n+1}|^p + \delta^p |w_0 \cdots w_{-n}|^p + \cdots + \delta^p |w_0|^p + \delta^p \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} |1 - b_0|^p |w_0 \cdots w_{-n+1}|^p &< 1 \\ \implies (1 - b_0) |w_0| |w_{-1} \cdots w_{-n+1}| &< 1 \end{aligned}$$

e extraíndo a n -ésima raiz desta desigualdade,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |w_1 \cdots w_{-n+1}|^{\frac{1}{n}} |w_{-n} w_{-n-1}|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} |w_{-1} \cdots w_{-n+1}|^{\frac{1}{n}} \leq 1$$

portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \in \mathbb{N}} |w_k \cdots w_{-n-k}|^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |w_1 \cdots w_{-n-1}|^{\frac{1}{n}} \leq 1$$

negando uma das hipóteses. Além disso,

$$\|y_{-n} - B_w^{-n}(b)\|_p^p = \sum_{k=0}^{\infty} \left| y_{-k} - \frac{b_k}{w_{k+1} \cdots w_{k+n}} \right|^p$$

ou seja,

$$\begin{aligned} 1 &> \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{\delta + 1}{w_1 \cdots w_k} e_k + \cdots + \frac{\delta}{w_1} e_1 - \frac{b_k}{w_{k+1} \cdots w_{k+n}} \right|^p \\ &= \frac{|\delta + 1 - b_0|^p}{|w_1 \cdots w_n|^p} + \cdots + \frac{\delta^p}{|w_1|^p}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{|\delta + 1 - b_0|^p}{|w_1 \cdots w_n|^p} < 1 \implies |\delta + 1 - b_0| < |w_1 \cdots w_n|$$

que extraíndo a n -ésima raiz desta desigualdade e fazendo $n \rightarrow \infty$,

$$1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |w_1 \cdots w_n|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} |w_1 \cdots w_n|^{\frac{1}{n}} |w_{1+n}|^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \in \mathbb{N}} |w_k \cdots w_{k+n}|^{\frac{1}{n}}$$

negando uma das hipóteses sob o peso. Logo, se $X = \ell_p(\mathbb{Z})$, temos que B_w não possui propriedade de sombreamento. Agora, basta provarmos o mesmo em $c_0(\mathbb{Z})$. De maneira semelhante a anterior, veja que

$$1 > \|y_n - B^n(b_0 e_0)\|_{\infty} = \sup_{k \in \mathbb{N}} |y_k - w_k \cdots w_{k-n+1} b_k|,$$

logo, na n -ésima coordenada, tem-se

$$(1 - b_0) |w_0| |w_{-1} \cdots w_{-n+1}| \leq 1$$

e sua n -ésima raiz, quando $n \rightarrow \infty$, nos diz que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |w_1 \cdots w_{-n-1}|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} |w_1 \cdots w_{-n+1}|^{\frac{1}{n}} |w_{-n} w_{-n-1}|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} |w_{-1} \cdots w_{-n+1}|^{\frac{1}{n}} \leq 1$$

ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \in \mathbb{N}} |w_k \cdots w_{-n-k}|^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |w_1 \cdots w_{-n-1}|^{\frac{1}{n}} \leq 1$$

negando assim uma das hipóteses. Além disso,

$$1 > \|y_{-n} - B_w^{-n}(b)\|_{\infty} = \sup_{k \in \mathbb{N}} \left| y_{-k} - \frac{b_k}{w_{k+1} \cdots w_{k+n}} \right|$$

Portanto,

$$\frac{|\delta + 1 - b_0|}{|w_1 \cdots w_n|} < 1 \implies |\delta + 1 - b_0| < |w_1 \cdots w_n|$$

e como no caso em $\ell_p(\mathbb{Z})$,

$$1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \in \mathbb{N}} |w_k \cdots w_{k+n}|^{\frac{1}{n}}$$

mostrando que não vale uma hipótese dada e concluindo que B_w não possui propriedade de sombreamento. Logo, segue o resultado. $\square$

Conforme estabelecido em [4], o resultado que se segue fornece uma caracterização fundamental para a classe dos shifts hiperbólicos na teoria de Dinâmica Linear. Este teorema não apenas demonstra a importância desses operadores, como também revela propriedades essenciais que enriquecem nosso entendimento teórico.

Teorema 3.3. *Sejam $(w_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \omega$ um peso admissível com $\inf_{k \in \mathbb{Z}} |w_k| > 0$ e $B_w : X \rightarrow X$ o shift com peso. Então, B_w possui propriedade de sombreamento se, e somente se, uma das seguintes condições é válida:*

- (A) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \in \mathbb{Z}} |w_k w_{k+1} \cdots w_{k+n}|^{\frac{1}{n}} < 1$;
- (B) $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \in \mathbb{Z}} |w_k w_{k+1} \cdots w_{k+n-1}|^{\frac{1}{n}} > 1$;
- (C) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \in \mathbb{N}} |w_{-k} w_{-k-1} \cdots w_{-k-n}|^{\frac{1}{n}} < 1$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \in \mathbb{N}} |w_k w_{k+1} \cdots w_{k+n}|^{\frac{1}{n}} > 1$.

Demonstração. Provaremos que se (A), (B) ou (C) vale, então B_w possui propriedade de sombreamento. Se (A) ou (B) vale, temos pela Proposição 2.6 que B_w é um operador hiperbólico, o que implica em sombreamento via Teorema 1.27. Agora, resta provarmos que (C) implica que B_w possui propriedade de sombreamento. Suponha que (C) vale. Daí, considere os subespaços fechados $M, N \subset X$ definidos por

$$M = \{(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}; x_n = 0 \text{ para todo } n > 0\}$$

e

$$N = \{(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}; x_n = 0 \text{ para todo } n \leq 0\}.$$

Então $X = M \oplus N$, $B_w(M) \subset M$ e $B_w^{-1}(N) \subset N$. Agora, da Proposição 2.5 e da definição de M , opara cada $n \in \mathbb{N}$ temos

$$\|(B_w|_M)^n\| = \sup_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} |w_{-k} w_{-k-1} \cdots w_{-k-(n-1)}|.$$

De maneira semelhante, para o subespaço N , encontramos

$$\|(B_w^{-1}|_N)^n\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |w_{k+1} w_{k+2} \cdots w_{k+n}|.$$

Desse modo, como (C) vale, da Proposição 2.6 temos

$$\sigma(B_w|_M) \subset \mathbb{D} \text{ e } \sigma(B_w^{-1}|_N) \subset \mathbb{D}.$$

Portanto, pelo Teorema 1.28, B_w possui propriedade de sombreamento.

Reciprocamente, suponha que B_w possui propriedade de sombreamento e provemos que vale (A), (B) ou (C). Para isto, mostraremos :

Afirmção. Se B_w possui propriedade de sombreamento, então uma das condições abaixo é verdadeira:

$$(D_1) \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \in \mathbb{N}} |w_k w_{k+1} \cdots w_{k+n}|^{\frac{1}{n}} < 1;$$

$$(D_2) \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \in \mathbb{N}} |w_k w_{k+1} \cdots w_{k+n}|^{\frac{1}{n}} > 1.$$

De fato, suponha que (D_1) é falso. Agora, seja $\delta > 0$ uma constante associada à $\varepsilon = 1$ que provém da definição de sombreamento. Como (D_1) é falso, pelo Lema 3.1, segue então que o item (iii) deste resultado é falso. Assim, existe $t \in \mathbb{N}$ e $m_0 \in \mathbb{N}$ de modo que

$$\sum_{n=0}^{m_0} |w_t w_{t+1} \cdots w_{t+n}| \geq \frac{1 + \delta}{\delta^2}. \quad (3.2)$$

Agora, dado $m > m_0$, definamos uma δ -pseudotrajetória $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de B_w por

$$x_0 = e^{i\theta_0} e_{t+m}, \quad x_k = B_w(x_{k-1}) + \delta e^{i\theta_k} e_{t+m-k},$$

com $k = 1, \dots, m$. Por fim, para todo $n \geq m + 1$, escrevemos

$$x_n = B_w(x_{n-1}),$$

onde $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_m$ são ângulos tomados de modo que

$$e^{i\theta_k} w_t w_{t+1} \cdots w_{t+m-k} = |w_t w_{t+1} \cdots w_{t+m-k}| \quad (3.3)$$

para cada $0 \leq k \leq m$. Desse modo, como B_w possui propriedade de sombreamento, existe $a = (a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ tal que

$$\|x_n - B_w^n(a)\| < 1, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (3.4)$$

Daí, ao observarmos a $(t-1)$ -ésima coordenada de $x_m + 1$, sabendo-se que $x_{m+1} = B_w(x_m)$ e da forma que a δ -pseudotrajetória $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ está definida, podemos reescrever $x_{m+1} = B_w(x_m)$ como

$$\begin{aligned} x_{m+1} &= B_w(B_w(x_{m-1}) + \delta e^{i\theta_m} e_t) \\ &= B_w^2(x_{m-1}) + \delta e^{i\theta_m} w_t e_{t-1} \\ &= B_w^2(B_w(x_{m-2}) + \delta e^{i\theta_{m-1}} e_{t+1}) + \delta e^{i\theta_m} w_t e_{t-1} \\ &= B_w^3(x_{m-2}) + \delta e^{i\theta_{m-2}} w_{t+1} w_t e_{t-1} + \delta e^{i\theta_m} w_t e_{t-1} \end{aligned}$$

onde, quando este cálculo é feito n -vezes, concluimos que a $(t-1)$ -ésima coordenada será dada por

$$e^{i\theta_0} w_t \cdots w_{t+m} + \delta(e^{i\theta_1} w_t \cdots w_{t+m-1} + \cdots + e^{i\theta_{m-1}} w_{t+1} w_t + e^{i\theta_m} w_t),$$

o que por (3.3), pode-se reescrever como

$$|w_t \cdots w_{t+m}| + \delta(|w_t \cdots w_{t+m-1}| + \cdots + |w_{t+1} w_t| + |w_t|).$$

Agora, escrevendo $a_{t+m} = e^{i\theta_0} + \gamma$, como B_w possui propriedade de sombreamento e tomando $n = 0$, vemos que

$$\|e^{i\theta_0} e_{t+m} - a\| = \|x_0 - B^0(a)\| < 1,$$

ou seja,

$$|\gamma| = |-\gamma| = |e^{i\theta_0} - e^{i\theta_0} - \gamma| = |e^{i\theta_0} - a_{t+m}| < 1. \quad (3.5)$$

Agora, calculando a $(t-1)$ -ésima coordenada de $B_w^{m+1}(a)$, sabendo que $a = \sum_{t=-\infty}^{+\infty} a_t e_t$, temos

$$B_w(a) = B_w\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e_k\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k B_w(e_k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k w_k e_{k-1}.$$

Assim, na $(m+1)$ -ésima iteração, encontramos

$$B_w^{m+1}(a) = B_w^{m+1}\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e_k\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k B_w^{m+1}(e_k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k w_k \cdots w_{k-m} e_{k-(m+1)}.$$

Desse modo, fazendo $t = k - m$ e utilizando a definição de a_{t+m} , a $(t - 1)$ -ésima coordenada é dada por

$$(e^{i\theta_0} + \gamma)w_{t+m}w_{t+m-1} \cdots w_t.$$

Disto e por (3.4), para $n = m + 1$, obtemos que

$$|\delta(|w_t \cdots w_{t+m-1}| + \cdots + |w_{t+1}w_t| + |w_t|) - w_{t+m}w_{t+m-1} \cdots w_t \gamma| < 1. \quad (3.6)$$

Assim,

$$\begin{aligned} |w_{t+m}w_{t+m-1} \cdots w_t| &= \left| \frac{\delta}{\gamma}(|w_t \cdots w_{t+m-1}| + \cdots + |w_t|) + w_{t+m}w_{t+m-1} \cdots w_t \right. \\ &\quad \left. - \frac{\delta}{\gamma}(|w_t \cdots w_{t+m-1}| + \cdots + |w_t|) \right| \\ &\geq \frac{\delta}{|\gamma|}(|w_t \cdots w_{t+m-1}| + \cdots + |w_t|) - \left| -\frac{1}{\gamma}(\delta(|w_t \cdots w_{t+m-1}| \right. \\ &\quad \left. + \cdots + |w_t|)) + w_{t+m}w_{t+m-1} \cdots w_t \right| \\ &= \frac{\delta}{|\gamma|} \sum_{k=0}^m |w_{t+m}w_{t+m-1} \cdots w_t| - \frac{1}{|\gamma|} |(\delta(|w_t \cdots w_{t+m-1}| + \cdots \\ &\quad + |w_t| - \gamma w_{t+m}w_{t+m-1} \cdots w_t))| \end{aligned}$$

Daí, por (3.2), (3.6) e como $|\gamma| < 1$, obtemos

$$|w_{t+m}w_{t+m-1} \cdots w_t| > \frac{1}{|\gamma|} \left(\delta \frac{(1 + \delta)}{\delta^2} - 1 \right) > \frac{1}{\delta}.$$

Disto e novamente por (3.4), vemos que

$$\begin{aligned} \delta(|w_t \cdots w_{t+m-1}| + \cdots + |w_t|) &= |w_{t+m}w_{t+m-1} \cdots w_t \gamma + \delta(|w_t \cdots w_{t+m-1}| + \cdots \\ &\quad + |w_t|) - w_{t+m}w_{t+m-1} \cdots w_t \gamma| \\ &\leq |w_{t+m}w_{t+m-1} \cdots w_t| |\gamma| + |\delta(|w_t \cdots w_{t+m-1}| + \\ &\quad \cdots + |w_t|) - w_{t+m}w_{t+m-1} \cdots w_t \gamma| \\ &< |w_{t+m}w_{t+m-1} \cdots w_t| |\gamma| + 1. \end{aligned}$$

Agora, dividindo ambos os lados da desigualdade por $|w_{t+m}w_{t+m-1} \cdots w_t| \delta$, encontramos que

$$\sum_{n=0}^{m-1} \frac{1}{w_{t+m} \cdots w_{t+m-n}} < \frac{1}{\delta} + \frac{1}{|w_{t+m}w_{t+m-1} \cdots w_t| \delta} < \frac{1}{\delta} + 1.$$

Ou seja, como isto vale para todo $m > m_0$, temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{w_{t+m} \cdots w_{t+m-n}} < \frac{1}{\delta} + 1.$$

Por fim, tomando $k = t + m - n$ de maneira que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{w_{k+n} \cdots w_k} < \frac{1}{\delta} + 1,$$

teremos,

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{w_{k+n} \cdots w_k} \leq \frac{1}{\delta} + 1.$$

Daí, pelo Lema 3.1 e assumindo $x_k = \frac{1}{w_k}$, obtemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{w_{k+n} \cdots w_k} \right)^{\frac{1}{n}} < 1.$$

Assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \in \mathbb{N}} |w_{k+n} \cdots w_k|^{\frac{1}{n}} > 1.$$

E, portanto, vale (D_2) . Isto completa a prova da afirmação.

Agora, como B_w possui propriedade de sombreamento, pela Proposição 2.7, também possuirá propriedade de sombreamento o seu operador inverso, ou seja, o shift para frente com peso dado por

$$F_{w'} : (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in X \mapsto (w'_{n-1} x_{n-1})_{n \in \mathbb{Z}} \in X$$

com $w'_n = \frac{1}{w_{n+1}}$, para cada $n \in \mathbb{Z}$. Ao definirmos o isomorfismo isométrico

$$\phi : (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in X \mapsto (x_{-n})_{n \in \mathbb{Z}} \in X,$$

vemos que este estabelece uma conjugação entre $F_{w'}$ e $B_{w''}$, onde $w''_n = w'_{-n} = \frac{1}{w_{-n+1}}$, para cada $n \in \mathbb{Z}$. De fato, podemos reescrever a composição $\phi \circ F_{w'}$ de modo que

$$(\phi \circ F_{w'})(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} = \phi(F_{w'}(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}) = \phi(w'_{n-1} x_{n-1})_{n \in \mathbb{Z}} = (w'_{n-1} x_{-n+1})_{n \in \mathbb{Z}}.$$

Por outro lado, ao calcularmos a composição $B_{w''} \circ \phi$, obtemos

$$(B_{w''} \circ \phi)(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} = B_{w''}(x_{-n})_{n \in \mathbb{Z}} = (w''_{-n+1} x_{-n+1})_{n \in \mathbb{Z}}.$$

onde $w''_{n+1} = w'_{n-1}$. Logo, segue a conjugação entre $F_{w'}$ e $B_{w''}$. Afirmamos que $B_{w''}$ também possuirá propriedade de sombreamento, via Proposição 2.9, e vale (D_1) ou (D_2) . Reescrevendo (D_1) para $B_{w''}$, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \in \mathbb{N}} |w''_k w''_{k+1} \cdots w''_{k+n}|^{\frac{1}{n}} < 1.$$

Substituindo o peso w''_k como foi definido, encontramos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{|w_{-k} w_{-k-1} \cdots w_{-k-n}|^{\frac{1}{n}}} < 1.$$

Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \in \mathbb{N}} |w_{-k} w_{-k-1} \cdots w_{-k-n}|^{\frac{1}{n}} > 1. \quad (3.7)$$

Analogamente, para o outro caso obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \in \mathbb{N}} |w_{-k} w_{-k-1} \cdots w_{-k-n}|^{\frac{1}{n}} < 1. \quad (3.8)$$

Portanto, observe que teremos quatro casos: se $(D1)$ e (3.8) são válidos simultaneamente, obtemos a condição dada em (A) . Se $(D2)$ e (3.7) acontecem, recaímos no caso (B) . Por fim, para a condição (C) , basta que $(D2)$ e (3.8) aconteçam. A combinação restante, que seria $(D1)$ e (3.7) não acontecerá pois pelo Lema 3.2, B_w não possuiria propriedade de sombreamento e completamos assim a demonstração do teorema. $\square$

3.2 Estabilidade estrutural forte

Como extensão de nosso estudo, apresentamos a seguir importantes resultados estabelecidos por Bayart em [2], os quais estabelecem conexões diretas com a teoria dos operadores com propriedade de sombreamento discutida anteriormente.

O lema a seguir constitui uma etapa fundamental para a demonstração do nosso teorema principal. Visando garantir clareza expositiva, apresentamos sua formulação e prova de maneira independente.

Lema 3.4. *Sejam X um espaço de Banach, $T \in GL(X)$ um operador hiperbólico generalizado, com $M, N \subset X$ satisfazendo a Definição 1.16 e $Y = M + T^{-1}(N)$ um subspaço fechado de X . Então, para qualquer homeomorfismo uniforme $R : X \rightarrow X$, a aplicação limitada*

$$\psi : \varphi \in U_b(X; Y) \mapsto \varphi \circ R - T \circ \varphi \in U_b(X)$$

é bijetiva e sua inversa é dada por

$$\psi^{-1}(\alpha)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} T^k P_M(\alpha(R^{-k-1}x)) - \sum_{k=1}^{\infty} T^{-k} P_N(\alpha(R^{k-1}x)). \quad (3.9)$$

Além disso, sendo $d = \max\{\|P_M\|, \|P_N\|\}$, existem $c > 0$ e $t \in (0, 1)$ de modo que ψ^{-1} satisfaz

$$\|\psi^{-1}(\alpha)\|_{\infty} \leq \frac{cd(1+t)}{1-t} \|\alpha\|_{\infty}. \quad (3.10)$$

Demonstração. Inicialmente, fixe $\alpha \in U_b(X)$ e tome $\varphi \in U_b(X; Y)$ satisfazendo $\psi(\varphi) = \alpha$. Em outras palavras,

$$\varphi(Rx) - T(\varphi(x)) = \alpha(x) \quad (3.11)$$

para cada $x \in X$. Assim, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x \in X$, afirmamos que

$$\varphi(R^n x) - T^n(\varphi(x)) = \sum_{k=1}^n T^{n-k}(\alpha(R^{k-1}x)). \quad (3.12)$$

Provemos, por indução, que esta igualdade é verdadeira. Para $n = 1$, segue de (3.11). Suponha que vale $n \geq 1$ e mostremos que vale para $n + 1$. Utilizando a hipótese de indução,

$$\varphi(R^{n+1}x) = \varphi(R^n(Rx)) = T^n(\varphi(Rx)) + \sum_{k=1}^n T^{n-k}(\alpha(R^{k-1}Rx))$$

que por (3.11) nos dá

$$T^n(\varphi(Rx)) + \sum_{k=1}^n T^{n-k}(\alpha(R^{k-1}Rx)) = T^{n+1}(\varphi(x)) + T^n(\alpha(x)) + \sum_{k=1}^n T^{n-k}(\alpha(R^{k-1}Rx))$$

ou seja,

$$\varphi(R^{n+1}x) = T^{n+1}(\varphi(x)) + \sum_{k=1}^{n+1} T^{n+1-k}(\alpha(R^{k-1}x)).$$

Então vale para $n + 1$ e, conseqüentemente, para todo $n \in \mathbb{N}$. Aplicando T^{-n} em ambas as partes de (3.12),

$$\varphi(x) = T^{-n}(\varphi(R^n x)) - \sum_{k=1}^n T^{-k}(\alpha(R^{k-1}x)), \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N} \text{ e } x \in X.$$

Escrevamos $\varphi(x) = y_n(x) + z_n(x)$, onde

$$y_n(x) = T^{-n}P_M(\varphi(R^n x)) - \sum_{k=1}^n T^{-k}P_M(\alpha(R^{k-1}x)),$$

$$z_n(x) = T^{-n}P_N(\varphi(R^n x)) - \sum_{k=1}^n T^{-k}P_N(\alpha(R^{k-1}x)).$$

Observe que, como N é T^{-1} -invariante, temos $z_n(x) \in T^{-1}(N) \subset N$ para cada $x \in X$. Mostremos que $y_n(x) \in M$. Como $y_n(x) \in X$, escrevamos $y_n(x) = a_n(x) + b_n(x)$, onde $a_n \in M$, $b_n \in N$ para cada $x \in X$ e $n \in \mathbb{N}$. Se $n = 1$, teremos

$$T(b_1(x)) = T(a_1(x)) - T(z_1(x)) \in M$$

ou seja, $b_1(x) \in T^{-1}(M)$. Por outro lado, como $\varphi(x) \in Y$, $a_1(x) \in M$ e

$$\varphi(x) = a_1(x) + (b_1(x) + z_1(x)),$$

então $b_1(x) + z_1(x) \in T^{-1}(N)$ e, conseqüentemente, temos que $b_1(x) \in T^{-1}(N)$. Porém, da definição de M e N , sabemos que $T^{-1}(M) \cap T^{-1}(N) = \{0\}$. Assim $b_1(x) = 0$ para cada $x \in X$ e $y_1(x) = a_1(x) \in M$. Tomemos por hipótese de indução que $y_n(x) \in M$, para um certo $n \geq 1$ e provemos que $y_{n+1}(x) \in M$. Escrevendo $y_{n+1}(x)$ utilizando a definição dada, obtemos

$$y_{n+1}(x) = T^{-(n+1)}P_M(\varphi(R^{n+1}x)) - \sum_{k=1}^{n+1} T^{-k}P_M(\alpha(R^{k-1}x)).$$

Além disso,

$$T(y_{n+1}(x)) = T^{-n}P_M(\varphi(R^{n+1}x)) - \sum_{k=1}^{n+1} T^{-k+1}P_M(\alpha(R^{k-1}x)),$$

donde podemos reescrever o somatório, a menos do primeiro termo, do seguinte modo

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{n+1} T^{-k+1}P_M(\alpha(R^{k-1}x)) &= T^{-1}P_M(\alpha(Rx)) + \cdots + T^{-n}P_M(\alpha(R^n x)) \\ &= \sum_{k=1}^n T^{-k}P_M(\alpha(R^{k-1}Rx)). \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} T(y_{n+1}(x)) &= T^{-n}P_M(\varphi(R^n Rx)) - \sum_{k=1}^n T^{-k}P_M(\alpha(R^{k-1}Rx)) - P_M(\alpha(x)) \\ &= y_n(Rx) - P_M(\alpha(x)). \end{aligned}$$

Logo, pela hipótese de indução, $y_{n+1}(x) \in M$ para todo $x \in X$ e, repetindo o argumento

utilizado no caso $n = 1$, concluímos que $y_{n+1}(x) \in M$ e então $y_n(x) \in M$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Pelo Lema 1.17, obtemos $T^{-n}P_N(\varphi(R^n x)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ e, assim,

$$P_N(\varphi(x)) = - \sum_{k=1}^{\infty} T^{-k} P_N(\alpha(R^{k-1}x)). \quad (3.13)$$

Agora, como (3.12) vale em todo $x \in X$, aplicando esta igualdade para $R^{-n}x$, temos

$$\varphi(x) = T^n(\varphi(R^{-n}x)) + \sum_{k=1}^n T^{n-k}(\alpha(R^{k-1-n}x))$$

o qual, permutando a ordem de termos do somatório, reescrevemos como

$$\varphi(x) = T^n(\varphi(R^{-n}x)) + \sum_{k=0}^{n-1} T^k(\alpha(R^{-k-1}x)).$$

Reescrevamos novamente $\varphi(x) = v_n(x) + w_n(x)$, para cada $n \in \mathbb{N}$, onde

$$\begin{aligned} v_n(x) &= T^n P_M(\varphi(R^{-n}x)) + \sum_{k=0}^{n-1} T^k P_M(\alpha(R^{-k-1}x)), \\ w_n(x) &= T^n P_N(\varphi(R^{-n}x)) + \sum_{k=0}^{n-1} T^k P_N(\alpha(R^{-k-1}x)) \end{aligned}$$

com $v_n(x) \in M$, pois este é T -invariante. Mostremos que $w_n(x) \in T^{-1}(N)$ utilizando novamente o processo indutivo. Para $n = 1$, escrevendo $\varphi(x) = a + b$ com $a \in M$ e $b \in N$, pois $\varphi(x) \in X = M \oplus N$, teremos que $P_N(\varphi(R^{-1}x)) = b$. Ou seja,

$$w_1(x) = Tb + P_N(\alpha(R^{-1}x)) \in N.$$

Como $w_1 + v_1 = \varphi(x) \in Y$ com $v_1 \in M$, então $w_1 \in T^{-1}(N)$. Agora, suponha que isto seja verdade para um certo $n \geq 1$ e provemos que vale para $n + 1$. Pela forma que $w_n(x)$ é definida, encontramos com uma rápida manipulação,

$$\begin{aligned} w_{n+1}(x) &= T^{n+1}P_N(\varphi(R^{-(n+1)}x)) + \sum_{k=0}^n T^k P_N(\alpha(R^{-k-1}x)) \\ &= T \left(T^n P_N(\varphi(R^{-n}R^{-1}x)) + \sum_{k=0}^{n-1} T^{k-1} P_N(\alpha(R^{-k}R^{-1}x)) \right) + P_N(\alpha(R^{-1}x)) \\ &= T(w_n(R^{-1}x)) + P_N(\alpha(R^{-1}x)). \end{aligned}$$

Por fim, como por hipótese de indução já sabíamos que, para todo $x \in X$, vale

$w_n(x) \in T^{-1}(N)$, por cálculos semelhantes ao caso $n = 1$, obtemos a conclusão que $w_{n+1}(x) \in T^{-1}(N)$ e, portanto, $w_n \in T^{-1}(N) \subset N$. Novamente do Lema 1.17, obtemos $T^n P_M(\varphi(R^{-n}x)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Desse modo,

$$P_M(\phi(x)) = \sum_{k=0}^{\infty} T^k P_N(\alpha(R^{-k-1}x))$$

para todo $x \in X$. Disto e por 3.13, se existe $\varphi_2(x)$ de modo que $\psi(\varphi_2) = \alpha$, então $\varphi = \varphi_2$ e, portanto, ψ é injetiva. Além disso, pelo Lema 1.17 teremos

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} T^{-k} P_N(\alpha(R^{k-1}x)) \right\| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \|T^{-k}|_N\| \|P_N(\alpha(R^{k-1}x))\| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} ct^k \|P_N\| \|\alpha(R^{k-1}x)\| \\ &\leq \frac{cd}{1-t} \|\alpha\|_{\infty} \end{aligned}$$

e de maneira semelhante,

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} T^k P_N(\alpha(R^{-k-1}x)) \right\| \leq \frac{cd}{1-t} \|\alpha\|_{\infty}$$

concluindo que 3.10 é válida e, para cada φ satisfazendo

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} T^k P_M(\alpha(R^{-k-1}x)) - \sum_{k=1}^{\infty} T^{-k} P_N(\alpha(R^{k-1}x)),$$

teremos $\varphi(x) \in U_b(X, Y)$ e ψ será sobrejetiva. Isto conclui a demonstração. $\square$

Teorema 3.5. *Sejam X um espaço de Banach e $T \in GL(X)$. Se T é um operador hiperbólico generalizado, então T é fortemente estruturalmente estável.*

Demonstração. Dado $0 < \varepsilon < 1$, tome $\delta > 0$ e $\beta \in U_b(X)$ Lipschitz com $\|\beta\|_{\infty} \leq \delta$ e $Lip(\beta) \leq \delta$. Mostremos que existem únicos $h_1, h_2 \in U_b(X, Y)$ tais que as aplicações $H_1 = Id + h_1 : X \rightarrow X$ e $H_2 = Id + h_2 : X \rightarrow X$ satisfazem

$$H_1 \circ T = S \circ H_1, \tag{3.14}$$

$$H_2 \circ S = T \circ H_2 \tag{3.15}$$

e, além disso, $\|h_1\| \leq \varepsilon$, $\|h_2\| \leq \varepsilon$ e $H_1 \circ H_2 = H_2 \circ H_1 = Id$. Pelo Lema 3.4, se

assumirmos $R = T$, temos

$$\psi_1(\varphi) = \varphi \circ T - T \circ \varphi, \quad \text{para cada } \varphi \in U_b(X, Y).$$

Definamos

$$\phi_1 : \varphi \in U_b(X; Y) \mapsto \psi_1^{-1}(\beta \circ (Id + \varphi)) \in U_b(X; Y).$$

Então ϕ_1 é Lipschitz pois, como ψ é isomorfismo linear, obtemos

$$\begin{aligned} \|\phi_1(\varphi) - \phi_1(\varphi')\| &= \|\psi_1^{-1}(\beta \circ (Id + \varphi)) - \psi_1^{-1}(\beta \circ (Id + \varphi'))\| \\ &\leq \|\psi_1^{-1}(\beta \circ (Id + \varphi) - \beta \circ (Id + \varphi'))\| \\ &\leq \|\psi_1^{-1}\| \text{Lip}(\beta) \|\varphi - \varphi'\| \\ &\leq \frac{cd(1+t)}{1-t} \delta \|\varphi - \varphi'\|. \end{aligned}$$

assumindo $\delta := \frac{\varepsilon(1-t)}{cd(1+t)}$, com $c > 0$ dado como no Lema 3.4, mostramos que ϕ_1 é uma contração. Pelo Teorema 1.9, existe um único $h_1 \in U_b(X; Y)$ tal que $\phi_1(h_1) = h_1$, isto é, $h_1 = \psi_1^{-1}(\beta \circ (Id + h_1))$. Como

$$\beta \circ (Id + h_1) = \psi(h_1) = h_1 \circ T - T \circ h_1 = (h_1 + Id) \circ T - T \circ (h_1 + Id),$$

existe um homeomorfismo uniforme $H_1 = h_1 + Id$ satisfazendo $(\beta + T) \circ H_1 = H_1 \circ T$. Por outro lado, utilizando novamente o Lema 3.4 e assumindo $R = T + \beta$, temos

$$\psi_2(\varphi) = \varphi \circ (T + \beta) - T \circ \varphi, \quad \text{para cada } \varphi \in U_b(X, Y).$$

Como $\beta \in U_b(X)$ e ψ_2 é sobrejetiva, existe $h_2 \in U_b(X; Y)$ de modo que $\psi_2(h_2) = -\beta$. Portanto,

$$\begin{aligned} -\beta &= h_2 \circ (T + \beta) - T \circ h_2 \\ &= h_2 \circ (T + \beta) + (T + \beta) - (T + \beta) - T \circ h_2 \\ &= (h_2 + Id) \circ (T + \beta) - T \circ (h_2 + Id) - \beta \end{aligned}$$

e temos que existe $H_2 = h_2 + Id$ de modo que $H_2 \circ (T + \beta) = T \circ H_2$, como esperado. Por fim mostremos que H_2 é inversa à direita e à esquerda de H_1 . Por (3.14) e (3.15),

$$H_2 \circ (H \circ T) = H_2 \circ (S \circ H_1) = (H_2 \circ S) \circ H_1 = T \circ H_2 \circ H_1$$

e $H_2 \circ H_1 = I + u$, com $u \in U_b(X; Y)$. Disto e da igualdade anterior,

$$\psi_1(u) = u \circ T - T \circ u = (u \circ T - T) - (T \circ u - T) = 0$$

Portanto, temos $u = 0$, donde segue $H_2 \circ H_1 = Id$. De maneira semelhante, utilizando (3.14) e (3.15), obtemos

$$H_1 \circ H_2 \circ S = S \circ H_1 \circ H_2 \quad (3.16)$$

e $H_1 \circ H_2 = Id + v$, com $v \in U_b(X; Y)$ e

$$\psi_2(v) = v \circ S - T \circ v = v \circ S - (S - \beta) \circ v = \beta \circ v.$$

Daí, podemos escrever $\psi_2(v) = \beta \circ (Id + v) - \beta$ de modo que, ao definirmos a aplicação

$$\phi_2 : \varphi \in U_b(X; Y) \mapsto \psi_2^{-1}(\beta \circ (Id + v) - \beta) \in U_b(X; Y),$$

v será ponto fixo de ϕ_2 . Além disso, como esta aplicação é uma contração, pois $Lip(\phi_2) \leq Lip(\beta) \leq \delta$, v é o seu único ponto fixo. Porém, $\phi_2(0) = 0$, donde $v = 0$. Assim, $H_1 \circ H_2 = Id$. Por fim, como $h_1 = \phi_1(h_1)$, temos

$$\begin{aligned} \|h_1\|_\infty &= \sup_{x \in X} \|\phi_1(h_1)(x)\| \\ &= \sup_{x \in X} \|\psi_1^{-1}(\beta \circ (Id + h_1)(x))\| \\ &\leq \|\psi_1^{-1}\| \sup_{y \in (Id + h_1)(X)} \|\beta(y)\| \\ &\leq \frac{cd(1+t)}{1-t} \|\beta\|_\infty. \end{aligned}$$

Assim, a definição de β nos dá $\|h_1\|_\infty \leq \varepsilon$. De maneira semelhante encontramos

$$\|h_2\|_\infty = \sup_{x \in X} \|\psi_2^{-1}(-\beta)(x)\| \leq \|\psi_2^{-1}\| \sup_{x \in X} \|\beta(x)\| \leq \frac{cd(1+t)}{1-t} \|\beta\|_\infty,$$

donde $\|h_2\| \leq \varepsilon$. Portanto, encontramos um homeomorfismo $H = H_1 : X \rightarrow X$ de modo que $H \circ T = (T + \beta) \circ H$ e $\|H - Id\| \leq \varepsilon$. Isto mostra que T é fortemente estruturalmente estável. $\square$

O próximo resultado surge como um lema auxiliar de grande importância para a demonstração do teorema principal desta seção. Com o objetivo de garantir maior clareza, adaptamos parte de sua demonstração, buscando uma construção mais natural em comparação à abordagem original.

Lema 3.6. *Sejam $\delta > 0$, $m \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{N}_0$. Então existem uma aplicação Lipschitz $\alpha : X \rightarrow X$ e $x \in X$ que satisfazem as seguintes propriedades:*

- $\|\alpha\|_\infty \leq \delta$;
- $Lip(\alpha) \leq \delta$;
- $\alpha_{k+t}((B_w + \alpha)^{m-k-1}x) = \delta$ para todo $k = 0, \dots, m-1$.

Demonstração. Para facilitar a notação, provaremos o caso $t = 0$. A demonstração deste lema se baseia em uma construção indutiva. Primeiramente, tomemos

$$a_{m,0} = 1 \quad \text{e} \quad a_{m,k} = w_{2m} \cdots w_{2m-k-1}, \text{ para cada } k = 1, \dots, m-1,$$

fixe $\xi > 0$ suficientemente grande de modo que, para cada $j \neq k \in \{0, \dots, m-1\}$,

$$\|\xi a_{m,k} e_{2m-k} - \xi a_{m,j} e_{2m-j}\| \geq 3,$$

e considere a aplicação $\rho : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ definida por $\rho(x) = \max\{0, 1 - |x|\}$, a qual satisfaz $Lip(\rho) \leq 1$. Por indução em $j = 0, \dots, m-1$, exibiremos mapas $\alpha^{(j)} \in Lip(X)$ e vetores $y^{(j)} \in X$, satisfazendo

(a) Para todo $k \leq j$,

$$(B_w + \alpha^{(j)})^k(\xi e_{2m}) = \xi a_{m,k} e_{2m-k} + y^{(k)};$$

(b) $\alpha_l^{(j)} = 0$, sempre que $l \notin \{m-1-j, \dots, m-1\}$;

(c) Para todo $k \in \{0, \dots, j\}$ e cada $x \in X$,

$$\alpha_{m-1-k}^{(j)}(x) = \delta \rho(\|x - \xi a_{m,k} e_{2m-k} - y^{(k)}\|);$$

(d) $y^{(j)} \in \text{span}(e_{m-j})$.

No caso $j = 0$, para cada $x \in X$, definimos $y^{(0)} = 0$, $\alpha_l^{(0)}(x) = 0$ para $l \neq m-1$ e

$$\alpha_{m-1}^{(0)}(x) = \delta \rho(\|x - \xi e_{2m}\|),$$

de onde segue os itens (b), (c) e (d) válidos. Para (a),

$$(B_w + \alpha^{(0)})^0(\xi e_{2m}) = \xi e_{2m} = \xi a_{m,0} e_{2m} + y^{(0)}$$

e conclui-se o caso $j = 0$. Para um melhor entendimento da leitora ou do leitor, vejamos também a construção do caso $j = 1$. Observe que

$$(B_w + \alpha^{(0)})^1(\xi e_{2m}) = \xi a_{m,1} e_{2m-1} - \alpha^{(0)}(\xi e_{2m}).$$

Daí, definindo $y^{(1)} = \alpha^{(0)}(\xi e_{2m})$ e, como $\alpha_l^{(0)}(x) = 0$, exceto em $l = m-1$, pela definição de ρ , temos

$$\alpha_{m-1}^{(0)}(\xi e_{2m}) = \delta \rho(\|\xi e_{2m} - \xi e_{2m} - y^{(0)}\|) = \delta.$$

Definindo $\alpha_l^{(1)} = 0$ para $l \notin \{m-2, m-1\}$ e

$$\alpha_{m-1}^{(1)}(x) = \delta \rho(\|x - \xi e_{2m} - y^{(0)}\|), \quad (3.17)$$

$$\alpha_{m-2}^{(1)}(x) = \delta \rho(\|x - \xi a_{m,1} e_{2m-1} - y^{(1)}\|), \quad (3.18)$$

obtemos a validade de (b), (c) e (d). Para (a),

$$(B_w + \alpha^{(1)})^0(\xi e_{2m}) = \xi e_{2m} = \xi a_{m,0} e_{2m} + y^{(0)},$$

$$(B_w + \alpha^{(1)})^1(\xi e_{2m}) = \xi a_{m,1} e_{2m-1} + \alpha^{(1)}(\xi e_{2m})$$

onde em ξe_{2m} , (3.18) terá resultado nulo, enquanto (3.17) diz que

$$\alpha_{m-1}^{(1)}(\xi e_{2m}) = \delta = \alpha_{m-1}^{(0)}(\xi e_{2m}) = y^{(1)}.$$

Assim, por definição de ξ e ρ , vale (a). Agora, supondo que $\alpha^{(j)}$ e $y^{(j)}$ estão bem definidos para uma quantidade $j \leq m-2$, mostremos que o mesmo vale para $j+1$. Replicando a construção anterior, tem-se para $j \leq m-2$ e do item (a),

$$(B_w + \alpha^{(j)})^{j+1}(\xi e_{2m}) = (B_w + \alpha^{(j)})(B_w + \alpha^{(j)})^j(\xi e_{2m}) = (B_w + \alpha^{(j)})(\xi a_{m,j} e_{2m-j} + y^{(j)}),$$

ou seja,

$$(B_w + \alpha^{(j)})^{j+1}(\xi e_{2m}) = \xi a_{m,j+1} e_{2m-(j+1)} + B_w(y^{(j)}) + \alpha^{(j)}(\xi a_{m,j} e_{2m-j} + y^{(j)}).$$

Desse modo, definindo $y^{(j+1)}$ por

$$y^{(j+1)} = B_w(y^{(j)}) + \alpha^{(j)}(\xi a_{m,j} e_{2m-j} + y^{(j)}),$$

como $y^{(j)} \in \text{span}(e_{m-j})$ e $\alpha_l^{(j)} = 0$ para cada $l \notin \{m-1-j, \dots, m-1\}$, então $\alpha^{(j)}(\xi a_{m,j} e_{2m-j} + y^{(j)}) \in \text{span}(e_{m-(j+1)})$ e conclui-se que $y^{(j+1)} \in \text{span}(e_{m-(j+1)})$. Para

definirmos $\alpha^{(j+1)}$, basta tomarmos $\alpha_l^{(j+1)} = 0$ em cada $l \notin \{m-1-(j+1), \dots, m-1\}$ e, para os demais valores,

$$\alpha_{m-1-k}^{(j+1)}(x) = \delta\rho(\|x - \xi a_{m,k} e_{2m-k} - y^{(k)}\|)$$

com $0 \leq k \leq j \leq m-2$. Se $k = j+1$, temos $\alpha_{m-1-(j+1)}^{(j)} = 0$ e

$$\alpha_{m-1-(j+1)}^{(j+1)}(\xi a_{m,k} e_{2m-k} + y^{(k)}) = \delta\rho(\|\xi a_{m,k} e_{2m-k} + y^{(k)} - \xi a_{m,k} e_{2m-k} - y^{(k)}\|),$$

que assume valor nulo por definição de ξ e ρ . Ou seja,

$$\alpha^{(j+1)}(\xi a_{m,k} e_{2m-k} + y^{(k)}) = \alpha^{(j)}(\xi a_{m,k} e_{2m-k} + y^{(k)}) \quad (3.19)$$

donde segue (b), (c) e (d) por construção. Para (a), pela forma na qual $y^{(j+1)}$ foi definido, temos para cada $k \leq j \leq m-1$,

$$y^{(k+1)} = B_w(y^{(k)}) + \alpha^{(k)}(\xi a_{m,k} e_{2m-k} + y^{(k)}).$$

Suponha que $k < j$ de modo que, por (3.19), tem-se

$$\alpha^{(k)}(\xi a_{m,k} e_{2m-k} + y^{(k)}) = \alpha^{(k+1)}(\xi a_{m,k} e_{2m-k} + y^{(k)}).$$

Tomemos $r \geq 0$ o maior inteiro satisfazendo $k+r < j$. Assim,

$$\alpha^{(k+r)}(\xi a_{m,k} e_{2m-k} + y^{(k)}) = \alpha^{(j)}(\xi a_{m,k} e_{2m-k} + y^{(k)}).$$

Ou seja,

$$y^{(k+1)} = B_w(y^{(k)}) + \alpha^{(j)}(\xi a_{m,k} e_{2m-k} + y^{(k)}). \quad (3.20)$$

Dessa forma, fixando $j = 0, \dots, m-1$, mostremos por indução em $k \leq j$, que vale (a). Como já visto, a condição é válida se $k = 0$. Por hipótese de indução, suponhamos que vale para um valor $k \leq m-2$. Disto e por (3.20), temos

$$(B_w + \alpha^{(j)})^{k+1}(\xi e_{2m}) = (B_w + \alpha^{(j)})(\xi a_{m,k} e_{2m-k} + y^{(k)}) = \xi a_{m,k+1} e_{2m-(k+1)} + y^{(k+1)},$$

então vale (a). Por fim, para demonstrarmos o lema, tomemos $\alpha = \alpha^{(m-1)}$, $u = \xi e_{2m}$ e mostremos que o par (α, u) satisfaz as condições que buscamos. Para verificarmos a condição (i), analisaremos os caso em que $X = c_0(\mathbb{Z})$ e $X = \ell_p(\mathbb{Z})$, com $1 \leq p < \infty$. Se

$X = c_0(\mathbb{Z})$, ao aplicarmos (b) e (c) com $j = m - 1$, visto que $\max |\rho(x)| = 1$, obtemos

$$\sup_{x \in X} \|\alpha(x)\|_\infty = \sup_{x \in X} \left\{ \sup_{k \in \mathbb{Z}} |\alpha_k(x)| \right\} = \delta \sup_{x \in X} \left\{ \sup_{k \in \mathbb{Z}} \rho(\|x - \xi a_{m,k} e_{2m-k} - y^{(k)}\|) \right\} = \delta.$$

Agora, supondo $X = \ell_p(\mathbb{Z})$, com $1 \leq p < \infty$, de assumindo a condição (c) para um valor $\delta_0 = \frac{\delta}{m^{\frac{1}{p}}}$ e aplicando (b), teremos

$$\|\alpha\|_\infty = \sup_{x \in X} \|\alpha(x)\|_p = \sup_{x \in X} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{x \in X} \left(\sum_{k=0}^{m-1} |\alpha_k(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

ou seja,

$$\|\alpha\|_\infty \leq \sup_{x \in X} \left(\sum_{k=0}^{m-1} |\delta_0 \rho(\|x - \xi a_{m,k} e_{2m-k} - y^{(k)}\|)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq m^{\frac{1}{p}} \delta_0 = \delta,$$

confirmando assim a primeira condição. Agora, mostremos que $Lip(\alpha) \leq \delta$ separando novamente em dois casos. Se $X = \ell_p(\mathbb{Z})$, com $1 \leq p < \infty$, temos por (b) que

$$\|\alpha(x) - \alpha(y)\|_p^p = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \|\alpha_k(x) - \alpha_k(y)\| = \sum_{k=0}^{m-1} \|\alpha_k(x) - \alpha_k(y)\|.$$

Aplicando (c) para $\delta_0 = \frac{\delta}{m^{\frac{1}{p}}}$,

$$\|\alpha(x) - \alpha(y)\|_p^p = \sum_{k=0}^{m-1} \left| \delta_0 \rho(\|x - \xi a_{m,k} e_{2m-k} - y^{(k)}\|) - \delta_0 \rho(\|y - \xi a_{m,k} e_{2m-k} - y^{(k)}\|) \right|^p$$

onde, por $Lip(\rho) \leq 1$, encontramos que

$$\|\alpha(x) - \alpha(y)\|_p^p \leq \delta_0^p \sum_{k=0}^{m-1} \left| \|x - \xi a_{m,k} e_{2m-k} - y^{(k)}\| - \|y - \xi a_{m,k} e_{2m-k} - y^{(k)}\| \right|^p$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \|\alpha(x) - \alpha(y)\|_p^p &\leq \delta^p \sum_{k=0}^{m-1} \|x - y\|^p = \delta^p m \|x - y\|^p \\ \implies \|\alpha(x) - \alpha(y)\|_p &\leq \delta \|x - y\|. \end{aligned}$$

De maneira semelhante, se $X = c_0(\mathbb{Z})$ e tomando $\delta_0 = \delta$, vemos que

$$\|\alpha(x) - \alpha(y)\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{Z}} |\alpha_k(x) - \alpha_k(y)|$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \|\alpha(x) - \alpha(y)\|_\infty &= \delta \sup_{k \in \mathbb{Z}} |\rho(\|x - \xi a_{m,k} e_{2m-k} - y^{(k)}\|) - \rho(\|y - \xi a_{m,k} e_{2m-k} - y^{(k)}\|)| \\ &\leq \delta \sup_{k \in \mathbb{Z}} \|x - \xi a_{m,k} e_{2m-k} - y^{(k)}\| - \|y - \xi a_{m,k} e_{2m-k} - y^{(k)}\| \\ &\leq \delta \sup_{k \in \mathbb{Z}} \|x - y\|. \end{aligned}$$

Portanto, temos que $Lip(\alpha) \leq \delta$ e concluimos a segunda condição. Por fim, para mostrarmos a terceira afirmação, por (a) sabemos que

$$(B_w + \alpha)^{m-k-1} u = \xi a_{m,m-1-k} e_{m+k+1} + y^{(m-1-k)}.$$

Portanto, utilizando (c), tem-se

$$\alpha_{m-1-k}((B_w + \alpha)^{m-1-k} u) = \delta,$$

como esperado. Para provarmos nos demais valores de t , basta repetir o procedimento utilizado trocando apenas o ponto inicial por e_{2m+t} . $\square$

O seguinte resultado estabelece que, sob certas condições nos pesos de um operador shift, é possível garantir que esse operador não será fortemente estruturalmente estável. A demonstração desse fato envolve um conceito não abordado neste trabalho: a expansividade.

Lema 3.7. *Seja $w = (w_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \omega$ um peso admissível. Suponha que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \in \mathbb{N}} |w_{-k} w_{-k-1} \cdots w_{-k-n}|^{\frac{1}{n}} > 1 \quad e \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \in \mathbb{N}} |w_k w_{k+1} \cdots w_{k+n}|^{\frac{1}{n}} < 1.$$

Então B_w não é fortemente estruturalmente estável.

Para concluir este capítulo, apresentamos o principal resultado proveniente da análise desenvolvida em [2]. Este teorema estabelece que, no contexto de shifts, as noções de propriedade de sombreamento e estabilidade estrutural forte são equivalentes, conceitos fundamentais que permeiam este trabalho.

Teorema 3.8. *Sejam $X = \ell_p(\mathbb{Z})$ ($1 \leq p < \infty$) ou $X = c_0(\mathbb{Z})$, $(w_k)_{k \in \mathbb{N}}$ um peso admissível com $\inf_{k \in \mathbb{Z}} |w_k| > 0$ e B_w o backward shift com peso. Então, B_w é fortemente estruturalmente estável se, e somente se, uma das seguintes condições é válida:*

- (A) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \in \mathbb{Z}} |w_k w_{k+1} \cdots w_{k+n}|^{\frac{1}{n}} < 1;$
- (B) $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \in \mathbb{Z}} |w_k w_{k+1} \cdots w_{k+n-1}|^{\frac{1}{n}} > 1;$

$$(C) \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \in \mathbb{N}} |w_{-k} w_{-k-1} \cdots w_{-k-n}|^{\frac{1}{n}} < 1 \quad e \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \in \mathbb{N}} |w_k w_{k+1} \cdots w_{k+n}|^{\frac{1}{n}} > 1;$$

Demonstração. Provaremos que se (A), (B) ou (C) vale, então B_w é fortemente estruturalmente estável. Se (A) ou (B) vale, temos pela Proposição 2.6 que B_w é um operador hiperbólico e, por ser invertível, temos que é hiperbólico generalizado. Além disso, supondo que (C) vale, durante a demonstração do Teorema 3.3, mostramos que isto implica que B_w é hiperbólico generalizado. Deste modo, via Lema 3.5, temos que (A), (B) e (C) implicam em estabilidade estrutural forte. Reciprocamente, suponha que B_w possui estabilidade estrutural forte e provemos que vale (A), (B) ou (C). Para isto, mostraremos:

Afirmção. Se B_w possui estabilidade estrutural forte, então uma das condições abaixo é verdadeira:

$$(D_1) \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \in \mathbb{N}} |w_k w_{k+1} \cdots w_{k+n}|^{\frac{1}{n}} < 1;$$

$$(D_2) \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \in \mathbb{N}} |w_k w_{k+1} \cdots w_{k+n}|^{\frac{1}{n}} > 1.$$

De fato, suponhamos que (D_2) não vale. Ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{|w_k w_{k+1}| \cdots w_{k+n}} \right)^{\frac{1}{n}} \geq 1.$$

Assim, pelo Lema 3.1 com $x_k = \frac{1}{w_k}$, temos

$$\sup_{m \in \mathbb{N}} \left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{w_{k+1} \cdots w_m} \right) = +\infty.$$

Tome $t \in \mathbb{N}_0$. Da maneira que o peso foi definido, concluímos da igualdade anterior que

$$\sup_{m \in \mathbb{N}} \left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{w_{k+1+t} \cdots w_{m+t}} \right) = +\infty.$$

Daí, tome $\delta > 0$ correspondente à $\varepsilon = 1$ da definição de operador fortemente estruturalmente estável. Então existe $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande de modo que

$$\sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{w_{k+1+t} \cdots w_{m+t}} \geq \frac{1+\delta}{\delta^2}. \quad (3.21)$$

Agora, seja $(\alpha, u) \in Lip(X) \times X$ dados como no Lema 3.6 para os valores δ, m, t apresentados anteriormente. Como B_w é fortemente estruturalmente estável, existe

um homeomorfismo $\phi : X \rightarrow X$, com $\|\phi\|_\infty \leq 1$ tal que

$$(I + \phi) \circ (B_w + \alpha) = B_w \circ (I + \phi)$$

ou seja,

$$\phi \circ (B_w + \alpha) = -\alpha + B_w \circ \phi.$$

Daí, para cada $k \in \mathbb{Z}$, tem-se

$$\phi_k \circ (B_w + \alpha) = -\alpha_k + w_{k+1} \phi_{k+1}, \quad (3.22)$$

onde, de maneira indutiva, provaremos que

$$\phi_{n+t}(u) = \frac{\phi_t((B_w + \alpha)^n u)}{w_{1+t} \cdots w_{n+t}} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha_{k+t}((B_w + \alpha)^{n-1-k} u)}{w_{k+1+t} \cdots w_{n+t}}, \quad (3.23)$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Inicialmente se $n = 1$, temos a veracidade via equação (3.22) e, supondo que a igualdade é válida para um valor $n \in \mathbb{N}$, mostremos para $n + 1$. Se aplicarmos B_w em ambos os lados da igualdade dada na hipótese de indução, obteremos

$$w_{n+t+1} \phi_{n+t+1}(u) = \frac{w_{t+1} \phi_{t+1}((B_w + \alpha)^n u)}{w_{1+t} \cdots w_{n+t}} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{w_{k+t+1} \alpha_{k+t+1}((B_w + \alpha)^{n-1-k} u)}{w_{k+1+t} \cdots w_{n+t}}.$$

Por outro lado, como o caso $n = 0$ é verdade, vemos que

$$\phi_{t+1}((B_w + \alpha)^n u) = \frac{\phi_t((B_w + \alpha)^{n+1} u) + \alpha_t((B_w + \alpha)^n u)}{w_{t+1}}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \phi_{n+t+1}(u) &= \frac{\phi_t((B_w + \alpha)^{n+1} u) + \alpha_t((B_w + \alpha)^n u)}{w_{1+t} \cdots w_{n+t+1}} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha_{k+t+1}((B_w + \alpha)^{n-1-k} u)}{w_{k+t+2} \cdots w_{n+t+1}} \\ &= \frac{\phi_t((B_w + \alpha)^{n+1} u)}{w_{k+t+1} \cdots w_{n+t+1}} + \sum_{k=0}^n \frac{\alpha_{k+t}((B_w + \alpha)^{n-k} u)}{w_{k+1+t} \cdots w_{n+t+1}}, \end{aligned}$$

o que comprova o caso $n + 1$ e segue a igualdade. Agora, utilizando a terceira propriedade do mapa α e $n = m$, teremos

$$\phi_{m+t}(u) = \frac{\phi_t((B_w + \alpha)^m u)}{w_{1+t} \cdots w_{m+t}} + \delta \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{w_{k+1+t} \cdots w_{m+t}},$$

que por $\|\phi\|_\infty \leq 1$, tem-se que $\|\phi_{m+t}\| \leq 1$, onde

$$1 \geq \|\phi_{m+t}(u)\| \geq \left\| \delta \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{w_{k+1+t} \cdots w_{m+t}} \right\| - \left\| \frac{\phi_t((B_w + \alpha)^m u)}{w_{1+t} \cdots w_{m+t}} \right\|.$$

Por fim, por (3.21), encontramos que

$$\frac{1}{|w_{1+t} \cdots w_{m+t}|} \geq \delta \left(\frac{1+\delta}{\delta^2} \right) - 1 = \frac{1}{\delta}.$$

Por outro lado, de (3.23), teremos

$$\delta \sum_{k=0}^{m-1} w_{1+t} \cdots w_{k+t} = w_{1+t} \cdots w_{m+t} \phi_{m+t}(u) - \phi_t((B_w + \alpha)^m u),$$

ou seja,

$$\sum_{k=0}^{m-1} |w_{1+t} \cdots w_{k+t}| \leq \frac{1}{\delta} + 1.$$

Como isto é válido para um número infinito de inteiros positivos m , é verdade que

$$\sup_{t \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^{\infty} |w_{1+t} \cdots w_{k+t}| \leq 1 + \frac{1}{\delta}.$$

Por fim, pelo Lema 3.1 com $x_k = w_k$, concluímos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \in \mathbb{N}} |w_k \cdots w_{k+n}|^{\frac{1}{n}} \leq 1$$

onde isto coincide com a propriedade (D_2) . Daí, assim como no Teorema 3.3, tomemos as sequências $w' = (w'_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ $w'' = (w''_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ definida por $w'_n = \frac{1}{w_{n+1}}$ e $w''_n = w'_{-n}$. Como B_w é fortemente estruturalmente estável, pela Proposição 2.8, tem-se que o forward shift $F_{w'}$ também será e, por ser conjugado ao shift $B_{w''}$ via o isomorfismo isométrico ϕ definido como na resolução do Teorema 3.3, tem-se da Proposição 2.10 que a conjugação irá preservar tal propriedade. Ou seja, vale (D_1) ou (D_2) , com o peso admissível w'' , valendo uma das seguintes propriedades:

$$(E_1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \in \mathbb{N}} |w_{-k} \cdots w_{-k-n}|^{\frac{1}{n}} > 1;$$

$$(E_2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \in \mathbb{N}} |w_{-k} \cdots w_{-k-n}|^{\frac{1}{n}} < 1.$$

Portanto, observe que teremos quatro casos: se (D_1) e (E_2) são válidos simultaneamente, obtemos a condição dada em (A) . Se (D_2) e (E_1) acontecem, recaímos no caso (B) . Por fim, para a condição (C) , basta que (D_2) e (E_1) aconteçam. A combinação

restante, que seria (D_1) e (E_1) não acontecerá pois pelo Lema [3.7](#), teríamos que B_w não possuiria estabilidade estrutural forte e completamos assim a demonstração do teorema. $\square$

Referências Bibliográficas

- [1] A. A. Andronov and L. S. Pontryagin. Structurally stable systems. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 14:247–250, 1937.
- [2] F. Bayart. Two problems on weighted shifts in linear dynamics. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 149(12):5255–5266, 2021.
- [3] N. C. Bernardes, Jr., P. R. Cirilo, U. B. Darji, A. Messaoudi, and E. R. Pujals. Expansivity and shadowing in linear dynamics. *J. Math. Anal. Appl.*, 461(1):796–816, 2018.
- [4] N. C. Bernardes, Jr. and A. Messaoudi. Shadowing and structural stability for operators. *Ergodic Theory Dyn. Syst.*, 41(4):961–980, 2021.
- [5] G. Botelho, D. Pellegrino, and E. Teixeira. *Fundamentos de análise funcional*. SBM, 2012.
- [6] R. Bowen. ω -limit sets for axiom a diffeomorphisms. *J. Differential Equations*, 18(2):333–339, 1975.
- [7] P. Cirilo, B. Gollobit, and E. Pujals. Dynamics of generalized hyperbolic linear operators. *Adv. Math.*, 387:107830, 2021.
- [8] C. R. De Oliveira. *Introdução à análise funcional*. Impa, 2014.
- [9] R. M. Gethner and J. H. Shapiro. Universal vectors for operators on spaces of holomorphic functions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 100(2):281–288, 1987.
- [10] K.-G. Grosse-Erdmann and A. P. Manguillot. *Linear chaos*. Springer Science & Business Media, 2011.
- [11] P. Hartman. A lemma in the theory of structural stability of differential equations. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 11:610–620, 1960.
- [12] C. Kitai. *Invariant closed sets for linear operators*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1982. Thesis (Ph.D.)—University of Toronto (Canada).

- [13] J. Ombach. The shadowing lemma in the linear case. *Univ. Iagel. Acta Math.*, 31:69–74, 1994.
- [14] K. Palmer. *Shadowing in dynamical systems*, volume 501 of *Mathematics and its Applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000. Theory and applications.
- [15] S. Y. Pilyugin. *Shadowing in dynamical systems*, volume 1706 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [16] J. G. Sinaĭ. Gibbs measures in ergodic theory. *Uspehi Mat. Nauk*, 27(4(166)):21–64, 1972.