

Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Mestrado em Matemática

# Uma introdução às Variedades Tóricas

FAGNER DA SILVA LIMA

JOÃO PESSOA – PB  
MARÇO DE 2018

Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Mestrado em Matemática

# Uma introdução às Variedades Tóricas

por

FAGNER DA SILVA LIMA

sob a orientação da

Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Miriam da Silva Pereira

João Pessoa – PB  
Março de 2018

**ATA DA SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DO ALUNO FAGNER DA SILVA LIMA, CANDIDATO AO TÍTULO DE MESTRE EM MATEMÁTICA NA ÁREA DE GEOMETRIA E TOPOLOGIA.**

1Aos 20 (vinte) dias do mês de março do ano de dois mil e dezoito, às 09:00 horas, na  
2sala de reuniões do Departamento de Matemática, do Centro de Ciências Exatas e da  
3Natureza – CCEN, da Universidade Federal da Paraíba – UFPB, reuniram-se em caráter  
4de solenidade pública, os membros da comissão designada para avaliar **Fagner da Silva**  
5**Lima** candidato ao grau de Mestre em Matemática, na área de **Geometria e Topologia**.  
6Foram componentes da Banca Examinadora, os professores Miriam da Silva Pereira  
7(Orientadora) - Doutora em Matemática, Nivaldo de Góes Grulha Júnior - Doutor em  
8Matemática, e Thaís Maria Dalbelo - Pós-Doutoranda em Matemática, sendo a primeira  
9integrante do corpo docente da Universidade Federal da Paraíba-UFPB, o segundo  
10integrante do corpo docente do Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação –  
11ICMC/USP, e a terceira integrante da Universidade Federal de São Carlos-UFSCAR.  
12Dando início aos trabalhos, a Presidente da Banca, Miriam da Silva Pereira, após  
13declarar os objetivos da reunião, apresentou o candidato a quem concedeu a palavra  
14para que dissertasse, oral e sucintamente, sobre o tema apresentado, intitulado “**Uma**  
15**Introdução às Variedades Tóricas**”. Após discorrer sobre o referido tema, o candidato  
16foi arguido pelos examinadores na forma regimental. Ato contínuo passou a comissão,  
17em caráter secreto, a proceder à avaliação e julgamento do trabalho, concluindo por  
18atribuir-lhe o conceito **Aprovado**. Em face de aprovação, declarou o Presidente achar-se  
19o avaliado, legalmente habilitado a receber o Grau de Mestre em Matemática, cabendo a  
20Universidade Federal da Paraíba, providências como de direito, à expedição do Diploma  
21a que o mesmo fez jus. Nada mais havendo a tratar, eu, Roseli Agapito da Silva Guedes,  
22na qualidade de secretária, lavrei a Ata, que submeto a aprovação da Comissão  
23Examinadora.

24

**João Pessoa, 20 de março de 2018.**

25**Banca Examinadora:**

26Miriam da Silva Pereira \_\_\_\_\_

27Nivaldo de Góes Grulha Júnior \_\_\_\_\_

28Thaís Maria Dalbelo \_\_\_\_\_

**Catálogo na publicação**  
**Seção de Catalogação e Classificação**

L732i Lima, Fagner da Silva.

Uma introdução às variedades tóricas / Fagner da  
Silva Lima. - João Pessoa, 2018.

80 f. : il.

Orientação: Miriam da Silva Pereira.

Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Geometria. 2. Variedades tóricas. 3. Topologia.

I. Pereira, Miriam da Silva. II. Título.

UFPB/BC

CDU 514(043)

# Uma introdução às Variedades Tóricas

por

Fagner da Silva Lima <sup>1</sup>

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

**Área de Concentração: Geometria/Topologia**

Aprovada em 20 de março de 2018.

**Banca Examinadora:**

---

**Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Miriam da Silva Pereira – UFPB**  
(Orientadora)

---

**Prof. Dr. Nivaldo de Góes Grulha Júnior – ICMC-USP**  
(Examinador Externo)

---

**Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup> Thaís Maria Dalbello– UFSCar**  
(Examinador Externo)

---

<sup>1</sup>O autor foi bolsista do CNPq durante o curso de Mestrado Acadêmico em Matemática da UFPB.

*À minha rainha, minha  
mãe Jacira Alves (in memo-  
riam).*

*Aos meus filhos Helyan e  
Luís Fernando.*

*À minha amada esposa,  
Luzia Eliene.*

# Agradecimentos

A Deus por me permitir entrar nesse programa, cursá-lo mesmo que com bastantes dificuldades e tranquilidade, sapiência para conclusão desse mestrado. Foram dias difíceis longe do meu seio familiar.

A minha querida orientadora Dr<sup>a</sup> Miriam Pereira, por todas as nossas conversas a respeito da orientação ou não, com você aprendi novas habilidades. Foste mais que uma orientadora, em certos momentos era como uma irmã para mim.

Agradeço a todos professores desse programa, aprendi bastante com todos vocês.

Aos professores Dr<sup>o</sup>. Nivaldo de Góes Grulha Júnior e Dr<sup>a</sup> Thais Maria Dalbello por aceitarem participar da banca desse trabalho, bem como as inúmeras contribuições para essa dissertação.

A minha esposa, Eliene, por entender que minha ausência era necessária, todos os dias eu pensava em você.

Ao Dr<sup>o</sup> Pedro de Souto, homem íntegro. Me permitiu chances de sonhar, serei eternamente grato.

Aos meus filhos, peço perdão. A ausência da presença de vocês, talvez, tenha abalado minha saúde emocional, mas foi necessária. Afinal, foi esse esforço que tornou possível a realização de um sonho.

Aos meus colegas do mestrado: Adelson, Bosoerg, Douglas, Sérgio e Rafael pelo companheirismo e estudos.

A todos que de certa forma contribuíram para minha formação e torceram por mim. Deus os abençoe.

# Resumo

Neste trabalho, estudamos as variedades tóricas afins associadas a cones poliedrais grades, fortemente convexos. Através de colagem de tais variedades definimos as variedades tóricas, bem como descrevemos algumas de suas propriedades. Além disso, estudamos a ação do toro algébrico nas variedades tóricas e descrevemos suas órbitas.

**Palavras-chave:** Cones poliedrais, Variedades tóricas, Ação tórica.



# Abstract

In this work, we studied about affine toric varieties related to polyhedral lattice cones that are strongly convexes. From the collage of these varieties, we defined the toric variety, as well as describing some of their properties. Besides, we analyzed the action of the algebraic torus in the toric varieties in order to describe their orbits.

**Keywords:** Polyhedral cones, Toric varieties, Toric action.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>2</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>4</b>
1.1 Conjuntos Algébricos Afins e Ideais . . . . .	4
1.2 Conjuntos convexos . . . . .	9
<b>2 Variedades Tóricas</b>	<b>12</b>
2.1 Conceitos Básicos de Geometria Convexa . . . . .	12
2.2 Monóides . . . . .	21
2.3 Variedades Tóricas Afins . . . . .	24
2.4 Leques . . . . .	35
2.5 Variedades Tóricas . . . . .	36
2.6 Mudança de coordenadas entre variedades tóricas . . . . .	42
<b>3 A Ação Tórica e Suas Órbitas</b>	<b>45</b>
3.1 A Ação tórica . . . . .	45
3.2 Órbitas da ação tórica . . . . .	48
3.3 Propriedades topológicas . . . . .	58
3.4 Superfícies tóricas . . . . .	63
<b>A Resultados Complementares</b>	<b>68</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>71</b>

# Lista de Figuras

1.1	$\mathcal{A}$ convexo e $\mathcal{B}$ não convexo. . . . .	9
2.1	Exemplo de cones poliedrais. . . . .	13
2.2	Cone não grade. . . . .	13
2.3	Cone e seu dual. . . . .	14
2.4	Exemplos de cones e seus duais. . . . .	15
2.5	Exemplo de faces. . . . .	16
2.6	$\rho$ e seu dual $\rho^\vee$ . . . . .	18
2.7	Cones e seus duais. . . . .	20
2.8	Monóide para o caso do cone nulo. . . . .	23
2.9	Completando o monóide. . . . .	23
2.10	Representação da parte real de $X_\sigma$ em $\mathbb{R}^3$ . . . . .	27
2.11	Representação da parte real da hipérbole complexa. . . . .	30
2.12	Representação da parte real da hipérbole complexa no $\mathbb{R}^3$ . . . . .	35
2.13	Leques em $\mathbb{R}^2$ . . . . .	36
2.14	Leque $\Delta$ e $\sigma_0^\vee, \sigma_1^\vee$ e $\sigma_2^\vee$ cones duais. . . . .	38
2.15	Leque $\Delta$ e os cones duais $\sigma_1^\vee$ e $\sigma_2^\vee$ . . . . .	40
2.16	Leque $\Delta$ e os cones duais $\sigma_0^\vee, \sigma_1^\vee, \sigma_2^\vee$ e $\sigma_3^\vee$ . . . . .	41
2.17	Leque $\Delta$ e os duais $\{0\}^\vee, \sigma_1^\vee$ e $\sigma_2^\vee$ . . . . .	42

# Introdução

A teoria de variedades tóricas introduzida em geometria algébrica, tem ganhado evidência na sociedade da matemática nas últimas décadas. Diversos autores têm demonstrado interesses nesse ramo de estudo. Em 1978, V. Danilov no seu artigo *The Geometry of Toric Varieties* [6], afirma que as variedades tóricas são generalizações dos espaços afim e projetivo, por possuir uma estrutura relativamente simples. Em [11], W. Fulton afirma que a motivação inicial para os estudos das variedades tóricas, está no mergulho do toro algébrico nessas variedades. Podemos destacar também J.-P. Brasselet [1] que tem trabalhos associados a área, e além disso, os autores E. Gunter [10], D. Cox, J. Little, D. O'Shea [3] e T. Oda [15] como referências que apresentam as principais definições e resultados a respeito de variedades tóricas.

Neste trabalho estudamos as variedades tóricas do ponto de vista combinatório, tal descrição combinatória das variedades tóricas permitiu a prova de muitos resultados importantes na geometria algébrica, como por exemplo, o teorema de redução estável, na área de resolução de singularidades, provado em [13].

Desde a concepção da teoria das variedades tóricas, no início na década de 1970, com Michel Demazure [7] dando a primeira definição formal para variedades tóricas, tais variedades tiveram importantes aplicações em diversas áreas tais como teoria da codificação [20], modelagem geométrica [9], quadrados mágicos [1], estatísticas algébricas [8], dentre outras [1, 3, 6, 11]. Sendo assim é notável a importância no estudo das variedades tóricas. Além disso, alguns problemas matemáticos podem ter soluções difíceis, entretanto, no caso tórico tais problemas podem admitir soluções simples e concretas. É o caso da obstrução de Euler, como afirma T. Dalbelo [4].

Estudar variedades tóricas permite-nos estabelecer relações entre a geometria combinatória e a geometria algébrica. Em 2016, T. Dalbelo e M. Pereira no artigo intitulado, *Multitoric surfaces and Euler obstruction of a function* [5], por meio de uma aplicação estudam propriedades de algumas variedades determinantis usando variedades tóricas.

Esta dissertação está dividida em 3 capítulos. Inicialmente, estudamos variedades algébricas afins, conjuntos convexos, bem como, apresentamos alguns conceitos

---

fundamentais sobre geometria convexa, tais como cones poliedrais grades fortemente convexos, cone dual e face de um cone. E, além disso, estudamos algumas propriedades relacionadas a esses conceitos. Observamos que para cada cone no  $\mathbb{R}^n$  associamos um semigrupo  $S_\sigma$  finitamente gerado e a  $S_\sigma$ , fazemos corresponder a uma  $\mathbb{C}$ -álgebra  $R_\sigma$  finitamente gerada. Além disso, estabelecemos alguns resultados que serão uteis nos capítulos posteriores.

No *Capítulo 2*, associada a  $\mathbb{C}$ -álgebra finitamente gerada  $R_\sigma$  definimos a variedade tórica afim  $X_\sigma := \text{Spec}(R_\sigma)$ . Além disso, consideramos  $\Delta$  uma coleção de cones satisfazendo certas propriedades dadas, colamos as correspondentes variedades tóricas afins para construir a variedade tórica  $X_\Delta$ .

No *Capítulo 3*, estudamos a ação do toro algébrico  $\mathbb{T} = (\mathbb{C}^*)^n$  na variedade tórica  $X_\Delta$  e suas órbitas. Notamos que cada face  $\tau$  de cone  $\sigma$  fornece um órbita que é um toro de dimensão menor ou igual a que  $n$ . Em particular, a face nula fornece  $\mathbb{T}$  que é uma órbita desta ação. Apresentamos algumas propriedades topológicas das variedades tóricas como a compacidade e suavidade. Finalmente, a última seção desse trabalho é dedicada a um caso particular de superfícies tóricas.

# Capítulo 1

## Preliminares

Neste capítulo, relembramos algumas definições e resultados básicos para o desenvolvimento desta dissertação. Iniciamos com as definições de variedades algébricas afins e ideais, seguidos de alguns resultados sobre geometria algébrica. As principais referências para este capítulo são [3], [4], [10], [11] e [15].

### 1.1 Conjuntos Algébricos Afins e Ideais

Nessa seção, apresentamos alguns conceitos básicos tais como a definição de ideais, variedades algébricas afins, a versão fraca do teorema de Hilbert's Nullstellensatz e suas consequências. Esses resultados fundamentam a construção da teoria de variedades tôricas afins.

Denotamos por  $\mathbb{C}[\xi] = \mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_k]$  o anel de polinômios em  $k$  variáveis sobre  $\mathbb{C}$ .

**Definição 1.1.** Se  $E = (f_1, \dots, f_r) \subset \mathbb{C}[\xi]$ , o conjunto

$$V(E) = \{x \in \mathbb{C}^k : f_i(x) = 0, \forall i = 1, \dots, r\}$$

é chamado variedade algébrica afim definida por  $E$ .

Assim, variedades algébricas afins colecionam raízes de um conjunto finito de polinômios. Quando  $r = 1$ , temos que  $X = V(f)$  e dizemos que  $X$  é uma hipersuperfície.

**Definição 1.2.** Sejam  $(R, +, \cdot)$  um anel comutativo com unidade e  $I$  um subconjunto não vazio de  $R$ . Dizemos que  $I$  é um ideal de  $R$  se,

- (i)  $x + y \in I$ , para quaisquer  $x, y \in I$ ;
- (ii)  $ax \in I$  para quaisquer  $a \in R$  e  $x \in I$ .

Em outras palavras,  $I$  é fechado em relação as operações de multiplicação por elementos de  $R$  e por soma de elementos de  $I$ . Se  $I \neq R$ , dizemos que  $I$  é ideal próprio de  $R$ . Seja  $E \subset R$  um subconjunto de  $R$ , então o conjunto de todas as combinações lineares

$$\{h_1 f_1 + \cdots + h_k f_k : f_1, \dots, f_k \in E, h_1, \dots, h_k \in \mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_k]\}$$

é o ideal gerado por  $E$ . Denotamos por  $I = (E)$ .

Observamos que se  $I$  denota o ideal gerado por  $E$  então  $V(I) = V(E)$ .

**Exemplo 1.1.** Em  $\mathbb{C}^2$ , se  $I = (f)$ , onde  $f(x, y) = y - x^2$ , temos

$$V(I) = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : f(x, y) = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : y = x^2\}$$

é uma variedade algébrica afim.

**Definição 1.3.** Seja  $X \subseteq \mathbb{C}^k$ , então

$$I(X) = \{f \in \mathbb{C}[\xi] : f(p) = 0, \forall p \in X\}$$

é chamado de ideal de  $X$ .

Note que, se  $X = \emptyset$ , então segue por vacuidade que  $I(\emptyset) = \mathbb{C}[\xi]$  e, além disso,  $I(\mathbb{C}^k) = 0$ , o polinômio nulo.

**Lema 1.1.** Sejam  $E, E'$  subconjuntos de  $\mathbb{C}[\xi]$  e  $X, X'$  subconjuntos de  $\mathbb{C}^k$ .

(1) Se  $E \subset E'$  então  $V(E') \subset V(E)$ .

(2) Se  $X \subset X'$  então  $I(X') \subset I(X)$ .

*Demonstração.* (1) Dado  $a \in V(E')$ , então  $f(a) = 0$ , para todo  $f \in E'$ . Em particular,  $f(a) = 0$ , para todo  $f \in E$ , pois  $E \subset E'$ . Portanto,  $V(E') \subset V(E)$ .

(2) Consideramos  $g \in I(X')$ , então  $g(p) = 0$ , para todo  $p \in X'$ . Como  $X \subset X'$ , temos  $g(p) = 0$ , para todo  $p \in X$ . Assim,  $I(X') \subset I(X)$ . □

**Proposição 1.2.** (1) Seja  $\{V(I_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$  uma família de variedades algébricas em  $\mathbb{C}^k$  então  $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} V(I_\alpha)$  é uma variedade algébrica.

(2) Sejam  $V(I_1), \dots, V(I_k) \subset \mathbb{C}^k$  variedades algébricas então  $\bigcup_{i=1}^k V(I_i) \subset \mathbb{C}^k$  é uma variedade algébrica.

## 1. Preliminares

---

(3)  $\emptyset$  e  $\mathbb{C}^k$  são variedades algébricas.

*Demonstração.* (a) É suficiente mostrar que  $V(\sum_{\alpha \in \Lambda} I_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in \Lambda} V(I_\alpha)$ . De fato, como

$$I_\alpha \subset \sum_{\alpha \in \Lambda} I_\alpha \text{ então pelo item (1), do Lema 1.1,}$$

$$V(\sum_{\alpha \in \Lambda} I_\alpha) \subset V(I_\alpha) \subset \bigcap_{\alpha \in \Lambda} V(I_\alpha)$$

Para inclusão contrária, dado  $p \in \bigcap_{\alpha \in \Lambda} V(I_\alpha)$  então  $p \in V(I_\alpha)$  para todo  $\alpha \in \Lambda$ , daí  $f_\alpha(p) = 0$  para todo  $f_\alpha \in I_\alpha$ . Se  $g \in \sum_{\alpha \in \Lambda} I_\alpha$ , então  $g = f_{\alpha_1} + \dots + f_{\alpha_k}$ , para certos  $f_{\alpha_i} \in I_{\alpha_i}$ , para todo  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Observemos que

$$g(p) = (f_{\alpha_1} + \dots + f_{\alpha_k})(p) = f_{\alpha_1}(p) + \dots + f_{\alpha_k}(p) = 0.$$

Portanto,  $p \in V(\sum_{\alpha \in \Lambda} I_\alpha)$ .

(b) Basta mostrar que  $V(\bigcap_{i=1}^n I_i) = \bigcup_{i=1}^n V(I_i)$ . Com efeito, como  $I_i \subset \bigcap_{i=1}^n I_i$ , para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ , então pelo item (1) do Lema 1.1, temos

$$V(\bigcap_{i=1}^n I_i) \subset V(I_i) \subset \bigcup_{i=1}^n V(I_i)$$

Para mostrar a inclusão contrária, seja  $p \in \bigcup_{i=1}^n V(I_i)$  então  $p \in V(I_j)$  para algum

$j \in \{1, \dots, n\}$ , assim  $f(p) = 0$  para todo  $f \in I_j$ . Tomando  $g \in \bigcap_{i=1}^n I_i$  então

$g \in I_j$ , assim  $g(p) = 0$ . E, assim,  $p \in V(\bigcap_{i=1}^n I_i)$ .

(c) De fato,  $\emptyset = V(1)$  e  $\mathbb{C}^k = V(0)$ . Portanto,  $\emptyset, \mathbb{C}^k$  são variedades algébricas. □

A proposição acima mostra que o conjunto das variedades algébricas afins forma uma topologia em  $\mathbb{C}^k$ , denominada topologia de Zariski, onde as variedades afins são os conjuntos fechados desta topologia. Um aberto de Zariski é o complementar de um fechado de Zariski.

**Definição 1.4.** Se  $X \subset Y$  são variedades algébricas afins em  $\mathbb{C}^k$ , então  $X$  é uma subvariedade de  $Y$ .



**Definição 1.5.** Dizemos que uma variedade algébrica afim  $V \subset \mathbb{C}^m$  é irredutível, se  $V$  não pode ser escrita como união  $V_1 \cup V_2$ , onde  $V_1, V_2$  são subvariedades próprias de  $V$ .

**Definição 1.6.** Seja  $Y$  uma variedade algébrica afim. Dizemos que um subconjunto  $U$  de  $Y$  é uma quase variedade em  $Y$ , se  $U$  é um aberto de Zariski em  $Y$ .

**Lema 1.3.** Seja  $U$  uma quase variedade afim em  $Y$  e  $D$  uma quase variedade em  $Y$ . Se  $D \subset Y$  é irredutível, então  $D \cap U$  também é. Além disso, se  $D \cap U \neq \emptyset$  então  $D \cap U$  é um subconjunto aberto e denso de  $D$  na topologia de Zariski.

*Demonstração.* Veja [10], Lemma 1.29, p.209. □

**Exemplo 1.2.** Para  $x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{C}^k$ , consideremos  $E = \{\xi_1 - x_1, \dots, \xi_k - x_k\}$  então  $V(E) = \{x\}$ , ou seja, qualquer ponto de  $\mathbb{C}^k$  é uma variedade algébrica afim e portanto, um fechado na topologia de Zariski. E ainda,  $I(\{x\}) = \{f \in \mathbb{C}[\xi] : f(x) = 0\}$ , ou seja,  $f$  é da forma

$$\mathbb{C}[\xi](\xi_1 - x_1) + \dots + \mathbb{C}[\xi](\xi_k - x_k)$$

assim  $I(\{x\}) = \mathbb{C}[\xi](\xi_1 - x_1) + \dots + \mathbb{C}[\xi](\xi_k - x_k)$ . Definimos  $I(\{x\}) := \mathcal{M}_x$

**Proposição 1.4.** Para qualquer  $x \in \mathbb{C}^k$  o ideal  $\mathcal{M}_x$  é maximal.

*Demonstração.* Com efeito, dado  $f \in \mathbb{C}[\xi]$  tal que  $f(0) \neq 0$ , então  $f = a_0 + \sum_{\alpha \neq 0} a_\alpha x^\alpha$ , com  $a_0 \neq 0$ . Seja  $\bar{f} \in \frac{\mathbb{C}[\xi]}{\mathcal{M}_x}$ , assim  $\bar{f} = [a_0] \in \frac{\mathbb{C}[\xi]}{\mathcal{M}_x}$ ,  $a_0 \neq 0$ . Como  $a_0 \in \mathbb{C}$ , e  $\mathbb{C}$  é corpo existe  $a_0^{-1} \in \mathbb{C}$ . Logo existe  $\bar{f}^{-1} = [a_0^{-1}] \in \frac{\mathbb{C}[\xi]}{\mathcal{M}_x}$ , isto é,  $\frac{\mathbb{C}[\xi]}{\mathcal{M}_x}$  é corpo. E, portanto,  $\mathcal{M}_x$  é maximal. □

**Teorema 1.5** (Versão fraca do Nullstellensatz). *Todo ideal maximal em  $\mathbb{C}[\xi]$  pode ser escrito na forma  $\mathcal{M}_x$  para um ponto  $x$ .*

*Demonstração.* Ver [10], p. 204. □

**Corolário 1.6.** Consideramos  $\mathbb{C}^k$  o espaço afim,  $Spec(\mathbb{C}[\xi])$  o conjunto de ideais maximais  $\mathcal{M}$  em  $\mathbb{C}[\xi]$  e  $Hom_{\mathbb{C}\text{-alg}}(\mathbb{C}[\xi], \mathbb{C})$  o conjunto de homomorfismos de  $\mathbb{C}$ -álgebras de  $\mathbb{C}[\xi]$  em  $\mathbb{C}$ . Existem correspondências biunívocas entre pontos de  $\mathbb{C}^k$  e ideais maximais em  $Spec(\mathbb{C}[\xi])$  e entre ideais maximais em  $Spec(\mathbb{C}[\xi])$  e o conjunto  $Hom_{\mathbb{C}\text{-alg}}(\mathbb{C}[\xi], \mathbb{C})$ .

*Demonstração.* Ver [10], p.205. □

A primeira correspondência associa pontos  $x = (x_1, \dots, x_k)$  de  $\mathbb{C}^k$  a ideais maximais  $\mathcal{M}_x = \mathbb{C}[\xi](\xi_1 - x_1) + \dots + \mathbb{C}[\xi](\xi_k - x_k)$  de  $\mathbb{C}[\xi]$ . Na segunda correspondência associamos a cada ideal maximal  $\mathcal{M}_x$  o homomorfismo  $\phi : \mathbb{C}[\xi] \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $ker \phi = \mathcal{M}_x$ . Assim, para cada  $f \in \mathbb{C}[\xi]$  temos que  $\phi(f) = f(x)$ .

**Lema 1.7.** Seja  $I$  um ideal de  $\mathbb{C}[\xi]$ , então

$$V(I) = \{x \in \mathbb{C}^k : I \subset \mathcal{M}_x\}.$$

*Demonstração.* Veja [10], p.206. □

**Definição 1.7.** Seja  $I$  um subconjunto em  $\mathbb{C}[\xi]$ . Denotamos o ideal de  $V(I)$  por  $I_V = I(V(I))$  e  $R_V = \frac{\mathbb{C}[\xi]}{I_V}$  o anel de coordenadas da variedade algébrica  $V(I)$ . Em particular,  $R_V$  é gerado como uma  $\mathbb{C}$ -álgebra pelas classes  $\bar{\xi}_j$  de funções coordenadas  $\xi_j$ .

Se  $I = \{0\}$ , então  $V(I) = \mathbb{C}^k$  e  $I(V(I)) = I(\mathbb{C}^k) = 0$ , daí  $R_V = \mathbb{C}[\xi]$ . O Corolário 1.6 escrito para  $I = \{0\}$  é generalizado para qualquer ideal na seguinte forma:

**Corolário 1.8.** Sejam  $V \subset \mathbb{C}^k$  uma variedade algébrica afim,  $Spec(R_V)$  o espectro do anel de coordenadas  $R_V$  e  $Hom_{\mathbb{C}\text{-alg}}(R_V, \mathbb{C})$  o conjunto de homomorfismo de  $\mathbb{C}$ -álgebras de  $R_V$  em  $\mathbb{C}$ . Existem correspondências biunívocas entre variedades algébricas afins  $V$  e ideais maximais  $\mathcal{M} \subset R_V$  em  $Spec(R_V)$  e entre ideais maximais no  $Spec(R_V)$  e homomorfismos de  $\mathbb{C}$ -álgebras de  $R_V$  em  $\mathbb{C}$ .

*Demonstração.* Ver [3], p.35. □

Sabemos que as variedades algébricas afins são os conjuntos fechados da topologia de Zariski e além disso, se associarmos cada ideal  $I$  de  $\mathbb{C}[\xi]$ , o conjunto  $V(I) = \{\mathcal{M} \in Spec(\mathbb{C}[\xi]) : I \subset \mathcal{M}\}$ , então  $Spec(\mathbb{C}[\xi])$  é um espaço topológico, cujo os conjuntos fechados são as variedades algébricas afins  $V(I)$ , ou seja, no  $Spec(\mathbb{C}[\xi])$  definimos a topologia de Zariski. Assim a consequência do corolário anterior é que o conjunto das variedades algébricas afins  $V$  com a topologia de Zariski é homeomorfo ao  $Spec(R_V)$ , de seu anel de coordenadas  $R_V$ , isto é,

$$V \cong Spec(R_V).$$

Se  $R$  é uma  $\mathbb{C}$ -álgebra comutativa finitamente gerada, então pela correspondência acima  $R$  determina uma variedade algébrica afim complexa  $Spec(R)$ . Assim, se os geradores de  $R$  são escolhidos, podemos escrever  $R = \frac{\mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_k]}{I}$ , onde  $I$  é um ideal em  $\mathbb{C}[\xi]$ . Então,  $Spec(R)$  é identificado com a subvariedade  $V(I) \subset \mathbb{C}^k$ , que é o conjunto dos zeros comuns dos polinômios em  $I$ .

**Observação 1.1.** A  $\mathbb{C}$ -álgebra  $R$  finitamente gerada pode ser escrita  $\frac{\mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_k]}{I}$ , como um anel de coordenadas, para diferentes escolhas de  $k$  e do ideal  $I$ . Isto significa que podemos associar de diferentes maneiras os conjuntos algébricos  $V(I) \subset \mathbb{C}^k$ .

Porém, o Corolário 1.8 mostra que estas diferentes representações  $V(I)$  são homeomorfas a variedade  $\text{Spec}(R_V)$ .

## 1.2 Conjuntos convexos

Essa seção tem por objetivo principal apresentar o importante conceito de cone e mostrar que cones são conjuntos convexos.

**Definição 1.8.** Dizemos que um conjunto  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$  é convexo, se para todos  $x, y \in \mathcal{C}, x \neq y$ , o segmento de reta

$$[x, y] := \{\lambda x + (1 - \lambda)y; 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

está inteiramente contido em  $\mathcal{C}$ .

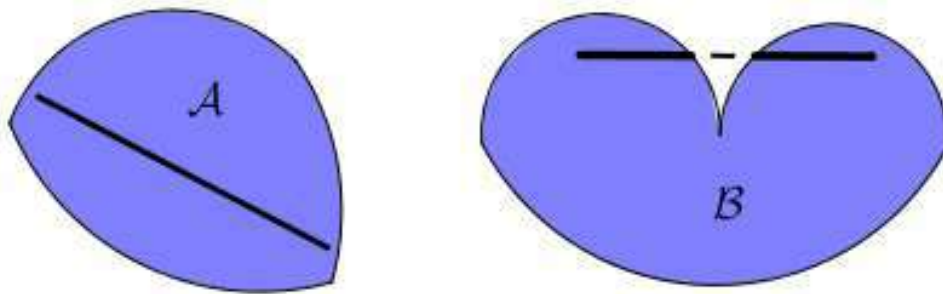


Figura 1.1:  $\mathcal{A}$  convexo e  $\mathcal{B}$  não convexo.

**Exemplo 1.3.** O disco  $D = D[x_0, r] = \{x \in \mathbb{R}^n; |x - x_0| \leq r\}$  é conjunto convexo.

De fato, dados  $a, b \in D$ , temos que  $|a - x_0| \leq r$  e  $|b - x_0| \leq r$ . Notamos que para qualquer  $\lambda \in [0, 1]$  vale que  $x_0 = \lambda x_0 + (1 - \lambda)x_0$ , logo

$$|\lambda b + (1 - \lambda)a - x_0| = |\lambda b + (1 - \lambda)a - \lambda x_0 - (1 - \lambda)x_0| = |\lambda(b - x_0) + (1 - \lambda)(a - x_0)|.$$

Agora, usando a desigualdade triangular e o fato que  $a, b \in D$ , temos

$$|\lambda b + (1 - \lambda)a - x_0| \leq \lambda|b - x_0| + (1 - \lambda)|a - x_0| \leq \lambda r + (1 - \lambda)r = r,$$

e, portanto,  $D$  é um conjunto convexo.

**Definição 1.9.** Dizemos que  $x$  é uma combinação convexa de  $x_1, \dots, x_r \in \mathbb{R}^n$ , se existem  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$  tal que

(i)  $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_r x_r;$

(ii)  $\lambda_1 + \dots + \lambda_r = 1;$

(iii)  $\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_r \geq 0$ .

**Definição 1.10.** O conjunto  $M \subset \mathbb{R}^n$  de todas as combinações convexas de  $M$  é chamado de envoltória convexa, denotado por  $Conv(M)$ .

**Proposição 1.9.** O conjunto  $M \subset \mathbb{R}^n$  é convexo se, e somente se, contém todas suas combinação convexas, isto é,  $M = Conv(M)$ .

*Demonstração.* Vamos mostrar que  $M$  é convexo. Dados  $x, y \in M = Conv(M)$  existem  $x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_s \in M$  e  $\lambda_1, \dots, \lambda_r, \mu_1, \dots, \mu_s \in \mathbb{R}$  tais que

$$x = \sum_{n=1}^r \lambda_n x_n, y = \sum_{n=1}^s \mu_n y_n$$

onde  $\sum_{i=1}^r \lambda_i = \sum_{i=1}^s \mu_i = 1$ ,  $\lambda_i \geq 0$  e  $\mu_i \geq 0$ , para todo  $i \in \{1, \dots, r\}$  e  $i \in \{1, \dots, s\}$ .

Reorganizando os índices se necessário, podemos supor que  $r = s$  e  $x_j = y_j$ ,  $j \in \{1, \dots, r\}$ . Para  $0 \leq \lambda \leq 1$ , temos

$$\begin{aligned} \lambda x + (1 - \lambda)y &= \lambda \sum_{n=1}^s \lambda_n x_n + (1 - \lambda) \sum_{n=1}^s \mu_n x_n \\ &= [\lambda \lambda_1 + (1 - \lambda)\mu_1]x_1 + \dots + [\lambda \lambda_r + (1 - \lambda)\mu_r]x_r \end{aligned}$$

Como

$$\lambda \lambda_1 + (1 - \lambda)\mu_1 + \dots + \lambda \lambda_r + (1 - \lambda)\mu_r = \lambda + 1 - \lambda = 1$$

e todos os coeficientes são não negativos, temos que  $\lambda x + (1 - \lambda)y$  é uma combinação convexa de  $x_1, \dots, x_r$ , como  $M = Conv(M)$ , segue que  $M$  é convexo. Reciprocamente, temos que  $Conv(M) \subset M$ . Por outro lado, como sempre vale que  $M \subset Conv(M)$ , concluímos que  $M = Conv(M)$ .  $\square$

**Definição 1.11.** Denominamos envoltória positiva, ou cone determinado por  $M$ , o conjunto de todas combinações lineares não negativas,

$$x = \sum_{n=1}^k \lambda_n x_n$$

onde  $x_i \in M$  e  $\lambda_i \geq 0$ , para todo  $i \in 1, \dots, k$ .

**Exemplo 1.4.** A região  $Q_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_1 \geq 0 \text{ e } x_2 \geq 0\}$ , o primeiro quadrante do  $\mathbb{R}^2$ , é um cone. Com efeito, dado  $x = (x_1, x_2) \in Q_1$ , podemos escrever

$$x = (x_1, x_2) = (x_1, 0) + (0, x_2) = x_1(1, 0) + x_2(0, 1) = x_1 e_1 + x_2 e_2 = \sum_{i=1}^2 x_i e_i,$$

onde  $e_1, e_2$  são os vetores da base canônica do  $\mathbb{R}^2$ . De maneira geral, qualquer quadrante em  $\mathbb{R}^2$  é um cone.

**Lema 1.10.** A envoltória positiva de qualquer conjunto  $M$  é convexa.

*Demonstração.* Como todas as combinações lineares não negativas, são também combinações convexas, isto é, o conjunto das combinações lineares não negativas contém o conjunto das combinações convexas, então o resultado segue diretamente da Proposição 1.9. □

# Capítulo 2

## Variedades Tóricas

Neste capítulo, construímos as variedades tóricas afins associadas a cones poliedrais grade, fortemente convexos. E, posteriormente, generalizamos esta construção definindo as variedades tóricas, através da “colagem” de variedades tóricas afins. As principais referências usadas nessa seção foram [1],[4] e [11].

### 2.1 Conceitos Básicos de Geometria Convexa

Nesta seção, apresentamos algumas definições e resultados sobre combinatória, que serão muito importantes no decorrer desse trabalho.

Denotamos por  $N$  a grade  $\mathbb{Z}^n$  de  $\mathbb{R}^n$  e definimos  $M$  a grade dual  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N; \mathbb{Z})$  no espaço dual  $(\mathbb{R}^n)^*$  de  $\mathbb{R}^n$ .

**Definição 2.1.** Seja  $A = \{v_1, \dots, v_r\}$  um conjunto finito de vetores em  $\mathbb{R}^n$ , o conjunto

$$\sigma = \{x \in \mathbb{R}^n; x = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r, \lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_i \geq 0\}$$

é chamado cone poliedral. Os vetores  $v_1, \dots, v_r$  são chamados os geradores do cone  $\sigma$ . Se  $A = \emptyset$ , então  $\sigma$  é o cone nulo.

**Observação 2.1.** A definição de cone poliedral é um caso particular da envoltória positiva, pois o número de geradores do cone poliedral é finito. Logo, segue do Lema 1.10 que cones poliedrais são conjuntos convexos.

A dimensão de um cone  $\sigma$  é a dimensão do menor espaço vetorial contendo  $\sigma$ .

**Definição 2.2.** Dizemos que um cone  $\sigma$  em  $\mathbb{R}^n$  é cone grade, se todos os seus geradores pertencem a  $N$ . Um cone  $\sigma$  é chamado fortemente convexo se  $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$ , onde  $-\sigma = \{-x : x \in \sigma\}$ .

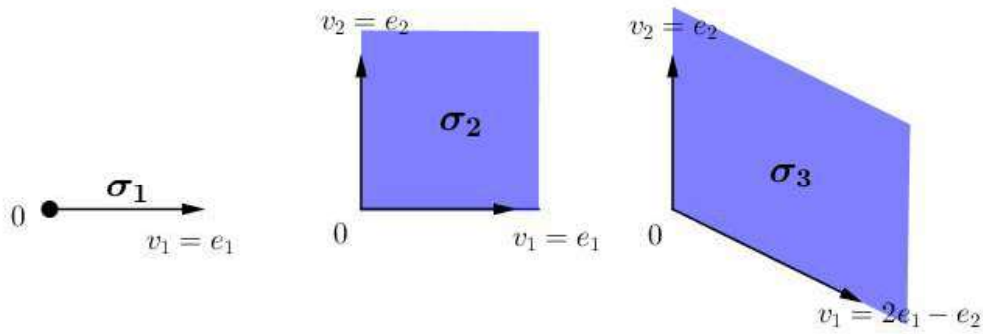


Figura 2.1: Exemplo de cones poliedrais.

**Exemplo 2.1.** Os cones apresentados na Figura 2.1 são cones grade e fortemente convexos. De fato consideramos o cone  $\sigma_1$  gerado por  $e_1$ , ou seja,

$$\sigma_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = \lambda e_1, \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \geq 0\}$$

Suponhamos que  $\sigma_1 \cap (-\sigma_1) \neq \{0\}$ , então existe  $a \in \sigma_1 \cap (-\sigma_1)$ , com  $a \neq 0$ . Assim,  $a = \lambda e_1, \lambda \geq 0$  e  $a = -x, x \in \sigma_1$ . Portanto,

$$-x = \lambda e_1 \Rightarrow x = -\lambda e_1, -\lambda < 0,$$

o que não pode ocorrer. Logo,  $\sigma_1 \cap (-\sigma_1) = \{0\}$  e, portanto,  $\sigma_1$  é fortemente convexo. De maneira análoga mostramos que os outros dois cones são fortemente convexos. Além disso os geradores dos cones são elementos de  $N \cong \mathbb{Z}^2$ , logo todos os cones são cones grade.

**Exemplo 2.2.** O cone  $\tau \subset \mathbb{R}^2$  gerados pelos vetores  $e_1$  e  $e_2 - \sqrt{2}e_1$  não é um cone grade, pois o gerador  $e_2 - \sqrt{2}e_1 = (-\sqrt{2}, 1)$  não é um elemento de  $\mathbb{Z}^2$ .

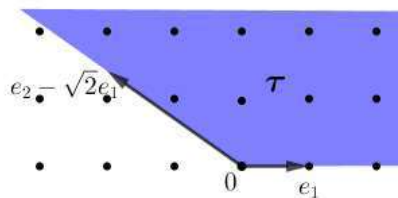


Figura 2.2: Cone não grade.

**Definição 2.3.** Dado um cone  $\sigma$  no  $\mathbb{R}^n$ , o seu cone dual  $\sigma^\vee$  é definido como

$$\sigma^\vee = \{u \in (\mathbb{R}^n)^* : \langle u, v \rangle \geq 0, \forall v \in \sigma\},$$

onde  $\langle u, v \rangle := u(v)$ .

Dados um cone  $\sigma$  e  $\beta$  um conjunto de geradores de  $\sigma$  em  $\mathbb{R}^n$ , uma maneira para encontrar seu cone dual  $(\mathbb{R}^n)^*$ , é determinar o conjunto  $\beta^*$  (conjunto de geradores), pois neste caso, o cone dual é inteiramente determinado por  $\beta^*$  (o dual de  $\beta$ ).

**Exemplo 2.3.** Consideramos o espaço  $(\mathbb{R}^2)^*$ , com a base canônica  $\{u_1 = e_1^*, u_2 = e_2^*\}$ . Vamos determinar o cone dual, associado ao conjunto  $\beta = \{v_1 = e_1, v_2 = 2e_1 + e_2\}$ .

Dado  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  podemos escrever

$$(x, y) = (x - 2y)v_1 + yv_2.$$

Assim,  $\beta^* = \{x - 2y, y\} = \{u_1 = e_1^* - 2e_2^*, u_2 = e_2^*\}$  é o dual desejado.

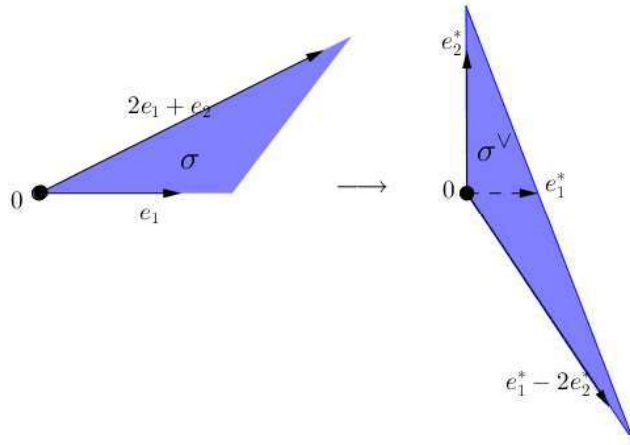


Figura 2.3: Cone e seu dual.

**Exemplo 2.4.** No  $\mathbb{R}^2$  consideramos os cones  $\sigma$  gerado por  $\{e_2, 2e_1 - e_2\}$  e  $\tau$  gerado por  $e_2$ . Para encontrar  $\sigma^\vee$ , podemos proceder conforme o exemplo anterior para mostrar que  $\sigma^\vee$  é gerado por  $e_1^* + 2e_2^*, e_1^*$  (Figura 2.4). Agora para obter  $\tau^\vee$ , notamos que

$$\langle e_1^*, e_2 \rangle = 0, \langle e_2^*, e_2 \rangle = 1 > 0, \langle -e_1^*, e_2 \rangle = 0$$

E, assim,  $\tau^\vee$  é gerado por  $e_1^*, -e_1^*, e_2^*$  (Figura 2.4).

**Definição 2.4.** Sejam  $\sigma$  um cone,  $\lambda \in \sigma^\vee \cap M$  e denotamos  $\lambda^\perp = \{v \in \sigma : \langle \lambda, v \rangle = 0\}$  então o conjunto

$$\tau = \sigma \cap \lambda^\perp = \{v \in \sigma; \langle \lambda, v \rangle = 0\}$$

é chamado de face de  $\sigma$  escrevemos  $\tau \preceq \sigma$ . Uma faceta é uma face de codimensão 1.

Dado  $\sigma$  um cone em  $\mathbb{R}^n$ , temos que  $\sigma \preceq \sigma$ . De fato,  $\sigma = \sigma \cap 0^\perp$ . Se  $\tau \preceq \sigma$ , com  $\tau \neq \sigma$ , dizemos que  $\tau$  é uma face própria de  $\sigma$  e denotamos por  $\tau \prec \sigma$ .



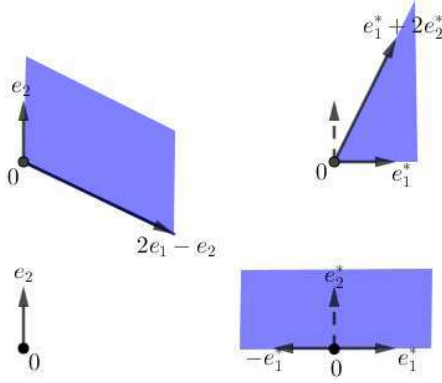


Figura 2.4: Exemplos de cones e seus duais.

**Definição 2.5.** Compreende-se como o interior relativo de um cone  $\sigma$ , é o interior topológico do espaço  $\mathbb{R}\sigma$  gerado por  $\sigma$ . Denotamos o interior relativo por  $relint(\sigma)$ . A fronteira relativa de  $\sigma$  é definida por  $\partial\sigma := \sigma \setminus relint(\sigma)$ . As faces próprias de  $\sigma$  estão contidas na fronteira de  $\sigma$ .

**Lema 2.1.** Seja  $\sigma \subset \mathbb{R}^n$  um cone e  $v \in \sigma$ . As seguintes afirmações são equivalentes:

- (i)  $v \in relint(\sigma)$ ;
- (ii)  $\langle u, v \rangle > 0$ , para qualquer  $u \in \sigma^\vee \setminus \sigma^\perp$ ;
- (iii)  $\sigma^\vee \cap v^\perp = \sigma^\perp$ .

onde  $\sigma^\perp := \{u \in \sigma^\vee : \langle u, v \rangle = 0, \forall v \in \sigma\}$ .

*Demonstração.* (i)  $\Rightarrow$  (ii) Suponhamos que (ii) não vale, então existe  $u \in \sigma^\vee \setminus \sigma^\perp$ , tal que assim  $\langle u, v \rangle \leq 0$ . Como não pode acontecer  $\langle u, v \rangle < 0$ , então  $\langle u, v \rangle = 0$ , e isso significa que  $v \in \tau = \sigma \cap u^\perp$ , ou seja,  $v$  está contido na face própria  $\sigma \cap u^\perp$  de  $\sigma$ . Portanto,  $v$  não pode pertencer ao interior de  $\sigma$  e, assim, (i) não vale.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii)

$$\begin{aligned} \sigma^\vee \cap v^\perp &= \{u \in (\mathbb{R}^n)^* : \langle u, v \rangle \geq 0, \forall v \in \sigma\} \cap \{u \in \sigma^\vee : \langle u, v \rangle = 0\} \\ &= \{u \in \sigma^\vee : \langle u, v \rangle = 0, \forall v \in \sigma\} = \sigma^\perp \end{aligned}$$

(iii)  $\Rightarrow$  (i)

Suponhamos (i) não vale, ou seja, que  $v$  não pertença ao  $relint(\sigma)$ . Então,  $v \in \partial\sigma$ , ou seja,  $v \in \rho$ , onde  $\rho$  é uma face própria de  $\sigma$ . Assim, podemos escrever  $\rho = \sigma \cap u^\perp$  para algum  $u \in \sigma^\vee$ , onde  $u$  não pode pertencer a  $\sigma^\perp$ , pois  $\rho \neq \sigma$ . Logo,  $u$  está em  $\sigma^\vee \cap v^\perp$ , mas não em  $\sigma^\perp$ , contradizendo a hipótese. Portanto,  $v$  está contido no interior relativo de  $\sigma$ .  $\square$

**Exemplo 2.5.** Consideramos  $\sigma \subset \mathbb{R}^2$  o cone gerado pelos vetores  $v_1 = e_2$  e  $v_2 = 2e_1 - e_2$  (Figura 2.5). O cone  $\sigma$ , possui uma face de dimensão zero, duas

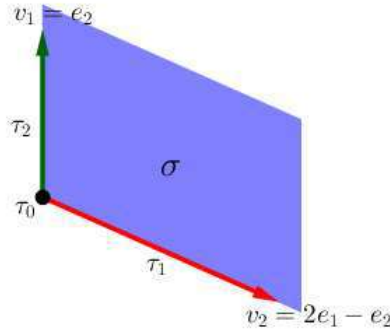


Figura 2.5: Exemplo de faces.

faces de dimensão 1 e uma face de dimensão 2. De fato, a face 2-dimensional é o próprio cone que é igual  $\sigma \cap 0^\perp$ , pois  $\langle 0, v \rangle = 0$ , para todo  $v \in \sigma$ ; a face de dimensional nula é igual a  $\tau_0 = \{(0, 0)\} = \sigma \cap \lambda_0^\perp$ , onde podemos ter  $\lambda_0 = e_1^* + e_2^*$ , pois dado  $x = \lambda_1 e_2 + \lambda_2 (2e_1 - e_2) \in \sigma$ ,

$$\lambda_0(x) = (e_1^* + e_2^*)(\lambda_1 e_2 + \lambda_2 (2e_1 - e_2)) = 0.$$

Finalmente, tomando  $\lambda_1 = e_1^* + 2e_2^*$ ,  $\lambda_2 = e_1^*$  obtemos as faces de dimensão 1 que são:  $\tau_1 = \sigma \cap \lambda_1^\perp$  e  $\tau_2 = \sigma \cap \lambda_2^\perp$ , respectivamente. Além disso,  $\tau_1$  e  $\tau_2$  são facetas, pois possuem codimensão 1.

Embora muito simples, o conceito de face desempenha um papel muito importante para construção das variedades tóricas. A seguinte proposição fundamental para alguns resultados deste trabalho é uma consequência da teoria de conjuntos convexos (veja [18])

**Proposição 2.2.** Se  $\sigma$  é um cone poliedral convexo e  $v_0 \notin \sigma$ , então existe  $u_0 \in \sigma^\vee$  com  $\langle u_0, v_0 \rangle < 0$ .

Quando  $\sigma$  gera  $\mathbb{R}^n$  e  $\tau$  é uma faceta de  $\sigma$ , existe  $u \in \sigma^\vee$ , único a menos de múltiplos, tal que  $\tau = \sigma \cap u^\perp$ . Denotamos um vetor deste tipo por  $u_\tau$ .

**Proposição 2.3.** Se  $\sigma$  cone poliedral convexo que gera  $\mathbb{R}^n$  então  $\sigma = \bigcap_{\tau \prec \sigma} H_\tau = \{v \in \mathbb{R}^n : \langle u_\tau, v \rangle \geq 0\}$ .

*Demonstração.* Dado  $v \in \sigma$  então  $\langle u, v \rangle \geq 0$  para todo  $u \in \sigma^\vee$ , em particular, para  $u_\tau \in \sigma^\vee$ . Logo,  $v \in \bigcap_{\tau \prec \sigma} H_\tau$ . Para mostrar a inclusão contrária, suponhamos que

$\bigcap_{\tau \prec \sigma} H_\tau \not\subset \sigma$ , isto é,  $v \in \bigcap_{\tau \prec \sigma} H_\tau$ , mas  $v \notin \sigma$ . Por hipótese  $\sigma$  é convexo. Então, dados  $v', v \in \sigma$  então  $[v', v] \subset \sigma$ . Consideremos  $v' \in \text{relin}(\sigma)$  e  $w$  o último ponto em  $\sigma$  no segmento de reta  $[v', v]$ . Assim,  $w \in \partial\sigma$  e em alguma faceta  $\tau$ . Então, temos  $\langle u_\tau, v' \rangle > 0$  e  $\langle u_\tau, w \rangle = 0$ , por outro lado,  $v \notin \sigma$ , pela Proposição 2.2 temos  $\langle u_\tau, v \rangle < 0$ , o que é uma contradição.  $\square$

A demonstração da proposição acima fornece um modelo para encontrar os geradores do cone dual  $\sigma^\vee$ . Se  $\sigma$  gera  $\mathbb{R}^n$ , então a coleção formada pelos vetores  $u_\tau$  tal que  $\tau$  é uma faceta de  $\sigma$  gera  $\sigma^\vee$ . Com efeito, se  $u \in \sigma^\vee$  e  $u$  não pertence ao cone gerado por  $u_\tau$ , aplicando a Proposição 2.2, temos existe  $v \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\langle u, v \rangle < 0$  e  $\langle u_\tau, v \rangle \geq 0$  para todas as facetas  $\tau$ , o que contraria Proposição 2.3.

Se  $\sigma$  gera um espaço vetorial próprio  $W = \mathbb{R}\sigma$ , então  $\sigma^\vee$  é gerado por levantamento dos geradores do cone dual  $W^* = \frac{(\mathbb{R}^n)^*}{W^\perp}$ , juntamente com vetores  $u$  e  $-u$ , onde  $u$  varia sobre a base para  $W^\perp$ .

Portanto, cones polidrais podem ser caracterizados da seguinte forma: Se  $u_1, \dots, u_t$  são vetores em  $(\mathbb{R}^n)^*$  que geram  $\sigma^\vee$  então,

$$\sigma = \bigcap_{i=1}^t H_{u_i} = \{v \in \mathbb{R}^n : \langle u_1, v \rangle \geq 0, \dots, \langle u_t, v \rangle \geq 0\}. \quad (2.1)$$

**Exemplo 2.6.** Em  $\mathbb{R}^2$  consideramos o cone  $\rho$  gerado apenas pelo vetor  $e_1$  (Figura 2.6). Neste caso,  $W = \mathbb{R}\rho$  é subespaço próprio do  $\mathbb{R}^2$ . Assim  $\rho^\vee$  é gerado  $e_1^*$ , pois  $\langle e_1^*, e_1 \rangle > 0$ , ou seja,  $e_1^* \in \rho^\vee$ , e ainda por  $e_2^*, -e_2^*$ , pois  $e_2 \in W^\perp$ . Portanto,  $\rho^\vee$  é gerado por  $e_1^*, e_2^*$  e  $-e_2^*$ .

**Proposição 2.4.** Se  $\sigma \subset \mathbb{R}^n$  é um cone poliedral convexo, então  $\sigma^\vee$  é um cone poliedral convexo.

*Demonstração.* Suponhamos que  $\sigma^\vee$  não é um cone poliedral convexo. Então, dados  $u, u' \in \sigma^\vee$ , o segmento de reta  $[u, u'] \not\subset \sigma^\vee$ . Então, existe  $u_j \in [u, u']$  tal que  $u_j \notin \sigma^\vee$ , assim de acordo com a definição de dual, existe  $v \in \sigma$  tal que  $\langle u_j, v \rangle < 0$ . Por outro lado,  $\sigma = \{v \in \mathbb{R}^n : \langle u_1, v \rangle \geq 0, \dots, \langle u_t, v \rangle \geq 0\}$ , e ainda, podemos escrever

$$u_j = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_t u_t$$

onde  $\lambda_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  e  $u_i$ 's,  $i \in \{1, \dots, t\}$  são os geradores de  $\sigma^\vee$ .

Usando a linearidade e o fato que  $\langle u_i, v \rangle \geq 0$ , para todo  $i \in \{1, \dots, t\}$ . Obtemos,

$$\langle u_j, v \rangle = \lambda_1 \langle u_1, v \rangle + \dots + \lambda_t \langle u_t, v \rangle \geq 0,$$

mas isso é uma contradição. E, portanto,  $\sigma^\vee$  é convexo.  $\square$

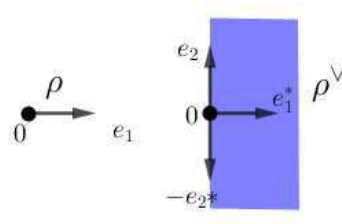


Figura 2.6:  $\rho$  e seu dual  $\rho^\vee$ .

**Proposição 2.5.** Se  $\sigma$  é um cone grade em  $\mathbb{R}^n$ , então  $\sigma^\vee$  também é um cone grade.

*Demonstração.* De fato, se  $\sigma$  é um cone grade então seus geradores pertencem a  $N$ , e a Equação (2.1) fornece como construir os geradores de  $\sigma^\vee \cap M$ , ou seja, os  $u_i$ 's desta equação que são os geradores de  $\sigma^\vee$  pertencem a  $M$ . Portanto  $\sigma^\vee$  é um cone grade.  $\square$

**Observação 2.2.** Notamos que se  $\tau$  é cone fortemente convexo, não é necessário que  $\tau^\vee$  seja fortemente convexo. De fato, basta tomar por exemplo, o cone apresentado na Figura 2.6. Neste caso,  $\tau \cap (-\tau) \neq \{0\}$ .

Na seguinte proposição apresentamos algumas propriedades que serão úteis no decorrer desse trabalho.

**Proposição 2.6.** Seja  $\sigma \subset \mathbb{R}^n$  um cone poliedral.

- (1)  $(\sigma^\vee)^\vee = \sigma$ ;
- (2) Se  $\tau \prec \sigma$  então  $\sigma^\vee \subset \tau^\vee$ ;
- (3) Toda face  $\tau$  de  $\sigma$  é também um cone em  $\mathbb{R}^n$ ;
- (4) Se  $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$  então  $\sigma^\vee = \sigma_1^\vee \cap \sigma_2^\vee$ ;
- (5) Existe uma correspondência biunívoca entre as faces de  $\sigma$  e as faces de  $\sigma^\vee$ . Tal correspondência leva uma face  $\tau$  de  $\sigma$  em uma face de  $\sigma^\vee$ , denotada por  $\Delta_\tau$ .

*Demonstração.*

- (1) De fato, por definição sabemos que  $\sigma^\vee = \{w \in (\mathbb{R}^n)^* : \langle w, z \rangle \geq 0, \forall z \in \sigma\}$ . Assim,

$$(\sigma^\vee)^\vee = \{w \in ((\mathbb{R}^n)^*)^* : \langle w, z \rangle \geq 0, \forall z \in \sigma^\vee\}.$$

Mas como  $((\mathbb{R}^n)^*)^* \cong \mathbb{R}^n$ , então o dual de  $\sigma^\vee$  é  $\{w \in \mathbb{R}^n : \langle w, z \rangle \geq 0, \forall z \in \sigma^\vee\}$ . Logo, usando a Equação (2.1) temos

$$(\sigma^\vee)^\vee = \{w \in \mathbb{R}^n : \langle w, z_1 \rangle \geq 0, \dots, \langle w, z_n \rangle \geq 0, z_1, \dots, z_n \in \sigma^\vee\} = \sigma$$

onde  $z_1, z_2, \dots, z_n$  são os geradores de  $\sigma^\vee$ .

(2) Lembremos que por definição

$$\sigma^\vee = \{u \in (\mathbb{R}^n)^* : \langle u, v \rangle \geq 0, \forall v \in \sigma\}$$

além disso, como  $\tau \prec \sigma$  temos que dado  $v \in \tau$ , então  $v \in \sigma$ .

Assim dado  $u \in \sigma^\vee$ , então  $\langle u, v \rangle \geq 0$ , para todo  $v \in \sigma$ . Em particular,  $\langle u, w \rangle \geq 0$  para todo  $w \in \tau$ , o que implica que  $u \in \tau^\vee$ .

(3) Seja  $\tau$  uma face de  $\sigma$ , dado  $x \in \tau$ , temos que  $x \in \sigma \cap \lambda^\perp$ . De  $x \in \sigma$  vale que

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$$

onde  $\lambda_i \geq 0, \lambda_i \in \mathbb{R}$ , para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Logo  $\tau$  é um cone em  $\mathbb{R}^n$ .

(4) Dado  $u \in \sigma_1^\vee \cap \sigma_2^\vee$ , então  $\langle u, z_1 \rangle \geq 0$  e  $\langle u, z_2 \rangle \geq 0$ ,  $z_1 \in \sigma_1, z_2 \in \sigma_2$ . Se  $z = z_1 + z_2 \in \sigma$  temos

$$\langle u, z \rangle = \langle u, z_1 + z_2 \rangle = \langle u, z_1 \rangle + \langle u, z_2 \rangle \geq 0$$

então  $u \in (\sigma_1 + \sigma_2)^\vee = \sigma^\vee$  e, portanto,  $\sigma_1^\vee \cap \sigma_2^\vee \subset \sigma^\vee$ . Por outro lado, como  $\sigma_1 \prec \sigma_1 + \sigma_2$  e  $\sigma_2 \prec \sigma_1 + \sigma_2$ , pelo item (2) temos

$$(\sigma_1 + \sigma_2)^\vee \subset \sigma_1^\vee, (\sigma_1 + \sigma_2)^\vee \subset \sigma_2^\vee$$

Portanto,

$$\sigma^\vee = (\sigma_1 + \sigma_2)^\vee \subset \sigma_1^\vee \cap \sigma_2^\vee$$

(5) Primeiramente, notamos que as faces de  $\sigma^\vee$  são os cones  $\tau^\vee = \sigma^\vee \cap v^\perp$ , ou seja,

$$\tau^\vee = \sigma^\vee \cap v^\perp = \{u \in \sigma^\vee : \langle u, v \rangle = 0, v \in \sigma = (\sigma^\vee)^\vee\}$$

Consideramos os seguintes conjuntos:

$$\tau^\vee = \{u \in (\mathbb{R}^n)^* : \langle u, w \rangle \geq 0, \forall w \in \tau\} \text{ e } v^\perp = \{u \in (\mathbb{R}^n)^* : \langle u, v \rangle = 0\}$$

Dos conjuntos acima concluímos que  $v^\perp \subseteq \tau^\vee$ . Além disso, como  $v \in \tau$  então  $\tau^\perp \subset v^\perp$  daí  $\tau^\vee \cap v^\perp = \tau^\perp$ . Portanto,

$$\sigma^\vee \cap v^\perp = \sigma^\vee \cap (\tau^\vee \cap v^\perp) = \sigma^\vee \cap \tau^\perp$$

A aplicação  $\sigma \ni \tau \mapsto \tau^* = \sigma^\vee \cap \tau^\perp \in \sigma^\vee$  claramente reverte a ordem e  $\tau \subseteq (\tau^*)^*$ , pois  $(\tau^*)^* = \sigma \cap (\tau^*)^\perp$

$$(\tau^*)^\perp = \{m \in \mathbb{R}^n : \langle s, m \rangle = 0, \forall s \in \tau^*\}$$

De  $\tau \subseteq (\tau^*)^*$  segue  $\tau^* \subseteq ((\tau^*)^*)^*$  e como a aplicação reverte ordem, então  $((\tau^*)^*)^* \subset \tau^*$  e ,portanto,  $((\tau^*)^*)^* = \tau^*$ .

Assim, a correspondência é biunívoca. □

**Proposição 2.7.** Se  $\tau = \sigma \cap \lambda^\perp$  (com  $\lambda \in \sigma^\vee$ ) é uma face de  $\sigma$ , então

$$\tau^\vee = \sigma^\vee + \mathbb{R}_{\geq 0}(-\lambda),$$

onde  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  denota o conjuntos dos números reais não negativos.

*Demonstração.* Como os dois lados da igualdade requerida são cones poliedrais convexos, pois  $\lambda \in \sigma^\vee$ , é suficiente mostrar que seus cones duais coincidem. Por um lado temos  $(\tau^\vee)^\vee = \tau$ . Por outro, pela Proposição 2.6 (item (4)) e como  $(\sigma^\vee)^\vee = \sigma$  e  $(\mathbb{R}_{\geq 0}(-\lambda))^\vee := -\lambda^\vee$ , temos

$$(\sigma^\vee + \mathbb{R}_{\geq 0}(-\lambda))^\vee = (\sigma^\vee)^\vee \cap (\mathbb{R}_{\geq 0}(-\lambda))^\vee = \sigma \cap (-\lambda)^\vee$$

Agora, se  $v \in \sigma \cap (-\lambda)^\vee$  então  $\langle v, -\lambda \rangle \geq 0$ , ou seja,  $\langle v, \lambda \rangle \leq 0$ .

Como  $v \in \sigma$  e por hipótese  $\lambda \in \sigma^\vee$ , temos  $\langle v, \lambda \rangle \geq 0$ , daí  $\langle v, \lambda \rangle = 0$ , ou seja,  $v \in \sigma \cap \lambda^\perp$ . Consequentemente,  $\sigma \cap (-\lambda)^\vee \subset \sigma \cap \lambda^\perp$ . Finalmente usando o fato de  $\lambda^\perp \subset \lambda^\vee$ , obtemos  $\sigma \cap \lambda^\perp \subset \sigma \cap (-\lambda)^\vee$ . E, assim,  $\sigma \cap (-\lambda)^\vee = \sigma \cap \lambda^\perp = \tau$ , portanto  $(\sigma^\vee + \mathbb{R}_{\geq 0}(-\lambda))^\vee = \tau$ . □

Portanto, dado um cone  $\sigma$  e uma face  $\tau$  de  $\sigma$  satisfazendo as hipóteses da proposição anterior, temos um “algoritmo” para encontrar a face dual correspondente a face  $\tau$ .

**Exemplo 2.7.** Consideramos os cones  $\tau$  gerado por  $e_2$ ,  $\sigma$  gerado por  $e_1, e_2$ , e respectivamente os seus duais,  $\tau^\vee$  e  $\sigma^\vee$ .

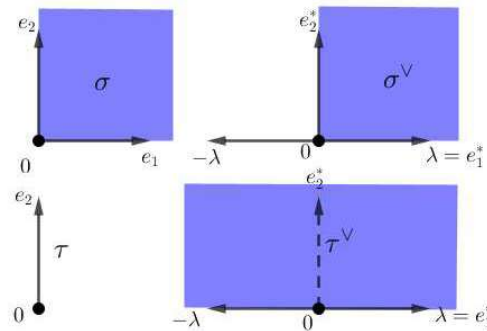


Figura 2.7: Cones e seus duais.

Notamos que  $\tau$  é uma face de  $\sigma$ , pois  $\tau = e_2 = \sigma \cap (e_1^*)^\perp$ , além disso o vetor  $\lambda = e_1^*$  satisfaz ( Figura 2.7):

$$\lambda \in \sigma^\vee \quad \tau = \sigma \cap \lambda^\perp$$

e, pela proposição anterior, temos

$$\tau^\vee = \sigma^\vee + \mathbb{R}_{\geq 0}(-e_1).$$

## 2.2 Monóides

Nesta seção, apresentamos o importante conceito de monóide associado a um cone, além de alguns resultados essenciais para construção das variedades tóricas afins. As principais referências usadas nessa seção foram [1] e [10].

Inicialmente recordamos que um semigrupo  $S$  é um conjunto não vazio com uma operação  $+$  :  $S \times S \longrightarrow S$  associativa.

**Definição 2.6.** Dizemos que um semigrupo  $S$  é um monóide, se é comutativo e contém elemento neutro  $0 \in S$  tal que  $0 + s = s$ , para todo  $s \in S$ .

**Lema 2.8.** Se  $\sigma$  é um cone no  $\mathbb{R}^n$ , então  $\sigma \cap N$  é um monóide.

*Demonstração.* Se  $x, y \in \sigma \cap N$  então  $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$  e  $y = \sum_{i=1}^n \gamma_i v_i$ , com  $\lambda_i \geq 0, \gamma_i \geq 0$  e  $\lambda_i, \gamma_i \in \mathbb{R}$ , para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Assim,

$$x + y = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i + \sum_{i=1}^n \gamma_i v_i = \sum_{i=1}^n (\lambda_i + \gamma_i) v_i,$$

com  $\lambda_i + \gamma_i \geq 0, \lambda_i, \gamma_i \in \mathbb{R}, i \in \{1, \dots, n\}$ . Assim  $x + y \in \sigma \cap N$ , e a operação é fechada em  $\sigma \cap N$ .

Dados  $x, y, z \in \sigma \cap N$ ,  $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i, y = \sum_{i=1}^n \gamma_i v_i, z = \sum_{i=1}^n \xi_i v_i$ , com  $\lambda_i, \gamma_i, \xi_i \geq 0$  e  $\lambda_i, \gamma_i, \xi_i \in \mathbb{R}, i \in \{1, \dots, n\}$ . Temos,

$$\begin{aligned} x + (y + z) &= \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i + \left( \sum_{i=1}^n \gamma_i v_i + \sum_{i=1}^n \xi_i v_i \right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i + \sum_{i=1}^n (\gamma_i + \xi_i) v_i \\ &= \sum_{i=1}^n [\lambda_i + (\gamma_i + \xi_i)] v_i = \sum_{i=1}^n [(\lambda_i + \gamma_i) + \xi_i] v_i \\ &= \sum_{i=1}^n (\lambda_i + \gamma_i) v_i + \sum_{i=1}^n \xi_i v_i = (x + y) + z. \end{aligned}$$

Deste modo  $\sigma \cap N$  é semigrupo. E ainda,

$$\begin{aligned} x + y &= \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i + \sum_{i=1}^n \gamma_i v_i = \sum_{i=1}^n (\lambda_i v_i + \gamma_i v_i) \\ &= \sum_{i=1}^n (\lambda_i + \gamma_i) v_i = \sum_{i=1}^n (\gamma_i + \lambda_i) v_i \\ &= \sum_{i=1}^n (\gamma_i v_i + \lambda_i v_i) = \sum_{i=1}^n \gamma_i v_i + \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = y + x, \end{aligned}$$

ou seja,  $S$  é comutativo. E, finalmente, existe  $0 = \sum_{i=1}^n 0 \cdot v_i \in \sigma \cap N$  tal que

$$0 + x = \sum_{i=1}^n 0 \cdot v_i + \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^n (0 + \lambda_i v_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = x,$$

para todo  $x \in \sigma \cap N$ . Portanto,  $\sigma \cap N$  é um monóide.  $\square$

**Definição 2.7.** Dizemos que um monóide  $S$  é finitamente gerado se existem elementos  $a_1, \dots, a_k \in S$  tais que todo elemento  $s$  em  $S$

$$s = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k,$$

onde para todo  $i \in \{1, \dots, k\}$  temos  $\lambda_i$  inteiros não negativos. Os elementos  $a_1, \dots, a_k \in S$  são denominados geradores do monóide.

**Proposição 2.9** (Lema de Gordon). Se  $\sigma \subset \mathbb{R}^n$  é um cone poliedral grade, então  $\sigma \cap N$  é um monóide finitamente gerado.

*Demonstração.* Seja  $A = \{v_1, \dots, v_r\}$  o conjunto de vetores que definem o cone  $\sigma$ . Como  $\sigma$  é um cone grade, temos que cada  $v_i \in \sigma \cap N$ . O conjunto

$$K = \left\{ \sum_{i=1}^r t_i v_i \mid t_i \in \mathbb{R} \text{ e } 0 \leq t_i \leq 1, \forall i \in \{1, \dots, r\} \right\}$$

é compacto. De fato, considere

$$\begin{aligned} f : X = [0, 1] \times \dots \times [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (t_1, \dots, t_n) &\longmapsto t_1 v_1 + \dots + t_n v_n \end{aligned}$$

que é contínua, pois é soma de funções contínuas e  $f(X) = K$ , logo  $K \subset N$  é compacto. Além disso,  $M$  é discreto, portanto  $K \cap N$  é um conjunto finito. De fato, caso contrário poderíamos ter  $x \in K \cap N$ , um ponto de acumulação de  $K \cap N$ . Então a interseção de toda vizinhança de  $x$  com  $K \cap N$  possuiria infinitos pontos, o que contraria o fato  $N$  ser discreto.



Como qualquer elemento  $v \in \sigma \cap N$  pode ser escrito

$$v = \sum_{i=1}^r (n_i + m_i)v_i = \sum_{i=1}^r n_i v_i + \sum_{i=1}^r m_i v_i$$

onde  $n_i$  são inteiros não negativos,  $0 \leq m_i \leq 1$  e  $i \in \{1, \dots, r\}$  e cada  $v_i$  e a soma  $\sum_{i=1}^r r_i v_i$  pertencem a  $K \cap N$ , então  $K \cap N$  gera  $\sigma \cap N$ .  $\square$

Dado um cone grade  $\sigma$ , segue da Proposição 2.5 que  $\sigma^\vee$  também é um cone grade. Portanto, pelo Lema de Gordon,  $\sigma^\vee \cap M$  é um monóide finitamente gerado. Neste trabalho  $S_\sigma$  denota o monóide finitamente gerado  $\sigma^\vee \cap M$ .

**Exemplo 2.8.** No  $\mathbb{R}^2$ , considere o cone nulo  $\sigma = 0$ . Dado qualquer elemento  $u \in (\mathbb{R}^2)^*$ ,  $\langle u, 0 \rangle = 0$ , ou seja,  $\sigma^\vee = (\mathbb{R}^2)^*$ . Assim,  $S_\sigma = \sigma^\vee \cap M = (\mathbb{R}^2)^* \cap M$  é gerado pelos vetores  $\{e_1^*, -e_1^*, e_2^*, -e_2^*\}$  (Figura 2.8), também por  $\{e_1^*, e_2^*, -e_1^* - e_2^*\}$ .

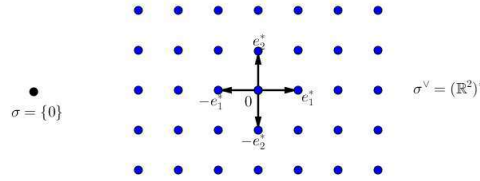


Figura 2.8: Monóide para o caso do cone nulo.

**Exemplo 2.9.** Considere em  $\mathbb{R}^2$  o cone  $\sigma$  gerado pelos vetores  $\{e_2, e_1 + 2e_2\}$  (Figura 2.9).

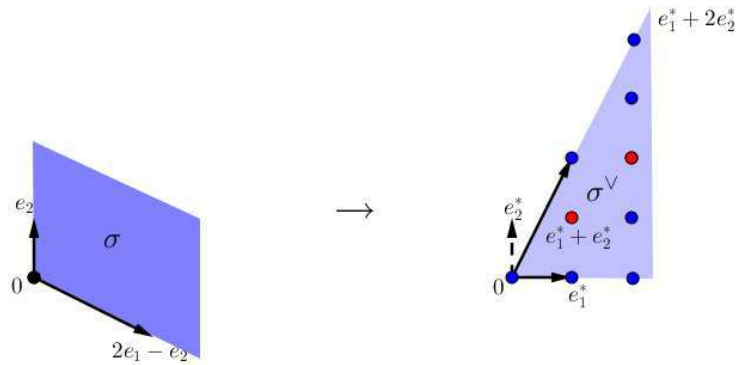


Figura 2.9: Completando o monóide.

No Exemplo 2.4, vimos que nesse caso  $\sigma^\vee$  tem como geradores  $e_1^*, e_1^* + e_2^*$ . Notemos que nesse exemplo  $S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$ , os pontos marcados vermelho (Figura 2.9), que são múltiplos  $e_1^* + e_2^*$  não são gerados por  $e_1^*, e_1^* + 2e_2^*$ , pois

$$e_1^* + e_2^* = \frac{1}{2}e_1^* + \frac{1}{2}(e_1^* + 2e_2^*)$$

sendo assim é necessário acrescentar o gerador  $e_1^* + e_2^*$ , e portanto  $S_\sigma$  é gerado por  $(e_1^*, e_1^* + e_2^*, e_1^* + 2e_2^*)$

Para finalizar essa seção, apresentamos a seguinte proposição, que é fundamental no processo de construção das variedades tóricas.

**Proposição 2.10.** Sejam  $\sigma$  um cone poliedral grade e  $\tau = \sigma \cap \lambda^\perp$  uma face de  $\sigma$ , com  $\lambda \in S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$ , então

$$S_\tau = S_\sigma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-\lambda),$$

onde  $\mathbb{Z}_{\geq 0}$  denota o conjunto dos inteiros não negativos.

*Demonstração.* Observamos que todas as hipóteses da Proposição 2.7 são satisfeitas. Assim, temos  $\tau^\vee = \sigma^\vee + \mathbb{R}_{\geq 0}(-\lambda)$ , tomando a interseção em ambos os lados com  $M = \mathbb{Z}^n$ . Temos,

$$\begin{aligned} \tau^\vee \cap M &= \sigma^\vee \cap M + \mathbb{R}_{\geq 0}(-\lambda) \cap M \\ S_\tau &= S_\sigma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-\lambda) \end{aligned}$$

□

Essa proposição permite escrever o monóide de uma face de cone, em função cone que contém essa face.

**Exemplo 2.10.** Considerando o caso apresentado no Exemplo 2.7, temos que para  $\tau = e_2$  uma face de  $\sigma$ , o vetor  $\lambda = e_1^*$ , satisfaz as hipóteses da proposição acima, assim

$$S_\tau = S_\sigma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-e_1^*).$$

## 2.3 Variedades Tóricas Afins

Nesta seção, apresentamos o conceito de variedade tórica afim. Para esse feito, dado um cone  $\sigma$  em  $\mathbb{R}^n$ , construímos um monóide  $S_\sigma$ , e um anel  $R_\sigma$ . Mostramos que  $R_\sigma$  é uma  $\mathbb{C}$ -álgebra finitamente gerada e usamos as consequências da versão fraca do Teorema de Nullstellensatz para definirmos a variedade tórica afim.

**Definição 2.8.** Seja  $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$  o anel dos polinômios em  $n$  variáveis com coeficientes em  $\mathbb{C}$ . O anel

$$\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n, z_1^{-1}, \dots, z_n^{-1}]$$

é chamado o anel dos polinômios de Laurent, o qual denotamos por  $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$ . Qualquer elemento em  $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$  é uma combinação linear de elementos da forma  $\lambda z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n}$ , onde  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  e  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$ .

**Definição 2.9.** O suporte de um polinômio de Laurent  $f = \sum_{finita} \lambda_a z^a$  é o conjunto

$$\text{supp}(f) = \{a \in \mathbb{Z}^n : \lambda_a \neq 0\}$$

Os polinômios mônicos de Laurent são polinômios, cujo  $\lambda_a = 1$ .

**Lema 2.11.** Sejam  $f$  e  $g$  polinômios de Laurent. Então,

$$(1) \text{supp}(f \pm g) \subset \text{supp}(f) \cup \text{supp}(g)$$

$$(2) \text{supp}(f \cdot g) \subset \text{supp}(f) + \text{supp}(g)$$

*Demonstração.* (1) Sejam  $f = \sum_{finita} \lambda_a z^a$ ,  $g = \sum_{finita} \mu_a z^a$  polinômios de Laurent,  $\text{supp}(f) = \{a \in \mathbb{Z}^n : \lambda_a \neq 0\}$ ,  $\text{supp}(g) = \{a \in \mathbb{Z}^n : \mu_a \neq 0\}$ . Notemos que  $\text{supp}(f \pm g) = \{a \in \mathbb{Z}^n : \lambda_a + \mu_a \neq 0\}$ .

Assim, dado  $x \in \text{supp}(f \pm g)$  então  $\lambda_x \pm \mu_x \neq 0$ , ou seja,  $\lambda_x \neq 0$  ou  $\mu_x \neq 0$ . Portanto,  $x \in \text{supp}(f) \cup \text{supp}(g)$ .

(2) Agora, consideramos  $y \in \text{supp}(fg) = \{a \in \mathbb{Z}^n : \lambda_a \mu_a \neq 0\}$ , então  $\lambda_y \mu_y \neq 0$ , ou seja,  $\lambda_y \neq 0$  e  $\mu_y \neq 0$ . Assim,  $y \in \text{supp}(f) + \text{supp}(g)$ .

□

**Proposição 2.12.** Dado um cone grade  $\sigma \subset \mathbb{R}^n$ , o anel

$$R_\sigma = \{f \in \mathbb{C}[z, z^{-1}] : \text{supp}(f) \subset S_\sigma\}$$

é uma  $\mathbb{C}$ -álgebra finitamente gerada por monômios de Laurent.

*Demonstração.* Inicialmente notamos que o Lema 2.11 dá estrutura de anel para  $R_\sigma$ . De fato, dados  $f, g \in R_\sigma$  então  $\text{supp}(f) \subset S_\sigma$  e  $\text{supp}(g) \subset S_\sigma$ . Como,

- $\text{supp}(f + g) \subset \text{supp}(f) \cup \text{supp}(g) \subset S_\sigma$ , então  $f + g \in R_\sigma$ ,
- $\text{supp}(fg) \subset \text{supp}(f) + \text{supp}(g) \subset S_\sigma$ , então  $fg \in R_\sigma$ .

Consideramos a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} \theta' : \quad \mathbb{Z}^n &\longrightarrow \mathbb{C}[z, z^{-1}] \\ a = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) &\longmapsto z^a = z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n} \end{aligned} \tag{2.2}$$

Observamos que  $\theta'$  é um homomorfismo entre o grupo aditivo  $\mathbb{Z}^n$  e grupo multiplicativo  $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$ . A restrição  $\theta$  de  $\theta'$ ,  $\theta : \mathbb{Z}^n \longrightarrow L := \{z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n}; (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n\}$  é um isomorfismo de grupos. De fato, dados  $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,  $b = (\beta_1, \dots, \beta_n)$  ambos pertencentes a  $\mathbb{Z}^n$ , temos

$$\theta(a + b) = z^{a+b} = z_1^{\alpha_1+\beta_1} \dots z_n^{\alpha_n+\beta_n} = (z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n})(z_1^{\beta_1} \dots z_n^{\beta_n}) = z^a z^b = \theta(a)\theta(b)$$

Além disso,  $\theta$  é sobrejetiva e injetiva, portanto isomorfismo.

Pelo Lema de Gordon, existem  $v_1, \dots, v_r \in S_\sigma$ , que geram  $S_\sigma$  sobre  $\mathbb{C}$ . Dado  $a \in S_\sigma$ , existem  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  tais que

$$a = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r \in \mathbb{Z}^n, \lambda_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

Logo,

$$\theta(a) = z^a = z^{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r} = z_1^{\lambda_1 v_1} \dots z_r^{\lambda_r v_r} = (z_1^{v_1})^{\lambda_1} \dots (z_r^{v_r})^{\lambda_r}$$

Isto é, qualquer monômio  $z^a$  pode ser escrito como combinação linear de  $z^{v_1} \dots z^{v_r}$ . Portanto,  $R_\sigma$  é uma  $\mathbb{C}$ -álgebra finitamente gerada por monômios de Laurent.  $\square$

Sendo  $R_\sigma$  uma  $\mathbb{C}$ -álgebra finitamente gerada, usando o Corolário 1.8, podemos estabelecer a seguinte definição.

**Definição 2.10.** Seja  $\sigma \subset \mathbb{R}^n$  um cone poliedral grade fortemente convexo. Então, a variedade tórica afim associada a  $\sigma$  é definida como

$$X_\sigma := \text{Spec}(R_\sigma).$$

Pela Observação 1.1, para diferentes escolhas dos geradores  $S_\sigma$  a  $\mathbb{C}$ -álgebra finitamente gerada  $R_\sigma$ , pode ter diferentes apresentações como um anel de coordenadas. Isso significa que podemos obter diferentes representações da variedade tórica afim  $\text{Spec}(R_\sigma)$  associada a  $\sigma$  em diferentes espaços complexos  $\mathbb{C}^k$ . Temos como garantia que, então a definição de variedade tórica afim depende dos geradores do anel  $\mathbb{R}_\sigma$ , tendo em vista o Corolário 1.8 que estas representações são todas homeomorfas.

**Exemplo 2.11.** Consideramos o cone  $\sigma$  do Exemplo 2.9, cujo monóide  $S_\sigma$  é gerado por  $a_1 = e_1^*, a_2 = e_1^* + e_2^*$  e  $a_3 = e_1^* + 2e_2^*$ . Usando o isomorfismo  $\theta$  (construído na Proposição 2.12), obtemos os seguintes monômios de Laurent :

$$u_1 = z^{e_1^*} = z_1^1 z_2^0 = z_1, u_2 = z^{e_1^* + e_2^*} = z_1^1 z_2^1 = z_1 z_2 \text{ e } u_3 = z^{e_1^* + 2e_2^*} = z_1^1 z_2^2 = z_1 z_2^2.$$

A  $\mathbb{C}$  - álgebra  $R_\sigma$  pode ser representada como

$$R_\sigma = \mathbb{C}[u_1, u_2, u_3] = \frac{\mathbb{C}[\xi_1, \xi_2, \xi_3]}{I_\sigma}$$

Agora, consideramos a seguinte combinação linear,  $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = 0$ , ou seja,  $(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)e_1^* + (\lambda_2 + 2\lambda_3)e_2^* = 0$ . Então,  $\lambda_1 = \lambda_3$  e  $\lambda_2 = -2\lambda_1$ , substituindo na combinação linear inicial, obtemos:

$$\lambda_1 a_1 + (-2\lambda_1) a_2 + \lambda_3 a_3 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 (a_1 - 2a_2 + a_3) = 0$$

Suponho  $\lambda_1 \neq 0$ , então  $a_1 + a_3 = 2a_2$ .

Usando a relação aditiva  $a_1 + a_3 = 2a_2$  obtemos, via isomorfismo  $\theta$ , a relação multiplicativa  $z_1 z_3 = z_2^2$ , ou seja,  $u_1 u_3 = 2u_2^2$ . Logo, o ideal  $I_\sigma$  é gerado pela relação binomial  $\xi_1 \xi_3 = \xi_2^2$  e a variedade tórica afim correspondente ao cone  $\sigma$  é :

$$X_\sigma = V(I_\sigma) = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 : x_1 x_3 = x_2^2\}.$$

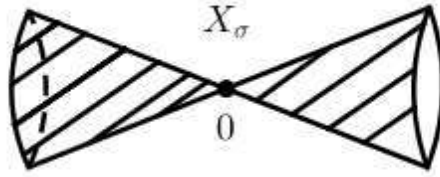


Figura 2.10: Representação da parte real de  $X_\sigma$  em  $\mathbb{R}^3$ .

No caso geral, temos a seguinte situação. Sejam  $a_1, \dots, a_k$  o sistema de geradores de  $S_\sigma$ , onde cada  $a_i$  é escrito  $a_i = (\alpha_i^1, \dots, \alpha_i^n) \in \sigma^\vee \cap M$ . Do isomorfismo  $\theta$  (construído na Proposição 2.12), obtemos os monômios mônicos de Laurent,

$$u_i = z^{a_i} = z_1^{\alpha_i^1} \dots z_n^{\alpha_i^n} \in \mathbb{C}[z, z^{-1}], \quad i = 1, \dots, k. \quad (2.3)$$

A  $\mathbb{C}$ -álgebra  $R_\sigma = \mathbb{C}[u_1, \dots, u_k]$  pode ser representada por

$$\mathbb{C}[u_1, \dots, u_k] = \frac{\mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_n]}{I_\sigma} \quad (2.4)$$

para algum ideal  $I_\sigma$ , a ser determinado.

As relações aditivas entre os geradores de  $S_\sigma$  são escritas da seguinte forma;

$$\sum_{j=1}^k \nu_j a_j = \sum_{n=1}^k \mu_n a_n, \quad \mu_j, \nu_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}. \quad (2.5)$$

Do isomorfismo  $\theta$  obtemos as relações monomiais;

$$(z^{a_1})^{\nu_1} \dots (z^{a_k})^{\nu_k} = (z^{a_1})^{\mu_1} \dots (z^{a_k})^{\mu_k}$$

Segue de (2.3) que  $(u_1)^{\nu_1} \dots (u_k)^{\nu_k} = (u_1)^{\mu_1} \dots (u_k)^{\mu_k}$ . Finalmente, obtemos as relações

binomiais

$$(\xi_1)^{\nu_1} \cdots (\xi_k)^{\nu_k} = (\xi_1)^{\mu_1} \cdots (\xi_k)^{\mu_k} \quad (2.6)$$

que geram  $I_\sigma$ . Além disso, pelo Corolário 1.8,

$$V(I_\sigma) \cong \text{Spec}(R_\sigma)$$

**Observação 2.3.** Motivados pela equação (2.4), como  $R_\sigma = \mathbb{C}[u_1, \dots, u_k]$ , nas indeterminadas  $\xi_1, \dots, \xi_k$  existe homomorfismo entre os anéis, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \varphi_\sigma : \mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_k] &\longrightarrow \mathbb{C}[u_1, \dots, u_k] \\ \xi_i &\longmapsto u_i, \quad i = 1, \dots, k \end{aligned}$$

De modo que o ideal  $I$  mencionado na Observação 1.1, é o  $\ker(\varphi_\sigma) = I_\sigma$ . Logo pelo Teorema dos Isomorfismos, concluímos que,

$$\frac{\mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_k]}{I_\sigma} \cong \mathbb{C}[u_1, \dots, u_k] = R_\sigma$$

Assim, para todo  $f \in \mathbb{C}[\xi]$ ,  $f \in I_\sigma$  se, e somente se,  $\varphi_\sigma(f) = 0$ , ou equivalentemente,  $f(u) = 0 \in \mathbb{C}[u_1, \dots, u_k]$ .

**Definição 2.11.** Dado um conjunto  $A = \{a_1, \dots, a_k\} \subset \mathbb{Z}^n$  e o vetor  $(\lambda, \mu) \in (\mathbb{R}^k) \times (\mathbb{R}^k)$ , definimos uma relação linear positiva de  $A$ , como

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i a_i = \sum_{i=1}^k \mu_i a_i.$$

Usamos a notação  $\lambda.A = \mu.A$  para representar as somas acima.

**Teorema 2.13.** *Dado  $\sigma$  um cone grade em  $\mathbb{R}^n$  e  $A = (a_1, \dots, a_k)$  um sistema de geradores do monóide  $S_\sigma$ , a variedade tórica afim  $X_\sigma$  correspondente, é dada pela variedade  $V(I_\sigma) \subset \mathbb{C}^k$ , onde  $I_\sigma$  é um ideal de  $\mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_k]$ , gerado finitamente por binômios da forma (2.6) correspondentes as relações (2.5) entre os elementos de  $A$ .*

*Demonstração.* Pelo Lema de Gordon o monóide gerado por todas relações inteiras, positivas e lineares (2.5) é finitamente gerado, pois todos os  $a'_i$ 's pertencem a  $S_\sigma$ . Para concluirmos a prova é necessário mostrar que todo elemento de  $I_\sigma$  é uma soma de binômios do tipo (2.6).

Dado um polinômio  $f = \sum \lambda_\nu \xi^\nu$ , temos que  $f(u) = \sum \lambda_\nu u^\nu$ , mas como  $u_i = z^{a_i}$ ,  $i = 1, \dots, k$ , então  $f(u) = \sum \lambda_\nu z^{\nu.A}$ . Notamos também que, para todo  $a \in \sigma \cap \mathbb{Z}^n$ , o coeficiente  $c_a$  de  $z^a$  é :

$$c_a = \sum_{\nu: \nu \cdot A = a} \lambda_\nu$$

Assim, se  $\varphi_\sigma$  é a aplicação dada na Observação 2.3 temos que,  $f \in I_\sigma = \ker(\varphi_\sigma)$  se, e somente se, todos os  $c'_a$ s são nulos, e  $f$  satisfaz as relações (2.6), conseqüentemente o teorema segue.

Agora, caso  $\lambda_{\nu_0} \neq 0$  para algum multi-índice  $\nu_0 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^k$ , existe  $\mu_0 \neq \nu_0$  que satisfaz  $\nu_0 \cdot A = \mu_0 \cdot A$  e  $\lambda_{\mu_0} \neq 0$ . O binômio correspondente  $\lambda_{\nu_0}(\xi^{\nu_0 \cdot A} - \xi^{\mu_0 \cdot A})$  está em  $I_\sigma$ , subtraindo este monômio de  $f$ , obtemos um polinômio em  $I_\sigma$  com menos termos que  $f$ . Com efeito,

$$\begin{aligned} f(u) - \lambda_{\nu_0}(\xi^{\nu_0 \cdot A} - \xi^{\mu_0 \cdot A}) &= \sum \lambda_\nu z^{\nu \cdot A} - \lambda_{\nu_0}(\xi^{\nu_0 \cdot A} - \xi^{\mu_0 \cdot A}) \\ &= \sum_{\nu \neq \nu_0} \lambda_\nu z^{\nu \cdot A} + \lambda_{\nu_0} \xi^{\mu_0 \cdot A} \end{aligned}$$

Além disso, como  $\nu_0 \cdot A = \mu_0 \cdot A$ , para algum  $\nu_0 \neq 0$ , então teremos  $\lambda_{\nu_0} \xi^{\nu_0 \cdot A} = \lambda_{\nu_0} \xi^{\mu_0 \cdot A}$ . Isso significa que alguma parcela na soma tem monômio semelhante a  $\lambda_{\nu_0} \xi^{\mu_0 \cdot A}$ . Assim, usando a distributiva, percebemos que para  $\mu_0$  escolhido acima  $f$  possui mais termos que o binômio  $\lambda_{\nu_0}(\xi^{\nu_0 \cdot A} - \xi^{\mu_0 \cdot A})$ . Repetindo o argumento para outros multi-índices (que são uma quantidade finita), o resultado segue.  $\square$

**Observação 2.4.** Como consequência do Teorema 2.13 um ponto  $x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{C}^k$  representa um ponto de  $X_\sigma$  se, e somente se, a relação

$$(x_1)^{\nu_1} \dots (x_k)^{\nu_k} = (x_1)^{\mu_1} \dots (x_k)^{\mu_k}$$

vale para todo  $\nu, \mu \in \mathbb{Z}^n$  satisfazendo

$$\sum_{j=1}^k \nu_j a_j = \sum_{j=1}^k \mu_j a_j, \quad \mu_j, \nu_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

**Observação 2.5.** No Corolário 1.8 vimos que para qualquer ideal  $I_\sigma$  existe uma correspondência biunívoca entre  $V(I_\sigma)$  e os ideais maximais  $\mathcal{M}$  no anel de polinômios  $\mathbb{C}[\xi]$  que contém  $I_\sigma$ . Além disso,  $\overline{\mathcal{M}} := \frac{\mathcal{M}}{I_\sigma}$  são os ideais maximais em  $R_\sigma$ , que é justamente o anel de coordenadas  $R_V$ . Portanto, os geradores  $u_1, \dots, u_k$  de  $R_\sigma$  são as funções coordenadas em  $X_\sigma$ , que definem  $X_\sigma$  em  $\mathbb{C}^k$ .

**Exemplo 2.12.** Consideramos o cone nulo  $\sigma = \{0\}$  no  $\mathbb{R}^n$ . Como  $\langle u, 0 \rangle = 0$ , para  $u \in (\mathbb{R}^*)^n$ , o cone dual  $\sigma^\vee = (\mathbb{R}^n)^*$ . Assim,  $S_\sigma = (\mathbb{R}^n)^* \cap \mathbb{Z}^n = \mathbb{Z}^n \cong M$  que

tem geradores  $e_1^*, \dots, e_n^*, -e_1^*, \dots, -e_n^*$ . Então, podemos escolher diferentes sistemas de geradores de  $S_\sigma$ . Por exemplo:

$$A_1 = (e_1^*, \dots, e_n^*, -e_1^*, \dots, -e_n^*) \in (\mathbb{C}^{2n})^*, \quad A_2 = (e_1^*, \dots, e_n^*, (-e_1^* - \dots - e_n^*)) \in (\mathbb{C}^{n+1})^*$$

Vamos fazer algumas considerações sobre  $A_1$ . Pelo isomorfismo  $\theta$  (construído na Proposição 2.12), temos

$$u_1 = z_1, \dots, u_n = z_n, u_{n+1} = z_1^{-1}, \dots, u_{2n} = z_n^{-1}$$

Assim, a  $\mathbb{C}$ -álgebra correspondente é

$$R_\sigma = \mathbb{C}[u_1, \dots, u_{2n}] = \frac{\mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_{2n}]}{I_\sigma}.$$

Notamos que  $a_i + a_{n+i} = 0$ , para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ , ou seja,  $e_i^* + (-e_i^*) = 0$ . Do isomorfismo  $\theta$  obtemos  $u_i u_{n+i} = 1$ , para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Consequentemente o ideal  $I_\sigma$  é gerado pelos polinômios, tais que  $\xi_i \xi_{n+i} = 1$ , para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Portanto,  $X_\sigma = V((\xi_1 \xi_{n+1} - 1), \dots, (\xi_n \xi_{2n} - 1))$ .

Para  $n = 1$ , obtemos a hipérbole complexa, cujo as assíntotas são os eixos  $\xi_1 = 0$  e  $\xi_2 = 0$ . A hipérbole pode ser projetada no eixo  $\xi_2 = 0$  e a imagem é desta projeção é  $\mathbb{C}^*$ :

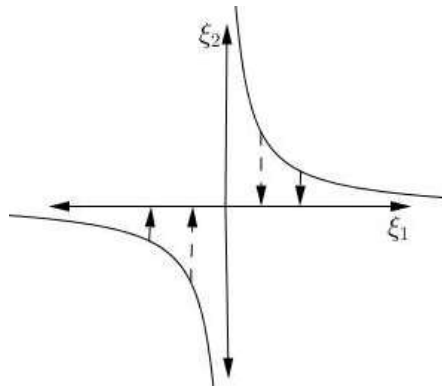


Figura 2.11: Representação da parte real da hipérbole complexa.

No caso geral, para  $n \geq 1$  seja  $\sigma$  o cone nulo em  $\mathbb{R}^n$ , então  $X_\sigma$  é homeomorfa ao conjunto

$$\mathbb{T} = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : z_i \neq 0, \forall i = 1, \dots, n\} = (\mathbb{C}^*)^n.$$

De fato, obtemos esse homeomorfismo usando a projeção

$$\begin{aligned} \pi' : X_\sigma \subset \mathbb{C}^{2n} &\longrightarrow \mathbb{T} \subset \mathbb{C}^n \\ (z_1, \dots, z_{2n}) &\longmapsto (z_1, \dots, z_n). \end{aligned}$$



A inversa de  $\pi'$  é dada por

$$\begin{aligned} (\pi')^{-1} : \mathbb{T} \subset \mathbb{C}^n &\longrightarrow X_\sigma \subset \mathbb{C}^{2n} \\ (z_1, \dots, z_n) &\longmapsto (z_1, \dots, z_n, z_1^{-1}, \dots, z_n^{-1}) \end{aligned}$$

Dado  $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{T}$ , temos  $z_i \neq 0$  e  $\frac{1}{z_i} \in \mathbb{C}^*$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Por outro lado usando o segundo sistema de geradores  $A_2$ , temos

$$R_\sigma = \mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_n, \xi_{n+1}]/I_\sigma$$

Portanto,  $X_\sigma = V(\xi_1 \dots \xi_n \xi_{n+1} - 1)$  em  $\mathbb{C}^{n+1}$ . Neste caso, também é possível mostrar que  $X_\sigma$  é homeomorfa a  $\mathbb{T}$ .

**Definição 2.12.** O conjunto  $\mathbb{T} = (\mathbb{C}^*)^n$  é chamado  $n$ -toro algébrico complexo.

**Observação 2.6.** O toro algébrico  $\mathbb{T}$  definido acima, não é o mesmo que o toro topológico  $(\mathbb{S}^1)^n$ . Porém, temos que  $\mathbb{T}$  é isomorfo a  $(\mathbb{S}^1)^n \times (\mathbb{R}_{>0})^n$ .

Com efeito, inicialmente note que podemos escrever um número complexo  $z \in \mathbb{C}^*$  usando coordenadas polares  $(r, \theta)$ , ou seja,

$$z = r e^{i\theta} = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta),$$

com  $r = |z| > 0$  e  $0 \leq \theta < 2\pi$ . Consideramos em  $\mathbb{C}^*$  e  $\mathbb{R}_{>0}$  a estrutura de grupo com o produto canônico e definimos o homomorfismos de grupos

$$\begin{aligned} g : \mathbb{C}^* &\longrightarrow \mathbb{R}_{>0} \\ z &\longmapsto |z|. \end{aligned}$$

Notamos que  $g$  é contínua (com a topologia usual) e sobrejetora. De fato, dado  $r \in \mathbb{R}_{>0}$  tome  $z = r \in \mathbb{C}^*$ , assim  $|z| = r$ . Para cada  $r > 0$  a fibra  $g^{-1}(r) = \{z \in \mathbb{C}^* \mid |z| = r\}$  é um círculo de raio  $r$ . Aplicando valor absoluto para cada coordenada de  $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{T}$ , obtemos a aplicação

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{T} &\longrightarrow (\mathbb{R}_{>0})^n \\ (z_1, \dots, z_n) &\longmapsto (|z_1|, \dots, |z_n|) \end{aligned}$$

que novamente é um homomorfismo sobrejetivo contínuo. Cada fibra  $\psi^{-1}(r_1, \dots, r_n)$  é o produto cartesiano de  $n$  círculos, que é um toro real compacto de dimensão  $n$ . Por outro lado, seja  $\mathbb{S}^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$

$$\begin{aligned} \bar{\theta} : \mathbb{C}^* &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ z &\longmapsto \frac{z}{|z|} \end{aligned}$$

Então,  $\bar{\theta}$  é um homomorfismo sobrejetor de grupos. Dessa forma, podemos considerar a aplicação

$$\begin{aligned} \theta : \mathbb{T} &\longrightarrow (\mathbb{S}^1)^n \\ (z_1, \dots, z_n) &\longmapsto \left( \frac{z_1}{|z_1|}, \dots, \frac{z_n}{|z_n|} \right) \end{aligned}$$

que é contínua e é homomorfismo sobrejetivo.

Podemos considerar o  $n$ -toro real compacto  $(\mathbb{S}^1)^n$  está em  $(\mathbb{C}^*)^n$  e a restrição de  $\theta$  a  $(\mathbb{S}^1)^n$  é a aplicação identidade, isto é,  $\theta$  é uma retração.

Para cada  $x$  em  $(\mathbb{S}^1)^n$ , temos que a fibra  $\theta^{-1}(x)$  é isomorfa a  $(\mathbb{R}_{>0})^n$ .

De fato, consideramos a aplicação,

$$\begin{aligned} \phi : \theta^{-1}(x) &\longrightarrow (\mathbb{R}_{>0})^n \\ (z_1, \dots, z_n) &\longmapsto (|z_1|, \dots, |z_n|). \end{aligned}$$

Assim,  $\phi$  é um homomorfismo sobrejetor. Mostremos que a aplicação  $\phi$  é injetiva. Notamos que, para  $n = 1$ , temos

$$\theta^{-1}(x) = \{z \in (\mathbb{C}^*) : \theta(z) = x\} = \left\{ z \in (\mathbb{C}^*) : \frac{z}{|z|} = x \right\}.$$

Isso significa que os números complexos que pertencem a fibra  $\theta^{-1}(x)$ , possuem o mesmo argumento e diferem apenas pelo módulo, estendendo este raciocínio a cada coordenada de  $(\mathbb{C}^*)^n$ , concluímos que a aplicação  $\phi$  é injetiva. Portanto, conseguimos o isomorfismo desejado.

Finalmente, consideramos a aplicação

$$\begin{aligned} (\psi, \theta) : \mathbb{T} &\longrightarrow (\mathbb{R}_{>0})^n \times (\mathbb{S}^1)^n \\ (z_1, \dots, z_n) &\longmapsto \left( (|z_1|, \dots, |z_n|), \left( \frac{z_1}{|z_1|}, \dots, \frac{z_n}{|z_n|} \right) \right) \end{aligned}$$

que é contínua na topologia produto, logo um homeomorfismo e isomorfismo de grupos. Assim, exibimos  $\mathbb{T}$  como um produto  $(\mathbb{R}_{>0})^n \times (\mathbb{S}^1)^n$ .

**Observação 2.7.**  $\mathbb{T}$  é um conjunto fechado de  $\mathbb{C}^{2n}$ , mas como um subespaço de  $\mathbb{C}^n$ , não é fechado.

De fato, no exemplo 2.12 vimos que  $\mathbb{T} = X_{\{0\}}$ , sendo assim é um conjunto fechado de  $\mathbb{C}^{2n}$ . No entanto, pela observação 2.6 o toro algébrico  $\mathbb{T}$  pode ser identificado como  $(\mathbb{R}_{>0})^n \times (\mathbb{S}^1)^n$ . Considerando  $n = 1$ , tomando  $p \in \mathbb{S}^1$  e a sequência  $x_n = (\frac{1}{n}, p) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{S}^1$  que converge para  $(0, p) \notin (\mathbb{R}_{>0}) \times (\mathbb{S}^1)$ . Portanto,  $\mathbb{T}$  não é fechado como subespaço de  $\mathbb{C}^n$ .

Até agora, não apresentamos nenhuma justificativa para o nome variedade “tórica”. No entanto, o teorema a seguir apresenta um resultado interessante para entender essa nomenclatura.

**Teorema 2.14.** *Seja  $\sigma$  um cone grade e fortemente convexo em  $\mathbb{R}^n$ , a variedade tórica afim  $X_\sigma \subset \mathbb{C}^k$  contém o  $n$ -toro algébrico complexo  $\mathbb{T} = (\mathbb{C}^*)^n$  como um subconjunto aberto e denso na topologia de Zariski.*

*Demonstração.* Sejam  $(a_1, \dots, a_k)$  os geradores para o monóide  $S_\sigma$  e  $V(I_\sigma) \subset \mathbb{C}^k$  a representação de  $X_\sigma$ . Com coordenadas no  $\mathbb{R}^n$ , cada  $a_i$  é escrito  $a_i = (\alpha_i^1, \dots, \alpha_i^n)$  com  $\alpha_i^j \in \mathbb{Z}$  e  $t \in \mathbb{T}$  é escrito  $t = (t_1, \dots, t_n)$  com  $t_j \in \mathbb{C}^*$ . Consideramos a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} h : \quad \mathbb{T} &\quad \rightarrow \quad X_\sigma \\ t = (t_1, \dots, t_n) &\quad \mapsto \quad (t^{a_1}, \dots, t^{a_k}) \end{aligned}$$

com  $(t^{a_1}, \dots, t^{a_k}) \in X_\sigma \cap (\mathbb{C}^*)^k$ , onde  $t^{a_i} = t_1^{\alpha_i^1} \cdots t_n^{\alpha_i^n}$ . Notamos que  $h$  está bem definida, pois  $h(t) \in X_\sigma \cap (\mathbb{C}^*)^k$ .

Afirmção:  $h$  é um mergulho.

Provemos que  $h$  é uma bijeção de  $(\mathbb{C}^*)^n$  em  $X_\sigma \cap (\mathbb{C}^*)^k$ . Vamos mostrar que  $h$  é injetiva. Seja  $a \in S_\sigma$  tal que todos os pontos  $a + e_i^*$  estão  $S_\sigma$ , com  $e_i^*$  base de  $(\mathbb{R}^n)^*$ . Os monômios de Laurent  $z^a := f_0(u)$ ,  $z^{a+e_i^*} := f_i(u)$  estão no anel de coordenadas  $R_\sigma = \mathbb{C}[u] \subset \mathbb{C}[z, z^{-1}]$ . Seja  $h(t) = x$  um ponto em  $X_\sigma \cap (\mathbb{C}^*)^k$ , então  $f_i(h(t)) = t^{a+e_i^*} = t_i t^a = t_i f_0(h(t))$  e, assim, cada  $t_i$  é determinado por  $t_i = f_i(h(t))/f_0(h(t))$ , em particular  $h$  é injetiva.

A aplicação  $h$  é sobrejetiva, pois dado qualquer ponto  $x \in X_\sigma \cap (\mathbb{C}^*)^k$  temos

$$x = h(f_1(x)/f_0(x), \dots, f_n(x)/f_0(x))$$

uma vez que as funções  $f_i$  são não nulas em todo ponto  $x$ .

Além disso, considerando  $X_\sigma = D$ ,  $\mathbb{T} = U$  e  $\mathbb{C}^k = Y$  no Lema 1.3, concluímos que  $\mathbb{T}$  é aberto e denso em  $X_\sigma$ . □

**Observação 2.8.** Se  $x \in X_\sigma$  e  $t \in \mathbb{T} \subset X_\sigma$  então  $tx = (t^{a_1} x_1, \dots, t^{a_k} x_k) \in X_\sigma$ . De fato, basta mostrar que  $tx$  satisfaz  $(tx)^\mu = (tx)^\nu$  para todos  $(\mu, \nu)$  satisfazendo  $\mu.A = \nu.A$ . Sendo assim note que,

$$(tx)^\mu - (tx)^\nu = t^\mu x^\mu - t^\nu x^\nu = t^\mu x^\mu + t^\nu x^\mu - t^\nu x^\mu - t^\nu x^\nu = x^\mu (t^\mu - t^\nu) + t^\nu (x^\mu - x^\nu)$$

Como  $x, t \in X_\sigma$ , então  $x^\mu = x^\nu$  e  $t^\mu = t^\nu$ . E, portanto,  $(tx)^\mu - (tx)^\nu = 0$ .

**Exemplo 2.13.** Consideramos o cone  $\sigma$  gerado pelos vetores  $e_2, 2e_1 - e_2$ , apresentado no Exemplo 2.9. Os geradores de  $S_\sigma$  são  $(e_1^*, e_1^* + e_2^*, e_1^* + 2e_2^*)$ . Então, o mergulho de  $\mathbb{T}$  em  $X_\sigma$  é dado por

$$(t_1, t_1) \mapsto (t_1, t_1 t_2, t_1 t_2^2) \in X_\sigma \cap (\mathbb{C}^*)^3$$

**Proposição 2.15.** Se  $\sigma$  é um cone grade e fortemente convexo em  $\mathbb{R}^n$  então a dimensão complexa  $X_\sigma$  é  $n$ .

*Demonstração.* Como o toro tem dimensão  $n$  e está mergulhado em  $X_\sigma$ , então o resultado segue.  $\square$

Como consequência do resultado anterior temos que a dimensão do cone determina a dimensão da variedade tórica afim.

**Exemplo 2.14.** Consideramos o cone  $\sigma \subset \mathbb{R}^2$ , gerado por  $e_1$  e  $e_2$ . Dado  $v = (v_1, v_2) \in \sigma$ , podemos escrever  $v = v_1 e_1 + v_2 e_2, v_1 \geq 0, v_2 \geq 0$ . Por definição,  $\sigma^\vee = \{u \in (\mathbb{R}^n)^* : \langle u, v \rangle \geq 0, \forall v \in \sigma\}$  e concluímos que  $\sigma^\vee$  é gerado por  $e_1^*, e_2^*$ . Deste modo,  $S_\sigma = \sigma^\vee \cap \mathbb{Z}^2$  é gerado por  $(e_1^*, e_2^*)$ .

Pelo isomorfismo  $\theta$  (Proposição 2.12) temos,

$$u_1 = z^{e_1^*} = z_1, u_2 = z^{e_2^*} = z_2.$$

Além disso, na combinação  $ae_1^* + be_2^* = 0$ , temos  $a = b = 0$ , ou seja, os geradores de  $S_\sigma$  são linearmente independentes. Então a única relação aditiva entre os gerados é a nula, e como  $I_\sigma$  é gerado por essas relações, então  $I_\sigma = \{0\}$ . A  $\mathbb{C}$ -álgebra  $R_\sigma$  pode ser representada como

$$R_\sigma = \mathbb{C}[z_1, z_2] = \mathbb{C}[\xi_1, \xi_2]$$

e, portanto,  $X_\sigma = V(0) = \mathbb{C}^2$ .

**Exemplo 2.15.** Seja  $\tau \in \mathbb{R}^2$ , o cone gerado por  $e_2$ , vimos no Exemplo 2.4, que  $\tau^\vee$  é gerado por  $(e_1^*, -e_1^*, e_2^*)$ . Daí,  $S_\tau = \tau \cap \mathbb{Z}^2$  é gerado por  $(e_1^*, -e_1^*, e_2^*)$ . Pelo isomorfismo  $\theta$  temos,

$$u_1 = z^{e_1^*} = z_1, u_2 = z^{-e_1^*} = z_1^{-1}, u_3 = z^{e_2^*} = z_2$$

e, assim,  $R_\tau = \mathbb{C}[u_1, u_2, u_3]$ . Notamos que  $e_1^* + (-e_1^*) = 0$ , que via o isomorfismo  $\theta$ , obtemos  $z_1 z_1^{-1} = 1$ , isto é,  $u_2 = u_1^{-1}$ .

Desta forma, podemos escrever o anel de coordenadas é dado por  $R_\tau = \frac{\mathbb{C}[\xi_1, \xi_2, \xi_3]}{\xi_1 \xi_2 - 1}$ . E, portanto,  $X_\tau = \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in (\mathbb{C}^*)^3 | \xi_1 \xi_2 = 1\} = \mathbb{C}_{\xi_1}^* \times \mathbb{C}_{\xi_2}$ .

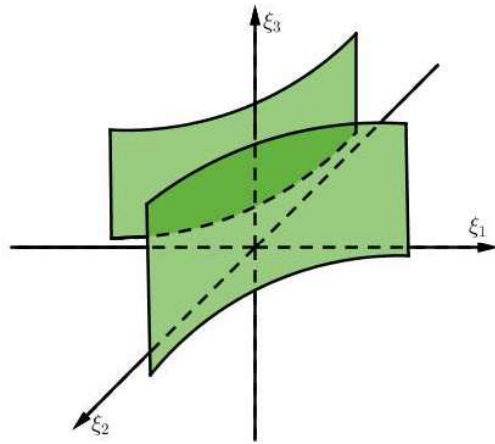


Figura 2.12: Representação da parte real da hipérbole complexa no  $\mathbb{R}^3$ .

O exemplo anterior pode ser generalizado da seguinte forma.

**Exemplo 2.16.** Seja  $\sigma$  o cone em  $\mathbb{R}^n$  gerado por  $e_1, \dots, e_p$ , com  $p \leq n$ . Então,  $S_\sigma$  é gerado por  $A = (e_1^*, \dots, e_p^*, e_{p+1}^*, -e_{p+1}^*, \dots, e_n^*, -e_n^*)$ , donde

$$R_\sigma = \mathbb{C}[z_1, \dots, z_p, z_{p+1}, z_{p+1}^{-1}, \dots, z_n, z_n^{-1}]$$

e, portanto,  $X_\sigma = \mathbb{C}^p \times (\mathbb{C}^*)^{n-p}$ .

Como consequência do exemplo anterior segue que variedade tóricas afins podem ter estrutura de produto cartesiano.

## 2.4 Leques

Nesta seção, introduzimos o conceito de leques em  $\mathbb{R}^n$  com a finalidade de apresentar a definição de variedade tórica construída por meio de colagens de variedades tóricas afins.

**Definição 2.13.** Dizemos que um subconjunto  $\Delta$  do espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^n$  é um leque, se ele é uma união finita de cones tal que:

- (i) Todo elemento  $\sigma$  em  $\Delta$  é um cone poliedral grade fortemente convexo;
- (ii) Toda face de um cone em  $\Delta$ , ainda é um cone de  $\Delta$ ;
- (iii) Se  $\sigma$  e  $\sigma'$  são cones de  $\Delta$ , então  $\sigma \cap \sigma'$  é face de  $\sigma$  e de  $\sigma'$ .

No que segue, a menos que especificado todos os cones serão considerados fortemente convexos, poliedrais e grade.

**Exemplo 2.17.** Consideramos em  $\mathbb{R}^2$  os subconjuntos  $\Delta_1$  formado pelo cone gerado por  $\{e_1, e_2\}$ ,  $\Delta_2$  formado pelos cones  $\sigma_1$  gerado por  $\{e_1, e_2\}$  e  $\sigma_2$  gerado por  $\{e_1, 2e_1 - e_2\}$  e  $\Delta_3$  gerado pelos cones  $\sigma_1$  gerado por  $\{e_1, e_2\}$ ,  $\sigma_2$  gerado por  $\{e_1, -e_2\}$ ,  $\sigma_3$  gerado por  $\{-e_1, e_2\}$  e por  $\sigma_4$  gerado por  $\{-e_1, -e_2\}$  (Figura 2.13). Então,  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  e  $\Delta_3$  são leques em  $\mathbb{R}^2$ .

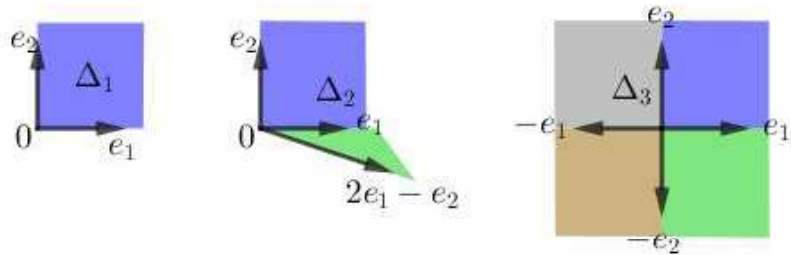


Figura 2.13: Leques em  $\mathbb{R}^2$ .

De fato, notamos que  $\Delta_2$  é união dos cones  $\sigma_1$  gerados por  $e_1, e_2$  e por  $\sigma_2$  gerado por  $e_1, 2e_1 - e_2$ , ambos são poliedrais, grades e fortemente convexos. As faces de  $\sigma_1$  são o próprio  $\sigma_1$ , os cones gerados por  $e_1$ , por  $e_2$  e o cone nulo, e todos são cones de  $\Delta_2$ . Além disso, as faces de  $\sigma_2$  são o próprio  $\sigma_2$ , os cones gerados por  $e_1$ , por  $2e_1 - e_2$  e o cone nulo, e eles são cones de  $\Delta_2$ . E, por fim, temos que  $\sigma_1 \cap \sigma_2 = e_1$ , que é uma face comum de ambos os cones. Portanto,  $\Delta_2$  é um leque no  $\mathbb{R}^2$ . Um procedimento análogo mostra que  $\Delta_1$  e  $\Delta_3$  são leques em  $\mathbb{R}^2$  também.

## 2.5 Variedades Tóricas

Nesta seção, construímos a variedade tórica através da colagem de variedades tóricas afins. Para isso iniciamos com um lema que motiva a definição da aplicação de colagem.

**Lema 2.16.** Sejam  $\tau$  uma face de  $\sigma$ ,  $(a_1, \dots, a_k)$  o sistema geradores de  $S_\sigma$ ,  $X_\tau$  e  $X_\sigma$  variedades tóricas afins obtidas respectivamente por  $\tau$  e  $\sigma$ . Então,  $X_\tau$  é homeomorfa a  $X_\sigma \setminus (u_k = 0)$ , isto é,

$$X_\tau \cong X_\sigma \setminus (u_k = 0).$$

*Demonstração.* Como  $\tau$  é uma face de  $\sigma$  segue da pela Proposição 2.10, que  $S_\tau = S_\sigma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-\lambda)$ , onde  $\lambda \in S_\sigma := \sigma^\vee \cap M$  e  $\tau = \sigma \cap \lambda^\perp$ . Assim, o monóide da face  $S_\tau$  é obtido adicionando o gerador  $-\lambda$  aos geradores de  $S_\sigma$ . Como  $\lambda$  é um elemento de  $(a_1, \dots, a_k)$ , podemos escolher  $a_k = \lambda$  e  $a_{k+1} = -\lambda$ . Assim, para obter as relações entre

os geradores de  $S_\tau$  consideramos as relações já existentes em  $S_\sigma$  e a relação adicional  $a_k + a_{k+1} = 0$ .

Como  $0 = -\lambda + \lambda = a_{k+1} + a_k$ , segue pelo isomorfismo  $\theta$  (Proposição 2.12) a relação multiplicativa  $u_k u_{k+1} = 1$  no anel de coordenadas  $R_\tau$ . Além disso, da Observação 2.5 os geradores  $u'_i$ s são as funções coordenadas na variedade tórica afim  $X_\sigma$  e  $X_\tau$ . Consideramos a projeção

$$\begin{aligned} \pi : \quad X_\tau \subset \mathbb{C}^{k+1} &\longrightarrow X_\sigma \subset \mathbb{C}^k \\ (u_1, \dots, u_k, u_{k+1}) &\longmapsto (u_1, \dots, u_k) \end{aligned}$$

A inversa  $\pi^{-1}$  de  $\pi$  dada por

$$\begin{aligned} \pi^{-1} : \quad X_\sigma \subset \mathbb{C}^k &\longrightarrow X_\tau \subset \mathbb{C}^{k+1} \\ (u_1, \dots, u_k) &\longmapsto (u_1, \dots, u_k, u_k^{-1}) \end{aligned}$$

Notemos que dá relação multiplicativa  $u_k u_{k+1} = 1$ , temos  $u_k \neq 0$ . Como a variedade algébrica afim  $\{(u_1, \dots, u_k) \in X_\sigma : u_k = 0\}$  é um fechado de Zariski, segue que o complementar  $\{(u_1, \dots, u_k) \in X_\sigma : u_k \neq 0\}$  é um aberto de Zariski. Daí  $X_\tau$  é identificado com o subconjunto aberto de  $X_\sigma$ . E, portanto,  $X_\tau \cong X_\sigma \setminus (u_k = 0)$ .  $\square$

Se  $\tau$  é uma face de um cone  $\sigma$ , então pela Proposição 2.6 (item(2))  $\sigma^\vee \subset \tau^\vee$ , daí  $\sigma^\vee \cap M \subset \tau^\vee \cap M$ , isto é,  $S_\sigma \subset S_\tau$ . Consequentemente  $R_\sigma \subset R_\tau$  e esta inclusão de  $\mathbb{C}$ -álgebras induz a inclusão de  $X_\tau$  em  $X_\sigma$ .

Seja  $\tau$  uma face comum de dois cones  $\sigma$  e  $\sigma'$ . Então, o Lema 2.16 permite colar  $X_\sigma$  e  $X_{\sigma'}$  por meio de sua parte comum  $X_\tau$ . A seguir, descrevemos com mais detalhes como ocorre este processo de colagem.

Sejam  $(v_1, \dots, v_l)$  e  $(u_1, \dots, u_k)$  as coordenadas em  $X_{\sigma'}$  e  $X_\sigma$ , respectivamente. Então, as projeções  $\pi' : X_\tau \longrightarrow X_{\sigma'} \setminus (v_l = 0)$  e  $\pi : X_\tau \longrightarrow X_\sigma \setminus (u_k = 0)$  definem homeomorfismos entre  $X_\tau$  e  $X_{\sigma'} \setminus (v_l = 0)$  e entre  $X_\tau$  e  $X_\sigma \setminus (u_k = 0)$ , respectivamente.

**Definição 2.14.** Sejam  $\sigma$  e  $\sigma'$  cones no leque  $\Delta$  e  $\tau$  uma face comum de  $\sigma$  e  $\sigma'$ . Definimos a aplicação

$$\phi_{\sigma, \sigma'} : X_\sigma \setminus (u_k = 0) \longrightarrow X_{\sigma'} \setminus (v_l = 0)$$

como  $\phi_{\sigma, \sigma'} := \pi' \circ (\pi)^{-1}$ . Aplicação  $\phi_{\sigma, \sigma'}$  é chamada aplicação de colagem.

**Exemplo 2.18.** Consideremos o leque  $\Delta$  em  $\mathbb{R}^2$  formado pelos cones  $\sigma_0$ ,  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , gerados respectivamente por  $\{e_1, e_2\}$ ,  $\{e_2, -e_1 - e_2\}$  e  $\{e_1, -e_1 - e_2\}$  (Figura 2.14).

Vamos encontrar as variedades tóricas afins correspondentes a cada cone do leque.

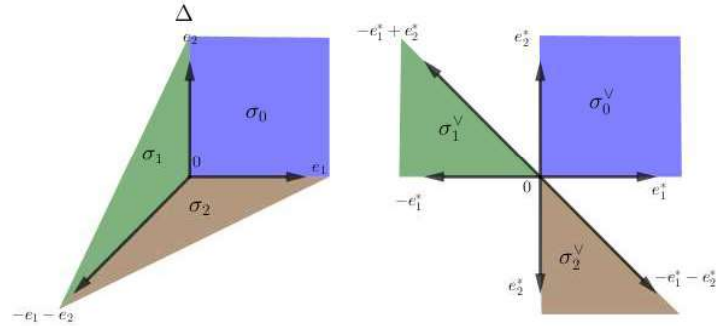


Figura 2.14: Leque  $\Delta$  e  $\sigma_0^\vee, \sigma_1^\vee$  e  $\sigma_2^\vee$  cones duais.

(I) A variedade tórica afim associada ao cone  $\sigma_0$  gerado por  $e_1, e_2$  é  $X_{\sigma_0} = \mathbb{C}_{(z_1, z_2)}^2$  (Exemplo 2.14).

(II) Agora para o cone  $\sigma_1$ , temos que  $\sigma_1^\vee$  é gerado  $\{-e_1^*, -e_1^* + e_2^*\}$ . E, assim,  $S_{\sigma_1}$  tem os seguintes geradores  $\{-e_1^*, -e_1^* + e_2^*\}$ , daí  $R_{\sigma_1} = \frac{\mathbb{C}[u_1, u_2]}{I_{\sigma_1}}$ .

Notamos que se  $t_1$  e  $t_2$  são números reais temos a seguinte combinação linear  $t_1(-e_1^*) + t_2(-e_1^* + e_2^*) = 0$ , ou seja,  $(t_1 - t_2)e_1^* + t_2e_2^* = 0$ . Então  $t_1 = 0, t_2 = 0$ , e isso significa que os geradores de  $S_{\sigma_1}$  são linearmente independentes. Logo,  $I_{\sigma_1} = \{0\}$  e assim  $R_{\sigma_1} = \mathbb{C}[z_1^{-1}, z_1^{-1}z_2]$ , e portanto,  $X_{\sigma_1} = V(\{0\}) = \mathbb{C}_{(z_1^{-1}, z_1^{-1}z_2)}^2$ .

(III) Finalmente, para  $\sigma_2$  o cone dual é  $\sigma_2^\vee$  é gerado por  $-e_2^*, e_1^* - e_2^*$ . Daí,  $S_{\sigma_2}$  admite como geradores  $-e_2^*, e_1^* - e_2^*$ . Repetindo o processo feito anteriormente percebemos que os geradores do  $\sigma_2^\vee$  são linearmente independentes. Assim  $R_{\sigma_2} = \mathbb{C}[z_2^{-1}, z_1z_2^{-1}]$  e, portanto,  $X_{\sigma_2} = \mathbb{C}_{(z_2^{-1}, z_1z_2^{-1})}^2$ .

Vamos explicitar a colagem de  $X_{\sigma_0}$  e  $X_{\sigma_1}$  ao longo de  $X_\tau$ , tendo em vista que,  $e_2 = \tau = \sigma_0 \cap \sigma_1$ . Inicialmente seja  $\tau = e_2$  como uma face de  $\sigma_0$ , para  $\lambda = e_1^*$  temos  $S_\tau = S_{\sigma_0} + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-\lambda) = S_{\sigma_0} + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-e_1^*)$ . Pelo Lema 2.16 podemos escrever

$$X_\tau = X_{\sigma_0} \setminus (u_2 = z_1 = 0) = \mathbb{C}_{z_1}^* \times \mathbb{C}_{z_2}$$

em  $X_{\sigma_0} = \mathbb{C}_{(z_1, z_2)}^2$ .

Agora, consideramos  $\tau = e_2$  como uma face de  $\sigma_1$ , para  $\mu = -e_1^*$  temos  $S_\tau = S_{\sigma_1} + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-\mu) = S_{\sigma_1} + \mathbb{Z}_{\geq 0}(e_1^*)$ . Pelo Lema 2.16 podemos escrever

$$X_\tau = X_{\sigma_1} \setminus (u_2 = z_1^{-1} = 0) = \mathbb{C}_{z_1^{-1}}^* \times \mathbb{C}_{z_1^{-1}z_2}$$

em  $X_{\sigma_1} = \mathbb{C}_{(z_1^{-1}, z_1^{-1}z_2)}^2$ .

Pela aplicação de colagem, temos

$$\phi_{\sigma_0, \sigma_1} : X_{\sigma_0} \setminus (z_1 = 0) \longrightarrow X_{\sigma_1} \setminus (z_1^{-1} = 0)$$



O mesmo processo pode ser feito com as variedades  $X_{\sigma_0}$  e  $X_{\sigma_2}$  através de  $X_\rho$  com  $\rho = e_1 = \sigma_0 \cap \sigma_2$ ;  $X_{\sigma_1}$  e  $X_{\sigma_2}$  através  $X_\eta$  onde  $\eta = -e_1 - e_2 = \sigma_1 \cap \sigma_2$ .

**Definição 2.15.** Seja  $\Delta$  um leque em  $\mathbb{R}^n$ . Considere a união disjunta  $\bigcup_{\sigma \in \Delta} X_\sigma$ , onde dois pontos  $x \in X_\sigma$  e  $x' \in X_{\sigma'}$  são identificados, se  $\phi_{\sigma, \sigma'}(x) = x'$ . O espaço dos pontos assim obtidos é chamado variedade tórica, determinada por  $\Delta$  e denotada por  $X_\Delta$ .

A variedade tórica  $X_\Delta$  é um espaço topológico dotado de uma cobertura aberta por variedades tóricas afins complexas que se intersectam em um subconjunto aberto e denso de Zariski. Essa cobertura é dada pelas variedades tóricas afins  $X_\sigma \subset X_\Delta$ , para cada  $\sigma \in \Delta$ . Podemos considerar duas topologias diferentes em  $X_\Delta$ , uma a topologia de subespaço ou topologia complexa e outra a topologia de Zariski (Lema 1.1), pois em particular cada  $X_\sigma$  é uma variedade algébrica afim.

A proposição a seguir justifica o nome tórica, para variedades tóricas.

**Proposição 2.17.** Toda variedade tórica  $X_\Delta$   $n$ -dimensional contém o toro  $\mathbb{T} = (\mathbb{C}^*)^n$  como um subconjunto aberto Zariski denso.

*Demonstração.* Como já sabemos através do cone nulo, que é face de todo cone  $\sigma \in X_\Delta$ , obtemos o toro  $\mathbb{T}$ . Além disso, para cada cone  $\sigma \subset \Delta$ , temos que existe um toro  $\mathbb{T}$  mergulhado em  $X_\sigma$  como um aberto de Zariski denso.

Além disso, pelas identificações dadas no parágrafo anterior todos os toros correspondentes as variedades tóricas afins  $X_\sigma$  em  $X_\Delta$  estão identificados com abertos densos em  $X_\Delta$ .

□

**Proposição 2.18.** Com respeito a topologia subespaço definida pelas topologias subespaços nas variedades tóricas afins  $X_\sigma$ , o espaço  $X_\Delta$  é Hausdorff.

*Demonstração.* Devemos mostrar que dados  $x, x' \in X_\Delta$  com  $x \neq x'$ , existem abertos  $A, B \subset X_\Delta$  tais que  $x \in A$ ,  $x' \in B$  e  $A \cap B = \emptyset$ . Se os dois pontos  $x, x'$  pertencem a mesma subvariedade aberta  $X_\sigma$ , eles possuem vizinhanças abertas disjuntas, tais vizinhanças são simplesmente abertos na topologia complexa.

Assumamos agora que  $x, x'$  pertencem a subvariedades distintas. Ou seja,  $x \in X_\sigma \setminus X_{\sigma'}$  e  $x' \in X_{\sigma'} \setminus X_\sigma$  para cada  $\sigma, \sigma' \in \Delta$ , com  $\sigma \neq \sigma'$ .

Como  $\tau = \sigma \cap \sigma'$ , encontramos um ponto na grade  $M$ ,  $m \in \tau^\perp$  satisfazendo  $m \in \text{relin}(\tau^\perp \cap \sigma^\vee)$  e  $-m \in \text{relin}(\tau^\perp \cap \sigma'^\vee)$ . Assim existem  $u_k = z^m, v_l = z^{-m}$  funções coordenadas  $X_\sigma$  e  $X_{\sigma'}$ , respectivamente. Assim segue do Lema 2.16 que  $u_k(x) = 0$  e  $v_l(x) = 0$  e  $u_k v_l = z^m z^{-m} = 1$  na interseção  $X_\tau = X_\sigma \cap X_{\sigma'}$  e assim segue que os conjuntos  $A = \{|u_k| < 1\} \subset X_\sigma$  e  $B = \{|v_l| < 1\} \subset X_{\sigma'}$  possuem interseção vazia, concluindo a demonstração.

□

**Exemplo 2.19.** Consideramos o leque  $\Delta$  em  $\mathbb{R}^n$  formado pelos cones nulo,  $\sigma_1$  gerado por  $e_1$  e o  $\sigma_2$  por  $-e_1$ .

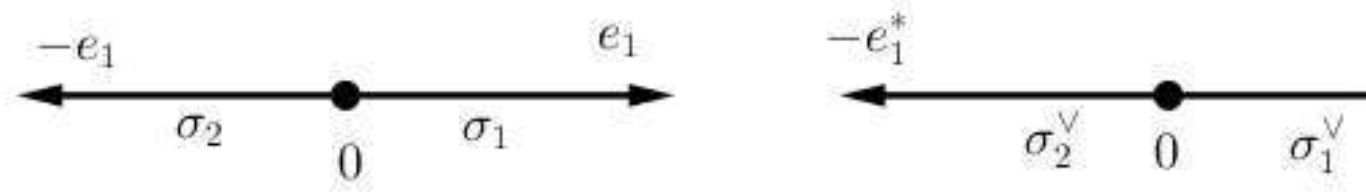


Figura 2.15: Leque  $\Delta$  e os cones duais  $\sigma_1^\vee$  e  $\sigma_2^\vee$ .

Os monóides associados aos cones duais  $\sigma_1^\vee, \sigma_2^\vee$  e  $\{0\}^\vee$  são respectivamente,  $S_{\sigma_1}$  gerados por  $e_1^*$ ,  $S_{\sigma_2}$  por  $-e_1^*$  e  $S_{\{0\}^\vee}$  por  $(e_1^*, -e_1^*)$ . As  $\mathbb{C}$ -álgebras correspondentes são, respectivamente,  $R_{\sigma_1} = \mathbb{C}[z_1]$ ,  $R_{\sigma_2} = \mathbb{C}[z_1^{-1}]$  e  $R_{\{0\}^\vee} = \mathbb{C}[z_1, z_1^{-1}]$ . Assim, temos  $X_{\sigma_1} = \mathbb{C}_{z_1}$ ,  $X_{\sigma_2} = \mathbb{C}_{z_1^{-1}}$  e  $X_{\{0\}^\vee} = \mathbb{C}_{(z_1, z_1^{-1})}$ . Notamos que  $0 = \sigma_1 \cap \sigma_2$  é a face comum dos cones  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , pela Proposição 2.10, podemos escrever

$$S_{\{0\}^\vee} = S_{\sigma_1} + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-e_1^*) \text{ e } S_{\{0\}^\vee} = S_{\sigma_2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}(e_1^*).$$

Então, pela aplicação de colagem

$$\phi_{\sigma_1, \sigma_2} : \mathbb{C}_{z_1} \setminus (z_1 = 0) \longrightarrow \mathbb{C}_{z_1^{-1}} \setminus (z_1 = 0)$$

é um homeomorfismo.

Podemos realizar a colagem entre  $X_{\sigma_1}$  e  $X_{\sigma_2}$ , usando a mudança de coordenadas  $z_1 \mapsto z_1^{-1}$ .

Recordamos que o espaço  $\mathbb{P}^1$ , espaço projetivo complexo, também denotado por  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ , é coberto por duas cartas. De fato, considere  $(t_0 : t_1)$  as coordenadas homogêneas em  $\mathbb{P}^1$ .

Considerando  $t_0 \neq 0$ , escrevemos  $\frac{t_1}{t_0} = z_1$ ,  $t_1 \neq 0$  e também  $\frac{t_0}{t_1} = z_1^{-1}$ , ou seja, cada carta de  $\mathbb{P}^1$  está em correspondência com  $\mathbb{C}$ , isso significa que  $X_{\sigma_1}$  e  $X_{\sigma_2}$  são as cartas de  $\mathbb{P}^1$ . E, portanto, a colagem dá o espaço projetivo complexo  $X_\Delta = \mathbb{P}^1$ .

**Exemplo 2.20.** Consideramos o seguinte leque  $\Delta$  formado por  $\sigma_0$  gerado por  $\{e_1, e_2\}$ ,  $\sigma_2$  gerado por  $\{-e_1, e_2\}$ ,  $\sigma_1$  gerado por  $\{-e_1, -e_2\}$  e  $\sigma_3$  gerado por  $\{e_1, -e_2\}$ , além dos seus respectivos cones duais (Figura 2.16), conforme a imagem a seguir:

Temos os monóides  $S_{\sigma_0}$  gerado por  $\{e_1^*, e_2^*\}$ ,  $S_{\sigma_1}$  gerado por  $\{-e_1^*, e_2^*\}$ ,  $S_{\sigma_2}$  gerado por  $\{-e_1^*, -e_2^*\}$  e  $S_{\sigma_3}$  gerado por  $\{e_1^*, -e_2^*\}$ .

Cada monóide, gera sua respectiva  $\mathbb{C}$ -álgebra que são:  $\mathbb{R}_{\sigma_0} = \mathbb{C}[z_1, z_2]$ ,  $\mathbb{R}_{\sigma_1} = \mathbb{C}[z_1^{-1}, z_2]$ ,  $\mathbb{R}_{\sigma_2} = \mathbb{C}[z_1^{-1}, z_2^{-1}]$  e  $\mathbb{R}_{\sigma_3} = \mathbb{C}[z_1, z_2^{-1}]$ .

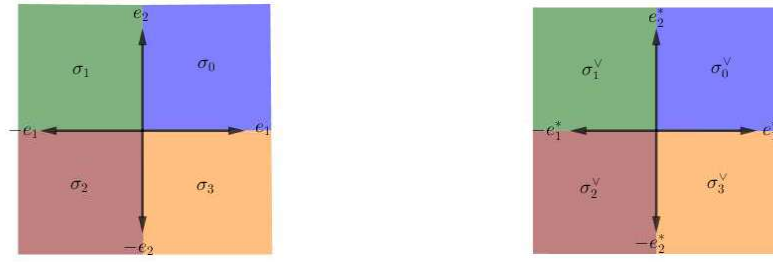


Figura 2.16: Leque  $\Delta$  e os cones duais  $\sigma_0^\vee, \sigma_1^\vee, \sigma_2^\vee$  e  $\sigma_3^\vee$ .

Associada a cada  $\mathbb{C}$ -álgebra descrita, obtemos uma variedade tórica afim  $X_{\sigma_0} = \mathbb{C}_{(z_1, z_2)}$ ,  $X_{\sigma_1} = \mathbb{C}_{(z_1^{-1}, z_2)}$ ,  $X_{\sigma_2} = \mathbb{C}_{(z_1^{-1}, z_2^{-1})}$  e  $X_{\sigma_3} = \mathbb{C}_{(z_1, z_2^{-1})}$ .

Vamos colar  $X_{\sigma_0}$  e  $X_{\sigma_1}$  ao longo de  $X_\tau$ , onde  $\tau = e_2 = \sigma_0 \cap \sigma_1$ . Observamos que  $S_\tau = S_{\sigma_0} + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-e_1^*)$  e  $S_\tau = S_{\sigma_1} + \mathbb{Z}_{\geq 0}(e_1^*)$  e assim pelo Lema 2.16

- $X_\tau = X_{\sigma_0} \setminus (z_1 = 0) = \mathbb{C}_{z_1}^* \times \mathbb{C}_{z_2}$  em  $X_{\sigma_0} = \mathbb{C}_{(z_1, z_2)}^2$ ;
- $X_\tau = X_{\sigma_1} \setminus (z_1 = 0) = \mathbb{C}_{z_1^{-1}}^* \times \mathbb{C}_{z_2}$  em  $X_{\sigma_1} = \mathbb{C}_{(z_1^{-1}, z_2)}^2$ ;

Podemos colar  $X_{\sigma_0}$  e  $X_{\sigma_1}$  pela mudança de coordenadas  $(z_1, z_2) \mapsto (z_1^{-1}, z_2)$  que dá  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}$  com coordenadas  $((t_0 : t_1), z_2)$  onde  $z_1 = t_0/t_1$ .

Agora, vamos colar  $X_{\sigma_2}$  e  $X_{\sigma_3}$  ao longo de  $X_\mu$ , onde  $\mu = -e_2 = \sigma_2 \cap \sigma_3$ . Observe ainda que  $S_\mu = S_{\sigma_2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}(e_1^*)$  e  $S_\mu = S_{\sigma_3} + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-e_1^*)$  e, assim, pelo Lema 2.16

- $X_\mu = X_{\sigma_2} \setminus (z_1^{-1} = 0) = \mathbb{C}_{z_1}^* \times \mathbb{C}_{z_2^{-1}}$  em  $X_{\sigma_2} = \mathbb{C}_{(z_1^{-1}, z_2^{-1})}^2$ ;
- $X_\mu = X_{\sigma_3} \setminus (z_1 = 0) = \mathbb{C}_{z_1}^* \times \mathbb{C}_{z_2^{-1}}$  em  $X_{\sigma_3} = \mathbb{C}_{(z_1, z_2^{-1})}^2$ ;

Deste modo, pela aplicação de colagem podemos colar  $X_{\sigma_2}$  e  $X_{\sigma_3}$  pela mudança de coordenadas  $(z_1, z_2^{-1}) \mapsto (z_1^{-1}, z_2^{-1})$  que dá  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}$  com coordenadas  $((w_0 : w_1), z_2^{-1})$  onde  $z_1 = w_0/w_1$ .

Finalmente, podemos colar  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}$  com  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}$  por

$$((t_0 : t_1), z_1) \mapsto ((t_0 : t_1), z_1^{-1})$$

obtendo  $X_\Delta = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  com coordenadas  $((t_0 : t_1), (s_0 : s_1))$  onde  $z_2 = s_0/s_1$ .

**Exemplo 2.21.** Consideramos o leque  $\Delta$  formado pelo cone nulo, o cone gerado por  $e_1$  e o cone gerado por  $e_2$  (Figura 2.17).

Temos os seguintes monóides  $S_{\sigma_1}$  gerado por  $\{e_1^*, e_2^*, -e_2^*\}$ ,  $S_{\sigma_2}$  gerado por  $\{e_1^*, -e_1^*, e_2^*\}$  e  $S_{\{0\}}$  gerado por  $\{e_1^*, -e_1^*, e_2^*, -e_2^*\}$ .

Cada monóide acima, gera sua respectiva  $\mathbb{C}$ -álgebra, que são:  $R_{\sigma_1} = \mathbb{C}[z_1, z_2, z_2^{-1}]$ ,  $R_{\sigma_2} = \mathbb{C}[z_1, z_1^{-1}, z_2]$  e  $R_{\{0\}} = \mathbb{C}[z_1, z_1^{-1}, z_2, z_2^{-1}]$ .

Cada  $\mathbb{C}$ -álgebra gera sua respectiva variedade tórica afim, que são:  $X_{\sigma_1} = \mathbb{C}_{z_1} \times \mathbb{C}_{z_2}^*$ ,  $X_{\sigma_2} = \mathbb{C}_{z_1}^* \times \mathbb{C}_{z_2}$  e  $X_{\{0\}} = \mathbb{C}_{z_1}^* \times \mathbb{C}_{z_2}^*$ .

Vamos colar  $X_{\sigma_1}$  e  $X_{\sigma_2}$  ao longo de  $X_{\{0\}}$ , onde  $\tau = \{0\} = \sigma_1 \cap \sigma_2$ . Observamos que  $S_{\{0\}} = S_{\sigma_1} + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-e_1^*)$  e  $S_{\{0\}} = S_{\sigma_2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-e_2^*)$ . Assim, pelo Lema 2.16, temos

- $X_{\{0\}} = X_{\sigma_1} \setminus (z_1 = 0) = \mathbb{C}_{z_1}^* \times \mathbb{C}_{z_2}^*$ ;
- $X_{\{0\}} = X_{\sigma_2} \setminus (z_2 = 0) = \mathbb{C}_{z_1}^* \times \mathbb{C}_{z_2}^*$ .

Usando a aplicação de colagem, colamos  $X_{\sigma_1}$  e  $X_{\sigma_2}$  pela seguinte mudança de coordenadas  $(z_1, z_2) \mapsto (z_1, z_2)$  de onde obtemos  $X_{\Delta} = \mathbb{C}^2 - \{0\}$ .

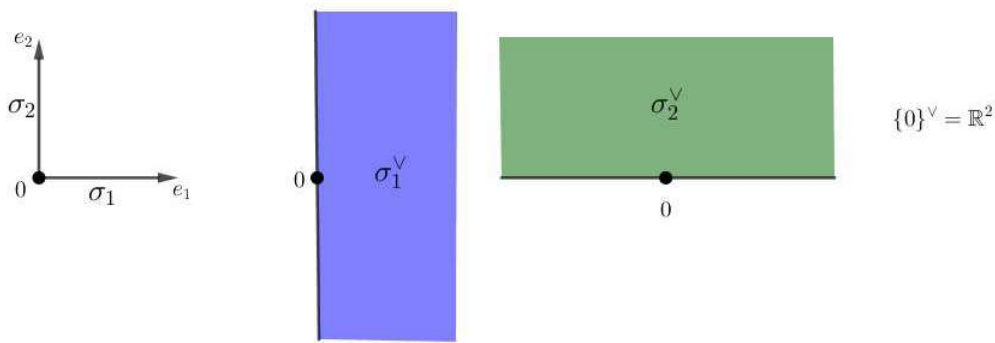


Figura 2.17: Leque  $\Delta$  e os duais  $\{0\}^\vee, \sigma_1^\vee$  e  $\sigma_2^\vee$ .

## 2.6 Mudança de coordenadas entre variedades tóricas

Seja  $\sigma$  um cone poliedral grade fortemente convexo, no Capítulo 1, vimos que para diferentes escolhas dos geradores da  $\mathbb{C}$ -álgebra finitamente gerada  $R_\sigma$  as representações da variedade tórica afim associada são homeomorfas. Do Lema de Gordon,  $S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$  tem uma quantidade mínima de geradores, digamos  $A = (a_1, a_2, \dots, a_k)$ . Além disso,  $A$  é único a menos da ordenação dos  $a_i$ 's. Portanto, temos um sistema minimal de coordenadas,  $u_1 = z^{a_1}, \dots, u_k = z^{a_k}$ . Podemos então incluir um gerador adicional e assim uma função coordenada a mais. Como motivação apresentamos o seguinte exemplo.

**Exemplo 2.22.** No Exemplo 2.14, vimos que a variedade tórica afim  $X_\sigma = \mathbb{C}^2$  tem como geradores  $a_1 = e_1^*, a_2 = e_2^*$ , onde  $\sigma \subset \mathbb{R}^2$ . Escolhendo o gerador adicional  $a_3 = a_1 + a_2$  para o monóide  $S_\sigma$ , obtemos uma nova representação para  $X_\sigma$ . Notamos que, nesse caso,

$$R_\sigma = \frac{\mathbb{C}[u_1, u_2, u_3]}{I_\sigma},$$

onde  $u_1 = z_1, u_2 = z_1, u_3 = z_1 z_2$ .

Como  $a_3 = a_1 + a_2$ , pelo isomorfismo  $\theta$  (Proposição 2.12) temos a relação multiplicativa  $u_3 = u_1 u_2$ , que gera o ideal  $I_\sigma$ . Assim,

$$X'_\sigma = V(I_\sigma) = \{(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{C}^3 : u_3 = u_1 u_2\}.$$

Sabemos que pelo Corolário 1.8 existe um homeomorfismo entre essas representações, que neste caso é dada pela aplicação

$$\begin{aligned} \phi : X_\sigma \subset \mathbb{C}^2 &\longrightarrow X'_\sigma \subset \mathbb{C}^3 \\ (u_1, u_2) &\longmapsto (u_1, u_2, u_1 u_2) \end{aligned}$$

com sua inversa,  $\phi^{-1} := \pi$  a projeção

$$\begin{aligned} \pi : X'_\sigma \subset \mathbb{C}^3 &\longrightarrow X_\sigma \subset \mathbb{C}^2 \\ (u_1, u_2, u_3) &\longmapsto (u_1, u_2), \end{aligned}$$

isto é,  $\phi$  é um homeomorfismo entre  $X_\sigma \subset \mathbb{C}^2$  e  $X'_\sigma \subset \mathbb{C}^3$ .

**Observação 2.9.** A aplicação  $\phi$  induz um isomorfismo entre os toros  $(\mathbb{C}^*)^2 \cap X_\sigma$  e  $(\mathbb{C}^*)^3 \cap X'_\sigma$ .

*Demonstração.* De fato, consideramos os mergulhos  $(t_1, t_2) \hookrightarrow (t_1, t_2) \in (\mathbb{C}^*)^2 \cap X_\sigma$  e  $(t_1, t_2, t_3) \hookrightarrow (t_1, t_2, t_1 t_2) \in (\mathbb{C}^*)^3 \cap X'_\sigma$ . Agora observamos que

$$\begin{aligned} \phi|_{(\mathbb{C}^*)^2} : X_\sigma \subset \mathbb{C}^2 &\longrightarrow X'_\sigma \subset \mathbb{C}^3 \\ (t_1, t_2) &\longmapsto (t_1, t_2, t_1 t_2), \end{aligned}$$

isto é,  $\phi$  induz um isomorfismo entre os toros mergulhados.  $\square$

Uma outra propriedade preservada pela mudança de coordenadas  $\phi$  é: se  $x = (x_1, x_2) \in X_\sigma$ , então  $\phi(x) = (y_1, y_2, y_3) \in X'_\sigma$  e se  $tx \in X_\sigma$ , então  $\phi(tx) \in X'_\sigma$ . Com efeito, pela Observação 2.8 o ponto  $tx = (t^{a_1} x_1, t^{a_2} x_2) = (t_1 x_1, t_2 x_2) \in X_\sigma$  e  $\phi(tx) = \phi(t_1 x_1, t_2 x_2) = (t_1 x_1, t_2 x_2, t_1 t_2 x_1 x_2) = (t^{a_1} y_1, t^{a_2} y_2, t^{a_3} y_3) \in X'_\sigma$ .

A construção acima, pode ser generalizada considerando que  $\sigma$  é um cone poliedral grade fortemente convexo. Então, pelo Lema de Gordon existe único conjunto minimal de geradores  $A = (a_1, \dots, a_k)$  de  $S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$ . Neste caso, podemos incluir geradores adicionais  $a_j$  com  $j \in \{k+1, \dots, k'\}$  que são combinações inteiras positivas  $a_j = \sum_{i=1}^k v_{ji} a_i$ . Além disso, temos as relações correspondentes  $u_j = u_1^{\mu_{j1}} \dots u_k^{\mu_{jk}}$ . Assim,  $X_\sigma \subset \mathbb{C}^k$  com o sistema de geradores  $(u_1, \dots, u_k)$  é enviado em  $X'_\sigma \subset \mathbb{C}^{k'}$  por

meio da aplicação

$$\begin{aligned} \phi : X_\sigma \subset \mathbb{C}^k &\longrightarrow X'_\sigma \subset \mathbb{C}^{k'} \\ (u_1, \dots, u_k) &\longmapsto (u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_{k'}) \end{aligned}$$

onde as coordenadas  $u_j$  extras são as descritas acima. A aplicação inversa é a projeção nas primeiras  $k$  coordenadas  $(u_1, \dots, u_k)$ .

# Capítulo 3

## A Ação Tórica e Suas Órbitas

A ação de um grupo sobre um conjunto é uma importante ferramenta matemática que permite obter informações sobre o conjunto. Neste capítulo, apresentamos a ação do toro algébrico  $\mathbb{T}$  sobre a variedade tórica  $X_\Delta$ , em seguida estudamos as órbitas desta ação. Além disso, apresentamos algumas propriedades topológicas das variedades tóricas e finalizamos analisando o caso particular de superfícies tóricas afins. As principais referências para este capítulo foram [2],[3], [5] e [11].

### 3.1 A Ação tórica

Inicialmente consideramos o toro  $\mathbb{T} = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : z_i \neq 0, \forall i \in \{1, \dots, n\}\}$  em  $\mathbb{C}^n$  e a seguinte operação  $\cdot : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ , dada por

$$t \cdot t' = tt' = (t_1, \dots, t_n)(t'_1, \dots, t'_n) = (t_1 t'_1, \dots, t_n t'_n).$$

Notamos que como  $t_i$  e  $t'_i$  são não nulos para todo  $i$ , segue que  $t_i t'_i \neq 0$ , isto é,  $tt' \in \mathbb{T}$ .

Observamos que o toro algébrico munido da operação produto definida acima é um grupo. De fato,

- (1) Dados  $t, t', t'' \in \mathbb{T}$  temos que  $t \cdot (t' \cdot t'') = (t \cdot t') \cdot t''$ , pois em particular,  $t, t', t''$  pertencem ao grupo multiplicativo  $\mathbb{C}^n$ ;
- (2) O elemento neutro é  $e = (1, \dots, 1)$ , pois  $e \cdot t = t \cdot e = t$ , para todo  $t \in \mathbb{T}$ ;
- (3) Dado  $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{T}$ , como  $t_i \neq 0$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ , temos que  $t^{-1} = (t_1^{-1}, \dots, t_n^{-1})$  é o elemento inverso de  $t$ .

O toro algébrico age em si próprio por multiplicação. De fato, consideramos a função  $*$  :  $\mathbb{T} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$  dada por  $t * t' = tt'$ .

Dados  $t, t', t'', e \in \mathbb{T}$ , temos:

### 3. A Ação Tórica e Suas Órbitas

---

$(tt') * t'' = (tt')t'' = t(t't'') = t * (t't'')$  e  $e * t = et = t$ . Isto é,  $*$  é uma ação de  $\mathbb{T}$  em  $\mathbb{T}$ .

Além disso, pelo Teorema 2.14 a aplicação  $h : \mathbb{T} \rightarrow X_\sigma \subset \mathbb{C}^k$  dada por  $t = (t_1, \dots, t_n) \mapsto (t^{a_1}, \dots, t^{a_k})$  aplica  $\mathbb{T}$  bijetivamente em um subconjunto aberto denso,  $X_\sigma \cap (\mathbb{C}^*)^k$  de  $X_\sigma$ .

Assim a aplicação

$$\begin{aligned} * : \mathbb{T} \times X_\sigma &\longrightarrow X_\sigma \\ (t, x) &\longmapsto t * x = (t^{a_1}x_1, \dots, t^{a_k}x_k), \end{aligned}$$

onde  $t^{a_i} = t_1^{\alpha_i^1} \dots t_n^{\alpha_i^n} \in \mathbb{C}^*$ , define uma ação de  $\mathbb{T}$  em  $X_\sigma$ . O próximo resultado mostra que a ação definida acima é a extensão da ação do toro algébrico nele mesmo.

**Teorema 3.1.** *Sejam  $\sigma \subset \mathbb{R}^n$  um cone poliedral grade fortemente convexo,  $A = (a_1, a_2, \dots, a_k)$  um sistema de geradores para  $S_\sigma$ , onde cada  $a_i$  é da seguinte forma  $a_i = (\alpha_i^1, \dots, \alpha_i^n)$  com  $\alpha_i^j \in \mathbb{Z}$  e um ponto  $x = (x_1, \dots, x_k) \in X_\sigma \subset \mathbb{C}^k$ . A aplicação*

$$\begin{aligned} * : \mathbb{T} \times X_\sigma &\longrightarrow X_\sigma \\ (t, x) &\longmapsto t * x = (t^{a_1}x_1, \dots, t^{a_k}x_k), \end{aligned}$$

onde  $t^{a_i} = t_1^{\alpha_i^1} \dots t_n^{\alpha_i^n} \in \mathbb{C}^*$ , é uma ação do toro algébrico na variedade tórica afim  $X_\sigma$ , que estende a ação natural do toro em si próprio. O mergulho do toro algébrico  $\mathbb{T} = (\mathbb{C}^*)^n$  é uma órbita desta ação.

*Demonstração.* Inicialmente notamos que pela Observação 2.8 que se  $x = (x_1, \dots, x_n) \in X_\sigma$  e  $t \in \mathbb{T}$ , então  $(t^{a_1}x_1, \dots, t^{a_k}x_k) \in X_\sigma$ . Assim, a aplicação  $*$  está bem definida e  $t * x \in X_\sigma$ .

Agora, mostremos que  $*$  é uma ação de  $\mathbb{T}$  em  $X_\sigma$ . Dados  $t = (t_1, \dots, t_n)$ ,  $z = (z_1, \dots, z_n)$ ,  $e = (1, \dots, 1) \in \mathbb{T}$  e  $x = (x_1, \dots, x_k) \in X_\sigma$ , temos

$$\begin{aligned} (tz) * x &= ((tz)^{a_1}x_1, \dots, (tz)^{a_k}x_k) \\ &= ((t_1z_1)^{\alpha_1^1} \dots (t_nz_n)^{\alpha_1^n}x_1, \dots, (t_1z_1)^{\alpha_k^1} \dots (t_kz_k)^{\alpha_k^n}x_k) \\ &= ((t_1^{\alpha_1^1} \dots t_n^{\alpha_1^n})(z_1^{\alpha_1^1} \dots z_n^{\alpha_1^n}x_1), \dots, (t_1^{\alpha_k^1} \dots t_n^{\alpha_k^n})(z_1^{\alpha_k^1} \dots z_n^{\alpha_k^n}x_k)) \\ &= (t^{a_1}(z^{a_1}x_1), \dots, t^{a_k}(z^{a_k}x_k)) = t * (z * x) \end{aligned}$$

e

$$e * x = (e^{a_1}x_1, \dots, e^{a_k}x_k) = ((1^{\alpha_1^1} \dots 1^{\alpha_1^n})x_1, \dots, (1^{\alpha_k^1} \dots 1^{\alpha_k^n})x_k) = (x_1, \dots, x_k) = x.$$

Por outro lado, notamos que se  $\sigma = \{0\}$ , então  $X_\sigma = (\mathbb{C}^*)^n$  é o toro algébrico.



Neste caso, a ação é dada por

$$\begin{aligned} * : \mathbb{T} \times \mathbb{T} &\longrightarrow \mathbb{T} \\ (t, x) &\longmapsto t * x = (t^{a_1}x_1, \dots, t^{a_k}x_k) \end{aligned}$$

onde em cada coordenada da imagem, temos o produto que torna  $\mathbb{T}$  um grupo. Assim, para cada  $x \in \mathbb{T}$  a órbita  $\mathbb{T} * x = \{t * x : t \in \mathbb{T}\}$  é o próprio toro algébrico  $\mathbb{T} = (\mathbb{C}^*)^n$ .

Agora, dado  $x = (1, \dots, 1) \in \mathbb{T}$  temos,

$$\mathbb{T} * x = \{t * (1, \dots, 1) : t \in \mathbb{T}\} = \{(t^{a_1}1, \dots, t^{a_k}1) : t \in \mathbb{T}\} = \{(t^{a_1}, \dots, t^{a_k}) : t \in \mathbb{T}\} = \mathbb{T}$$

□

A ação definida no teorema anterior é chamada de ação tórica. Notamos que a ação  $*$  independe das escolhas dos geradores de  $S_\sigma$ . Com efeito, suponhamos que existem dois sistemas de geradores  $A = (a_1, \dots, a_k)$ ,  $A' = (a'_1, \dots, a'_m)$  de  $S_\sigma$ . Logo, temos  $(u_1, \dots, u_k)$  e  $(u'_1, \dots, u'_m)$  dois sistemas de coordenadas correspondentes a duas realizações geométricas  $X_\sigma \subset \mathbb{C}^k$  e  $X'_\sigma \subset \mathbb{C}^m$ . No entanto, sabemos que existe uma mudança de coordenadas  $\phi : X_\sigma \rightarrow X'_\sigma$  que induz uma bijeção entre os toros  $\mathbb{T} \subset X_\sigma$  e  $\mathbb{T}' \subset X'_\sigma$  (Exemplo 2.9), visto em  $X_\sigma$  e  $X'_\sigma$ ,  $\pi$  e  $\pi'$  são as imagens via as ações. Além disso, se  $x = (x_1, \dots, x_n) \in X_\sigma$  então  $\phi(x) = (y_1, \dots, y_k) \in X'_\sigma$  e assim  $\phi(t^{a_1}x_1, \dots, t^{a_k}x_k) = (t^{a'_1}y_1, \dots, t^{a'_m}y_m)$ . Isso significa que se mudamos os geradores do monóide  $S_\sigma$  a ação é preservada pela mudança de variáveis entre  $X_\sigma$  e  $X'_\sigma$ .

**Exemplo 3.1.** Consideramos o cone do Exemplo 2.9 gerado por  $\{e_2, 2e_1 - e_2\}$ , cujos correspondentes geradores de  $S_\sigma$  são  $a_1 = e_1^*$ ,  $a_2 = e_1^* + e_2^*$ ,  $a_3 = e_1^* + 2e_2^*$ . Então neste caso, a ação tórica de  $\mathbb{T} = (\mathbb{C}^*)^2$  em  $X_\sigma$  é dada por

$$\begin{aligned} * : (\mathbb{C}^*)^2 \times X_\sigma &\longrightarrow X_\sigma \\ (t, x) &\longmapsto t * x = (t_1x_1, t_1t_2x_2, t_1t_2^2x_3). \end{aligned}$$

A órbita do ponto  $(1, 1)$  é  $\mathbb{T} \cong (\mathbb{C}^*)^2$ .

**Exemplo 3.2.** Consideramos o cone do Exemplo 2.3 gerado por  $\{e_1, 2e_1 + e_2\}$  cujo cone dual é gerado por  $\{e_1^* - 2e_2^*, e_2^*\}$ , logo  $S_\sigma$  é gerado por  $\{e_1^* - 2e_2^*, e_2^*, 3e_1^* - e_2^*\}$ . Então neste caso, a ação tórica de  $\mathbb{T} = (\mathbb{C}^*)^2$  em  $X_\sigma$  é dada por

$$\begin{aligned} * : (\mathbb{C}^*)^2 \times X_\sigma &\longrightarrow X_\sigma \\ (t, x) &\longmapsto t * x = (t_1t_2^{-2}x_1, t_2x_2, t_1^3t_2^{-1}x_3). \end{aligned}$$

Para  $x = (1, 1)$  temos a órbita  $\mathbb{T} \cong (\mathbb{C}^*)^2$ .

**Teorema 3.2.** *Seja  $\Delta$  um leque em  $\mathbb{R}^n$ , a ação tórica nas variedades tóricas afins  $X_\sigma$ , para  $\sigma \in \Delta$ , induz uma ação tórica na variedade tórica  $X_\Delta$ .*

*Demonstração.* Sejam cone  $\sigma \in \Delta$  e  $\tau$  uma face do cone  $\sigma$ , pelo Lema 2.16, temos que a projeção

$$\begin{aligned} \pi : \quad X_\tau \subset \mathbb{C}^{k+1} &\longrightarrow X_\sigma \subset \mathbb{C}^k \\ (u_1, \dots, u_k, u_{k+1}) &\longmapsto (u_1, \dots, u_k) \end{aligned}$$

determina um homomorfismo entre  $X_\tau$  e  $X_\sigma \setminus (u_k = 0)$ .

Consideramos  $t * x$  um ponto em  $X_\tau$ ,  $\pi(t * x) = t * \pi(x)$ , isto é, a projeção é compatível com a ação  $*$  de  $\mathbb{T}$  em  $X_\sigma$ .

Seja  $\sigma' \in \Delta$  tal que  $\tau$  também é face de  $\sigma'$ . Então, a aplicação de colagem  $\phi_{\sigma, \sigma'}$

$$\phi_{\sigma, \sigma'} : X_\sigma \setminus (u_k = 0) \longrightarrow X_{\sigma'} \setminus (v_l = 0)$$

também será compatível com a ação  $*$ . Como dados  $\sigma, \sigma'$  cones em  $\Delta$  com face comum a colagem  $X_\sigma$  e  $X_{\sigma'}$  segue que  $*$  induz uma ação de  $\mathbb{T}$  em  $X_\Delta$  da seguinte forma: dado  $t \in \mathbb{T}$  e  $x \in X_\Delta$ , temos que  $x \in X_\sigma$  para algum  $\sigma \in \Delta$ , então  $t.x = t * x$ .

$$\begin{aligned} * : \mathbb{T} \times X_\sigma &\longrightarrow X_\sigma \\ (t, x) &\longmapsto t.x = t * x. \end{aligned}$$

□

## 3.2 Órbitas da ação tórica

Dado um conjunto  $X$  e uma ação de um grupo  $G$  sobre  $X$ , podemos escrever  $X$  como união disjunta das órbitas determinadas por esta ação. Nesta seção, descrevemos com detalhes as órbitas da ação tórica. Dado um leque  $\Delta$  e  $\sigma$  um cone em  $\Delta$ , mostramos que para cada face  $\tau$  de  $\sigma$ , existe uma órbita associada a  $\tau$ .

Antes de iniciar os estudos das órbitas no caso afim, vamos relacionar a ação tórica com um homomorfismo de semigrupos. Inicialmente, recordamos que se  $V \subset \mathbb{C}^k$  é uma variedade algébrica o Corolário 1.8 apresenta bijeções entre  $V$ , o espectro do anel de coordenadas  $R_V$  e o conjunto de homomorfismos de  $R_V$  em  $\mathbb{C}$ . Agora, notamos que como um semigrupo a grade dual  $M \cong \mathbb{Z}^n$  é gerada por  $\pm e_i^*$ , para  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Então, a  $\mathbb{C}$ -álgebra  $\mathbb{C}[M]$  é finitamente gerada pelos monômios  $z_i, z_i^{-1}$ , com  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Pelo Exemplo 2.12, temos que se  $\sigma$  é cone nulo, então  $\mathbb{T} = \text{Spec}(\mathbb{C}[M])$ , das bijeções acima, concluímos que o toro algébrico  $\mathbb{T}$  é isomorfo a  $\text{Hom}_{\mathbb{C}\text{-alg}}(\mathbb{C}[M], \mathbb{C})$ . Isso significa que podemos associar o toro algébrico ao conjunto de homomorfismo de  $\mathbb{C}$ -álgebras de  $\mathbb{C}[M]$  em  $\mathbb{C}$ .

**Proposição 3.3.** Denotando por  $\mathbb{T}_N := N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^*$  o toro associado a grade  $N$ . Existe um isomorfismo entre  $\mathbb{T}_N$  e o conjunto dos homomorfismos de semigrupos de  $M$  em  $\mathbb{C}^*$ .

*Demonstração.* De fato, consideramos a aplicação

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{T}_N &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{C}^*) \\ t &\longmapsto \Phi_t : M \longrightarrow \mathbb{C}^* \\ m &\longmapsto \Phi_t(m) = z^m(t) = t^m \end{aligned}$$

Notamos que  $\Phi$  é um homomorfismo de grupos. De fato, dados  $t, t' \in \mathbb{T}_N$ , temos

$$\Phi(t.t')(m) = \Phi_{tt'}(m) = (tt')^m = t^m.t'^m = \Phi(t)(m).\Phi(t')(m)$$

Vamos mostrar que  $\Phi_t$  é injetiva. Seja  $\varphi : M \longrightarrow \mathbb{C}^*$  o homomorfismo constante igual a 1, isto é,  $\varphi(m) = 1$  para todo  $m \in M$ . Temos,

$$\ker \Phi_t = \{t \in \mathbb{T}_N : \Phi(t) = \varphi\},$$

Sejam  $m = (a_1, \dots, a_n)$  e  $t = (t_1, \dots, t_n)$ , então

$$\Phi_t(m) = 1 \iff t^m = 1 \iff t_1^{a_1} \dots t_n^{a_n} = 1$$

como  $t_i$  estão na grade, logo  $t_i = 1$ , para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ , ou seja,  $\ker \Phi_t = \{(1, \dots, 1)\}$ . E, portanto  $\Phi_t$  é injetiva.

Agora suponhamos que  $\Phi$  não seja sobrejetora. Então,  $\text{Hom}(M, \mathbb{C}^*) \not\subseteq \Phi(\mathbb{T}_N)$ , isto é, existe  $\psi \in \text{Hom}(M, \mathbb{C}^*)$  tal que  $\psi \notin \Phi(\mathbb{T}_N)$ . Sabemos que

$$\Phi(\mathbb{T}_N) = \{\Phi_t \in \text{Hom}(M, \mathbb{C}^*); t \in \mathbb{T}_N\},$$

logo, se  $\psi \notin \Phi(\mathbb{T}_N)$ , então não existe  $t \in \mathbb{T}_N$  tal que  $\Phi_t = \psi$ . Em particular, para  $\psi \equiv 1$  temos  $\Phi_t \equiv 1$ , isto é,  $t_1^{a_1} \dots t_n^{a_n} = 1$ , ou seja,  $t_i = 1$  é o elemento neutro de  $\mathbb{T}_N$ , mas isso é um absurdo, pois estamos supondo que não existe  $t \in \mathbb{T}_N$  tal que  $\Phi_t = \psi$ .  $\square$

Deste modo temos os seguintes isomorfismos

$$\mathbb{T} = \text{Spec}(\mathbb{C}[M]) \cong \text{Hom}_{\mathbb{C}\text{-alg}}(\mathbb{C}[M], \mathbb{C}) \cong \text{Hom}_{\text{sg}}(M, \mathbb{C}^*) \cong N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^*$$

onde o último isomorfismo é uma consequência da aplicação,  $N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^* \longrightarrow \text{Hom}_{\text{sg}}(M, \mathbb{C}^*)$  (veja [2], p.271).

Por outro lado, seja  $\sigma$  cone grade fortemente convexo. Então,  $S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$  é um semigrupo da grade  $M$ , uma vez que é fechado com a operação de soma em  $M$ . Além disso,  $\mathbb{C}[S_\sigma]$  é uma sub-álgebra de  $\mathbb{C}[M]$  gerada pelos monômios  $u_i = z^{a_i}$ , onde  $(a_1, \dots, a_k)$  são os geradores de  $S_\sigma$ . De fato, dados um elementos  $a, a' \in S_\sigma$ , denotamos  $z^a, z^{a'}$  elementos correspondentes em  $\mathbb{C}[S_\sigma]$  e  $z^{a'}z^a = z^{a'+a}$  e  $z^0 = 1$ , onde  $0 \in \mathbb{Z}^n$ .

### 3. A Ação Tórica e Suas Órbitas

---

Consideramos a aplicação definida na Proposição 3.3. Dado um homomorfismo  $\varphi \in \text{Hom}(S_\sigma, \mathbb{C}^*)$  o ponto  $x$  corresponde a  $\varphi$  e tal que  $\varphi(a) = z^a(x) = x^a$  para todo  $a \in S_\sigma$ . Em particular, segue que  $x = (\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_k))$ , onde  $(a_1, \dots, a_k)$  é o sistema de geradores para  $S_\sigma$ . Notamos que  $x$  é um ponto da variedade tórica afim  $X_\sigma$ . De fato, dados  $(\mu_1, \dots, \mu_k), (\nu_1, \dots, \nu_k) \in \mathbb{Z}^n$  com  $\mu_i, \nu_i \geq 0$  para todo  $i \in \{1, \dots, k\}$  que determinam uma relação aditiva entre os geradores de  $S_\sigma$ , isto é,

$$\sum_{i=1}^k a_i \nu_i = \sum_{i=1}^k a_i \mu_i \quad (3.1)$$

temos

$$\begin{aligned} x^\nu &= \prod_{i=1}^k [\varphi(a_i)]^{\nu_i} = \prod_{i=1}^k [x^{a_i}]^{\nu_i} = \prod_{i=1}^k x^{a_i \nu_i} \\ &= x^{a_1 \nu_1} \dots x^{a_k \nu_k} = \varphi(a_1 \nu_1) \dots \varphi(a_k \nu_k) \end{aligned}$$

como  $\varphi$  é homomorfismo de semigrupos segue que  $x^\nu = \sum_{i=1}^k a_i \nu_i$  e pela Equação 3.1 temos que  $x^\nu = x^\mu$ . E, portanto,  $x \in X_\sigma$ .

Podemos também interpretar a ação tórica de  $\mathbb{T}$  em  $X_\sigma$  da seguinte forma: um ponto  $t$  no toro  $\mathbb{T}_N$  é identificado com o homomorfismo de grupos  $\theta_t : M \rightarrow \mathbb{C}^*$ . Por outro lado, um ponto  $x$  em  $X_\sigma$  pode ser identificado com homomorfismo de semigrupos  $\theta_x : S_\sigma \rightarrow \mathbb{C}$ . Assim podemos identificar  $t * x$  com o homomorfismo de semigrupos  $\phi$  dado da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \phi : S_\sigma &\longrightarrow \mathbb{C} \\ u &\longmapsto \theta_t(u) * \theta_x(u), \end{aligned}$$

isto é,  $\phi = \theta_t \theta_x$ .

Na próxima definição apresentamos um conceito fundamental para descrição das órbitas da ação tórica.

**Definição 3.1.** Sejam  $\sigma$  um cone e  $X_\sigma$  a variedade tórica afim associada a  $\sigma$ . Para cada face  $\tau$  de  $\sigma$  associamos o ponto distinguido  $x_\tau$  correspondendo ao homomorfismo de semigrupo definido, nos geradores  $a$  de  $S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$  por

$$\varphi_\tau(a) = \begin{cases} 1, & \text{se } a \in \tau^\perp \cap M, \\ 0, & \text{nos outros casos.} \end{cases}$$

onde  $\varphi_\tau : S_\sigma \rightarrow \{1, 0\}$ .

Posteriormente mostramos que as órbitas da ação tórica em  $X_\Delta$  são completamente

determinadas pelas órbitas dos pontos distinguidos.

**Exemplo 3.3.** Consideramos o cone  $\sigma$  do Exemplo 2.4 gerado  $\{e_2, 2e_1 - e_2\}$  cujos geradores de  $S_\sigma$  são  $a_1 = e_1^* = (1, 0)$ ,  $a_2 = e_1^* + e_2^* = (1, 1)$  e  $a_3 = e_1^* + 2e_2^* = (1, 2)$ . Considere a face  $\tau_1$  gerada por  $2e_1 - e_2$ , então somente  $a_3 \in \tau_1^\perp = \{u \in \sigma^\vee; \langle u, 2e_1 - e_2 \rangle = 0\}$ , pois

$$\langle e_1^*, 2e_1 - e_2 \rangle = 2, \langle e_1^* + e_2^*, 2e_1 - e_2 \rangle = 2 \text{ e } \langle e_1^* + 2e_2^*, 2e_1 - e_2 \rangle = 0.$$

Então,  $\varphi_{\tau_1}(a_1) = \varphi_{\tau_1}(a_2) = 0$  e  $\varphi_{\tau_1}(a_3) = 1$ . Logo o ponto  $x_{\tau_1}$  tem coordenadas  $z^{a_1}(x_{\tau_1}) = z^{a_2}(x_{\tau_1}) = 0$  e  $z^{a_3}(x_{\tau_1}) = 1$ , isto é,  $x_{\tau_1} = (0, 0, 1)$ .

Considerando agora  $\tau_2$  a face gerada por  $e_2$ , então  $\tau_2^\perp$  é a linha reta gerada por  $e_1$ . Obtemos  $\varphi_{\tau_2}(a_1) = 1$  e  $\varphi_{\tau_2}(a_2) = \varphi_{\tau_2}(a_3) = 0$ . Então,  $x_{\tau_2} = (1, 0, 0)$ .

Considerando também  $\sigma$  como uma face dele mesmo,  $\sigma^\perp = \{0\}$ . Então, não existem  $a_i \in \sigma^\perp$  e  $x_\sigma = (0, 0, 0)$ .

Finalmente, se consideramos a face  $\{0\}$  de  $\sigma$ , então  $\{0\}^\perp = (\mathbb{R}^2)^*$  contém todos os pontos  $a_i$ , daí  $x_{\{0\}} = (1, 1, 1)$ .

**Definição 3.2.** Sejam  $\sigma$  um cone em  $\mathbb{R}^n$  e  $\tau$  uma face de  $\sigma$ . A órbita de  $\mathbb{T}$  em  $X_\sigma$  correspondente a face  $\tau$  é a órbita do ponto distinguido  $x_\tau$ . Denotada por  $\mathcal{O}_\tau$ .

**Exemplo 3.4.** Sejam  $\sigma \in \mathbb{R}^2$  cone do Exemplo 2.4, gerado por  $v_1 = e_2$ ,  $v_2 = 2e_1 - e_2$  e  $X_\sigma$  a variedade tórica afim obtida por meio de  $\sigma$ . No Exemplo 3.1 vimos que ação do toro  $\mathbb{T} = (\mathbb{C}^*)^2$  em  $X_\sigma$  é dada por

$$\begin{aligned} * : (\mathbb{C}^*)^2 \times X_\sigma &\longrightarrow X_\sigma \\ (t, x) &\longmapsto t * x = (t_1 x_1, t_1 t_2 x_2, t_1 t_2^2 x_3), \end{aligned}$$

onde  $t = (t_1, t_2) \in \mathbb{T}$  e  $x \in X_\sigma$ . Vamos calcular as órbitas desta ação.

Sabemos que a órbita do ponto  $x$  é dada pelo conjunto  $\mathbb{T} * x = \{t * x : t \in (\mathbb{C}^*)^2\}$ . Onde os pontos distinguidos associado as faces de  $\sigma$ , foram obtidos no exemplo anterior. Assim, temos

Se  $x_\sigma = (0, 0, 0)$  temos  $\mathcal{O}_\sigma = \{(0, 0, 0)\}$ ;

Se  $x_{\tau_1} = (0, 0, 1)$  temos  $\mathcal{O}_{\tau_1} = \{(0, 0, t_1 t_2) : t = (t_1, t_2) \in (\mathbb{C}^*)^2\} = \{0\} \times \{0\} \times \mathbb{C}_{\xi_1}^*$ ;

Se  $x_{\tau_2} = (1, 0, 0)$  temos  $\mathcal{O}_{\tau_2} = \{(t_1, 0, 0) : t = (t_1, t_2) \in (\mathbb{C}^*)^2\} = \mathbb{C}_{\xi_1}^* \times \{0\} \times \{0\}$ ;

Se  $x_{\{0\}} = (1, 1, 1)$  temos  $\mathcal{O}_{\{0\}} = \{(t_1, t_2, t_1 t_2) : t = (t_1, t_2) \in (\mathbb{C}^*)^2\} = (\mathbb{C}^*)^2$  é o toro.

Ao final desta seção mostramos que toda variedade tórica (em particular, variedade tórica afim) é escrita como união de suas órbitas.

Seja  $\Delta$  um leque em  $\mathbb{R}^n$  e  $X_\Delta$  a variedade tórica associada a  $\Delta$ . Pelo Teorema 3.2, a ação tórica em cada variedade tórica afim  $X_\sigma$ , induz uma ação do toro algébrico  $\mathbb{T} \subset X_\Delta$  em  $X_\Delta$ . Nosso objetivo é descrever as órbitas  $\mathcal{O}$  desta ação.

Quando  $\Delta = \{0\}$ , ou seja, o leque é formado pelo cone  $\tau$  nulo, então  $X_{\{0\}} = \mathbb{T}$ . Segue do Teorema 3.1 que  $\mathcal{O}_\tau$  é o toro algébrico de dimensão  $n$  e esta é uma órbita densa. Se  $\dim(\tau) = n$ , então  $\tau^\perp = \{0\}$ , neste caso  $x_\tau = (0, 0, \dots, 0)$  a origem em  $\mathbb{R}^n$  e, portanto  $\mathcal{O}_\tau = \{x_\tau\}$ . Agora, vamos considerar as outras faces próprias para um cone  $\sigma$ . Veremos que as demais faces geram, órbitas que também toros, com dimensões menores que  $n$ . Vamos descrever as órbitas  $\mathcal{O}_\tau$  e  $V(\tau) := \overline{\mathcal{O}_\tau}$  seu fecho, abstratamente e mostrar como mergulhar em  $X_\Delta$ . Para cada  $\sigma$  no cone no leque  $\Delta$  e  $\tau \prec \sigma$  de dimensão  $0 < k < n$ , definimos  $N_\tau$  como a subgrade de  $N$ , gerada como um grupo, por  $N_\tau = \tau \cap N$  e

$$N(\tau) = \frac{N}{N_\tau} = \frac{N}{N_\tau \cap N}, \quad \text{e} \quad M(\tau) = \tau^\perp \cap M$$

a grade quociente e sua grade dual, respectivamente. Definimos  $\mathcal{O}_\tau$  o toro correspondendo a estas grades

$$\mathcal{O}_\tau \cong \mathbb{T}_{N(\tau)} \cong \text{Hom}(M(\tau), \mathbb{C}^*) \cong \text{Spec}(\mathbb{C}[M(\tau)]) = N(\tau) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^*$$

isto é um toro de dimensão  $n - k$ .

Notamos que  $\mathbb{T}_N$  age transitivamente em  $\mathcal{O}_\tau$ . De fato, considere a sequência exata

$$0 \longrightarrow N_\tau \longrightarrow N \longrightarrow N(\tau) \longrightarrow 0$$

tensorizando por  $\mathbb{C}^*$ , temos a sequência exata

$$0 \longrightarrow N_\tau \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^* \longrightarrow N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^* \longrightarrow N(\tau) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^* \longrightarrow 0,$$

mas como  $\mathbb{T}_N = N \otimes \mathbb{C}^*$  e  $\mathbb{T}_{N(\tau)} = N(\tau) \otimes \mathbb{C}^*$  temos

$$0 \longrightarrow N_\tau \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{T}_N \longrightarrow \mathbb{T}_{N(\tau)} \longrightarrow 0$$

as bijeções  $\mathbb{T}_{N(\tau)} \cong \text{Hom}(M(\tau), \mathbb{C}^*) \cong \mathcal{O}_\tau$  são compatíveis com a ação tórica, também  $\mathbb{T}_N$  age transitivamente em  $\mathcal{O}_\tau$ .

**Definição 3.3.** Dado um leque  $\Delta$  em  $\mathbb{R}^n$  e  $\tau$  um cone em  $\Delta$ . O conjunto os cones  $\sigma$  de  $\Delta$ , isto é,  $\{\sigma \in \Delta : \tau \preceq \sigma\}$  é chamado de estrela do cone  $\sigma$  e denotado por  $Star(\tau)$ .

Denotamos  $N_{\mathbb{R}} := N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  o espaço vetorial real associado a  $N$ . A estrela de um cone  $\tau$  é identificada abstratamente, como o conjunto dos cones  $\sigma \in \Delta$ , que contém  $\tau$  como uma face. Os cones que pertencem a  $Star(\tau)$  são determinadas por suas imagens em  $N(\tau)$ , isto é,

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma + (N_\tau)_{\mathbb{R}}}{(N_\tau)_{\mathbb{R}}} \subset \frac{N_{\mathbb{R}}}{(N_\tau)_{\mathbb{R}}} = N(\tau)_{\mathbb{R}}$$

**Observação 3.1.** A grade  $N_{\mathbb{R}}$  é isomorfa ao  $\mathbb{R}^n$ .

*Demonstração.* De fato,  $N_{\mathbb{R}} := N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \cong \mathbb{Z}^n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ , como  $\mathbb{Z}^n$  é um  $\mathbb{Z}$ -módulo livre, podemos escrever  $\mathbb{Z}^n = (\oplus_{i=1}^n \mathbb{Z})$ . Assim,  $N_{\mathbb{R}} = (\oplus_{i=1}^n \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ , pela Proposição 7 (ver[2], p.255) temos que

$$(\oplus_{i=1}^n \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \cong \oplus_{i=1}^n (\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R})$$

E, como  $(\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$  temos  $N_{\mathbb{R}} \cong \oplus_{i=1}^n \mathbb{R} = \mathbb{R}^n$ .  $\square$

**Lema 3.4.** Seja  $\tau$  uma face de um cone  $\sigma$  e  $v_1, v_2$  dois vetores em  $\sigma$ . Então  $v_1 + v_2$  pertence a  $\tau$  se, e somente se, ambos  $v_1$  e  $v_2$  pertencem a  $\tau$ , onde  $\tau = \sigma \cap \lambda^{\perp}$  para algum  $\lambda \in \sigma^{\vee}$ .

*Demonstração.* Se  $v_1$  e  $v_2$  pertencem a  $\tau$  então  $\langle \lambda, v_1 \rangle = 0$  e  $\langle \lambda, v_2 \rangle = 0$  e assim  $\langle \lambda, v_1 + v_2 \rangle = 0$ . Portanto,  $v_1 + v_2 \in \tau$ .

Por outro lado, se  $v_1 + v_2 \in \tau$  então  $\langle \lambda, v_1 + v_2 \rangle = 0$ , ou seja,  $\langle \lambda, v_1 \rangle = -\langle \lambda, v_2 \rangle$ . Além disso, como  $\lambda \in \sigma^{\vee}$  então  $\langle \lambda, v_1 \rangle \geq 0$  e  $\langle \lambda, v_2 \rangle \geq 0$ , donde concluímos que  $\langle \lambda, v_1 \rangle = 0$  e  $\langle \lambda, v_2 \rangle = 0$ , isso implica que  $v_1, v_2 \in \tau$ .  $\square$

**Lema 3.5.** Dado um leque  $\Delta$  em  $\mathbb{R}^n$  e  $\tau$  um cone em  $\Delta$ . A estrela do cone  $\tau$ ,  $Star(\tau) = \{\bar{\sigma} : \tau \preceq \sigma\}$  é um leque em  $N(\tau) = \frac{N}{N_{\tau}}$ .

*Demonstração.* De fato, cada cone que pertence ao  $Star(\tau)$  são também cones do leque  $\Delta$ , assim são poliedrais. Além disso, como  $\bar{\sigma} \subset (N_{\tau})_{\mathbb{R}}$ , logo os cones são grades. Agora vamos mostrar que cada cone  $\bar{\sigma} \in Star(\tau)$  é fortemente convexo, isto é,  $\bar{\sigma} \cap (-\bar{\sigma}) = 0$ . De fato, tomando  $\bar{v} \in \bar{\sigma} \cap (-\bar{\sigma})$ , então  $\bar{v}$  satisfaz

$$v = v_1 + w_1 = -v_2 + w_2$$

para alguns  $v_1, v_2 \in \sigma$  e  $w_1, w_2 \in N_{\tau}$ .

Sejam  $z_1, \dots, z_n$  os geradores de  $N_{\tau} = \tau \cap N + (-\tau \cap N)$ . Então, todo elemento  $z$  de  $(N_{\tau})_{\mathbb{R}}$  pode ser escrito

$$z = \sum_{i=1}^s a_i z_i - \sum_{i=1}^s b_i z_i$$

onde os  $a_i$ 's,  $b_i$ 's são não negativos.

Isto significa que todo elemento de  $N(\tau)$  pode ser escrito como uma diferença de elementos de  $\tau$ . Em particular, temos

$$w_1 = \alpha_1 - \beta_1, w_2 = \alpha_2 - \beta_2$$

para alguns  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \tau$ . Assim,

$$v_1 + v_2 = w_2 - w_1 = (\alpha_2 + \beta_1) - (\alpha_1 + \beta_2)$$

e, assim,  $v_1 + v_2 + (\alpha_1 + \beta_2) = \alpha_2 + \beta_1$ .

Temos que  $v_1 + v_2 \in \sigma$ ,  $v_1 + v_2 + (\alpha_1 + \beta_2) = \alpha_2 + \beta_1 \in \tau$ . Desde que  $\bar{v}$  é um cone do  $Star(\tau)$ , ele contém  $\tau$  e ambos  $\tau$  e  $\sigma$  são cones de  $\Delta$ , logo  $\tau$  é face de  $\sigma$ , aplicando o Lema 3.4 concluímos  $v_1$  e  $v_2$  pertencem a  $\tau$ . Deste modo temos  $v \in N_\tau$ , portanto  $\bar{v} = 0$ .

Agora, sejam  $\bar{\sigma}_1$  e  $\bar{\sigma}_2$  elementos do  $Star(\tau)$ . Seja  $\bar{v}$  um vetor na interseção  $\bar{\sigma}_1 \cap \bar{\sigma}_2$  então podemos escrever  $v = v_1 + w_1 = v_2 + w_2$ , onde  $v_1 \in \sigma_1, v_2 \in \sigma_2, w_1, w_2 \in N_\tau$ .

Como  $\sigma_1, \sigma_2$  são cones em  $\Delta$ , então  $\sigma_1 \cap \sigma_2$  é um face de  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ . Além disso,  $\tau \subset \sigma_1, \tau \subset \sigma_2$ . Logo,  $\tau \subset \sigma_1 \cap \sigma_2$ . E como,

$$v_1 = v_2 + w_2 - w_1, v_2 = v_1 + w_1 - w_2$$

temos  $v_1 \in \sigma_2$  e  $v_2 \in \sigma_1$ . Assim, concluímos que  $\bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_2 = \overline{\sigma_1 + \sigma_2}$ . Em particular,  $\bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_2 \in Star(\tau)$ .

Finalmente, consideramos  $\bar{\sigma} \in Star(\tau)$ . Seja  $\bar{\sigma} \cap \lambda^\perp$  uma face de  $\bar{\sigma}$ , para algum  $\lambda \in M(\tau)$ . Como  $M(\tau) = \tau^\perp \cap M$ , então a face  $\lambda \in M(\tau)$  é da forma  $\bar{\rho}$  para  $\rho = \lambda^\perp \cap \sigma$ , e por construção  $\rho$  é uma face de  $\sigma$  que contém  $\tau$ , isto significa que  $\bar{\rho} \in Star(\tau)$ . E, portanto,  $Star(\tau)$  é um leque em  $N(\tau)$ .  $\square$

Sendo o  $Star(\tau)$  um leque, faz sentido definir uma variedade tórica  $n-k$  dimensional associada a ele e denotada por  $V(\tau)$ , isto é,  $V(\tau) = X_{Star(\tau)}$ . Notamos que se  $\bar{\tau} = \{0\} \in N(\tau)$ , temos  $\mathcal{O}_\tau = \mathbb{T}_{N(\tau)} \subset V(\tau)$ , ou seja,  $V(\tau)$  contém o toro mergulhado.

A variedade tórica  $V(\tau)$  tem cobertura afim  $\{X_\sigma(\tau)\}$ , onde  $\sigma$  varia sobre todos os cones no leque  $\Delta$  que contém  $\tau$  como face. Podemos escrever;

$$X_\sigma(\tau) = Spec(\mathbb{C}[\bar{\sigma}^\vee \cap M(\tau)]) = Spec(\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap \tau^\perp \cap M]),$$

pois,

$$\bar{\sigma}^\vee = \bar{\sigma}^\vee \cap M(\tau) = (\sigma + N_\tau)^\vee \cap M(\tau) = \sigma^\vee \cap (N_\tau)^\vee \cap M(\tau) = \sigma^\vee \cap M(\tau) = \sigma^\vee \cap \tau^\perp \cap M.$$

**Proposição 3.6.** Seja  $\tau$  um cone no leque  $\Delta$ . Para cada  $\sigma \in \Delta$  tal que  $\tau \preceq \sigma$  existe um mergulho fechado de  $X_\sigma(\tau)$  em  $X_\sigma$ .

*Demonstração.* Recordamos que pontos nas variedades tóricas afins, podem ser vistos como homomorfismos de semigrupos, isto é,  $X_\sigma(\tau) = Hom_{sg}(\sigma^\vee \cap \tau^\perp \cap M, \mathbb{C})$  e  $X_\sigma = Hom_{sg}(\sigma^\vee \cap M, \mathbb{C})$

Consideramos a aplicação

$$\begin{aligned} f : Hom_{sg}(\sigma^\vee \cap \tau^\perp \cap M, \mathbb{C}) &\hookrightarrow Hom_{sg}(\sigma^\vee \cap M, \mathbb{C}) \\ \varphi &\longmapsto f(\varphi) \end{aligned}$$



onde

$$f(\varphi) : \sigma^\vee \cap M \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$x \longmapsto \varphi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{se } x \in \sigma^\vee \cap \tau^\perp \cap M; \\ 0, & \text{se } x \notin \sigma^\vee \cap \tau^\perp \cap M. \end{cases}$$

A aplicação  $f(\varphi)$  é um homomorfismo de semigrupos. De fato, sejam  $a, b \in \sigma^\vee \cap \tau^\perp \cap M$ . Então, pelo Lema 3.4  $a + b \in \sigma^\vee \cap \tau^\perp \cap M$ , logo

- (i)  $a, b \in \sigma^\vee \cap \tau^\perp \cap M$ , então  $f(\varphi)(a+b) = \varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b) = f(\varphi)(a) + f(\varphi)(b)$ ;
- (ii)  $a \notin \sigma^\vee \cap \tau^\perp \cap M$ , então  $a + b \notin \sigma^\vee \cap \tau^\perp \cap M$  e  $f(\varphi)(a + b) = 0$

Além disso, podemos definir o seguinte homomorfismo sobrejetor de  $\mathbb{C}$ -álgebras

$$\phi : \mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M] \longrightarrow \mathbb{C}[\sigma^\vee \cap \tau^\perp \cap M]$$

$$z^u \longmapsto \phi(z^u) = \begin{cases} z^u, & \text{se } x \in \sigma^\vee \cap \tau^\perp \cap M; \\ 0, & \text{se } x \notin \sigma^\vee \cap \tau^\perp \cap M. \end{cases}$$

De maneira similar feito para  $f(\varphi)$ , o homomorfismo  $\phi$  também está bem definido. Assim, a sobrejeção de  $\mathbb{C}$ -álgebras define o mergulho fechado (Veja [6],p.104).

$$X_\sigma(\tau) = \text{Hom}_{sg}(\sigma^\vee \cap \tau^\perp \cap M, \mathbb{C}) \hookrightarrow \text{Hom}_{sg}(\sigma^\vee \cap M, \mathbb{C}) = X_\sigma.$$

□

**Proposição 3.7.** Seja  $\Delta$  um leque em  $\mathbb{R}^n$ , para cada  $\tau \in \Delta$  existe o mergulho  $V(\tau) \hookrightarrow X_\Delta$ .

*Demonstração.* As seguintes aplicações são compatíveis, isto é, satisfazem a aplicação de colagem. Se  $\tau$  é uma face de  $\sigma$  e  $\sigma$  uma face de  $\sigma'$ , o diagrama

$$\begin{array}{ccc} X_\sigma(\tau) & \hookrightarrow & X_{\sigma'}(\tau) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_\sigma & \hookrightarrow & X_{\sigma'} \end{array}$$

comuta, assim também comuta o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{sg}(\sigma^\vee \cap \tau^\perp \cap M, \mathbb{C}) & \hookrightarrow & \text{Hom}_{sg}(\sigma'^\vee \cap \tau^\perp \cap M, \mathbb{C}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Hom}_{sg}(\sigma^\vee \cap M, \mathbb{C}) & \hookrightarrow & \text{Hom}_{sg}(\sigma'^\vee \cap M, \mathbb{C}) \end{array}$$

onde as aplicações horizontais são restrições e aplicações na vertical são extensões por zero. Realizando a colagem de todas as aplicações obtemos mergulho fechado

$$V(\tau) \hookrightarrow X_\Delta.$$

□

**Corolário 3.8.** Se  $\tau$  é uma face de  $\tau'$ , então  $V(\tau') \hookrightarrow V(\tau)$ .

*Demonstração.* Basta construir o mergulho nos abertos  $X_\sigma$  para  $\sigma \in \text{Star}(\tau')$  por extensão por zero de  $\text{Hom}_{sg}(\sigma^\vee \cap \tau'^\perp \cap M, \mathbb{C})$  para  $\text{Hom}_{sg}(\sigma^\vee \cap \tau^\perp \cap M, \mathbb{C})$  e realizar um procedimento semelhante feito para variedade tórica  $X_\Delta$ , concluimos que  $V(\tau') \hookrightarrow V(\tau)$ . □

Em resumo, temos correspondência em que inverte a ordem de cones  $\tau$  em  $\Delta$  para o fecho de órbitas  $V(\tau)$  em  $X_\Delta$ . Para provar o próximo resultado que descreve as órbitas de uma variedade tórica afim precisamos do seguinte resultado.

**Lema 3.9.** Sejam  $\tau, \sigma$  cones em um leque em  $N_{\mathbb{R}}$ . Se  $\tau \not\preceq \sigma$  então temos

$$V(\tau) \cap X_\sigma = \emptyset$$

*Demonstração.* Como um subconjunto de  $X_\Delta$ , a variedade  $V(\tau)$  é coberta pelas variedades tôricas afins  $X_\pi$  que  $\tau \preceq \pi$  e  $\pi$  é cone do leque  $\Delta$ . Assim, basta mostrar que para cones  $\tau \preceq \pi$  temos tais que

$$(V(\tau) \cap X_\pi) \cap X_\sigma = \emptyset.$$

Notamos que  $(V(\tau) \cap X_\pi) \cap X_\sigma = V(\tau) \cap X_{\pi \cap \sigma}$ , pois  $\pi \cap \sigma$  é face de  $\pi$  e  $\sigma$ . Seja  $\pi' = \pi \cap \sigma$ , então  $\pi'$  é face de  $\sigma$  e  $\pi'$  não contém  $\tau$ , pois  $\tau \not\preceq \sigma$ . Então, por definição existe  $m \in \sigma^\vee$  tal que  $\pi' = \sigma \cap m^\perp$ .

Notamos que se  $\tau \not\preceq \sigma$ , então  $\tau \not\subseteq \sigma$ . Assim,  $(\tau^\vee)^\vee \not\subseteq (\sigma^\vee)^\vee$ , pelo (item(2)) da Proposição 2.6 temos,  $\sigma^\vee \not\subseteq \tau^\vee$ . E, assim,  $m \in \tau^\vee$ . Em particular,  $m \in \tau^\perp$ .

Assim, pelo Lema 2.16 podemos identificar  $X_{\pi'} \subset X_\sigma$  com um aberto de Zariski em  $X_\sigma$ , tal que  $u_m := x^m \neq 0$ , para  $x \in V(\tau)$ . Por outro lado, como  $m \notin \tau^\perp$  temos,  $u_m := x^m = 0$  para  $x \in V(\tau)$ . Portanto,

$$(V(\tau) \cap X_\pi) \cap X_\sigma = V(\tau) \cap X_{\pi'} = \emptyset$$

□

**Proposição 3.10.** Sejam  $\sigma$  um cone em um leque  $\Delta$  no  $\mathbb{R}^n$  e  $X_\sigma$  a variedade tórica afim associada a  $\sigma$ , as órbitas  $\mathcal{O}_\tau$  da ação de  $\mathbb{T}$  em  $X_\sigma$  e o fecho das órbitas  $V(\tau)$ . Então, existem as seguintes relações

(a)  $X_\sigma = \coprod_{\tau \prec \sigma} \mathcal{O}_\tau$

(b)  $V(\tau) = \coprod_{\tau \prec \xi} \mathcal{O}_\xi$

*Demonstração.* (a) Notamos que se  $a \in \Pi_{\tau \prec \sigma} \mathcal{O}_\tau$ , então existe pelo menos uma face  $\sigma'$  de  $\sigma$  tal que  $a \in \mathcal{O}_{\sigma'}$  e como  $\mathcal{O}_{\sigma'} \subset X_{\sigma'}$  e  $X_{\sigma'} \subset X_\sigma$ , segue que  $\Pi_{\sigma' \prec \sigma} \mathcal{O}_{\sigma'} \subset X_\sigma$ .

Para provar a outra inclusão, tomemos  $x \in X_\sigma$ . Então, associamos a um homomorfismo de semigrupos  $\varphi_x : \sigma^\vee \cap M \longrightarrow \mathbb{C}$ . O ponto  $x$  pertence a  $\mathbb{T}_N = \mathcal{O}_{\{0\}}$  exatamente quando  $\varphi_x(u) \neq 0$  para todo  $u \in \sigma^\vee \cap M$ , para então estender ao homomorfismo  $\overline{\varphi}_x : M \longrightarrow \mathbb{C}^*$  definida por  $\overline{\varphi}_x(u) = \varphi_x(u)$ .

Em geral, se  $\tau$  é uma face própria de  $\sigma$ , então  $\varphi_x : \sigma^\vee \cap M(\tau) \longrightarrow \mathbb{C}^*$ , isto é,  $\varphi_x : \sigma^\vee \cap \tau^\perp \cap M \longrightarrow \mathbb{C}^*$ . Assim temos  $x^{-1}(\mathbb{C}^*) = \sigma^\vee \cap \tau^\perp \cap M$  é uma face de  $\sigma^\vee$ . Pelo Lema 3.4, soma de dois elementos  $\sigma^\vee \cap \tau^\perp$  que pertencem  $x^{-1}(\mathbb{C}^*)$  se, e somente se, ambos elementos estão  $x^{-1}(\mathbb{C}^*)$ . Isso significa que cada  $x$  pertence a uma única órbita (que são toros)  $\mathcal{O}_\tau \subset X_\sigma(\tau)$ .

(b) Dado um cone  $\sigma$  em  $\Delta$  e  $\tau \preceq \sigma$  temos pelo Corolário 3.8 temos que  $\mathcal{O}_\sigma \subseteq V(\tau)$ . Além disso,  $V(\sigma)$  pode ser mergulhado em  $V(\tau)$ . Portanto,  $\mathcal{O}_\sigma \subseteq V(\sigma) \subseteq V(\tau)$ . Para inclusão contrária, suponhamos que  $\tau \not\preceq \sigma$ . Assim pelo Lema 3.9,  $V(\tau) \cap X_\sigma = \emptyset$ . Portanto,  $V(\tau) \cap \mathcal{O}_\sigma = \emptyset$ , pois  $X_\sigma = \Pi_{\tau \prec \sigma} \mathcal{O}_\tau$  e, assim,  $\mathcal{O}_\sigma \not\subseteq V(\tau)$ . □

Sabemos que realizando a colagem das variedades tóricas afins obtemos a variedade tórica, o item (a) garante então que  $X_\Delta$  é a união disjunta de suas órbitas  $\mathcal{O}_\tau$  que são órbitas da ação de  $\mathbb{T}_N$  em  $X_\Delta$ .

Vamos apresentar exemplos das órbitas da ação tórica e de seu fecho na variedade tórica afim  $X_\sigma$ . Para isso, seja  $\tau$  uma face de um cone  $\sigma$ , então  $\mathcal{O}_\sigma \subset V(\tau) = \overline{\mathcal{O}_\sigma}$ . Podemos determinar órbitas e seu fecho, da seguinte maneira. Consideramos um sistema de geradores  $(a_1, \dots, a_k)$  do monóide  $S_\sigma$  e denotamos por  $I$  o conjunto de índices  $1 \leq i \leq k$  tal que  $a_i \notin \tau^\perp$ . Em outras palavras, se  $(v_1, \dots, v_s)$  denotam os vetores que geram  $\tau$ , temos

$$i \in I \iff \text{para todo } j, \text{ com } 1 \leq j \leq s, \quad \langle a_i, v_j \rangle \neq 0$$

Em  $X_\sigma$  com coordenadas  $u_i = z^{a_i}$ , então  $V(\tau)$  é definido por  $u_i = 0$ , se  $i \in I$ .

**Exemplo 3.5.** Consideramos a variedade tórica  $X_\sigma$  apresentada no 2.9, dada nas funções coordenadas  $(u_1, u_2, u_3) = (z_1, z_1 z_2, z_1 z_1^2)$ . Temos que  $S_\sigma$  tem como geradores  $a_1 = e_1^*$ ,  $a_2 = e_1^* + e_2^*$  e  $a_3 = e_1^* + 2e_2^*$ . Temos,

1. Para  $\tau_1$  a face gerada por  $e_2$ , vamos encontrar o conjunto  $I$ , que deve satisfazer:

$$i \in I \iff \langle a_i, e_2 \rangle \neq 0$$

Como  $\langle e_1^* + e_2^*, e_2 \rangle = 1 \neq 0$  e  $\langle e_1^* + 2e_2^*, e_2 \rangle = 2 \neq 0$ , logo  $I = \{2, 3\}$ . Assim em  $X_\sigma$ , temos que  $V(\tau)$  é definido como  $u_2 = 0, u_3 = 0$ . Em  $\mathbb{C}^3 = \mathbb{C}_{(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}^3$ ,  $V(\tau_1) = \mathbb{C}_{\xi_1} \times \{0\} \times \{0\}$ .

2. Para  $\tau_2$  a face gerada por  $2e_1 - e_2$ , o conjunto  $I$  deve satisfazer:

$$i \in I \Leftrightarrow \langle a_i, 2e_1 - e_2 \rangle \neq 0$$

Como  $\langle e_1^*, 2e_1 - e_2 \rangle = 2 \neq 0$  e  $\langle e_1^* + 2e_2^*, 2e_1 - e_2 \rangle = 1 \neq 0$ , portanto  $I = \{1, 2\}$ . Assim em  $X_\sigma$  temos que  $V(\tau)$  é definido como  $u_1 = 0, u_2 = 0$ . Em  $\mathbb{C}^3 = \mathbb{C}_{(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}^3$ ,  $V(\tau_2) = \{0\} \times \{0\} \times \mathbb{C}_{\xi_3}$ .

3. Finalmente para  $\tau_3 = \sigma$ , nesse caso o cone é face dele mesmo, assim  $I = \{1, 2, 3\}$  e em  $X_\sigma$ , o conjunto  $V(\tau_3)$  é definido por  $u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = 0$ , e, portanto  $V_\tau$  é a origem de  $\mathbb{C}^3$ .

Para encontrar as órbitas, recordamos que os pontos distinguidos são:  $x_{\tau_1} = (1, 0, 0)$ ,  $x_{\tau_2} = (0, 0, 1)$ ,  $x_{\tau_3} = (0, 0, 0)$  e  $x_{\{0\}} = (1, 1, 1)$ .

Por definição, cada órbita é determinada pelo ponto distinguido associado a face. Assim,

1. Para o ponto  $x_{\tau_1} = (1, 0, 0)$ , temos a órbita  $\mathcal{O}_{\tau_1} = \mathbb{C}_{\xi_1}^* \times \{0\} \times \{0\}$ , que representa um toro de dimensão 1.
2. Do ponto  $x_{\tau_2} = (0, 0, 1)$ , temos a órbita  $\mathcal{O}_{\tau_2} = \{0\} \times \{0\} \times \mathbb{C}_{\xi_3}^*$ , que também representa um toro de dimensão 1.
3. Já para o ponto  $x_{\tau_3} = (0, 0, 0)$ , temos a órbita  $\mathcal{O}_{\tau_3} = \{(0, 0, 0)\}$ , que é o ponto distinguido  $x_\tau = (0, 0, 0)$ .
4. Com o ponto  $x_{\tau_4} = (1, 1, 1)$ , como já sabemos obtemos o toro complexo algébrico  $\mathcal{O}_{\tau_4} = \mathbb{T}$

### 3.3 Propriedades topológicas

Nessa seção, estudamos algumas propriedades topológicas das variedades tóricas. Para isto estabelecemos condições sobre o leque  $\Delta$  para obter informações topológicas sobre  $X_\Delta$ .

**Definição 3.4.** Um leque  $\Delta \subset \mathbb{R}^n$  é completo se seus cones cobrem  $\mathbb{R}^n$ , isto é,  $|\Delta| = \mathbb{R}^n$ .

**Exemplo 3.6.** O leque  $\Delta$  em  $\mathbb{R}^2$  formado pelos cones  $\sigma_1$  gerado pelos vetores  $e_1, e_2$ ,  $\sigma_2$  gerado pelos vetores  $-e_1, -e_2, \sigma_3$  gerado pelos vetores  $-e_1, e_2, \sigma_1$  gerado pelos vetores  $e_1, -e_2$  e o cone nulo é completo, pois qualquer vetor de  $\mathbb{R}^2$  pode ser gerado por combinações lineares dos vetores  $0, e_1, e_2, -e_1$  e  $-e_2$ . Por exemplo,  $u = (2, -2)$  pode ser escrito como  $u = 2e_1 - 2e_2$ .

### 3. A Ação Tórica e Suas Órbitas

---

Com intuito de estabelecer alguns resultados em breve, vamos apresentar algumas informações. Para  $k \in \mathbb{Z}$ , temos o homomorfismo de grupos algébricos

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{C}^* &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ z &\longmapsto \phi(z) = z^k \end{aligned}$$

que induz o isomorfismo de grupos algébricos  $Hom_{gr.alg.}(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*) \cong \mathbb{Z}$ .

Seja  $N$  a grade  $\mathbb{Z}^n$  e  $M \cong Hom(N, \mathbb{Z})$  sua grade dual, já sabemos que  $\mathbb{T} = \mathbb{T}_N = Hom(M, \mathbb{C}^*) \cong N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^*$  e com a escolha de uma base para  $N$  e como  $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^* \cong \mathbb{C}^*$  então temos

$$Hom(\mathbb{C}^*, \mathbb{T}) \cong Hom(\mathbb{Z} \otimes \mathbb{C}^*, N \otimes \mathbb{C}^*)$$

pela Proposição 4, (ver [2] p.274) temos que

$$Hom(\mathbb{C}^*, \mathbb{T}) \cong Hom(\mathbb{Z}, N) \otimes Hom(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*)$$

como  $\mathbb{Z} \cong Hom(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*)$  temos que

$$Hom(\mathbb{C}^*, \mathbb{T}) \cong Hom(\mathbb{Z}, N) \otimes \mathbb{Z} \cong Hom(\mathbb{Z}, N) \cong N$$

Sendo assim cada  $\lambda \in Hom(\mathbb{C}^*, \mathbb{T})$  corresponde a um único elemento  $v$  em  $N$ , onde

$$\lambda_v(z) = (z^{v_1}, \dots, z^{v_n})$$

com  $v = (v_1, \dots, v_n)$ .

De maneira análoga, temos

$$M \cong Hom(N, \mathbb{Z}) \cong Hom(N, Hom(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*))$$

pelo Corolário ([2] p.268) temos que

$$M \cong Hom(N \otimes \mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*).$$

Finalmente, como  $\mathbb{T} \cong N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^*$ , temos

$$M \cong Hom(\mathbb{T}, \mathbb{C}^*).$$

Assim, cada aplicação  $\varphi$  em  $Hom(\mathbb{T}, \mathbb{C}^*)$  corresponde a um único elemento na grade  $M$ . Denotamos por  $\varphi_u : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C}^*$  o elemento correspondente a  $u \in M$ . Para  $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{T}$ , temos que  $\varphi_u(t) = t_1^{u_1} \dots t_n^{u_n}$ .

Observamos que para cada  $z \in \mathbb{C}^*$  então  $\lambda_v(z) \in \mathbb{T}$ . Como  $\mathbb{T} = Hom(M, \mathbb{C}^*)$ , segue que  $\lambda_v(z)$  corresponde a um homomorfismo de grupos de  $M$  em  $\mathbb{C}^*$ . Portanto,

$$\begin{aligned} \text{Hom}(\mathbb{T}, \mathbb{C}^*) \times \text{Hom}(\mathbb{C}^*, \mathbb{T}) &\rightarrow \text{Hom}(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*) \\ \varphi &\quad \quad \quad \lambda \quad \quad \mapsto \quad \lambda_v \circ \varphi_u \end{aligned} \tag{3.2}$$

dada por

$$\begin{aligned} \lambda_v(\varphi_u(z)) = \varphi_u(z^{v_1}, \dots, z^{v_n}) &= (z^{v_1})^{u_1} \dots (z^{v_n})^{u_n} \\ &= z^{u_1 v_1 + \dots + u_n v_n} \\ &= z^{\langle u, v \rangle} \end{aligned}$$

onde  $\langle, \rangle : M \times N \rightarrow \mathbb{Z}$  é tal que  $\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$ . Portanto,

$$\varphi_u(\lambda_v(z)) = z^{\langle u, v \rangle} \tag{3.3}$$

como  $\text{Hom}(\mathbb{T}, \mathbb{C}^*) \cong M$ ,  $\text{Hom}(\mathbb{C}^*, \mathbb{T}) \cong N$  e  $\text{Hom}(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*) \cong \mathbb{Z}$ , podemos considerar (3.2) uma aplicação de  $M \times N$  em  $\mathbb{Z}$ . Isto mostra que partindo do toro  $\mathbb{T}$  podemos obter a grade  $N$ .

Reciprocamente, dado o mergulho do toro  $\mathbb{T}$  em  $X_\sigma$ , queremos obter o cone  $\sigma$ . Para fazer isto vamos estudar o comportamento do homomorfismos  $\lambda_v(z)$  quando  $v$  variando na grade  $N$  e  $z$  se aproxima de 0.

**Exemplo 3.7.** Seja  $\sigma$  em  $\mathbb{R}^n$  o cone dado no Exemplo 2.16, isto é,  $\sigma$  gerado por  $e_1, \dots, e_p$  com  $p \leq n$ . Então a variedade tórica afim correspondente é  $X_\sigma = \mathbb{C}^p \times (\mathbb{C}^*)^{n-p}$ . Para  $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{Z}^n$  então  $\lambda_v(z) = (z^{v_1}, \dots, z^{v_n})$  e o limite  $\lim_{z \rightarrow 0} \lambda_v(z)$  existe e pertence a  $X_\sigma$  se, e somente se  $v_i \geq 0, \forall v_i$  e  $v_i \leq 0$  se  $i > p$ . Em outras palavras o limite existe e pertence a  $X_\sigma$  se, e somente se,  $v_i \geq 0$  para todo  $i$  e  $v_i = 0$  se  $i > p$ . Em outras palavras, o limite existe em  $X_\sigma$  se, e somente se,  $v \in \sigma$ . Neste caso, o ponto limite é  $(w_1, \dots, w_i, \dots, w_n)$ , onde

$$w_i = \begin{cases} 1, & \text{se } v_i = 0 \\ 0, & \text{se } v_i > 0. \end{cases}$$

Portanto, os candidatos a limites são os pontos distinguidos  $x_\tau$  para  $\tau \preceq \sigma$ .

**Proposição 3.11.** Seja  $\Delta$  um leque em  $\mathbb{R}^n$ ,  $\tau$  um cone de  $\Delta$  e  $v \in |\Delta|$  tal que  $v$  pertence ao interior relativo de  $\tau$ . Então,  $\lim_{z \rightarrow 0} \lambda_v(z) = x_\tau$ .

*Demonstração.* Sejam  $\sigma$  um cone em  $\Delta$  com  $\tau$  uma face de  $\sigma$  e  $X_\sigma$  variedade tórica afim associada a  $\sigma$ . Como  $\lambda_v(z)$  é um elemento em  $\mathbb{T}$  segue de (3.3) que podemos associar  $\lambda_z(v)$  a aplicação  $u \mapsto z^{\langle u, v \rangle}$ . Como  $v$  pertence ao interior relativo de  $\tau$ , segue pelo Lema 2.1 e do fato que  $\tau \preceq \sigma$  que para  $u \in \sigma^\vee \cap M$ , temos  $\langle u, v \rangle \geq 0$ . A igualdade

vale exatamente quando  $u \in \tau^\perp$ . Como cada  $x_\tau$  corresponde a um homomorfismo de semigrupos  $S_\sigma$  em  $\mathbb{C}$  que envia  $u$  em 1, se  $u \in \tau^\perp$  e 0 em outros casos. O limite homomorfismo de  $S_\sigma$  em  $\mathbb{C}$  define  $x_\tau$ .  $\square$

**Proposição 3.12.** Se  $v$  não pertence a um cone qualquer do leque  $\Delta$ , então não existe o limite  $\lambda_v(z)$  em  $X_\Delta$  quando  $z$  se aproxima de 0.

*Demonstração.* Se  $v \notin \sigma$ , os pontos  $\lambda_v(z) = (z^{v_1}, \dots, z^{v_n})$  não tem limite em  $X_\sigma$  quando  $z$  tende a 0. De fato, recordamos que

$$\sigma = (\sigma^\vee)^\vee = \{v \in \mathbb{R}^n : \langle u, v \rangle \geq 0, \quad \forall u \in \sigma^\vee\}.$$

Isso significa que se  $v \notin \sigma$ , então existe  $u \in \sigma^\vee$  tal que  $\langle u, v \rangle < 0$ . Logo,  $\lambda_v(z)(u) = z^{\langle u, v \rangle}$  se torna ilimitado quando  $z$  tende a 0.  $\square$

Das duas proposições acima concluímos que  $\sigma \cap N$  é o conjunto dos vetores  $v \in N$  tal que  $\lambda_v(z)(u)$  admite limite em  $X_\sigma$  quando  $z$  tende a 0. Além disso,  $\lim_{z \rightarrow 0} \lambda_v(z) = x_\sigma$  quando  $v$  pertence ao interior relativo de  $\sigma$ .

**Lema 3.13.** Consideramos aplicação logaritmo  $L : \mathbb{T}_N \rightarrow N_{\mathbb{R}}$  definida da seguinte maneira: dado um ponto  $\gamma$  de  $\mathbb{T}_N$ , considere a aplicação  $L(\gamma) : M \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $m \mapsto \log |\gamma(m)|$ . Então, aplicação  $L(\gamma)$  é um homomorfismo. Além disso, se  $L(\gamma) \in -\sigma$ , para  $\sigma \in \Delta$ , então  $|\gamma(m)| \leq 1$ , para todo  $m \in \sigma^\vee \cap M$ .

*Demonstração.* De fato, dados  $m_1, m_2 \in M$

$$\begin{aligned} L(\gamma)(m_1 m_2) &= \log |\gamma(m_1 m_2)| = \log |\gamma(m_1) \gamma(m_2)| \\ &= \log |\gamma(m_1)| + \log |\gamma(m_2)| = L(\gamma)(m_1) + L(\gamma)(m_2) \end{aligned}$$

isto é,  $L(\gamma) \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{R}) \cong N_{\mathbb{R}}$ .

Agora, suponhamos que se  $L(\gamma) \in -\sigma$ , para algum  $\sigma \in \Delta$ . Se  $m \in \sigma^\vee \cap M$  então a definição de  $L$  implica que

$$\log |\gamma(m)| = \langle L(\gamma), m \rangle$$

Por hipótese  $m \in \sigma^\vee$  e  $L(\gamma) \in -\sigma$ , então  $\langle m, L(\gamma) \rangle$  que é menor ou igual a zero. Portanto  $|\gamma(m)| \leq 1$ . Assim,

$$L(\gamma) \in -\sigma \implies |\gamma(m)| \leq 1, \quad \forall m \in \sigma^\vee \cap M$$

$\square$

**Proposição 3.14.** O leque  $\Delta$  é completo se, e somente se, a variedade tórica  $X_\Delta$  é compacta.

*Demonstração.* Suponhamos, por absurdo  $X_\Delta$  compacta e que o leque  $\Delta$  não é completo. Então por definição  $|\Delta| \neq \mathbb{R}^n$ , ou seja, existe  $v \in \mathbb{R}^n$  tal que  $v \notin \Delta$  (pois  $\Delta$  é finito). Assim pela proposição anterior o limite de  $\lambda_v(z)$  não existe em  $X_\Delta$ , quando  $z$  tende a 0. Isso significa que não existe limite de subsequência  $\lambda_v(z)$  convergindo em  $X_\Delta$ . Porém, isso é uma contradição com o fato de  $X_\Delta$  ser compacta. Reciprocamente, suponhamos  $\Delta$  completo. Vamos mostrar que a variedade  $X_\Delta$  é compacta. Provamos usando sobre  $n$ , onde  $n$  é a dimensão de  $N_{\mathbb{R}}$ .

Para  $n = 1$ , o leque completo em  $\mathbb{R}$  é o leque do Exemplo 2.19, pois é a união dos cones gerados por  $e_1$ ,  $-e_1$  e o cone nulo. Neste caso, a variedade tórica é  $X_\Delta = \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ . Temos que  $X_\Delta$  é homeomorfa a  $\mathbb{S}^2$  (ver Apêndice A), a esfera 2-dimensional, que é compacta.

Suponhamos que dado um leque de dimensão menor que  $n$ , então a variedade tórica associada a este leque é compacta e seja  $(\gamma_n)$  um sequência de pontos em  $X_\Delta$ . Vamos mostrar que existe um subsequência  $(\gamma_{n_k})$  de  $(\gamma_n)$  convergente.

De fato, como  $X_\Delta$  é a união finita das órbitas  $\mathcal{O}_\tau$  onde  $\tau$  é um cone em  $\Delta$ . Podemos assumir que a sequência está inteiramente contida numa única órbita, pois do contrário, a união não seria finita. Se  $\tau \neq \{0\}$ , então o fecho de  $\mathcal{O}_\tau$  em  $X_\Delta$ , é a variedade tórica  $V(\tau) = X_{star(\tau)}$  que tem dimensão menor ou igual a  $n - 1$ . Notamos que  $star(\tau)$  é completo em  $N(\tau)_{\mathbb{R}}$ , pois

$$|Star(\tau)| = |\{\bar{\sigma} : \tau \prec \sigma, \sigma \in \Delta\}| = |\{\bar{\sigma} : \tau \prec \sigma, \sigma \in \mathbb{R}^n\}| = |\{\sigma + (N_\tau)_{\mathbb{R}}\}| = N(\tau)_{\mathbb{R}}.$$

Assim, por hipótese de indução, a variedade tórica  $V(\tau)$  é compacta, ou seja, a sequência  $(\gamma_n)$  possui uma subsequência  $(\gamma_{n_k})$  convergente em  $V(\tau)$ . Consequentemente podemos assumir que  $(\gamma_{n_k})$  está contida inteiramente em  $\mathbb{T}_N$ .

Agora, como  $\mathbb{T}_N \cong Hom_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{C}^*)$  e para cada elemento  $t$  em  $\mathbb{T}_N$  existe um homomorfismo  $\gamma_t : M \rightarrow \mathbb{C}^*$  e dado para qualquer  $\sigma \in \Delta$ , a restrição de  $\gamma$  a  $\sigma^\vee \cap M$  é um homomorfismo de semigrupos,  $\gamma|_{\sigma^\vee \cap M} : \sigma^\vee \cap M \rightarrow \mathbb{C}$ , ou seja, como  $X_\sigma = Hom(\sigma^\vee \cap M, \mathbb{C})$  temos  $\gamma \in X_\sigma$ .

Usando aplicação  $L$  definida (3.13) na sequência  $(\gamma_n)$ , obtemos uma sequência  $L(\gamma_n) \in N_{\mathbb{R}}$ . Como  $\Delta$  é completo, o leque formado por  $\{-\sigma : \sigma \in \Delta\}$  também é. Portanto, passando para uma subsequência, podemos assumir que existe  $\sigma \in \Delta$  tal que

$$L(\gamma_n) \in -\sigma, \text{ para todo } n \text{ natural.}$$

Por (3.13) concluímos que  $|\gamma_n(m)| \leq 1$ , para todo  $m \in \sigma^\vee \cap M$ . Segue que  $\gamma_n$  são sequências de aplicações no disco fechado unitário em  $\mathbb{C}$ , que é compacto, ou seja, existe uma subsequência de  $\gamma_{n_k}$  que converge para  $\gamma \in X_\sigma$ .  $\square$

**Definição 3.5.** Dizemos que um vetor  $v \in \mathbb{Z}^n$  é primitivo se suas coordenadas são coprimas. Um cone é regular, se todos vetores  $(v_1, \dots, v_s)$  que geram o cone são



primitivos e existem vetores primitivos  $(v_{r+1}, \dots, v_n)$  tal que  $\det(v_1, \dots, v_n) = \pm 1$ . Em outras palavras os vetores  $(v_1, \dots, v_s)$  podem ser completados na base de grade  $N$ . Um leque é regular, se todos seus cones são cones regulares.

**Proposição 3.15.** Um leque  $\Delta$  é regular se, e somente se, a variedade tórica  $X_\Delta$  associada a  $\Delta$  é suave.

*Demonstração.* Veja [1] Teorema 3.2, p.21. □

### 3.4 Superfícies tóricas

Para finalizar esse trabalho trazemos uma relação existente entre as superfícies tóricas e as algumas variedades determinantis.

**Proposição 3.16.** Sejam  $e_1, e_2$  vetores da base canônica do  $\mathbb{R}^2$  e  $\sigma \subset \mathbb{R}^2$  um cone fortemente convexo. Então,  $\sigma$  é isomorfo ao cone gerado pelos vetores  $v_1 = pe_1 - qe_2$  e  $v_2 = e_2$ , para alguns inteiros  $p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  tal que  $0 < q < p$  e  $\text{mdc}(p, q) = 1$ .

*Demonstração.* Como  $\sigma$  é um cone do  $\mathbb{R}^2$  consideramos  $\{(a, b), (c, d)\}$  minimal de geradores de  $\sigma$  tais que  $a$  e  $b$  são primos entre si. Pelo algoritmo de Euclides, existem números inteiros  $w, z$  tal que  $aw + bz = 1$  para alguns inteiros  $w, z$ . Consideramos o automorfismo  $T_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dado por  $T_1(x, y) = (ay - bx, wx + zy)$ . Então, aplicando o  $T_1$  aos geradores de  $\sigma$

$$\begin{pmatrix} -b & a \\ w & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ad - bc \\ 1 & wc + zd \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

ou seja, obtemos  $v_2 = (0, 1)$  um elemento da grade  $N$ . Isso significa que podemos tomar um dos geradores de  $\sigma$  sendo justamente  $v_2$  ou um múltiplo de  $v_2$ . Depois de uma reflexão no eixo  $y$  (se necessário) podemos supor o segundo gerador  $v_1 = (p, y) = pe_1 + ye_2$ , para  $p \geq 0$ . Considerando o automorfismo  $T_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dado por  $T_2(x, y) = (x, ux + y)$ . Notamos que  $T_2(v_2) = T_2(0, 1) = (0, 1)$ . Além disso,  $T_2(p, y) = (p, up + y)$ . Então,  $T_2$  faz uma translação da segunda coordenada por múltiplos de  $p$ , isto é, é possível modificar  $y$  arbitrariamente módulo  $p$ . Assim, podemos tomar  $y = -q$  com  $0 \leq q < p$ . Como gerador  $v_1$  deve ser minimal então,  $\text{mdc}(p, q) = 1$ .

Aplicando o automorfismo  $T_2$  temos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & p \\ 1 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & p \\ 1 & up + y \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Compondo dos automorfismo (3.4) e (3.5) temos o automorfismo desejado.  $\square$

Dado um cone  $\sigma \subset \mathbb{R}^2$  gerado pelos vetores  $v_1 = pe_1 - qe_2$  e  $v_2 = e_2$ , onde  $0 < q < p$  e  $p, q$  são coprimos, vamos considerar a fração contínua Hirzebruch - Jung .

$$\frac{p}{p-q} = a_2 - \frac{1}{a_3 - \frac{1}{\dots - \frac{1}{a_n - 1}}} = [[a_2, a_3, \dots, a_{n-1}]]$$

onde os inteiros  $a_2, \dots, a_{n-1}$  satisfazem  $a_i \geq 2$ , para  $i \in \{2, \dots, n-1\}$ .

No que segue apresentamos algumas definições para apresentar um resultado obtido por O.Riemenschneider em [16, 17] que caracteriza os geradores do  $I_\sigma$ , onde  $\sigma$  é um cone em  $\mathbb{R}^2$ .

**Definição 3.6.** Dados  $A_i, B_i, C_{l,l+1} \in \mathbb{C}$  com  $i = 1, \dots, k$  e  $l = 1, \dots, k-1$ , uma quase matriz com entradas  $A_i, B_i, C_{l,l+1}$  é escrita como

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_{k-1} & \dots & A_k \\ B_1 & B_2 & \dots & B_{k-1} & \dots & B_k \\ C_{1,2} & & \dots & & & C_{k-1,k} \end{pmatrix}$$

o quasemenores associados a quasematriz  $A$  são definidos por

$$A_i B_j - B_i A_j (C_{i,i+1} \dots C_{j-1,j})$$

para  $1 \leq i < j \leq k$ .

Notamos que a última linha da quasematriz tem menos entradas que as outras linhas.

**Exemplo 3.8.** Considere a seguinte quasematriz

$$\begin{pmatrix} i & i-1 & 2i \\ 4+i & 1+i & -i \\ & i^2 & -3i \end{pmatrix}$$

Os quasemenores associados a quase matriz acima são:

- $i(i+1) - (4+i)(i-1)i^2$ ;
- $(i-1)(-i) - (1+i)2i(-3i)$ ;
- $i(-i) - (4+i)2ii^2(-3i)$ .

**Proposição 3.17.** Seja  $\sigma \subset \mathbb{R}^2$  um cone. Então, o ideal  $I_\sigma$  é gerado pelos quasemenores da quasematriz

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & \cdots & z_{n-2} & z_{n-1} \\ z_2 & z_3 & z_4 & \cdots & z_{n-1} & z_n \\ & z_2^{a_2-2} & z_3^{a_3-2} & \cdots & & z_{n-1}^{a_{n-1}-2} \end{pmatrix}$$

onde os  $a_i$  são dados pela fração contínua de Hirzebruch-Jung de  $\frac{p}{p-q}$ . Além disso, este conjunto de geradores é minimal.

*Demonstração.* Veja [16, 17]. □

Então, se  $a_i = 2$  para  $i \in \{3, \dots, n-2\}$ ,  $X_\sigma$  é uma superfície determinantal. Em particular, se a dimensão minimal do mergulho de  $X_\sigma$  for 4, isto é, se

$$\frac{p}{p-q} = a_2 - \frac{1}{a_3}$$

então  $X_\sigma$  é uma variedade determinantal e o ideal  $I_\sigma$  gerado pelos menores  $2 \times 2$  da matriz

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3^{a_3-1} \\ z_2^{a_2-1} & z_3 & z_4 \end{pmatrix}.$$

**Exemplo 3.9.** Seja  $X_\sigma \subset \mathbb{C}^4$  a superfície tórica associada ao cone  $\sigma \subset \mathbb{R}^2$  gerado pelos vetores  $v_1 = e_2$  e  $v_2 = 14e_1 - 11e_2$ . Do processo das frações contínuas Hirzebruch-Jung, temos

$$\frac{14}{3} = 5 - \frac{1}{3},$$

então  $X_\sigma = V(I_\sigma)$ , onde  $I_\sigma$  é o ideal gerado pelos menores  $2 \times 2$  da matriz

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3^2 \\ z_2^4 & z_3 & z_4 \end{pmatrix}.$$

**Exemplo 3.10.** Seja  $X_\sigma \subset \mathbb{C}^4$  a superfície tórica associada ao cone  $\sigma \subset \mathbb{R}^2$  gerado pelos vetores  $v_1 = e_2$  e  $v_2 = 7e_1 - 4e_2$ . Do processo das frações contínuas Hirzebruch-Jung, temos

$$\frac{7}{3} = 2 - \frac{1}{3},$$

então  $X_\sigma = V(I_\sigma)$ , onde  $I_\sigma$  é o ideal gerado pelos menores  $2 \times 2$  da matriz

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3^2 \\ z_2 & z_3 & z_4 \end{pmatrix}.$$

**Exemplo 3.11.** Seja  $X_\sigma \subset \mathbb{C}^5$  a superfície tórica associada ao cone  $\sigma \subset \mathbb{R}^2$  gerado pelos vetores  $v_1 = e_2$  e  $v_2 = 4e_1 - e_2$ . Do processo das frações contínuas Hirzebruch-Jung, temos

$$\frac{4}{3} = 2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2}},$$

então  $X_\sigma = V(I_\sigma)$ , onde  $I_\sigma$  é o ideal gerado pelos menores  $2 \times 2$  da matriz

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ z_2 & z_3 & z_4 & z_5 \end{pmatrix}.$$

**Exemplo 3.12.** Seja  $X_\sigma \subset \mathbb{C}^6$  a superfície tórica associada ao cone  $\sigma \subset \mathbb{R}^2$  gerado pelos vetores  $v_1 = e_2$  e  $v_2 = 5e_1 - e_2$ . Do processo das frações contínuas Hirzebruch-Jung, temos

$$\frac{5}{4} = 2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2}}},$$

então  $X_\sigma$ , onde  $I_\sigma$  é o ideal gerado pelos menores  $2 \times 2$  da matriz

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 \\ z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 \end{pmatrix}.$$

**Exemplo 3.13.** Seja  $X_\sigma \subset \mathbb{C}^6$  a superfície tórica associada ao cone  $\sigma \subset \mathbb{R}^2$  gerado pelos vetores  $v_1 = e_2$  e  $v_2 = 19e_1 - 7e_2$ . Do processo das frações contínuas Hirzebruch-Jung, temos

$$\frac{19}{12} = 2 - \frac{1}{3 - \frac{1}{2 - \frac{1}{3}}},$$

então  $X_\sigma = V(I_\sigma)$ , onde  $I_\sigma$  é o ideal gerado pelos menores  $2 \times 2$  da quasematriz

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 \\ z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 \\ 1 & z_3 & 1 & z_5 & \end{pmatrix}.$$

**Observação 3.2.** 1. Uma variedade determinantal  $X \subset \mathbb{C}^r$  e de codimensão  $(n - t + 1)(p + t - 1)$  pode ser definida por  $X = f^{-1}(0)$ , onde  $f$  é a aplicação cujas funções coordenadas são definidas pelos menores  $t \times t$  de uma matriz  $n \times p$  cujas entradas são funções analíticas complexas. Desde ponto de vista as superfícies tóricas dos Exemplos 3.9,3.10,3.11 e 3.12 são superfícies determinantis. No Exemplo 3.13 temos o caso de uma superfície tórica que não é determinantal.

2. Estudamos a geometria combinatória dos cones para definir as superfícies tóricas e com isso podemos estudar alguns tipos de variedades determinantis. Além disso, se  $X_\sigma$  é uma variedade tórica que também é determinantal, podemos usar ferramentas da teoria de variedades determinantis ou da teoria tórica para obter informações sobre  $X_\sigma$  (veja [5]).

# Apêndice A

## Resultados Complementares

**Proposição A.1.** Existe um difeomorfismo entre  $\mathbb{CP}^1$  e  $\mathbb{S}^2$ .

De fato,  $\mathbb{PC}^1$  é o espaço projetivo complexo, que podemos denotar simplesmente por  $\mathbb{P}^1$ , uma forma de construí-lo é a partir da seguinte relação de equivalência

$$\mathbb{CP}^1 = (\mathbb{C}^2 \setminus (0, 0)) / \sim, \text{ com } (z_1, z_2) \sim (w_1, w_2) \Leftrightarrow \exists z \in \mathbb{C}^*; (z_1, z_2) = (zw_1, zw_2)$$

Um atlas para  $\mathbb{CP}^1$  é dado por  $\{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}$  onde as cartas são:

$$\begin{aligned} \varphi_1 : \mathbb{CP}^1 \setminus [0 : 1] = U_1 &\longrightarrow \mathbb{C}, & [1 : z_2] &\mapsto z_2 \\ \varphi_2 : \mathbb{CP}^1 \setminus [1 : 0] = U_2 &\longrightarrow \mathbb{C}, & [z_1 : 1] &\mapsto z_1 \end{aligned}$$

Com  $\varphi_1(U_1 \cap U_2) = \mathbb{C}^* = \varphi_2(U_1 \cap U_2)$ , onde a aplicação que leva um aberto em aberto é dada por:

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*, \quad z \mapsto z^{-1}$$

desde que

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(z) = \varphi_2([1 : z]) = \varphi_2([z^{-1} : 1]) = z^{-1}, \quad \forall z \in \mathbb{C}^*$$

Por outro lado sabemos que  $\mathbb{S}^2 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a^2 + b^2 + c^2 = 1\}$ . Um atlas para a esfera pode ser dado por  $\{(U_1, \psi_1), (U_2, \psi_2)\}$

$$\begin{aligned} \psi_1 : \mathbb{S}^2 \setminus (0, 0, 1) = V_1 &\longrightarrow \mathbb{C} & (a, b, c) &\mapsto \frac{a}{1-c} + i \frac{b}{1-c} \\ \psi_2 : \mathbb{S}^2 \setminus (0, 0, -1) = V_2 &\longrightarrow \mathbb{C} & (a, b, c) &\mapsto \frac{a}{1+c} - i \frac{b}{1+c} \end{aligned}$$

Com  $\psi_1(V_1 \cap V_2) = \mathbb{C}^* = \psi_2(V_1 \cap V_2)$ , onde a aplicação que leva um aberto noutro é dada por:

$$\psi_2 \circ \psi_1^{-1} : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*, \quad z \mapsto z^{-1}$$

Para ver isso basta notar que para todo  $(a, b, c) \in \mathbb{S}^2 \setminus (0, 0, \pm 1)$  temos  $(\frac{a}{1-c} + i\frac{b}{1-c})(\frac{a}{1+c} - i\frac{b}{1+c}) = 1$  e aplique o fato de  $\psi_1$  e  $\psi_2$  serem ambas bijeções, que estão bem definidas da construção da projeção estereográfica.

Finalmente definamos a aplicação  $f : \mathbb{CP}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^2$  por  $f(\varphi_i^{-1}(z)) := \psi_i^{-1}(z)$ , para todo  $z \in \mathbb{C}$ .

1.  $f$  está bem definido. De fato,

$$\begin{aligned} \varphi_2^{-1}(z_2) = \varphi_1^{-1}(z_1) &\Leftrightarrow z_2 = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(z_1) \Leftrightarrow \\ z_2 = z_1^{-1} &\Leftrightarrow z_2 = \psi_2 \circ \psi_1^{-1}(z_1) \Leftrightarrow \psi_2^{-1}(z_2) = \psi_1^{-1}(z_1) \end{aligned}$$

2. Esta aplicação é suave, desde que

$$\psi_i \circ f \circ \varphi_i^{-1} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \text{ dada por } z \mapsto z$$

e  $i \neq j$

$$\psi_j \circ f \circ \varphi_i^{-1} : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^* \text{ dada por } z \mapsto z^{-1}$$

também são todos suaves.

3. A aplicação é um difeomorfismo, já que a inversa é:

$$f^{-1} : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{CP}^1 \text{ dada por } \psi_i^{-1}(z) \mapsto \varphi_i^{-1}(z), \text{ para todo } z \in \mathbb{C}.$$

Agora vamos recordemos que uma ação de um grupo  $G$  sobre um subconjunto  $X \subset G$  é uma função dada por

$$\begin{aligned} * : G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto g * x \end{aligned}$$

Que satisfaz as seguintes operações. Dados  $g, g', e \in G$  e  $x \in X$ .

(i)  $g * (g' * x) = (g.g') * x$

(ii)  $g * e = g, \quad \forall g \in G$

Onde “.” denota a operação do grupo  $G$  e  $e$  denota o elemento neutro do grupo. Note ainda que a aplicação

$$\begin{aligned} h : X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto g * x \end{aligned}$$

é uma bijeção, onde  $g$  é um elemento fixo de  $G$ . Com efeito, se  $g * x = g * y$  então  $x = y$ , pois  $g^{-1} * (g * x) = x$ , mostrando que  $h$  é injetiva. Além disso, dado  $g * w$  em  $X$  (imagem), existe  $w \in X$  (domínio) tal que  $h(w) = g * w$ , ou seja, tal aplicação é sobrejetora, portanto uma bijeção. Para um elemento  $x \in G$ , conjunto  $G * x = \{g * x : g \in G\}$  denota a órbita do ponto  $x$ . Note que a imagem da aplicação  $h$  é justamente a órbita no elemento  $x$ , assim existe uma bijeção entre a órbita do elemento  $x$  e conjunto  $X$ . Vejamos ainda que se  $G * x = G * y$ , com  $x \neq y$  então  $g * x = g * y$ , ou seja,

$$x = e * x = (g^{-1} \cdot g) * x = g^{-1} * (g * x) = g^{-1} * (g * y) = (g^{-1}g) * y = e * y = y,$$

e, isso significa que um ponto não pode pertencer a duas órbitas distintas. Além disso, se existe somente um órbita na ação, dizemos que a ação é transitiva.

**Afirmção A.1.** Um grupo age transitivamente, em si próprio, por multiplicação.

De fato,  $\cdot : G \times G \longrightarrow G$  é uma ação de  $G$  em  $G$ , dados  $x, y \in G$ , temos  $x = (x \cdot y^{-1}) \cdot y$ , pois todo elemento em  $G$  possui inverso. Portanto, os elementos  $x, y \in G$  pertencem a uma única órbita.



# Referências Bibliográficas

- [1] J.-P. BRASSELET, *Introduction to toric varieties*. Publicações Matemáticas-IMPA,2004.
- [2] N.BOURBAKI, *Elements of Mathematics-Algebra I Chapter 1-3*. Springer Verlag.
- [3] D.COX, J.LITTLE E D.O'SHEA, *Using Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, 185, Springer Verlag, 1998.
- [4] T.M. DALBELO, *Superfícies Multitóricas, Obstrução de Euler e Aplicações* . Tese de Doutorado. Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2014.
- [5] T.M. DALBELO E M.S. PEREIRA, *Multitoric Surfaces and Euler Obstruction of a function* . International Journal of Mathematics, Vol.27 N<sup>o</sup>10, 2016.
- [6] V.I. DANILOV, *The Geometry of toric Varieties*, Russian Math. Surveys 33 (1978), 97 - 154.
- [7] M. DEMAZURE, *Sous-groupes algébriques de rang maximum du groupe de Cremona*, Ann. Sci. École Norm. Sup. 3 (1970), 507-588.
- [8] M. DRTON, B. STURMFELS E S. SULLIVANT, *Lectures on Algebraic Statistics, Oberwolfach Seminars 39*, Birkhäuser Verlag, Basel Boston Berlin, 2009.
- [9] R. GOLDMAN E R. KRASAUSKAS, *Topics in Algebraic Geometry and Geometric Modeling (Proceedings of AGGM, Vilnius, Lithuania)*, Contemp. Math. 334, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.
- [10] G. EWALD, *Combinatorial convexity and Algebraic Geometry*,Graduate Texts in Mathematics. 168. 1996.
- [11] W. FULTON, *Introduction to Toric Varieties*.Annals of Math. Studies, Princeton Univ. Press, 1993.

- [12] R. HARTSHORNE, *Algebraic Geometry* . Russian Math. Surveys 33 (1978), Graduate Texts in Math. 52, Springer Verlag, New York etc., 1977.
- [13] G. R. KEMPF, F. KNUDSEN, D. MUMFORD, E B. SAINT-DONAT, *Toroidal embeddings. I, Lecture Notes in Mathematics, vol. 339* . Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1973.
- [14] E. L. LIMA *Análise Real: Funções de  $n$  Variáveis*, Coleção Matemática Universitária. Volume 2, IMPA, 2009.
- [15] T. ODA, *Convex Bodies and Algebraic Geometry. An introduction to the theory of toric varieties*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 15. Springer-Verlag, Berlin(1988).
- [16] O. RIEMENSCHNEIDER, *Deformationen von Quotientensingularitäten (nach zyklischen Gruppen)*, Math. Ann. 209 (1974) 211-248.
- [17] O. RIEMENSCHNEIDER, *Zweidimensionale Quotientensingularitäten: Gleichungen und Syzygi*, Arch. Math. 37 (1981) 406-417.
- [18] R. T. ROCKFELLAR, *Convex Analysis*. Princeton Univ.Press. 1970.
- [19] M. S. PEREIRA E M. A. S. RUAS, *Codimension two determinantal varieties with isolated singularities*. Math. Scand. 115 (2014) 161-172.
- [20] E. MARTÍNEZ-MORO, C. MUNUERA E D. RUANO , *Advances in Algebraic Geometry Codes, Ser. Coding Theory Cryptol*, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2008.