

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Sobre uma Desigualdade do tipo Hardy-Sobolev e Aplicações

Francisco Jonatã Chaves de Lima

João Pessoa – PB
Fevereiro de 2025

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Sobre uma Desigualdade do tipo Hardy-Sobolev e Aplicações

por

Francisco Jonatã Chaves de Lima

sob a orientação do

Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros

João Pessoa – PB
Fevereiro de 2025

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

L732s Lima, Francisco Jonatã Chaves de.
Sobre uma desigualdade do tipo Hardy-Sobolev e
aplicações / Francisco Jonatã Chaves de Lima. - João
Pessoa, 2025.
85 f. : il.

Orientação: Everaldo Souto de Medeiros.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Desigualdade de Hardy. 2. Imersão de Sobolev com
peso. 3. Problemas elípticos. I. Medeiros, Everaldo
Souto de. II. Título.

UFPB/BC

CDU 510(043)



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
CAMPUS I – DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ATA DE DEFESA DE MESTRADO JUNTO AO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA, REALIZADA NO DIA 19 DE FEVEREIRO DE 2025.

Ao décimo nono dia de fevereiro de dois mil e vinte e cinco, às 18:00 horas, na sala de Reuniões do Departamento de Matemática/CCEN da Universidade Federal da Paraíba, foi aberta a sessão pública de Defesa de Dissertação intitulada “**Sobre uma Desigualdade do tipo Hardy-Sobolev e Aplicações**”, do aluno **Francisco Jonatã Chaves de Lima**, que havia cumprido, anteriormente, todos os requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, na área de **Análise**, sob a orientação do Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros. A Banca Examinadora, indicada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática, foi composta pelos professores: Dr. Everaldo Souto de Medeiros (Orientador), Dr. João Marcos Bezerra do Ó (membro interno), Dr. Emerson Alves Mendonça de Abreu (membro externo/UFGM) e Dr. José Carlos de Albuquerque Melo Júnior (membro externo/UFPE). O professor Everaldo Souto de Medeiros, em virtude da sua condição de orientador, presidiu os trabalhos e, depois das formalidades de apresentação, convidou o aluno a discorrer sobre o conteúdo da dissertação. Concluída a explanação, o candidato foi arguido pela banca examinadora que, em seguida, sem a presença do aluno, finalizando os trabalhos, reuniu-se para deliberar tendo concedido ao candidato a menção: Aprovado. E, para constar, foi lavrada a presente ata que será assinada pelos membros da Banca Examinadora.

João Pessoa, 19 de fevereiro de 2025.

Everaldo Souto de Medeiros	 Documento assinado digitalmente EVERALDO SOUTO DE MEDEIROS Data: 21/02/2025 14:23:53-0300 Verifique em https://validar.iti.gov.br	_____
João Marcos Bezerra do Ó	 Documento assinado digitalmente JOAO MARCOS BEZERRA DO O Data: 21/02/2025 20:57:37-0300 Verifique em https://validar.iti.gov.br	_____
Emerson Alves Mendonça de Abreu	 Documento assinado digitalmente EMERSON ALVES MENDONCA DE ABREU Data: 21/02/2025 20:33:39-0300 Verifique em https://validar.iti.gov.br	_____
José Carlos de Albuquerque Melo Júnior	 Documento assinado digitalmente JOSE CARLOS DE ALBUQUERQUE MELO JUNIOR Data: 22/02/2025 12:45:04-0300 Verifique em https://validar.iti.gov.br	_____

Ao meu avô, Luiz Alexandre Monteiro (in memoriam), meu maior exemplo de ser humano íntegro e honesto, cuja saudade será eterna.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por ter me dado forças para concluir esse trabalho.

Agradeço a minha família, minha base, sem a qual nada disso teria sido possível. Meu pai, Francisco Alexandre; minha mãe, Juscilene Monteiro, e meu irmão, Joaão Alexandre, pelo apoio incondicional e por sempre acreditarem em mim. Às minhas tias Maria Flávia e Edilene Monteiro e a José Anjo, por toda ajuda e apoio, durante todos os momentos, principalmente nos mais difíceis. À vovó Quaresma e à vovó Raimunda, por sempre me terem em suas rezas.

Agradeço ao meu orientador, professor Everaldo Medeiros, por todos os ensinamentos transmitidos, generosidade, paciência, incentivo e, sobretudo, pela confiança em me conduzir nesse trabalho. Espero me tornar um matemático tão brilhante quanto o senhor.

Agradeço aos professores Emerson Alves Mendonça de Abreu, João Marcos Bezerra do Ó e José Carlos de Albuquerque Melo Júnior, por terem aceito o convite de participar da banca.

Agradeço às professoras Elaine Pimentel, Viviane Simioli e ao professor Ronaldo César, por todos os ensinamentos durante a graduação na UFRN, e pelo incentivo para que seguisse na pós-graduação.

Agradeço à professora Cíntia Raimunda e ao professor João Maria, que durante o ensino médio contribuíram para minha formação enquanto cidadão, e me inspiraram a tornar-me professor.

Agradeço aos amigos que adquiri ao longo do mestrado, Aurílio e Aureliana, que iniciaram essa caminhada comigo, e proporcionaram valorosos momentos de estudo e companheirismo. Agradeço também aos amigos que surgiram ao longo desse trajeto, Jaqueline, Mateus e Fernanda, que compõem o grupo "Bolo de Morango", o qual possibilitou tantos momentos bem-humorados durante as dificuldades diárias. Por fim, aos amigos que já me acompanhavam antes de iniciar essa trajetória, Bia, Brunna, Cristiano, Luana e Fernando, por todas as conversas e histórias vividas juntos; agradeço também a Itaynara, Wesley, Fernanda e Érica, por todos os momentos de descontração nas minhas voltas ao interior.

Por fim, agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Nesse trabalho, apresentamos uma desigualdade do tipo Hardy-Sobolev em domínios cilíndricos e como consequência desta obtivemos algumas imersões de Sobolev em espaços de Lebesgue com peso. Provamos que a atingibilidade da melhor constante destas imersões com peso é equivalente a provar a existência de soluções do tipo ground state para uma classe de problemas elípticos em $\mathbb{R}^N$. Regularidade e comportamento dos minimizadores também são obtidos. Como aplicação das imersões obtidas, provamos resultados de existência e não existência de solução para uma classe de problemas elípticos com crescimento crítico.

Palavras-chave: Desigualdade de Hardy; Imersão de Sobolev com peso; Melhor constante; Problemas elípticos; Crescimento crítico.

Abstract

In this work, we present a Hardy-Sobolev type inequality in cylindrical domains and, as a consequence, derive some Sobolev embeddings into weighted Lebesgue spaces. We prove that the attainability of the best constant for these weighted embeddings is equivalent to establishing the existence of ground state solutions for a class of elliptic problems in $\mathbb{R}^N$. Regularity and behavior of the minimizers are also analyzed. As an application of the obtained embeddings, we prove existence and non-existence results for a class of elliptic problems with critical growth.

Keywords: Hardy inequality; Weighted Sobolev embedding; Best constant; Elliptic problem; critical growth.

Sumário

Introdução	2
1 Uma desigualdade do tipo Hardy-Sobolev em domínios cilíndricos	7
1.1 Desigualdade de Hardy em domínios cilíndricos	7
1.2 Uma desigualdade do tipo Hardy-Sobolev	9
1.3 Uma desigualdade de Sobolev com peso	13
2 Existência e não existência de minimizadores com simetria cilíndrica	16
2.1 A melhor constante	16
2.2 Resultados preliminares	20
2.3 Não atingibilidade da melhor constante	26
2.4 Atingibilidade da melhor constante	28
2.5 Comportamento Assintótico	39
3 Propriedades dos minimizadores da melhor constante	42
3.1 Regularidade de Hölder	43
3.2 Sinal da solução	46
3.3 Resultado de Não existência	49
4 Uma equação elíptica com crescimento crítico	56
4.1 Resultado de Existência	58
4.2 Resultado de Não Existência	62
A Resultados auxiliares	66
A.1 Funções Hölder Contínuas	66
A.2 Espaços de Sobolev	67
A.3 Resultados de Regularidade	68
A.4 Princípios de Máximo	69
A.5 Resultados Clássicos	70
A.6 Lemas Técnicos	71

Lista de Figuras

2.1	Gráfico da função ϕ_s para $s = 1$	17
2.2	Gráfico da função $\phi_s r^s$ para $s = 1$	17
2.3	Gráfico da função ψ_s para $s = 1$	20
2.4	Gráfico da função $\psi_s r^s$ para $s = 1$	20
2.5	Representação do conjunto Ω_0 na região hachurada.	31
2.6	Representação dos conjuntos $\mathcal{Q}_j$ sobre o conjunto Ω_0	33
3.1	Representação dos conjuntos Ω_1 e Ω_2	50
4.1	Máximo de $h(t)$ para $2 < p < 2^*$	63

Notações

- $\mathbb{N}$ denota o conjunto dos números naturais;
- $\mathbb{R}$ denota o corpo dos números reais;
- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ denota um conjunto aberto;
- $B(x; r)$ denota a bola aberta centrada em $x \in \mathbb{R}^N$ e de raio $r > 0$;
- C denota uma constante positiva, que pode mudar de uma linha para outra;
- q^* denota o expoente crítico de Sobolev;
- $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ denota o espaço das funções testes;
- $C^{k,\alpha}(\Omega)$ denota o espaço de Hölder;
- $L^p(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mensurável} : \int_\Omega |u|^p dx < \infty\}, 1 \leq p < \infty$;
- $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ denota espaço obtido pelo completamento de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ com respeito a norma do gradiente.

Introdução

Em [2], M. Badiale e G. Tarantelo provaram a seguinte desigualdade do tipo Hardy-Sobolev em domínios cilíndricos:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^{q_*(s)}}{|x'|^s} dx \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^q dx \right)^{\frac{q_*(s)}{q}}, \quad \forall u \in \mathcal{D}^{1,q}(\mathbb{R}^N), \quad (1)$$

onde $C = C(s, q, N, k) > 0$ é uma constante e por um domínio cilíndrico entendemos uma decomposição do espaço $\mathbb{R}^N$ da forma

$$\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{N-k}, \quad 2 \leq k \leq N,$$

e denotaremos seus elementos por $x = (x', z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{N-k}$. Além disso, o expoente $q_*(s)$ é definido como

$$q_*(s) = \frac{q(N-s)}{N-q},$$

onde q, s são constantes reais tais que $1 < q < N$, $0 \leq s \leq q$ e $s < k$.

Como consequência desta desigualdade, se $\phi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ é uma função que cumpre as condições:

$$(\phi_1) \quad \phi \in C_{loc}^{0,\eta}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+);$$

$$(\phi_2) \quad \phi(r)r^s \in L^\infty(\mathbb{R}_+);$$

$$(\phi_3) \quad \phi(r) = 0 \text{ se, e somente se, } r = 0,$$

então é possível mostrar que para $q \geq 2$, $s \in (0, 2)$ e $p \in [q_*(s), q_*(0)]$ tem-se a seguinte desigualdade com peso:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|) |u|^p dx \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^q dx \right)^{\frac{2}{q}}, \quad \forall u \in \mathcal{D}^{1,q}(\mathbb{R}^N). \quad (2)$$

Como aplicação, quando $q = 2$, a desigualdade (2) garante a boa definição do

funcional energia associado ao problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \phi(|x'|)|u|^{p-2}u & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ u > 0 & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \end{cases} \quad (3)$$

definido por

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|)|u|^p dx, \quad u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N).$$

Do ponto de vista matemático, o interessante em estudar esse problema é que a existência de soluções ground state equivale à atingibilidade da melhor constante da desigualdade (2), quando $q = 2$, dada por

$$0 < \mathcal{S}_s = \inf_{u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|)|u|^p dx \right)^{2/p}}, \quad (4)$$

onde $p \in [2_*(s), 2_*(0)]$.

Agora, para além das motivações matemáticas, quando $N = 3$ e $s = 1$, é possível mostrar, usando um resultado devido a Egnell [11], que as soluções do problema (3) possuem o seguinte decaimento assintótico

$$u(x) \leq \frac{C}{|x|}, \quad |x| \rightarrow +\infty,$$

para alguma constante $C > 0$. Como consequência, nesse caso, tais soluções também são soluções para o problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = \phi(|x'|)u(x)^{p-1} & \text{em } \mathbb{R}^3, \\ u > 0 & \text{em } \mathbb{R}^3, \\ \int_{\mathbb{R}^3} \phi(|x'|)u(x)^{p-1} dx < +\infty \end{cases} \quad (5)$$

onde $p \in [4, 6]$.

Esse problema foi proposto por G. Bertin [4] e L. Ciotti [9] como modelo para descrever a dinâmica de galáxias elípticas. A busca por soluções com simetria cilíndrica advém das motivações físicas, uma vez que o problema é formulado sob as hipóteses de que galáxias elípticas possuem simetria axial, a condição de que

$$\int_{\mathbb{R}^3} \phi(|x'|)u(x)^{p-1} dx < +\infty$$

garante que as soluções possuem massa total finita.

Inspirados no artigo de Badiale-Tarantello [2], M. Badiale e E. Serra [3] abordaram de maneira mais geral o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \phi(|x'|)u(x)^{2_*(s)-1} & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ u > 0 & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N). \end{cases} \quad (6)$$

Nesse caso, assumindo que ϕ satisfaz as hipóteses:

(H_1) $\phi \in C_{loc}^{0,\eta}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ ou $\phi \in C_{loc}^{0,\eta}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_+)$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} \phi(r) = +\infty$, para algum $\eta \in (0, 1)$,

(H_2) $\phi(r)r^s \in L^\infty(\mathbb{R}_+^*)$,

os autores estabeleceram resultados de regularidade para as soluções desse problema.

Com base nos trabalhos mencionados, esta dissertação foi estruturada da seguinte forma:

No **Capítulo 1**, provamos a desigualdade (1) e como aplicação obtivemos a imersão de Sobolev com peso (2).

No **Capítulo 2**, investigamos resultados de existência e não existência de funções extremas para a melhor constante desta desigualdade, ou seja, funções que atingem a melhor constante $\mathcal{S}_s$. Verificamos que a existência de tais funções é equivalente a encontrar soluções do tipo ground state (ou de energia mínima) para a equação elíptica semilinear

$$-\Delta u = \phi(|x'|)|u|^{p-2}u \quad \text{em } \mathbb{R}^N. \quad (7)$$

Para tanto, na busca por soluções com energia mínima definimos as variedades de Nehari

$$\mathcal{N} = \{u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} : I'(u)u = 0\} \quad \text{e} \quad \mathcal{N}_c = \{u \in \mathcal{D}_c^{1,2}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} : I'_c(u)u = 0\},$$

onde I_c é a restrição do funcional I ao subespaço das funções de $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ com simetria cilíndrica

$$\mathcal{D}_c^{1,2}(\mathbb{R}^N) := \{u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) : u(x', z) = u(x'', z), |x'| = |x''|\}.$$

Nesse sentido, estabelecemos principalmente os seguintes resultados:

1. Suponha que ϕ satisfaz as hipóteses $(\phi_1) - (\phi_3)$. Se $p = 2_*(s)$ e a função $r \rightarrow r^s \phi(r)$ é estritamente crescente, então I e I_c não atingem seu ínfimo sobre $\mathcal{N}$ e $\mathcal{N}_c$, respectivamente.

2. Suponha que ϕ satisfaz as hipóteses $(\phi_1) - (\phi_3)$. Se $2_*(s) < p < 2_*(0)$, então tanto I quanto I_c atingem seu ínfimo sobre $\mathcal{N}$ e $\mathcal{N}_c$, respectivamente. Além disso, esse ínfimo corresponde a uma solução para (7), a qual atinge a melhor constante $\mathcal{S}_s$.

No **Capítulo 3**, apresentamos resultados de regularidade para as soluções do problema

$$-\Delta u = \phi(|x'|)|u|^{2_*(s)-2}u \quad \text{em } \mathbb{R}^N,$$

e mostramos que tais resultados podem ser transferidos para as soluções de (7). Dessa maneira, obtém-se o seguinte:

1. Suponha que ϕ satisfaz $(\phi_1) - (\phi_3)$ e que $u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ seja uma solução fraca não negativa da equação

$$-\Delta u = \phi(|x'|)|u|^{p-2}u \quad \text{em } \mathbb{R}^N,$$

onde $p \in [2_*(s), 2_*(0))$ para algum $s \in (0, 2)$. Então as seguintes afirmações são válidas:

- i) Se $sN < 4$, então $u \in C_{loc}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ para algum $\alpha \in (0, 1)$.
 - ii) Se $sN < 2$, então $u \in C_{loc}^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ para algum $\alpha \in (0, 1)$.
2. Suponha que $u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ é uma solução fraca não negativa da equação

$$-\Delta u = \phi(|x'|)|u|^{p-2}u \quad \text{em } \mathbb{R}^N,$$

onde $p \in [2_*(s), 2_*(0))$ para algum $s \in (0, 2)$ e ϕ satisfaz $(\phi_1) - (\phi_3)$. Se $sN < 4$, então $u > 0$ em $\mathbb{R}^N$.

No **Capítulo 4**, investigamos a existência e a não existência de solução para a seguinte classe de problema elípticos envolvendo crescimento crítico:

$$-\Delta u = \phi(|x'|)|u|^{p-2}u + \lambda|u|^{2^*-2}u \quad \text{em } \mathbb{R}^N, \quad (\mathcal{P}_\lambda)$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$ é um parâmetro e $p \in [2_*(s), 2_*(0))$ com $s \in (0, 2)$. Note que, quando $\lambda = 0$, recuperamos o problema (7). Empregando técnicas presentes nos trabalhos [5, 7], obtemos como principais resultados:

- i) Suponha $(\phi_1) - (\phi_3)$ sejam satisfeitas, $2_*(s) \leq p < 2_*(0)$, com $N \geq 3$. Então, para todo $\lambda \geq 0$, o problema $(\mathcal{P}_\lambda)$ admite uma solução fraca não trivial.

ii) Suponha que $(\phi_1) - (\phi_3)$ sejam válidas, $N \geq 4$ e $k > 2$. Então, para todo

$$\lambda < \bar{\lambda} = - (C_{p,N} C_0)^{\frac{2^*-p}{p-2}},$$

o problema $(\mathcal{P}_\lambda)$ admite apenas a solução trivial.

Finalmente, no **Apêndice**, apresentamos alguns resultados auxiliares que foram usados durante o trabalho, envolvendo funções Hölder contínuas, espaços de Sobolev, resultados de regularidade e princípios de máximo, assim como lemas técnicos utilizados no decorrer das demonstrações.

Capítulo 1

Uma desigualdade do tipo Hardy-Sobolev em domínios cilíndricos

Neste capítulo, com base no trabalho de M. Badiale e G. Tarantello [2], estabeleceremos algumas desigualdades do tipo Hardy-Sobolev em domínios cilíndricos.

Por um **domínio cilíndrico**, entendemos uma decomposição da forma

$$x = (x', z) \in \mathbb{R}^N = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{N-k} \quad \text{com} \quad 2 \leq k \leq N.$$

Além disso, para números reais q e s tais que $1 < q < N$, $0 \leq s \leq q$ e $s < k$, definimos o expoente

$$q_*(s, N, q) = \frac{q(N-s)}{N-q}.$$

Para simplificar a notação, também escreveremos $q_*(s)$ ou simplesmente q_* , quando não houver risco de confusão. No caso particular em que $s = q$ o expoente é dado por $q_*(q, N, q) = q$, já quando $s = 0$ o expoente é da forma $q_*(0, N, q) = q^*$, onde $q^* = \frac{Nq}{N-q}$ é o expoente crítico de Sobolev.

1.1 Desigualdade de Hardy em domínios cilíndricos

Como primeiro resultado, vamos obter a seguinte desigualdade do tipo Hardy:

Teorema 1.1 (Hardy). *Suponha que $1 < q < k$ e $2 \leq k \leq N$. Então, para toda função*

$u \in \mathcal{D}^{1,q}(\mathbb{R}^N)$, a seguinte desigualdade do tipo Hardy é válida:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^q}{|x'|^q} dx \leq \left(\frac{q}{k-q} \right)^q \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^q dx. \quad (1.1)$$

Demonstração. Inicialmente, vamos considerar o sistema de coordenadas cilíndricas em $\mathbb{R}^N$, dado por:

$$x' = \rho y, \quad \rho \in [0, +\infty), \quad y \in S^{k-1}, \quad dx = dx' dz = \rho^{k-1} d\rho d\sigma dz,$$

onde $d\sigma$ denota o elemento de superfície de S^{k-1} .

Uma vez que o espaço $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ é denso em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, é suficiente verificarmos que (1.1) vale para uma função arbitrária $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Além disso, podemos supor $u \geq 0$.

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, podemos escrever

$$\begin{aligned} u(x)^q = u(\rho y, z)^q &= - \int_1^{+\infty} \frac{d}{d\lambda} u(\lambda \rho y, z)^q d\lambda \\ &= -q \int_1^{+\infty} u(\lambda \rho y, z)^{q-1} \nabla_{x'} u(\lambda \rho y, z) \cdot \rho y d\lambda, \end{aligned} \quad (1.2)$$

onde usamos a notação $\nabla_{x'}$ para denotar o gradiente com respeito às entradas x' . Assim, usando a igualdade obtida em (1.2) e fazendo a mudança de variável $r = \lambda \rho$, obtemos

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x)^q}{|x'|^q} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^{N-k}} \int_{S^{k-1}} \int_0^{+\infty} \frac{u(\rho y, z)^q}{\rho^q} \rho^{k-1} d\rho d\sigma dz \\ &= -q \int_1^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^{N-k}} \int_{S^{k-1}} \int_0^{+\infty} \frac{u(\lambda \rho y, z)^{q-1} \nabla_{x'} u(\lambda \rho y, z) \cdot \rho y}{\rho^q} \rho^{k-1} d\rho d\sigma dz d\lambda \\ &= -q \int_1^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^{N-k}} \int_{S^{k-1}} \int_0^{+\infty} \frac{u(\lambda \rho y, z)^{q-1} \nabla_{x'} u(\lambda \rho y, z) \cdot y}{\rho^{q-1}} \rho^{k-1} d\rho d\sigma dz d\lambda \\ &= -q \int_1^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^{N-k}} \int_{S^{k-1}} \int_0^{+\infty} \frac{u(r y, z)^{q-1} \nabla_{x'} u(r y, z) \cdot y}{\left(\frac{r}{\lambda}\right)^{q-1}} \left(\frac{r}{\lambda}\right)^{k-1} \frac{1}{\lambda} dr d\sigma dz d\lambda \\ &= -q \int_1^{+\infty} \frac{1}{\lambda^{k-q+1}} \left[\int_{\mathbb{R}^{N-k}} \int_{S^{k-1}} \int_0^{+\infty} \frac{u(r y, z)^{q-1} \nabla_{x'} u(r y, z) \cdot y}{r^{q-1}} r^{k-1} dr d\sigma dz \right] d\lambda \\ &= \frac{-q}{k-q} \int_{\mathbb{R}^{N-k}} \int_{\mathbb{R}^k} \frac{u(x', z)^{q-1} \nabla_{x'} u(x', z) \cdot \frac{x'}{|x'|}}{|x'|^{q-1}} dx' dz. \end{aligned}$$

Portanto, temos a seguinte desigualdade

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x)^q}{|x'|^q} dx \leq \frac{q}{k-q} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x)^{q-1} |\nabla u(x)|}{|x'|^{q-1}} dx. \quad (1.3)$$

Como

$$\frac{u(x)^{q-1}}{|x'|^{q-1}} \in L^{\frac{q}{q-1}}(\mathbb{R}^N) \quad \text{e} \quad |\nabla u(x)| \in L^q(\mathbb{R}^N),$$

pela desigualdade de Hölder, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x)^q}{|x'|^q} dx \leq \frac{q}{k-q} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x)^q}{|x'|^q} dx \right)^{\frac{q-1}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}},$$

assim

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x)^q}{|x'|^q} dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{q}{k-q} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}},$$

o que implica a desigualdade desejada. $\square$

Observação 1. Observe que, no caso particular em que $k = N$, obtemos a desigualdade de Hardy clássica, a saber

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^q}{|x|^q} dx \leq C_{N,q} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^q dx, \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N),$$

para $1 < q < N$, onde $C_{N,q} = \left(\frac{q}{N-q} \right)^q$ é a melhor constante da imersão, a qual nunca é atingida. Para maiores detalhes sobre a desigualdade de Hardy, veja [1].

1.2 Uma desigualdade do tipo Hardy-Sobolev

De maneira mais geral, temos a seguinte desigualdade do tipo Hardy-Sobolev.

Teorema 1.2 (Hardy-Sobolev). *Suponha que $1 < q < N$ e $2 \leq k \leq N$. Para cada $0 \leq s \leq q$ e $s < k$ existe uma constante $C = C(s, q, N, k) > 0$ tal que, para toda função $u \in \mathcal{D}^{1,q}(\mathbb{R}^N)$,*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^{q_*(s)}}{|x'|^s} dx \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^q dx \right)^{\frac{q_*(s)}{q}}, \quad (1.4)$$

onde $q_*(s) = \frac{q(N-s)}{N-q}$.

Demonstração. Se $s = 0$, então $q_*(s) = q^*$ e, nesse caso, a desigualdade (1.4) decorre da Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev (veja Teorema A.1), sendo assim, vamos nos concentrar em estabelecer o resultado no caso em que $s > 0$.

Como feito no Teorema 1.1, vamos considerar as coordenadas cilíndricas em $\mathbb{R}^n$,

$$x' = \rho y, \quad \rho \in [0, +\infty), \quad y \in S^{k-1}, \quad dx = dx' dz = \rho^{k-1} d\rho d\sigma dz,$$

onde $d\sigma$ é elemento de superfície de S^{k-1} . Além disso, vamos supor $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $u \geq 0$. Procedendo de maneira análoga à prova de (1.3), podemos concluir que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x)^{q_*}}{|x'|^s} dx \leq \frac{q_*}{k-s} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x)^{q_*-1} |\nabla u(x)|}{|x'|^{s-1}} dx. \quad (1.5)$$

Agora, prosseguiremos considerando os seguintes casos:

Caso 1: $s = 1 < k$ e $s < q$.

Nesse caso, de (1.5) temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x)^{q_*(1)}}{|x'|} dx \leq \frac{q_*(1)}{k-1} \int_{\mathbb{R}^N} u(x)^{q_*(1)-1} |\nabla u(x)| dx.$$

Desde que

$$u(x)^{q_*(1)-1} \in L^{\frac{q}{q-1}}(\mathbb{R}^N) \quad \text{e} \quad |\nabla u(x)| \in L^q(\mathbb{R}^N),$$

usando a desigualdade de Hölder

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x)^{q_*(1)}}{|x'|} dx \leq \frac{q_*(1)}{k-1} \left(\int_{\mathbb{R}^N} u(x)^{q_*} dx \right)^{\frac{q-1}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}},$$

agora, fazendo uso da desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev (veja Teorema A.1)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x)^{q_*(1)}}{|x'|} dx &\leq \frac{q_*(1)}{k-1} \frac{1}{S_q^{\frac{q^*(q-1)}{q^2}}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^q dx \right)^{\frac{q^*}{q} \frac{q-1}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \frac{q_*(1)}{k-1} \frac{1}{S_q^{\frac{q^*(q-1)}{q^2}}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^q dx \right)^{\frac{q^*}{q} \frac{q-1}{q} + \frac{1}{q}} \\ &= \frac{q_*(1)}{k-1} \frac{1}{S_q^{\frac{q^*(q-1)}{q^2}}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^q dx \right)^{\frac{q_*(1)}{q}} \end{aligned}$$

Verificando a desigualdade desejada e obtendo que, nesse caso

$$C(s, q, N, k) = \frac{q_*(1)}{k-1} \frac{1}{S_q^{\frac{q^*(q-1)}{q^2}}}.$$

Caso 2: $1 < s < k$ e $s < q$.

Primeiro, manipulando o lado direito da desigualdade (1.5), podemos escrever

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x)^{q_*}}{|x'|^s} dx \leq \frac{q_*}{k-s} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x)^{(s-1)\frac{q_*}{s}}}{|x'|^{s-1}} u(x)^{\frac{q_*}{s}-1} |\nabla u(x)| dx.$$

Como

$$\frac{u(x)^{(s-1)\frac{q_*}{s}}}{|x'|^{s-1}} \in L^{\frac{s}{s-1}}(\mathbb{R}^N), \quad u(x)^{\frac{q_*}{s}-1} \in L^{\frac{sq}{q-s}}(\mathbb{R}^N), \quad |\nabla u(x)| \in L^q(\mathbb{R}^N)$$

e

$$\frac{s-1}{s} + \frac{q-s}{sq} + \frac{1}{q} = 1,$$

pela Desigualdade de Hölder generalizada,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x)^{q_*}}{|x'|^s} dx \leq \frac{q_*}{k-s} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x)^{q_*}}{|x'|^s} dx \right)^{\frac{s-1}{s}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} u(x)^{q_*} dx \right)^{\frac{q-s}{sq}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}},$$

assim,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x)^{q_*}}{|x'|^s} dx \right)^{\frac{1}{s}} \leq \frac{q_*}{k-s} \left(\int_{\mathbb{R}^N} u(x)^{q_*} dx \right)^{\frac{q-s}{sq}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}},$$

logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x)^{q_*}}{|x'|^s} dx \leq \left(\frac{q_*}{k-s} \right)^s \left(\int_{\mathbb{R}^N} u(x)^{q_*} dx \right)^{\frac{q-s}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^q dx \right)^{\frac{s}{q}},$$

e, pela desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev (Teorema A.1)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x)^{q_*}}{|x'|^s} dx &\leq \left(\frac{q_*}{k-s} \right)^s \frac{1}{S_q^{\frac{q^*(q-s)}{q^2}}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^q dx \right)^{\frac{q_*}{q} \frac{q-s}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^q dx \right)^{\frac{s}{q}} \\ &= \left(\frac{q_*}{k-s} \right)^s \frac{1}{S_q^{\frac{q^*(q-s)}{q^2}}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^q dx \right)^{\frac{q_*}{q} \frac{q-s}{q} + \frac{s}{q}}. \end{aligned}$$

Desenvolvendo o expoente, tem-se

$$\frac{q_*}{q} \cdot \frac{q-s}{q} + \frac{s}{q} = \frac{q_*q - q_*s}{q^2} + \frac{s}{q} = \frac{q_*q}{q^2} = \frac{q_*}{q},$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x)^{q_*}}{|x'|^s} dx \leq \left(\frac{q_*}{k-s} \right)^s \frac{1}{S_q^{\frac{q^*(q-s)}{q^2}}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^q dx \right)^{\frac{q_*}{q}}.$$

Assim, a desigualdade fica estabelecida nesse caso, onde

$$C(s, q, N, k) = \left(\frac{q_*}{k-s} \right)^s \frac{1}{S_q^{\frac{q^*(q-s)}{q^2}}}.$$

Caso 3: $1 < s < k$ e $s = q$.

Esse caso corresponde à desigualdade do tipo Hardy, estabelecida no Teorema 1.1.

Caso 4: $0 < s < 1$.

Inicialmente, vejamos que

$$q_*(s) = (1-s)q^* + sq_*(1).$$

De fato,

$$\begin{aligned} (1-s)q^* + sq_*(1) &= (1-s)\frac{Nq}{N-q} + s\frac{q(N-1)}{N-q} \\ &= \frac{q}{N-q}(N(1-s) + s(N-1)) \\ &= \frac{q(N-s)}{N-q} \\ &= q_*(s). \end{aligned}$$

Como consequência, podemos escrever

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x)^{q_*}}{|x'|^s} dx = \int_{\mathbb{R}^N} u(x)^{(1-s)q^*} \left(\frac{u(x)^{q_*(1)}}{|x'|} \right)^s dx.$$

Agora, como

$$u(x)^{(1-s)q^*} \in L^{\frac{1}{1-s}}(\mathbb{R}^N) \quad \text{e} \quad \left(\frac{u(x)^{q_*(1)}}{|x'|} \right)^s \in L^{\frac{1}{s}}(\mathbb{R}^N)$$

usando a Desigualdade de Hölder, vê-se que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x)^{q_*}}{|x'|^s} dx &= \int_{\mathbb{R}^N} u(x)^{(1-s)q^*} \left(\frac{u(x)^{q_*(1)}}{|x'|} \right)^s dx \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} u(x)^{q^*} dx \right)^{1-s} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x)^{q_*(1)}}{|x'|} dx \right)^s, \end{aligned}$$

dessa forma, combinando a Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev e o Caso 1,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x)^{q_*}}{|x'|^s} dx &\leq \frac{1}{S_q^{\frac{q^*(1-s)}{q}}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^q dx \right)^{(1-s)\frac{q^*}{q}} \left[\frac{1}{S_q^{\frac{q^*(q-1)}{q^2}}} \frac{q_*(1)}{k-1} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^q dx \right)^{\frac{q_*(1)}{q}} \right]^s \\ &= \frac{1}{S_q^{\frac{q^*(q-s)}{q^2}}} \left(\frac{q_*(1)}{k-1} \right)^s \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^q dx \right)^{(1-s)\frac{q^*}{q} + \frac{q_*(1)}{q}s} \\ &= \frac{1}{S_q^{\frac{q^*(q-s)}{q^2}}} \left(\frac{q_*(1)}{k-1} \right)^s \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^q dx \right)^{\frac{q_*}{q}}. \end{aligned}$$

Assim, a desigualdade fica demonstrada, de modo que, nesse caso, a constante da

imersão é dada por

$$C(s, q, N, k) = \frac{1}{S_q^{\frac{q^*(q-s)}{q^2}}} \left(\frac{q_*(1)}{k-1} \right)^s.$$

Com isso, concluímos a prova do teorema. $\square$

Observação 2. Vamos justificar, com maiores detalhes, que a escolha de $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ durante a demonstração do Teorema 1.2 implica na validade do resultado para $u \in \mathcal{D}^{1,q}(\mathbb{R}^N)$ arbitrária.

Primeiramente, se $u \in \mathcal{D}^{1,q}(\mathbb{R}^N)$, então $|u| \in \mathcal{D}^{1,q}(\mathbb{R}^N)$. Daí, existe uma sequência $(u_n)_n \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, tal que $u_n \rightarrow |u|$ em $\mathcal{D}^{1,q}(\mathbb{R}^N)$ e $u_n \geq 0$. Com isso, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^q dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^q dx. \quad (1.6)$$

Por outro lado, usando a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n - |u||^{q^*} dx \right)^{\frac{1}{q^*}} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n - \nabla |u||^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

donde conclui-se que

$$u_n \rightarrow |u| \quad \text{em} \quad L^{q^*}(\mathbb{R}^N) \quad \text{e} \quad u_n \rightarrow |u| \quad q.t.p.$$

pelo Lema de Fatou,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^{q^*}}{|x'|^s} dx \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u_n|^{q^*}}{|x'|^s} dx, \quad (1.7)$$

uma vez que pelo Teorema 1.2

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u_n|^{q^*}}{|x'|^s} dx \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^q dx \right)^{\frac{q^*}{q}},$$

segue de (1.6) e (1.7) que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^{q^*}}{|x'|^s} dx \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^q dx \right)^{\frac{q^*}{q}},$$

o que conclui a observação.

1.3 Uma desigualdade de Sobolev com peso

Nesta seção, nosso principal objetivo é apresentar uma imersão de Sobolev com peso, que será de grande importância para assegurar a boa definição do funcional

energia associado ao problema elíptico que será explorado no capítulo seguinte. Antes, vejamos o seguinte lema técnico.

Lema 1.3. *Se $\phi \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ e $\phi(r)r^s \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$ para algum $s \in (0, 2)$, então $\phi \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$.*

Demonstração. Como $\phi \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, existe uma constante $M > 0$ tal que

$$\phi(r) \leq M, \quad \forall r \in [0, 1].$$

Além disso, para $r \in [1, +\infty)$

$$\phi(r) = \phi(r)r^s \frac{1}{r^s} \leq \frac{\|\phi(r)r^s\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)}}{r^s} \leq \|\phi(r)r^s\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)}$$

portanto,

$$\phi(r) \leq \max\{M, \|\phi(r)r^s\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)}\}, \quad \forall r \in [0, +\infty).$$

Isso verifica que $\phi \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$. □

Teorema 1.4. *Considere $\phi \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ tal que $\phi(r)r^s \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$ para algum $s \in (0, 2)$. Para cada $p \in [q_*(s), q_*(0)]$, onde $q \geq 2$, existe uma constante positiva $C > 0$ tal que para toda $u \in \mathcal{D}^{1,q}(\mathbb{R}^N)$,*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|)|u|^p dx \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^q dx \right)^{\frac{p}{q}}. \quad (1.8)$$

Demonstração. Inicialmente, vamos analisar o caso em que $p = q_*(s)$. Usando a hipótese de que $\phi(r)r^s \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$ e o Teorema 1.2, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|)|u|^{q_*(s)} dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|)|x'|^s \frac{|u|^{q_*(s)}}{|x'|^s} dx \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^{q_*(s)}}{|x'|^s} dx \\ &\leq C \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^q dx \right)^{\frac{q_*(s)}{q}}. \end{aligned}$$

Agora, se $p = q_*(0)$, e recorde que $q_*(0) = q^*$, desde que pelo Lema 1.3 tem-se que $\phi \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$ e fazendo uso da Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev (veja Teorema A.1), então

$$\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|)|u|^{q_*(0)} dx \leq C \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{q_*(0)} dx \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^q dx \right)^{\frac{q_*(0)}{q}}.$$

Por fim, se $q_*(s) < p < q_*(0)$, podemos escrever

$$p = (1 - \alpha)q_*(s) + \alpha q_*(0)$$

para algum $\alpha \in (0, 1)$, a saber $\alpha = \frac{p - q_*(s)}{q_*(0) - q_*(s)}$. Com isso, usando a Desigualdade de Hölder e os casos em que $p = q_*(s)$ e $p = q_*(0)$, segue que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|) |u|^p \, dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|)^{1-\alpha} |u|^{(1-\alpha)q_*(s)} \phi(|x'|)^\alpha |u|^{\alpha q_*(0)} \, dx \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|) |u|^{q_*(s)} \, dx \right)^{1-\alpha} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|) |u|^{q_*(0)} \, dx \right)^\alpha \\ &\leq C \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^q \, dx \right)^{\frac{q_*(s)}{q}(1-\alpha)} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^q \, dx \right)^{\frac{q_*(0)}{q}\alpha} \\ &= C \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^q \, dx \right)^{\frac{p}{q}}, \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração do teorema. □

Capítulo 2

Existência e não existência de minimizadores com simetria cilíndrica

2.1 A melhor constante

Para $q = 2$, $s \in (0, 2)$ e $p \in [2_*(s), 2_*(0)]$, denotemos por $\mathcal{S}_s$ a melhor constante da desigualdade (1.8), isto é,

$$0 < \mathcal{S}_s = \inf_{u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|) |u|^p \, dx \right)^{2/p}}. \quad (2.1)$$

Como veremos no Teorema 2.8, a constante $\mathcal{S}_s$ é atingida por uma função $u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ se, e somente se, u é uma solução de energia mínima da equação elíptica semilinear

$$-\Delta u = \phi(|x'|) |u|^{p-2} u \quad \text{em } \mathbb{R}^N. \quad (2.2)$$

Nesse capítulo, baseado no artigo de M. Badiale e G. Tarantello [2], iremos estudar existência e não existência de minimizador para a melhor constante $\mathcal{S}_s$ definida em (2.1), as quais são soluções do tipo ground-state do problema elíptico semilinear (2.2).

Para tanto, vamos supor $N \geq 3$, $p \in [2_*(s), 2_*(0))$ para algum $s \in (0, 2)$ e que a função peso ϕ satisfaz as seguintes hipóteses:

$$(\phi_1) \quad \phi \in C_{loc}^{0,\eta}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+);$$

$$(\phi_2) \quad \phi(r) r^s \in L^\infty(\mathbb{R}_+);$$

$$(\phi_3) \quad \phi(r) = 0 \text{ se, e somente se, } r = 0.$$

Exemplo 2.1. Um exemplo de função ϕ que satisfaz o modelo proposto é dado por:

$$\phi_s(r) = \frac{r}{(1+r^2)^{1+s}}, \quad r \in [0, +\infty)$$

com $s \in (0, 2)$. Claramente, ϕ_s satisfaz a hipótese (ϕ_3) . Que ϕ_s satisfaz (ϕ_1) segue de que

$$\phi'(r) = \frac{1}{(1+r^2)^{1+s}} - \frac{2(1+s)}{(1+r^2)^s} \left(\frac{r}{1+r^2} \right)^2$$

é limitada em $[0, +\infty)$. Para verificarmos (ϕ_2) , observe que

$$\phi_s(r)r^s = \frac{r^{1+s}}{(1+r^2)^{1+s}} = \left(\frac{r}{1+r^2} \right)^{1+s} < 1, \quad \forall r \geq 0$$

o que nos garante que ϕ_s é uma função modelo para o problema.

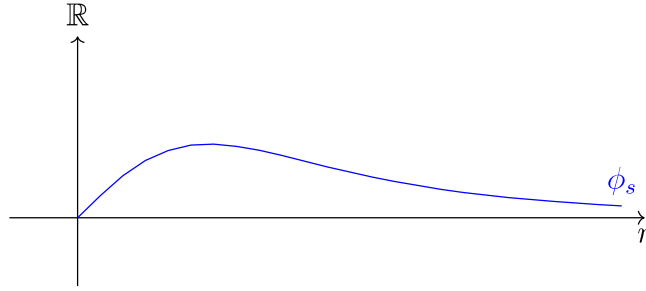


Figura 2.1: Gráfico da função ϕ_s para $s = 1$.

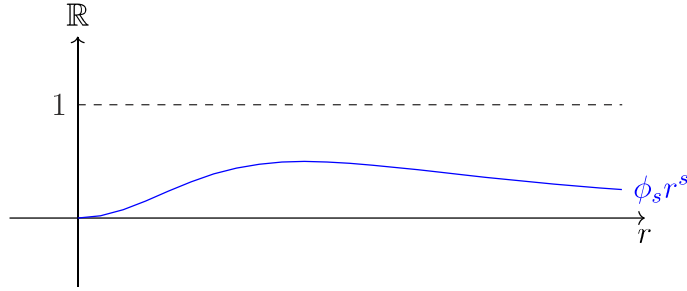


Figura 2.2: Gráfico da função $\phi_s r^s$ para $s = 1$.

Definição 2.2. Uma função $u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ é solução fraca de (2.2) se,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla \varphi \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|) |u|^{p-2} u \varphi \, dx = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N).$$

Note que o funcional energia $I : \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$ associado ao problema (2.2) é dado por

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, dx - \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|) |u|^p \, dx,$$

e sua boa definição para cada $p \in [2_*(s), 2_*(0)]$ fixado advém do Teorema 1.4. Além disso, podemos verificar que I é Fréchet diferenciável, veja por exemplo [19, 10], e sua derivada é dada por

$$I'(u)\varphi = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla \varphi \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|)|u|^{p-2}u\varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N).$$

Portanto, pontos críticos de I são precisamente as soluções fracas do problema (2.2). Com o objetivo de obter minimizadores com simetria cilíndrica, vamos introduzir o subespaço das funções simetricamente cilíndricas.

Definição 2.3. Dizemos que uma função $u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ é simetricamente cilíndrica quando

$$u(x', z) = u(Tx', z),$$

para toda transformação ortogonal $T : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$. Ou ainda, quando

$$u(x'', z) = u(x', z)$$

sempre que $|x'| = |x''|$.

No que segue, vamos estudar a existência de pontos críticos não triviais com simetria cilíndrica para o funcional I em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, os quais correspondem a soluções com simetria cilíndrica para o problema (2.2), que por sua vez, correspondem a minimizadores simetricamente cilíndricos para $\mathcal{S}_s$. Para tanto, considere o subespaço das funções de $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ com simetria cilíndrica

$$\mathcal{D}_c^{1,2}(\mathbb{R}^N) := \{u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) : u(x', z) = u(x'', z), |x'| = |x''|\}$$

e o funcional I_c como sendo a restrição de I ao subespaço $\mathcal{D}_c^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Com isso, buscaremos pelos pontos críticos não triviais do funcional I_c .

A fim de atingir esse objetivo, vamos minimizar tais funcionais sobre suas respectivas variedades de Nehari

$$\mathcal{N} = \{u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} : I'(u)u = 0\} \quad \text{e} \quad \mathcal{N}_c = \{u \in \mathcal{D}_c^{1,2}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} : I'_c(u)u = 0\}.$$

É claro que, se u é um ponto crítico não trivial de I (ou I_c), então $u \in \mathcal{N}$ (respectivamente, $u \in \mathcal{N}_c$), já que, nesse caso

$$I'(u)v = 0, \quad \forall v \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \quad (\text{reciprocamente, } I'_c(u)v = 0, \quad \forall v \in \mathcal{D}_c^{1,2}(\mathbb{R}^N))$$

em particular,

$$I'(u)u = 0 \quad (I'_c(u)u = 0).$$

O método de Nehari consiste em minimizar o funcional I sobre $\mathcal{N}$, ou seja, obter $u_0 \in \mathcal{N}$ tal que

$$\inf_{u \in \mathcal{N}} I(u) = I(u_0),$$

depois disso, deve-se verificar que o minimizante do funcional é, na verdade, ponto crítico de I em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Nesse caso, dizemos que u é solução de energia mínima ou solução ground state.

No caso em que $p = 2_*(s)$, nosso principal resultado de não existência de solução do tipo ground state para o problema (2.2), é estabelecido como segue.

Teorema 2.1. *Suponha que ϕ satisfaz as hipóteses $(\phi_1) - (\phi_3)$. Se $p = 2_*(s)$ e a função $r \rightarrow r^s \phi(r)$ é estritamente crescente, então I e I_c não atingem seu ínfimo sobre $\mathcal{N}$ e $\mathcal{N}_c$, respectivamente.*

Exemplo 2.4. Um exemplo de função que satisfaz as hipótese do Teorema 2.1 é dada por

$$\psi_s(r) = \frac{r}{(1+r)^{1+s}}, \quad \text{para } s \in (0, 2).$$

De fato, vejamos inicialmente que ψ_s satisfaz as hipóteses (ϕ_1) , (ϕ_2) e (ϕ_3) . Que (ϕ_1) é satisfeitas segue de que

$$\psi'_s(r) = \frac{1}{(1+r)^{1+s}} - (1+s) \frac{r}{(1+r)^{2+s}}$$

é limitada. Já (ϕ_2) ocorre pois

$$\psi_s(r)r^s = \frac{r^{1+s}}{(1+r)^{1+s}} = \left(\frac{r}{1+r} \right)^{1+s} < 1.$$

Que (ϕ_3) ocorre é imediato. Por fim, resta verificar que $\psi_s(r)r^s$ é estritamente crescente. De fato,

$$(\psi_s(r)r^s)' = \frac{(1+s)r^s(1+r)^{1+s} - r^{1+s}(1+s)(1+r)^s}{(1+r)^{2(1+s)}}$$

onde

$$(1+s)r^s(1+r)^{1+s} - r^{1+s}(1+s)(1+r)^s = (1+s)(1+r)^s r^s > 0$$

logo, $(\psi_s(r)r^s)' > 0$ donde segue a monotonicidade de $\psi_s(r)r^s$.

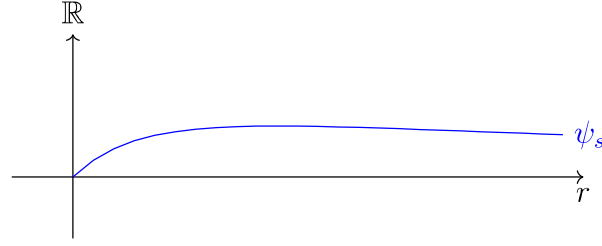


Figura 2.3: Gráfico da função ψ_s para $s = 1$.

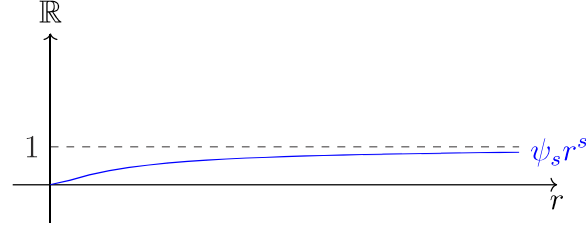


Figura 2.4: Gráfico da função $\psi_s r^s$ para $s = 1$.

No caso em que $2_*(s) < p < 2_*(0)$, nosso principal resultado de existência de solução para o problema (2.2), é estabelecido como segue.

Teorema 2.2. *Suponha que ϕ satisfaz as hipóteses $(\phi_1) - (\phi_3)$. Se $2_*(s) < p < 2_*(0)$, então tanto I quanto I_c atingem seu ínfimo sobre $\mathcal{N}$ e $\mathcal{N}_c$, respectivamente. Além disso, esse ínfimo corresponde a uma solução para (2.2), a qual atinge a melhor constante $\mathcal{S}_s$ para a imersão (1.8).*

A prova do Teorema 2.1 é obtida usando argumentos de minimização na variedade de Nehari e o Princípio Variacional de Ekeland.

2.2 Resultados preliminares

Nesta seção, iremos enunciar alguns resultados que possibilitarão a prova do Teorema 2.1 e do Teorema 2.2.

Proposição 2.3. *I e I_c são funcionais limitados inferiormente e coercivos sobre $\mathcal{N}$ e $\mathcal{N}_c$, respectivamente.*

Demonstração. Desde que,

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|) |u|^p dx$$

então

$$I'(u)u = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|) |u|^p dx$$

e recorde que $u \in \mathcal{N}$ se, e somente se $I'(u)u = 0$ ou, equivalentemente,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|) |u|^p dx. \quad (2.3)$$

Assim, se $u \in \mathcal{N}$ tem-se que

$$I(u) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) \|u\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}^2 \quad (2.4)$$

como $p \in [2_*(s), 2_*(0)]$, então

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \geq \frac{1}{2} - \frac{N-2}{2(N-s)} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{N-2}{N-s} \right) = \frac{2-s}{2(N-s)} > 0$$

pois $N \geq 3$ e $s \in (0, 2)$. Portanto, obtemos que

$$I(u) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) \|u\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}^2 > 0, \quad \forall u \in \mathcal{N}$$

ou seja, I é limitado inferiormente sobre $\mathcal{N}$. Além disso, é imediato que I é coercivo sobre $\mathcal{N}$, ou seja, $I(u) \rightarrow +\infty$ quando $\|u\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)} \rightarrow +\infty$.

De maneira análoga, podemos verificar que o mesmo vale para o funcional I_c sobre $\mathcal{N}_c$. $\square$

Proposição 2.4. *Se $u_0 \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ é ponto crítico de I e minimiza I sobre $\mathcal{N}$, então u_0 não muda de sinal. Analogamente, os pontos críticos de I_c que também são minimizantes para I_c restrito a $\mathcal{N}_c$ também não mudam de sinal.*

Demonstração. De fato, seja $u_0 \in \mathcal{N}$ tal que

$$\inf_{u \in \mathcal{N}} I(u) = I(u_0).$$

Suponhamos, por absurdo, que u_0 muda de sinal, então $u_0^+ \not\equiv 0$ e $u_0^- \not\equiv 0$, e portanto, os conjuntos

$$\{x \in \mathbb{R}^N : u_0(x) > 0\} \quad \text{e} \quad \{x \in \mathbb{R}^N : u_0(x) < 0\}$$

possuem medida não nula. Desde que u_0 é ponto crítico do funcional I , então

$$I'(u_0)v = 0, \quad \forall v \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N).$$

Desde que $u_0 \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ então $u_0^+ \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, e como consequência

$$0 = I'(u_0)u_0^+$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_0 \cdot \nabla u_0^+ \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|) |u_0|^{p-2} u_0 u_0^+ \, dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0^+|^2 \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|) |u_0^+|^p \, dx \\
 &= I'(u_0^+) u_0^+
 \end{aligned}$$

ou seja, $u_0^+ \in \mathcal{N}$. De maneira análoga, podemos mostrar que $u_0^- \in \mathcal{N}$. Com isso, se por um lado

$$I(u_0) = \inf_{u \in \mathcal{N}} I(u) \leq I(u_0^+)$$

por outro, usando 2.4 obtemos

$$\begin{aligned}
 I(u_0^+) &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0^+|^2 \, dx \\
 &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) \int_{\{x \in \mathbb{R}^N \mid u_0 > 0\}} |\nabla u_0|^2 \, dx \\
 &< \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) \int_{\{x \in \mathbb{R}^N \mid u_0 > 0\}} |\nabla u_0|^2 \, dx + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) \int_{\{x \in \mathbb{R}^N \mid u_0 \leq 0\}} |\nabla u_0|^2 \, dx \\
 &= I(u_0)
 \end{aligned}$$

o que contradiz o fato de u_0 minimizar I sobre $\mathcal{N}$. Portanto, u_0 não pode trocar de sinal. Prosseguindo da mesma forma, o resultado é válido para I_c sobre $\mathcal{N}_c$. $\square$

Proposição 2.5. *Para cada $u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$, existe um único $t_u > 0$ tal que*

$$t_u u \in \mathcal{N}.$$

Similarmente, se $u \in \mathcal{D}_c^{1,2}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ existe um único $t_u > 0$ tal que $t_u u \in \mathcal{N}_c$.

Demonstração. De fato, dada $u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ e $t > 0$, segue que

$$\begin{aligned}
 t u \in \mathcal{N} &\iff I'(tu)tu = 0 \\
 &\iff \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(tu)|^2 \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|) |tu|^p \, dx = 0 \\
 &\iff t^2 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, dx - |t|^p \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|) |u|^p \, dx = 0 \\
 &\iff \frac{|t|^p}{t^2} = \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, dx}{\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|) |u|^p \, dx} \\
 &\iff t = \left(\frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, dx}{\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|) |u|^p \, dx} \right)^{\frac{1}{p-2}}.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$t_u = \left(\frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, dx}{\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|) |u|^p \, dx} \right)^{\frac{1}{p-2}} > 0.$$

Da mesma forma, o resultado é verificado para $u \in \mathcal{D}_c^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. $\square$

A proposição anterior nos diz que toda função não nula de $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ (ou $\mathcal{D}_c^{1,2}(\mathbb{R}^N)$) pode ser projetada em $\mathcal{N}$ (reciprocamente, $\mathcal{N}_c$). Vejamos agora como relacionar o problema de minimização em termos da melhor constante da imersão $\mathcal{S}_s$, definida em (2.1).

Proposição 2.6. *Suponha que $\phi \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ e que $\phi(r)r^s \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$ para algum $s \in (0, 2)$. A melhor constante da imersão*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|)|u|^p dx \right)^{\frac{2}{p}} \leq C \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx, \quad u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$$

para $p \in [2_*(s), 2_*(0)]$, pode ser expressa por

$$L = \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx : u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N), \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|)|u|^p dx = 1 \right\}.$$

Analogamente, a melhor constante para a imersão

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|)|u|^p dx \right)^{\frac{2}{p}} \leq C \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx, \quad u \in \mathcal{D}_c^{1,2}(\mathbb{R}^N)$$

com $p \in [2_*(s), 2_*(0)]$, é dada por

$$L_c = \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx : u \in \mathcal{D}_c^{1,2}(\mathbb{R}^N), \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|)|u|^p dx = 1 \right\}.$$

Demonstração. Essencialmente, devemos verificar que $\mathcal{S}_s = L$. Para tanto, considere os conjuntos

$$A := \left\{ \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|)|u|^p dx \right)^{\frac{2}{p}}} : u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} \right\}$$

$$B := \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx : u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N), \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|)|u|^p dx = 1 \right\}$$

onde $\inf A = \mathcal{S}_s$ e $\inf B = L$.

Observe que, se

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \in B$$

então $u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ e

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx = \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|)|u|^p dx \right)^{\frac{2}{p}}} \in A$$

assim, desde que $B \subset A$ então $\mathcal{S}_s \leq L$.

Reciprocamente, considere

$$\frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|) |u|^p dx\right)^{\frac{2}{p}}} \in A$$

onde $u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$, definindo

$$v := \frac{u}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|) |u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}}$$

então

$$\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|) |v|^p dx = \frac{\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|) |u|^p dx}{\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|) |u|^p dx} = 1$$

isso significa que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx \in B$$

donde segue que

$$L \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx = \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|) |u|^p dx\right)^{\frac{2}{p}}},$$

ou seja, L é cota inferior para A , mas então, por definição de ínfimo, segue que $L \leq \mathcal{S}_s$. Dessa maneira, obtemos que $\mathcal{S}_s = L$. De modo análogo, podemos verificar que o resultado para L_c , e isso conclui o resultado. $\square$

Teorema 2.7. *O funcional I atinge seu ínfimo sobre $\mathcal{N}$ se, e somente se a melhor constante L é atingida. Analogamente, I_c atinge seu ínfimo sobre $\mathcal{N}_c$ se, e somente se a melhor constante L_c é atingida.*

Pela Proposição 2.5, se $u \in \mathcal{D}^{1,2} \setminus \{0\}$ existe $t_u > 0$ que o projeta na variedade de Nehari e, nesse caso

$$\begin{aligned} I(t_u u) &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(t_u u)|^2 dx \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) \|u\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}^2 t_u^2 \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) \|u\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}^2 \left(\frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx}{\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|) |u|^p dx}\right)^{\frac{2}{p-2}} \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) \frac{\|u\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{2p}{p-2}}}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|) |u|^p dx\right)^{\frac{2}{p-2}}} \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) \left(\frac{\|u\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}^2}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|) |u|^p dx\right)^{\frac{2}{p}}}\right)^{\frac{p}{p-2}}. \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\inf_{u \in \mathcal{N}} I(u) = \inf_{u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}} I(t_u u) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) \left(\inf_{u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}} \frac{\|u\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}^2}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|) |u|^p dx \right)^{\frac{2}{p}}} \right)^{\frac{p}{p-2}}$$

desde que, pela Proposição 2.6

$$\inf_{u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}} \frac{\|u\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}^2}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|) |u|^p dx \right)^{\frac{2}{p}}} = L$$

então

$$\inf_{u \in \mathcal{N}} I(u) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) L^{\frac{p}{p-2}}.$$

Dessa maneira, o ínfimo de I sobre a Variedade de Nehari $\mathcal{N}$ é atingido se, e somente se, a melhor constante é atingida. De forma análoga, o resultado vale para I_c sobre $\mathcal{N}_c$.

Teorema 2.8. *A melhor constante $\mathcal{S}_s$ é atingida se, e somente se, o problema (2.2) possui solução ground state.*

Demonstração. Se o problema (2.2) possui solução ground state, pelo Teorema 2.7 segue que $\mathcal{S}_s$ é atingida.

Reciprocamente, se $\mathcal{S}_s$ é atingida, devido a Proposição 2.6 e Teorema 2.7 o seguinte ínfimo é atingido

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0|^2 dx = \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx : u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N), \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|) |u|^p dx = 1 \right\}$$

e, além disso

$$\inf_{u \in \mathcal{N}} I(u) = I(t_{u_0} u_0)$$

$$\text{onde } t_{u_0} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0|^2 dx \right)^{\frac{1}{p-2}} > 0.$$

Agora, considere as aplicações

$$F(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|) |u|^p dx - 1 \quad \text{e} \quad J(u) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx$$

definidas sobre $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Observe que se $u \in \mathcal{M} := F^{-1}(\{0\})$ então

$$F'(u).u = p \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|) |u|^p dx = p \neq 0$$

portanto $F'(u) \neq 0 \quad \forall u \in \mathcal{M}$, como

$$J(u_0) = \inf_{u \in \mathcal{M}} J(u)$$

pelo Teorema do Multiplicadores de Lagrange (veja Teorema A.10), existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$J'(u_0) = \lambda F'(u_0),$$

ou seja

$$2 \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_0 \nabla \varphi \, dx = \lambda p \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|) |u_0|^{p-2} u_0 \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N), \quad (2.5)$$

tomando $\varphi = u_0$, obtemos que

$$\lambda = \frac{2}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0|^2 \, dx > 0.$$

Por fim, definindo $w = \left(\frac{2}{p}\right)^{\frac{1}{2-p}} \lambda^{\frac{1}{p-2}} u_0 \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ e substituindo em (2.5), obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla w \nabla \varphi \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|) |w|^{p-2} w \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N),$$

ou seja, w é solução fraca para (2.2), e além disso, como

$$\left(\frac{2}{p}\right)^{\frac{1}{2-p}} \lambda^{\frac{1}{p-2}} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{p-2}} = t_{u_0}$$

segue que $w = t_{u_0} u_0$ é solução ground state.

□

2.3 Não atingibilidade da melhor constante

Agora, iremos apresentar a prova do Teorema 2.1, a qual será obtida via argumento por contradição.

Prova do Teorema 2.1. Suponha, por contradição, que exista $w \in \mathcal{N}$ tal que

$$I(w) = \inf_{u \in \mathcal{N}} I(u). \quad (2.6)$$

Desde que $w \in \mathcal{N}$, por (2.3) devemos ter

$$\|w\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}^2 = \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|) |w|^{2_*(s)} \, dx. \quad (2.7)$$

Agora, definindo para cada $\lambda \in (0, 1)$

$$w_\lambda(x) := \lambda^{\frac{N-2}{2}} w(\lambda x)$$

então,

$$\|w_\lambda\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(\lambda^{\frac{N-2}{2}} w(\lambda x))|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} \lambda^N |\nabla w(\lambda x)|^2 dx$$

fazendo a mudança de coordenadas $y = \lambda x$, concluímos que

$$\|w_\lambda\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}^2 = \|w\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}^2. \quad (2.8)$$

Pela Proposição 2.5, para

$$t_{w_\lambda} = \left(\frac{\|w_\lambda\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}^2}{\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|) |w_\lambda|^{2_*(s)} dx} \right)^{\frac{1}{2_*(s)-2}}$$

tem-se que $t_{w_\lambda} w_\lambda \in \mathcal{N}$. Nessa instância, por (2.6) segue que

$$I(w) \leq I(u), \quad \forall u \in \mathcal{N}$$

e, por (2.4)

$$\|w\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}^2 \leq \|u\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}^2, \quad \forall u \in \mathcal{N}.$$

Em particular,

$$\|w\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}^2 \leq \|t_{w_\lambda} w_\lambda\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}^2 = t_{w_\lambda}^2 \|w\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}^2$$

assim, necessariamente, devemos ter $t_{w_\lambda} \geq 1$. Consequentemente,

$$\|w_\lambda\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}^2 \geq \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|) |w_\lambda|^{2_*(s)} dx. \quad (2.9)$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|) |w_\lambda|^{2_*(s)} dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|) |\lambda^{\frac{N-2}{2}} w(\lambda x)|^{2_*(s)} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|) \lambda^{\frac{(N-2)2_*(s)}{2}} |w(\lambda x)|^{2_*(s)} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|) \lambda^{N-s} |w(\lambda x)|^{2_*(s)} dx. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de coordenadas $y = \lambda x$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|) \lambda^{N-s} |w(\lambda x)|^{2_*(s)} dx = \int_{\mathbb{R}^N} \phi\left(\frac{|y'|}{\lambda}\right) \frac{1}{\lambda^s} |w(y)|^{2_*(s)} dy.$$

No que segue, vamos fazer uso das coordenadas cilíndricas em $\mathbb{R}^N$:

$$y' = \rho v, \quad \rho \in [0, +\infty), \quad v \in S^{k-1}, \quad dy = dy' dz = \rho^{k-1} d\rho d\sigma dz,$$

onde $d\sigma$ denota o elemento de superfície de S^{k-1} . Além disso, usando a monotonicidade da aplicação $r \rightarrow r^s \phi(r)$, obtemos o seguinte

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \phi\left(\frac{|y'|}{\lambda}\right) \frac{1}{\lambda^s} |w(y)|^{2_*(s)} dy &= \int_{\mathbb{R}^{N-k}} \int_{S^{k-1}} \int_{\mathbb{R}} \phi\left(\frac{\rho}{\lambda}\right) \frac{1}{\lambda^s} |w(y)|^{2_*(s)} \rho^{k-1} d\rho d\sigma dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^{N-k}} \int_{S^{k-1}} \int_{\mathbb{R}} \phi\left(\frac{\rho}{\lambda}\right) \frac{\rho^s}{\lambda^s} |w(y)|^{2_*(s)} \rho^{k-1-s} d\rho d\sigma dz \\ &> \int_{\mathbb{R}^{N-k}} \int_{S^{k-1}} \int_{\mathbb{R}} \phi(\rho) \rho^s |w(y)|^{2_*(s)} \rho^{k-1-s} d\rho d\sigma dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^{N-k}} \int_{S^{k-1}} \int_{\mathbb{R}} \phi(\rho) |w(y)|^{2_*(s)} \rho^{k-1} d\rho d\sigma dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|y'|) |w(y)|^{2_*(s)} dy. \end{aligned}$$

Consequentemente, por (2.7) e (2.8) concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|) |w_\lambda|^{2_*(s)} dx > \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|y'|) |w|^{2_*(s)} dy = \|w\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}^2 = \|w_\lambda\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}^2,$$

o que contraria (2.9). Portanto, sobre as hipóteses assumidas, o funcional I não atinge seu ínfimo na variedade de Nehari $\mathcal{N}$. A mesma argumentação justifica que I_c não atinge seu ínfimo sobre $\mathcal{N}_c$, e isso conclui a prova do resultado. $\square$

Um vez que o funcional I não atinge seu ínfimo sobre a variedade de Nehari $\mathcal{N}$, sob as hipóteses do Teorema 2.1, $\mathcal{S}_s$ não é atingida.

2.4 Atingibilidade da melhor constante

Nesta seção iremos apresentar a prova do Teorema 2.2. Para isto, vamos estabelecer alguns resultados auxiliares.

Primariamente, vamos relembrar o seguinte resultado que é uma consequência do Princípio Variacional de Ekeland, cuja demonstração pode ser encontrada em [14, Corolário 1.10].

Teorema 2.9. *Seja f um funcional de classe C^2 definido em um espaço de Hilbert H que é coercivo e limitado inferiormente sobre o conjunto*

$$M_f = \{u \in H : u \neq 0, \psi(u) := f'(u)u = 0\}.$$

Suponha que $\psi'(u)u \neq 0$ para toda $u \in M_f$, e que para toda sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ minimizante para f em M_f , a sequência $(\psi'(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada no espaço dual H^* e que

$$\limsup_{n \in \mathbb{N}} |\psi'(u_n)u_n| > 0.$$

Então, para toda sequência minimizante (v_n) para f sobre M_f , existe uma subsequência $(u_n) \subset M_f$ tal que:

$$f(u_n) \leq f(v_n), \quad \lim_{n \in \mathbb{N}} \|u_n - v_n\|_H = 0 \quad e \quad \lim_{n \in \mathbb{N}} \|f'(u_n)\|_{H^*} = 0.$$

Como consequência do Teorema 2.9 temos o seguinte resultado.

Lema 2.10. *Existe uma sequência minimizante $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ para I em $\mathcal{N}$ satisfazendo $\lim_{n \in \mathbb{N}} \|I'(u_n)\| = 0$. Similarmente, existe uma sequência minimizante $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ para I_c em $\mathcal{N}_c$ satisfazendo $\lim_{n \in \mathbb{N}} \|I'_c(u_n)\| = 0$.*

Demonstração. De fato, para $H = \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, $f = I \in C^2$, $M_f = \mathcal{N}$ e pela Proposição 2.3 temos a limitação inferior e coercividade do funcional I sobre $\mathcal{N}$.

Além disso, se $u \in \mathcal{N}$, como $p > 2_*(s) > 2$, então

$$\psi'(u)u = 2 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - p \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|)|u|^p dx = (2-p) \|u\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}^2 \neq 0.$$

Suponha que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência minimizante para I em $\mathcal{N}$, vejamos que existem constantes $0 < \gamma \leq C$ tais que

$$0 < \gamma \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|)|u_n|^p dx \leq C. \quad (2.10)$$

De fato, desde que $u_n \in \mathcal{N}$, por (2.3) e pelo Teorema (1.4) então

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|)|u_n|^p dx \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx \right)^{\frac{p}{2}}, \quad C > 0$$

e portanto,

$$\frac{1}{C^{\frac{2}{p-2}}} \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx.$$

Por outro lado, se $(u_n) \subset \mathcal{N}$ é minimizante, então

$$I(u_n) \rightarrow \inf_{u \in \mathcal{N}} I(u)$$

portanto, $(I(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada, ou seja, existe $C > 0$ tal que

$$C \geq |I(u_n)| = \left| \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx \right| = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx$$

isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx \leq \frac{C}{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right)}$$

isso verifica a existência das constantes $\gamma, C > 0$. Além disso,

$$\begin{aligned} |\psi'(u_n)v| &= \left| 2 \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \cdot \nabla v dx - p \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|) |u_n|^{p-2} u_n v dx \right| \\ &\leq 2 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n| |\nabla v| dx + p \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|) |u_n|^{p-1} |v| dx \\ &\leq 2 \|u_n\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)} \|v\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)} + p \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|)^{\frac{p-1}{p}} |u_n|^{p-1} \phi(|x'|)^{\frac{1}{p}} |v| dx \\ &\leq 2 \|u_n\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)} \|v\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)} + p \left(\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|) |u_n|^p dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|) |v|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq 2 \|u_n\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)} \|v\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)} + C \|u_n\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}^{p-1} \|v\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq C \|v\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}. \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\|\psi'(u_n)\|_{(\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N))^*} = \sup_{v \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}} \frac{|\psi'(u_n)v|}{\|v\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}} \leq C$$

donde podemos concluir que a sequência $(\psi'(u_n))$ é limitada em $(\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N))^*$. Por fim,

$$\limsup_{n \in \mathbb{N}} |\psi'(u_n)u_n| = \limsup_{n \in \mathbb{N}} |(2-p)|u_n|^2|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)} \geq (p-2)\gamma > 0.$$

Observe que, com as devidas adaptações: $H = \mathcal{D}_c^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, $f = I_c$ e $M_f = \mathcal{N}_c$, as mesmas conclusões podem ser obtidas. Isso verifica as hipóteses do Teorema 2.9 e desta forma, concluimos a prova do lema. $\square$

Agora, faremos investigações mais profundas acerca das sequências minimizantes adquiridas, a fim de obter convergência forte.

Proposição 2.11. *Seja (u_n) uma sequência minimizante dada pelo Lema 2.10. Existem constantes $R_0 > r_0 > 0$ tais que,*

$$\int_{\Omega_0} \phi(|x'|) |u_n|^p dx \geq \frac{\gamma}{2},$$

onde

$$\Omega_0 = \{x = (x', z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{N-k} : r_0 < r = |x'| < R_0\}.$$

Demonstração. Usando (2.10) podemos escrever

$$\gamma \leq \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|)|u_n|^p dx = \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega_0} \phi(|x'|)|u_n|^p dx + \int_{\Omega_0} \phi(|x'|)|u_n|^p dx.$$

Seja $\Omega_1 = \mathbb{R}^N \setminus \Omega_0$.

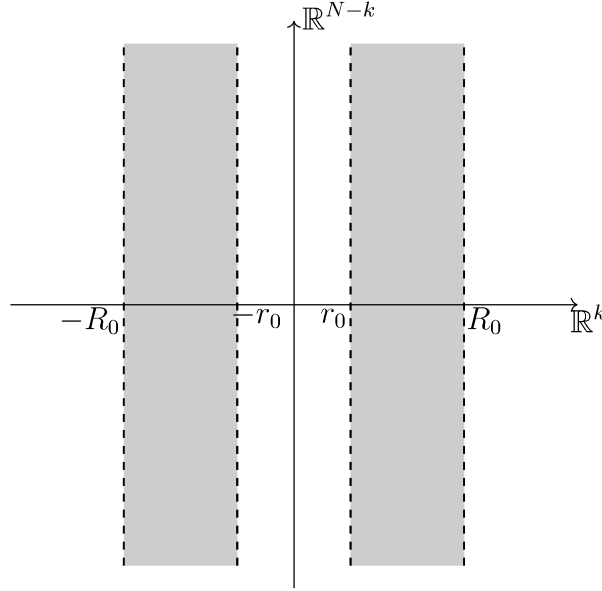


Figura 2.5: Representação do conjunto Ω_0 na região hachurada.

Escrevendo $p = (1 - \alpha)2_*(s) + \alpha 2_*(0)$ para $\alpha \in (0, 1)$, a saber $\alpha = \frac{p - 2_*(s)}{2_*(0) - 2_*(s)}$, temos o seguinte

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} \phi(|x'|)|u_n|^p dx &= \int_{\Omega_1} \phi(|x'|)^{1-\alpha} |u_n|^{(1-\alpha)2_*(s)} \phi(|x'|)^\alpha |u_n|^{\alpha 2_*(0)} dx \\ &\leq \left(\int_{\Omega_1} \phi(|x'|)|u_n|^{2_*(s)} dx \right)^{1-\alpha} \left(\int_{\Omega_1} \phi(|x'|)|u_n|^{2_*(0)} dx \right)^\alpha \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|)|u_n|^{2_*(s)} dx \right)^{1-\alpha} \|\phi\|_{L^\infty(\Omega_1)}^\alpha \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2_*(0)} dx \right)^\alpha \\ &\leq C \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx \right)^{\frac{2_*(s)(1-\alpha)}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx \right)^{\frac{2_*(0)\alpha}{2}} \|\phi\|_{L^\infty(\Omega_1)}^\alpha \\ &= C \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx \right)^{\frac{p}{2}} \|\phi\|_{L^\infty(\Omega_1)}^\alpha \\ &\leq C \|\phi\|_{L^\infty(\Omega_1)}^\alpha \end{aligned}$$

assim,

$$\int_{\Omega_1} \phi(|x'|)|u_n|^p dx \leq C \left[\max_{|x'| \leq r_0, |x'| \geq R_0} \phi(|x'|) \right]^\alpha.$$

Desde que,

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \phi(r) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} \phi(r) = 0$$

para $\epsilon = \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \frac{1}{C^\alpha} > 0$ existem $R_0 > r_0 > 0$ tais que, para $|x'| \leq r_0$ ou $|x'| \geq R_0$ tem-se $\phi(|x'|) \leq \epsilon$, e portanto

$$\int_{\Omega_1} \phi(|x'|) |u_n|^p dx \leq \frac{\gamma}{2}$$

donde segue que

$$\int_{\Omega_0} \phi(|x'|) |u_n|^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|) |u_n|^p dx - \int_{\Omega_1} \phi(|x'|) |u_n|^p dx \geq \gamma - \frac{\gamma}{2} = \frac{\gamma}{2}.$$

Isso conclui o resultado desejado. □

Agora, vamos definir os seguintes conjuntos

$$\mathcal{Q} := \{x = (x', z) \in \mathbb{R}^N = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{N-k} : r_0 < |x'| < R_0, 0 < |z| < 1\}, \quad \mathcal{Q}_j = \xi_j + \mathcal{Q}$$

onde $\xi_j = (\underbrace{0, \dots, 0}_{x'}, \underbrace{j, \dots, j}_z)$. Note que $\overline{\cup_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{Q}_j} = \Omega_0$ e que $\mathcal{Q}_j \cap \mathcal{Q}_k = \emptyset$ para $j \neq k$.

Além disso, definimos o número

$$s_k = \sup_{j \in \mathbb{Z}} \int_{\mathcal{Q}_j} \phi(|x'|) |u_k|^p dx$$

o qual está bem definido pois por (2.10) tem-se que

$$\int_{\mathcal{Q}_j} \phi(|x'|) |u_k|^p dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|) |u_k|^p dx \leq C$$

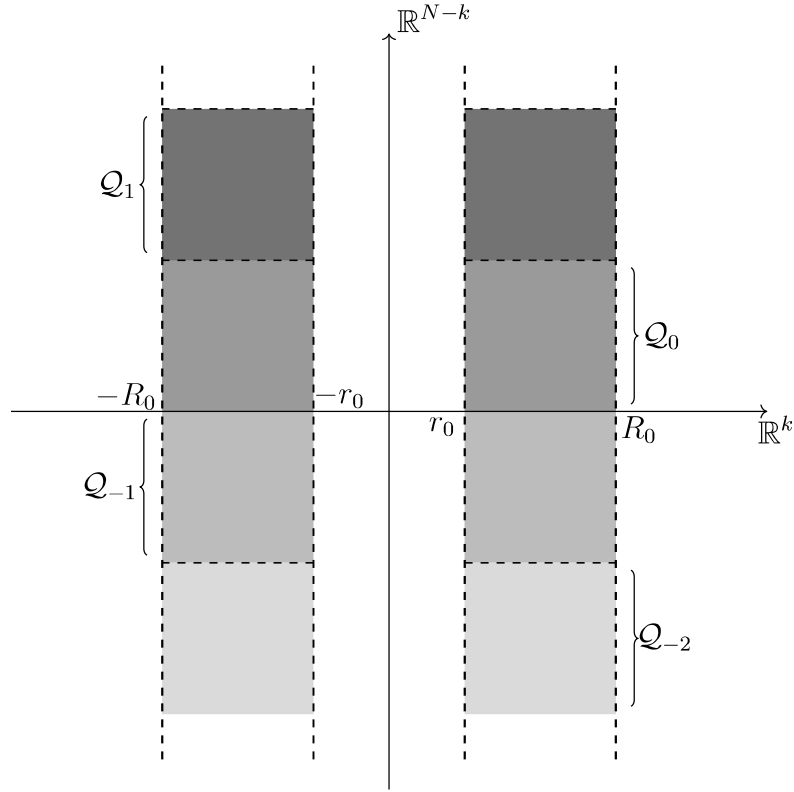


Figura 2.6: Representação dos conjuntos $\mathcal{Q}_j$ sobre o conjunto Ω_0 .

Com base nessas definições, vamos ao próximo resultado.

Lema 2.12. *A seguinte desigualdade ocorre*

$$\liminf_{k \in \mathbb{N}} s_k > 0.$$

Demonstração. De fato, por (ϕ_1) e (ϕ_3) existem constantes $0 < C_0 \leq C_1$ tais que

$$0 < C_0 \leq \phi(r) \leq C_1, \quad \forall r \in [r_0, R_0].$$

Defina, para cada $k \in \mathbb{N}$ e $j \in \mathbb{Z}$

$$v_{k,j} = u_k(x + \xi_j)$$

donde obtemos o seguinte

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathcal{Q}_j} \phi(|x'|) |u_k|^p \, dx \right)^{\frac{2_*(s)}{p}} &\leq C_1^{\frac{2_*(s)}{p}} \left(\int_{\mathcal{Q}_j} |u_k|^p \, dx \right)^{\frac{2_*(s)}{p}} \\ &= C_1^{\frac{2_*(s)}{p}} \left(\int_{\mathcal{Q}} |v_{k,j}|^p \, dx \right)^{\frac{2_*(s)}{p}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \left[\left(\int_{\mathcal{Q}} |\nabla v_{k,j}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{\mathcal{Q}} |v_{k,j}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{2_*(s)} \\
&\leq C \left[\left(\int_{\mathcal{Q}} |\nabla v_{k,j}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{\mathcal{Q}} |v_{k,j}|^{2_*(s)} \right)^{\frac{1}{2_*(s)}} \right]^{2_*(s)} \\
&= C \left[\left(\int_{\mathcal{Q}_j} |\nabla u_k|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{\mathcal{Q}_j} |u_k|^{2_*(s)} \, dx \right)^{\frac{1}{2_*(s)}} \right]^{2_*(s)} \\
&\leq C \left[\left(\int_{\mathcal{Q}_j} |\nabla u_k|^2 \, dx \right)^{\frac{2_*(s)}{2}} + \int_{\mathcal{Q}_j} |u_k|^{2_*(s)} \, dx \right] \\
&= C \left[\left(\int_{\mathcal{Q}_j} |\nabla u_k|^2 \right)^{\frac{2_*(s)}{2}-1} \left(\int_{\mathcal{Q}_j} |\nabla u_k|^2 \right) + \int_{\mathcal{Q}_j} |u_k|^{2_*(s)} \, dx \right] \\
&\leq C \left[\int_{\mathcal{Q}_j} |\nabla u_k|^2 \, dx + \int_{\mathcal{Q}_j} |u_k|^{2_*(s)} \, dx \right].
\end{aligned}$$

Como existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\int_{\mathcal{Q}_j} |u_k|^{2_*(s)} \, dx \leq C \int_{\mathcal{Q}_j} \phi(|x'|) |u_k|^{2_*(s)} \, dx$$

já que

$$\int_{\mathcal{Q}_j} |u_k|^{2_*(s)} (C_0^{-1} \phi(|x'|) - 1) \, dx \geq 0$$

então, obtemos

$$\left(\int_{\mathcal{Q}_j} \phi(|x'|) |u_k|^p \, dx \right)^{\frac{2_*(s)}{p}} \leq C \left[\int_{\mathcal{Q}_j} |\nabla u_k|^2 \, dx + \int_{\mathcal{Q}_j} \phi(|x'|) |u_k|^{2_*(s)} \, dx \right].$$

feito isso, observe agora que

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_0} \phi(|x'|) |u_k|^p \, dx &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{\mathcal{Q}_j} \phi(|x'|) |u_k|^p \, dx \\
&= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left[\int_{\mathcal{Q}_j} \phi(|x'|) |u_k|^p \, dx \right]^{1 - \frac{2_*(s)}{p}} \left[\int_{\mathcal{Q}_j} \phi(|x'|) |u_k|^p \, dx \right]^{\frac{2_*(s)}{p}} \\
&\leq s_k^{1 - \frac{2_*(s)}{p}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(\int_{\mathcal{Q}_j} \phi(|x'|) |u_k|^p \, dx \right)^{\frac{2_*(s)}{p}} \\
&\leq C s_k^{1 - \frac{2_*(s)}{p}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(\int_{\mathcal{Q}_j} |\nabla u_k|^2 \, dx + \int_{\mathcal{Q}_j} \phi(|x'|) |u_k|^{2_*(s)} \, dx \right) \\
&= C s_k^{1 - \frac{2_*(s)}{p}} \left(\int_{\Omega_0} |\nabla u_k|^2 \, dx + \int_{\Omega_0} \phi(|x'|) |u_k|^{2_*(s)} \, dx \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq C s_k^{1-\frac{2_*(s)}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_k|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|) |u_k|^{2_*(s)} dx \right) \\ &\leq C s_k^{1-\frac{2_*(s)}{p}}. \end{aligned}$$

Como pela Proposição 2.11

$$\int_{\Omega_0} \phi(|x'|) |u_k|^p dx \geq \frac{\gamma}{2}$$

então,

$$C s_k^{1-\frac{2_*(s)}{p}} \geq \frac{\gamma}{2}.$$

Desde que $p > 2_*(s)$, temos

$$s_k \geq \left(\frac{\gamma}{2C} \right)^{\frac{p}{p-2_*(s)}}, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

e portanto,

$$\liminf_{k \in \mathbb{N}} s_k > 0$$

como desejávamos verificar. □

Como consequência do Lema 2.12, existem $k_0 \in \mathbb{N}$ e $\gamma_1 > 0$ tal que

$$s_k > \gamma_1 \quad \forall k \geq k_0,$$

além disso, para cada $k \geq k_0$, podemos encontrar $j_k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\int_{\mathcal{Q}_{j_k}} \phi(|x'|) |u_k|^p > \gamma_1$$

já que, como definido, $s_k = \sup_{j \in \mathbb{R}^N} \int_{\mathcal{Q}_j} \phi(|x'|) |u_k|^p dx$. Reordenando os índices se necessário, podemos considerar a sequência $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

Definindo

$$v_k(x) := u_k(x + \xi_{j_k})$$

onde $\xi_{j_k} = (\underbrace{0, \dots, 0}_{x'}, \underbrace{j_k, \dots, j_k}_z)$, temos o seguinte resultado:

Lema 2.13. *A sequência $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é minimizante e $\|I'(v_k)\|_{(\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N))^*} \rightarrow 0$.*

Demonstração. Desde que $v_k(x) = u_k(x + \xi_{j_k}) \in \mathcal{N}$, fazendo a mudança de variáveis $y = x + \xi_{j_k}$, segue que

$$I(v_k) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_k|^2 dx = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_k(x + \xi_{j_k})|^2 dx$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_k(y)|^2 dy \\ &= I(u_k) \end{aligned}$$

e desde que (u_k) é minimizante, segue que (v_k) também é, isto é

$$I(v_k) \rightarrow \inf_{u \in \mathcal{N}} I(u).$$

Além disso, como

$$\|I'(u_k)\|_{(\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N))^*} \rightarrow 0,$$

dado $w \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ temos

$$|I'(v_k)w| \leq \|I'(v_k)\|_{(\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N))^*} \|w\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)} = \|I'(u_k)\|_{(\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N))^*} \|w\|$$

logo,

$$\|I'(v_k)\|_{(\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N))^*} \leq \|I'(u_k)\|_{(\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N))^*} \rightarrow 0.$$

□

Com esses resultados em mãos, estamos prontos para concluir a prova do Teorema 2.2, garantindo que o ínfimo do funcional I assim como I_c é atingido sobre $\mathcal{N}$ e $\mathcal{N}_c$, respectivamente, em uma solução para (2.2).

Demonstração do Teorema 2.2. Desde que $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ satisfaz a estimativa (2.10), então

$$0 < \gamma \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_k|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|) |v_k|^p dx \leq C$$

ou seja, (v_k) é limitada em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Assim, existe $v_0 \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$v_k \rightharpoonup v_0 \quad \text{em} \quad \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$$

daí, como $1 < p < 2^*$ temos as imersões

$$\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow H_{loc}^1(\mathbb{R}^N) \xrightarrow{comp.} L_{loc}^p(\mathbb{R}^N)$$

portanto, a menos de subsequência

$$\begin{aligned} v_k &\rightarrow v_0 \quad \text{em} \quad L_{loc}^p(\mathbb{R}^N) \\ v_k &\rightarrow v_0 \quad \text{q.s.} \\ |v_k| &\leq h, \quad h \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^N). \end{aligned}$$

Como

$$\gamma_1 \leq \int_Q \phi(|x'|)|v_k|^p dx$$

pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\gamma_1 \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_Q \phi(|x'|)|v_k|^p dx = \int_Q \phi(|x'|)|v_0|^p dx.$$

logo, $v_0 \not\equiv 0$. Desde que,

$$\|I'(v_k)\|_{(\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N))^*} \rightarrow 0$$

então v_0 satisfaz a equação no sentido fraco

$$-\Delta v_0 = \phi(|x'|)|v_0|^{p-2}v_0 \quad \text{em} \quad \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N). \quad (2.11)$$

De fato, para que v_0 satisfaça (2.11) no sentido fraco é necessário e suficiente que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla v_0 \nabla \psi dx - \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|)|v_0|^{p-2}v_0 \psi dx = 0, \quad \forall \psi \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N).$$

Inicialmente, fixe $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, vejamos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla v_0 \nabla \varphi dx - \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|)|v_0|^{p-2}v_0 \varphi dx = 0.$$

Desde que $v_k \rightharpoonup v_0$ em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, então

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla v_k \nabla \varphi dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v_0 \nabla \varphi dx$$

e pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue

$$\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|)|v_k|^{p-2}v_k \varphi dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|)|v_0|^{p-2}v_0 \varphi dx$$

com isso, podemos concluir que

$$I'(v_k)\varphi \rightarrow I'(v_0)\varphi$$

mas como

$$|I'(v_k)\varphi| \leq \|I'(v_k)\|_{(\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N))^*} \|\varphi\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)} \rightarrow 0$$

então

$$I'(v_0)\varphi = 0$$

donde podemos concluir que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla v_0 \nabla \varphi \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|) |v_0|^{p-2} v_0 \varphi \, dx = 0 \quad (2.12)$$

onde $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ foi arbitrária.

Agora, fixe $\psi \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, desde que $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ é denso em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ existe uma sequência de funções $(\varphi_k) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\varphi_k \rightarrow \psi \quad \text{em} \quad \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$$

vejamos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla v_0 \nabla \varphi_k \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|) |v_0|^{p-2} v_0 \varphi_k \, dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v_0 \nabla \psi \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|) |v_0|^{p-2} v_0 \psi \, dx.$$

A convergência

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla v_0 \nabla \varphi_k \, dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v_0 \nabla \psi \, dx$$

decorre de $\varphi_k \rightharpoonup \psi$ em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, já a convergência do segundo termo segue de que

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|) |v_0|^{p-2} v_0 \varphi_k \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|) |v_0|^{p-2} v_0 \psi \, dx \right| \\ & \leq \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|) |v_0|^{p-1} |\varphi_k - \psi| \, dx \\ & = \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|)^{\frac{p}{p-1}} |v_0|^{p-1} \phi(|x'|)^{\frac{1}{p}} |\varphi_k - \psi| \, dx \\ & \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|) |v_0|^p \, dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|) |\varphi_k - \psi|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq C \|\varphi_k - \psi\|_{L_{loc}^p(\mathbb{R}^N)} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

mas como por (2.12)

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla v_0 \nabla \varphi_k \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} \psi(|x'|) |v_0|^{p-2} v_0 \varphi_k \, dx = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

então

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla v_0 \nabla \psi \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|) |v_0|^{p-2} v_0 \psi \, dx = 0$$

verificando que v_0 é solução fraca para (2.11), ou seja, v_0 é ponto crítico do funcional

I . Além disso, como $v_0 \not\equiv 0$ isso implica que $v_0 \in \mathcal{N}$, consequentemente,

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) \|v_0\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}^2 = I(v_0)$$

$$\begin{aligned}
 &\geq \inf_{v \in \mathcal{N}} I(v) \\
 &= \lim_{k \in \mathbb{N}} I(v_k) \\
 &= \lim_{k \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) \|v_k\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}^2 \\
 &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) \|v_0\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}^2,
 \end{aligned}$$

ou seja, temos a convergência forte

$$v_k \rightarrow v_0 \quad \text{em} \quad \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$$

e, além disso

$$I(v_0) = \inf_{v \in \mathcal{N}} I(v).$$

Desde que v_0 é ponto crítico de I e mínimo do funcional sobre $\mathcal{N}$, segue que v_0 é solução ground state do problema (2.2). Portanto, $\mathcal{S}_s$ é atingida. $\square$

2.5 Comportamento Assintótico

Nessa seção, vamos estudar o comportamento assintótico quando $|x| \rightarrow +\infty$ das soluções do problema (2.2), dessa maneira, estudaremos também o comportamento das funções minimizantes para $\mathcal{S}_s$. Para tanto, vamos aplicar o seguinte resultado devido a Egnell.

Teorema 2.14. *Seja $u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ uma solução fraca não negativa da equação*

$$-\Delta u = f(x, u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N,$$

onde

$$0 \leq f(x, u) \leq b(x)u^\sigma$$

com

$$1 < \sigma < \frac{N+2}{N-2}, \quad b \in L^\tau(\mathbb{R}^N) \quad e \quad \tau = \frac{2N}{N+2-(N-2)\sigma}.$$

Então,

$$\limsup_{|x| \rightarrow +\infty} |x|^{N-2} u(x) < +\infty.$$

A demonstração desse resultado pode ser consultado em [11, Teorema 2, p.38]. Como consequência, temos o seguinte Teorema.

Teorema 2.15. *Assuma que ϕ satisfaz as hipóteses $(\phi_1) - (\phi_3)$ para $s = 1$ e $p \in [4, 6]$. Se $u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ é solução fraca não negativa da equação*

$$-\Delta u = \phi(|x'|)u^{p-1} \quad \text{em } \mathbb{R}^3, \quad (2.13)$$

então existe uma constante $C > 0$ tal que

$$u(x) \leq \frac{C}{|x|}$$

quando $|x| \rightarrow +\infty$.

Demonstração. Note que a equação (2.13) pode ser escrita na forma

$$-\Delta u = b(x)u^\sigma$$

onde $b(x) = \phi(|x'|)u^{p-1-\sigma}$ e $1 < \sigma < p - 1$ a ser determinado posteriormente. Desde que

$$2^* = \frac{2 \cdot 3}{3 - 2} = 6,$$

pela Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev, usando que $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ é denso em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ e que pelo Lema 1.3 tem-se $\phi \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$, podemos concluir que

$$\phi(|x'|)u^{p-1-\sigma} \in L^{\frac{6}{p-1-\sigma}}(\mathbb{R}^3).$$

Por outro lado, se $0 < \bar{s} < 2$ é tal que

$$(p - 1 - \sigma)\bar{s} = \frac{2(3 - \bar{s})}{3 - 2} = 2_*(\bar{s}), \quad (2.14)$$

então pelo Teorema 1.2, temos que

$$\frac{1}{|x'|^{\bar{s}}} u^{(p-1-\sigma)\bar{s}} \in L^1(\mathbb{R}^3).$$

Consequentemente,

$$\phi(|x'|)u^{(p-1-\sigma)} \in L^{\bar{s}}(\mathbb{R}^3)$$

já que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|)^{\bar{s}} u^{(p-1-\sigma)\bar{s}} dx \leq C \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|x'|^{\bar{s}}} u^{(p-1-\sigma)\bar{s}} dx < +\infty.$$

Agora, note que por (2.14)

$$\bar{s} = \frac{6}{p + 1 - \sigma} > 0$$

e para que $\bar{s} < 2$ devemos ter

$$\frac{6}{p+1-\sigma} < 2 \iff \sigma < p-2$$

ou seja, $\sigma \in (1, p-2)$, o que está bem posto, já que $p \geq 4$.

Visto isso, por interpolação,

$$b(x) = \phi(|x'|)u^{p-1-\sigma} \in L^t(\mathbb{R}^3), \quad t \in \left[\frac{6}{p+1-\sigma}, \frac{6}{p-1-\sigma} \right]. \quad (2.15)$$

Agora, com base na construção feita, vejamos que estamos sob as hipóteses para aplicar o Teorema 2.14. Para tanto, desde que $\sigma \in (1, p-2)$ e $p \in [4, 6]$ então

$$1 < \sigma < 5$$

e observe que

$$b(x) \in L^\tau(\mathbb{R}^3), \quad \tau = \frac{6}{5-\sigma}.$$

De fato, por (2.15) basta verificar que $\tau \in \left[\frac{6}{p+1-\sigma}, \frac{6}{p-1-\sigma} \right]$, para isso, devemos considerar os casos a seguir

$$\text{i. } \frac{6}{p+1-\sigma} \leq \tau;$$

$$\text{ii. } \tau \leq \frac{6}{p-1-\sigma}.$$

Para que *i.* ocorra,

$$\frac{6}{p+1-\sigma} \leq \frac{6}{5-\sigma} \iff p \geq 4.$$

Para que *ii.* ocorra,

$$\frac{6}{5-\sigma} \leq \frac{6}{p-1-\sigma} \iff p \leq 6.$$

Isso nos garante que podemos aplicar o Teorema 2.14. Portanto, existe $C > 0$ de tal modo que

$$u(x) \leq \frac{C}{|x|}$$

quando $|x| \rightarrow +\infty$.

Isso conclui a prova teorema. □

Capítulo 3

Propriedades dos minimizadores da melhor constante

Neste capítulo, vamos apresentar alguns resultados de regularidade, positividade e não existência de solução para o problema (2.2), isto é

$$-\Delta u = \phi(|x'|)|u|^{p-2}u \quad \text{em } \mathbb{R}^N,$$

onde $p \in [2_*(s), 2_*(0))$, $s \in (0, 2)$ e ϕ satisfaz $(\phi_1) - (\phi_3)$. Em particular, as propriedades obtidas se estendem para as funções minimizantes de $\mathcal{S}_s$.

Para tanto, iremos nos basear no artigo de M. Badiale e E. Serra [3], os quais investigaram resultados de regularidade para o problema

$$-\Delta u = \phi(|x'|)|u|^{2_*(s)-2}u \quad \text{em } \mathbb{R}^N, \quad (3.1)$$

onde $x = (x', z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{N-k}$, $N \geq 3$, $2 \leq k \leq N$ e

$$2_*(s) = \frac{2(N-s)}{N-2} \quad \text{para } s \in (0, 2).$$

Além disso, iremos assumir as seguintes hipóteses sobre a função ϕ :

(H₁) $\phi \in C_{loc}^{0,\eta}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ ou $\phi \in C_{loc}^{0,\eta}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_+)$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} \phi(r) = +\infty$, para algum $\eta \in (0, 1)$;

(H₂) $\phi(r)r^s \in L^\infty(\mathbb{R}_+^*)$.

Observe que se $u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ é solução para a equação

$$-\Delta u = \phi(|x'|)|u|^{p-2}u \quad \text{em } \mathbb{R}^N,$$

para $p \in [2_*(s), 2_*(0))$ com $s \in (0, 2)$ e ϕ satisfaz $(\phi_1) - (\phi_3)$, escrevendo $p = 2_*(\bar{s})$ em

que $\bar{s} \in (0, s]$, então u é solução da equação

$$-\Delta u = \phi(|x'|)|u|^{2^*(\bar{s})-2}u \quad \text{em } \mathbb{R}^N.$$

Além disso, segue das hipóteses sobre ϕ que (H_1) e (H_2) são satisfeitas.

Nesse sentido, os resultados de regularidade obtidos ao longo desse capítulo para as soluções do problema (3.1) poderão ser herdados para as soluções do problema (2.2). No que segue, poderemos estabelecer os seguintes resultados:

Lema 3.1. *Suponha que ϕ satisfaz $(\phi_1) - (\phi_3)$ e que $u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ seja uma solução fraca não negativa da equação*

$$-\Delta u = \phi(|x'|)|u|^{p-2}u \quad \text{em } \mathbb{R}^N,$$

onde $p \in [2_*(s), 2_*(0))$ para algum $s \in (0, 2)$. Então as seguintes afirmações são válidas:

(i) Se $sN < 4$, então $u \in C_{loc}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ para algum $\alpha \in (0, 1)$.

(ii) Se $sN < 2$, então $u \in C_{loc}^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ para algum $\alpha \in (0, 1)$.

Proposição 3.2. *Suponha que $u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ é uma solução fraca não negativa da equação*

$$-\Delta u = \phi(|x'|)|u|^{p-2}u \quad \text{em } \mathbb{R}^N,$$

onde $p \in [2_*(s), 2_*(0))$ para algum $s \in (0, 2)$ e ϕ satisfaz $(\phi_1) - (\phi_3)$. Se $sN < 4$, então $u > 0$ em $\mathbb{R}^N$.

Exemplo 3.1. Um exemplo típico de uma função satisfazendo as hipóteses (H_1) e (H_2) é dada por

$$\phi(r) = \frac{1}{r}, \quad \text{para } r \in (0, +\infty).$$

De fato, dado $X \subset\subset (0, +\infty)$, vamos supor $X = [a, b]$, note que sua derivada é dado por $\phi'(r) = -1/r^2$, a qual é limitada em $[a, b]$. Pelo teorema do Valor Médio, segue que para $x, y \in [a, b]$ quaisquer

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq C|x - y|^{1-\eta}|x - y|^\eta \leq C|x - y|^\eta$$

para $\eta \in (0, 1)$. Além disso, para $s = 1$ temos que $\phi(r)r^s \equiv 1 \in L^\infty(\mathbb{R}_+^*)$.

3.1 Regularidade de Hölder

No caso em que a solução é não-negativa temos o seguinte resultado de regularidade:

Lema 3.3. *Suponha que ϕ satisfaz (H_1) , (H_2) e que $u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ seja uma solução fraca não negativa da equação*

$$-\Delta u = \phi(|x'|)u^{2^*-1} \quad \text{em } \mathbb{R}^N.$$

Então as seguintes afirmações são válidas:

(i) *Se $sN < 4$, então $u \in C_{loc}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ para algum $\alpha \in (0, 1)$.*

(ii) *Se $sN < 2$, então $u \in C_{loc}^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ para algum $\alpha \in (0, 1)$.*

Demonstração. Preliminarmente, vejamos que $u \in L_{loc}^q(\mathbb{R}^N)$ qualquer que seja $q \geq 1$. Para isso, faremos uso do Lema A.6 devido a Brezis e Kato.

Inicialmente, escreva

$$\phi(|x'|)u^{2^*-1} = a(x)(1+u)$$

onde

$$a(x) := \phi(|x'|)\frac{u^{2^*-1}}{1+u}.$$

Note que, definida dessa forma, $a \geq 0$ e u satisfaz a equação

$$-\Delta u = a(x)(1+u).$$

Agora, vamos verificar que $a \in L^{\frac{N}{2}}(\mathbb{R}^N)$. De fato, escrevendo

$$a(x) = \phi(|x'|)|x'|^s \frac{u^{2^*-2}}{|x'|^s} \frac{u}{1+u},$$

como $\frac{u}{1+u}$ é limitada e por (H_2) a função $\phi(|x'|)|x'|^s$ também é limitada, é suficiente mostrar que

$$\frac{u^{2^*-2}}{|x'|^s} \in L^{\frac{N}{2}}(\mathbb{R}^N).$$

Desde que $sN < 4$, então $\frac{sN}{2} \in (0, 2)$, além disso, realizando as seguintes manipulações

$$(2^* - 2)\frac{N}{2} = \left(\frac{2(N-s)}{N-2} - 2 \right) \frac{N}{2} = \frac{2N-sN}{N-2} = \frac{2(N-\frac{sN}{2})}{N-2} = 2_*\left(\frac{sN}{2}\right),$$

pelo Teorema 1.2, obtemos que

$$\frac{u^{(2^*-2)\frac{N}{2}}}{|x'|^{\frac{sN}{2}}} \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

Isso garante que $a \in L^{\frac{N}{2}}(\mathbb{R}^N)$. Dessa forma, estamos sobre as hipóteses do Lema A.6,

donde podemos concluir que $u \in L_{loc}^q(\mathbb{R}^N)$, para todo $q \geq 1$.

Com esse resultado em mãos, podemos estudar a regularidade de u nos seguintes casos:

Caso 1: $sN < 4$.

Nesse caso, note que existe $p > \frac{N}{2}$ tal que

$$\phi(|x'|)u^{2^*-1} \in L_{loc}^\lambda(\mathbb{R}^N),$$

para todo $p > \lambda > \frac{N}{2}$.

De fato, como $sN < 4$ podemos escolher $p > \frac{N}{2}$ tal que $sp < 2$. Assim, sendo $k \geq 2$ então

$$\frac{1}{|x'|^{sp}} \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^N),$$

com isso, para $p > \lambda > \frac{N}{2}$

$$\frac{u^{2^*-1}}{|x'|^s} \in L_{loc}^\lambda(\mathbb{R}^N).$$

Com efeito, se $\Omega \subset \subset \mathbb{R}^N$ e $\left(\frac{p}{\lambda}\right)'$ é o Conjugado de Lebesgue de $\frac{p}{\lambda}$, pela Desigualdade de Hölder obtemos que

$$\int_{\Omega} \frac{u^{(2^*-1)\lambda}}{|x'|^{s\lambda}} dx \leq \left(\int_{\Omega} \frac{1}{|x'|^{sp}} dx \right)^{\frac{\lambda}{p}} \left(\int_{\Omega} u^{(2^*-1)\lambda \left(\frac{p}{\lambda}\right)'} dx \right)^{\frac{1}{\left(\frac{p}{\lambda}\right)'}} < +\infty.$$

Assim, como

$$\phi(|x'|)u^{2^*-1} = \phi(|x'|)|x'|^s \frac{u^{2^*-1}}{|x'|^s} \quad \text{q.s em } \mathbb{R}^N$$

então

$$\phi(|x'|)u^{2^*-1} \in L_{loc}^\lambda(\mathbb{R}^N)$$

para $p > \lambda > \frac{N}{2}$.

Pelo Teorema A.5, segue que $u \in W_{loc}^{2,\lambda}(\mathbb{R}^N)$, mas então, pelas Imersões contínuas de Sobolev (Teorema A.2) obtemos que $u \in C_{loc}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ para algum $\alpha \in (0, 1)$.

Caso 2: $sN < 2$.

Procederemos da mesma maneira como no caso anterior. Inicialmente, vejamos que existe $p > N$ de modo que

$$\frac{u^{2^*-1}}{|x'|^s} \in L_{loc}^\lambda(\mathbb{R}^N),$$

sempre que $p > \lambda > N$.

Sendo $sN < 2$ podemos escolher $p > N$ de modo que $sp < 2$. Além disso, como $k \geq 2$ então

$$\frac{1}{|x'|^{sp}} \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^N),$$

e daí, para $p > \lambda > N$, se $\Omega \subset \subset \mathbb{R}^N$ e $\left(\frac{p}{\lambda}\right)'$ denota o Conjugado de Lebesgue de $\frac{p}{\lambda}$, então

$$\int_{\Omega} \frac{u^{(2^*-1)\lambda}}{|x'|^{s\lambda}} dx \leq \left(\int_{\Omega} \frac{1}{|x'|^{sp}} dx \right)^{\frac{\lambda}{p}} \left(\int_{\Omega} u^{(2^*-1)\lambda \left(\frac{p}{\lambda}\right)'} dx \right)^{\frac{1}{\left(\frac{p}{\lambda}\right)'}} < +\infty.$$

Com isso, desde que

$$\phi(|x'|)u^{2^*-1} = \phi(|x'|)|x'|^s \frac{u^{2^*-1}}{|x'|^s} \quad \text{q.s em } \mathbb{R}^N$$

então

$$\phi(|x'|)u^{2^*-1} \in L_{loc}^{\lambda}(\mathbb{R}^N),$$

para todo $p > \lambda > N$.

Pelo Teorema A.5, segue que $u \in W_{loc}^{2,\lambda}(\mathbb{R}^N)$. Novamente, pelas imersões de Sobolev (Teorema A.2) obtemos que $u \in C_{loc}^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ para algum $\alpha \in (0, 1)$.

Isso conclui a prova do Lema. □

3.2 Sinal da solução

Com o Lema 3.3 em mãos, o próximo resultado irá tratar da positividade das soluções do problema (3.1). Precisamente, temos o seguinte resultado:

Teorema 3.4. *Suponha que $u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ é uma solução fraca não negativa da equação*

$$-\Delta u = \phi(|x'|)u^{2^*-1} \quad \text{em } \mathbb{R}^N.$$

Se $sN < 4$, então $u > 0$ em $\mathbb{R}^N$.

Demonstração. Faremos a demonstração desse resultado por etapas.

Afirmção 1: $\phi(|x'|)u^{2^*-1}$ é localmente Hölder contínua.

Como $sN < 4$, pelo Lema 3.3 obtivemos que u é localmente α -Hölder contínua em $\mathbb{R}^N$, e pelo Lema A.14 segue que u^{2^*-1} também será. Além disso, como ϕ é localmente η -Hölder contínua, pelo Lema A.12 segue que ϕu^{2^*-1} é localmente γ -Hölder contínua, onde $\gamma = \min\{\eta, \alpha\}$.

Afirmção 2: $A := \{x \in \mathbb{R}^N \mid x' \neq 0\}$ é conexo.

Para tanto, vamos verificar que A é conexo por caminhos. Sejam $x, y \in A$ com

$$x = (x', z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{N-k} \quad \text{e} \quad y = (y', w) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{N-k}$$

onde $N \geq 3$ e $N \geq k \geq 2$. Desde que $x, y \in A$, existem $i, j \in \{1, \dots, k\}$ tais que $x_i \neq 0$

e $y_j \neq 0$.

Quando $i = j$, considere os seguintes caminhos

$$\begin{aligned}\gamma_1 : [0, 1] &\longrightarrow A \\ t &\mapsto ((1-t)x_1 + t, \dots, x_i, \dots, (1-t)x_n + t, (1-t)z + tw) \\ \gamma_2 : [0, 1] &\longrightarrow A \\ t &\mapsto (1, \dots, (1-t)x_i + ty_i, \dots, 1, w) \\ \gamma_3 : [0, 1] &\longrightarrow A \\ t &\mapsto ((1-t) + ty_1, \dots, y_i, \dots, (1-t) + ty_n, w)\end{aligned}$$

então $\gamma : [0, 1] \longrightarrow A$ dada por

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(3t), & t \in [0, 1/3] \\ \gamma_2(3t - 1), & t \in [1/3, 2/3] \\ \gamma_3(3t - 2), & t \in [2/3, 1] \end{cases}$$

é um caminho ligando x a y .

Agora, quando $i \neq j$, supondo sem perda de generalidade que $i < j$, vamos considerar os caminhos

$$\begin{aligned}\lambda_1 : [0, 1] &\longrightarrow A \\ t &\mapsto ((1-t)x_1 + ty_1, \dots, x_i, \dots, (1-t)x_j + ty_j, \dots, (1-t)x_n + ty_n, (1-t)z + tw) \\ \lambda_2 : [0, 1] &\longrightarrow A \\ t &\mapsto (y_1, \dots, (1-t)x_i + ty_i, \dots, y_j, \dots, y_n, w)\end{aligned}$$

de modo que, $\lambda : [0, 1] \longrightarrow A$ dada por

$$\lambda(t) = \begin{cases} \lambda_1(2t), & t \in [0, 1/2] \\ \lambda_2(2t - 1), & t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

é um caminho ligando x a y . Portanto, A é conexo por caminhos, donde segue a conexidade.

Afirmção 3: u é solução clássica em $A := \{x \in \mathbb{R}^N \mid x' \neq 0\}$.

Desde que $sN < 4$, como feito no Lema 3.3, temos que $u \in L_{loc}^q(\mathbb{R}^N)$ para todo $q \geq 1$.

Disso, segue que

$$-\Delta u = \phi(|x'|)u^{2^*-1} \in L_{loc}^q(A)$$

para todo $q \geq 1$. Pelo Teorema A.5, segue que $u \in W_{loc}^{2,q}(A)$ para $q > 1$. Pelas

Imersões contínuas de Sobolev (Teorema A.2) obtemos que $u \in C_{loc}^{1,\alpha}(A)$. Agora, para $B := B(x; r) \subset\subset A$ com $x \in A$ arbitrário, seja ψ solução clássica do problema

$$\begin{cases} -\Delta\psi &= \phi(|x'|)u^{2^*-1} \text{ em } B, \\ \psi &= u \text{ sobre } \partial B \end{cases}$$

assegurada pelo Teorema A.4. Definindo $w = u - \psi$ em B , então no sentido fraco

$$-\Delta w = 0 \text{ em } B.$$

Com isso, segue pelo Lema de Weyl A.7, que $w \in C^\infty(B)$, donde podemos concluir que $u \in C^2(A)$.

Afirmção 4: $u > 0$ em A .

Suponha que exista $x_0 \in A$ tal que $u(x_0) = 0$. Haja vista que $u \geq 0$, então

$$\inf_{x \in A} u(x) = u(x_0).$$

Desde que $A \subset \mathbb{R}^N$ é aberto, conexo e

$$\Delta u \leq 0 \text{ em } A$$

pelo Princípio do Máximo Forte Clássico (Teorema A.8), segue que $u \equiv 0$ em A . Agora, como

$$\mathbb{R}^N \setminus A = \{x \in \mathbb{R}^N : x' = 0\} = \{(0, z)\} \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{N-k}$$

então $\mathbb{R}^N \setminus A$ possui medida nula em $\mathbb{R}^N$, e daí, teríamos que u é solução trivial, o que não ocorre. Portanto, de fato, $u > 0$ em A .

Afirmção 5: $u > 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus A$.

Seja $x_0 \in \mathbb{R}^N \setminus A$, a função definida por

$$\tilde{\phi}(r) = \begin{cases} \min\{1, \phi(r)\}, & r \in (0, +\infty) \\ \lim_{r \rightarrow 0^+} \min\{1, \phi(r)\}, & r = 0 \end{cases}$$

é localmente Hölder contínua pelo Lema A.15. Mais uma vez, pelos Lemas A.14 e A.12 tem-se que $\tilde{\phi}(|x'|)u^{2^*-1}$ é localmente Hölder contínua, e pelo Teorema A.4 existe v solução clássica do problema

$$\begin{cases} -\Delta v &= \tilde{\phi}(|x'|)u^{2^*-1} \text{ em } B, \\ v &= 0 \text{ sobre } \partial B \end{cases} \quad (3.2)$$

onde $B = B(y_0; 1)$ para $y_0 \in \mathbb{R}^N \setminus A$ arbitrário. Como no sentido fraco

$$-\Delta u = \phi(|x'|)u^{2^*-1} \geq \tilde{\phi}(|x'|)u^{2^*-1} = -\Delta v, \quad \text{em } B$$

e $u \geq v$ sobre ∂B , segue que

$$u \geq v \quad \text{em } B.$$

De fato, definindo $w = v - u$ note que

$$\begin{cases} \Delta w \geq 0 & \text{em } B, \\ w \leq 0 & \text{sobre } \partial B \end{cases}$$

portanto, pelo Princípio do Máximo para Soluções Fracas (Teorema A.9)

$$v - u = w \leq \sup_B w \leq \sup_{\partial B} w^+ \leq 0.$$

Por outro lado, já que v é solução clássica de (3.2), $\Delta v \leq 0$ e v é não constante, pois do contrário v seria identicamente nula em B , pelo Princípio do Máximo Forte Clássico, $v > 0$ em B , em particular, $v(y_0) > 0$. Mas então, como $u \geq v$ em $B = B(y_0; 1)$, então

$$u(y_0) \geq v(y_0) > 0.$$

Desde que $y_0 \in \mathbb{R}^N \setminus A$ foi arbitrário, obtemos que $u > 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus A$.

Das afirmações 4 e 5 segue que $u > 0$ em $\mathbb{R}^N$. □

3.3 Resultado de Não existência

Nesta seção iremos obter resultados de não existência de solução para o problema (3.1). Para isso, iremos primeiramente obter uma identidade do tipo Pohozaev.

Proposição 3.5 (Pohozaev). *Seja $p > 1$ e $a : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que*

$$a(x)|x'|^s \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \quad \text{e} \quad a \in C^1(A) \tag{3.3}$$

onde $A = \{x \in \mathbb{R}^N \mid x' \neq 0\}$. Se $u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ é uma solução fraca da equação

$$-\Delta u = a(x)|u|^{p-2}u \quad \text{em } \mathbb{R}^N, \tag{3.4}$$

tal que $u \in C_{loc}^{1,\theta}(\mathbb{R}^N) \cap L^p(\mathbb{R}^N) \cap C^2(A)$ para algum $\theta \in (0, 1)$. Além disso, suponha que

$$a|u|^p \in L^1(\mathbb{R}^N) \quad \text{e} \quad \nabla a(x) \cdot x|u|^p \in L^1(\mathbb{R}^N). \tag{3.5}$$

Então, a seguinte identidade é válida

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left[\left(\frac{N-2}{2} - \frac{N}{p} \right) a(x) - \frac{1}{p} \nabla a(x) \cdot x \right] |u|^p dx = 0.$$

Demonstração. Considere $R > 0$, $\epsilon > 0$ arbitrários, a bola $B_R = B(0; R)$ e os conjuntos

$$\Omega_1 = \Omega_1(R, \epsilon) = \{x \in B_R \mid x_1 > \epsilon\} \quad \text{e} \quad \Omega_2 = \Omega_2(R, \epsilon) = \{x \in B_R \mid x_1 < -\epsilon\}.$$

Como $\Omega_1 \cup \Omega_2 \subset A$ segue das hipóteses que u é solução clássica de (3.4) em $\Omega_1 \cup \Omega_2$. Vamos definir $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$.

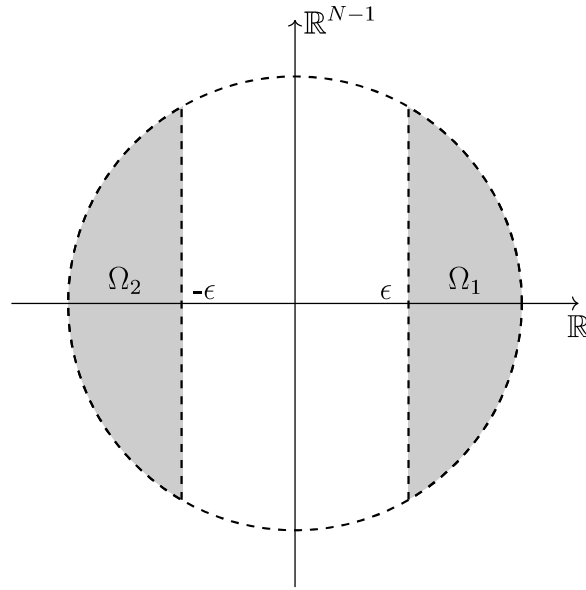


Figura 3.1: Representação dos conjuntos Ω_1 e Ω_2 .

Pelo Lema A.16, temos as seguintes identidades:

$$x \cdot \nabla u \Delta u = \operatorname{div} \left((x \cdot \nabla u) \nabla u - \frac{1}{2} |\nabla u|^2 x \right) + \frac{N-2}{2} |\nabla u|^2, \quad (3.6)$$

$$x \cdot \nabla u a(x) |u|^{p-2} u = \operatorname{div} \left(\frac{1}{p} a(x) |u|^p x \right) - \frac{N}{p} a(x) |u|^p - \frac{1}{p} |u|^p \nabla a(x) \cdot x. \quad (3.7)$$

Assim, desde que por (3.4)

$$-\Delta u = a(x) |u|^{p-2} u,$$

multiplicando ambos os lados da equação por $x \cdot \nabla u$, obtemos

$$-x \cdot \nabla u \Delta u = x \cdot \nabla u a(x) |u|^{p-2} u,$$

por (3.6) e (3.7), tem-se

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \left((x \cdot \nabla u) \nabla u - \frac{1}{2} |\nabla u|^2 x \right) - \frac{N-2}{2} |\nabla u|^2 &= \operatorname{div} \left(\frac{1}{p} a(x) |u|^p x \right) - \frac{N}{p} a(x) |u|^p \\ &\quad - \frac{1}{p} |u|^p \nabla a(x) \cdot x \end{aligned}$$

integrando ambos os lados com respeito a Ω

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \operatorname{div} \left((x \cdot \nabla u) \nabla u - \frac{1}{2} |\nabla u|^2 x \right) dx - \int_{\Omega} \frac{N-2}{2} |\nabla u|^2 dx \\ &= \int_{\Omega} \operatorname{div} \left(\frac{1}{p} a(x) |u|^p x \right) dx - \frac{N}{p} \int_{\Omega} a(x) |u|^p dx - \frac{1}{p} \int_{\Omega} |u|^p \nabla a(x) \cdot x dx \end{aligned}$$

aplicando o Teorema da Divergência,

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\Omega} \left[-(x \cdot \nabla u) \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{1}{2} |\nabla u|^2 x \cdot \eta - \frac{1}{p} a(x) |u|^p x \cdot \eta \right] d\sigma \\ &= \frac{N-2}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{N}{p} \int_{\Omega} a(x) |u|^p dx - \frac{1}{p} \int_{\Omega} |u|^p \nabla a(x) \cdot x dx \end{aligned}$$

onde η é o vetor normal exterior a $\partial\Omega$, $d\sigma$ é elemento de $\partial\Omega$ e $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ é a derivada exterior. Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue aplicado para cada sequência $\epsilon_n \rightarrow 0^+$, conclui-se que

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{N-2}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{N}{p} \int_{\Omega} a(x) |u|^p dx - \frac{1}{p} \int_{\Omega} |u|^p \nabla a(x) \cdot x dx \\ &= \frac{N-2}{2} \int_{B_R} |\nabla u|^2 dx - \frac{N}{p} \int_{B_R} a(x) |u|^p dx - \frac{1}{p} \int_{B_R} |u|^p \nabla a(x) \cdot x dx \end{aligned}$$

Agora, como

$$\partial\Omega = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$$

onde $S_1 = \{x \in \partial B_R : x_1 > \epsilon\}$, $S_2 = \{x \in \partial B_R : x_1 < -\epsilon\}$, $S_3 = \{x \in B_R : x_1 = \epsilon\}$ e $S_4 = \{x \in B_R : x_1 = -\epsilon\}$, então

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{S_1 \cup S_2} \left[-(x \cdot \nabla u) \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{1}{2} |\nabla u|^2 x \cdot \eta - \frac{1}{p} a(x) |u|^p x \cdot \eta \right] d\sigma \\ &= \int_{\partial B_R} \left[-(x \cdot \nabla u) \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{1}{2} |\nabla u|^2 x \cdot \eta - \frac{1}{p} a(x) |u|^p x \cdot \eta \right] d\sigma. \end{aligned}$$

Vamos agora estudar esse limite sobre $S_3 \cup S_4$. Como em S_3 , $\eta = (-1, 0, \dots, 0)$ e em

S_4 , $\eta = (1, 0, \dots, 0)$, podemos escrever

$$\begin{aligned} & \int_{S_3 \cup S_4} \left[-(x \cdot \nabla u) \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{1}{2} |\nabla u|^2 x \cdot \eta - \frac{1}{p} a(x) |u|^p x \cdot \eta \right] d\sigma \\ &= \int_{S_3} \left[(x \cdot \nabla u) \frac{\partial u}{\partial x_1} - \frac{1}{2} |\nabla u|^2 x_1 + \frac{1}{p} a(x) |u|^p x_1 \right] d\sigma + \\ & \int_{S_4} \left[-(x \cdot \nabla u) \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{1}{2} |\nabla u|^2 x_1 - \frac{1}{p} a(x) |u|^p x_1 \right] d\sigma \end{aligned}$$

portanto,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{S_3 \cup S_4} \left[-(x \cdot \nabla u) \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{1}{2} |\nabla u|^2 x \cdot \eta - \frac{1}{p} a(x) |u|^p x \cdot \eta \right] d\sigma = 0$$

assim,

$$\begin{aligned} & \frac{N-2}{2} \int_{B_R} |\nabla u|^2 dx - \frac{N}{p} \int_{B_R} a(x) |u|^p dx - \frac{1}{p} \int_{B_R} |u|^p \nabla a(x) \cdot x dx \\ &= \int_{\partial B_R} \left[-(x \cdot \nabla u) \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{1}{2} |\nabla u|^2 x \cdot \eta - \frac{1}{p} a(x) |u|^p x \cdot \eta \right] d\sigma. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Note que é possível obter uma sequência de raios R_n de tal modo que $R_n \rightarrow +\infty$ e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\partial B_{R_n}} \left[-(x \cdot \nabla u) \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{1}{2} |\nabla u|^2 x \cdot \eta - \frac{1}{p} a(x) |u|^p x \cdot \eta \right] d\sigma = 0.$$

De fato, desde que

$$\int_{\partial B_{R_n}} \left[-(x \cdot \nabla u) \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{1}{2} |\nabla u|^2 x \cdot \eta - \frac{1}{p} a(x) |u|^p x \cdot \eta \right] d\sigma \leq R_n \int_{\partial B_{R_n}} \left[\frac{3}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{p} |a(x)| |u|^p \right] d\sigma$$

se não existisse uma sequência (R_n) tal que $R_n \rightarrow +\infty$ e

$$R_n \int_{\partial B_{R_n}} \left[\frac{3}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{p} |a(x)| |u|^p \right] d\sigma \rightarrow 0$$

então, teríamos

$$\liminf_{R \rightarrow +\infty} R \int_{\partial B_R} \left[\frac{3}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{p} |a(x)| |u|^p \right] d\sigma = C > 0$$

disso, para $\frac{C}{2} > 0$ existe $A > 0$ tal que para valores de $R > A$ então

$$\left| C - \inf_{t \geq R} \left\{ t \int_{\partial B_t} \left[\frac{3}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{p} |a(x)| |u|^p \right] d\sigma \right\} \right| < \frac{C}{2}$$

ou seja, para $R > A$

$$\int_{\partial B_r} \left[\frac{3}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{p} |a(x)| |u|^p \right] d\sigma > \frac{C}{2R}. \quad (3.9)$$

Como $u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ e $a(x)|u|^p \in L^1(\mathbb{R}^N)$, então

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{3}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{p} |a(x)| |u|^p \right] dx < +\infty$$

em particular, devemos ter que

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0; A+1)} \left[\frac{3}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{p} |a(x)| |u|^p \right] d\sigma < +\infty$$

mas note que, por (3.9)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0; A+1)} \left[\frac{3}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{p} |a(x)| |u|^p \right] d\sigma &= \int_{A+1}^{+\infty} \int_{\partial B_R} \left[\frac{3}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{p} |a(x)| |u|^p \right] d\sigma dR \\ &> \int_{A+1}^{+\infty} \frac{C}{2R} dR \end{aligned}$$

o que é uma contradição, já que

$$\int_{A+1}^{+\infty} \frac{C}{2R} dR = +\infty.$$

Logo, tal sequência (R_n) deve existir, desse modo, passando o limite em (3.8), obtemos que

$$\frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - \frac{N}{p} \int_{\mathbb{R}^N} a(x) |u|^p dx - \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p \nabla a(x) \cdot x dx = 0.$$

Desde que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} a |u|^p dx,$$

tem-se

$$\left(\frac{N-2}{2} - \frac{N}{p} \right) \int_{\mathbb{R}^N} a |u|^p dx - \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p \nabla a(x) \cdot x dx = 0,$$

donde segue o resultado desejado. $\square$

Como consequência da Proposição acima, temos o seguinte resultado de não existência para a equação (3.1):

Corolário 3.6. *Suponha que $sN < 2$, ϕ satisfaz (H_1) , (H_2) e, além disso*

$$\phi' \in C(\mathbb{R}_+^*) \quad e \quad \phi'(r)r^{s+1} \in L^{+\infty}(\mathbb{R}_+^*). \quad (3.10)$$

Se a função definida por $\psi(r) := \phi(r)r^s$ for monótona e não constante, então o problema (3.1) não possui solução fraca não negativa.

Demonstração. Vamos aplicar a Proposição 3.5 para $p = 2_*$ e $a(x) = \phi(|x'|)$. Note que

$$\nabla a(x) \cdot x = \phi'(|x'|)|x'|$$

já que

$$\nabla a(x) \cdot x = \sum_{i=1}^N \frac{\partial a(x)}{\partial x_i} x_i = \sum_{i=1}^k \phi'(|x'|) \frac{x_i}{|x'|} x_i = \phi'(|x'|) \frac{1}{|x'|} \sum_{i=1}^k x_i^2 = \phi(|x'|)|x'|.$$

Agora, por (H_2) , (3.10) e pelo Teorema 1.2 seguem as hipóteses 3.3 e 3.5, ou seja

$$a(x)|x'|^s = \phi(|x'|)|x'|^s \in L^\infty(\mathbb{R}^N), \quad a|u|^p = \phi(|x'|)|u|^{2_*} \in L^1(\mathbb{R})$$

e

$$\nabla a(x) \cdot x|u|^p = \phi(|x'|)|x'| |u|^{2_*} \in L^1(\mathbb{R}^N)$$

assim, se $u \geq 0$ é solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta u &= \phi(|x'|)u^{2_*(s)-1} \quad \text{em } \mathbb{R}^N, \\ u &\in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

pelo Lema 3.3 então $u \in C_{loc}^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ e pelo Teorema 3.4 obtemos que $u > 0$.

Desde que

$$\frac{N-2}{2} - \frac{N}{2_*} = \frac{N-2}{2} - \frac{N(N-2)}{2(N-s)} = -\frac{s}{2_*}$$

então

$$\begin{aligned} \left(\frac{N-2}{2} - \frac{N}{p} \right) a(x) - \frac{1}{p} \nabla a(x) \cdot x &= -\frac{s}{2_*} \phi(|x'|) - \frac{1}{2_*} \phi'(|x'|)|x'| \\ &= -\frac{1}{2_*} [s\phi(|x'|) + \phi'(|x'|)|x'|] \\ &= -\frac{1}{2_* |x'|^{s-1}} [s\phi(|x'|)|x'|^{s-1} + \phi'(|x'|)|x'|^s] \\ &= -\frac{1}{2_* |x'|^{s-1}} \psi'(|x'|). \end{aligned}$$

Portanto, pela Proposição 3.5, devemos ter

$$\int_{\mathbb{R}^N} -\frac{1}{|x'|^{s-1}} \psi'(|x'|) u^{2^*} \, dx = 0.$$

Como $u > 0$ e ψ é monótona e não constante, segue que $\psi' \not\equiv 0$ não muda de sinal. Isso leva a uma contradição, portanto, o problema (3.1) não possui solução. $\square$

Capítulo 4

Uma equação elíptica com crescimento crítico

Neste capítulo vamos considerar a seguinte equação elíptica semilinear no caso de *massa zero* e envolvendo crescimento crítico

$$-\Delta u = \phi(|x'|)|u|^{p-2}u + \lambda|u|^{2^*-2}u \quad \text{em } \mathbb{R}^N, \quad (\mathcal{P}_\lambda)$$

onde $N \geq 3$, λ é um parâmetro real e

$$\frac{2(N-s)}{N-2} = 2_*(s) \leq p < 2_*(0) = 2^*, \quad \text{para algum } s \in (0, 2).$$

Vamos assumir que a função peso $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ satisfaz as seguinte hipóteses:

$$(\phi_1) \quad \phi \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+);$$

$$(\phi_2) \quad \phi(r)r^2 \in L^\infty(\mathbb{R}_+);$$

$$(\phi_3) \quad \phi(r) = 0 \text{ se, e somente se, } r = 0.$$

Exemplo 4.1. Note que a função definida por

$$\phi(r) := \frac{r^{2\alpha}}{(1+r^2)^{1+\alpha}}, \quad \text{para } \alpha > 0$$

facilmente satisfaz as hipóteses $(\phi_1) - (\phi_3)$.

Aqui, por uma solução fraca de $(\mathcal{P}_\lambda)$, entendemos uma função $u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ que satisfaz

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla \varphi \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|)|u|^{p-2}u \varphi \, dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*-2}u \varphi \, dx = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N). \quad (4.1)$$

Note que o funcional energia $J : \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$ associado a equação $(\mathcal{P}_\lambda)$ é dado por

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|) |u|^p dx - \frac{\lambda}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} dx,$$

e sua boa definição para cada $p \in [2_*(s), 2_*(0))$ fixado advém do Teorema 1.4. Além disso, usando argumentos padrão (veja por exemplo [19, 10]) podemos verificar que J é Fréchet diferenciável com

$$J'(u)\varphi = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla \varphi dx - \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|) |u|^{p-2} u \varphi dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*-2} u \varphi dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N).$$

Portanto, pontos críticos de J são precisamente as soluções fracas do problema $(\mathcal{P}_\lambda)$.

Usando argumentos que podem ser encontrados nos artigos [5, 7], provaremos o seguinte resultado de existência de solução para a equação $(\mathcal{P}_\lambda)$ no caso em que o parâmetro $\lambda \geq 0$.

Teorema 4.1 (Existência). *Suponha $(\phi_1) - (\phi_3)$ sejam satisfeitas, $2_*(s) < p < 2_*(0)$, com $N \geq 3$. Então, para todo $\lambda \geq 0$, o problema $(\mathcal{P}_\lambda)$ admite uma solução fraca não trivial.*

No caso em que $\lambda < 0$ vamos obter um resultado de não existência, também conhecido na literatura como Teorema do tipo Liouville. Para isto, vamos assumir que $N \geq 4$, $k > 2$ e $x = (x', z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{N-k}$. Considerando as constantes definidas por

$$C_{p,N} := \frac{(p-2)^{\frac{p-2}{2^*-p}} (2^* - p)}{(2^* - 2)^{\frac{2^*-2}{2^*-p}}}$$

e

$$C_0 := \|\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \|\phi(|x'|) |x'|^2\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \left(\frac{2}{k-2} \right)^2,$$

temos o seguinte resultado de não existência:

Teorema 4.2 (Liouville). *Suponha que $(\phi_1) - (\phi_3)$ sejam válidas, $N \geq 4$ e $k \geq 3$ é um inteiro. Então, para todo*

$$\lambda < \bar{\lambda} = -(C_{p,N} C_0)^{\frac{2^*-p}{p-2}} < 0, \quad (4.2)$$

o problema $(\mathcal{P}_\lambda)$ admite apenas a solução trivial.

Observação 3. Como veremos, um dos principais pontos da demonstração do Teo-

rema 4.2 passa pelo uso da desigualdade do tipo Hardy para obter que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|)|u|^2 dx \leq \|\phi(|x'|)|x'|^2\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} C_k \|u\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}^2,$$

a qual decorre do Teorema 1.1. Para tanto, é necessário que $k > 2$ e $N > 3$. Dessa forma, a demonstração que será apresentada não é válida no caso em que $N = 3$.

4.1 Resultado de Existência

Nesta seção, iremos provar nosso resultado de existência para o problema $(\mathcal{P}_\lambda)$. Especificamente, provaremos o Teorema 4.1 utilizando argumentos desenvolvidos por Brezis e Nirenberg [5, 7]. Para isso, inicialmente, estabeleceremos alguns resultados auxiliares.

Lema 4.3. *Se $\lambda > 0$, o funcional J satisfaz a Geometria do Passo da Montanha, ou seja,*

(i) *Existem constantes $r, \rho > 0$ tais que $J(u) \geq r$ para $\|u\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)} = \rho$;*

(ii) *Existe $e \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ com $\|e\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)} > \rho$ tal que $J(e) < 1$.*

Demonstração. Pelo Teorema 1.4 e a Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev temos que

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|)|u|^p dx - \frac{\lambda}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} dx \\ &\geq \frac{1}{2} \|u\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}^2 - \frac{C}{p} \|u\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}^p - \frac{\lambda C}{2^*} \|u\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}^{2^*} \\ &= \|u\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{C}{p} \|u\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}^{p-2} - \frac{\lambda C}{2^*} \|u\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}^{2^*-2} \right). \end{aligned}$$

Agora, por continuidade, existe $\rho > 0$ de modo que para $\|u\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)} = \rho$ então

$$\frac{C}{p} \|u\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}^{p-2} + \frac{\lambda C}{2^*} \|u\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}^{2^*-2} = \frac{1}{4}$$

e portanto,

$$J(u) \geq \frac{1}{4} \rho^2 = r > 0, \quad \text{se } \|u\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)} = \rho.$$

Por fim, fixado $\varphi \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ com $\varphi \not\equiv 0$, tem-se que

$$J(t\varphi) = \frac{t^2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi|^2 dx - \frac{t^p}{p} \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|)|\varphi|^p dx - \frac{\lambda t^{2^*}}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^{2^*} dx.$$

Logo, $J(t\varphi) \rightarrow -\infty$ quando $t \rightarrow +\infty$. Dessa maneira, tomando $e = t\varphi$ com t suficientemente grande temos que $J(e) < 0$ e isso verifica que o funcional J satisfaz a Geometria do Passo da Montanha. $\square$

Pelo Lema 4.3, o nível minimax

$$c_M = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} J(\gamma(t)),$$

onde $\Gamma := \{\gamma \in C([0,1], \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)) : \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = e\}$, é positivo.

Desta forma, podemos aplicar o Teorema do Passo da Montanha sem a condição de Palais-Smale (veja [22]), para obter uma sequência $(u_n) \subset \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, chamada de sequência (PS), tal que

$$J(u_n) \rightarrow c_M \text{ e } \|J'(u_n)\|_{(\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N))^*} \rightarrow 0, \quad (4.3)$$

onde $(\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N))^*$ denota o espaço dual de $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$.

Lema 4.4. *Toda sequência (PS) para o funcional J é limitada.*

Demonstração. De fato, suponha que $(u_n) \subset \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ com

$$J(u_n) \rightarrow c \text{ e } \|J'(u_n)\|_{(\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N))^*} \rightarrow 0$$

então

$$\begin{aligned} J(u_n) - \frac{1}{p} J'(u_n)u_n &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) \|u_n\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}^2 - \lambda \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\right) \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2^*} dx \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) \|u_n\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}^2. \end{aligned}$$

Dessa maneira,

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) \|u_n\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}^2 \leq |J(u_n)| + \frac{1}{p} \|J'(u_n)\|_{(\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N))^*} \|u_n\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)} \quad (4.4)$$

$$\leq C_1 + C_2 \|u_n\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}, \quad (4.5)$$

onde C_1, C_2 são constantes independentes de n . Assim, se não tivéssemos que a sequência (u_n) é limitada, dividindo os membros da desigualdade por $\|u\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}$ e passando o limite, chegaríamos em uma contradição. Portanto, (u_n) deve ser limitada, e isso conclui o resultado. $\square$

Finalmente, vamos obter uma estimativa do nível minimax c_M .

Lema 4.5. *Para todo $\lambda > 0$, a seguinte estimativa é válida*

$$\max_{t \geq 0} \left\{ \frac{t^2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi|^2 dx - \lambda \frac{t^{2^*}}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^{2^*} dx \right\} \leq \frac{S^{N/2}}{N} \frac{1}{\lambda^{\frac{N-2}{2}}},$$

onde φ é uma função que atinge a melhor constante da Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev, ou seja,

$$S = \inf_{u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} dx \right)^{2/2^*}}.$$

Demonstração. Note que a constante S pode ser caracterizada por

$$S = \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx : u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}, \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} dx = 1 \right\}.$$

Suponha que a função φ atinge esta melhor constante, ou seja,

$$S = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi|^2 dx \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^{2^*} dx = 1.$$

Note que o máximo da aplicação

$$f(t) = \frac{t^2}{2} S - \lambda \frac{t^{2^*}}{2^*}, \quad t \geq 0$$

é atingido no ponto $t_0 = \left(\frac{S}{\lambda} \right)^{\frac{N-2}{4}}$, com

$$f(t_0) = \left(\frac{S}{\lambda} \right)^{\frac{N-2}{2}} \frac{S}{2} - \frac{\lambda}{2^*} \left(\frac{S}{\lambda} \right)^{\frac{N}{2}} = \frac{S^{N/2}}{N} \frac{1}{\lambda^{\frac{N-2}{2}}}.$$

Assim,

$$\max_{t \geq 0} \left\{ \frac{t^2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi|^2 dx - \lambda \frac{t^{2^*}}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^{2^*} dx \right\} = \max_{t \geq 0} f(t) = \frac{S^{N/2}}{N} \frac{1}{\lambda^{\frac{N-2}{2}}},$$

e isto conclui a prova do lema. □

A existência de funções extremais para a Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev foram estudadas por Giorgio Talenti, maiores informações podem ser consultadas em [21].

Agora, estamos prontos para concluir a prova do Teorema 4.1.

4. Uma equação elíptica com crescimento crítico

Prova do Teorema 4.1. Desde que (u_n) é limitada, existe $u_0 \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \rightharpoonup u_0$. Como $1 < p < 2^*$, temos as imersões

$$\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow H_{loc}^1(\mathbb{R}^N) \xrightarrow{comp.} L_{loc}^p(\mathbb{R}^N).$$

Portanto, a menos de subsequência

$$\begin{aligned} u_n &\rightarrow u_0 \quad \text{em } L_{loc}^p(\mathbb{R}^N) \\ u_n &\rightarrow u_0 \quad \text{q.s} \\ |u_n| &\leq h, \quad h \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^N). \end{aligned}$$

Para cada $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla \varphi \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|) |u_n|^{p-2} u_n \varphi \, dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2^*-2} u_n \varphi \, dx = o_n(1).$$

Usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_0 \nabla \varphi \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|) |u_0|^{p-2} u_0 \varphi \, dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u_0|^{2^*-2} u_0 \varphi \, dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N),$$

Por densidade, temos que u_0 é solução fraca de $(\mathcal{P}_\lambda)$.

Afirmamos que $u_0 \not\equiv 0$. De fato, por (4.3) temos que

$$J(u_n) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 \, dx - \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|) |u_n|^p \, dx - \frac{\lambda}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2^*} \, dx \rightarrow c_M > 0$$

e a menos de subsequência, existem os limites de cada uma das parcelas. Desta forma, temos dois casos a considerar:

Caso 1: Suponha que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|) |u_n|^p \, dx = 0.$$

Neste caso, como $\|J'(u_n)\|_{(\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N))^*} \rightarrow 0$ e (u_n) é limitada, obtemos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 \, dx = L = \lambda \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2^*} \, dx$$

e

$$c_M = \frac{1}{N} L. \tag{4.6}$$

Por outro lado, de (A.2) temos

$$S \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2^*} dx \right)^{2/2^*} \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx.$$

Tomando o limite concluímos que

$$S \left(\frac{L}{\lambda} \right)^{\frac{N-2}{N}} \leq L \Rightarrow S^{\frac{N}{2}} \frac{1}{\lambda^{\frac{N-2}{2}}} \leq L.$$

Isto combinado com (4.6) implica a seguinte estimativa inferior para o nível minimax c_M :

$$\frac{S^{\frac{N}{2}}}{N} \frac{1}{\lambda^{\frac{N-2}{2}}} \leq \frac{L}{N} = c_M. \quad (4.7)$$

Pelo Lema 4.5, podemos estimar o nível minimax c_M como segue

$$c_M \leq \max_{t \geq 0} J(t\varphi) < \max_{t \geq 0} \left\{ \frac{t^2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi|^2 dx - \lambda \frac{t^{2^*}}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^{2^*} dx \right\} \leq \frac{S^{\frac{N}{2}}}{N} \frac{1}{\lambda^{\frac{N-2}{2}}},$$

o que contradiz a estimativa (4.7). Portanto, o **Caso 1** não ocorre e devemos ter

Caso 2:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|) |u_n|^p dx \geq c_0 > 0.$$

Neste caso, procedendo como na prova do Teorema 2.2 obtemos que $u_0 \neq 0$ e isto conclui a prova do Teorema 4.1. $\square$

4.2 Resultado de Não Existência

Nesta seção, apresentaremos a prova do Teorema 4.2, que será obtida por meio de um argumento de contradição.

Inicialmente, observamos que se $u_0 \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ é uma solução fraca de $(\mathcal{P}_\lambda)$ devemos ter

$$\|u_0\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}^2 = A(u_0) + \lambda B(u_0),$$

onde $A, B : \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$ são os operadores definidos por

$$A(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|) |u|^p dx \quad \text{e} \quad B(u) = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} dx.$$

Para cada $u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ e $t \geq 0$ considere a função definida por

$$G(t, u) = t^{p-2} A(u) + \lambda t^{2^*-2} B(u).$$

Lema 4.6. Fixados $\lambda < 0$ e $u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$, a função definida por

$$h(t) := G(t, u), \quad t \geq 0,$$

atinge um único máximo no ponto

$$t_0 = \left(\frac{p-2}{2^*-2} \frac{A(u)}{(-\lambda B(u))} \right)^{\frac{1}{2^*-p}} > 0.$$

Além disso,

$$h(t_0) = C_{p,N} \frac{(A(u))^{\frac{2^*-2}{2^*-p}}}{(-\lambda B(u))^{\frac{p-2}{2^*-p}}}, \quad (4.8)$$

onde $C_{p,N} = \frac{(p-2)^{\frac{p-2}{2^*-p}}(2^*-p)}{(2^*-2)^{\frac{2^*-2}{2^*-p}}} > 0$.

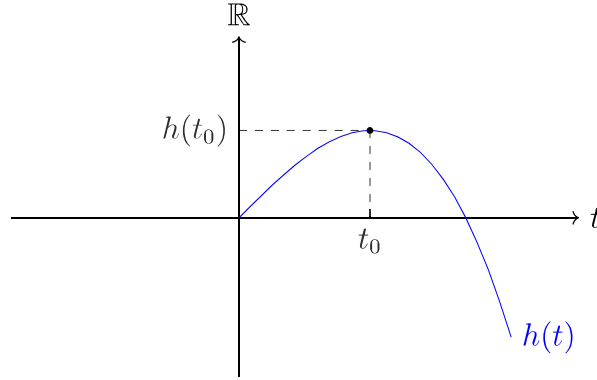


Figura 4.1: Máximo de $h(t)$ para $2 < p < 2^*$.

Demonstração. Primeiramente observemos que

$$h(0) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = -\infty.$$

Note que

$$h'(t) = (p-2)t^{p-3}A(u) + (2^*-2)\lambda t^{2^*-3}B(u).$$

Assim $h'(t) = 0$ se, e somente se, $t = t_0$ com

$$\begin{aligned} h(t_0) &= t_0^{p-2}A(u) + \lambda t_0^{2^*-2}B(u) \\ &= t_0^{2^*-2}(-\lambda B(u)) \frac{(2^*-p)}{(p-2)} \\ &= \left(\frac{p-2}{2^*-2} \frac{A(u)}{(-\lambda B(u))} \right)^{\frac{2^*-2}{2^*-p}} (-\lambda B(u)) \frac{(2^*-p)}{(p-2)} \end{aligned}$$

$$= \frac{(p-2)^{\frac{p-2}{2^*-p}}(2^*-p)}{(2^*-2)^{\frac{2^*-2}{2^*-p}}} \frac{(A(u))^{\frac{2^*-2}{2^*-p}}}{(-\lambda B(u))^{\frac{p-2}{2^*-p}}}$$

No que segue vamos obter uma estimativa a priori. $\square$

Lema 4.7. *Assuma que $N \geq 4$ e $2 < p < 2^*$. Então para cada $u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ a seguinte estimativa é válida*

$$\left[\frac{(A(u))^{(2^*-2)}}{(B(u))^{p-2}} \right]^{1/(2^*-p)} \leq C_0 \|u\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}^2, \quad (4.9)$$

onde $C_0 > 0$ é uma constante depende apenas de p, N e k .

Demonstração. Desde que $2 < p < 2^*$, existe $\alpha \in (0, 1)$ tal que $p = (1 - \alpha)2 + \alpha 2^*$.

Assim,

$$A(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|) |u|^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} (\phi(|x'|) |u|^2)^{1-\alpha} (\phi(|x'|) |u|^{2^*})^\alpha dx$$

usando a desigualdade de Hölder obtemos

$$A(u) \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|) |u|^2 dx \right)^{1-\alpha} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|) |u|^{2^*} dx \right)^\alpha.$$

Desde que $\phi \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|) |u|^{2^*} dx \right)^\alpha \leq \|\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}^\alpha B(u)^\alpha.$$

Como $2 = 2_*(2)$, usando (ϕ_2) e o Teorema 1.1 temos que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x'|) |u|^2 dx \right)^{1-\alpha} \leq \|\phi(|x'|) |x'|^2\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}^{1-\alpha} C_k^{1-\alpha} \|u\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}^{2(1-\alpha)}$$

com $C_k = \left(\frac{2}{k-2} \right)^2$. Combinado as desigualdades acima obtemos

$$A(u) \leq \|\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}^\alpha \|\phi(|x'|) |x'|^2\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}^{1-\alpha} C_k^{1-\alpha} B(u)^\alpha \|u\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}^{2(1-\alpha)}.$$

Consequentemente,

$$\frac{(A(u))^{1/(1-\alpha)}}{(B(u))^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} \leq \|\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \|\phi(|x'|) |x'|^2\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} C_k \|u\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}^2.$$

Observando que

$$\alpha = \frac{p-2}{2^*-2}, \quad 1-\alpha = \frac{2^*-p}{2^*-2}, \quad \frac{1}{1-\alpha} = \frac{2^*-2}{2^*-p} \quad \text{e} \quad \frac{\alpha}{1-\alpha} = \frac{p-2}{2^*-p}$$

para $C_0 = \|\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \|\phi(|x'|)|x'|^2\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} C_k$, obtemos

$$\frac{(A(u))^{(2^*-2)/(2^*-p)}}{(B(u))^{\frac{p-2}{2^*-p}}} \leq C_0 \|u\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}^2,$$

ou seja,

$$\left[\frac{(A(u))^{(2^*-2)}}{(B(u))^{p-2}} \right]^{1/(2^*-p)} \leq C_0 \|u\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}^2$$

e isto completa a prova do Lema. $\square$

Prova do Teorema 4.2: Arguindo por contradição, suponha que $(\mathcal{P}_\lambda)$ tenha uma solução não trivial $u_0 \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$. Pela definição de solução fraca (4.1) obtemos que

$$\|u_0\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}^2 = A(u_0) + \lambda B(u_0) = G(1, u_0). \quad (4.10)$$

Por outro lado, por (4.8) e pela estimativa (4.9), temos

$$G(t_0, u_0) \leq \frac{C_{p,N} C_0}{(-\lambda)^{\frac{p-2}{2^*-p}}} \|u_0\|_{\mathcal{D}^{1,2}}^2.$$

Pela hipótese (4.2) temos que

$$\frac{C_{p,N} C_0}{(-\lambda)^{\frac{p-2}{2^*-p}}} < 1.$$

Consequentemente,

$$G(t_0, u_0) < \|u_0\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}^2.$$

Portanto, obtemos

$$G(t_0, u_0) < \|u_0\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}^2 = G(1, u_0),$$

contradizendo o fato que t_0 é o único ponto de máximo de $G(\cdot, u_0)$ e isto completa a prova. $\square$

Apêndice A

Resultados auxiliares

Finalizamos esta dissertação com este apêndice, no qual apresentamos uma série de definições e resultados utilizados ao longo deste trabalho.

A.1 Funções Hölder Contínuas

Definição A.1. Para cada número real $\alpha \in (0, 1]$, diremos que $f : \Omega \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ é Hölder contínua com expoente α , ou simplesmente, α -Hölder contínua, quando

$$\sup_{\substack{x, y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} < +\infty$$

ou, equivalentemente, quando existir $C > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha,$$

para quaisquer $x, y \in \Omega$. Usaremos a notação $C^\alpha(\Omega)$ para denotar o espaço das funções Hölder contínua com expoente α .

Definição A.2. Diremos que $f : \Omega \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ é localmente Hölder contínua com expoente α , ou simplesmente, localmente α -Hölder contínua, quando for α -Hölder contínua em cada subconjunto $X \subset\subset \Omega$.

Definição A.3. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto, definimos o espaço de Hölder $C_{loc}^{k, \alpha}(\Omega)$ como o conjunto das funções para as quais existe as derivadas parciais até ordem k e essas são localmente α -Hölder contínuas.

A.2 Espaços de Sobolev

Definição A.4. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto, $1 \leq p \leq +\infty$ e $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. O Espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ consiste no conjunto das funções $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $u \in L^p(\Omega)$, existem as derivadas parciais no sentido fraco de u até ordem k , e essas também pertencem a $L^p(\Omega)$. Mais formalmente,

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ para todo multi-índice } \alpha \text{ com } |\alpha| \leq k\}.$$

Observação 4. Quando $p = 2$, costumamos escrever simplesmente $H^k(\Omega)$ para denotar $W^{k,2}(\mathbb{R}^N)$.

Definição A.5. Se $1 \leq p < N$, o expoente crítico de Sobolev de p é definido por

$$p^* := \frac{Np}{N-p}.$$

Note que, $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$ e portanto $p^* > p$.

Teorema A.1 (Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev). *Suponha que $1 \leq p < N$. Existe uma constante C , que depende apenas de p e N , tal que*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}, \quad (\text{A.1})$$

para toda função $u \in C_0^1(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração. Veja [12, Capítulo 5]. □

Vamos denotar por S_p a melhor constante da desigualdade (A.1), ou seja,

$$S_p := \inf_{u \in C_0^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}} \frac{\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p}{\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)}^p}. \quad (\text{A.2})$$

Para simplificar a notação, denotaremos S_2 por S quando $p = 2$.

Teorema A.2 (Imersões contínuas de Sobolev). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e limitado cuja fronteira é C^1 . Assuma que $u \in W^{k,p}(\Omega)$.*

i. Se $k < \frac{N}{p}$, então $u \in L^q(U)$, onde

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{N}$$

com a estimativa,

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}$$

onde a constante C depende apenas de k, p, N e U .

ii. Se $k > \frac{N}{p}$, então $u \in C^{k-\lfloor \frac{N}{p} \rfloor-1, \gamma}(\overline{U})$, onde

$$\gamma = \begin{cases} \left\lfloor \frac{N}{p} \right\rfloor + 1 - \frac{N}{p}, & \text{se } \frac{N}{p} \text{ não é inteiro} \\ \text{qualquer número positivo } < 1, & \text{se } \frac{N}{p} \text{ é inteiro.} \end{cases}$$

com a estimativa

$$\|u\|_{C^{k-\lfloor \frac{N}{p} \rfloor-1, \gamma}(\overline{U})} \leq C \|u\|_{W^{k,p}(U)}$$

onde a constante C depende apenas de k, p, N, γ e U .

Demonstração. Veja [12, Capítulo 5]. □

Teorema A.3 (Rellich-Kondrachov). *Seja $U \subset \mathbb{R}^N$ é aberto, limitado e que ∂U é C^1 . Suponha que $1 \leq p < N$, então*

$$W^{1,p}(U) \xrightarrow{\text{comp.}} L^q(U)$$

para cada $1 \leq q < p^*$.

Demonstração. Veja [12, Capítulo 5]. □

Definição A.6. Para $1 < q < N$, o espaço $\mathcal{D}^{1,q}(\mathbb{R}^N)$ é definido como sendo o complemento de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ com respeito a norma

$$\|u\| := \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

A.3 Resultados de Regularidade

Teorema A.4. *Seja Ω um domínio limitado com fronteira regular. Se f for limitada e localmente Hölder contínua então o problema*

$$\begin{cases} -\Delta u &= f \text{ em } \Omega, \\ u &= \varphi \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

possui solução para toda função contínua $\varphi : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Demonstração. Veja [15, Teorema 4.3]. □

Teorema A.5. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e limitado. Se $u \in W^{1,1}(\Omega)$ é solução fraca do problema*

$$\Delta u = f$$

e $f \in L^p(\Omega)$, $1 < p < +\infty$. Então, $u \in W^{2,p}(\Omega')$ sempre que $\Omega' \subset\subset \Omega$.

Demonstração. Veja [16, Teorema 9.2.2]. □

Lema A.6 (Brezis-Kato). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $g : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Carathéodory tal que*

$$|g(x, u)| \leq a(x)(1 + |u|) \quad \text{q.s em } \Omega$$

para algum $0 \leq a \in L^{\frac{N}{2}}_{loc}(\Omega)$. Se $u \in H^1_{loc}(\Omega)$ é solução fraca do problema

$$-\Delta u = g(x, u) \quad \text{em } \Omega.$$

Então $u \in L^q_{loc}(\Omega)$ para todo $1 \leq q < \infty$.

Demonstração. Veja [20, Lema B.3] ou [8]. □

Lema A.7. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ solução fraca da equação*

$$-\Delta u = 0 \quad \text{em } \Omega.$$

Então, $u \in C^\infty(\Omega)$.

Demonstração. Veja [18, Lema 5.13] □

A.4 Princípios de Máximo

Princípios de máximo nos permitem compreender o comportamento de soluções de equações diferenciais sem conhecê-la explicitamente. Nesse sentido, nesse trabalho usaremos os seguintes princípios de máximo:

Teorema A.8 (Princípio do Máximo Forte Clássico). *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto, conexo e $u \in C^2(\Omega)$.*

1. *Se $\Delta u \geq 0$ e $\sup_{\Omega} u = u(x_0)$, então u é constante.*

2. *Se $\Delta u \leq 0$ e $\inf_{\Omega} u = u(x_0)$, então u é constante.*

Demonstração. Veja [15, Teorema 2.2]. □

Teorema A.9 (Princípio do Máximo para soluções fracas). *Seja $u \in W^{1,2}(\Omega)$ satisfazendo $\Delta u \geq 0$ em Ω . Então*

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+.$$

Reciprocamente, se $\Delta u \leq 0$ em Ω , então

$$\inf_{\Omega} u \geq \inf_{\partial\Omega} u^-.$$

Demonstração. Veja [15, Teorema 8.1]. □

A.5 Resultados Clássicos

Teorema A.10 (Multiplicadores de Lagrange). *Sejam X um espaço de Banach, $J, F \in C^1(X; \mathbb{R})$ e $\mathcal{M} = \{u \in X : F(u) = 0\}$ com $F'(u) \neq 0 \quad \forall u \in \mathcal{M}$. Se J é limitado inferiormente sobre $\mathcal{M}$ e existe $u_0 \in \mathcal{M}$ tal que*

$$J(u_0) = \inf_{u \in \mathcal{M}} J(u),$$

então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$J'(u_0) = \lambda F'(u_0).$$

O número λ é chamado Multiplicador de Lagrange.

Demonstração. Veja [17, Proposição 14.3] □

Teorema A.11 (Passo da Montanha). *Seja X um espaço de Hilbert, $f \in C^2(X, \mathbb{R})$, $e \in X$ e $r > 0$ tal que $\|e\| > r$ e*

$$b := \inf_{\|u\|=r} f(u) > f(0) \geq f(e).$$

Então, para cada $\epsilon > 0$, existe $u \in X$ tal que

$$(a) \quad c - 2\epsilon \leq f(u) \leq c + 2\epsilon$$

$$(b) \quad \|f'(u)\| \leq 2\epsilon$$

onde

$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} f(\gamma(t))$$

com

$$\Gamma := \{\gamma \in C([0,1]; X) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}.$$

Demonstração. Veja [22, Teorema 1.15] □

A.6 Lemas Técnicos

Nesta seção, apresentamos e demonstramos alguns resultados técnicos utilizados ao longo deste trabalho.

Lema A.12. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Se $u \in C_{loc}^{0,\alpha}(\Omega)$ e $v \in C_{loc}^{0,\beta}(\Omega)$, então $uv \in C_{loc}^{0,\gamma}(\Omega)$ onde $\gamma = \min\{\alpha, \beta\}$.*

Demonstração. Seja $X \subset\subset \Omega$. Pela continuidade de u e v , existem constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$|u(x)| \leq C_1, \quad \forall x \in X \quad \text{e} \quad |v(x)| \leq C_2, \quad \forall x \in X$$

assim, segue que

$$\begin{aligned} |u(x)v(x) - u(y)v(y)| &= |u(x)v(x) - u(x)v(y) + u(x)v(y) - u(y)v(y)| \\ &= |u(x)(v(x) - v(y)) + v(y)(u(x) - u(y))| \\ &\leq |u(x)||v(x) - v(y)| + |v(y)||u(x) - u(y)| \\ &\leq C|x - y|^\beta + C|x - y|^\alpha \\ &\leq C|x - y|^\gamma \end{aligned}$$

onde $\gamma = \min\{\alpha, \beta\}$. □

Lema A.13. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}$, $u \in C_{loc}^{0,\alpha}(\Omega)$ e $v \in C_{loc}^{0,\beta}(\tilde{\Omega})$, então $v \circ u \in C_{loc}^{0,\alpha\beta}(\Omega)$.*

Demonstração. De fato, seja $X \subset\subset \Omega$. Então, dados $x, y \in X$

$$\begin{aligned} |v \circ u(x) - v \circ u(y)| &= |v(u(x)) - v(u(y))| \\ &\leq C|u(x) - u(y)|^\beta \\ &\leq C|x - y|^{\alpha\beta} \end{aligned}$$

o que conclui a prova do lema. □

Lema A.14. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $u \in C_{loc}^{0,\alpha}(\Omega)$ e $p \geq 1$, então $u^p \in C_{loc}^{0,\alpha}(\Omega)$.*

Demonstração. De fato, inicialmente note que a aplicação dada por $f(x) = x^p$ é localmente Hölder contínua em $[0, +\infty)$, para $p \geq 1$, já que dado $X \subset\subset [0, +\infty)$, existe $A > 0$ tal que

$$|x| \leq A, \quad \forall x \in X.$$

Com isso, para $x, y \in X$ arbitrários, supondo sem perda de generalidade que $x < y$, então

$$|f(x) - f(y)| = |x^p - y^p| = \left| \int_x^y pt^{p-1} dt \right| \leq pA^{p-1}|x - y|.$$

em particular, f é Lipschitz contínua. Para concluir o resultado, basta utilizar o Lema A.13. $\square$

Lema A.15. *Suponha que $\phi : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é localmente η -Hölder contínua ou que $\phi : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é localmente η -Hölder contínua e $\lim_{r \rightarrow 0^+} \phi(r) = +\infty$, então a aplicação definida por*

$$\tilde{\phi}(r) := \begin{cases} \min\{1, \phi(r)\}, & r \in (0, +\infty) \\ \lim_{r \rightarrow 0^+} \min\{1, \phi(r)\}, & r = 0 \end{cases}$$

é localmente η -Hölder contínua em $[0, +\infty)$.

Demonstração. Inicialmente, vejamos que $\tilde{\phi}$ é localmente η -Hölder em $(0, +\infty)$. Sejam $x, y \in (0, +\infty)$. Vamos analisar os seguintes casos:

Caso 1: $\tilde{\phi}(x) = \phi(x)$ e $\tilde{\phi}(y) = \phi(y)$.

Nesse caso, resultado segue facilmente pois

$$|\tilde{\phi}(x) - \tilde{\phi}(y)| = |\phi(x) - \phi(y)| \leq C|x - y|^\eta.$$

Caso 2: $\tilde{\phi}(x) = 1$ e $\tilde{\phi}(y) = 1$.

Nesse caso, o resultado também segue facilmente. De fato,

$$|\tilde{\phi}(x) - \tilde{\phi}(y)| = 0 \leq C|x - y|^\eta.$$

Caso 3: $\tilde{\phi}(x) = 1$ e $\tilde{\phi}(y) = \phi(y)$.

Se $\tilde{\phi}(x) = 1$, então $1 = \min\{1, \phi(x)\} \leq \phi(x)$, do mesmo modo se $\tilde{\phi}(y) = \phi(y)$, então $\phi(y) = \min\{1, \phi(y)\} \leq 1$, e daí

$$|\tilde{\phi}(x) - \tilde{\phi}(y)| = |1 - \phi(y)| = 1 - \phi(y) \leq \phi(x) - \phi(y) = |\phi(x) - \phi(y)| \leq C|x - y|^\eta,$$

Assim, $\tilde{\phi}$ é localmente η -Hölder em $(0, +\infty)$.

Se ϕ é localmente Hölder em $[0, +\infty)$, fazendo uso dos mesmos argumentos podemos concluir que $\tilde{\phi}$ também será. No caso em que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \phi(x) = +\infty$ então $\tilde{\phi}(x) = 1$, para $x \in [0, \epsilon)$ em que $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. Dessa forma, dado $y \in (0, +\infty)$, para $\theta \in [0, \epsilon)$ com $\theta < y$ então

$$\begin{aligned} |\tilde{\phi}(0) - \tilde{\phi}(y)| &= |1 - \tilde{\phi}(y)| \\ &= |\tilde{\phi}(\theta) - \tilde{\phi}(y)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq C|\theta - y|^\eta \\ &\leq C|0 - y|^\eta \end{aligned}$$

logo, $\tilde{\phi}$ é localmente η -Hölder contínua em $[0, +\infty)$. $\square$

Lema A.16. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto e $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função que possui derivadas de segunda ordem. As seguintes identidades são válidas:*

$$i) \quad x \cdot \nabla u \Delta u = \operatorname{div} \left((x \cdot \nabla u) \nabla u - \frac{1}{2} |\nabla u|^2 x \right) + \frac{N-2}{2} |\nabla u|^2;$$

$$ii) \quad x \cdot \nabla u a(x) |u|^{p-2} u = \operatorname{div} \left(\frac{1}{p} a(x) |u|^p x \right) - \frac{N}{p} a(x) |u|^p - \frac{1}{p} |u|^p \nabla a(x) \cdot x.$$

Demonstração. Para provar *i)* observe que

$$\operatorname{div} \left((x \cdot \nabla u) \nabla u - \frac{1}{2} |\nabla u|^2 x \right) = \operatorname{div}((x \cdot \nabla u) \nabla u) - \operatorname{div} \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 x \right).$$

Agora note que

$$\begin{aligned} \operatorname{div}((x \cdot \nabla u(x)) \nabla u(x)) &= \operatorname{div} \left[\left(\sum_{j=1}^N \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} x_j \right) \nabla u \right] \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\sum_{j=1}^N \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} x_j \right) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right] \\ &= \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^N \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} x_j \right) \right] \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^N \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} x_j \right) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2} \\ &= \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} x_j \right) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right)^2 + (\nabla u(x) \cdot x) \Delta u(x) \\ &= \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} x_j + |\nabla u(x)|^2 + (\nabla u(x) \cdot x) \Delta u(x) \end{aligned}$$

portanto,

$$\operatorname{div}((x \cdot \nabla u(x)) \nabla u(x)) = \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} x_j + |\nabla u(x)|^2 + (\nabla u(x) \cdot x) \Delta u(x). \quad (\text{A.3})$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left(\frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 x \right) &= \operatorname{div} \left[\frac{1}{2} x \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \right)^2 \right] \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{1}{2} x_i \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \right)^2 + \sum_{i=1}^N x_i \left[\sum_{j=1}^N \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right] \\
&= \frac{1}{2} N |\nabla u(x)|^2 + \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} x_i,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\operatorname{div} \left(\frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 x \right) = \frac{1}{2} N |\nabla u(x)|^2 + \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} x_i. \quad (\text{A.4})$$

Usando (A.3) e (A.4) obtemos o resultado desejado.

Para provar *ii*), observe que

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \left(\frac{1}{p} a(x) |u(x)|^p x \right) &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{p} a(x) |u(x)|^p x_i \right) \\
&= \frac{1}{p} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial a(x)}{\partial x_i} |u(x)|^p x_i + a(x) p |u(x)|^{p-2} u(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} x_i + a(x) |u(x)|^p \right) \\
&= \frac{1}{p} |u(x)|^p \nabla a(x) \cdot x + a(x) |u(x)|^{p-2} u(x) \nabla u(x) \cdot x + \frac{N}{p} a(x) |u(x)|^p.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\operatorname{div} \left(\frac{1}{p} a(x) |u(x)|^p x \right) = \frac{1}{p} |u(x)|^p \nabla a(x) \cdot x + a(x) |u(x)|^{p-2} u(x) \nabla u(x) \cdot x + \frac{N}{p} a(x) |u(x)|^p. \quad (\text{A.5})$$

□

Referências Bibliográficas

- [1] J. G. Azorero; I. P. Alonso, *Hardy inequality and some critical elliptic and parabolic problems*, J. Differential Equations. **144** (1998), 441–476. 9
- [2] M. Badiale; G. Tarantello, *A Sobolev-Hardy inequality with applications to a nonlinear elliptic equation arising in astrophysics*, Arch. Ration. Mech. Anal. **163** (2002), 259–293. 2, 4, 7, 16
- [3] M. Badiale; E. Serra, *Critical nonlinear elliptic equations with singularities and cylindrical symmetry*, Rev. Mat. Iberoamericana **20** (2004), 33–66. 4, 42
- [4] G. Bertin, *Dynamics of galaxies*. Cambridge University Press, Cambridge-New York 2000. 3
- [5] H. Brézis, *Some variational problems with lack of compactness*, Proc. Berkeley Sympos. Nonlinear Functional Analysis, 1985. 5, 57, 58
- [6] H. Brezis, *Sobolev Spaces*, Elsevier, 2003.
- [7] H. Brézis; L. Nirenberg, *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents* Comm. Pure Appl. Math. **36** (1983), 437–477. 5, 57, 58
- [8] H. Brezis, T. Kato, *Remarks on the Schrödinger operators with singular complex potentials*. J. Math. Pures Appl. (9) **58** (1979), 137–151. 69
- [9] L. Ciotti, *Dynamical models in astrophysics*. Scuola Normale Superiore, Pisa 2000. 3
- [10] D. G. Costa, *An invitation to variational methods in differential equations*, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2007, xii+138 pp. 18, 57
- [11] H. Egnell, *Asymptotic results for finite energy solutions of semilinear elliptic equations*, J. Differential Equations **98** (1992), 34–56. 3, 39
- [12] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, 2nd ed., AMS, 2010. 67, 68

- [13] R. Fiorenza, *Hölder and locally Hölder Continuous Functions, and Open Sets of Class C^k , $C^{k,\lambda}$* , Birkhauser, 2016.
- [14] N. Ghoussoub, *Duality and Perturbation Methods in Critical Point Theory*, Cambridge University Press, Cambridge 1993. 28
- [15] D. Gilbarg ; N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer, 1983. 68, 69, 70
- [16] J. Jürgen, *Partial Differential Equations*, Springer, 2002. 69
- [17] O. Kavian, *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques Introduction to critical point theory and applications to elliptic problems*, Math. Appl. (Berlin), 13[Mathematics amp; Applications] Springer-Verlag, Paris, 1993, viii+325 pp. 70
- [18] A. C. Ponce, *Métodos clássicos em teoria do potencial*, IMPA, 2009. 69
- [19] P. H. Rabinowitz, *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math., 65. 18, 57
- [20] M. Struwe, *Variational methods* Springer-Verlag, Berlin, 1990, xiv+244 pp. 69
- [21] G. Talenti, *Best constant in Sobolev inequality*. Ann. Mat. Pura Appl. (4) **110** (1976), 353–372. 60
- [22] M. Willem, *Minimax theorems*, Birkhäuser, 1996. 59, 70