



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

LUCAS AUGUSTO SANTOS SALUSTINO

NÚMEROS COMPLEXOS: HISTÓRIA, ESTRUTURA ALGÉBRICA E PRESENÇA
EM VESTIBULARES DA UFPB (1965–2012)

João Pessoa
2025

LUCAS AUGUSTO SANTOS SALUSTINO

NÚMEROS COMPLEXOS: HISTÓRIA, ESTRUTURA ALGÉBRICA E PRESENÇA
EM VESTIBULARES DA UFPB (1965–2012)

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao
Curso Licenciatura em Matemática, do
Departamento de Matemática, do Centro de
Ciências Exatas e da Natureza, da Universidade
Federal da Paraíba, como requisito para
obtenção do título de licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Gonçalves dos
Santos

João Pessoa
2025

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S181n Salustino, Lucas Augusto Santos.

Números complexos : história, estrutura algébrica e presença em vestibulares da UFPB (1965-2012) / Lucas Augusto Santos Salustino. - João Pessoa, 2025.
95 p. : il.

Orientação: Eduardo Gonçalves dos Santos.
TCC (Curso de Licenciatura em Matemática) -
UFPB/CCEN.

1. Números complexos. 2. História da matemática. 3. Currículo escolar. 4. Vestibular UFPB. I. Santos, Eduardo Gonçalves dos. II. Título.

UFPB/CCEN

CDU 51(043.2)

FOLHA DE APROVAÇÃO

Lucas Augusto Santos Salustino

Números Complexos: história, estrutura algébrica e presença em vestibulares da UFPB (1965–2012)

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Curso Licenciatura em Matemática, do Departamento de Matemática, do Centro de Ciências Exatas e da Natureza, da Universidade Federal da Paraíba, como requisito para obtenção do título de licenciado em Matemática.

Aprovado em: 29 / Setembro / 2025

Banca Examinadora

Eduardo Gonçalves dos Santos

Prof. Doutor Eduardo Gonçalves dos Santos
Orientador
(UFPB/CCEN/DM)

Leimar Nunes de Andrade

Prof. Doutor Leimar Nunes de Andrade
Membro interno
(UFPB/CCEN/DM)

João Batista Alves Parente

Prof. Mestre João Batista Alves Parente
Membro interno
(UFPB/CCEN/DM)

AGRADECIMENTOS

A Deus, fonte de toda sabedoria, agradeço por ter guiado meus passos ao longo desta jornada acadêmica e pessoal. Foi em Sua graça que encontrei força nos momentos de dificuldade e serenidade para seguir com perseverança até a conclusão deste trabalho.

Agradeço à minha esposa, Diléia Leonel, pelo amor, apoio incondicional e compreensão durante toda a caminhada que resultou neste trabalho. Sua presença constante foi essencial para que eu pudesse perseverar nos momentos de maior desafio.

Aos meus pais, José Augusto e Geralda Magdala, pela base de valores, pela dedicação e pelo incentivo ao trabalho e estudo, que me conduziram até aqui e me deram forças para seguir firme em minha trajetória acadêmica e profissional.

Aos meus professores, que contribuíram de maneira significativa para minha formação, seja pelo conhecimento transmitido, seja pelo exemplo de dedicação ao ensino. Em especial:

Carlos Bocker Neto, com quem tive a disciplina de Funções de uma Variável Complexa, onde surgiu a confirmação do tema deste trabalho;

Eduardo Gonçalves dos Santos, que além de professor na disciplina de Matemática para o Ensino Básico II, aceitou gentilmente ser meu orientador, oferecendo paciência, críticas construtivas e direcionamento fundamental;

Felipe Wallison Chaves Silva, pela disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I;

Ildo Salvino de Lira, pelas contribuições nas disciplinas de Didática e Avaliação da Aprendizagem;

Jacqueline Rojas, por sua dedicação em Introdução à Álgebra;

Joedson Silva dos Santos, pela disciplina de Cálculo Diferencial e Integral III;

Josean Carlos, meu primeiro professor de Matemática que, ainda no Ensino Fundamental II, foi responsável por despertar em mim a primeira inspiração em seguir a carreira docente;

Lizandro Sanchez Challapa, cuja atuação tive a felicidade de acompanhar em diversas disciplinas fundamentais, como Argumentação em Matemática, Matemática Elementar I, Cálculo Diferencial e Integral II, Séries e Equações Diferenciais Ordinárias, Introdução à Análise Real e Tratamento da Informação;

Marcelo Mogilka, professor no Ensino Médio, que confirmou a minha vocação para a docência e também me apresentou formalmente os Números Complexos;

Marivaldo Pereira Matos, pela disciplina de Cálculo Vetorial e Geometria Analítica;

Roberto Carlos, professor de Física no Ensino Médio, por sua contribuição no despertar docente;

Rogéria Gaudêncio do Rego, pela disciplina de Matemática para o Ensino Básico I e por seu aporte didático;

Rubens Freire Ribeiro, pela disciplina de Física Geral I;

Vinicius Martins Varella, pelo acompanhamento na disciplina de Estágio Supervisionado I.

Ao coordenador do curso, o professor Maurício Cardoso dos Santos, pela orientação institucional e apoio constante.

Aos amigos construídos ao longo da graduação, que compartilharam aprendizados, desafios e conquistas: André Henrique, Edembergue Lima, Esmeralda Rodrigues, Giuseppe Luiz, Joel Cassiano, Leonardo Gomes, Paula Caldeira, Sabrina de Queiroz e Severino Felipe.

Aos amigos de trabalho e companheiros de profissão, Artur Moreira Almeida, Joelson Lima da Silva e Wagner de Oliveira Feitosa, pela parceria e pelos relatos que enriqueceram meu percurso acadêmico e profissional.

Por fim, uma lembrança especial ao meu falecido amigo Alan Jones do Amaral Massoud Tavares, cuja amizade, incentivo e exemplo de vida permanecem vivos em minha memória e se fazem presentes neste momento.

A todos que, de diferentes formas, contribuíram para que este trabalho fosse possível, deixo aqui minha gratidão sincera.

“O autor tem considerado há vários anos esta parte importante da Matemática sob um ponto de vista diferente, que permite conferir às quantidades imaginárias, como as negativas, uma existência objetiva.

O significado intuitivo dos números complexos fica completamente estabelecido e não se precisa mais para admitir estas quantidades no domínio da aritmética”.

Carl Friederich Gauss

RESUMO

Este trabalho investiga a origem, a formalização e as aplicações dos Números Complexos, enfatizando sua relevância histórica, algébrica e pedagógica. De início, apresentamos o trajeto histórico, desde as contribuições de Cardano e Bombelli até a consolidação alcançada por Euler e Gauss. Depois, destacamos a transformação dos complexos em objeto matemático legítimo. Em seguida, discutimos a estrutura algébrica dos Números Complexos, ao evidenciar suas propriedades de corpo e as diferentes formas de representação (algébrica e trigonométrica). No âmbito educacional, realizamos uma análise documental de 87 provas do vestibular da Universidade Federal da Paraíba (UFPB), aplicadas entre 1965 e 2012, das quais foram identificadas 25 questões envolvendo números complexos. Todos os itens foram resolvidos e comentados, o que possibilitou observar a evolução da abordagem do assunto ao longo dessas décadas. Constatamos que nos primeiros anos a presença do conteúdo se restringia a situações ligadas a equações quadráticas e que a partir de 1980 houve ampliação para operações algébricas, propriedades de conjugados e módulos, representações geométricas e aplicações em progressões e polinômios de grau superior. Os resultados apontam que os Números Complexos, embora ausentes na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), constituem um marco na história da Matemática, pois mostraram ter, do ponto de vista histórico e algébrico, valor significativo no processo de ensino-aprendizagem e na avaliação em exames. Assim, o estudo contribui para reforçar a importância de sua reinclusão no currículo do Ensino Médio e fornece material de apoio para professores e estudantes, unindo rigor teórico e prática pedagógica.

Palavras-chave: Números Complexos; História da Matemática; Currículo Escolar; Vestibular UFPB.

ABSTRACT

This final project investigates the origin, formalization, and applications of Complex Numbers, emphasizing their historical, algebraic, and pedagogical relevance. We begin by presenting their historical trajectory, from the contributions of Cardano and Bombelli to the consolidation achieved by Euler and Gauss. We then highlight the transformation of Complex Numbers into a legitimate mathematical object. We then discuss the algebraic structure of Complex Numbers, highlighting their field properties and the different forms of representation (algebraic and trigonometric). In the educational context, we conducted a documentary analysis of 87 entrance exams for the Universidade Federal da Paraíba (UFPB), applied between 1965 and 2012, of which 25 questions involving complex numbers were identified. All items were solved and commented on, allowing us to observe the evolution of the approach to the subject over these decades. We found that in the early years, the content was limited to quadratic equations, but from 1980 onward, it expanded to include algebraic operations, properties of conjugates and modules, geometric representations, and applications in progressions and higher-degree polynomials. The results indicate that Complex Numbers, although absent from the Base Nacional Comum Curricular (BNCC), constitute a landmark in the history of Mathematics, as they have been shown to have significant value, from a historical and algebraic perspective, in the teaching-learning process and in exam assessment. Thus, the study reinforces the importance of being included again in the high school curriculum and provides support material for teachers and students, combining theoretical rigor and pedagogical practice.

Keywords: Complex Numbers; History of Mathematics; School Curriculum; Entrance Exams of UFPB.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Ambiente do site do professor Lenimar Nunes de Andrade	45
Figura 2 - Ambiente do site do professor Lenimar Nunes de Andrade	45
Figura 3 - Questão 9, seção I, página 1 do Vestibular UFPB 1965	47
Figura 4 - Questão 9, seção II, página 5 do Vestibular UFPB 1965	48
Figura 5 - Questão 11, página 6 do Vestibular UFPB 1969	48
Figura 6 - Questão 6, página 16 do Vestibular UFPB 1971.2.	52
Figura 7 - Questão 15, página 18 do Vestibular UFPB 1971.2.	52
Figura 8 - Questão 18, página 19 do Vestibular UFPB 1971.2.	54
Figura 9 - Questão 28, página 7 do Vestibular UFPB 1973.	56
Figura 10 - Questão 22, página 6 do Vestibular UFPB 1974.	57
Figura 11 - Questão 23, página 6 do Vestibular UFPB 1976	59
Figura 12 - Questão 19, página 7 do Vestibular UFPB 1983	60
Figura 13 - Questão 5, página 3 do Vestibular UFPB 1986.	61
Figura 14 - Questão 7, página 3 do Vestibular UFPB 1989 1ª etapa	62
Figura 15 - Questão 16, página 5 do Vestibular UFPB 1989 2ª etapa	64
Figura 16 - Questão 16, página 3 do Vestibular UFPB 1992	65
Figura 17 - Questão 14, página 7 do Vestibular UFPB 1995.	66
Figura 18 - Questão 53, página 18 do Vestibular UFPB 1998.....	68
Figura 19 - Questão 9, página 5 do Vestibular UFPB 2000 - 3ª série	72
Figura 20 - Questão 5, página 3 do Vestibular UFPB 2001 - 3ª série	73
Figura 21 - Questão 5, página 2 do Vestibular UFPB 2003 - 3ª série	75
Figura 22 - Questão 6, página 2 do Vestibular UFPB 2004 - 3ª série	77
Figura 23 - Questão 5, página 2 do Vestibular UFPB 2005 - 3ª série.	79
Figura 24 - Questão 11, página 4 do Vestibular UFPB 2007 - 3ª série - grupo 1	81
Figura 25 - Questão 23, página 11 do Vestibular UFPB 2008 3ª série	85
Figura 26 - Questão 26, página 19 do Vestibular UFPB 2009 3ª série	87
Figura 27 - Questão 19, página 6 do Vestibular UFPB 2012 3ª série	89

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 - Gráficos de $f(x) = x^3$ e $g(x) = 15x + 4$	25
Gráfico 2 - Representação de um número complexo no plano complexo.	40
Gráfico 3 - Representação do módulo e do conjugado de um número complexo	41
Gráfico 4 - Representação trigonométrica de um número complexo	43
Gráfico 5 - A,B,C complexos no plano complexo.	69
Gráfico 6 - A,B,C complexos no plano complexo	83
Gráfico 7 - Distribuição percentual dos subtemas associados a Números Complexos nos exames de vestibular da UFPB de 1965 a 2012	92

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
COPERVE	Comissão Permanente do Concurso Vestibular
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
PSS	Processo Seletivo Seriado
UFPB	Universidade Federal da Paraíba

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	13
1.1 Objetivos	13
1.1.1 Objetivo Geral.....	13
1.1.2 Objetivos Específicos.....	14
1.2 Motivação.....	14
1.3 Metodologia.....	15
2 REFERENCIAL TEÓRICO.....	15
2.1 Histórico dos Números Complexos.....	15
2.1.1 A equação $x^3 + px + q = 0$	17
2.1.1.1 As soluções de equações do tipo $x^3 + px + q = 0$	18
2.1.1.2 Exemplo: soluções de $x^3 - 15x - 4 = 0$	22
2.1.1.2.1 A análise das soluções de $x^3 - 15x - 4 = 0$ do ponto de vista de duas funções.....	24
2.1.1.2.2 As contribuições de Rafael Bombelli	25
2.2 Estrutura algébrica dos Números Complexos.....	28
2.2.1 O conjunto dos Números Complexos.....	28
2.2.1.1 Proposições.....	29
2.3 Representações de um Número Complexo	36
2.3.1 As contribuições de Descartes, Euler e Gauss para a notação “ i ”	36
2.3.1.1 As potências de i	38
2.3.1.2 A forma algébrica de um Número Complexo	39
2.3.2 Conjugado e módulo de um Número Complexo.....	39
2.3.2.1 O conjugado de um Número Complexo.....	39
2.3.2.2 O módulo de um Número Complexo	40
2.3.2.2.1 Propriedades:	41
2.3.3 A forma trigonométrica de um Número Complexo.....	43
3 OS NÚMEROS COMPLEXOS EM VESTIBULARES DA UFPB	44
3.1 O <i>website</i> do professor Lenimar Nunes de Andrade	44
3.2 Soluções e comentários das questões de vestibular da UFPB de 1965 a 2012.....	46
4 CONCLUSÃO	91
CONSIDERAÇÕES FINAIS	93
REFERÊNCIAS.....	94

1 INTRODUÇÃO

O surgimento dos Números Complexos representa um marco na história da Matemática, pois expandiu os limites do conceito de número para além dos Reais. Conforme Miles (1993), os Complexos foram, a princípio, rejeitados por matemáticos pré-renascentistas, no entanto, ao longo do tempo se consolidaram como ferramenta essencial não apenas na resolução de equações polinomiais, mas também em aplicações nas engenharias, na física, na computação e em diversas áreas do conhecimento.

No contexto educacional, abordar os Números Complexos significa proporcionar ao estudante uma compreensão mais ampla da evolução da Matemática, destacando tanto o percurso histórico quanto a formalização algébrica que levou à estrutura de corpo.

Além da fundamentação histórica e algébrica, este trabalho realizou uma análise de 48 anos de provas de vestibulares da Universidade Federal da Paraíba (UFPB) (1965–2012), totalizando 87 exames. Nessa investigação, foram encontradas 25 questões relacionadas a números complexos. Elas foram resolvidas e comentadas, permitindo observar a evolução da abordagem desse tema ao longo das décadas.

Cumprir destacar que, embora o conjunto dos Números Complexos tenha desempenhado papel relevante tanto na história da Matemática quanto em processos seletivos, como os vestibulares da UFPB, esse conteúdo encontra-se ausente da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) do Ensino Médio. Tal ausência suscita reflexões sobre a necessidade de sua reinclusão, considerando sua importância conceitual e pedagógica.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo Geral

Investigar a origem e a formalização do conjunto dos Números Complexos, destacando sua importância histórica, algébrica, e a presença do tema em provas de vestibulares.

1.1.2 Objetivos Específicos

- Contextualizar historicamente o surgimento dos Números Complexos e sua aceitação na comunidade matemática;
- Analisar as contribuições de matemáticos como Cardano, Bombelli, Viète, Euler e Gauss sobre o tema;
- Apresentar a estrutura algébrica dos Números Complexos, evidenciando suas propriedades de corpo;
- Discutir a representação geométrica no plano de Argand-Gauss, explorando as formas algébrica e trigonométrica;
- Investigar a presença de questões envolvendo números complexos em 87 provas de vestibulares da UFPB (1965–2012), resolvendo e comentando os 25 problemas encontrados.

1.2 Motivação

O estudo de números complexos é muitas vezes percebido pelos alunos como abstrato ou desnecessário, por não fazer parte de seu cotidiano imediato. Conforme apontado por Chagas (2013), muitos alunos e professores do Ensino Médio questionam a relevância desse conteúdo, pois o consideram sem aplicação prática e acreditam que não necessitarão dele futuramente. Entretanto, sua relevância histórica e suas aplicações práticas demonstram o contrário: a Matemática avançou justamente porque houve a necessidade de expandir o conceito de número.

No campo pedagógico, a presença de questões sobre números complexos em vestibulares, como os da UFPB entre 1965 e 2012, demonstra sua importância no processo de seleção e preparação acadêmica.

A análise documental dos vestibulares da UFPB entre 1965 e 2012, na qual foram examinadas 87 provas e identificadas 25 questões envolvendo números complexos, justifica-se por revelar a recorrência e a importância desse tema em exames seletivos. Esse levantamento reforça a necessidade de preparar os estudantes para lidar com esse conteúdo, tanto sob o ponto de vista conceitual quanto prático.

A análise dessas provas acrescenta valor a este trabalho, pois evidencia que, além de um tema teórico, os Números Complexos foram também cobrados em

exames que influenciaram o ingresso na instituição de ensino superior mencionada. Assim, a justificativa para este estudo se fortalece na união entre rigor matemático, relevância histórica e nexos educacional.

1.3 Metodologia

A pesquisa foi desenvolvida por meio de revisão bibliográfica e análise documental. Foram examinadas 87 provas do vestibular tradicional da UFPB, abrangendo o período de 1965 a 2012. Identificaram-se 25 questões relacionadas aos Números Complexos, as quais foram resolvidas e comentadas. Essa análise permitiu não apenas observar a evolução da presença do tema nas provas, mas também fornecer subsídios para uma reflexão sobre sua importância na história da Matemática e no ensino.

Também foram construídos exemplos ilustrativos utilizando recursos gráficos (plano de Argand-Gauss em LaTeX) para representar as diferentes formas de um número complexo, bem como ilustrar algumas soluções das questões de vestibular encontradas. Essa abordagem combinou o viés histórico, conceitual, didático e documental.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Histórico dos Números Complexos

É muito comum associarmos a origem dos Números Complexos a equações de segundo grau, especialmente porque é um tema muito comum no Ensino Médio brasileiro. Assim sendo, ao estudar funções e equações quadráticas, costumeiramente nos deparamos com a seguinte expressão:

$$ax^2 + bx + c = 0, \\ a, b, c \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad a \neq 0$$

Cuja fórmula resolutiva é:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Se $b^2 - 4ac$ for negativo, estaremos diante de uma solução não real. Assim, é intuitivo dizer que foi a partir desse conjunto de casos particulares que algum estudioso pensou que $\sqrt{-1}$ pudesse ser um número admissível em algum conjunto numérico e que esse novo conjunto pudesse dispor de propriedades semelhantes às dos Números Reais, por exemplo.

Entretanto, não foi dessa forma, pois esse jeito de escrever fórmulas, com letras representando números, só foi introduzido na Europa nos anos finais do Renascimento pelo matemático e advogado francês François Viète (1540 – 1603) em sua obra *Introdução à Arte Analítica* em 1591.

Mas a maior contribuição matemática de Viète é a notação literal, a ideia de representar números, conhecidos ou não, por meio de letras. Ela tem o grande mérito de unificar problemas que antes pareciam distintos. Na notação de Viète, $ax^2 + bx + c = 0$ representa todas as equações de grau 2: até então eram considerados vários casos, dependendo dos sinais dos coeficientes a , b e c , e a resolução era diferente em cada caso. (IMPA, 2021, s.p.).

Viète conseguiu contribuir significativamente para o conceito de número quando formalizou a notação literal, que introduziu o uso de letras para representar números, tanto conhecidos quanto desconhecidos. Isso unificou problemas que antes eram tratados de formas distintas, como as equações quadráticas, que, até então, eram resolvidas de maneiras diferentes dependendo dos sinais dos coeficientes.

Além disso, o aspecto mais significativo dessa observação foi a expansão do conceito de número, pois até então equações como $x^2 = 16$ tinham solução, ao passo que as do tipo $x^2 = -16$ não tinham. Ao trazer a notação $x^2 = a$, por exemplo, soluções do tipo $\sqrt{a}$ passaram a ser usadas com mais naturalidade independentemente do sinal de a . Esse foi um passo importante para o desenvolvimento dos Números Complexos.

Como dito anteriormente, não foi a partir de equações quadráticas, nem muito menos através de sua fórmula resolutive com letras representando números, pois essa formalização da literalidade nas fórmulas só viria a se concretizar aproximadamente 46 anos depois das primeiras inquietações acerca de raízes de índice par com radicais negativos.

Os primeiros questionamentos surgiram, na verdade, ao se examinar equações cúbicas, isto é, alguns matemáticos, ao procurarem soluções para

equações cúbicas, encontraram os primeiros dilemas já por volta do século XVI. Segundo afirma Milies (1994), um desses matemáticos, Girolamo Cardano (1501 – 1576), publicou, em 1545, em seu livro *Ars Magna*, o que ficou conhecida como a fórmula de Cardano-Tartaglia (descoberta por Niccolò Tartaglia, mas publicada por Cardano). Essa publicação, na notação literal que posteriormente seria formalizada por Viète, prometia uma fórmula resolutiva para equações cúbicas do tipo:

$$x^3 + px + q = 0,$$

$$p, q \in \mathbb{R}$$

2.1.1 A equação $x^3 + px + q = 0$

Faremos agora uma demonstração de como uma equação cúbica genérica de coeficientes reais, $a\hat{x}^3 + b\hat{x}^2 + c\hat{x} + d = 0$, pode ser escrita na forma $x^3 + px + q = 0$:

Seja:

$$a\hat{x}^3 + b\hat{x}^2 + c\hat{x} + d = 0,$$

$$a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0$$

Fazendo $\hat{x} = x - \frac{b}{3a}$ e substituindo na expressão acima, temos:

$$a\left(x - \frac{b}{3a}\right)^3 + b\left(x - \frac{b}{3a}\right)^2 + c\left(x - \frac{b}{3a}\right) + d = 0$$

Desenvolvendo os termos:

$$a\left(x^3 - 3\frac{b}{3a}x^2 + 3\frac{b^2}{9a^2}x - \frac{b^3}{27a^3}\right) + b\left(x^2 - 2\frac{b}{3a}x + \frac{b^2}{9a^2}\right) + cx - \frac{bc}{3a} + d = 0$$

Distribuindo os coeficientes:

$$ax^3 - bx^2 + \frac{b^2}{3a}x - \frac{b^3}{27a^2} + bx^2 - 2\frac{b^2}{3a}x + \frac{b^3}{9a^2} + cx - \frac{bc}{3a} + d = 0$$

Operando com os termos semelhantes:

$$ax^3 - \frac{b^2}{3a}x + cx + 2\frac{b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d = 0$$

Dividindo toda a expressão por a , ($a \neq 0$):

$$x^3 - \frac{b^2}{3a^2}x + \frac{c}{a}x + 2\frac{b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a} = 0$$

Colocando x em evidência:

$$x^3 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}\right)x + 2\frac{b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a} = 0$$

Fazendo

$$p = \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}\right)$$

e

$$q = \left(2\frac{b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}\right)$$

Temos:

$$x^3 + px + q = 0,$$

$$p, q \in \mathbb{R}$$

Ou seja, qualquer equação cúbica de coeficientes reais pode ser transformada na forma:

$$x^3 + px + q = 0$$

2.1.1.1 As soluções de equações do tipo $x^3 + px + q = 0$

Ainda segundo Milies (1993), Tartaglia procurou soluções para essa nova equação. Assim, a seguir, apresentaremos uma maneira de chegar, por meio das notações literais desenvolvidas por Viète, a algumas conclusões semelhantes alcançadas por Tartaglia:

Supondo que uma raiz pode ser a soma de dois números u e v , isto é, fazendo $x = u + v$, teremos:

$$(u + v)^3 + p(u + v) + q = 0$$

Desenvolvendo o termo ao cubo:

$$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + p(u + v) + q = 0$$

Colocando $3uv$ em evidência:

$$u^3 + v^3 + 3uv(u + v) + p(u + v) + q = 0$$

Colocando $u + v$ em evidência:

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0$$

Uma possível solução desse problema aparece se fizermos:

$$u^3 + v^3 + q = 0$$

e

$$3uv + p = 0$$

Ou seja:

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ 3uv = -p \end{cases}$$

Então:

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ uv = -\frac{p}{3} \end{cases}$$

Que implica em:

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ (uv)^3 = \left(-\frac{p}{3}\right)^3 \end{cases}$$

E, portanto:

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27} \end{cases}$$

Fazendo $u^3 = y_1$ e $v^3 = y_2$, temos:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = -q \\ y_1 y_2 = -\frac{p^3}{27} \end{cases}$$

y_1 e y_2 são raízes (soma e produto de raízes: relações de Viète) da equação quadrática:

$$y^2 + qy - \frac{p^3}{27} = 0$$

As raízes da equação acima podem ser encontradas através da fórmula resolutive:

$$y = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{p^3}{27}\right)}}{2 \cdot 1}$$

Isto é:

$$y = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + 4\left(\frac{p^3}{27}\right)}}{2}$$

Separando o denominador:

$$y = -\frac{q}{2} \pm \frac{\sqrt{q^2 + 4\frac{p^3}{27}}}{2}$$

Substituindo 2 por $\sqrt{4}$:

$$y = -\frac{q}{2} \pm \frac{\sqrt{q^2 + 4\frac{p^3}{27}}}{\sqrt{4}}$$

Incorporando a razão num único radical:

$$y = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2 + 4\frac{p^3}{27}}{4}}$$

Separando o denominador dentro do radical:

$$y = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

Teremos:

$$y_1 = u^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

$$y_2 = v^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

Logo,

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Por fim:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$p, q \in \mathbb{R}$$

Essa é a fórmula resolvente a qual Tartaglia, segundo Milies (1993), havia chegado. Se vale para quaisquer p e q reais, então vale, em especial, quando:

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$$

Que configura, portanto, um número negativo dentro de um radical de índice 2 (par).

Assim, é intuitivo dizer que Cardano e os matemáticos que trabalharam nessa fórmula, ao buscarem compreender as implicações dela, já se deparavam com os primeiros dilemas relacionados a raízes quadradas de números negativos.

Esses problemas surgiram antes mesmo da formalização da notação literal trazida por Viète e, de certo modo, anteciparam a necessidade de expandir o conceito de número. Do jeito deles e dentro das possibilidades da época deles, esses estudiosos perceberam que tais resultados não se ajustavam aos números conhecidos, abrindo caminho para a posterior consolidação dos Números Complexos.

2.1.1.2 Exemplo: soluções de $x^3 - 15x - 4 = 0$

Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tais que, pela substituição de variável $\hat{x} = x - \frac{b}{3a}$, apresentada no tópico 2.1.1, a equação:

$$a\hat{x}^3 + b\hat{x}^2 + c\hat{x} + d = 0, \quad a \neq 0$$

se apresente como:

$$x^3 - 15x - 4 = 0$$

Pela fórmula de Cardano-Tartaglia, temos:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{(-4)}{2} - \sqrt{\frac{(-4)^2}{4} + \frac{(-15)^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{(-4)}{2} + \sqrt{\frac{(-4)^2}{4} + \frac{(-15)^3}{27}}}$$

Fazendo $27 = 3^3$ e operando com os sinais, teríamos:

$$x = \sqrt[3]{\frac{4}{2} - \sqrt{\frac{16}{4} + \frac{(-15)^3}{3^3}}} + \sqrt[3]{\frac{4}{2} + \sqrt{\frac{16}{4} + \frac{(-15)^3}{3^3}}}$$

$$x = \sqrt[3]{2 - \sqrt{4 + \left(-\frac{15}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{4 + \left(-\frac{15}{3}\right)^3}}$$

$$x = \sqrt[3]{2 - \sqrt{4 + (-5)^3}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{4 + (-5)^3}}$$

$$x = \sqrt[3]{2 - \sqrt{4 - 125}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{4 - 125}}$$

$$x = \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$$

O mundo estava diante do elemento $\sqrt{-121}$, que era impossível no conjunto dos números reais. Ao se deparar com isso, Cardano pensou, de acordo com Milies (1993), que essas raízes controversas deveriam ser simplesmente desprezadas, embora não houvesse, do ponto de vista algébrico, erro algum em sua fórmula resolutive. Nas palavras dele: “Em consequência, ele chama essas expressões de raízes sofisticadas da equação e diz, a respeito delas, que são tão sutis quanto inúteis” (Milies, 1993, s.p.).

2.1.1.2.1 A análise das soluções de $x^3 - 15x - 4 = 0$ do ponto de vista de duas funções

Vamos analisar a mesma equação, $x^3 - 15x - 4 = 0$, mas agora do ponto de vista de duas funções. Sejam:

$$\begin{cases} f(x) = x^3 \\ g(x) = 15x + 4 \end{cases}$$

As soluções de $x^3 - 15x - 4 = 0$ devem vir da interseção de f e g , ou seja:

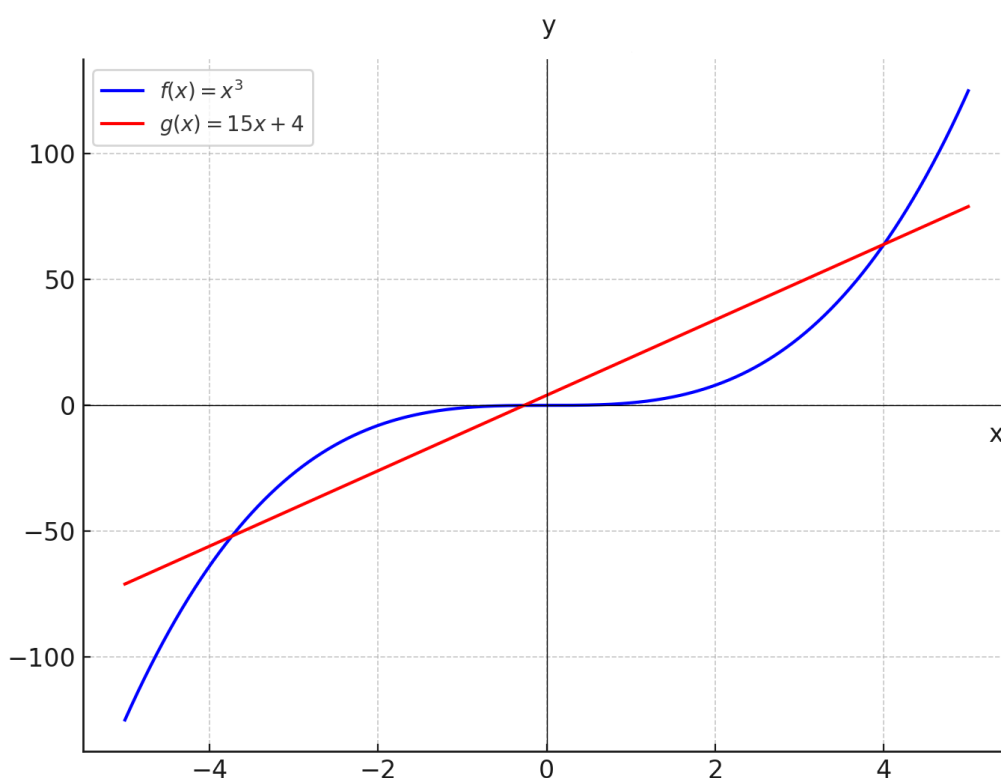
$$f(x) - g(x) = 0$$

$$x^3 - (15x + 4) = 0$$

$$x^3 = 15x + 4$$

Analisando o gráfico 1, que mostra os gráficos de f e g , temos:

Gráfico 1 - Gráficos de $f(x) = x^3$ e $g(x) = 15x + 4$



Fonte: GeoGebra e Paint (autor)

Nesse ponto de vista, observa-se que há três pontos de interseção entre os gráficos das funções, que implica em três soluções reais para $x^3 - 15x - 4 = 0$. No entanto, a fórmula de Cardano-Tartaglia apontava um gigante empecilho para proceder na obtenção dessas raízes. Isso levantou a questão: poderia haver algo de errado com a fórmula de Cardano-Tartaglia?

2.1.1.2.2 As contribuições de Rafael Bombelli

Rafael Bombelli (1526 - 1573), em conformidade com o que aponta Milies (1993), quando esteve analisando o mesmo problema, notou também que $x = 4$ era uma solução para a equação em questão e, pela primeira vez, estava diante de uma conjuntura que, embora apresentasse números negativos em raízes de índice par, existia solução. Ele reconheceu, portanto, que era necessário investigar o que estava acontecendo e, para isso, trouxe uma solução:

Bombelli concebe então a possibilidade de que exista uma expressão da forma $a + \sqrt{-b}$ que possa ser considerada como raiz cúbica de $2 + \sqrt{-121}$ i.e., que verifique

$(a + \sqrt{-b})^3 = 2 + \sqrt{-121}$. A forma em que ele calcula essa raiz é um tanto peculiar; ele assume que a raiz cúbica de $2 - \sqrt{-121}$ seja da forma $a - \sqrt{-b}$. Como ele sabe que 4 deve ser raiz da equação, necessariamente $a + \sqrt{-b} + a - \sqrt{-b} = 4$. Neste ponto, felizmente, as quantidades não existentes se cancelam e obtemos $a = 2$. Com esse resultado, é muito fácil voltar à equação $(a + \sqrt{-b})^3 = 2 + \sqrt{-121}$ e deduzir que $b = 1$. Assim, ele obtém que $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1}$ e que: $x = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$ é uma solução da equação dada (Milies, 1993, s.p.).

A solução trazida por Bombelli, segundo Milies (1993), não provava $b = 1$, mas caminhava no sentido de encontrar os Números Complexos.

Nesse momento, provaremos que $b = 1$. Para isso, vamos voltar à equação $(a + \sqrt{-b})^3 = 2 + \sqrt{-121}$ e já sabendo que $a = 2$, temos:

$$(2 + \sqrt{-b})^3 = 2 + \sqrt{-121}$$

$$2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot \sqrt{-b} + 3 \cdot 2 \cdot (\sqrt{-b})^2 + (\sqrt{-b})^3 = 2 + \sqrt{121 \cdot (-1)}$$

$$8 + 12\sqrt{-b} - 6b - b\sqrt{-b} = 2 + \sqrt{121 \cdot (-1)}$$

$$8 - 6b + 12\sqrt{-b} - b\sqrt{-b} = 2 + 11\sqrt{(-1)}$$

Colocando $\sqrt{-b}$ em evidência:

$$8 - 6b + (12 - b)\sqrt{-b} = 2 + 11\sqrt{(-1)}$$

Sabendo que $b \in \mathbb{R}$, e admitindo que talvez $\sqrt{-b}$ não seja um número real, assim como $\sqrt{-1}$ não o é, podemos separar os termos em:

$$(8 - 6b) + ((12 - b)\sqrt{-b}) = (2) + (11\sqrt{(-1)})$$

Em que o primeiro termo do lado esquerdo da igualdade é igual ao primeiro termo do lado direito da igualdade e o segundo termo do lado esquerdo da igualdade é igual ao segundo termo do lado direito da igualdade. Isto é:

$$\begin{cases} 8 - 6b = 2 \\ (12 - b)\sqrt{-b} = 11\sqrt{(-1)} \end{cases}$$

Ou seja:

$$\begin{cases} b = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

Culminando com o que fora dito por Cardano, segundo Milies (1993):

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1}$$

e

$$\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 - \sqrt{-1}$$

Evidenciando que, de fato, $x = 4$ é uma solução:

$$\begin{aligned} x &= 2 - \sqrt{-1} + 2 + \sqrt{-1} \\ &= 4 \end{aligned}$$

Eu achei uma espécie de raiz cúbica muito diferente das outras, que aparece no capítulo sobre o cubo igual a uma quantidade e um número. ... A princípio, a coisa toda me pareceu mais baseada em sofismas que na verdade, mas eu procurei até que achei uma prova... Isto pode parecer muito sofisticado, mas, na realidade, eu tinha essa opinião, e não pude achar a demonstração por meio de linhas [i.e. geometricamente], assim, tratarei da multiplicação dando as regras para mais e menos. (Bombelli, 1572, apud Milies, 1993, s.p.)

Nesse ponto, ao considerar $\sqrt{-1}$ como um objeto matemático válido, Bombelli deu um passo definitivo na formalização dos Números Complexos como conhecemos hoje.

Segundo O'Connor e Robertson (1998, s.p.), a notação que conhecemos hoje, $i = \sqrt{-1}$, só viria a ser formalizada por Leonhard Euler no século XVIII, entretanto, Bombelli, de acordo com Milies (1993), já enunciava o que ele chamou de regras do produto, baseando-se na expressão *più di meno* para se referir ao que conhecemos como $+i$ e *meno di meno* para se referir a $-i$.

Più via piú di meno fa più di meno, $(+) \cdot (+i) = +i$

Meno via più di meno fa meno di meno, $(-) \cdot (+i) = -i$
 Più via meno di meno fa meno di meno, $(+) \cdot (-i) = -i$
 Meno via meno di meno fa più di meno, $(-) \cdot (-i) = +i$
 Più di meno via più di meno fa meno, $(+) \cdot (+i) = (-)$
 Meno di meno via più di meno fa più, $(-i) \cdot (+i) = (+)$
 Meno di meno via meno di meno fa meno. $(-i) \cdot (-i) = (-)$
 (Bombelli, 1572, apud Milies, 1993, s.p.).

Assim, a notação algébrica moderna começa a se estabelecer na Europa, e a Matemática se torna, a partir de então, cada vez mais abstrata. A partir desse momento, os Números Complexos passaram a ser necessários para que a fórmula de Cardano-Tartaglia fosse funcional para quaisquer p e q reais, visto que toda equação cúbica tem, ao menos, uma solução real (LANG, 2011). Isso demonstrava que para desenvolver fórmulas capazes de resolver certos tipos de equações seria inevitável o uso dos Números Complexos.

2.2 Estrutura algébrica dos Números Complexos

2.2.1 O conjunto dos Números Complexos

Definimos o corpo dos números complexos como sendo o conjunto:

$$\mathbb{C} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

Com as operações de adição e multiplicação:

Sejam $z, w \in \mathbb{C}$, tais que $z = (a, b)$ e $w = (c, d)$, então:

$$z + w = (a + c, b + d)$$

$$zw = (ac - bd, ad + bc)$$

Definimos também:

$$-z = (-a, -b)$$

$$z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right), \quad z \neq 0$$

Notação:

$$z^{-1} = \frac{1}{z}, \quad z \neq 0$$

2.2.1.1 Proposições

Apesar de não necessitarmos de todas as proposições aqui apresentadas para as resoluções das questões de vestibulares da UFPB, demonstraremos-nas a fim de ilustrar a aplicação dos conceitos fundamentais dos Números Complexos, evidenciar suas propriedades algébricas e fornecer uma base sólida para o entendimento completo das operações que envolvem esses números. A inclusão dessas demonstrações busca não apenas ampliar a compreensão dos alunos sobre a teoria, mas também proporcionar um aprofundamento teórico que possa ser útil em contextos mais complexos e avançados de Matemática.

Sejam $z, w, t \in \mathbb{C}$, então:

- a) $z + (w + t) = (z + w) + t$
- b) $z + w = w + z$
- c) $0 + z = z$
- d) $z + (-z) = 0$
- e) $z(wt) = (zw)t$
- f) $zw = wz$
- g) $1z = z$
- h) $zz^{-1} = 1 \quad z \neq 0$
- i) $z(w + t) = zw + zt$

Demonstração:

- a) $z + (w + t) = (z + w) + t$

Sejam:

$$z = (a, b), \quad w = (c, d), \quad t = (e, f)$$

Então:

$$z + (w + t) = (a, b) + ((c, d) + (e, f))$$

$$= (a, b) + (c + e, d + f)$$

$$= (a + (c + e), b + (d + f))$$

$$= (a + c) + e, (b + d) + f)$$

$$= (a + c, b + d) + (e + f)$$

$$= (z + w) + t$$

b) $z + w = w + z$

Sejam:

$$z = (a, b), \quad w = (c, d)$$

Então:

$$z + w = (a, b) + (c, d)$$

$$= (a + c, b + d)$$

$$= (c + a, d + b)$$

$$= (c, d) + (a, b)$$

$$= w + z$$

c) $0 + z = z$

Sejam:

$$z = (a, b) \quad 0 = (0, 0)$$

Então:

$$0 + z = (0, 0) + (a, b)$$

$$= (0 + a, 0 + b)$$

$$= (a, b)$$

$$= z$$

d) $z + (-z) = 0$

Sejam:

$$z = (a, b), \quad -z = (-a, -b), \quad 0 = (0, 0)$$

Então:

$$z + (-z) = (a, b) + (-a, -b)$$

$$= (a + (-a), b + (-b))$$

$$= (0, 0)$$

$$= 0$$

e) $z(wt) = (zw)t$

Sejam:

$$z = (a, b), \quad w = (c, d), \quad t = (e, f)$$

Então:

$$z(wt) = (a, b)((c, d)(e, f))$$

$$= (a, b)(ce - df, cf + de)$$

$$= (a(ce - df) - b(cf + de), a(cf + de) + b(ce - df))$$

$$= (ace - adf - bcf - bde, acf + ade + bce - bdf)$$

$$= (ace - bde - adf - bcf, acf - bdf + ade + bce)$$

$$= ((ac - bd)e - (ad + bc)f, (ac - bd)f + (ad + bc)e)$$

$$= ((ac - bd), (ad + bc)) \cdot (e, f)$$

$$= ((a, b)(c, d)) \cdot (e, f)$$

$$= (zw)t$$

f) $zw = wz$

Sejam:

$$z = (a, b), \quad w = (c, d)$$

Então:

$$zw = (a, b)(c, d)$$

$$= (ac - bd, ad + bc)$$

$$= (ca - db, cb + da)$$

$$= (c, d)(a, b)$$

$$= wz$$

g) $1z = z$

Sejam:

$$z = (a, b), \quad 1 = (1, 0)$$

Então:

$$1z = (1, 0)(a, b)$$

$$= (1 \cdot a - 0 \cdot b, 1 \cdot b + 0 \cdot a)$$

$$= (a, b)$$

$$= z$$

h) $z(w + t) = zw + zt$

Sejam:

$$z = (a, b), \quad z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right), \quad z \neq 0$$

Então:

$$zz^{-1} = (a, b) \cdot \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$$

$$= \left(a \cdot \frac{a}{a^2 + b^2} - b \cdot \frac{-b}{a^2 + b^2}, a \cdot \frac{-b}{a^2 + b^2} + b \cdot \frac{a}{a^2 + b^2} \right)$$

$$= \left(\frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2}, \frac{-ab}{a^2 + b^2} + \frac{ab}{a^2 + b^2} \right)$$

$$= \left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2}, 0 \right)$$

$$= (1, 0)$$

$$= 1$$

i) $z(w + t) = zw + zt$

Sejam:

$$z = (a, b), \quad w = (c, d), \quad t = (e, f)$$

Então:

$$\begin{aligned}z(w + t) &= (a, b) \cdot ((c, d) + (e, f)) \\&= (a, b) \cdot (c + e, d + f) \\&= (a(c + e) - b(d + f), a(d + f) + b(c + e)) \\&= (ac + ae - bd - bf, ad + af + bc + be) \\&= (ac - bd + ae - bf, ad + bc + af + be) \\&= (a, b)(c, d) + (a, b)(e, f) \\&= zw + zt\end{aligned}$$

A subtração, divisão e potenciação de complexos são definidos de maneira usual:

Subtração:

$$z - w = z + (-w)$$

Divisão:

$$\frac{z}{w} = zw^{-1}, \quad w \neq 0$$

Potenciação:

$$\begin{aligned}z^0 &= 1 \\z^n &= z \cdot z \cdot \dots \cdot z \\z^{-n} &= z^{-1} \cdot z^{-1} \cdot \dots \cdot z^{-1}, \quad z \neq 0, \quad (n \geq 1)\end{aligned}$$

Das proposições anteriormente demonstradas, decorre:

a)

$$\frac{z_1}{w_1} + \frac{z_2}{w_2} = \frac{z_1 w_2 + z_2 w_1}{w_1 w_2}, \quad w_1 \neq 0, \quad w_2 \neq 0$$

b)

$$\frac{z_1}{w_1} \cdot \frac{z_2}{w_2} = \frac{z_1 z_2}{w_1 w_2}, \quad w_1 \neq 0, \quad w_2 \neq 0$$

Prova:

Sejam: $z_1 = (a_1, b_1)$, $z_2 = (a_2, b_2)$, $w_1 = (c_1, d_1)$ e $w_2 = (c_2, d_2)$

a) Tomemos $\frac{z_1}{w_1} + \frac{z_2}{w_2}$ e multipliquemos por $w_1 w_2$, ou seja:

$$\left(\frac{z_1}{w_1} + \frac{z_2}{w_2} \right) \cdot w_1 w_2 = \frac{z_1}{w_1} \cdot w_1 w_2 + \frac{z_2}{w_2} \cdot w_1 w_2$$

(garantido pelas proposições f) e i))

$$\left(\frac{z_1}{w_1} + \frac{z_2}{w_2} \right) \cdot w_1 w_2 = z_1 w_1^{-1} \cdot w_1 w_2 + z_2 w_2^{-1} \cdot w_1 w_2$$

(garantido pela notação de divisão)

$$\left(\frac{z_1}{w_1} + \frac{z_2}{w_2} \right) \cdot w_1 w_2 = z_1 (w_1^{-1} \cdot w_1) w_2 + z_2 (w_2^{-1} \cdot w_2) w_1$$

(garantido pelas propriedades e) e f))

$$\left(\frac{z_1}{w_1} + \frac{z_2}{w_2} \right) \cdot w_1 w_2 = z_1 w_2 + z_2 w_1$$

(garantido pela propriedade h)

Multiplicando a expressão por $(w_1 w_2)^{-1}$, temos:

$$\left(\frac{z_1}{w_1} + \frac{z_2}{w_2} \right) \cdot w_1 w_2 \cdot (w_1 w_2)^{-1} = (z_1 w_2 + z_2 w_1) \cdot (w_1 w_2)^{-1}$$

$$\left(\frac{z_1}{w_1} + \frac{z_2}{w_2} \right) \cdot (w_1 w_2 \cdot (w_1 w_2)^{-1}) = (z_1 w_2 + z_2 w_1) \cdot (w_1 w_2)^{-1}$$

$$\left(\frac{z_1}{w_1} + \frac{z_2}{w_2}\right) = (z_1 w_2 + z_2 w_1) \cdot (w_1 w_2)^{-1}$$

(garantido pela propriedade h)

Cuja notação pode ser dada por:

$$\left(\frac{z_1}{w_1} + \frac{z_2}{w_2}\right) = \frac{z_1 w_2 + z_2 w_1}{w_1 w_2}$$

b)

$$\frac{z_1}{w_1} \cdot \frac{z_2}{w_2} = (z_1 w_1^{-1}) \cdot (z_2 w_2^{-1})$$

$$= z_1 z_2 \cdot (w_1^{-1} w_2^{-1})$$

(garantido pelas propriedades e) e f))

Cuja notação pode ser dada por:

$$\frac{z_1}{w_1} \cdot \frac{z_2}{w_2} = \frac{z_1 z_2}{w_1 w_2}$$

2.3 Representações de um Número Complexo

2.3.1 As contribuições de Descartes, Euler e Gauss para a notação “i”

De acordo com Merino (2006), foi a partir de René Descartes (1596–1650), que em *La Géométrie* (1637) se utilizou pela primeira vez o termo *nombres imaginaires* para se referir a soluções de equações envolvendo $\sqrt{-1}$. Embora de forma não oficial, o conceito começou a ganhar visibilidade.

Mais de um século depois, Leonhard Euler (1707–1783), por volta de 1777, introduziu explicitamente a notação “i” para representar $\sqrt{-1}$, segundo afirma O’Connor e Robertson: “We owe to Euler the notation $f(x)$ for a function (1734), e for the base of natural logs (1727), i for the square root of -1 (1777), π for pi, Σ for summation (1755), the notation for finite differences Δy and $\Delta^2 y$ and many others” (O’Connor e Robertson, 1998, s.p.).

Isto é: “Nós devemos a Euler a notação $f(x)$ para funções (1734), e para a base de logaritmos naturais (1727), i para a raiz quadrada de -1 (1777), π para pi, Σ para somatório (1755), a notação para diferenças finitas Δy e $\Delta^2 y$ e muitas outras” (tradução nossa).

Posteriormente, de acordo com Milies (1993), Carl Friedrich Gauss (1777–1855) conferiu rigor à teoria dos números complexos, descrevendo-os como pontos de um plano (o plano de Argand-Gauss) e consolidando $i = \sqrt{-1}$ como um objeto matemático legítimo e bem definido.

A observação de Gauss a respeito da existência objetiva dos números complexos ilustra a visão da Matemática na época. Parece que o fato de esses números poderem ser representados geometricamente lhes dá essa existência. Em outras palavras, parece que, para os matemáticos daquele período, os entes geométricos tinham um tipo de realidade que faltava aos objetos da aritmética. (Milies, 1993, s.p.)

De posse do termo i como unidade imaginária, definimos um número complexo z da seguinte forma:

$$z = a + bi, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Verificaremos, nesse momento, a soma e o produto de números complexos, tal como definimos anteriormente no tópico 2.2.1:

Sejam:

$$z_1 = a + bi = (a, b)$$

$$z_2 = c + di = (c, d)$$

Então a soma é da seguinte maneira:

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di)$$

$$= (a + c) + (b + d)i$$

$$= (a + c, b + d)$$

E o produto é da seguinte maneira:

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di)$$

$$= ac + (ad)i + (bc)i + (bd)i^2$$

Como $i^2 = -1$, então:

$$z_1 \cdot z_2 = ac + (ad)i + (bc)i - bd$$

$$= (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$$= (ac - bd, ad + bc)$$

Exemplo:

Tomemos o número complexo $w = i$, sabemos que $w^2 = i^2 = -1$. O mesmo número complexo w pode ser representado por:

$$w = (0,1)$$

Note que:

$$w^2 = (0,1)^2$$

$$= (0,1) \cdot (0,1)$$

$$= (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0)$$

$$= (-1,0)$$

$$= -1 + 0 \cdot i$$

$$= -1$$

2.3.1.1 As potências de i

Sabemos que:

$$i^1 = i$$

$$i^2 = -1$$

Então:

- $i^3 = i^2 i = (-1) \cdot i = -i$
- $i^4 = i^2 i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$

Como $i^4 = 1$, para todo k inteiro vale:

$$i^{4k} = (i^4)^k = 1^k = 1$$

Logo, para qualquer n inteiro é fato que:

$$i^{n+4} = i^n i^4 = i^n \cdot 1 = i^n$$

Isto é, as potências de i se repetem a cada 4 expoentes.

2.3.1.2 A forma algébrica de um Número Complexo

Como visto no tópico anterior, o par (a, b) e a expressão $a + bi$ representam o mesmo número complexo, mas a forma $a + bi$ é chamada de forma algébrica de um número complexo.

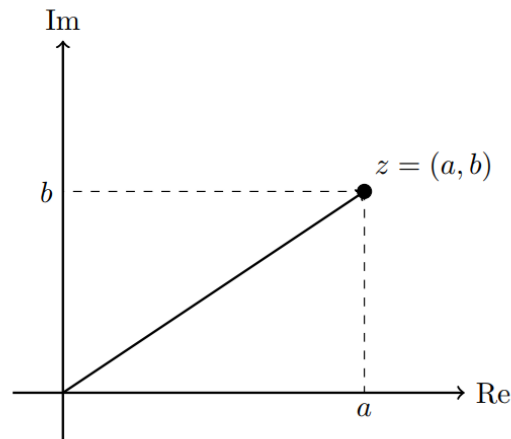
2.3.2 Conjugado e módulo de um Número Complexo

2.3.2.1 O conjugado de um Número Complexo

Como um número complexo $z = a + bi$ pode ser representado por (a, b) , então existe também uma representação geométrica dele. O plano cartesiano quando usado para representar um número complexo recebe o nome de plano complexo (ou plano de Argand-Gauss); o eixo das abscissas passa a representar o eixo real; e o eixo das ordenadas passa a representar o eixo imaginário.

Um número complexo pode ser representado por um ponto ou por um vetor no plano complexo, que pode ser observado no gráfico 2:

Gráfico 2 - Representação de um número complexo no plano complexo.



Fonte: Overleaf, autor.

O conjugado $\bar{z}$ de um número complexo $z = a + bi$ é definido da seguinte forma:

$$\bar{z} = a - bi$$

$\bar{z}$ representa o vetor (ou ponto) do plano complexo que sofreu reflexão do vetor z com relação ao eixo real. Sua representação no plano complexo pode ser conferida mais adiante no gráfico 3.

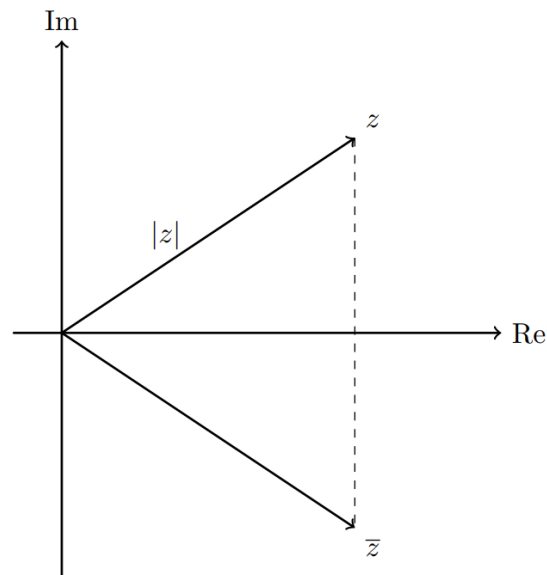
2.3.2.2 O módulo de um Número Complexo

O módulo $|z|$, ou valor absoluto, de um número complexo $z = a + bi$ é definido por:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Graficamente, o módulo de um número complexo, que é um número real escalar, corresponde ao comprimento do vetor z . Isso também pode ser notado no gráfico 3.

Gráfico 3 - Representação do módulo e do conjugado de um número complexo



Fonte: Overleaf, autor.

2.3.2.2.1 Propriedades:

Sejam $z, w \in \mathbb{C}$, então

- a) $z\bar{z} = |z|^2$
- b) $|zw| = |z||w|$

Demonstração:

a) $z\bar{z} = |z|^2$

Sejam:

$$z = a + bi, \quad \bar{z} = a - bi$$

Então:

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi)$$

$$= (a^2 - b^2i^2)$$

$$= (a^2 - b^2(-1))$$

$$= (a^2 + b^2)$$

$$= |z|^2$$

b) $|zw| = |z||w|$

Sejam:

$$z = a + bi, \quad w = c + di$$

Então:

$$|zw| = |(a + bi)(c + di)|$$

$$= |ac + adi + bci + bdi^2|$$

$$= |ac - bd + (ad + bc)i|$$

$$= \sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2}$$

$$= \sqrt{(ac)^2 - 2abcd + (bd)^2 + (ad)^2 + 2abcd + (bc)^2}$$

$$= \sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2}$$

$$= \sqrt{a^2(c^2 + d^2) + b^2(c^2 + d^2)}$$

$$= \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}$$

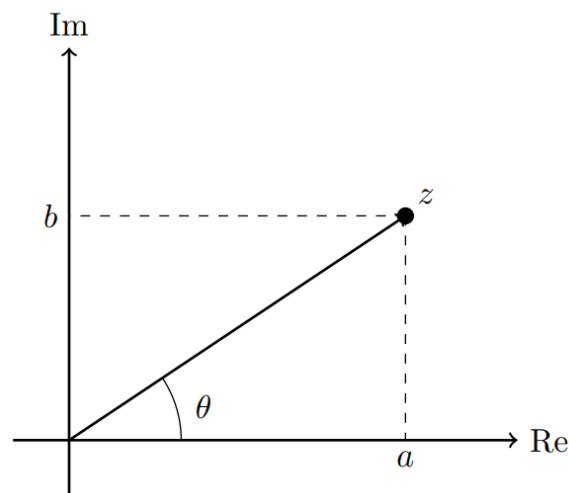
$$= \sqrt{(a^2 + b^2)} \cdot \sqrt{(c^2 + d^2)}$$

$$= |z||w|$$

2.3.3 A forma trigonométrica de um Número Complexo

Sejam $z = a + bi$ um número complexo não nulo e θ o ângulo formado pelo vetor z e o semieixo positivo real, então podemos representar o vetor z , tomando como referência seu módulo $|z|$ e o menor ângulo θ formado por ele e o semi eixo real positivo, como demonstrado no gráfico 4:

Gráfico 4 - Representação trigonométrica de um número complexo



Fonte: Overleaf, autor.

Note que:

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{a}{|z|} \Rightarrow a = |z|\cos(\theta) \\ \sin(\theta) = \frac{b}{|z|} \Rightarrow b = |z|\sin(\theta) \end{cases}$$

Ao substituir na forma algébrica, temos:

$$z = a + bi$$

$$= |z|\cos(\theta) + |z|\sin(\theta)i$$

$$= |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

z , na forma trigonométrica (ou polar), é dado como sendo:

$$z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

Em que θ é chamado argumento de z , portanto, para um mesmo $|z|$, qualquer θ na forma $\theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, também indica o mesmo número complexo z .

3 OS NÚMEROS COMPLEXOS EM VESTIBULARES DA UFPB

A presença dos Números Complexos em exames de seleção para o ensino superior no Brasil tem grande relevância pedagógica, pois evidencia como esse conteúdo foi trabalhado ao longo do tempo no Ensino Médio e qual a sua importância no processo avaliativo. No caso específico da UFPB, que durante décadas realizou vestibulares tradicionais, é possível perceber um panorama consistente sobre a cobrança do tema.

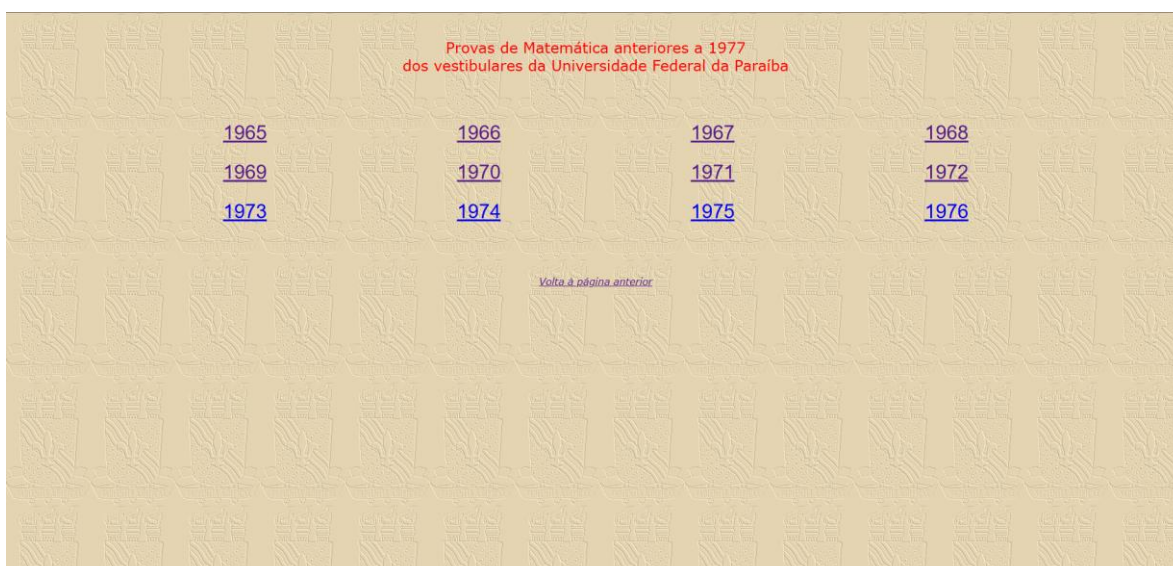
Este trabalho realizou uma análise de 48 anos de provas, abrangendo o período de 1965 a 2012, totalizando 87 provas, uma vez que em alguns anos o vestibular foi composto por mais de uma etapa ou até por mais de uma edição anual. Desse conjunto, foram identificadas 25 questões que abordavam direta ou indiretamente os Números Complexos, seja em sua forma algébrica, trigonométrica ou em aplicações em equações polinomiais.

Todas essas questões foram resolvidas e comentadas no presente trabalho, de forma a evidenciar tanto o nível de complexidade das propostas quanto a evolução da abordagem ao longo das décadas.

3.1 O *website* do professor Lenimar Nunes de Andrade

Os exames de vestibulares da UFPB dos anos de 1965 a 2009 foram baixados do site do professor Lenimar Nunes de Andrade, cujo ambiente pode ser visualizado nas figuras 1 e 2:

Figura 1 - Ambiente do site do professor Lenimar Nunes de Andrade



Fonte: mat.ufpb.br/vestibular/

Figura 2 - Ambiente do site do professor Lenimar Nunes de Andrade

Provas dos PSS/Vestibulares da UFPB (Vários arquivos disponibilizados estão no formato PDF e comprimidos pelo ZIP)		
2009		
1ª série GABARITOS PDF (44 Kbytes)	Português, Inglês, Física, Química, Biologia, Matemática, História, Geografia DOC (2,8 Mbytes) PDF (1 Mbyte)	
	Espanhol DOC (2,8 Mbytes) PDF (1 Mbyte)	Francês DOC (2,8 Mbytes) PDF (875 Kbytes)
2ª série GABARITOS PDF (159 Kbytes)	Português, Inglês, Física, Química, Biologia, Matemática, História, Geografia DOC (4 Mbytes) PDF (608 Kbytes)	
	Espanhol DOC (282 Kbytes) PDF (54 Kbytes)	Francês DOC (20 Kbytes) PDF (17 Kbytes)
3ª série	Matemática, Física, Biologia, História, Química, Geografia PDF (773 Kbytes)	
	Língua Portuguesa e Literatura Brasileira, Língua Estrangeira, Redação PDF (874 Kbytes)	

Fonte: mat.ufpb.br/vestibular/

Esse repertório se destaca pela organização e zelo na preservação histórica, disponibilizando as provas originais em formato PDF, muitas das quais foram elaboradas com máquina de datilografar à época. A iniciativa de digitalizar e disponibilizar esse acervo contribui significativamente para o acesso à memória

institucional e à análise de tendências e mudanças nos processos seletivos ao longo do tempo.

Inicialmente, nos anos 1960, as provas de vestibular foram elaboradas pela Comissão de Coordenação do Concurso de Habilitação. Eram utilizadas máquinas de escrever e mimeógrafos nessas elaborações. Com relação às questões, elas eram predominantemente subjetivas, como "resolva este problema" ou "complete as lacunas nas frases".

Já nos anos 1970, com a criação da Comissão Executiva do Concurso Vestibular, as provas passaram a ser corrigidas por computador. As provas eram compostas por questões objetivas e aplicadas em quatro dias consecutivos, abordando matérias como Matemática, Comunicação e Expressão, Estudos Sociais e Ciências Físicas e Biológicas.

A partir de 1980, o vestibular passou a ser organizado pela COPERVE (Comissão Permanente do Concurso Vestibular) e houve uma reformulação significativa nas provas, que passaram a ser impressas em formato reduzido. Entre 1986 e 1989, e de 1994 a 1999, o vestibular foi dividido em duas etapas: uma primeira etapa eliminatória, com questões objetivas e abertas, e uma segunda etapa com questões subjetivas.

Em 1993, foi adotado o sistema de digitalização das provas, utilizando o sistema TeX, e mais tarde, o MS Word. Entre 1971 e 1992, as provas foram corrigidas com cartões de resposta perfurados, mas desde 1993 passou-se a utilizar folhas de leitura ótica.

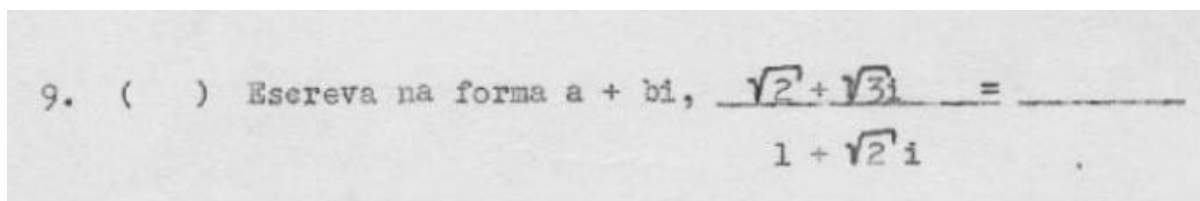
Em 2000, foi introduzido o Processo Seletivo Seriado (PSS), que dividiu o conteúdo do vestibular em três etapas, aplicadas ao final de cada série do Ensino Médio. Embora o PSS tenha sido uma inovação, ele gerou críticas, especialmente pela especialização excessiva no conteúdo da terceira série do Ensino Médio.

As provas dos vestibulares dos anos de 2010, 2011 e 2012, sendo 2012 o último ano do vestibular tradicional da UFPB, não estavam disponíveis na página de internet do professor Lenimar, sendo assim, foram solicitadas diretamente a ele, que ainda as tinha em seu acervo pessoal.

3.2 Soluções e comentários das questões de vestibular da UFPB de 1965 a 2012

A partir de agora, apresentaremos as questões coletadas do site do professor, bem como sua resolução e comentários:

Figura 3 - Questão 9, seção I, página 1 do Vestibular UFPB 1965



9. () Escreva na forma $a + bi$, $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}i}{1 + \sqrt{2}i} = \underline{\hspace{2cm}}$.

Fonte: mat.ufpb.br/vestibular/

Solução:

Basta multiplicar numerador e denominador pelo conjugado de $1 + \sqrt{2}i$, isto é:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}i}{1 + \sqrt{2}i} &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}i}{1 + \sqrt{2}i} \cdot \frac{1 - \sqrt{2}i}{1 - \sqrt{2}i} \\ &= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}i + \sqrt{3}i - \sqrt{3}i \cdot \sqrt{2}i}{1 - (\sqrt{2}i)^2} \\ &= \frac{\sqrt{2} - 2i + \sqrt{3}i + \sqrt{6}}{1 - 2i^2} \\ &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6} + \sqrt{3}i - 2i}{1 - 2 \cdot (-1)} \\ &= \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{3} \right) + \left(\frac{\sqrt{3} - 2}{3} \right) i\end{aligned}$$

Comentários:

Esta questão envolve a simplificação de uma expressão complexa utilizando o conjugado, técnica fundamental para operações com números complexos. Ela se encaixa no subtema de operações algébricas com números complexos, mais especificamente na divisão de números complexos. A questão pode ser classificada como de dificuldade fácil, pois requer apenas o conhecimento da multiplicação pelo conjugado, uma técnica básica, mas que pode gerar erros se o aluno não tiver prática.

Figura 4 - Questão 9, seção II, página 5 do Vestibular UFPB 1965

9. () Toda equação algébrica do grau n , em que o coeficiente do termo de maior grau é diferente da unidade:
- u) tem todas as raízes fracionárias
 - v) tem pelo menos uma raiz fracionária
 - x) tem raízes múltiplas
 - y) não tem raízes fracionárias
 - z) tem pelo menos uma raiz imaginária

Fonte: mat.ufpb.br/vestibular/

Solução:

Pelo Teorema Fundamental da Álgebra, uma equação de coeficientes reais ou complexos tem pelo menos uma raiz complexa. A resposta correta é o item (z).

Comentários:

A questão envolve raízes das equações algébricas e se encaixa no subtema de propriedades das raízes de polinômios. O conteúdo exige a aplicação do Teorema Fundamental da Álgebra e a compreensão das propriedades das raízes de polinômios, como raízes fracionárias, múltiplas ou imaginárias. Ela pode ser classificada como de dificuldade média, pois exige conhecimento sobre a natureza das raízes de polinômios e a aplicação desses conceitos.

Figura 5 - Questão 11, página 6 do Vestibular UFPB 1969

11. Escreva para cada uma das seguintes equações, a maior raiz, quando houver duas, o valor comum quando as raízes forem duplas, e a letra i (minúsculo) quando não houver raiz real:
- I) $1 + (3/x) + 2/x^2 = 0$; II) $6x^2 + 19x + 15 = 0$;
III) $(2x + 1)/(x^2 + x + 1)$; IV) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$; V) $x^2 + 1 = 0$

Fonte: mat.ufpb.br/vestibular/

Solução:

I)

$$1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} = 0$$

Multiplicando toda a equação por x^2 ($x \neq 0$):

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

Cujas raízes podem ser encontradas através da fórmula:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1}$$

$$x_1 = \frac{-3 - 1}{2} = -2$$

$$x_2 = \frac{-3 + 1}{2} = -1$$

A maior raiz é $x = -1$

II)

$$6x^2 + 19x + 15 = 0$$

Cujas raízes podem ser encontradas através da fórmula:

$$x = \frac{-19 \pm \sqrt{19^2 - 4 \cdot 6 \cdot 15}}{2 \cdot 6}$$

$$x_1 = \frac{-19 - 1}{12} = -\frac{5}{3}$$

$$x_2 = \frac{-19 + 1}{12} = -\frac{3}{2}$$

A maior raiz é $x = -\frac{3}{2}$

III) No enunciado desse item não há sinal de igualdade. Resolveremos ele admitindo que, como nos outros itens, seja igual a zero:

$$\frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} = 0$$

Para que a expressão seja nula, basta que para um mesmo valor de x o numerador seja nulo e o denominador seja diferente de zero. Isto é:

$$2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Note que:

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{4} \neq 0$$

Ou seja, a única raiz é $x = -\frac{1}{2}$

IV)

$$x^4 - 3x^2 + 2 = 0$$

Colocando x^2 em evidência:

$$(x^2)^2 - 3(x^2) + 2 = 0$$

Tomemos $x^2 = t$:

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

Cujas raízes podem ser encontradas através da fórmula:

$$t = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1}$$

$$t_1 = \frac{3-1}{2} = 1$$

$$t_2 = \frac{3+1}{2} = 2$$

$$\text{Para } t = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$\text{Para } t = 2 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

A maior raiz é $x = \sqrt{2}$

V)

$$x^2 + 1 = 0$$

$$x = \pm\sqrt{-1}$$

$$x = \pm i$$

Não há raízes reais, portanto, i

Comentários:

Essa questão trata da análise das raízes de equações algébricas, focando na identificação de raízes duplas e imaginárias. Ela exige que o vestibulando determine a maior raiz das equações, considerando o caso em que as raízes são duplas e, em caso de não haver raízes reais, como na equação V, que identifique que as soluções são imaginárias. Ela pode ser classificada como de dificuldade média, pois envolve análise e resolução de equações polinomiais, aplicando conceitos de álgebra relacionados às raízes reais e imaginárias. A questão se enquadra no subtema raízes de equações algébricas e é relevante para provas que abordam a resolução de polinômios e a análise de suas raízes.

6. Uma equação do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, onde a, b, c são números reais.
- a) Pode ter uma só raiz imaginária.
 - b) Nunca terá raízes iguais.
 - c) Tem sempre duas raízes reais.
 - ☒ d) Pode ser uma equação do primeiro grau.
 - e) Nenhuma das alternativas.

Fonte: mat.ufpb.br/vestibular/

Solução:

Talvez a dúvida do vestibulando resida entre as alternativas (a) e (d), porém pelo Teorema Fundamental da Álgebra, a alternativa (a) não pode estar correta, pois se há uma raiz complexa, existe pelo menos mais outra raiz complexa, que é seu conjugado.

A resposta correta é o item (d).

Comentários:

Dada essa solução e, embora não tenha ligação direta com os Números Complexos, a resolução dessa questão ilustra a importância da compreensão de conceitos fundamentais da álgebra, como o Teorema Fundamental da Álgebra, que garante que qualquer equação polinomial de grau n tem exatamente n raízes, considerando as multiplicidades e levando em conta as raízes complexas. Isso demonstra que questões simples envolvendo equações quadráticas podem ser enriquecidas com uma análise mais profunda e com a introdução de conceitos que fazem parte do conjunto dos Números Complexos.

15. Se os números complexos $(a + i/2)$, $(a - i/2)$ são raízes da equação $4x^2 - 4mx + m^2 + 1 = 0$, então m vale:
- a) $1/a$; b) $-1/a$; c) $-a$; d) a^2
 - ☒ e) Nenhuma das alternativas.

Fonte: mat.ufpb.br/vestibular/

Solução:

Seja:

$$4x^2 - 4mx + m^2 + 1 = 0$$

Tal que:

$$x_1 = \frac{a + i}{2}$$

$$x_2 = \frac{a - i}{2}$$

são raízes, então, através das relações de Viète, teremos:

$$x_1 + x_2 = -\frac{(-4m)}{4}$$

Isto é:

$$\frac{a + i}{2} + \frac{a - i}{2} = m$$

$$\frac{2a}{2} = m$$

$$a = m$$

A alternativa correta é o item (e).

Comentários:

Classificação: nível médio, já que requer reconhecimento do padrão conjugado e uso direto das relações de Viète (soma e produto das raízes), além de verificar consistência entre os parâmetros fornecidos.

Subtema: “polinômios quadráticos com coeficientes reais, pares conjugados e relações de Viète.

18. O número de raízes reais da equação $5x^4 + x^2 - 3 = 0$, é:
a) 1 ; (b) 2 ; c) 3 ; d) 4 ; e) N.D.A.

Fonte: mat.ufpb.br/vestibular/

Solução:

Seja:

$$5x^4 + x^2 - 3 = 0$$

Colocando x^2 em evidência:

$$5(x^2)^2 + x^2 - 3 = 0$$

Tomemos $x^2 = t$:

$$5t^2 + t - 3 = 0$$

Cujas raízes podem ser encontradas através da fórmula:

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-3)}}{2 \cdot 5}$$

$$t_1 = \frac{-1 - \sqrt{61}}{10} < 0$$

$$t_2 = \frac{-1 + \sqrt{61}}{10} > 0$$

Para:

$$t = \frac{-1 - \sqrt{61}}{10} \Rightarrow x^2 = \frac{-1 - \sqrt{61}}{10} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{-1 - \sqrt{61}}{10}}$$

Como:

$$\frac{-1 - \sqrt{61}}{10} < 0$$

Então, não há raízes reais.

Para

$$t = \frac{-1 + \sqrt{61}}{10} \Rightarrow x^2 = \frac{-1 + \sqrt{61}}{10} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{61}}{10}}$$

Como

$$\frac{-1 + \sqrt{61}}{10} > 0$$

Então, há duas raízes reais.

Gabarito da questão: (b).

Comentários:

A classificação é de nível médio, pois envolve a mudança de variável para que a equação de grau quatro se apresente como um problema de grau dois. Além disso, envolve a análise do determinante para consequente distinção entre raízes reais e complexas quando se retorna à variável original. O subtema enquadra-se em soluções de equações polinomiais de quarto grau e natureza das raízes.

28 - A função quadrática $f(x) = x^2 - 2x + 2$ apresenta as seguintes propriedades:

- a) tem a convexidade voltada para baixo e no ponto $x = 0$, o seu valor é 2
- b) nunca se anula e tem a convexidade para baixo
- c) é nula nos pontos $x = \pm 1$ e positiva para os valores de x externos às raízes
- d) tem a convexidade voltada para cima e é negativa para os valores de x compreendidos entre as raízes
- e) não tem raízes e tem a convexidade voltada para baixo

Fonte: mat.ufpb.br/vestibular/

Solução:

Seja:

$$f(x) = x^2 - 2x + 2$$

Vejamos os valores de x para os quais $f(x) = 0$, isto é:

$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

Cujas raízes podem ser encontradas através da fórmula:

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1}$$

$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{-4}}{2}$$

$$x_2 = \frac{2 + \sqrt{-4}}{2}$$

A função não apresenta raízes reais. Como o coeficiente do termo x^2 é maior que zero, a concavidade da parábola é voltada para cima, o que implica que a convexidade é voltada para baixo. Assim, a alternativa correta é o item (e).

Comentários:

A questão aborda temas relacionados à concavidade/convexidade das funções quadráticas e à existência de raízes reais, que são conceitos fundamentais ao estudar equações do segundo grau. A classificação dessa questão seria como fácil, pois requer um conhecimento básico sobre as propriedades das funções quadráticas, como a concavidade da parábola e a condição para a existência de raízes reais. A interpretação do gráfico de uma parábola e o cálculo do determinante (que neste caso é negativo, indicando que não há raízes reais) são suficientes para resolver a questão.

Ela se encaixa diretamente no subtema que trata da análise de funções quadráticas, envolvendo a concavidade da parábola e a existência de raízes reais. Essa questão pode ser considerada uma das mais recorrentes em provas de matemática básica, sendo uma excelente aplicação de conceitos fundamentais da álgebra.

Figura 10 - Questão 22, página 6 do Vestibular UFPB 1974.

22) Considere o símbolo i que tem as seguintes propriedades:

$i^0 = 1$, $i^1 = i$ e $i^2 = -1$. Além disso, para este símbolo valem as propriedades usuais da Álgebra. Então podemos escrever que: $i^3 = i^2 \cdot i = -i$, $i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1$, $i^5 = i^4 \cdot i = i$, etc.

Dando continuidade a este processo, obteríamos as seguintes expressões:

$i^{4n} = 1$, $i^{4n+1} = i$, $i^{4n+2} = -1$ e $i^{4n+3} = -i$ para $n = 0, 1, 2, \dots$

Utilizando os conceitos acima, podemos afirmar que o 1º termo de uma P.G. de $4n + 3$ termos cuja razão é i e cujo último termo é $i + 1$ é igual a:

- a) $1 - i$ b) $5 + i$ c) $i + 3$ **d) $-i - 1$** e) $1 + i$

Fonte: mat.ufpb.br/vestibular/

Solução:

Sejam:

a_1 , o primeiro termo de uma P.G.;

$a_{\hat{n}}$, um termo qualquer de uma P.G.;

$\hat{n}$, a quantidade de termos de uma P.G.;

q , a razão de uma P.G.;

Então a fórmula $a_{\hat{n}} = a_1 \cdot q^{\hat{n}-1}$ nos fornece a informação de um termo qualquer da P.G. a partir do primeiro termo, da razão e da quantidade de termos até chegar a ele. Assim:

$$a_1 = ?$$

$$a_{\hat{n}} = i + 1$$

$$\hat{n} = 4n + 3$$

$$q = i$$

Logo,

$$a_{\hat{n}} = a_1 \cdot q^{\hat{n}-1}$$

$$i + 1 = a_1 \cdot i^{4n+3-1}$$

$$i + 1 = a_1 \cdot i^{4n+2}$$

Como $i^{4n+2} = -1$, então:

$$i + 1 = a_1 \cdot (-1)$$

$$-i - 1 = a_1$$

Item correto: (d).

Comentários:

Essa questão explora as propriedades das potências de i e sua aplicação em uma progressão geométrica (P.G.). Ela exige que o vestibulando compreenda as propriedades usuais da álgebra envolvendo números complexos, especialmente a repetição cíclica das potências da unidade imaginária, que retorna ao valor inicial a cada quatro potências.

A questão pode ser classificada como de dificuldade difícil, pois exige que o aluno tenha um bom entendimento tanto das potências de i quanto das progressões geométricas. Ela é relevante em provas que abordam números complexos e progressões, sendo uma boa prática para testar o conhecimento dos alunos sobre as propriedades dos números imaginários e suas aplicações.

23. A equação $\frac{4}{x^2} - x^2 = -3$ possui:

- a) quatro raízes reais iguais
- ☒ b) duas raízes reais distintas e duas raízes complexas conjugadas
- c) nenhuma raiz real
- d) quatro raízes reais distintas
- e) nenhuma das respostas anteriores

Fonte: mat.ufpb.br/vestibular/

Solução:

Seja:

$$\frac{4}{x^2} - x^2 = -3 \quad (x^2 \neq 0)$$

Multiplicando toda a equação por x^2 :

$$4 - x^4 = -3x^2$$

$$x^4 - 3x^2 - 4 = 0$$

Colocando x^2 em evidência:

$$(x^2)^2 - 3(x^2) - 4 = 0$$

Tomemos $x^2 = t$:

$$t^2 - 3t - 4 = 0$$

Cujas raízes podem ser encontradas através da fórmula:

$$t = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1}$$

$$t_1 = \frac{3 - 5}{2} = -1$$

$$t_2 = \frac{3+5}{2} = 4$$

Para $t = -1$,

$$x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1} \Rightarrow x = \pm i$$

Para $t = 4$,

$$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

Assim, há duas raízes reais e duas raízes complexas (uma é o conjugado da outra).

Item correto: (b).

Comentários:

A questão pode ser classificada como de nível médio, uma vez que exige manipulação algébrica para redução da equação a uma forma quadrática e, posteriormente, interpretação das soluções no conjunto dos números reais e complexos. O subtema a que pertence é “equações polinomiais envolvendo números complexos”, pois combina a resolução de uma equação algébrica de quarto grau com a análise da natureza das raízes encontradas.

Assim, ela ilustra como o vestibular explora não apenas a técnica de resolução, mas também a compreensão da presença de raízes complexas em polinômios.

Figura 12 - Questão 19, página 7 do Vestibular UFPB 1983

- 19 Se $z_1 = 3 + i$ e z_2 é o seu conjugado, então $\frac{z_2}{z_1}$ na forma $a + bi$ é
- a) $\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$ b) $\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$ c) $\frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$
- d) $\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$ e) $-\frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$

Fonte: mat.ufpb.br/vestibular/

Solução:

Sejam:

$$z_1 = 3 + i$$

$$z_2 = 3 - i$$

Então:

$$\begin{aligned}\frac{z_2}{z_1} &= \frac{3-i}{3+i} \\ &= \frac{3-i}{3+i} \cdot \left(\frac{3-i}{3-i} \right) \\ &= \frac{9-6i+i^2}{9-i^2} \\ &= \frac{9-6i-1}{9-(-1)} \\ &= \frac{8-6i}{10} \\ &= \frac{4}{5} - \frac{3}{5}i\end{aligned}$$

Gabarito da questão: (c).

Comentários:

A questão apresentada trabalha com a noção de conjugado de um número complexo e exige a manipulação algébrica da divisão entre dois números complexos.

A classificação adequada para esta questão é de nível fácil, visto que se trata de uma aplicação direta do conceito de conjugado e da técnica de racionalização do denominador em frações complexas. O subtema envolvido é “operações com números complexos na forma algébrica”, com ênfase na divisão de números complexos utilizando o conjugado.

Figura 13 - Questão 5, página 3 do Vestibular UFPB 1986.

95 O número complexo $-8 - 10i$ é raiz da equação $x^2 + bx + c = 0$, com b e c reais. Determinar o valor de b .

Fonte: mat.ufpb.br/vestibular/

Solução:

Se $-8 - 10i$ é raiz de uma equação qualquer, então $-8 + 10i$ também o é. Sabemos que a soma das raízes de uma equação do segundo grau é dada por:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

Em que x_1 e x_2 são as raízes de uma equação quadrática genérica $ax^2 + bx + c = 0$. Assim, teremos:

$$(-8 - 10i) + (-8 + 10i) = -\frac{b}{1}$$

$$-16 = -b$$

$$b = 16$$

Comentários:

Trata-se de item de nível fácil, pois demanda apenas o reconhecimento do par conjugado e a aplicação direta da soma das raízes. O subtema enquadra-se em polinômios reais, pares conjugados e relações de Viète.

Figura 14 - Questão 7, página 3 do Vestibular UFPB 1989 1ª etapa

07 O valor da soma $i + i^2 + i^3 + \dots + i^{50}$, onde $i = \sqrt{-1}$, é

a) $2i$

b) 0

c) $i - 1$

d) 1

e) $1 - i$

Fonte: mat.ufpb.br/vestibular/

Solução:

Note que $i + i^2 + i^3 + \dots + i^{50}$ é a soma finita dos termos da P.G. $i, i^2, i^3, \dots, i^{50}$, cuja razão q é dada por $q = \frac{i^2}{i} = i$. A soma finita de uma P.G. é dada por:

$$s_n = a_1 \left(\frac{q^n - 1}{q - 1} \right)$$

Em que:

s_n é o valor da soma dos n primeiros termos da P.G.;

a_1 é o primeiro termo da P.G.;

q é a razão da P.G.

Sabemos que:

$$a_1 = i;$$

$$q = i;$$

$$n = 50 \text{ (basta olhar os expoentes de cada termo).}$$

Assim,

$$S_n = i \left(\frac{i^{50} - 1}{i - 1} \right)$$

Note que $i^{50} = (i^4)^{12} \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$, então:

$$S_n = i \left(\frac{-1 - 1}{i - 1} \right)$$

$$= i \left(\frac{-2}{-1 + i} \right)$$

$$= \frac{-2i}{-1 + i}$$

$$= \frac{-2i}{-1 + i} \cdot \left(\frac{-1 - i}{-1 - i} \right)$$

$$= \frac{2i + 2i^2}{1 - i^2}$$

$$= \frac{2i + 2(-1)}{1 - (-1)}$$

$$= \frac{-2 + 2i}{2}$$

$$= -1 + i$$

Gabarito da questão: (c).

A questão pode ser classificada como de nível difícil, pois exige a habilidade de manipular expressões algébricas complexas no contexto de uma soma geométrica. O subtema é o de progressões envolvendo números complexos, com ênfase na aplicação da fórmula da soma de P.G. cujos termos são números complexos.

16 Se $Z = (x + iy) \cdot (1 + i)$, com $x, y \in \mathbb{R}$, então, Z será um imaginário puro, se e somente se

a) $x \neq -y$

b) $x \neq y$

c) $y \neq 0$

d) $x = -y$

e) $x = y$

Solução:

Assim:

$$= (x - y) + (x + y)i$$

$$x - y = 0 \Rightarrow x = y$$

Comentários:

O subtema em que se insere é o de operações com números complexos na forma algébrica e caracterização de tipos específicos de números complexos (reais e imaginários puros).

A classificação dessa questão é de nível médio, pois apesar de demandar uma manipulação algébrica simples, talvez gere dúvidas assim como nos gerou no sentido da compreensão do conceito de imaginário puro. É fato que se $x = y$, então a parte real de Z será nula, mas e se $x = y = 0$? Teríamos $Z = 0$, que implica em um número real. Assim, se o enunciado pede um Z que seja imaginário puro, então já se subentende que $Z \neq 0$, pois caso fosse zero, imaginário puro não seria.

Portanto, soluções que garantem $x + y \neq 0$ são, nesse caso, redundantes (é o caso do item (a)). Excepcionalmente para esse item, verificamos o gabarito no site do professor Lenimar Nunes de Andrade, o qual confirma nossa primeira resolução: a resposta correta é a alternativa (e).

Figura 16 - Questão 16, página 3 do Vestibular UFPB 1992

16. O número de raízes reais do polinômio $p(x) = x^3 + x^2 + 3x - 5$ é
- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

Fonte: mat.ufpb.br/vestibular/

Solução:

Uma possível raiz para $x^3 + x^2 + 3x - 5 = 0$ pode ser algum divisor do termo independente (-5). Testando cada um desses divisores, é possível chegar à conclusão que $x = 1$ é uma raiz, pois $(1)^3 + (1)^2 + 3 \cdot (1) - 5 = 0$. Assim, ao dividir a expressão $x^3 + x^2 + 3x - 5$ por $x - 1$, teremos:

$$\frac{x^3 + x^2 + 3x - 5}{x - 1} = x^2 + 2x + 5$$

Isto é:

$$x^3 + x^2 + 3x - 5 = (x^2 + 2x + 5) \cdot (x - 1)$$

Estamos procurando os valores de x tais que $(x^2 + 2x + 5) \cdot (x - 1) = 0$. Um deles é, de fato, $x = 1$. Fazendo $x^2 + 2x + 5 = 0$, poderemos encontrar mais raízes:

$$x^2 + 2x + 5 = 0$$

Cujas raízes podem ser encontradas através da fórmula:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1}$$

$$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{-16}}{2} = \frac{-2 - \sqrt{-1 \cdot 16}}{2} = \frac{-2 - \sqrt{-1} \cdot \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 - 4i}{2} = -1 - 2i$$

$$x_2 = \frac{-2 + \sqrt{-16}}{2} = \frac{-2 + \sqrt{-1 \cdot 16}}{2} = \frac{-2 + \sqrt{-1} \cdot \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 + 4i}{2} = -1 + 2i$$

As raízes são: $x = 1$, $x = -1 - 2i$ e $x = -1 + 2i$, sendo duas raízes complexas e uma raiz real.

Gabarito da questão: (b).

Comentários:

Esse tema faz parte do subtema "raízes de polinômios", que trata da identificação e classificação das raízes, essenciais no estudo de equações algébricas de grau superior e suas soluções complexas. A questão pode ser classificada como de dificuldade média, pois envolve um polinômio de grau 3, sendo necessário "baixar o grau", e envolve a análise das raízes reais, o que requer um entendimento mais aprofundado sobre a natureza dos polinômios.

Figura 17 - Questão 14, página 7 do Vestibular UFPB 1995.

14. Sabendo-se que $x \in \mathbb{C}$ é uma solução da equação $x^2 + 1 = 0$, calcule a soma dos termos da P.G. finita $(x^4, x^8, x^{12}, \dots, x^{40})$.

Fonte: mat.ufpb.br/vestibular/

Solução:

Se x é uma solução da equação $x^2 + 1 = 0$, então

$$x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = -1$$

$$x = \pm\sqrt{-1}$$

$$x = \pm i$$

Note que a P.G. $x^4, x^8, x^{12}, \dots, x^{40}$ tem 10 termos.

Para $x = -i$, a P.G. $x^4, x^8, x^{12}, \dots, x^{40}$ se mostrará como: $(-i)^4, (-i)^8, (-i)^{12}, \dots, (-i)^{40}$, ou seja, $1, 1, 1, \dots, 1$, cuja soma de seus termos é igual a:

$$S_n = a_1 \cdot n$$

$$= 1 \cdot 10$$

$$= 10$$

Para $x = i$, a P.G. $x^4, x^8, x^{12}, \dots, x^{40}$ se mostrará como: $(i)^4, (i)^8, (i)^{12}, \dots, (i)^{40}$, ou seja, $1, 1, 1, \dots, 1$, cuja soma de seus termos é igual a:

$$S_n = a_1 \cdot n$$

$$= 1 \cdot 10$$

$$= 10$$

Comentários:

Essa questão pode ser classificada como de nível médio, pois exige do estudante não apenas identificar as raízes complexas da equação dada, mas também aplicar propriedades de potências de números complexos e reconhecer a estrutura de uma progressão geométrica. O subtema em que ela se enquadra é, mais uma vez, potenciação de números complexos e aplicação em sequências. Trata-se, portanto, de uma questão que conecta diretamente a álgebra dos números complexos com os

conteúdos de progressões, mostrando como diferentes áreas da matemática se interrelacionam.

Figura 18 - Questão 53, página 18 do Vestibular UFPB 1998.

53. A representação cartesiana dos números complexos $1+2i$, $-2+i$ e $-1-2i$ são vértices de um quadrado. O quarto vértice desse quadrado corresponde a

- a) $1-i$ b) $2-i$ c) $1+i$ d) $1-2i$ e) $-2-2i$

Fonte: mat.ufpb.br/vestibular/

Solução:

Sejam:

$$A = 1 + 2i = (1, 2)$$

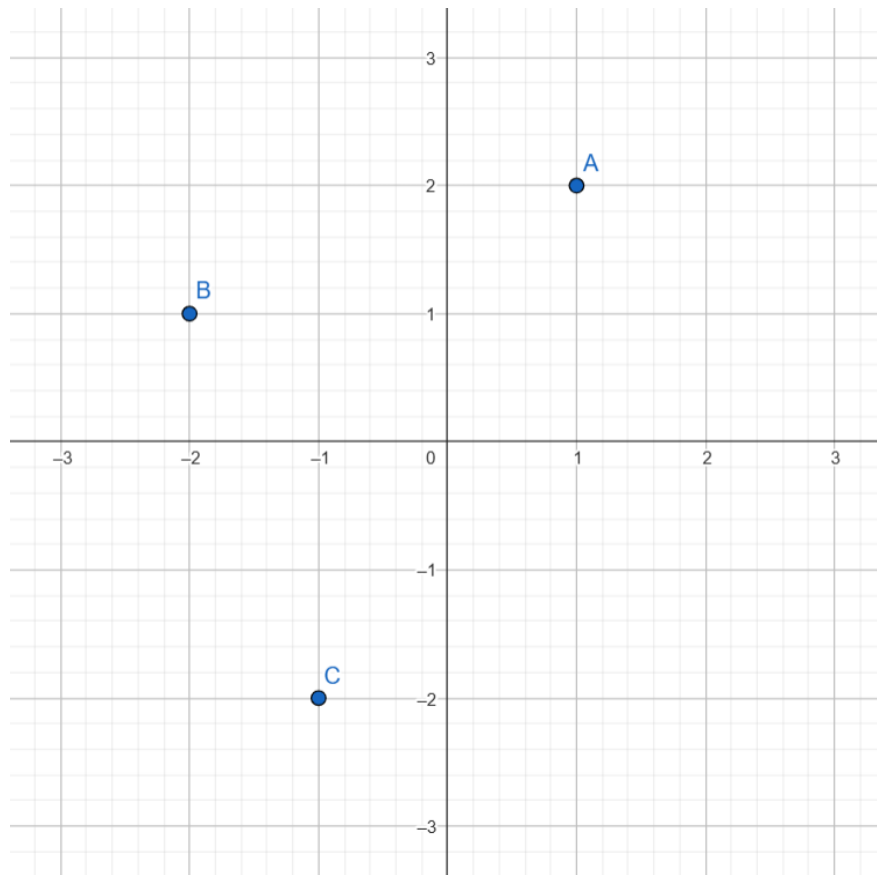
$$B = -2 + i = (-2, 1)$$

$$C = -1 - 2i = (-1, -2)$$

$$D = a + bi = (a, b)$$

vértices de um quadrado, então sua representação no plano complexo pode ser observada no gráfico 5:

Gráfico 5 - A,B,C complexos no plano complexo.



Fonte: GeoGebra (autor)

Note que:

$$Dist(A, B) = Dist(A, C)$$

$$\sqrt{(1 - (-2))^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{(1 - a)^2 + (2 - b)^2}$$

$$3^2 + 1^2 = (1 - a)^2 + (2 - b)^2$$

$$10 = 1 - 2a + a^2 + 4 - 4b + b^2$$

$$a^2 + b^2 = 2a + 4b + 5 \quad (*)$$

Note também que:

$$Dist(A, C) = Dist(B, D)$$

$$\sqrt{(1 - (-1))^2 + (2 - (-2))^2} = \sqrt{(a - (-2))^2 + (b - 1)^2}$$

$$2^2 + 4^2 = (a + 2)^2 + (b - 1)^2$$

$$20 = a^2 + 4a + 4 + b^2 - 2b + 1$$

$$a^2 + b^2 + 4a - 2b = 15 \quad (**)$$

Note ainda que:

$$Dist(C, B) = Dist(C, D)$$

$$\sqrt{(-1 - (-2))^2 + (-2 - 1)^2} = \sqrt{(-1 - a)^2 + (-2 - b)^2}$$

$$1^2 + (-3)^2 = 1 + 2a + a^2 + 4 + 4b + b^2$$

$$a^2 + b^2 + 2a + 4b + 5 = 10$$

$$a^2 + b^2 + 2a + 4b = 5 \quad (***)$$

Organizando as três equações:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 2a + 4b + 5 & (*) \\ a^2 + b^2 + 4a - 2b = 15 & (**) \\ a^2 + b^2 + 2a + 4b = 5 & (***) \end{cases}$$

Substituindo (*) em (**)

$$2a + 4b + 5 + 4a - 2b = 15$$

$$6a + 2b = 10 \quad (****)$$

Substituindo (*) em (***)

$$2a + 4b + 5 + 2a + 4b = 5$$

$$4a + 8b = 0 \quad (*****)$$

Organizando as equações (****) e (*****):

$$\begin{cases} 6a + 2b = 10 \\ 4a + 8b = 0 \end{cases}$$

É possível ver que na segunda equação $a = -2b$, e ao substituir na primeira, teremos:

$$6(-2b) + 2b = 10$$

$$-12b + 2b = 10$$

$$-10b = 10$$

$$b = -1$$

Como $b = -1$, então

$$a = -2 \cdot (-1)$$

$$a = 2$$

Logo:

$$D = 2 - i = (2, -1)$$

Assertiva correta: (b).

Comentários:

Essa questão pode ser classificada como de nível médio, inserida no subtema de geometria dos Números Complexos, com enfoque na distância entre pontos. Assim, embora o enunciado esteja formulado em termos de números complexos, uma estratégia de solução para tal problema poderia estar na interpretação desses números como pontos no plano, utilizando diretamente as ferramentas da geometria analítica: distância entre dois pontos e propriedades de quadrados. Essa abordagem mostra a versatilidade do tema.

9. Sabendo-se que $5+i=(1+i)(3-2i)$ e $239-i=-(1+i)(3+2i)^4$, mostre que $z=(5+i)^{16} (239-i)^4$ é um número real.

Fonte: mat.ufpb.br/vestibular/

Solução:

$$\begin{aligned} z &= (5+i)^{16} \cdot (239-i)^4 \\ &= ((1+i)(3-2i))^{16} \cdot (-(1+i)(3+2i)^4)^4 \\ &= (1+i)^{16} \cdot (3-2i)^{16} \cdot (1+i)^4 \cdot (3+2i)^{16} \\ &= (1+i)^{20} \cdot (3-2i)^{16} \cdot (3+2i)^{16} \\ &= ((1+i)^2)^{10} \cdot ((3-2i)(3+2i))^{16} \\ &= (1+2i+i^2)^{10} \cdot (9-4i^2)^{16} \\ &= (1+2i-1)^{10} \cdot (9-4(-1))^{16} \\ &= (2i)^{10} \cdot 13^{16} \\ &= 2^{10} \cdot i^{10} \cdot 13^{16} \\ &= (i^2)^5 \cdot 2^{10} \cdot 13^{16} \\ &= (-1)^5 \cdot 2^{10} \cdot 13^{16} \\ &= -(2^{10} \cdot 13^{16}) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Comentários:

Essa questão pode ser classificada como de nível difícil, pois envolve uma manipulação extensa de potências de números complexos, fatorações e uso de identidades fornecidas no enunciado. O subtema é manipulação algébrica e potenciação de números complexos, com foco em expressões que exploram a

periodicidade das potências de i e a simplificação de produtos notáveis no plano complexo.

Figura 20 - Questão 5, página 3 do Vestibular UFPB 2001 - 3ª série

5. O número complexo $z = a + ib$, onde $a, b \in \mathbb{Z}$, é tal que (a, b) pertence à reta $2x - y + 1 = 0$. Sabendo-se que $|z| = \sqrt{2}$, determine z .

Fonte: mat.ufpb.br/vestibular/

Solução:

Sabendo que:

$$z = a + bi$$

E que:

$$|z| = \sqrt{2}$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$$

$$a^2 + b^2 = 2 \quad (*)$$

E que:

$$(a, b) \in 2x - y + 1 = 0$$

Então:

$$2a - b + 1 = 0$$

$$b = 2a + 1 \quad (**)$$

Substituindo (**) em (*):

$$a^2 + (2a + 1)^2 = 2$$

$$a^2 + 4a^2 + 4a + 1 = 2$$

$$5a^2 + 4a - 1 = 0$$

Cujas raízes podem ser encontradas com a fórmula:

$$a = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-1)}}{2 \cdot 5}$$

$$a_1 = \frac{-4 - 6}{10} = -1$$

$$a_2 = \frac{-4 + 6}{10} = \frac{1}{5}$$

Para $a = -1$,

$$b = 2 \cdot (-1) + 1 = -1$$

Como $a, b \in \mathbb{Z}$, não consideraremos $a = \frac{1}{5}$ nem o desdobramento de b associado.

Portanto,

$$z = -1 - i$$

Comentários:

Questão classificada como de nível médio, no subtema geometria dos números complexos no plano cartesiano (forma algébrica e módulo). Trata-se de um item que integra de forma clara a interpretação geométrica do módulo (distância à origem) com técnicas de geometria analítica: interseção de reta ($b = 2a + 1$) com circunferência ($a^2 + b^2 = 2$).

UFPB / UFCG

5. Encontre os números complexos z , de módulo 1, tais que $\bar{z} \cdot z^2 \cdot \bar{z}^3 \cdot z^4 = i$, onde $i^2 = -1$ e $\bar{z}$ é o conjugado de z .

Fonte: mat.ufpb.br/vestibular/

Solução:

Seja $z = a + bi$ tal que $|z| = 1$ e $\bar{z} \cdot z^2 \cdot \bar{z}^3 \cdot z^4 = i$

Note que:

$$\bar{z} \cdot z^2 \cdot \bar{z}^3 \cdot z^4 = \bar{z} \cdot z \cdot z \cdot \bar{z} \cdot \bar{z} \cdot \bar{z} \cdot z \cdot z \cdot z \cdot z$$

$$= (\bar{z} \cdot z) \cdot (\bar{z} \cdot z) \cdot (\bar{z} \cdot z) \cdot (\bar{z} \cdot z) \cdot z \cdot z$$

$$= |z|^2 \cdot |z|^2 \cdot |z|^2 \cdot |z|^2 \cdot z \cdot z$$

$$= 1^2 \cdot 1^2 \cdot 1^2 \cdot 1^2 \cdot z^2$$

$$= z^2$$

Como $\bar{z} \cdot z^2 \cdot \bar{z}^3 \cdot z^4 = i \Rightarrow z^2 = i$, isto é, estamos procurando os valores de $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, que satisfazem $z^2 = i$. Isto é:

$$(a + bi)^2 = i$$

$$a^2 + 2abi + b^2 i^2 = i$$

$$a^2 + 2abi + b^2(-1) = i$$

$$a^2 - b^2 + 2abi = 0 + i$$

Se dois números complexos são iguais, então as partes reais de cada um devem ser iguais e as partes imaginárias devem ser iguais respectivamente, isto é:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 0 & (*) \\ 2abi = i & (**) \end{cases}$$

Na expressão (*), temos:

$$a^2 = b^2$$

$$a = \pm\sqrt{b^2}$$

$$a = \pm b \quad (***)$$

Na expressão (**), temos:

$$2ab = 1 \quad (****)$$

Tomando $a = -b$ em (***) e substituindo em (****):

$$2(-b)b = 1$$

$$-b^2 = \frac{1}{2}$$

$$b = \pm\sqrt{-\frac{1}{2}}$$

Essa solução é incompatível com $b \in \mathbb{R}$.

Tomando $a = b$ em (***) e substituindo em (****):

$$2bb = 1$$

$$b^2 = \frac{1}{2}$$

$$b = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$b = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Essa solução é compatível com $b \in \mathbb{R}$. Então:

$$a = b \Rightarrow a = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Portanto, as soluções são:

$$z = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

e

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

Comentários:

Essa questão pode ser classificada como de nível médio e está inserida no subtema de propriedades do conjugado de números complexos. Trata-se de um item que exige conhecimento das propriedades de módulo e conjugado de complexos, bem como a extração de raízes complexas.

Figura 22 - Questão 6, página 2 do Vestibular UFPB 2004 - 3ª série

6. Determine todas as soluções (reais e complexas) da equação
 $(x^2 + 1)^2 = x^2 + 1.$

Fonte: mat.ufpb.br/vestibular/

Solução:

Seja:

$$(x^2 + 1)^2 = x^2 + 1$$

$$x^4 + 2x^2 + 1 = x^2 + 1$$

$$x^4 + x^2 = 0$$

Colocando x^2 em evidência:

$$(x^2)^2 + x^2 = 0$$

Tome $x^2 = t$:

$$t^2 + t = 0$$

Cujas raízes podem ser encontradas pela fórmula:

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0}}{2 \cdot 1}$$

$$t_1 = \frac{-1 - 1}{2} = -1$$

$$t_2 = \frac{-1 + 1}{2} = 0$$

Para $t = -1$:

$$x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1} \Rightarrow x = \pm i$$

Para $t = 0$:

$$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

(multiplicidade dois)

Comentários:

A classificação é de nível médio, pois a questão exige reconhecer a conveniência da substituição de variáveis, resolver a equação resultante e interpretar corretamente as soluções no campo dos números complexos. O subtema

correspondente é o de equações polinomiais com redução por substituição e determinação da natureza das raízes.

Figura 23 - Questão 5, página 2 do Vestibular UFPB 2005 - 3ª série.

5. Sejam x e y elementos quaisquer do conjunto $G = \{ g = m + ni \mid m, n \in \mathbb{Z} \}$, onde $i = \sqrt{-1}$. Considere as seguintes proposições e assinale com V a(s) verdadeira(s) e com F, a(s) falsa(s).

() Se $y \neq 0$, o quociente $\frac{x}{y} \in G$.

() O produto $xy \in G$.

() A soma $x + y \in G$.

A sequência correta é:

a) VFF

b) FVF

c) FFV

d) VVF

e) VFV

f) FVV

Fonte: mat.ufpb.br/vestibular/

Solução:

(F) Se $y \neq 0$, o quociente $\frac{x}{y} \in G$.

Tome $x = 1 + 2i$ e $y = 1 + i$, $x, y \in G$, logo:

$$\frac{x}{y} = \frac{1 + 2i}{1 + i}$$

$$= \frac{1 + 2i}{1 + i} \cdot \left(\frac{1 - i}{1 - i} \right)$$

$$= \frac{1 - i + 2i - 2i^2}{1 - i^2}$$

$$= \frac{1 + i - 2(-1)}{1 - (-1)}$$

$$= \frac{3 + i}{2}$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i \notin G, \text{ pois } \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}.$$

Portanto, assertiva falsa.

(V) O produto $xy \in G$.

Sejam $x, y \in G$ tais que:

$$\begin{aligned}x &= a + bi \\y &= c + di, \\(a, b, c, d &\in \mathbb{Z})\end{aligned}$$

Então:

$$xy = ac - bd + (ad + bc)i$$

Tal que:

$$\begin{aligned}ac - bd &\in \mathbb{Z} \\ad + bc &\in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

Portanto, assertiva verdadeira.

(V) A soma $x + y \in G$.

Sejam $x, y \in G$ tais que:

$$\begin{aligned}x &= a + bi \\y &= c + di \\a, b, c, d &\in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

Então:

$$x + y = a + bi + c + di = (a + c) + (b + d)i$$

Tal que:

$$\begin{aligned}a + c &\in \mathbb{Z} \\b + d &\in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

Portanto, assertiva verdadeira.

Sequência correta: FVV. Alternativa correta: (f).

Comentários:

Classificação de dificuldade: nível difícil, por exigir conhecimento específico sobre a distinção entre fechamento por adição/multiplicação e não-fechamento por divisão, além de conter seis alternativas. Trata-se do conjunto dos inteiros gaussianos (embora não precisasse conhecer esse conjunto para resolver o item). Subtema: estruturas algébricas em $\mathbb{C}$.

Figura 24 - Questão 11, página 4 do Vestibular UFPB 2007 - 3ª série - grupo 1

11. A representação de um número complexo $z = a + bi$, no plano cartesiano, é o ponto $P(a, b)$. Suponha que os pontos A , B e C sejam as representações das raízes cúbicas da unidade e que o percurso de uma marcha atlética, com 42 km de extensão, seja representado pelo triângulo ABC , cujos lados são medidos em km.

Use: $\sqrt{3} = 1,73$

Nesse sentido, quantas vezes um atleta, partindo de A , passará pelo ponto B , para completar a prova?

Fonte: mat.ufpb.br/vestibular/

Solução:

A, B e C são as soluções de $z = \sqrt[3]{1}$. Uma solução é $z = 1$ (a mais evidente), mas há ainda as possíveis soluções complexas, isto é:

$$z^3 = 1$$

$$(a + bi)^3 = 1$$

$$a^3 + 3a^2bi + 3ab^2i^2 + b^3i^3 = 1$$

$$a^3 + 3a^2bi - 3ab^2 - b^3i = 1$$

$$a^3 - 3ab^2 + (3a^2b - b^3)i = 1 + 0i$$

Sabemos que dois números complexos são iguais se suas partes reais e imaginárias forem iguais respectivamente. Isto é:

$$\begin{cases} a^3 - 3ab^2 = 1 & (*) \\ 3a^2b - b^3 = 0 & (**) \end{cases}$$

De (**), temos que:

$$b^3 = 3a^2b$$
$$b^2 = 3a^2 \quad (***)$$

Substituindo (***) em (*):

$$a^3 - 3a(3a^2) = 1$$

$$a^3 - 9a^3 = 1$$

$$-8a^3 = 1$$

$$a^3 = -\frac{1}{8}$$

$$a = -\frac{1}{2} \quad (****)$$

Substituindo (****) em (***)

$$b^2 = 3\left(-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$b^2 = \frac{3}{4}$$

$$b = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Logo, as raízes são:

$$z = 1$$
$$z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

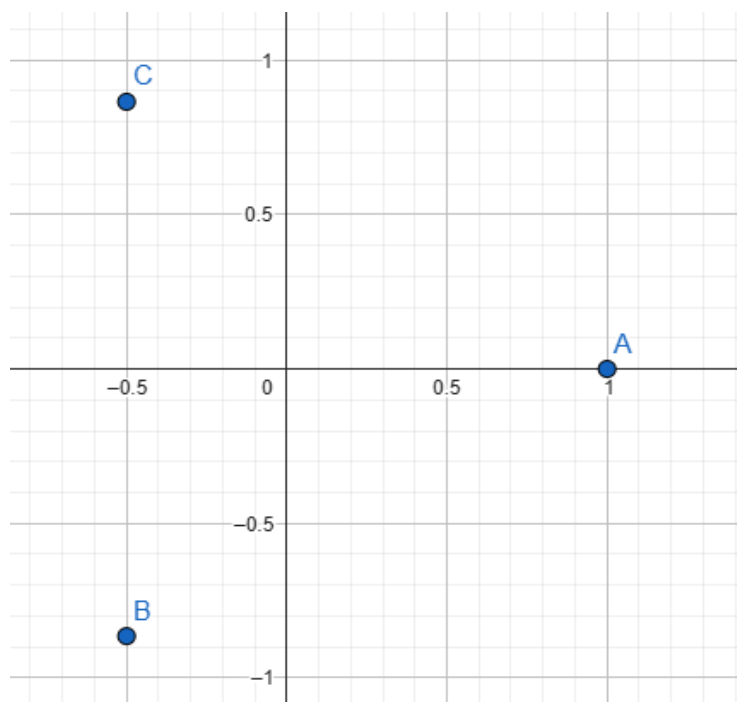
$$z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Os pontos são:

$$A(1,0), \quad B\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ e } C\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

No plano complexo:

Gráfico 6 - A,B,C complexos no plano complexo



Fonte: GeoGebra (autor)

Note que:

$$\begin{aligned} \text{Dist}(A, B) &= \sqrt{\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2 + \left(0 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} \end{aligned}$$

$$= \sqrt{3}$$

Note também que:

$$\text{Dist}(B, C) = \sqrt{3}$$

Note ainda que:

$$\begin{aligned} \text{Dist}(C, A) &= \sqrt{\left(-\frac{1}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 0\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} \\ &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

O triângulo ABC é, portanto, equilátero. Logo, o perímetro P é:

$$P = 3\sqrt{3} \text{ km}$$

Então, ao dividir a extensão da marcha atlética, 42 km, pelo perímetro do percurso triangular, $3\sqrt{3} \text{ km}$, teremos:

$$\frac{42}{3\sqrt{3}} = \frac{14}{\sqrt{3}} = \frac{14}{1,73} \approx 8,092$$

Isto é, dará 8 voltas completas e aproximadamente 0,092 de uma volta. Observe que $0,092 < 1,73 \approx \sqrt{3}$, logo não é suficiente para passar pelo ponto B novamente, o que implica em passar apenas 8 vezes pelo ponto B.

Comentários:

Classificação de dificuldade: nível difícil, pois exige interpretação geométrica no plano complexo e conversão da distância total em número de arestas percorridas. Subtema: raízes de um número complexo e distância entre pontos (geometria

analítica), ou seja, é um problema que envolve dois conceitos rebuscados. Pode-se considerar o problema não apenas difícil, mas também elegante, pela forma como conecta propriedades algébricas dos números complexos a interpretações geométricas.

Figura 25 - Questão 23, página 11 do Vestibular UFPB 2008 3ª série

Questão 23

Um percurso feito por um atleta, em uma região plana, pode ser representado no plano cartesiano por um segmento de reta $\overline{AB}$. Sabendo-se que os pontos A e B são as representações geométricas dos números complexos $z_1 = \frac{2+4i^{35}}{3-i}$ e $z_2 = 4+3i$, é correto afirmar que esse percurso, em unidades de comprimento, mede:

- a) 6 b) 4,5 c) 5,5 d) 5 e) 6,5

Fonte: mat.ufpb.br/vestibular/

Solução:

Note que:

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{2+4i^{35}}{3-i} \\ &= \frac{2+4i^{32} \cdot i^3}{3-i} \end{aligned}$$

Observe que $i^{32} = (i^4)^8 = 1^8 = 1$ e que $i^3 = -i$, portanto:

$$\begin{aligned} &= \frac{2+4 \cdot 1 \cdot (-i)}{3-i} \\ &= \frac{2-4i}{3-i} \end{aligned}$$

Multiplicando numerador e denominador pelo conjugado do denominador:

$$= \frac{2-4i}{3-i} \cdot \left(\frac{3+i}{3+i} \right)$$

$$= \frac{6 + 2i - 12i - 4i^2}{9 - i^2}$$

$$= \frac{6 - 10i - 4(-1)}{9 - (-1)}$$

$$= \frac{10 - 10i}{10}$$

$$Z_1 = 1 - i \Rightarrow A = (1, -1)$$

De Z_2 , temos que:

$$Z_2 = 4 + 3i \Rightarrow B = (4, 3)$$

O comprimento do segmento $\overline{AB}$ é a distância entre os pontos A e B:

$$Dist(A, B) = \sqrt{(1 - 4)^2 + (-1 - 3)^2}$$

$$= \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2}$$

$$= \sqrt{9 + 16}$$

$$= \sqrt{25}$$

$$= 5$$

Gabarito da questão: (d).

Comentários:

Essa questão pode ser classificada como de nível difícil, pois exige do vestibulando não apenas a manipulação algébrica de números complexos, mas também a interpretação geométrica no plano complexo. Ela envolve dois subtemas importantes dentro do estudo dos números complexos: raízes de um número complexo e distância entre pontos (geometria analítica), assim é um item cuja

formulação revela elegância matemática, ao articular conceitos algébricos e geométricos de maneira integrada.

Figura 26 - Questão 26, página 19 do Vestibular UFPB 2009 3ª série

26. Considere, no plano complexo de Argand-Gauss, um relógio cujo centro coincide com a origem do plano e que, em determinado instante, a extremidade do ponteiro dos minutos está sobre o ponto do plano correspondente ao número complexo $-\sqrt{3} + i$. Nesse contexto, exatamente cinco minutos após esse instante, a extremidade desse ponteiro estará sobre o ponto do plano correspondente ao número complexo:

- a) $\sqrt{3} + i$ c) $-1 + \sqrt{3} i$ e) $1 + \sqrt{3} i$
 b) $-\sqrt{3} - i$ d) $-1 - \sqrt{3} i$

Fonte: mat.ufpb.br/vestibular/

Solução:

Sabendo que:

$$z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

$$\cos(\theta) = \frac{a}{|z|}$$

$$\sin(\theta) = \frac{b}{|z|}$$

Seja $z = -\sqrt{3} + i$, temos:

$$|z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\cos(\theta) = \frac{-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6} \text{ (150°) ou } \frac{7\pi}{6} \text{ (210°)}$$

$$\sin(\theta) = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6} \text{ (30°) ou } \frac{5\pi}{6} \text{ (150°)}$$

Portanto:

$$\theta = \frac{5\pi}{6} \text{ (150°)}$$

Um relógio analógico tem 12 marcações, em que cada marcação percorrida pelo ponteiro dos minutos corresponde a 5 minutos. Assim, ao dividir o ângulo em radianos de uma volta completa, 2π , pela quantidade de marcações, 12, teremos:

$$\frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$$

Isto é, a cada 5 minutos, o ponteiro dos minutos varre um ângulo de $\frac{\pi}{6}$ (ou 30°).

Teremos, então, o número complexo:

$$\hat{z} = 2 \left(\cos \left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} \right) \right)$$

$$\hat{z} = 2 \left(\cos \left(\frac{4\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{4\pi}{6} \right) \right)$$

$$= 2 \left(\cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{3} \right) \right)$$

Como:

$$\cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) = -\cos \left(\frac{\pi}{3} \right) \text{ e } \sin \left(\frac{2\pi}{3} \right) = \sin \left(\frac{\pi}{3} \right)$$

Então:

$$\hat{z} = 2 \left(-\cos \left(\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) \right)$$

$$= 2 \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$= -1 + \sqrt{3}i$$

Gabarito da questão: (c).

Comentários:

Em termos de dificuldade, a questão é difícil, pois exige compreensão tanto de álgebra quanto de geometria no contexto dos números complexos, especialmente a forma trigonométrica de um complexo. A análise dessa questão também pode enriquecer a distribuição de subtemas do trabalho, destacando a importância das operações geométricas e representações no plano complexo.

Figura 27 - Questão 19, página 6 do Vestibular UFPB 2012 3ª série

- 19.** O **fator de potência** de uma unidade consumidora de energia elétrica é definido pelo número $\cos\phi$, em que ϕ é o argumento de um número complexo $S = P + Qi$, denominado potência aparente. O fator de potência é uma medida importante, pois indica se uma unidade consumidora está utilizando a energia elétrica de forma eficiente e econômica. Se uma unidade consumidora tem potência aparente $S = 40 + 30i$, o seu **fator de potência** é:
- a) 0,75 b) 0,80 c) 0,85 d) 0,90 e) 0,95

Fonte: arquivo pessoal do professor Lenimar Nunes de Andrade

Solução:

Basta escrever $S = 40 + 30i$ na forma trigonométrica. Sabemos que:

$$|S| = \sqrt{40^2 + 30^2}$$

$$= \sqrt{1600 + 900}$$

$$= \sqrt{2500}$$

$$= 50$$

(triângulo pitagórico: 30, 40 e 50)

Sabemos também que:

$$\cos(\phi) = \frac{a}{|S|}$$

$$= \frac{40}{50}$$

$$= 0,80$$

Alternativa correta: (b).

Comentários:

Essa questão pode ser considerada de nível fácil e se insere no subtema das aplicações da forma trigonométrica dos Números Complexos, uma vez que avalia apenas a capacidade do aluno de identificar o argumento de um número complexo e utilizar o cosseno desse ângulo em um problema contextualizado.

4 CONCLUSÃO

A trajetória dos Números Complexos mostra que a Matemática é uma ciência em constante transformação, fruto da necessidade de resolver problemas até então impossíveis no conjunto dos Números Reais. De sua rejeição inicial à formalização como corpo algébrico, os Números Complexos se consolidaram como indispensáveis tanto no campo teórico quanto em aplicações práticas.

A análise das provas do vestibular da UFPB evidenciou que esse tema esteve presente de forma consistente ao longo de quase cinco décadas. Resolver e comentar essas questões possibilitou identificar a evolução do tratamento dado ao assunto e reforçou a relevância de seu ensino no nível médio, não apenas como conteúdo teórico, mas como preparação efetiva para exames de ingresso ao ensino superior.

Esse estudo permitiu constatar que nas primeiras décadas (1960 e 1970), as questões apareciam de forma mais tímida, geralmente associadas a equações quadráticas sem solução real. A partir da década de 1980, percebe-se maior diversidade, com problemas envolvendo operações entre complexos, cálculo de módulos, conjugados e representações no plano de Argand-Gauss. Nas décadas de 1990 e 2000, o tema consolidou-se como parte integrante do repertório de questões, explorando tanto a parte algébrica quanto a visualização geométrica, além de aplicações em progressões e equações polinomiais de grau superior.

A observação das 25 questões coletadas permitiu propor uma distribuição em termos percentuais dos subtemas mais recorrentes. Notamos que 10 questões (40% dos itens) se concentraram em raízes de polinômios e equações algébricas, destacando a ênfase das bancas em conteúdos ligados à natureza das raízes e ao uso do Teorema Fundamental da Álgebra.

Em seguida, 6 questões (24% das questões) abordaram a geometria dos números complexos, com representações no plano, cálculo de módulo, argumento e aplicações trigonométricas.

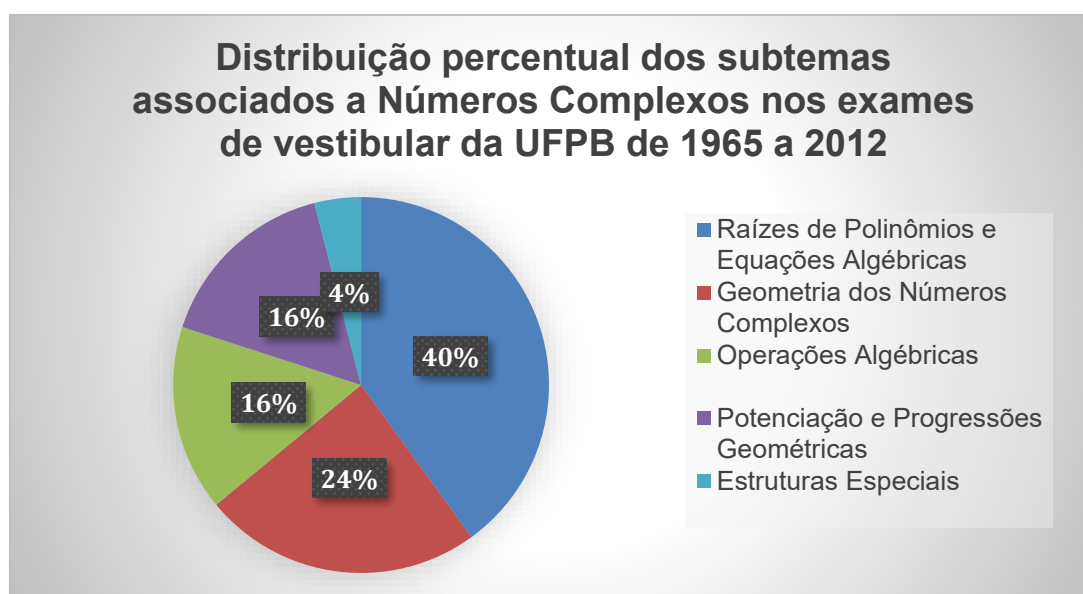
Já 16% dos itens (4 questões) trataram de operações algébricas (soma, produto, divisão, módulo e conjugado), enquanto outros 16% (4 questões) envolveram potenciação e progressões geométricas associadas ao número imaginário i .

Por fim, apenas uma questão (4% das questões) explorou estruturas especiais, como o conjunto dos inteiros gaussianos.

Essa distribuição mostra que, embora diferentes abordagens tenham sido contempladas ao longo das décadas, o vestibular privilegiou sobretudo o domínio de técnicas algébricas e o estudo da natureza das raízes, articulando-as com interpretações geométricas e aplicações diversas, reforçando a centralidade didático-pedagógica dos Números Complexos no vestibular da UFPB e no currículo de Matemática do Ensino Médio.

Essa distribuição pode ser visualizada, em termos de porcentagem, no gráfico 7 a seguir:

Gráfico 7 - Distribuição percentual dos subtemas associados a Números Complexos nos exames de vestibular da UFPB de 1965 a 2012



Fonte: Excel (autor)

Os resultados também evidenciam um contraste relevante: embora historicamente presentes em exames vestibulares, os Números Complexos não foram incluídos no currículo nacional apontado pela BNCC. Diante de sua relevância histórica e algébrica para a Matemática e de seu potencial formativo, defende-se a necessidade de considerar sua reinclusão no Ensino Médio.

Assim, compreender o conjunto dos Números Complexos não é apenas dominar técnicas algébricas, mas também reconhecer sua importância histórica, científica e educacional no desenvolvimento humano.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve como objetivo investigar a origem e a formalização dos Números Complexos, ao destacar sua importância histórica, algébrica, além de verificar sua presença em provas de vestibular da UFPB.

Ao final do percurso, consideramos que todos os objetivos foram atingidos, pois o resgate histórico permitiu compreender que os Números Complexos surgiram de uma necessidade prática, foram inicialmente rejeitados, mas se consolidaram como uma das mais belas extensões do pensamento matemático. A análise dos estudos dos matemáticos mostrou como o desenvolvimento desse conceito foi gradativo e em colaboração mútua, pois envolveu diferentes gerações. A apresentação da estrutura algébrica e das formas de representação geométrica possibilitou reforçar o entendimento de que os Números Complexos constituem um corpo, com propriedades bem definidas.

A investigação das provas da UFPB colaborou ao evidenciar a recorrência e a evolução do tema ao longo de quase cinco décadas, pois resolver e comentar os 25 problemas encontrados não apenas permitiu verificar a predominância de certos subtemas, mas também tornou possível a produção de um material de referência que pode ser utilizado por estudantes e professores.

Além de ter cumprido com os objetivos, este trabalho abre espaço para novos estudos. Uma possibilidade é estender a análise para outros vestibulares (de outras instituições que ainda realizam vestibulares tradicionais ou de instituições renomadas que realizam provas de alta dificuldade e grande concorrência, como o ITA, Unicamp, Unesp, UERJ, UFSC, PUC, entre outras), ou para o próprio o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), embora acredite-se que os Números Complexos nunca estiveram ou estarão nesse último exame.

Essa nova análise pode ter como objetivo verificar se a ausência dos Números Complexos na BNCC refletiu na redução da cobrança desse conteúdo nos mais diversos exames de admissão. Outra opção de pesquisa seria explorar estratégias pedagógicas para o ensino dos Números Complexos em turmas do Ensino Médio. Essas novas estratégias poderiam incluir metodologias ativas e recursos visuais que favorecessem a compreensão de sua natureza algébrica e trigonométrica/geométrica.

Por fim, esta pesquisa reforça a perspectiva de que os Números Complexos são mais do que uma simples formalidade algébrica. Esse conjunto numérico representa uma conquista histórica do pensamento matemático e é um conteúdo de grande potencial construtivo (tanto educacional, quanto intelectual). Assim, defende-se que sua presença no currículo da Educação Básica seja reconsiderada, de modo a garantir que novas gerações de estudantes tenham contato com esse tópico fundamental, não apenas como preparação para exames, mas como oportunidade de desenvolver raciocínio lógico, visão geométrica, entendimento histórico e compreensão mais ampla da Matemática como ciência.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, Lenimar Nunes de. **Breve história dos vestibulares da UFPB.**

Universidade Federal da Paraíba, 2003. Disponível em:

<<https://mat.ufpb.br/vestibular/hist.htm>>. Acesso em: 07 set. 2025.

ANDRADE, Lenimar Nunes de. **Vestibulares e Processo Seletivo Seriado da Universidade Federal da Paraíba.** Universidade Federal da Paraíba, 2003.

Disponível em: <<https://mat.ufpb.br/vestibular/hist.htm>>. Acesso em: 08 ago. 2025.

BOCKER NETO, Carlos. **Funções de uma Variável Complexa.** 2º semestre de 2023. Notas de aula. Universidade Federal da Paraíba.

CHAGAS, Juliana Santos Barcellos. **O ensino de números complexos no Ensino Médio: dificuldades e possibilidades de abordagem.** 2013. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Campos dos Goytacazes, 2013.

FERNANDEZ, Cecília S. BERNARDES JR, Nilson C. **Introdução às Funções de Uma Variável Complexa.** Rio de Janeiro: editora SBM, 2006.

INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA – IMPA. Na Folha: **Viète e o nascimento da álgebra moderna.** Disponível em:

<<https://impa.br/notices/na-folha-viete-e-o-nascimento-da-algebra-moderna/>>.

Acesso em: 02 ago. 2025.

LANG, Serge. **Álgebra.** 3. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2011.

MARTINS, Óscar. **A obra de Leonhard Euler.** Universidade de Lisboa, 2007.

Disponível em:

<<https://webpages.ciencias.ulisboa.pt/~ommartins/seminario/euler/obra.htm>>.

Acesso em: 06 ago. 2025

MERINO, Orlando. **A Short History of Complex Numbers.** University of Rhode Island. jan. 2006.

MILIES, César Polcino. **A Emergência dos Números Complexos.** Revista do Professor de Matemática, nº 24, 2º semestre de 1993. Disponível em: <

<https://rpm.org.br/cdrpm/24/2.htm>>. Acesso em: 05 ago. 2025.

MILIES, César Polcino. **A solução de Tartaglia para a equação do terceiro grau.**

Revista do Professor de Matemática nº 25, 1º semestre de 1994. Disponível em:

<<https://rpm.org.br/cdrpm/25/4.htm>>. Acesso em: 12 ago. 2025.

O'CONNOR, John J.; ROBERTSON, Edmund F. **Leonhard Euler**. MacTutor History of Mathematics. 1996. Disponível em: <<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Euler/>>. Acesso em: 15 ago. 2025.

POMMER, Wagner Marcelo. **Números Complexos: Uma Análise Histórico-Epistemológica em Face das Concepções Operacional e Estrutural de Anna Sfard**. Revista Signos, Lajeado, RS, v. 44, n. 2, 2023. DOI: 10.22410/issn.1983-0378.v44i2a2023.3594. Disponível em: <<https://www.univates.br/revistas/index.php/signos/article/view/3594>>. Acesso em: 25 ago. 2025.

SOUZA, José Henrique Ferreira de. **François Viète**. Clubes de Matemática da OBMEP, 2009. Disponível em: <https://clubes.obmep.org.br/blog/b_fviete/>. Acesso em: 02 ago. 2025.