



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Curso de Graduação em Matemática

Uma introdução à teoria geométrica da medida:
fórmulas da área e coárea e retificabilidade

Felipe Cândido Dutra de Andrade

João Pessoa
2026

Felipe Cândido Dutra de Andrade

Uma introdução à teoria geométrica da medida: fórmulas da área e córea e retificabilidade

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Bacharelado em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Damião Júnio Gonçalves Araújo

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

A553i Andrade, Felipe Cândido Dutra de.

Uma introdução à teoria geométrica da medida :
fórmulas da área e coárea e retificabilidade / Felipe
Cândido Dutra de Andrade. - João Pessoa, 2026.
79 p. : il.

Orientação: Damião Júnio Gonçalves Araújo.
TCC (Curso de Bacharelado em Matemática) -
UFPB/CCEN.

1. Fórmula da área. 2. Fórmula da coárea. 3.
Conjuntos retificáveis. I. Araújo, Damião Júnio
Gonçalves. II. Título.

UFPB/CCEN

CDU 51(043.2)

Felipe Cândido Dutra de Andrade

Uma introdução à teoria geométrica da medida: fórmulas da área e coárea e retificabilidade

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à coordenação do Curso de Bacharelado em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de bacharel em Matemática. Orientador: Damião Júnio Gonçalves Araújo. Aprovado em: 23/02/2026

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Damião Júnio Gonçalves Araújo
Orientador - UFPB - Campus I

Prof. Dr. Allan George de Carvalho Freitas
Avaliador - UFPB - Campus I

Me. Diego Gomes dos Santos
Avaliador - UFPB - Campus I

Aos meus pais, por me criarem com tanto amor.

Agradecimentos

Este trabalho é a consumação de uma longa trajetória. Se sou o que sou hoje, é devido a todos os encontros com pessoas que passaram pela minha vida e, portanto, tenho a consciência de que qualquer enumeração de nomes não fará jus a todo apoio que recebi. Reconheço, entretanto, que é salutar o devido destaque a certas pessoas que cumpriram um grande papel no decorrer desta jornada.

Agradeço primeiramente a Deus, por me trazer iluminação, sabedoria e paz, ao longo da minha caminhada.

Aos meus pais, Sandro e Nilma, agradeço profundamente pela criação amorosa e pelo incessante trabalho que me garantiram as melhores oportunidades. Sou grato pelo ambiente extremamente saudável em que cresci, onde a educação foi prioridade desde a minha infância e se manteve constante. Obrigado pelos sólidos valores morais que me transmitiram, alicerces que moldaram meu caráter e que carrego comigo.

Aos meus irmãos, Julyanna e Renato, por também fazerem parte da minha formação pessoal e por me ensinarem tanto.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Damião Araújo, que me guiou de maneira muito sábia durante toda a minha formação. Agradeço por sempre me incentivar a aprender e expandir meus horizontes, sem nunca deixar de se preocupar com meu andamento no curso. Estendo meu agradecimento aos professores da graduação que me marcaram positivamente e contribuíram para minha formação acadêmica.

Destaco o agradecimento ao professor Allan George de Carvalho Freitas e ao meu irmão mais velho acadêmico, Diego Gomes dos Santos, por aceitarem compor a banca examinadora deste trabalho.

Agradeço a todos os meus amigos pelos momentos juntos. Em especial, agradeço a Lobato, André, Arthur, Carlinhos, Diego, Drieskens, Guilherme e João Henrique, por tornarem tudo mais leve.

For those who come after

Resumo

Nosso objetivo neste trabalho é o de introduzir a Teoria Geométrica da Medida (TGM) com enfoque nos resultados da Fórmula da Área e da Coárea. A fórmula da área pode ser vista como uma generalização do teorema de mudança de variáveis em integrais múltiplas, geralmente visto em cursos avançados de Análise. A fórmula da coárea, por sua vez, é uma generalização do teorema de Fubini-Tonelli visto em cursos de Teoria da Medida e, tem como caso particular, a fórmula da área. Tais resultados lidam, a priori, com aplicações Lipschitz, mas podem ser enunciados para aplicações de classe C^1 .

Dedicamos o primeiro capítulo para revisar conceitos e fazer um apanhado de resultados que usaremos durante o texto e que costumam ser vistos num curso inicial de teoria da medida e portanto, serão apresentados em sua maioria, sem demonstração. No segundo capítulo, preparamos o ambiente para apresentarmos os principais resultados e, por fim, no terceiro capítulo, vemos sobre os conjuntos retificáveis para também enunciarmos e demonstrarmos as fórmulas da área e coárea nesse contexto ainda mais geral.

Palavras-chave: Fórmula da área; Fórmula da coárea; Conjuntos retificáveis.

Abstract

The objective of this work is to introduce Geometric Measure Theory (GMT), with a focus on the Area and Coarea formulas. The area formula can be viewed as a generalization of the change of variables theorem for multiple integrals, typically studied in advanced Analysis courses. The coarea formula, in turn, is a generalization of the Fubini-Tonelli theorem covered in Measure Theory courses, and includes the area formula as a particular case. These results deal, a priori, with Lipschitz maps, but can also be stated for maps of class C^1 .

The first chapter is dedicated to reviewing concepts and surveying results used throughout the text. Since these are typically covered in an introductory measure theory course, most will be presented without proofs. In the second chapter, we lay the groundwork to present the main results. Finally, in the third chapter, we discuss rectifiable sets in order to state and prove the area and coarea formulas within this even more general context.

Keywords: Area formula; Coarea formula; Rectifiable sets.

Sumário

Lista de Símbolos	9
Introdução	12
1 Preliminares	13
1.1 Medidas	13
1.1.1 Operações com Medidas	15
1.1.2 Introduzindo Topologias	16
1.2 Teoria da Integração	18
1.2.1 Aplicações Mensuráveis	18
1.2.2 Integração	19
1.2.3 Medidas Produto	21
1.3 Medida e Dimensão de Hausdorff	22
1.4 Densidades e Diferenciação de Medidas	26
2 Fórmulas da Área e Coárea	28
2.1 Alguns Resultados Sobre Aplicações Lipschitz	28
2.1.1 Extensões	28
2.1.2 Diferenciabilidade	29
2.2 Aplicações Lineares e Jacobianos	32
2.2.1 Revisando Álgebra Linear	32
2.2.2 Jacobianos	34
2.3 Linearização de Aplicações Lipschitz	36
2.4 Fórmula da Área	39
2.4.1 Corolários e Aplicações da Fórmula da Área	44
2.5 Fórmula da Coárea	46
2.5.1 Corolários e Aplicações da Fórmula da Coárea	55
3 Retificabilidade	58
3.1 Conjuntos Retificáveis	58
3.1.1 Conjuntos Retificáveis São Quase Subvariedades	59
3.1.2 Espaços Tangentes Aproximados	60
3.1.3 Conjuntos Não-Retificáveis	65
3.2 Fórmula da Área e Coárea em Conjuntos Retificáveis	67
3.2.1 Uma Decomposição Mais Forte	67
3.2.2 Fórmula da Área em Conjuntos Retificáveis	70
3.2.3 Fórmula da Coárea em Conjuntos Retificáveis	73
Referências Bibliográficas	78

Lista de Símbolos

$\mathcal{P}(X)$	Conjunto das partes do conjunto X
$A \setminus B$	Diferença entre os conjuntos A e B
$A \sqcup B$	União disjunta de A e B
$\mathcal{L}^n$	Medida de Lebesgue n -dimensional
$\mu \llcorner A$	Restrição da medida μ a A
$f_{\#}\mu$	<i>Pushforward</i> da medida μ pela aplicação f
$\mathcal{B}_X$	σ -álgebra de Borel do espaço topológico X
$\mathcal{L}$	σ -álgebra de Lebesgue
$\overline{\mathbb{R}}$	Conjunto dos reais estendidos $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$
χ_A	Função característica do conjunto A
$L^+(\mu)$	Aplicações μ -mensuráveis tomando valores em $[0, \infty]$
$L^1(\mu)$	Funções somáveis com respeito a μ
$\int^* f$	Integral superior de f
$\int_* f$	Integral inferior de f
$\mathcal{H}^n$	Medida de Hausdorff n -dimensional
$\mathcal{H}_\delta^n$	δ -aproximação da medida de Hausdorff n -dimensional
$\ \cdot\ $	Norma euclidiana ou norma de uma aplicação (o contexto deixa claro)
$\text{Lip } f$	Constante de Lipschitz da aplicação f
$\vdash$	Símbolo usado aqui para enunciar uma afirmação a ser provada
$\dim_{\mathcal{H}} A$	Dimensão de Hausdorff de A
$\mathbb{B}(x, r)$	Bola fechada de centro x e raio r
$\Theta^{*n}(\mu, A, x)$	Densidade superior n -dimensional de A em x com respeito a μ
$\Theta_*^n(\mu, A, x)$	Densidade inferior n -dimensional de A em x com respeito a μ
$\Theta^n(\mu, A, x)$	Densidade n -dimensional de A em x com respeito a μ
$D_\mu \nu$	Derivada de ν com respeito a μ
$\nu \ll \mu$	ν é absolutamente contínua com respeito a μ
$\nu \perp \mu$	ν e μ são mutuamente singulares
Df	Derivada de Fréchet de f
$ap \lim_{x \rightarrow a} f(x)$	Limite aproximado de f em a
$ap Df(a)$	Derivada aproximada de f em a
D_f	Conjunto dos pontos em que f é diferenciável
$\mu _A$	Traço da medida μ em A
$M_n(\mathbb{K})$	Conjunto das matrizes $n \times n$ com entradas em um corpo $\mathbb{K}$
$O(n, m)$	Conjunto das aplicações lineares ortogonais $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$
$\text{Sym}(n)$	Conjunto das aplicações lineares simétricas $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$
$\llbracket L \rrbracket$	Jacobiano da aplicação linear L
$\text{GL}(\mathbb{R}^n)$	Conjunto das aplicações lineares invertíveis de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

Jf	A aplicação $x \in D_f \mapsto \llbracket Df(x) \rrbracket$
J_f^+	$\{x \in D_f \mid \exists Jf(x) > 0\}$
J_f^0	$\{x \in D_f \mid \exists Jf(x) = 0\}$
$\mathbb{U}(x, r)$	Bola aberta de centro x e raio r
∇f	Gradiente da função f
$\Lambda(m, n)$	Conjunto de funções estritamente crescentes $\{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$
$C_c^0(\mathbb{R}^n)$	Espaço de funções contínuas com suporte compacto de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
$T_x E$	Espaço tangente aproximado de E em x
$Gr(k, m)$	Conjunto formado pelos subespaços vetoriais k -dimensionais do $\mathbb{R}^m$
$L(X, Y)$	Conjunto das aplicações lineares $X \rightarrow Y$
$\text{supp}(f)$	Suporte da aplicação f
$D^E f$	Derivada tangencial de f com respeito a E
$J^E f$	Jacobiano tangencial de f com respeito a E

Introdução

A TGM pode ser descrita como uma generalização da geometria diferencial através da teoria medida para lidar com aplicações e superfícies que não são necessariamente suaves. A TGM consolidou-se na década de 1960, a partir do trabalho de H. Federer e W. Fleming [5], e ela traça suas origens ao estudar problemas fundamentais como o problema isoperimétrico (encontrar a região plana com um dado perímetro com a maior área possível) e em tempos mais modernos, o problema de Plateau¹, de encontrar a superfície no $\mathbb{R}^3$ com menor área possível cujo bordo seja uma dada curva suave.

J. Douglas e T. Radó resolveram o problema de Plateau independentemente, o que concedeu a Douglas a Medalha Fields em 1936 pela sua solução. Infelizmente, os métodos desenvolvidos por Douglas não se adaptaram bem a extensões do problema original em dimensões mais altas. Surge então a Teoria das Correntes com Federer e Fleming. Correntes são funcionais lineares em espaços de formas diferenciáveis e, tal perspectiva leva a uma nova topologia natural no espaço das superfícies que tem propriedades boas de compacidade. Essa e outras vantagens que a teoria das correntes traz, foi o que permitiu que Federer e Fleming, em 1960, provassem a existência de uma solução para o problema de Plateau em todas as dimensões e codimensões.

Apesar da vastidão e da profundidade desses tópicos avançados, o foco deste trabalho concentra-se em uma introdução fundamental aos pilares da teoria. Dedicaremos nossa análise ao estudo da medida de Hausdorff e suas propriedades, a fórmula da área que é uma generalização do teorema clássico de mudança de variáveis, geralmente visto em cursos de Análise no $\mathbb{R}^n$ ou Medida e Integração e, a fórmula da córea, uma generalização do teorema de Fubini-Tonelli em teoria da medida. Apresentaremos, para ambas as fórmulas da área e córea, corolários e aplicações muito importantes que nos ajuda a intuir a teoria e, nos faz entender a importância destes resultados. Por fim, falamos sobre os conjuntos retificáveis que de certa forma são as superfícies generalizadas na teoria da medida. Veremos que estes conjuntos admitem uma noção de espaços tangentes aproximados e que a fórmula da área e córea continuam válidas sobre eles. Dentre essas ideias que generalizam conceitos na Análise em Variedades, também motivamos o estudo de tais objetos apresentando o Teorema de Estrutura, devido a Besicovitch e Federer, que nos garante a possibilidade de estudar qualquer conjunto do espaço euclidiano, via uma decomposição em conjuntos retificáveis e em conjuntos (chamados) não retificáveis.

Toda a teoria tratada aqui apenas em espaços euclidianos na verdade pode ser generalizada para abranger quaisquer espaços métricos. Além disso, a TGM encontra hoje vastas aplicações em muitas áreas da matemática como, Análise Complexa e Harmônica, EDPs, Cálculo das Variações, entre outros. Para os leitores interessados, recomendamos [9] que faz uma coletânea de muitos resultados e aplicações importantes, reservando as demonstrações para outras referências.

¹devido ao físico belga, Joseph Plateau (1801-1883), que estudou fenômenos de tensões superficiais em geral e, em particular, películas e bolhas de sabão.

1 Preliminares

O propósito desse capítulo é fazer uma breve revisão de teoria da medida, estabelecendo notações e resultados que serão usados ao longo do texto. Devido à quantidade de proposições e teoremas que serão enunciados aqui, omitiremos grande parte das demonstrações e caso o leitor esteja interessado em vê-las, sugerimos as referências principais para este capítulo [2], [3], [6] e [13]. Leitores mais experientes podem partir para os próximos capítulos e voltar aqui caso necessário.

Na seção 1.1, relembremos definições básicas sobre medidas. Na seção 1.2, comentamos sobre aplicações mensuráveis e integração com respeito a uma medida, apresentando os teoremas de convergência e o teorema de Fubini-Tonelli. Na seção 1.3, vemos a definição de medida e dimensão de Hausdorff e suas propriedades e, por fim, na seção 1.4, é comentado a respeito de densidades e diferenciação de medidas, conceitos esses que serão importantes na apresentação da fórmula da área.

1.1 Medidas

Apesar de futuramente trabalharmos apenas em $\mathbb{R}^n$, é conveniente começarmos de maneira mais abstrata. Seja X um conjunto e $\mathcal{P}(X)$ a coleção de todos os subconjuntos de X .

Definição 1.1. Uma aplicação $\mu : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ é uma medida em X se cumpre:

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. (Monotonicidade) $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$
3. (Subaditividade enumerável) $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Observação 1.1. O leitor mais atento pode notar que a definição acima é a de uma medida exterior, e que na verdade uma medida é uma medida exterior restrita ao conjunto formado pelos subconjuntos μ -mensuráveis de X (veja abaixo). Entretanto, seguindo a maneira mais comum usada na literatura sobre TGM, usaremos o termo “medida” para ambos tipos de funções, a menos de algum esclarecimento prévio.

Definição 1.2. (Carathéodory). Um conjunto $A \subset X$ é chamado μ -mensurável (ou simplesmente, mensurável), se para cada $B \subset X$, temos que

$$\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A)$$

Exemplo 1.1. Seja $\mu : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ definida por $\mu(A) :=$ número de elementos de A , se A é finito, e $\mu(A) = +\infty$, se A é infinito. Então μ é uma medida em X , chamada medida de contagem.

Exemplo 1.2. (Medida de Lebesgue).

Sejam $X = \mathbb{R}^n$ e $\mu : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ definida por

$$\mu(A) := \inf_{\mathcal{F}} \left\{ \sum_{Q \in \mathcal{F}} r(Q)^n \right\},$$

onde $\mathcal{F}$ é uma cobertura enumerável de A por cubos com lados paralelos aos eixos coordenados, e $r(Q)$ denotando o comprimento das arestas de Q (os cubos Q não são assumidos como abertos ou fechados). Então μ é uma medida em $\mathbb{R}^n$ chamada medida de Lebesgue n -dimensional e denotada por $\mathcal{L}^n$.

Observação 1.2. Sobre a medida de Lebesgue, valem as seguintes propriedades:

1. $\mathcal{L}^n$ é invariante por translações, isto é,

$$\mathcal{L}^n(A + x) = \mathcal{L}^n(A), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall A \subset \mathbb{R}^n.$$

2. $\mathcal{L}^n$ é homogênea de grau n com respeito a dilatações, isto é,

$$\mathcal{L}^n(\lambda A) = \lambda^n \mathcal{L}^n(A), \quad \forall \lambda > 0, \forall A \subset \mathbb{R}^n.$$

Definição 1.3. Dado X um conjunto, $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ é chamado de σ -álgebra se contiver o conjunto vazio, for fechado por complementação e por uniões e interseções enumeráveis.

Os conjuntos em $\mathcal{M}$ são chamados mensuráveis com respeito a $\mathcal{M}$, ou (se ficar claro pelo contexto), mensuráveis. Neste sentido, dizemos que o par $(X, \mathcal{M})$ é um espaço mensurável.

Dada uma σ -álgebra $\mathcal{M}$ chamamos uma função $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ de medida em $\mathcal{M}$ se satisfizer:

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. (Aditividade enumerável). Para toda sequência disjunta $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{M}$,

$$\mu \left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Uma medida μ em $\mathcal{M}$ é chamada:

1. completa: se para todo $E \in \mathcal{M}$, $\mu(E) = 0$ e $A \subset E$ implica $A \in \mathcal{M}$;
2. finita: se $\mu(X) < \infty$;
3. σ -finita: se existe uma sequência $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{M}$ tal que $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n = X$ e, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mu(A_n) < \infty$. Similarmente, um conjunto $A \subset X$ diz-se σ -finito se puder ser coberto por uma quantidade enumerável de conjuntos mensuráveis de medidas finitas. Por fim, no caso de X possuir uma topologia, dizemos que um conjunto $A \subset X$ é σ -compacto se puder ser coberto por uma quantidade enumerável de conjuntos compactos.

Teorema 1.1. Se μ é uma medida em um conjunto X , então a coleção de todos os subconjuntos μ -mensuráveis de X forma uma σ -álgebra.

Definição 1.4. Uma medida μ em X é chamada:

1. regular se, para todo $A \subset X$, existe E μ -mensurável, tal que $A \subset E$ e $\mu(A) = \mu(E)$;
2. finita ou σ -finita se assim for em todos os conjuntos μ -mensuráveis.

Teorema 1.2. (*Sequências de conjuntos mensuráveis*). Seja $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de conjuntos μ -mensuráveis. Valem as seguintes propriedades:

(i) Se $A_1 \subset \dots \subset A_n \subset A_{n+1} \dots$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right).$$

(ii) Se $A_1 \supset \dots \supset A_n \supset A_{n+1} \dots$ e $\mu(A_1) < \infty$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right).$$

1.1.1 Operações com Medidas

Definição 1.5. Sejam μ uma medida em X e $C \subset X$. Então a restrição de μ a C , denotada por $\mu \llcorner C$, é a medida definida por

$$(\mu \llcorner C)(A) := \mu(A \cap C), \quad \forall A \subset X$$

Definição 1.6. (Pushforward de medidas). Sejam μ uma medida em X e $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação. Então o pushforward de μ por f , denotado por $f_{\#}\mu$, é a medida definida por

$$f_{\#}\mu(A) := \mu(f^{-1}(A)), \quad \forall A \subset Y$$

Temos a seguinte propriedade em relação a ambas medidas acima:

Proposição 1.1. Sejam μ uma medida em X , $A \subset X$ e $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação. Então, dado $B \subset Y$, $f^{-1}(B)$ é μ -mensurável se, e somente se, é $f_{\#}(\mu \llcorner A)$ -mensurável, para todo $A \subset X$.

Demonstração. ($\Rightarrow$)

Sejam $B \subset Y$ tal que $f^{-1}(B)$ é μ -mensurável e tome $A \subset X$ arbitrário. Note que, para todo $S \subset Y$ temos que

$$\begin{aligned} f_{\#}(\mu \llcorner A)(S) &= \mu \llcorner A (f^{-1}(S)) = \mu (A \cap f^{-1}(S)) \\ &\stackrel{\text{def 1.2}}{=} \mu (A \cap f^{-1}(S) \cap f^{-1}(B)) + \mu (A \cap f^{-1}(S) \setminus f^{-1}(B)) \\ &= \mu (A \cap f^{-1}(S \cap B)) + \mu (A \cap f^{-1}(S \setminus B)) \\ &= f_{\#}(\mu \llcorner A)(S \cap B) + f_{\#}(\mu \llcorner A)(S \setminus B) \end{aligned}$$

logo, B é $f_{\#}(\mu \llcorner A)$ -mensurável.

($\Leftarrow$)

Suponha que para todo $A \subset X$, B é $f_{\#}(\mu \llcorner A)$ -mensurável. Note que, para todo $E \subset X$ temos

$$\begin{aligned} \mu(E \cap f^{-1}(B)) + \mu(E \setminus f^{-1}(B)) &= f_{\#}(\mu \llcorner E)(B) + f_{\#}(\mu \llcorner E)(Y \setminus B) \\ &\stackrel{\text{def 1.2}}{=} f_{\#}(\mu \llcorner E)(Y) = \mu \llcorner E(X) = \mu(E) \end{aligned}$$

logo, $f^{-1}(B)$ é μ -mensurável. $\square$

1.1.2 Introduzindo Topologias

Ao entender as noções básicas de medida, é natural começar a se perguntar a relação entre mensurabilidade e conceitos topológicos. O leitor interessado pode verificar [12], e descobrir que na topologia usual do $\mathbb{R}^n$, todos os abertos são Lebesgue mensuráveis e formam uma σ -álgebra. Neste sentido, um exemplo de σ -álgebra que tem um papel essencial na Análise é a chamada σ -álgebra de Borel em $\mathbb{R}^n$, denotada por $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$, que por definição é a menor σ -álgebra que contém todos os abertos de $\mathbb{R}^n$. Essa definição ganha significado ao entendermos bem o que queremos dizer com “menor”, e ao mostrar que tal σ -álgebra existe e é única.

O termo “menor” significa que se $\mathcal{M}$ é qualquer σ -álgebra que contém todos os abertos de $\mathbb{R}^n$, então necessariamente $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \subset \mathcal{M}$. É fácil ver que qualquer interseção de σ -álgebras é também uma σ -álgebra e portanto, podemos definir $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ como a interseção de todas as σ -álgebras que contêm os abertos, ou em outras palavras, a σ -álgebra gerada pelos abertos do $\mathbb{R}^n$. Isso mostra a existência e unicidade da σ -álgebra de Borel.

Partindo dessa noção, podemos generalizar tal definição para qualquer espaço topológico, é o que faremos agora.

Definição 1.7. Seja (X, τ) um espaço topológico. Definimos a σ -álgebra de Borel de X como a interseção de todas as σ -álgebras que contêm τ (σ -álgebra gerada por τ , denotada por $\sigma(\tau)$). Denotamos tal conjunto por $\mathcal{B}_X$, e os elementos de $\mathcal{B}_X$ são chamados conjuntos de Borel ou borelianos.

Uma medida μ em X é dita medida de Borel se todo conjunto de Borel é μ -mensurável. Além disso, μ é uma medida Borel regular em X , se é uma medida de Borel e, se para todo $A \subset X$, existe $E \in \mathcal{B}_X$ tal que $A \subset E$ e $\mu(A) = \mu(E)$.

Sendo (X, τ) um espaço topológico, assumiremos que a σ -álgebra $\mathcal{M}$ de subconjuntos de X é a σ -álgebra $\mathcal{B}_X$ de Borel, a menos de alguma referência explícita a outra σ -álgebra.

No caso da topologia ser metrizável por uma métrica d , um critério simples para uma medida μ ser de Borel é dado pelo teorema abaixo.

Teorema 1.3. *Seja (X, d) um espaço métrico. Uma medida μ em X é de Borel se, e somente se,*

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

sempre que $A, B \subset X$ satisfazem $d(A, B) := \inf\{d(a, b) \mid a \in A, b \in B\} > 0$

Exemplo 1.3. A medida de Lebesgue $\mathcal{L}^n$ é a única medida Borel regular, invariante por translações no $\mathbb{R}^n$ tal que a medida do cubo unitário $[0, 1]^n$ é 1.

Definição 1.8. Uma medida de Borel μ em um espaço topológico (X, τ) é dita:

1. aberta σ -finita se existe uma sequência $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de abertos de X tal que

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n \text{ e } \mu(U_n) < \infty, \forall n \in \mathbb{N}.$$

2. localmente finita se, para cada $x \in X$, existe uma vizinhança aberta U de x tal que $\mu(U) < \infty$.

Podemos perceber que uma medida de Borel localmente finita num espaço topológico segundo enumerável (isto é, satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade) é aberta σ -finita.

Uma boa ideia geral que podemos seguir é de que existem duas classes principais de medidas que interagem bem com a topologia; primeiramente, medidas Borel regular localmente finitas em espaços métricos separáveis e, secundamente, medidas de Radon (que iremos introduzir na Definição 1.9) em espaços de Hausdorff localmente compactos. No decorrer do texto, estaremos mais interessados em espaços métricos separáveis localmente compactos (por exemplo, abertos do $\mathbb{R}^n$ ou, mais geralmente, subconjuntos do $\mathbb{R}^n$ localmente fechados, como subvariedades mergulhadas), tipo de espaço em que as medidas citadas acima coincidem.

Teorema 1.4. *Sejam (X, τ) um espaço topológico G_δ (ou seja, no qual todo fechado é uma interseção enumerável de abertos) e μ uma medida Borel regular aberta σ -finita em X . Valem as seguintes propriedades:*

- (i) Para cada $A \subset X$, $\mu(A) = \inf\{\mu(U) \mid A \subset U, U \in \tau\}$
- (ii) Para cada $A \subset X$ com A μ -mensurável, $\mu(A) = \sup\{\mu(C) \mid C \subset A, C \text{ fechado}\}$

Definição 1.9. Seja (X, τ) um espaço topológico Hausdorff localmente compacto. Uma medida de Radon em X é uma medida de Borel μ tal que:

1. Se $K \subset X$ é um compacto, então $\mu(K) < \infty$;
2. Para todo $U \subset X$, $U \in \tau$,

$$\mu(U) = \sup\{\mu(K) \mid K \subset U, K \text{ compacto}\};$$

3. Para todo $A \subset X$,

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) \mid A \subset U, U \in \tau\}.$$

Observação 1.3. Num espaço métrico localmente compacto e separável (por exemplo, $\mathbb{R}^n$), uma medida é de Radon se, e somente se, for Borel regular localmente finita.

1.2 Teoria da Integração

1.2.1 Aplicações Mensuráveis

A esse ponto do texto, é importante introduzirmos um termo que será muito usado. Para isso, considere uma medida μ num conjunto X e seja $P(x)$ uma afirmação ou fórmula que contenha a variável livre $x \in X$. Dizemos que $P(x)$ vale para μ -q.t.p. (quase todo ponto) $x \in X$ se

$$\mu(\{x \in X : P(x) \text{ é falsa}\}) = 0.$$

Dependendo do contexto, dizemos simplesmente que $P(x)$ vale μ -q.s. (quase sempre).

Agora extendemos a noção de mensurabilidade de conjuntos para funções.

Definição 1.10. Dados os espaços mensuráveis $(X, \mathcal{M})$ e $(Y, \mathcal{N})$, dizemos que uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ é mensurável com respeito a $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ (ou simplesmente, mensurável) se, para todo $A \in \mathcal{N}$, $f^{-1}(A) \in \mathcal{M}$.²

Temos, por exemplo:

1. Para X e Y espaços topológicos, uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ é dita Boreliana ou Borel mensurável se é mensurável com respeito a $\mathcal{B}_X$ e $\mathcal{B}_Y$.
2. Para $X = \mathbb{R}$ e Y um espaço topológico (em particular, $Y = \mathbb{R}$), uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ é dita Lebesgue mensurável se é mensurável com respeito a $\mathcal{L}$ e $\mathcal{B}_Y$, onde $\mathcal{L}$ é a σ -álgebra dos subconjuntos Lebesgue mensuráveis de $\mathbb{R}$.

Definição 1.11. Sejam μ uma medida em um conjunto X e Y um espaço topológico. Uma aplicação $f : D \subset X \rightarrow Y$ definida em μ -q.t.p. de X (isto é, $\mu(X \setminus D) = 0$) é chamada de μ -mensurável se para todo $B \in \mathcal{B}_Y$, $f^{-1}(B)$ é μ -mensurável.

Observação 1.4. Devido ao fato de que todo subconjunto de medida nula de X é μ -mensurável, uma aplicação $f : D \subset X \rightarrow Y$ é μ -mensurável se, e somente se, qualquer extensão $\bar{f} : X \rightarrow Y$ é mensurável com respeito a σ -álgebra dos μ -mensuráveis e $\mathcal{B}_Y$, no sentido da Definição 1.10.

Vejamos agora algumas propriedades de aplicações mensuráveis (que devido a observação acima, também valem para aplicações μ -mensuráveis).

Teorema 1.5. *Sejam $(X, \mathcal{M})$, $(Y, \mathcal{N})$, $(Z, \mathcal{O})$ espaços mensuráveis. Valem as seguintes propriedades:*

- (i) Se $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ são mensuráveis, $g \circ f$ também o é.
- (ii) Se X e Y são espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ é contínua, então f é boreliana.
- (iii) Se $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de aplicações mensuráveis $X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$,³ as seguintes aplicações $X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ são mensuráveis: $\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n$, $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$, $\liminf_{n \in \mathbb{N}} f_n$, $\limsup_{n \in \mathbb{N}} f_n$. Em particular, se f_n converge pontualmente, a função limite é mensurável. Mais geralmente, se Y é um espaço

²isto é, adaptamos o mantra: “pré-imagem de aberto é aberto” para “pré-imagem de mensurável é mensurável”.

³definimos $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

métrico e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência pontualmente convergente de funções mensuráveis $X \rightarrow Y$, o limite da sequência é mensurável.

(iv) Se $f, g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ são ambas mensuráveis, então $f + g$, fg , $\max\{f, g\}$ e $\min\{f, g\}$ também o são. Quando $g \neq 0$ então $\frac{f}{g}$ também é mensurável.

Teorema 1.6. (Egorov). Sejam μ uma medida num conjunto X , Y um espaço métrico separável, $A \subset X$ com $\mu(A) < \infty$ e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções μ -mensuráveis tomando valores em Y , a qual converge pontualmente μ -q.s. em A para $f : D \subset X \rightarrow Y$ μ -mensurável. Então, para todo $\varepsilon > 0$, existe B μ -mensurável tal que $\mu(A \setminus B) < \varepsilon$ e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para f em B .

1.2.2 Integração

Até o fim desta seção, fixemos uma medida μ num conjunto X .

Definição 1.12. Uma função característica de $S \subset X$ é a função $\chi_S : X \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\chi_S(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in S \\ 0, & \text{se } x \notin S \end{cases}$$

Proposição 1.2. Seja $f : X \rightarrow [0, \infty)$ μ -mensurável. Então existem conjuntos $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μ -mensuráveis em X tais que

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \chi_{A_n}.$$

Demonstração. Defina $A_1 := \{x \in X \mid f(x) \geq 1\}$ e indutivamente defina para $n \geq 2$

$$A_n := \left\{ x \in X \left| f(x) \geq \frac{1}{n} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j} \chi_{A_j} \right. \right\}.$$

Um argumento indutivo mostra que

$$f \geq \sum_{n=1}^m \frac{1}{n} \chi_{A_n}, \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

e portanto

$$f \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \chi_{A_n}$$

Como $0 \leq f(x) < \infty$, então para infinitos valores de k , $x \notin A_k$. Logo, para uma infinidade de valores de k ,

$$0 \leq f(x) - \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{n} \chi_{A_n} \leq \frac{1}{k}.$$

□

Na teoria da integração descrita abaixo, nós consideramos aplicações mensuráveis de X em $\overline{\mathbb{R}}$. Denotamos por $L^+(\mu)$ o conjunto das aplicações μ -mensuráveis de $X \rightarrow [0, \infty]$.

Definição 1.13. Dado uma aplicação $\varphi \in L^+(\mu)$, seja $\text{Im}\varphi = \{a_1, \dots, a_n\}$ tal que $\varphi = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{\varphi^{-1}(a_i)}$. Definimos a integral de φ com respeito a μ por:

$$\int \varphi \, d\mu := \sum_{i=1}^n a_i \mu(\varphi^{-1}(a_i)) \in [0, \infty],$$

onde convencionamos que $0 \cdot \infty := 0$

Para uma aplicação arbitrária $f \in L^+(\mu)$, definimos:

$$\int f \, d\mu := \sup \left\{ \int \varphi \, d\mu \mid \varphi \in L^+(\mu) \text{ simples}, \varphi \leq f \right\} \in [0, \infty].$$

Pode-se verificar que, dados $f, g \in L^+(\mu)$ e $c \in [0, \infty)$,

1. $\int f + g \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$,
2. $\int cf \, d\mu = c \int f \, d\mu$.

Para uma aplicação f μ -mensurável tomando valores em $\overline{\mathbb{R}}$, consideramos as partes positiva e negativa de f , isto é, $f^+ := \max\{f, 0\}$ e $f^- := \max\{-f, 0\}$ que são ambas mensuráveis pelo Teorema 1.5 e satisfazem $f = f^+ - f^-$.

Definição 1.14. Dada uma função μ -mensurável $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, dizemos que f é

1. integrável se $\int f^+ d\mu < \infty$ ou $\int f^- d\mu < \infty$; caso afirmativo, definimos

$$\int f \, d\mu := \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \in \overline{\mathbb{R}}$$

2. somável se $\int f^+ d\mu < \infty$ e $\int f^- d\mu < \infty$, neste caso dizemos que $f \in L^1(\mu)$.

Quando precisamos especificar a medida sob a qual estamos nos referenciando a uma aplicação integrável, dizemos que a aplicação é μ -integrável. Além disso, eventualmente, omitiremos o símbolo μ na integral sempre que a medida já estiver clara pelo contexto. Para um conjunto mensurável $E \subset X$, definimos $\int_E f := \int f \chi_E$.

Definição 1.15. Seja $f : X \rightarrow [0, \infty]$. Definimos:

1. a integral superior de f , por

$$\int^* f \, d\mu := \inf \left\{ \int \varphi \, d\mu \mid \varphi : X \rightarrow [0, \infty) \text{ mensurável, } \text{Im } \varphi \text{ enumerável, } \varphi \geq f \text{ } \mu\text{-q.s.} \right\}$$

2. a integral inferior de f , por

$$\int_* f \, d\mu := \sup \left\{ \int \varphi \, d\mu \mid \varphi : X \rightarrow [0, \infty) \text{ mensurável, } \text{Im } \varphi \text{ enumerável, } \varphi \leq f \text{ } \mu\text{-q.s.} \right\}$$

Proposição 1.3. Dada $f : X \rightarrow [0, \infty]$, valem as seguintes propriedades:

- (i) Se $\int_* f = \int^* f < \infty$, então f é μ -mensurável e $\int f = \int_* f = \int^* f$.
- (ii) Se f for μ -mensurável, então $\int_* f = \int^* f = \int f$.

(iii) Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções $X \rightarrow [0, \infty]$. Então

$$\begin{aligned} \int_* \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \int_* f_n d\mu \\ \int^* \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \int^* f_n d\mu \end{aligned}$$

Teorema 1.7. (Convergência monótona, TCM). Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência crescente em $L^+(\mu)$, que converge para $f \in L^+(\mu)$ μ -q.s. Então

$$\int f_n \rightarrow \int f$$

Teorema 1.8. (Lema de Fatou). Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $L^+(\mu)$. Então

$$\int \liminf f_n \leq \liminf \int f_n$$

Teorema 1.9. (Convergência dominada). Sejam $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $L^1(\mu)$ e g somável tais que $|f_n| \leq g$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge pontualmente para f μ -q.s., então $f \in L^1(\mu)$ e $\int f_n \rightarrow \int f$.

1.2.3 Medidas Produto

Definição 1.16. Sejam μ e ν medidas nos conjuntos X e Y , respectivamente. Definimos a medida $\mu \times \nu : \mathcal{P}(X \times Y) \rightarrow [0, \infty]$ fazendo para cada $E \subset X \times Y$,

$$\mu \times \nu(E) := \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) \nu(B_n) \right\},$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as coleções de conjuntos μ -mensuráveis $A_n \subset X$ e ν -mensuráveis $B_n \subset Y$ ($n = 1, \dots$) tais que $E \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \times B_n)$.

A medida $\mu \times \nu$ é chamada medida produto de μ e ν .

Teorema 1.10. (Fubini-Tonelli). Seja $\mu \times \nu$ a medida produto de μ e ν em $X \times Y$. Temos:

(i) Dados $A \subset X$ μ -mensurável e $B \subset Y$ ν -mensurável, então $A \times B$ é $(\mu \times \nu)$ -mensurável e $\mu \times \nu(A \times B) = \mu(A) \nu(B)$.

(ii) Se $E \subset X \times Y$ é σ -finito com respeito a $\mu \times \nu$, então as seções

$$E_y := \{x \mid (x, y) \in E\}$$

é μ -mensurável para ν -quase todo $y \in Y$,

$$E_x := \{y \mid (x, y) \in E\}$$

é ν -mensurável para μ -quase todo $x \in X$. As aplicações $x \mapsto \nu(E_x)$ e $y \mapsto \mu(E_y)$ são mensuráveis e a medida de E pode ser calculada por:

$$\mu \times \nu(E) = \int \nu(E_x) d\mu(x) = \int \mu(E_y) d\nu(y).$$

(iii) (Tonelli). Se f é uma aplicação integrável definida em $X \times Y$ tal que $\{f \neq 0\}$ é σ -finito com respeito a $\mu \times \nu$ (o que vale, em particular, se f for somável), então, o mapa

$$y \mapsto \int f(x, y) \, d\mu(x)$$

é ν -integrável, e o mapa

$$x \mapsto \int f(x, y) \, d\nu(y)$$

é μ -integrável, e

$$\int f \, d(\mu \times \nu) = \int \left(\int f(x, y) \, d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int \left(\int f(x, y) \, d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

Exemplo 1.4. A medida de Lebesgue $\mathcal{L}^n$ em $\mathbb{R}^n$ também poderia ter sido definida indutivamente por

$$\mathcal{L}^n := \mathcal{L}^{n-1} \times \mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1 \times \dots \times \mathcal{L}^1 \quad (n \text{ vezes}).$$

1.3 Medida e Dimensão de Hausdorff

A medida de Lebesgue não é adequada para estudar objetos com uma “dimensão menor” que a do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, como subvariedades mergulhadas ou conjuntos com comportamentos fractais, como o conjunto de Cantor. É aí que entra em ação a medida de Hausdorff. Tal medida consegue capturar bem o comportamento de conjuntos que, à Lebesgue, não são “enxergados”. Introduzida em 1918 por F. Hausdorff, veremos, dentre outros fatos, que a medida de Hausdorff $\mathcal{H}^m$ é relacionada com a área de uma m -subvariedade mergulhada no $\mathbb{R}^n$ e, que é igual a medida de Lebesgue quando $m = n$.

Definição 1.17. 1. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$, $0 \leq m < \infty$, $0 < \delta \leq \infty$. Definimos:

$$\mathcal{H}_\delta^m(A) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(m) \left(\frac{\text{diam} E_i}{2} \right)^m \mid A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i, \text{diam} E_i \leq \delta \right\}$$

onde

$$\alpha(m) := \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2} + 1)}$$

(onde $\Gamma(\frac{m}{2} + 1) = \int_0^\infty t^{m/2} e^{-t} dt$ é a função gama) de tal forma que, em particular, $\alpha(m)$ corresponde ao volume da bola unitária de $\mathbb{R}^m$ quando m é inteiro positivo.

Note que tal quantidade cresce conforme δ decresce, de tal forma que, o limite abaixo existe

2. Para A e m como acima, definimos

$$\mathcal{H}^m(A) := \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^m(A) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^m(A)$$

Neste sentido, é imediato verificar que $\mathcal{H}_\delta^m$ e $\mathcal{H}^m$ são medidas em $\mathbb{R}^n$. Chamamos $\mathcal{H}^m$ de medida m -dimensional de Hausdorff e $\mathcal{H}_\delta^m$ de δ -aproximação de $\mathcal{H}^m$.

Observação 1.5. Uma observação importante a se fazer é que podemos definir a medida de Hausdorff usando coberturas apenas de subconjuntos abertos, ou fechados de $\mathbb{R}^n$.

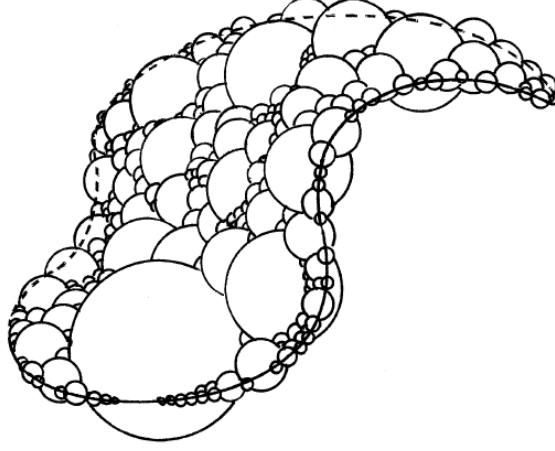


Figura 1: A medida de Hausdorff (área) de uma superfície é aproximada pelas seções transversais de pequenas bolas que a cobrem. (Fonte: Morgan [10, p. 9]).

Antes de listar as propriedades imediatas da medida de Hausdorff, vamos relembrar a definição de aplicação Lipschitz entre espaços euclidianos.

Definição 1.18. 1. Uma aplicação $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ é chamada Lipschitz se existe uma constante C tal que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq C\|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

2. A menor constante C com a propriedade acima é chamada a constante de Lipschitz de f , denotada por

$$\text{Lip}(f) := \sup \left\{ \frac{\|f(x) - f(y)\|}{\|x - y\|} \mid x, y \in \mathbb{R}^n, x \neq y \right\}.$$

Os seguintes itens da proposição abaixo estão em ordem crescente de trivialidade, de tal maneira que provaremos apenas o primeiro item.

Proposição 1.4. (*Propriedades imediatas da medida de Hausdorff*). Para qualquer $m \in [0, \infty)$, vale:

- (i) $\mathcal{H}^m$ é uma medida Borel regular em $\mathbb{R}^n$.
- (ii) $\mathcal{H}^0$ coincide com a medida de contagem em $\mathbb{R}^n$.
- (iii) Dado uma aplicação Lipschitz $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, então para todo $A \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{H}^m(f(A)) \leq (\text{Lip} f)^m \mathcal{H}^m(A)$.
- (iv) A medida de Hausdorff é invariante por isometrias, isto é, dado uma isometria $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, para todo $A \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{H}^m(f(A)) = \mathcal{H}^m(A)$.

Demonstração. (i)

$\vdash \mathcal{H}^m$ é de Borel.

Tome $A, B \subset \mathbb{R}^n$ com $d(A, B) > 0$ e $0 < \delta < \frac{1}{4}d(A, B)$. Suponha $A \cup B \subset \cup_{i \in \mathbb{N}} E_i$ com $\text{diam} E_i \leq \delta$.

Defina $\mathcal{A} := \{E_j \mid E_j \cap A \neq \emptyset\}$ e $\mathcal{B} := \{E_j \mid E_j \cap B \neq \emptyset\}$. Então

$$A \subset \cup_{E_j \in \mathcal{A}} E_j \text{ e } B \subset \cup_{E_j \in \mathcal{B}} E_j.$$

Além disso, se $E_i \in \mathcal{A}, E_j \in \mathcal{B}$ então $E_i \cap E_j = \emptyset$. Daí

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(m) \left(\frac{\text{diam} E_j}{2} \right)^m &\geq \sum_{E_j \in \mathcal{A}} \alpha(m) \left(\frac{\text{diam} E_j}{2} \right)^m \\ &\quad + \sum_{E_j \in \mathcal{B}} \alpha(m) \left(\frac{\text{diam} E_j}{2} \right)^m \\ &\geq \mathcal{H}_{\delta}^m(A) + \mathcal{H}_{\delta}^m(B) \end{aligned}$$

Tomando o ínfimo sobre todos os $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$, temos que $\mathcal{H}_{\delta}^m(A \cup B) \geq \mathcal{H}_{\delta}^m(A) + \mathcal{H}_{\delta}^m(B)$, com $0 < 4\delta < d(A, B)$. Fazendo $\delta \rightarrow 0$, temos $\mathcal{H}^m(A \cup B) \geq \mathcal{H}^m(A) + \mathcal{H}^m(B)$. Donde,

$$\mathcal{H}^m(A \cup B) = \mathcal{H}^m(A) + \mathcal{H}^m(B)$$

para quaisquer $A, B \subset \mathbb{R}^n$ com $d(A, B) > 0$. Logo, pelo Teorema 1.3, segue que $\mathcal{H}^m$ é uma medida de Borel, provando nossa afirmação.

$\vdash \mathcal{H}^m$ é Borel regular.

Tome $A \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\mathcal{H}^m(A) < \infty$; então $\mathcal{H}_{\delta}^m(A) < \infty$ para todo $\delta > 0$. Note que $\text{diam} \bar{E} = \text{diam} E$, para todo conjunto E , logo podemos acrescentar a hipótese dos E_i (que cobrem o A) serem fechados na definição de $\mathcal{H}_{\delta}^m(A)$.

Para cada $k \geq 1$, tome fechados $\{E_i^k\}_{i=1}^{\infty}$ tais que $\text{diam} E_i^k \leq \frac{1}{k}$, $A \subset \cup_{i=1}^{\infty} E_i^k$, e

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha(m) \left(\frac{\text{diam} E_i^k}{2} \right)^m \leq \mathcal{H}_{\frac{1}{k}}^m(A) + \frac{1}{k}.$$

Seja $A_k := \cup_{i=1}^{\infty} E_i^k, B := \cap_{k=1}^{\infty} A_k$; B é Borel. Além disso $A \subset A_k$ para cada k , e portanto $A \subset B$. Por outro lado,

$$\mathcal{H}_{\frac{1}{k}}^m(B) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(m) \left(\frac{\text{diam} E_i^k}{2} \right)^m \leq \mathcal{H}_{\frac{1}{k}}^m(A) + \frac{1}{k}.$$

Fazendo $k \rightarrow \infty$, obtemos $\mathcal{H}^m(B) \leq \mathcal{H}^m(A)$. Mas $A \subset B$, e portanto $\mathcal{H}^m(A) = \mathcal{H}^m(B)$. $\square$

Proposição 1.5. Para $0 \leq s < t < \infty$ e $A \subset \mathbb{R}^n$, temos que

(i) $\mathcal{H}^s(A) < \infty \Rightarrow \mathcal{H}^t(A) = 0$.

(ii) $\mathcal{H}^t(A) > 0 \Rightarrow \mathcal{H}^s(A) = \infty$.

Demonstração. Note que o item (ii) é apenas a contrapositiva do item (i). Logo, provaremos apenas (i).

Seja $\mathcal{H}^s(A) < \infty$ e $\delta > 0$. Então existem conjuntos $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ com $\text{diam} E_i \leq \delta, A \subseteq \cup_{i=1}^{\infty} E_i$ e

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha(s) \left(\frac{\text{diam} E_i}{2} \right)^s \leq \mathcal{H}_{\delta}^s(A) + 1 \leq \mathcal{H}^s(A) + 1.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_\delta^t(A) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(t) \left(\frac{\text{diam} E_i}{2} \right)^t \\ &= \frac{\alpha(t)}{\alpha(s)} 2^{s-t} \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(s) \left(\frac{\text{diam} E_i}{2} \right)^s (\text{diam} E_i)^{t-s} \\ &\leq \frac{\alpha(t)}{\alpha(s)} 2^{s-t} \delta^{t-s} (\mathcal{H}^s(A) + 1).\end{aligned}$$

Fazendo $\delta \rightarrow 0$ concluímos $\mathcal{H}^t(A) = 0$. □

Segue que $\inf\{m \in [0, \infty) \mid \mathcal{H}^m(A) = 0\} = \sup\{m \in [0, \infty) \mid \mathcal{H}^m(A) = \infty\} \in [0, \infty]$.

Definição 1.19. A dimensão de Hausdorff de um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é

$$\dim_{\mathcal{H}} A := \inf\{s \in [0, \infty) \mid \mathcal{H}^s(A) = 0\}$$

Com a notação acima, note que para todo $t > \dim_{\mathcal{H}} A$ temos $\mathcal{H}^t(A) = 0$ e, para todo $t < \dim_{\mathcal{H}} A$ temos $\mathcal{H}^t(A) = \infty$. Quando $t = \dim_{\mathcal{H}} A$, nada podemos dizer sobre $\mathcal{H}^t(A) \in [0, \infty]$. Por outro lado, se existe $t \in [0, \infty)$ tal que $0 < \mathcal{H}^t(A) < \infty$, então $\dim_{\mathcal{H}} A = t$.

Exemplo 1.5. Seja C o conjunto de Cantor usual em $\mathbb{R}$. Então $\dim_{\mathcal{H}} C = \log_3 2 = s$ e $\mathcal{H}^s(C) = 1$ (cf. [8]).

Proposição 1.6. (*Propriedades imediatas da dimensão de Hausdorff*).

- (i) A dimensão de Hausdorff é invariante por isometrias.
- (ii) Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ uma aplicação Lipschitz. Para todo $A \subset \mathbb{R}^n$, $\dim_{\mathcal{H}} f(A) \leq \dim_{\mathcal{H}} A$. Em particular, se f for bi-Lipschitz sobre sua imagem (isto é, f é Lipschitz e tem uma inversa Lipschitz $f^{-1} : \text{Im} f \rightarrow \mathbb{R}^n$), então para todo $A \subset \mathbb{R}^n$, $\dim_{\mathcal{H}} f(A) = \dim_{\mathcal{H}} A$.
- (iii) Se $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$, então $\dim_{\mathcal{H}} A \leq \dim_{\mathcal{H}} B$.
- (iv) Se $A = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n \subset \mathbb{R}^n$, então $\dim_{\mathcal{H}} A = \sup\{\dim_{\mathcal{H}} A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Enunciamos abaixo a famosa desigualdade isodiamétrica que tem como consequência a igualdade das medidas de Hausdorff e Lebesgue n -dimensionais em $\mathbb{R}^n$.

Teorema 1.11. (*Desigualdade isodiamétrica*). Dentre todos os conjuntos com diâmetro fixado, a bola é a que tem maior volume. Em outras palavras, para todo $A \subset \mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{L}^n(A) \leq \alpha(n) \left(\frac{\text{diam} A}{2} \right)^n.$$

Teorema 1.12. Para todo $\delta > 0$, $\mathcal{L}^n = \mathcal{H}^n = \mathcal{H}_\delta^n$ em $\mathbb{R}^n$

Corolário 1.1. $\dim_{\mathcal{H}} \mathbb{R}^n = n$

Demonstração. Escreva $\mathbb{R}^n = \cup_{k \in \mathbb{N}} C_k$, onde cada C_k é um cubo centrado na origem com raio k . Logo, cada C_k tem medida de Lebesgue finita e portanto $0 < \mathcal{H}^n(C_k) < \infty$, de modo que $\dim_{\mathcal{H}} C_k = n$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Logo, pela Proposição 1.6, segue que $\dim_{\mathcal{H}} \mathbb{R}^n = n$. □

Corolário 1.2. Se W é um subespaço vetorial k -dimensional de um espaço normado V , então $\dim_{\mathcal{H}} W = k$.

1.4 Densidades e Diferenciação de Medidas

Antes de apresentar o que pretendemos, é válido ressaltar que a demonstração dos resultados desta seção (incluindo o teorema anterior 1.12) depende dos famosos teoremas de cobertura de Vitali e Besicovitch, os quais não vamos enunciar aqui. Sendo assim, sugerimos que o leitor interessado consulte as referências [3], [6] e [8].

Definição 1.20. Sejam μ uma medida num espaço métrico X , $A \subset X$, $x \in X$, $n > 0$ real e $\mathbb{B}(x, r)$ a bola fechada centrada em x de raio r . Definimos:

1. a densidade superior n -dimensional de A em x com respeito a μ :

$$\Theta^{*n}(\mu, A, x) := \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(A \cap \mathbb{B}(x, r))}{\alpha(n)r^n} \in [0, \infty].$$

2. a densidade inferior n -dimensional de A em x com respeito a μ :

$$\Theta_*^n(\mu, A, x) := \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(A \cap \mathbb{B}(x, r))}{\alpha(n)r^n} \in [0, \infty].$$

Se $\Theta^{*n}(\mu, A, x) = \Theta_*^n(\mu, A, x)$, denotamos o valor comum por $\Theta^n(\mu, A, x)$, o qual é chamado densidade n -dimensional de A em x com respeito a μ .

Para $A = X$, usamos as notações $\Theta^{*n}(\mu, x)$, $\Theta_*^n(\mu, x)$ e $\Theta^n(\mu, x)$ para $\Theta^{*n}(\mu, X, x)$, $\Theta_*^n(\mu, X, x)$ e $\Theta^n(\mu, X, x)$, respectivamente.

Teorema 1.13. Sejam μ uma medida de Borel num espaço métrico X , $t \geq 0$ e $A \subset B \subset X$. Se $\Theta^{*n}(\mu, B, x) \geq t$, para todo $x \in A$, então $t\mathcal{H}^n(A) \leq \mu(B)$

Teorema 1.14. (Teorema da densidade superior). Sejam μ uma medida Borel-regular num espaço métrico X e $A \subset X$ μ -mensurável. Se $\mu(A) < \infty$, ou se μ for aberta σ -finita, então

$$\Theta^{*n}(\mu, A, x) = 0 \text{ para } \mathcal{H}^n\text{-q.t.p. } x \in X \setminus A$$

Teorema 1.15. Se $A \subset \mathbb{R}^n$ é $\mathcal{L}^n$ -mensurável, então $\Theta^n(\mathcal{L}^n, A, x)$ existe para $\mathcal{L}^n$ -q.t.p. $x \in \mathbb{R}^n$, $\Theta^n(\mathcal{L}^n, A, x) = 1$ para $\mathcal{L}^n$ -q.t.p. $x \in A$ e $\Theta^n(\mathcal{L}^n, A, x) = 0$ para $\mathcal{L}^n$ -q.t.p. $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$.

Definição 1.21. Sejam μ e ν medidas de Radon em $\mathbb{R}^n$ (isto é, pela Observação 1.3, μ e ν são medidas Borel regulares e com a propriedade de que para todo compacto $K \subset \mathbb{R}^n$, $\mu(K), \nu(K) < \infty$). Para cada $x \in \mathbb{R}^n$, defina

$$\overline{D}_\mu \nu(x) := \begin{cases} \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\nu(\mathbb{B}(x, r))}{\mu(\mathbb{B}(x, r))} & \text{se } \mu(\mathbb{B}(x, r)) > 0 \text{ para todo } r > 0 \\ +\infty & \text{se } \mu(\mathbb{B}(x, r)) = 0 \text{ para algum } r > 0 \end{cases}$$

e

$$\underline{D}_\mu \nu(x) := \begin{cases} \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\nu(\mathbb{B}(x, r))}{\mu(\mathbb{B}(x, r))} & \text{se } \mu(\mathbb{B}(x, r)) > 0 \text{ para todo } r > 0 \\ +\infty & \text{se } \mu(\mathbb{B}(x, r)) = 0 \text{ para algum } r > 0 \end{cases}$$

Definição 1.22. Se $\overline{D}_\mu \nu(x) = \underline{D}_\mu \nu(x) < \infty$, dizemos que ν é diferenciável com respeito a μ em x e escrevemos

$$D_\mu \nu(x) := \overline{D}_\mu \nu(x) = \underline{D}_\mu \nu(x)$$

$D_\mu \nu$ é a derivada de ν com respeito a μ .

Veremos sob quais condições $D_\mu \nu$ existe e quando ν pode ser recuperado ao integrar $D_\mu \nu$.

Teorema 1.16. *Sejam μ e ν medidas de Radon em $\mathbb{R}^n$. Então*

- (i) $D_\mu \nu$ existe e é finita μ -q.s.
- (ii) $D_\mu \nu$ é μ -mensurável.

Definição 1.23. Sejam μ e ν medidas de Borel em $\mathbb{R}^n$.

1. ν é absolutamente contínua com respeito a μ se, para todo $A \subset \mathbb{R}^n$, $\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$.

Notação: $\nu \ll \mu$

2. ν e μ são mutuamente singulares se existe $A \subset \mathbb{R}^n$ conjunto de Borel, tal que $\mu(\mathbb{R}^n \setminus A) = \nu(A) = 0$. Notação: $\nu \perp \mu$

Teorema 1.17. *Sejam μ, ν medidas de Radon em $\mathbb{R}^n$, com $\nu \ll \mu$. Então*

$$\nu(A) = \int_A D_\mu \nu \, d\mu,$$

para todos os conjuntos μ -mensuráveis $A \subset \mathbb{R}^n$.

2 Fórmulas da Área e Coárea

Neste capítulo, estudamos aplicações Lipschitz (relembre a Definição 1.18) de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$ e duas generalizações da fórmula de mudança de variáveis clássica, a saber, a fórmula da área, para $n \leq m$, e da coárea quando $n \geq m$ (que por sua vez, também é uma generalização do teorema de Fubini-Tonelli 1.10).

Na seção 2.1, apresentamos resultados importantes a respeito de aplicações Lipschitz que serão usados durante o capítulo. Na seção 2.2, revisamos conceitos de Álgebra Linear para apresentarmos a importante definição de Jacobiano. Na seção 2.3, vemos a ideia de linearização de aplicações Lipschitz, essencial para tratar das fórmulas da área e da coárea, as quais apresentamos e demonstramos, respectivamente, nas últimas duas seções 2.4 e 2.5, juntamente de seus respectivos corolários e aplicações.

2.1 Alguns Resultados Sobre Aplicações Lipschitz

2.1.1 Extensões

Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ e $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação Lipschitz. Como veremos nos desenvolvimentos subsequentes, é útil estender f a uma aplicação Lipschitz definida sobre todo o $\mathbb{R}^n$, mantendo a mesma constante $\text{Lip} f$. Vejamos o lema necessário para provar o teorema seguinte.

Lema 2.1. *Dada uma coleção finita de bolas fechadas $\{\mathbb{B}(x_k, r_k)\}_{k=1}^N$ em $\mathbb{R}^n$, seja*

$$C_t = \bigcap_{k=1}^N \mathbb{B}(x_k, tr_k), \quad t \geq 0.$$

Se $s = \inf\{t \geq 0 \mid C_t \neq \emptyset\}$, então $s < \infty$ e C_s se reduz a um único ponto x_0 , o qual é dado pela combinação convexa dos x_k tal que $\|x_0 - x_k\| = sr_k$.

Teorema 2.1. (Kirszbraun). *Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ e $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação Lipschitz. Então existe uma aplicação Lipschitz $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $F = f$ em A e $\text{Lip} F = \text{Lip} f$.*

Demonstração. Mostremos que, se $A \subset \mathbb{R}^n$ propriamente e $y \in \mathbb{R}^n \setminus A$, então existe $z \in \mathbb{R}^m$ tal que, definindo $g : A \cup \{y\} \rightarrow \mathbb{R}^m$ por

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in A \\ z, & \text{se } x = y \end{cases}$$

então $\text{Lip} g = \text{Lip} f$.

De fato, supondo $\text{Lip} f = 1$, buscamos $z \in \mathbb{R}^m$ com $\|z - f(x)\| \leq \|y - x\|$, para todo $x \in A$. Em outras palavras, queremos que a coleção $\{\mathbb{B}(f(x), \|y - x\|) \mid x \in A\}$ de bolas fechadas em $\mathbb{R}^m$ tenha interseção não-vazia. Segue da compacidade das bolas que podemos reduzir tal problema, ao de provar que, para todo subconjunto finito $\{x_k\}_{k=1}^N$ de A , temos

$$\bigcap_{k=1}^N \{\mathbb{B}(f(x_k), \|y - x_k\|)\} \neq \emptyset.$$

Pelo Lema 2.1, existe $s \geq 0$ e $z \in \mathbb{R}^m$ tais que, a menos de uma permutação dos x_k e para algum $M \in \mathbb{N}$, $1 \leq M \leq N$,

$$\{z\} = \bigcap_{k=1}^N \mathbb{B}(f(x_k), s\|y - x_k\|), \quad \|z - f(x_k)\| = s\|y - x_k\|, \quad z = \sum_{k=1}^M \lambda_k f(x_k),$$

com $\lambda_k > 0$ para $1 \leq k \leq M$ e $1 = \sum_{k=1}^M \lambda_k$.

$\vdash s \leq 1$

De fato, note que

$$\begin{aligned} 0 &= 2 \left\| \sum_{k=1}^M \lambda_k (z - f(x_k)) \right\|^2 = 2 \sum_{k,h=1}^M \lambda_k \lambda_h \langle z - f(x_k), z - f(x_h) \rangle \\ &= \sum_{k,h=1}^M \lambda_k \lambda_h (\|z - f(x_k)\|^2 + \|z - f(x_h)\|^2 - \|f(x_k) - f(x_h)\|^2) \\ &\geq \sum_{k,h=1}^M \lambda_k \lambda_h (s^2 \|y - x_k\|^2 + s^2 \|y - x_h\|^2 - \|x_k - x_h\|^2) \\ &= \sum_{k,h=1}^M \lambda_k \lambda_h (2s^2 \langle y - x_k, y - x_h \rangle + (s^2 - 1) \|x_k - x_h\|^2) \\ &= 2s^2 \left\| \sum_{k=1}^M \lambda_k (y - x_k) \right\|^2 + (s^2 - 1) \sum_{k,h=1}^M \lambda_k \lambda_h \|x_k - x_h\|^2. \end{aligned}$$

Logo, ou $M = 1$, donde $s = 0$, ou $M > 1$, donde $s \leq 1$, provando nossa afirmação.

Seja $\mathcal{G}$ o conjunto dos pares (g, B) onde $A \subset B$, $g : B \rightarrow \mathbb{R}^m$, $g = f$ em A e $\text{Lip} g \leq \text{Lip} f$. Definimos a relação de ordem parcial $(g_1, B_1) \preceq (g_2, B_2)$ se $B_1 \subset B_2$ e $g_2 = g_1$ em B_1 . Pelo lema de Zorn⁴, existe um elemento maximal (g, B) em $\mathcal{G}$. Se B for subconjunto próprio de $\mathbb{R}^n$ então, pelo que provamos acima, (g, B) não seria maximal. Logo, $B = \mathbb{R}^n$.

□

2.1.2 Diferenciabilidade

Agora, vamos definir alguns conceitos necessários para enunciar e demonstrar o teorema de Rademacher que diz que aplicações Lipschitz são diferenciáveis quase sempre.

Relembre que uma aplicação $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é diferenciável (no sentido de Fréchet) em $x \in \mathbb{R}^n$ se existe uma aplicação linear $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{\|f(y) - f(x) - L(y - x)\|}{\|x - y\|} = 0$$

Se tal aplicação L existe, ela é única e a denotamos por $Df(x)$. Dizemos que $Df(x)$ é a derivada de f em x .

⁴sim, nós acreditamos no Axioma da Escolha.

Definição 2.1. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que uma aplicação $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ tem limite aproximado y em a se para todo $\varepsilon > 0$, $\Theta^n(\mathcal{H}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x \in A \mid \|f(x) - y\| < \varepsilon\}, a) = 0$, ou também,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^n((\mathbb{R}^n \setminus \{x \in A \mid \|f(x) - y\| < \varepsilon\}) \cap \mathbb{B}(a, r))}{\alpha(n)r^n} = 0$$

Escrevemos $y = ap \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Proposição 2.1. *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$. Uma aplicação $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ tem limite aproximado y em a se, e somente se, existe $B \subset A$ tal que $\Theta^n(\mathcal{H}^n, \mathbb{R}^n \setminus B, a) = 0$ e $f|_B$ tem limite y em a .*

Demonstração. A volta é imediata, vejamos a ida.

($\Rightarrow$)

Assumimos $y = 0$. Por hipótese, para cada $i \in \mathbb{N}$, os conjuntos

$$A_i := \mathbb{R}^n \setminus \{x \in A \mid \|f(x)\| < \frac{1}{i}\}$$

são tais que $\Theta^n(\mathcal{H}^n, A_i, a) = 0$, para todo $i \in \mathbb{N}$.

Tome $r_1 > r_2 > \dots$ tal que

$$\frac{\mathcal{H}^n(A_i \cap \mathbb{B}(a, r))}{\alpha(n)r^n} \leq \frac{1}{2^i},$$

sempre que $0 < r \leq r_i$, para cada $i \in \mathbb{N}$.

Note que $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ e tome $\mathbb{R}^n \setminus B = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (A_i \cap \mathbb{B}(a, r_i))$, donde segue que

$$B = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} ((\mathbb{R}^n \setminus A_i) \cup (\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{B}(a, r_i))) \Rightarrow B = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \left\{ x \in A \mid \|f(x)\| < \frac{1}{i} \right\} \cup \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{B}(a, r_i)$$

logo, é claro que $f|_B$ tem limite $y (= 0)$ em a .

$\vdash \Theta^n(\mathcal{H}^n, \mathbb{R}^n \setminus B, a) = 0$

Fixado i , tome $r_i > s > r_{i+1}$. Então,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^n(\mathbb{R}^n \setminus B \cap \mathbb{B}(a, s)) &\leq \mathcal{H}^n(A_i \cap \mathbb{B}(a, s)) + \mathcal{H}^n(A_{i+1} \cap \mathbb{B}(a, r_{i+1})) \\ &\quad + \mathcal{H}^n(A_{i+2} \cap \mathbb{B}(a, r_{i+2})) + \dots \\ &\leq \alpha(n) \left(s^n \frac{1}{2^i} + r_{i+1}^n \frac{1}{2^{i+1}} + r_{i+2}^n \frac{1}{2^{i+2}} + \dots \right) \\ &< \alpha(n) s^n \left(\frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^{i+1}} + \frac{1}{2^{i+2}} + \dots \right) = \alpha(n) s^n \frac{1}{2^{i-1}}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\mathcal{H}^n(\mathbb{R}^n \setminus B \cap \mathbb{B}(a, s))}{\alpha(n)s^n} < \frac{1}{2^{i-1}}.$$

Fazendo $s \rightarrow 0$ então $i \rightarrow \infty$, donde segue que $\Theta^n(\mathcal{H}^n, \mathbb{R}^n \setminus B, a) = 0$. □

Definição 2.2. Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$, $a \in A$ e uma aplicação $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$.

1. Dizemos que f é aproximadamente contínua em a se $f(a) = ap \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

2. Dizemos que f é aproximadamente diferenciável em a se existe uma aplicação linear $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que

$$\text{ap} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\|f(x) - f(a) - L(x - a)\|}{\|x - a\|} = 0.$$

Escrevemos $L = \text{ap}Df(a)$.

Observação 2.1. Em geral, o termo “aproximadamente” significa: a menos de um conjunto de densidade 0.

Proposição 2.2. *Uma função mensurável $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é aproximadamente contínua $\mathcal{L}^n$ -quase sempre.*

Teorema 2.2. (Rademacher). *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ Lipschitz. Então f é diferenciável no sentido de Fréchet $\mathcal{L}^n$ -quase sempre.*

Demonstração. A demonstração tem 5 passos:

- (1) Uma função monótona $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável $\mathcal{L}^1$ -quase sempre.
- (2) Toda função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que é localmente de variação limitada (e portanto, toda função Lipschitz) é diferenciável $\mathcal{L}^1$ -quase sempre.
- (3) Uma aplicação Lipschitz $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tem derivadas parciais $\mathcal{L}^n$ -quase sempre.
- (4) Uma aplicação Lipschitz $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é aproximadamente diferenciável $\mathcal{L}^n$ -quase sempre.
- (5) Uma aplicação Lipschitz $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é diferenciável $\mathcal{L}^n$ -quase sempre.

O passo (1) é um resultado padrão em livros avançados de análise e/ou teoria da medida, como por exemplo, no capítulo 3 de [12]. O passo (2) segue da decomposição de uma função de variação limitada como a diferença de duas funções monótonas. O passo (3) segue imediatamente do passo (2). A dedução de (4) via (3) é técnica, mas não surpreendente, dado que a existência de derivadas parciais contínuas implica diferenciabilidade e que uma função mensurável é aproximadamente contínua quase sempre. Se (3) vale sempre, não segue que (4) vale sempre.

A conclusão final (5) segue do fato de que, se uma aplicação Lipschitz é aproximadamente diferenciável em um ponto, então é diferenciável neste ponto. Concluímos a demonstração com uma prova deste fato.

Suponha por absurdo que existe uma aplicação Lipschitz $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ que é aproximadamente diferenciável em a mas que não é diferenciável em a . Para simplificar, vamos assumir $a = 0$, $f(0) = 0$ e $\text{ap}Df(0) = 0$.

Como f não é diferenciável em 0, existe $0 < \varepsilon < 1$ e uma sequência $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ com $a_i \rightarrow 0$, tal que $\|f(a_i)\| \geq \varepsilon \|a_i\|$. Seja $C := \max\{\text{Lip}f, 1\}$, então para todo $x \in \mathbb{B}\left(a_i, \frac{\varepsilon \|a_i\|}{3C}\right)$, temos

$$\begin{aligned} \varepsilon \|a_i\| - \|f(x)\| &\leq \|f(a_i)\| - \|f(x)\| \leq \|f(a_i) - f(x)\| \\ &\leq \text{Lip}f \|a_i - x\| \leq \text{Lip}f \frac{\varepsilon \|a_i\|}{3C} \leq \frac{\varepsilon \|a_i\|}{3}. \end{aligned}$$

Além disso, temos

$$\|x\| \leq \|a_i\| + \|x - a_i\| \leq \|a_i\| + \frac{\varepsilon \|a_i\|}{3C} < \frac{4\|a_i\|}{3} \Rightarrow \frac{2\|a_i\|}{3} > \frac{\|x\|}{2}.$$

Então, para todo $x \in E := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{B}\left(a_i, \frac{\varepsilon \|a_i\|}{3C}\right)$ temos $\|f(x)\| \geq \frac{\varepsilon \|x\|}{2}$.

$\vdash \Theta^n(\mathcal{H}^n, E, 0) \neq 0$

De fato, tomando $r_i := \|a_i\| + \frac{\varepsilon \|a_i\|}{3C}$ então percebe-se que $\mathbb{B}\left(a_i, \frac{\varepsilon \|a_i\|}{3C}\right) \subset \mathbb{B}(0, r_i)$ e portanto

$$\begin{aligned} \Theta(\mathcal{H}^n, E, 0) &= \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{H}^n(E)}{\alpha(n)r_i^n} \geq \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{H}^n\left(\mathbb{B}\left(a_i, \frac{\varepsilon \|a_i\|}{3C}\right)\right)}{\alpha(n)\left(\|a_i\| + \frac{\varepsilon \|a_i\|}{3C}\right)^n} \stackrel{1.12}{=} \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\alpha(n)\left(\frac{\varepsilon \|a_i\|}{3C}\right)^n}{\alpha(n)\left(\|a_i\| + \frac{\varepsilon \|a_i\|}{3C}\right)^n} \\ &> \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{\varepsilon \|a_i\|}{3C}\right)^n}{\left(\frac{4\|a_i\|}{3}\right)^n} = \frac{\varepsilon^n}{4^n C^n} > 0. \end{aligned}$$

Mas isso é um absurdo, pois pela Proposição 2.1, $\Theta^n(\mathcal{H}^n, E, 0) = 0$. Logo, f é diferenciável em 0. □

Corolário 2.1. *Seguindo o enunciado do teorema, temos que a aplicação linear $Df(x)$ é boreliana para cada $x \in \mathbb{R}^n$ e $D_f := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f \text{ é diferenciável em } x\}$ é um conjunto de Borel.*

Definição 2.3. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e considere uma aplicação $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$. Dizemos que f é localmente Lipschitz se, para todo ponto $x \in \Omega$, existe uma vizinhança U de x tal que $f|_U$ é Lipschitz.

Observação 2.2. $\mathcal{L}^n|_\Omega$ é chamado traço de $\mathcal{L}^n$ em Ω e denota a restrição $\mathcal{P}(\Omega) \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ da medida $\mathcal{L}^n : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$

Corolário 2.2. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ localmente Lipschitz. Então f é $\mathcal{L}^n|_\Omega$ -q.s. diferenciável no sentido de Fréchet, o conjunto dos pontos onde f é diferenciável é de Borel e a derivada de f é boreliana.*

Corolário 2.3. *Sejam $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ localmente Lipschitz e $Y := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(f(x)) = x\}$. Então $Dg(f(x)) \circ Df(x) = id_{\mathbb{R}^n}$ para $\mathcal{L}^n$ -q.t.p. $x \in Y$.*

Por fim, enunciamos um resultado que nos permite aproximar aplicações C^1 de aplicações Lipschitz.

Teorema 2.3. *Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ e $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ Lipschitz. Dado $\varepsilon > 0$, existe uma aplicação $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ que é C^1 e tal que $\mathcal{L}^n(\{x \in A \mid f(x) \neq g(x)\}) \leq \varepsilon$.*

Note que a aproximação é em um sentido forte: as aplicações coincidem exceto num conjunto de medida ε .

2.2 Aplicações Lineares e Jacobianos

2.2.1 Revisando Álgebra Linear

Agora vamos rever alguns resultados em Álgebra Linear com o objetivo de definir o jacobiano de uma aplicação $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Definição 2.4. ⁵ Sejam $\mathbb{K}$ um corpo, V um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial de dimensão n e $T : V \rightarrow V$ uma aplicação linear. Como $\dim \bigwedge^n V = 1$, a aplicação linear

$$\wedge^r T : \bigwedge^r V \rightarrow \bigwedge^r V$$

é dada pela multiplicação por um elemento $\lambda \in \mathbb{K}$. Definimos o determinante de T via $\det T = \lambda$. Assim, se $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ é uma base de V ,

$$T(e_1) \wedge \dots \wedge T(e_n) = \det(T)(e_1 \wedge \dots \wedge e_n).$$

O determinante de uma matriz $A \in M_n(\mathbb{K})$ é o determinante da aplicação linear $T : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ tal que sua matriz relativa à base canônica é $[T] = A$.

Proposição 2.3. (*Propriedades do determinante*).

Sejam V um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial de dimensão n , $S, T : V \rightarrow V$ aplicações lineares e $A, B \in M_n(\mathbb{K})$.

- (i) $\det(S \circ T) = (\det S) \cdot (\det T)$.
- (ii) $A \mapsto \det A$ é uma função alternada nas colunas de A .
- (iii) $\det I = 1$, em que $I \in M_n(\mathbb{K})$ denota a matriz identidade.
- (iv) As colunas de A são linearmente independentes se, e só se, $\det A \neq 0$.
- (v) $\det(AB) = (\det A) \cdot (\det B)$.
- (vi) $\det A^t = \det A$, em que A^t denota a matriz transposta de A .
- (vii) T é um isomorfismo se, e só se, $\det(T) \neq 0$.

Definição 2.5. 1. Seja $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação linear. O adjunto de A é a aplicação linear $A^* : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por

$$\langle x, A^*y \rangle = \langle Ax, y \rangle$$

para todos $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$

2. Uma aplicação linear $O : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é ortogonal se

$$\langle Ox, Oy \rangle = \langle x, y \rangle$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$. Denotamos o conjunto das aplicações ortogonais $O : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ por $O(n, m)$.

3. Uma aplicação linear $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é simétrica se

$$\langle x, Sy \rangle = \langle Sx, y \rangle$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$. Denotamos o conjunto das aplicações simétricas $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ por $Sym(n)$.

⁵relembre que $\bigwedge^n V$ denota a n -ésima potência exterior do espaço vetorial V , cujos elementos são da forma $v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_n$.

Teorema 2.4. Considere $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $B : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ aplicações lineares.

- (i) $A^{**} = A$
- (ii) $(A \circ B)^* = B^* \circ A^*$
- (iii) $O^* = O^{-1}$ se $O : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é ortogonal
- (iv) $S^* = S$ se $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é simétrica
- (v) Se $O : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é ortogonal, então $n \leq m$ e

$$O^* \circ O = id_{\mathbb{R}^n}$$

$$O \circ O^* = id_{\mathbb{R}^m}$$

Teorema 2.5. (Decomposição polar). Seja $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação linear.

- (i) Se $n \leq m$, então existe uma aplicação simétrica $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e uma aplicação ortogonal $O : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que

$$L = O \circ S$$

- (ii) Se $n \geq m$, então existe uma aplicação simétrica $S : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ e uma aplicação ortogonal $O : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$L = S \circ O^*$$

2.2.2 Jacobianos

Definimos agora o jacobiano de uma aplicação linear.

Definição 2.6. Seja $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação linear.

- (i) Se $n \leq m$, escrevemos $L = O \circ S$ e definimos o Jacobiano de L por

$$\llbracket L \rrbracket := |\det S|.$$

- (ii) Se $n \geq m$, escrevemos $L = S \circ O^*$ e definimos o jacobiano de L por

$$\llbracket L \rrbracket := |\det S|.$$

Observação 2.3. Segue do Teorema 2.6 abaixo que a definição de $\llbracket L \rrbracket$ é independente de escolhas particulares de O e S . Observe também que $\llbracket L \rrbracket = \llbracket L^* \rrbracket$.

Teorema 2.6. Seja $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação linear.

- (i) Se $n \leq m$,

$$\llbracket L \rrbracket^2 = \det(L^* \circ L)$$

- (ii) Se $n \geq m$,

$$\llbracket L \rrbracket^2 = \det(L \circ L^*).$$

Demonstração. Assuma $n \leq m$ e escreva

$$L = O \circ S \Rightarrow L^* = S \circ O^*.$$

Então

$$L^* \circ L = S \circ O^* \circ O \circ S \stackrel{2.4}{=} S^2.$$

Daí, $\det(L^* \circ L) = (\det S)^2 = \llbracket L \rrbracket^2$. A prova de (ii) é análoga. □

A fórmula de Binet-Cauchy abaixo nos dá uma maneira útil de computar $\llbracket L \rrbracket$.

Teorema 2.7. (*Fórmula de Binet-Cauchy*). *Seja $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ aplicação linear com $n \leq m$. Então*

$$\llbracket L \rrbracket = \sqrt{\sum_{B \in \mu(m,n)} (\det B)^2},$$

onde $\mu(m,n)$ é um conjunto de $n \times n$ submatrizes na representação matricial de L com respeito as bases canônicas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$.

Proposição 2.4. *Seja $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ linear com $n \leq m$.*

(i) *Se $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é linear, então $\llbracket L \circ T \rrbracket = \llbracket L \rrbracket \llbracket T \rrbracket$*

(ii) *$\llbracket L \rrbracket \leq \|L\|^n$, onde aqui, $\|\cdot\|$ representa a norma no espaço das aplicações lineares de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$. Se L é injetora, então $\|L^{-1}\|^{-n} \leq \llbracket L \rrbracket \leq \|L\|^n$*

Demonstração. (i)

$$\begin{aligned} \llbracket L \circ T \rrbracket^2 &\stackrel{2.6}{=} \det(T^* \circ L^* \circ L \circ T) = \det T^* \cdot \det(L^* \circ L) \cdot \det T \\ &= \det(T^* \circ T) \cdot \det(L^* \circ L) = \llbracket L \rrbracket^2 \llbracket T \rrbracket^2. \end{aligned}$$

(ii) Para toda aplicação linear $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, segue como corolário da desigualdade clássica de Hadamard que $|\det A| \leq \|A\|^n$. Portanto,

$$\llbracket L \rrbracket = \sqrt{\det(L^* \circ L)} \leq \sqrt{\|L^* \circ L\|^n} \leq \sqrt{(\|L^*\| \|L\|)^n} = \sqrt{\|L\|^{2n}} = \|L\|^n.$$

Se $n = m$ e $L \in \text{GL}(\mathbb{R}^n)$, segue do item anterior que $\llbracket L \rrbracket \cdot \llbracket L^{-1} \rrbracket = \llbracket \text{id}_{\mathbb{R}^n} \rrbracket = 1$. Por outro lado, pela desigualdade já provada, $\llbracket L^{-1} \rrbracket \leq \|L^{-1}\|^n$; portanto, $\llbracket L \rrbracket = \llbracket L^{-1} \rrbracket^{-1} \geq \|L^{-1}\|^{-n}$.

No caso geral, para L injetora, tomamos uma isometria linear $P : \text{Im} L \rightarrow \mathbb{R}^n$. Se $L = O \circ S$ é a decomposição polar de L , então $P \circ L = (P \circ O) \circ S$ é a decomposição polar de $P \circ L$, de modo que $\llbracket L \rrbracket = |\det S| = \llbracket P \circ L \rrbracket$.

Por outro lado, é claro que $\|P \circ L\| = \|L\|$ e $\|(P \circ L)^{-1}\| = \|L^{-1}\|$. Como $P \circ L \in \text{GL}(\mathbb{R}^n)$, pelo caso já provado, $\|(P \circ L)^{-1}\|^{-n} \leq \llbracket P \circ L \rrbracket \leq \|P \circ L\|^n$, conclui-se que

$$\|L^{-1}\|^{-n} \leq \llbracket L \rrbracket \leq \|L\|^n.$$

□

Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ Lipschitz. Pelo teorema de Rademacher 2.2, f é diferenciável $\mathcal{L}^n$ -quase sempre e $Df(x)$ é boreliana e pode ser tratada como aplicação linear de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$, para $\mathcal{L}^n$ -q.t.p. $x \in \mathbb{R}^n$.

Definição 2.7. Usando a notação acima, definimos em cada ponto x onde f é diferenciável, o jacobiano de f em x como

$$Jf(x) := \llbracket Df(x) \rrbracket.$$

Portanto $Jf(x)$ é uma aplicação boreliana definida em $\mathcal{L}^n$ -q.t.p. $x \in \mathbb{R}^n$.

Notação: Para uma aplicação Lipschitz $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, usaremos as seguintes notações

1. $D_f := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists Df(x)\}$.
2. $J_f^+ := \{x \in D_f \mid Jf(x) > 0\}$.
3. $J_f^0 := \{x \in D_f \mid Jf(x) = 0\}$.

2.3 Linearização de Aplicações Lipschitz

Uma técnica básica do Cálculo é a de transportar propriedades de aplicações lineares para aplicações C^1 ao explorar a continuidade de gradientes para inferir que eles são localmente quase constantes. Apesar desse procedimento não fazer sentido para aplicações Lipschitz, uma ideia muito elegante, devido a Federer, nos permite reformular aproximação via aplicações lineares nesse escopo também.

Definição 2.8. Sejam $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação Lipschitz com $n \leq m$ e $t > 1$. Dizemos que o par (E, S) é uma t -linearização para f se $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ e $S \in \text{Sym}(n) \cap \text{GL}(\mathbb{R}^n)$ satisfazem:

1. Para todo $x \in E$, f é diferenciável em x e $Jf(x) > 0$;
2. Para todos $x, y \in E$, $t^{-1}\|Sx - Sy\| \leq \|f(x) - f(y)\| \leq t\|Sx - Sy\|$;
3. Para todo $x \in E$ e para todo $v \in \mathbb{R}^n$, $t^{-1}\|Sv\| \leq \|Df(x)v\| \leq t\|Sv\|$.

Proposição 2.5. Sejam $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação Lipschitz com $n \leq m, t > 1$, e $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ tais que a condição 1 da Definição 2.8 acima vale e $S \in \text{Sym}(n) \cap \text{GL}(\mathbb{R}^n)$. Então, (E, S) é uma t -linearização para f se, e somente se, $f|_E$ é injetora com inversa Lipschitz e satisfaz:

- (2') $\text{Lip}(f|_E \circ S^{-1}) \leq t$ e $\text{Lip}(S \circ (f|_E)^{-1}) \leq t$;
- (3') Para todo $x \in E$, $\|Df(x) \circ S^{-1}\| \leq t$ e $\|S \circ Df(x)^{-1}\| \leq t$.

Demonstração. Dado que a volta segue analogamente à ida, provemos a ida.

Da primeira desigualdade da condição 2, segue que $f|_E$ é injetora. Da segunda desigualdade em 2, fazendo $x = S^{-1}(x')$ e $y = S^{-1}(y')$, então $f|_E \circ S^{-1}$ é Lipschitz com $\text{Lip}(f|_E \circ S^{-1}) \leq t$. Analogamente, $S \circ (f|_E)^{-1}$ é Lipschitz com $\text{Lip}(S \circ (f|_E)^{-1}) \leq t$. Logo, vale (2'). Pelo mesmo raciocínio, usando 3, obtemos (3').

Como S^{-1} e $S \circ (f|_E)^{-1}$ são Lipschitz, então $(f|_E)^{-1} = S^{-1} \circ (S \circ (f|_E)^{-1})$ é Lipschitz.

□

Corolário 2.4. Sejam $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação Lipschitz com $n \leq m$, $t > 1$ e (E, S) uma t -linearização de f . Então, para todo $x \in E$,

$$t^{-n}|\det S| \leq Jf(x) \leq t^n|\det S|.$$

Demonstração. Note que

$$Jf(x) = \underbrace{\|Df(x)\| |\det S^{-1}| |\det S|}_{\det I=1} \stackrel{2.4}{=} \|Df(x) \circ S^{-1}\| |\det S|.$$

Por outro lado, como $Df(x) \circ S^{-1}$ é injetora, segue das proposições 2.4 e 2.5, que

$$t^{-n} |\det S| \leq Jf(x) = \|Df(x) \circ S^{-1}\| |\det S| \leq t^n |\det S|.$$

□

Teorema 2.8. (*Linearização Lipschitz, parte 1*). *Sejam $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ Lipschitz com $n \leq m$ e $t > 1$. Então existe uma família disjunta enumerável $(E_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ tal que $J_f^+ = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} E_k$ e para todo $k \in \mathbb{N}$, existe $S_k \in \text{Sym}(n) \cap \text{GL}(\mathbb{R}^n)$ tal que (E_k, S_k) é uma t -linearização de f .*

Demonstração. Fixe $\varepsilon > 0$ tal que $t^{-1} + \varepsilon < 1 < t - \varepsilon$. Da separabilidade dos espaços seguintes, considere $\mathcal{S}$ um subconjunto enumerável denso de $\text{Sym}(n) \cap \text{GL}(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{G}$ um subconjunto enumerável denso de J_f^+ . Para todo $S \in \mathcal{S}$, $k \in \mathbb{N}$ e $c \in \mathcal{G}$, definimos $E(S, k, c) := \mathbb{B}(c, \frac{1}{2k}) \cap F(S, k)$, onde $F(S, k) \subset J_f^+$ é o conjunto de todos os $x \in J_f^+$ tais que:

(F1) Para todo $v \in \mathbb{R}^n$, $(t^{-1} + \varepsilon) \|Sv\| \leq \|Df(x)v\| \leq (t - \varepsilon) \|Sv\|$;

(F2) Para todo $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|v\| \leq k^{-1}$, $\|f(x + v) - f(x) - Df(x)v\| \leq \varepsilon \|Sv\|$.

Como Df é boreliana, é claro que $F(S, k) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$, donde $E(S, k, c) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$. Além disso, para todo $S \in \mathcal{S}$, $k \in \mathbb{N}$ e $c \in \mathcal{G}$ e, para todos $x, y \in E(S, k, c)$,

$$\begin{aligned} \|f(y) - f(x)\| &\stackrel{F2}{\leq} \|Df(x)(y - x)\| + \varepsilon \|S(y - x)\| \stackrel{F1}{\leq} t \|S(y - x)\| \\ \|f(y) - f(x)\| &\stackrel{F2}{\geq} \|Df(x)(y - x)\| - \varepsilon \|S(y - x)\| \stackrel{F1}{\geq} t^{-1} \|S(y - x)\| \end{aligned}$$

Portanto, a condição 2 na Definição 2.8 é satisfeita para o par $(E(S, k, c), S)$. Além disso, em vista de (F1), a condição 3 na mesma definição é trivialmente satisfeita, de modo que $(E(S, k, c), S)$ é uma t -linearização para f .

$$\vdash J_f^+ = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{E(S, k, c) \mid S \in \mathcal{S}, c \in \mathcal{G}\}$$

Fixe $x \in J_f^+$ e seja $Df(x) = O_x \circ S_x$ a decomposição polar de $Df(x)$, com $O_x \in \text{O}(n, m)$ e $S_x \in \text{Sym}(n)$. Note que, como $Df(x)$ é injetora, S_x também o é, isto é $S_x \in \text{GL}(\mathbb{R}^n)$. Além disso, como $\mathcal{S}$ é denso em $\text{Sym}(n) \cap \text{GL}(\mathbb{R}^n)$, podemos tomar uma sequência $(S_i)_{i \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{S}$ convergente para S_x ; portanto, por continuidade, $S_x \circ S_i^{-1} \rightarrow id_{\mathbb{R}^n}$ e $S_i \circ S_x^{-1} \rightarrow id_{\mathbb{R}^n}$. Tomando i suficientemente grande, conclui-se que existe $S \in \mathcal{S}$ tal que

$$\|S_x \circ S^{-1}\| \leq t - \varepsilon \quad \text{e} \quad \|S \circ S_x^{-1}\| \leq (t^{-1} + \varepsilon)^{-1}.$$

Daí segue que, para todo $v \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} \|Df(x)v\| &= \|(O_x \circ S_x)v\| = \|S_x v\| = \|(S_x \circ S^{-1})Sv\| \leq \|S_x \circ S^{-1}\| \|Sv\| \leq (t - \varepsilon) \|Sv\| \\ (t^{-1} + \varepsilon) \|Sv\| &= (t^{-1} + \varepsilon) \|(S \circ S_x^{-1})S_x v\| \leq (t^{-1} + \varepsilon) \|S \circ S_x^{-1}\| \|S_x v\| \leq \|S_x v\| = \|Df(x)v\| \end{aligned}$$

Ou seja, (F1) é satisfeita. Além disso, pela diferenciabilidade de f em x , existe $R(x, \cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ contínua e nula em $v = 0$, tal que, para todo $v \in \mathbb{R}^n$:

$$\|f(x + v) - f(x) - Df(x)v\| = R(x, v) \|v\| = R(x, v) \|(S^{-1} \circ S)v\| \leq R(x, v) \|S^{-1}\| \|Sv\|.$$

Como $\lim_{v \rightarrow 0} R(x, v) = R(x, 0) = 0$, podemos tomar $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $R(x, v) \|S^{-1}\| \leq \varepsilon$ para $\|v\| \leq k^{-1}$, logo (F2) é satisfeita para este k . Conclui-se, pois, que $x \in$

$F(S, k)$. Finalmente, como $\mathcal{G}$ é denso em J_f^+ , existe $c \in \mathcal{G}$ tal que $c \in \mathbb{U}(x, \frac{1}{2k}) \Leftrightarrow x \in \mathbb{U}(c, \frac{1}{2k})$, logo $x \in E(S, k, c) = \mathbb{B}(c, \frac{1}{2k}) \cap F(S, k)$, provando nossa afirmação.

Logo, denotando $(\hat{E}_k)_{k \in \mathbb{N}} := \{E(S, k, c) \mid S \in \mathcal{S}, k \in \mathbb{N}, c \in \mathcal{G}\}$, sabemos que $J_f^+ = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \hat{E}_k$. Tome a sequência disjunta $(E_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dada por $E_k := \hat{E}_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} \hat{E}_i$, o que prova o teorema. $\square$

Agora, enunciamos a versão da linearização Lipschitz que precisaremos para lidar com a fórmula da coárea.

Teorema 2.9. (*Linearização Lipschitz, parte 2*). *Seja $t > 1$, $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz. Então existe uma família disjunta enumerável $(E_k)_{k \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{B}_{J_h^+}$ tal que $\mathcal{L}^n(J_h^+ \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k) = 0$ e, para todo $k \in \mathbb{N}$, $h|_{E_k}$ é injetora e existe $S_k \in \text{Sym}(n) \cap \text{GL}(\mathbb{R}^n)$ satisfazendo*

- (i) $\text{Lip}(S_k^{-1} \circ h|_{E_k}) \leq t$ e $\text{Lip}((h|_{E_k})^{-1} \circ S_k) \leq t$
- (ii) Para todo $x \in E_k$, $\|S_k^{-1} \circ Dh(x)\| \leq t$ e $\|Dh(x)^{-1} \circ S_k\| \leq t$.

Por argumentos semelhantes aos usados anteriormente nesta seção, temos imediatamente os seguintes fatos:

1. As condições (i) e (ii) são equivalentes a, respectivamente:

(i') Para todos $x, y \in h(E_k)$,

$$t^{-1} \|S_k^{-1}(x - y)\| \leq \|(h|_{E_k})^{-1}(x) - (h|_{E_k})^{-1}(y)\| \leq t \|S_k^{-1}(x - y)\|.$$

(ii') Para todo $x \in E_k$ e para todo $v \in \mathbb{R}^n$, $t^{-1} \|S_k^{-1}v\| \leq \|Dh(x)^{-1}v\| \leq t \|S_k^{-1}v\|$.

2. A condição (i) implica que $h|_{E_k}$ admite inversa Lipschitz.
3. A condição (ii) implica que, para todo $x \in E_k$:

$$t^{-n} |\det S_k| \leq Jh(x) \leq t^n |\det S_k|.$$

Demonstração. Seja $(F_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma família enumerável disjunta em $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ tal que $J_h^+ = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} F_k$ e, para todo $k \in \mathbb{N}$, $h|_{F_k}$ é injetora com inversa Lipschitz. A existência de uma tal família segue do Teorema 2.8 e da Proposição 2.5 com h no lugar de f . Fixe $k \in \mathbb{N}$. Como $(h|_{F_k})^{-1} : h(F_k) \rightarrow \mathbb{R}^n$ é Lipschitz, pelo Teorema de Kirszbraun 2.1, ela pode ser estendida a uma aplicação Lipschitz $h_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Como $h(F_k) \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid h \circ h_k(x) = x\}$, segue do Corolário 2.3 com h_k no lugar de f e h no lugar de g que $Dh(h_k(x)) \circ Dh_k(x) = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$ para $\mathcal{L}^n$ -q.s. $x \in h(F_k)$. Portanto, definindo

$$Y_k := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists Dh_k(x), \exists Dh(h_k(x)), Dh(h_k(x)) \circ Dh_k(x) = \text{id}_{\mathbb{R}^n}\},$$

tem-se $Y_k \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ e $\mathcal{L}^n(h(F_k) \setminus Y_k) = 0$. Além disso, para todo $x \in Y_k$, $Jh(h_k(x)) \cdot Jh_k(x) = 1$, logo $Jh_k(x) > 0$, donde $Y_k \subset J_{h_k}^+$.

Aplicando o Teorema de Linearização Lipschitz 2.8 para h_k , existem uma família enumerável disjunta $(G_j^k)_{j \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ e uma sequência $(R_j^k)_{j \in \mathbb{N}}$ em $\text{Sym}(n) \cap \text{GL}(\mathbb{R}^n)$ tais que $J_{h_k}^+ = \bigsqcup_{j \in \mathbb{N}} G_j^k$ e, para todo $j \in \mathbb{N}$, (G_j^k, R_j^k) é uma t -linearização para h_k . Defina, para cada $j \in \mathbb{N}$,

$$E_j^k := F_k \cap h^{-1}(G_j^k \cap Y_k) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \quad \text{e} \quad S_j^k := (R_j^k)^{-1} \in \text{Sym}(n) \cap \text{GL}(\mathbb{R}^n).$$

Provaremos que a família enumerável $(E_j^k, S_j^k)_{k,j \in \mathbb{N}}$ satisfaz as condições enunciadas no teorema.

Como, $E_j^k \subset F_k$ é claro que $(E_j^k)_{k,j \in \mathbb{N}}$ é uma família disjunta em $\mathcal{B}_{J_h^+}$ e, para todos $k, j \in \mathbb{N}$, $h|_{E_j^k}$ é injetora com inversa Lipschitz. A saber, $(h|_{E_j^k})^{-1}$ é a restrição de h_k a $h(E_j^k) = h(F_k) \cap G_j^k \cap Y_k$.

$$\vdash \mathcal{L}^n(J_h^+ \setminus \bigcup_{k,j \in \mathbb{N}} E_j^k) = 0.$$

De fato, como $J_h^+ = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} F_k$ e $h|_{F_k}$ é bi-Lipschitz sobre $h(F_k)$, é suficiente mostrar que, para todo $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{L}^n(h(F_k) \setminus \bigcup_{j \in \mathbb{N}} E_j^k) = 0$. Como

$$h(F_k \setminus \bigcup_{j \in \mathbb{N}} E_j^k) = h(F_k \setminus [F_k \cap h^{-1}(Y_k \cap \bigcup_{j \in \mathbb{N}} G_j^k)]) = h(F_k \setminus \underbrace{h^{-1}(Y_k \cap J_{h_k}^+)}_{=Y_k}) = h(F_k) \setminus Y_k,$$

que já vimos que tem medida $\mathcal{L}^n$ nula.

$\vdash$ Vale a condição (i)

Sabemos que, para todos $k, j \in \mathbb{N}$, $h_k|_{G_j^k}$ estende $(h|_{E_j^k})^{-1}$, logo $(h_k|_{G_j^k})^{-1}$ estende $h|_{E_j^k}$. Portanto, para todos $k, j \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \text{Lip}((S_j^k)^{-1} \circ h|_{E_j^k}) &= \text{Lip}(R_j^k \circ h|_{E_j^k}) \leq \text{Lip}(R_j^k \circ (h_k|_{G_j^k})^{-1}) \leq t \\ \text{Lip}((h|_{E_j^k})^{-1} \circ S_j^k) &= \text{Lip}((h|_{E_j^k})^{-1} \circ (R_j^k)^{-1}) \leq \text{Lip}(h_k|_{G_j^k} \circ (R_j^k)^{-1}) \leq t, \end{aligned}$$

onde as últimas desigualdades em ambas as linhas são justificadas pelo fato de que (G_j^k, R_j^k) é uma t -linearização para h_k e pela Proposição 2.5. Assim, para todos $k, j \in \mathbb{N}$, a condição (i) no enunciado do lema é satisfeita por (E_j^k, S_j^k) .

$\vdash$ Vale a condição (ii)

Sabemos que, para todos $k, j \in \mathbb{N}$ e para todo $x \in E_j^k$, tem-se $h(x) \in G_j^k \cap Y_k$ e $x = h_k(h(x))$; em particular, pela definição de Y_k , $Dh(x) \circ Dh_k(h(x)) = id_{\mathbb{R}^n}$, isto é, $Dh(x) = Dh_k(h(x))^{-1}$. Então segue que, para todos $k, j \in \mathbb{N}$ e, para todo $x \in E_j^k$:

$$\begin{aligned} \|(S_j^k)^{-1} \circ Dh(x)\| &= \|R_j^k \circ Dh_k(h(x))^{-1}\| \leq t, \\ \|Dh(x)^{-1} \circ S_j^k\| &= \|Dh_k(h(x)) \circ (R_j^k)^{-1}\| \leq t, \end{aligned}$$

onde as últimas desigualdades em ambas as linhas são justificadas pelo fato de que (G_j^k, R_j^k) é uma t -linearização para h_k e pela Proposição 2.5. Assim, para todos $k, j \in \mathbb{N}$, a condição (ii) no enunciado do lema é satisfeita por (E_j^k, S_j^k) , o que conclui a demonstração. $\square$

2.4 Fórmula da Área

Um lema inicial que precisaremos nesta seção diz respeito ao comportamento da medida de Lebesgue em relação a uma aplicação linear. A demonstração desse lema pode ser vista no capítulo 9 de [1], na seção sobre as propriedades dos determinantes; usando o fato de que $\mathcal{L}^n(\Omega) = \text{vol}(\Omega)$ com $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Lema 2.2. *Seja $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação linear. Então $\mathcal{L}^n(L(A)) = |\det(L)|\mathcal{L}^n(A)$, para todo $A \subset \mathbb{R}^n$.*

Lema 2.3. *Seja $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação linear com $n \leq m$. Então $\mathcal{H}^n(L(A)) = \llbracket L \rrbracket \mathcal{L}^n(A)$, para todo $A \subset \mathbb{R}^n$.*

Demonstração. Seja $L = O \circ S$ a decomposição polar de L . Se $\llbracket L \rrbracket = 0$ então, $\det S = 0$ se, e só se, S não é um isomorfismo se, e só se, S não é sobrejetora se, e só se, $\dim S(\mathbb{R}^n) \leq n - 1$. Como O é ortogonal então é isomorfismo sobre a imagem, isto é, $\dim L(\mathbb{R}^n) = \dim O(S(\mathbb{R}^n)) = \dim S(\mathbb{R}^n) \leq n - 1$. Daí, $\mathcal{H}^n(L(\mathbb{R}^n)) = 0$.

Se $\llbracket L \rrbracket > 0$, então $\det S > 0$ (em particular, L é injetivo) e $O : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma isometria linear sobre $\mathbb{R}^n$. Segue que, para toda bola fechada $\mathbb{B}(x, r) \subset \mathbb{R}^n$

$$\frac{\mathcal{H}^n(L(\mathbb{B}(x, r)))}{\mathcal{L}^n(\mathbb{B}(x, r))} = \frac{\mathcal{H}^n(O \circ S(\mathbb{B}(x, r)))}{\mathcal{L}^n(\mathbb{B}(x, r))} \stackrel{1.4}{=} \frac{\mathcal{H}^n(S(\mathbb{B}(x, r)))}{\mathcal{L}^n(\mathbb{B}(x, r))} \stackrel{1.12}{=} \frac{\mathcal{L}^n(S(\mathbb{B}(x, r)))}{\mathcal{L}^n(\mathbb{B}(x, r))} \stackrel{2.2}{=} |\det S| = \llbracket L \rrbracket.$$

Defina para todo $A \subset \mathbb{R}^n$, $\nu(A) := \mathcal{H}^n(L(A))$.

$\vdash \nu$ é medida de Radon.

Como L é isomorfismo sobre $\text{Im} L$, em particular, $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \text{Im} L$ é um homeomorfismo (munindo $\text{Im} L$ da topologia relativa). Então, a operação pushforward $L_\#$ define uma bijeção entre medidas de Borel no $\mathbb{R}^n$ e medidas de Borel na $\text{Im} L$, com inversa $L_\#^{-1}$, além disso, essa bijeção se restringe a uma bijeção entre medidas de Borel regulares.

Como $\mathcal{H}^n|_{\text{Im} L}$ é uma medida Borel regular então segue que $\nu = L_\#^{-1}(\mathcal{H}^n|_{\text{Im} L})$ é Borel regular no $\mathbb{R}^n$.

Além disso, para todo $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto, temos $\nu(K) = \mathcal{H}^n(L(K)) \leq (\text{Lip} L)^n \mathcal{H}^n(K) = (\text{Lip} L)^n \mathcal{L}^n(K) < \infty$, provando nossa afirmação.

$\vdash \nu \ll \mathcal{L}^n$

Se $A \subset \mathbb{R}^n$ é tal que $\mathcal{L}^n(A) = 0$, então $\nu(A) = \mathcal{H}^n(L(A)) \leq (\text{Lip} L)^n \mathcal{H}^n(A) = (\text{Lip} L)^n \mathcal{L}^n(A) = 0$, provando nossa afirmação.

Além disso,

$$D_{\mathcal{L}^n} \nu(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\nu(\mathbb{B}(x, r))}{\mathcal{L}^n(\mathbb{B}(x, r))} = \llbracket L \rrbracket,$$

como provamos anteriormente. Daí, pelo Teorema 1.17, para todo $A \subset \mathbb{R}^n$ Borel

$$\nu(A) = \int_A D_{\mathcal{L}^n} \nu \, d\mathcal{L}^n = \int_A \llbracket L \rrbracket \, d\mathcal{L}^n = \llbracket L \rrbracket \mathcal{L}^n(A).$$

Como a medida é regular, então a igualdade acima deve valer para todo $A \subset \mathbb{R}^n$, isto é, $\mathcal{H}^n(L(A)) = \llbracket L \rrbracket \mathcal{L}^n(A)$. $\square$

Lema 2.4. *Sejam $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ Lipschitz com $n \leq m$ e $A \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{L}^n$ -mensurável. Então*

(i) $f(A)$ é $\mathcal{H}^n$ -mensurável;

(ii) o mapa $y \mapsto \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\})$, chamado função multiplicidade de $f|_A$, é $\mathcal{H}^n$ -mensurável em $\mathbb{R}^m$;

(iii)

$$\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\}) \, d\mathcal{H}^n(y) \leq (\text{Lip} f)^n \mathcal{L}^n(A).$$

Demonstração. (i) Como $\mathcal{L}^n$ é σ -finito, podemos assumir que $\mathcal{L}^n(A) < \infty$ e, por outro lado, como $\mathcal{L}^n$ é medida de Radon em $\mathbb{R}^n$, existem compactos $K_i \subset A$ tais que

$$\mathcal{L}^n(K_i) \geq \mathcal{L}^n(A) - \frac{1}{i}, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Como $\mathcal{L}^n(A) < \infty$ e A é $\mathcal{L}^n$ -mensurável então $\mathcal{L}^n(A \setminus K_i) < \frac{1}{i}$. Como f é contínua, $f(K_i)$ é compacto, donde $f(K_i)$ é $\mathcal{H}^n$ -mensurável e portanto, $f(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} f(K_i)$ é $\mathcal{H}^n$ -mensurável. Além disso,

$$\mathcal{H}^n \left(f(A) - f \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i \right) \right) \leq \mathcal{H}^n \left(f \left(A \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i \right) \right) \leq (\text{Lip} f)^n \mathcal{L}^n \left(A \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i \right) = 0.$$

Logo, $f(A)$ é a união de um conjunto $\mathcal{H}^n$ -mensurável com um de medida $\mathcal{H}^n$ nula, portanto, $f(A)$ é $\mathcal{H}^n$ -mensurável.

(ii) Defina

$$B_k := \left\{ Q \mid Q = (a_1, b_1] \times \dots \times (a_n, b_n], \quad a_i = \frac{c_i}{k}, \quad b_i = \frac{c_i + 1}{k}, \quad c_i \in \mathbb{Z} \right\}$$

e note que $\mathbb{R}^n = \bigcup_{Q \in B_k} Q$. Temos que $g_k := \sum_{Q \in B_k} \chi_{f(A \cap Q)}$ é $\mathcal{H}^n$ -mensurável por (i) e

$$g_k(y) = \text{número de cubos } Q \in B_k \text{ tais que } f^{-1}\{y\} \cap (A \cap Q) \neq \emptyset.$$

Pontualmente, g_k cresce à função multiplicidade de $f|_A$, isto é, quando $k \rightarrow \infty$ temos $g_k(y) \rightarrow \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\})$, para cada $y \in \mathbb{R}^m$, donde $y \mapsto \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\})$ é $\mathcal{H}^n$ -mensurável.

(iii) Pelo TCM 1.7,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\}) \, d\mathcal{H}^n &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^m} g_k \, d\mathcal{H}^n \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{Q \in B_k} \mathcal{H}^n(f(A \cap Q)) \\ &\leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \sum_{Q \in B_k} (\text{Lip} f)^n \mathcal{L}^n(A \cap Q) = (\text{Lip} f)^n \mathcal{L}^n(A). \end{aligned}$$

□

Teorema 2.10. (*Fórmula da Área*). *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ Lipschitz com $n \leq m$. Então, para todo $A \subset \mathbb{R}^n$ $\mathcal{L}^n$ -mensurável, temos*

$$\int_A Jf \, d\mathcal{L}^n = \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\}) \, d\mathcal{H}^n(y).$$

Demonstração. Se $\mathcal{L}^n(A) = 0$ então o lado esquerdo da igualdade acima é 0 e pelo Lema 2.4, o lado esquerdo também. Além disso, por Rademacher 2.2, podemos assumir $A \subset D_f = J_f^+ \sqcup J_f^0$. Pela aditividade da integral, basta considerar os casos $A \subset J_f^+$ e $A \subset J_f^0$.

Caso 1: $A \subset J_f^+$:

Fixe $t > 1$ e seja $(E_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ sequência de conjuntos dados pela linearização Lipschitz, isto é, $J_f^+ = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} E_k$ e, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $S_k \in \text{Sym}(n) \cap \text{GL}(\mathbb{R}^n)$ tal que (E_k, S_k) é

t -linearização para f . Então, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^n(f(A \cap E_k)) &= \mathcal{H}^n((f|_{E_k} \circ S_k^{-1} \circ S_k)(A \cap E_k)) \leq (\text{Lip}(f|_{E_k} \circ S_k^{-1}))^n \mathcal{H}^n(S_k(A \cap E_k)) \\ &\stackrel{2.5}{\leq} t^n \mathcal{H}^n(S_k(A \cap E_k)) \end{aligned} \quad (1)$$

e

$$\mathcal{H}^n(S_k(A \cap E_k)) = \mathcal{H}^n((S_k \circ (f|_{E_k})^{-1} \circ f)(A \cap E_k)) \leq t^n \mathcal{H}^n(f(A \cap E_k)) \quad (2)$$

Além disso, segue do Corolário 2.4 que, para todo $k \in \mathbb{N}$ e, para todo $x \in E_k$

$$t^{-n} |\det S_k| \leq Jf(x) \leq t^n |\det S_k| \quad (3)$$

Portanto, para todo $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} t^{-2n} \mathcal{H}^n(f(A \cap E_k)) &\stackrel{(1)}{\leq} t^{-n} \mathcal{H}^n(S_k(A \cap E_k)) \stackrel{2.3}{=} t^{-n} |\det S_k| \mathcal{L}^n(A \cap E_k) \\ &\stackrel{(3)}{\leq} \int_{A \cap E_k} Jf(x) d\mathcal{L}^n(x) \stackrel{(3)}{\leq} t^n |\det S_k| \mathcal{L}^n(A \cap E_k) \stackrel{2.3}{=} t^n \mathcal{H}^n(S_k(A \cap E_k)) \stackrel{(2)}{\leq} t^{2n} \mathcal{H}^n(f(A \cap E_k)) \end{aligned}$$

Em particular,

$$t^{-2n} \mathcal{H}^n(f(A \cap E_k)) \leq \int_{A \cap E_k} Jf(x) d\mathcal{L}^n(x) \leq t^{2n} \mathcal{H}^n(f(A \cap E_k)), \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (4)$$

Note que, como $f|_{E_k}$ é injetiva para todo $k \in \mathbb{N}$, então, para todo $y \in \mathbb{R}^m$,

$$\mathcal{H}^0(A \cap E_k \cap f^{-1}\{y\}) = \chi_{f(A \cap E_k)}(y),$$

de tal forma que

$$\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^0(A \cap E_k \cap f^{-1}\{y\}) d\mathcal{H}^n(y) = \mathcal{H}^n(f(A \cap E_k)).$$

Pelo TCM 1.7 e (4), temos

$$\begin{aligned} t^{-2n} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\}) d\mathcal{H}^n(y) &= \sum_{k \in \mathbb{N}} t^{-2n} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^0(A \cap E_k \cap f^{-1}\{y\}) d\mathcal{H}^n(y) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} t^{-2n} \mathcal{H}^n(f(A \cap E_k)) \stackrel{(4)}{\leq} \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{A \cap E_k} Jf(x) d\mathcal{L}^n(x) = \int_A Jf(x) d\mathcal{L}^n(x) \\ &\stackrel{(4)}{\leq} \sum_{k \in \mathbb{N}} t^{2n} \mathcal{H}^n(f(A \cap E_k)) = \sum_{k \in \mathbb{N}} t^{2n} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^0(A \cap E_k \cap f^{-1}\{y\}) d\mathcal{H}^n(y) \\ &= t^{2n} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\}) d\mathcal{H}^n(y). \end{aligned}$$

Daí,

$$t^{-2n} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\}) d\mathcal{H}^n(y) \leq \int_A Jf(x) d\mathcal{L}^n(x) \leq t^{2n} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\}) d\mathcal{H}^n(y).$$

Fazendo $t \rightarrow 1$, segue a igualdade desejada

Caso 2: $A \subset J_f^0$.

É imediato que $\int_A Jf d\mathcal{L}^n = 0$, donde temos que mostrar que $\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\}) d\mathcal{H}^n(y) = 0$.

Como $\mathcal{L}^n$ é σ -finito, podemos assumir $\mathcal{L}^n(A) < \infty$.

Fixe $0 < \varepsilon < 1$ e defina $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ por $g(x) = (f(x), \varepsilon x)$ que é Lipschitz, injetora e, para todo $x \in D_g = D_f$, $Dg(x) = (Df(x), \varepsilon \text{id}_{\mathbb{R}^n})$.

⊢ Existe uma constante $C = C(n, m, \text{Lip} f) > 0$ tal que para todo $x \in A$, $0 < Jg(x) \leq C\varepsilon$.

Temos que a matriz jacobiana de $Dg(x)$ é a matriz

$$[Dg(x)] = \begin{pmatrix} [Df(x)] \\ \varepsilon I_n \end{pmatrix}_{(m+n) \times n}.$$

Pela fórmula de Binet-Cauchy 2.7, $(Jg(x))^2$ é a soma dos quadrados das $n \times n$ submatrizes da matriz acima, donde podemos concluir que, para todo $x \in D_g = D_f$, $Jg(x) \geq \varepsilon^n > 0$.

Por outro lado, note que a norma da i -ésima linha da matriz $[Df(x)]$ é dada por

$$\|\nabla f^i(x)\| = \|Df^i(x)\| \leq \text{Lip} f^i \leq \text{Lip} f,$$

onde f^i é a i -ésima coordenada da f (na base canônica de $\mathbb{R}^m$). Além disso, note que a soma dos quadrados das submatrizes $n \times n$ de $[Dg(x)]$ pode ser escrita como $M_1 + M_2$, onde os termos em M_1 são os quadrados das submatrizes $n \times n$ com linhas em $[Df(x)]$, isto é, $M_1 = (Jf(x))^2$, e os termos em M_2 são os quadrados das demais submatrizes $n \times n$, isto é, aquelas que têm ao menos uma linha em εI_n . Como $\varepsilon < 1$ e as linhas em $[Df(x)]$ têm normas limitadas por $\text{Lip} f$, cada submatriz do último tipo é limitado por $\varepsilon \max\{1, (\text{Lip} f)^{n-1}\}$. Como existem $\binom{m+n}{n} - \binom{m}{n}$ parcelas em M_2 , tem-se $M_2 \leq ((\binom{m+n}{n} - \binom{m}{n}) \varepsilon^2 \max\{1, (\text{Lip} f)^{n-1}\})^2$.

Logo, para todo $x \in D_g = D_f$:

$$(Jg(x))^2 \leq (Jf(x))^2 + \left(\binom{m+n}{n} - \binom{m}{n} \right) \varepsilon^2 \max\{1, (\text{Lip} f)^{n-1}\}^2.$$

Em particular, se $x \in A \subset J_f^0$, segue que $Jg(x) \leq C\varepsilon$, onde

$$C := \sqrt{\left(\binom{m+n}{n} - \binom{m}{n} \right) \max\{1, (\text{Lip} f)^{n-1}\}},$$

concluindo a prova da nossa afirmação.

Denotando por $\text{pr}_1 : \mathbb{R}^{m+n} \equiv \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ a projeção no primeiro fator, então é claro que temos $\text{Lip pr}_1 = 1$. Além disso, como g é injetora, temos que $\mathcal{H}^0(A \cap g^{-1}\{y\}) = \chi_{g(A)}(y)$, para todo $y \in \mathbb{R}^{m+n}$, donde,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^n(f(A)) &= \mathcal{H}^n((\text{pr}_1 \circ g)(A)) \stackrel{1.4}{\leq} (\text{Lip pr}_1)^n \mathcal{H}^n(g(A)) = \mathcal{H}^n(g(A)) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{m+n}} \mathcal{H}^0(A \cap g^{-1}\{y\}) d\mathcal{H}^n(y) \stackrel{\text{Caso 1}}{=} \int_A Jg d\mathcal{L}^n \leq C\varepsilon \mathcal{L}^n(A). \end{aligned}$$

Logo, como $0 < \varepsilon < 1$ é arbitrário, e assumimos $\mathcal{L}^n(A) < \infty$, segue que $\mathcal{H}^n(f(A)) = 0$. Como a função multiplicidade $y \mapsto \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\})$ se anula fora de $f(A)$, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\}) d\mathcal{H}^n(y) = \int_{f(A)} \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\}) d\mathcal{H}^n(y) = 0.$$

□

2.4.1 Corolários e Aplicações da Fórmula da Área

Corolário 2.5. Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é Lipschitz com $n \leq m$, então para $\mathcal{H}^n$ -q.t.p. $y \in \mathbb{R}^m$, $f^{-1}\{y\}$ é contável (finito ou enumerável).

Demonstração. Como para todo $x \in D_f$, $Jf(x) \stackrel{2.4}{\leq} \|Df(x)\|^n \leq (\text{Lip} f)^n$, segue da Fórmula da Área 2.10 que,

$$\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^0(K \cap f^{-1}\{y\}) d\mathcal{H}^n(y) = \int_K Jf d\mathcal{L}^n < \infty, \text{ para todo } K \subset \mathbb{R}^n \text{ compacto.}$$

Logo, para todo $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto e para $\mathcal{H}^n$ -q.t.p. $y \in \mathbb{R}^m$, $\mathcal{H}^0(K \cap f^{-1}\{y\}) < \infty$. Logo, para tais y , $f^{-1}\{y\} \cap K$ é finito para cada compacto do $\mathbb{R}^n$, donde segue que $f^{-1}\{y\}$ é contável. $\square$

Corolário 2.6. (*Mudança de Variáveis*). Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ Lipschitz com $n \leq m$. Então, para toda função $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{L}^n$ -mensurável com $g \geq 0$ ou g somável, temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} g Jf d\mathcal{L}^n = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\sum_{x \in f^{-1}\{y\}} g(x) \right) d\mathcal{H}^n(y).$$

Demonstração. Suponha $g \geq 0$. Pela Proposição 1.2, existe uma sequência $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de conjuntos $\mathcal{L}^n$ -mensuráveis tais que

$$g = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \chi_{A_i}.$$

Seja $\psi : \mathbb{R}^m \rightarrow [0, \infty]$ dada por $\psi(y) := \sum_{x \in f^{-1}\{y\}} g(x)$ e note que, pelo TCM 1.7,

$$\begin{aligned} \psi(y) &= \sum_{x \in f^{-1}\{y\}} g(x) = \sum_{x \in f^{-1}\{y\}} \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{i} \chi_{A_i}(x) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{i} \sum_{x \in f^{-1}\{y\}} \chi_{A_i}(x) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{i} \mathcal{H}^0(A_i \cap f^{-1}\{y\}). \end{aligned}$$

Pelo Lema 2.4, sabemos que para todo $i \in \mathbb{N}$, a função multiplicidade de $f|_{A_i}$ é $\mathcal{H}^n$ -mensurável, donde, segue que ψ é $\mathcal{H}^n$ -mensurável e $\psi \geq 0$. Além disso, aplicando mais uma vez o TCM 1.7 e a Fórmula da Área 2.10, obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m} \psi(y) d\mathcal{H}^n(y) &= \int_{\mathbb{R}^m} \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{i} \mathcal{H}^0(A_i \cap f^{-1}\{y\}) d\mathcal{H}^n(y) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{i} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^0(A_i \cap f^{-1}\{y\}) d\mathcal{H}^n(y) \\ &\stackrel{2.10}{=} \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{i} \int_{A_i} Jf d\mathcal{L}^n \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{i} \chi_{A_i} Jf d\mathcal{L}^n = \int_{\mathbb{R}^n} g Jf d\mathcal{L}^n, \end{aligned}$$

o que prova o caso $g \geq 0$.

Se $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é $\mathcal{L}^n$ -somável, escrevemos $g = g^+ - g^-$ e aplicamos o caso já provado a g^+ e g^- , o que conclui a demonstração. $\square$

Corolário 2.7. *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ Lipschitz e injetora com $n \leq m$. Se $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ é $\mathcal{L}^n$ -mensurável com $g \geq 0$ ou g somável, então*

$$\int_{\text{Im } f} g \circ f^{-1} d\mathcal{H}^n = \int_{\mathbb{R}^n} g Jf d\mathcal{L}^n.$$

Em particular, se $g : \text{Im } f \rightarrow [0, \infty]$ for boreliana, então

$$\int_{\text{Im } f} g d\mathcal{H}^n = \int_{\mathbb{R}^n} g \circ f Jf d\mathcal{L}^n$$

Demonstração. Note que, para todo $y \in \mathbb{R}^m$, temos

$$\sum_{x \in f^{-1}\{y\}} g(x) = \begin{cases} g \circ f^{-1}(y) & y \in \text{Im } f \\ 0 & y \in \mathbb{R}^m \setminus \text{Im } f. \end{cases}$$

Portanto, segue do Corolário 2.6 acima, que

$$\int_{\text{Im } f} g \circ f^{-1} d\mathcal{H}^n = \int_{\mathbb{R}^n} g Jf d\mathcal{L}^n.$$

Se $g : \text{Im } f \rightarrow [0, \infty]$ for boreliana, podemos aplicar a igualdade acima para $g \circ f$ no lugar de g , obtendo

$$\int_{\text{Im } f} g d\mathcal{H}^n = \int_{\mathbb{R}^n} g \circ f Jf d\mathcal{L}^n.$$

□

Observação 2.4. A fórmula da área e seus corolários continuam válidos se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ for substituída por $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ localmente Lipschitz, com $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Neste sentido, como aplicações C^1 são localmente Lipschitz, podemos obter ainda, como consequência de 2.6 a fórmula clássica de mudança de variáveis, que relembramos abaixo:

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ um difeomorfismo C^1 sobre a imagem $V := \phi(U)$ (que é um aberto do $\mathbb{R}^n$). Se f é uma aplicação $\mathcal{L}^n$ -mensurável em V , $f \circ \phi$ é $\mathcal{L}^n$ -mensurável em U ; além disso, se $f \geq 0$ ou $f \in L^1$, então

$$\int_V f d\mathcal{L}^n = \int_U f \circ \phi(x) |\det D\phi(x)| d\mathcal{L}^n(x)$$

A fórmula clássica na verdade vale assumindo hipóteses muito mais fracas em $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$; é suficiente, por exemplo, que ϕ seja uma aplicação C^1 e injetiva (não precisa ser um difeomorfismo).

Vejamos agora, algumas aplicações da fórmula da área.

Comprimento de uma Curva

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$ e $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ Lipschitz e injetiva. Podemos estender γ a uma aplicação Lipschitz em $\mathbb{R}$, a qual ainda denotaremos por γ . Note que, para todo $t \in D_\gamma$,

$$J\gamma(t) = \|\gamma'(t)\|$$

Portanto, segue do teorema de mudança de variáveis 2.6 com $g = \chi_{[a,b]}$ que

$$\begin{aligned} \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt &= \int_{\mathbb{R}} \chi_{[a,b]} J\gamma d\mathcal{L}^1 \stackrel{2.6}{=} \int_{\mathbb{R}^m} \left(\sum_{x \in \gamma^{-1}\{y\}} \chi_{[a,b]}(x) \right) d\mathcal{H}^1(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \chi_{\gamma([a,b])}(y) d\mathcal{H}^1(y) = \mathcal{H}^1(\gamma([a,b])). \end{aligned}$$

Área do Gráfico

Sejam $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ dada por $f(x) := (x, g(x))$. Então f é Lipschitz e injetora e, calculando através da fórmula de Binet-Cauchy 2.7, para todo $x \in D_f = D_g$,

$$Jf(x) = \sqrt{1 + \|\nabla g(x)\|^2}.$$

Para cada $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, podemos aplicar a Fórmula da Área 2.10 para se obter uma fórmula clássica para a área superficial do gráfico de g restrita a U , isto é, a medida de Hausdorff n -dimensional de $\text{graf}(g|_U) := \{(x, g(x)) \mid x \in U\} = f(U)$:

$$\mathcal{H}^n(\text{graf}(g|_U)) = \int_U Jf d\mathcal{L}^n = \int_U \sqrt{1 + \|\nabla g(x)\|^2} d\mathcal{L}^n(x).$$

2.5 Fórmula da Coárea

Lema 2.5. (*Fórmula da Coárea, caso linear*). Sejam $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ aplicação linear, com $n \geq m$ e $A \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{L}^n$ -mensurável. Então

(i) A aplicação $N(L|_A) : \mathbb{R}^m \rightarrow [0, \infty]$ dada por $N(L|_A)(y) := \mathcal{H}^{n-m}(A \cap L^{-1}\{y\})$ é $\mathcal{L}^m$ -mensurável.

(ii)

$$\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap L^{-1}\{y\}) d\mathcal{L}^m(y) = \llbracket L \rrbracket \mathcal{L}^n(A).$$

Demonstração. Seja $L = S \circ O^*$ uma decomposição polar de L . Analisemos 3 casos.

Caso 1: $\dim L(\mathbb{R}^n) < m$.

Então, para $\mathcal{L}^m$ -q.t.p. $y \in \mathbb{R}^m$, $L^{-1}\{y\} = \emptyset$, e portanto $N(L|_A)(y) = \mathcal{H}^{n-m}(A \cap L^{-1}\{y\}) = 0$. Isto é, $N(L|_A)$ é nulo $\mathcal{L}^m$ -q.s., portanto é $\mathcal{L}^m$ -mensurável. Por outro lado, como O^* é sobrejetor, $\text{Im } L = \text{Im } S$, donde S não é sobrejetor e, donde $\llbracket L \rrbracket = |\det S| = 0$. Nesse caso, concluímos a igualdade desejada.

Caso 2: $L = \text{pr}_1 : \mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ é a projeção no primeiro fator.

Daí, temos $S = \text{id}_{\mathbb{R}^m}$ e $O = \text{pr}_1^*$. Fixe $y \in \mathbb{R}^m$ e seja $\text{pr}_2 : \mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ a projeção no segundo fator. Então a restrição $\text{pr}_2 : \text{pr}_1^{-1}\{y\} \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ é uma isometria que leva $A \cap \text{pr}_1^{-1}\{y\}$ na seção $A_y = \{x \mid (y, x) \in A\} \subset \mathbb{R}^{n-m}$. Portanto, $N(\text{pr}_1|_A)(y) = \mathcal{H}^{n-m}(A \cap \text{pr}_1^{-1}\{y\}) = \mathcal{H}^{n-m}(A_y) = \mathcal{L}^{n-m}(A_y)$. Pelo teorema de Fubini-Tonelli 1.10 aplicado à medida produto $\mathcal{L}^m \times \mathcal{L}^{n-m}$ (a qual coincide com $\mathcal{L}^n$), conclui-se que $N(\text{pr}_1|_A)$ é $\mathcal{L}^m$ -mensurável e

$$\mathcal{L}^n(A) = \mathcal{L}^{n-m} \times \mathcal{L}^m(A) = \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{L}^{n-m}(A_y) d\mathcal{L}^m(y) = \int_{\mathbb{R}^m} N(\text{pr}_1|_A)(y) d\mathcal{L}^m(y)$$

como queríamos pois $\llbracket \text{pr}_1 \rrbracket = 1$.

Caso 3: $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ sobrejetora.

Note que, como $\text{Im } L = \text{Im } S$, tem-se $S \in \text{Sym}(m) \cap \text{GL}(\mathbb{R}^m)$.

⊢ Existe $Q \in O(n)$ tal que $O^* = \text{pr}_1 \circ Q$, onde é a projeção no primeiro fator, como no item anterior.

De fato, estenda $O \in O(m, n)$ a uma isometria linear $S : \mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e defina $Q := S^*$. Como $\text{pr}_1^* : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ é a inclusão em $\mathbb{R}^m$, temos $S \circ \text{pr}_1^* = O$, donde $O^* = \text{pr}_1 \circ S^* = \text{pr}_1 \circ Q$, provando nossa afirmação.

Tomando $Q \in O(n)$ como acima, temos, para todo $y \in \mathbb{R}^m$,

$$\begin{aligned} N(L|_A)(y) &= \mathcal{H}^{n-m}(A \cap L^{-1}\{y\}) = \mathcal{H}^{n-m}(A \cap (S \circ \text{pr}_1 \circ Q)^{-1}\{y\}) \\ &= \mathcal{H}^{n-m}(Q^{-1}[Q(A) \cap \text{pr}_1^{-1}\{S^{-1}(y)\}]) \\ &\stackrel{1.4}{=} \mathcal{H}^{n-m}(Q(A) \cap \text{pr}_1^{-1}\{S^{-1}(y)\}) \\ &= N(\text{pr}_1|_{Q(A)}) \circ S^{-1}(y). \end{aligned}$$

Pelo caso anterior, $N(\text{pr}_1|_{Q(A)})$ é $\mathcal{L}^m$ -mensurável e S^{-1} é contínua, donde S^{-1} é boreliana. Segue então que a composição $N(L|_A) = N(\text{pr}_1|_{Q(A)}) \circ S^{-1}$ é $\mathcal{L}^m$ -mensurável. Daí,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m} N(L|_A)(y) d\mathcal{L}^m(y) &= \int_{\mathbb{R}^m} N(\text{pr}_1|_{Q(A)}) \circ S^{-1}(y) d\mathcal{L}^m(y) = |\det S| \int_{\mathbb{R}^m} N(\text{pr}_1|_{Q(A)}) d\mathcal{L}^m \\ &\stackrel{\text{Caso 2}}{=} |\det S| \mathcal{L}^n(Q(A)) \stackrel{Q \in O(n)}{=} \llbracket L \rrbracket \mathcal{L}^n(A). \end{aligned}$$

□

Para o próximo resultado, relembre a Definição 1.15 de integral superior.

Lema 2.6. (*Desigualdade de Eilenberg*) Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ Lipschitz. Então, para todos $k, l \in [0, \infty)$ e $A \subset \mathbb{R}^n$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^m}^* \mathcal{H}^k(A \cap f^{-1}\{y\}) d\mathcal{H}^l(y) \leq \frac{\alpha(k)\alpha(l)}{\alpha(k+l)} (\text{Lip } f)^l \mathcal{H}^{k+l}(A).$$

Note que não assumimos $n \geq m$ e nem a mensurabilidade de A no enunciado acima. Vamos provar apenas o caso $l = m$, onde podemos fazer um argumento mais simples, graças à desigualdade isodiamétrica 1.11. Apenas esse caso será necessário na fórmula da coárea.

Demonstração. Para cada $j \in \mathbb{N}$, existe uma cobertura de A por fechados $(B_i^j)_{i \in \mathbb{N}}$ com diâmetro $\leq 1/j$ tal que

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha(k+m) \left(\frac{\text{diam } B_i^j}{2} \right)^{k+m} \leq \mathcal{H}_{1/j}^{k+m} + \frac{1}{j}. \quad (5)$$

Para todos $i, j \in \mathbb{N}$, defina

$$g_i^j := \alpha(k) \left(\frac{\text{diam } B_i^j}{2} \right)^k \chi_{f(B_i^j)}.$$

Como f é contínua, B_i^j é fechado (portanto, σ -compacto) então $f(B_i^j)$ é σ -compacto, donde é conjunto de Borel, g_i^j é boreliano e não-negativo, donde $\sum_{i \in \mathbb{N}} g_i^j$ é boreliano. Além disso, para

cada $y \in \mathbb{R}^m$ e $j \in \mathbb{N}$, $A \cap f^{-1}\{y\}$ está contido na união dos B_i^j tais que $y \in f(B_i^j)$. Daí, segue que

$$\mathcal{H}_{1/j}^k(A \cap f^{-1}\{y\}) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} g_i^j(y).$$

Assim, aplicando as propriedades e teoremas de integral vistos no capítulo 1, temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m}^* \mathcal{H}^k(A \cap f^{-1}\{y\}) \underbrace{d\mathcal{H}^m(y)}_{=d\mathcal{L}^m} &= \int_{\mathbb{R}^m}^* \lim_{j \rightarrow \infty} \mathcal{H}_{1/j}^k(A \cap f^{-1}\{y\}) d\mathcal{L}^m(y) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^m}^* \liminf_{j \rightarrow \infty} \sum_{i \in \mathbb{N}} g_i^j(y) d\mathcal{L}^m(y) \stackrel{1.3}{=} \int_{\mathbb{R}^m} \liminf_{j \rightarrow \infty} \sum_{i \in \mathbb{N}} g_i^j(y) d\mathcal{L}^m(y) \\ &\stackrel{1.8}{\leq} \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^m} \sum_{i \in \mathbb{N}} g_i^j(y) d\mathcal{L}^m(y) \stackrel{1.7}{=} \liminf_{j \rightarrow \infty} \sum_{i \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^m} g_i^j(y) d\mathcal{L}^m(y) \\ &= \liminf_{j \rightarrow \infty} \sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha(k) \left(\frac{\text{diam } B_i^j}{2} \right)^k \mathcal{L}^m(f(B_i^j)). \end{aligned}$$

Aplicando agora a desigualdade isodiamétrica 1.11 na última expressão acima, obtemos

$$\begin{aligned} &\liminf_{j \rightarrow \infty} \sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha(k) \left(\frac{\text{diam } B_i^j}{2} \right)^k \alpha(m) \left(\frac{\text{diam } f(B_i^j)}{2} \right)^m \\ &\leq \frac{\alpha(k)\alpha(m)}{\alpha(k+m)} (\text{Lip } f)^m \liminf_{j \rightarrow \infty} \sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha(k+m) \left(\frac{\text{diam } B_i^j}{2} \right)^{k+m} \\ &\stackrel{(5)}{\leq} \frac{\alpha(k)\alpha(m)}{\alpha(k+m)} (\text{Lip } f)^m \liminf_{j \rightarrow \infty} \left(\mathcal{H}_{1/j}^{k+m}(A) + \frac{1}{j} \right) \\ &= \frac{\alpha(k)\alpha(m)}{\alpha(k+m)} (\text{Lip } f)^m \mathcal{H}^{k+m}(A). \end{aligned}$$

Ou seja, provamos a desigualdade desejada para $l = m$. □

Lema 2.7. *Sejam $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ Lipschitz com $n \geq m$ e A um conjunto $\mathcal{L}^n$ -mensurável. Então,*

- (i) *Para $\mathcal{L}^m$ -q.t.p. $y \in \mathbb{R}^m$, $A \cap f^{-1}\{y\}$ é $\mathcal{H}^{n-m}$ -mensurável.*
- (ii) *A aplicação $N(f|_A) : \mathbb{R}^m \rightarrow [0, \infty]$ dada por $N(f|_A)(y) := \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\})$ é $\mathcal{L}^m$ -mensurável.*

Demonstração. Caso 1: A é compacto.

Fixe $t \geq 0$. Para cada $i \in \mathbb{N}$, seja U_i o conjunto dos pontos $y \in \mathbb{R}^m$ tais que existe um conjunto finito de abertos $(S_j)_{1 \leq j \leq k}$ satisfazendo as seguintes condições:

$$\begin{cases} A \cap f^{-1}\{y\} \subset \bigcup_{j=1}^k S_j, \\ \text{diam } S_j \leq \frac{1}{i}, \forall j \in \{1, \dots, k\}, \\ \sum_{j=1}^k \alpha(n-m) \left(\frac{\text{diam } S_j}{2} \right)^{n-m} \leq t + \frac{1}{i}. \end{cases} \quad (6)$$

⊢ Para todo $i \in \mathbb{N}$, U_i é aberto.

De fato, seja $y \in U_i$. Tome $(S_j)_{1 \leq j \leq k}$ satisfazendo as condições (6). Mostremos que existe $r > 0$ tal que $A \cap f^{-1}(\mathbb{U}(y, r)) \subset \bigcup_{j=1}^k S_j$.

De fato, suponha por absurdo que não exista tal $r > 0$. Então podemos tomar uma sequência $(y_h)_{h \in \mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}^m$ convergente para y tal que, para todo $h \in \mathbb{N}$, existe $x_h \in f^{-1}\{y_h\} \cap A \setminus \bigcup_{1 \leq j \leq k} S_j$. Como A é compacto, então $A \setminus \bigcup_{1 \leq j \leq k} S_j$ é compacto, donde existe uma subsequência de $(x_h)_{h \in \mathbb{N}}$, a qual ainda denotaremos por $(x_h)_{h \in \mathbb{N}}$, tal que $x_h \rightarrow x \in A \setminus \bigcup_{1 \leq j \leq k} S_j$. Por continuidade, segue que $f(x) = \lim f(x_h) = \lim y_h = y$, logo $x \in f^{-1}\{y\} \cap A \setminus \bigcup_{1 \leq j \leq k} S_j$, chegando-se a uma contradição, devido a (6).

Logo, temos que $\mathbb{U}(y, r) \subset U_i$, para todo $i \in \mathbb{N}$, provando nossa afirmação.

$\vdash \{y \in \mathbb{R}^m \mid \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\}) \leq t\} = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} U_i$, logo é um boreliano.

Como queremos provar uma igualdade entre conjuntos, vamos provar cada inclusão:

Inclusão $\subset$: Seja $y \in \mathbb{R}^m$ tal que $\mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\}) \leq t$. Então, para todo $\delta > 0$, $\mathcal{H}_\delta^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\}) \leq t$. Dado $i \in \mathbb{N}$, escolha $\delta \in (0, \frac{1}{i})$. Existe uma cobertura enumerável $\mathcal{G}$ de $A \cap f^{-1}\{y\}$ por abertos de $\mathbb{R}^n$ com diâmetros $\leq \delta$ tal que

$$\sum_{S \in \mathcal{G}} \alpha(n-m) \left(\frac{\text{diam} S}{2} \right)^{n-m} < t + \frac{1}{i}.$$

Como $A \cap f^{-1}\{y\}$ é compacto, podemos extrair uma subcobertura finita $(S_j)_{1 \leq j \leq k}$ de $\mathcal{G}$ satisfazendo (6), de modo que $y \in U_i$. Como $i \in \mathbb{N}$ é arbitrário, segue que $y \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} U_i$.

Inclusão $\supset$: Reciprocamente, se para todo $i \in \mathbb{N}$, $y \in U_i$, então (6) garante que $\mathcal{H}_{1/i}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\}) \leq t + \frac{1}{i}$; portanto, tomando $i \rightarrow \infty$, conclui-se que $\mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\}) \leq t$.

Logo, nossa afirmação está provada e, como $\{y \in \mathbb{R}^m \mid \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\}) \leq t\} = \emptyset$ para $t < 0$, segue da afirmação que $N(f|_A)$ é boreliana. Como, para todo $y \in \mathbb{R}^m$, $A \cap f^{-1}\{y\}$ é compacto então é conjunto de Borel, donde concluímos a demonstração do caso 1.

Caso 2: A é σ -compacto (em particular, isso vale se A é aberto).

Então, para todo $y \in \mathbb{R}^m$, $A \cap f^{-1}\{y\}$ é σ -compacto, logo boreliano. Além disso, podemos tomar uma sequência crescente $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos compactos de A cuja união é A , de modo que, para todo $y \in \mathbb{R}^m$, a sequência de borelianos $(K_i \cap f^{-1}\{y\})_{i \in \mathbb{N}}$ cresce para $A \cap f^{-1}\{y\}$. Daí, aplicando o Teorema 1.2 para $\mathcal{H}^{n-m}$, segue que $N(f|_{K_i})$ cresce pontualmente para $N(f|_A)$. Pelo caso 1 e com o Teorema 1.5 conclui-se que $N(f|_A)$ é boreliana.

Caso 3: $\mathcal{L}^n(A) = 0$.

Segue da desigualdade de Eilenberg 2.6 com $k = n - m$ e $l = m$, e do Teorema 1.12, que $\int_{\mathbb{R}^m}^* N(f|_A) d\mathcal{L}^m = 0$. Logo, da Proposição 1.3, $N(f|_A)$ é $\mathcal{L}^m$ -mensurável e $\int_{\mathbb{R}^m} N(f|_A) d\mathcal{L}^m = 0$, de modo que $N(f|_A) = 0$, $\mathcal{L}^m$ -q.s. Ou seja, para $\mathcal{L}^m$ -q.t.p. $y \in \mathbb{R}^m$, $\mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\}) = 0$, donde $A \cap f^{-1}\{y\}$ é $\mathcal{H}^{n-m}$ -mensurável.

Caso 4: $\mathcal{L}^n(A) < \infty$.

Como $\mathcal{L}^n$ é uma medida de Radon, podemos tomar uma sequência decrescente $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de abertos contendo A tal que $\inf\{\mathcal{L}^n(U_k) \mid k \in \mathbb{N}\} = \mathcal{L}^n(A)$. Assim, tomando $B := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} U_k \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$, tem-se $\mathcal{L}^n(B) = \mathcal{L}^n(A) < \infty$; como A é $\mathcal{L}^n$ -mensurável, conclui-se que $\mathcal{L}^n(B \setminus A) = 0$. Em particular, segue do caso 3 que, para $\mathcal{L}^m$ -q.t.p. $y \in \mathbb{R}^m$, $\mathcal{H}^{n-m}((B \setminus A) \cap f^{-1}\{y\}) = 0$. Para um tal y , $A \cap f^{-1}\{y\} = (B \cap f^{-1}\{y\}) \setminus ((B \setminus A) \cap f^{-1}\{y\})$ é $\mathcal{H}^{n-m}$ -mensurável e $\mathcal{H}^{n-m}(B \cap f^{-1}\{y\}) = \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\})$, o que mostra que $N(f|_A) = N(f|_B)$ $\mathcal{L}^m$ -q.s., de modo que o caso 4 estará

concluído uma vez que provemos que $N(f|_B)$ é $\mathcal{L}^m$ -mensurável.

De fato, para cada $y \in \mathbb{R}^m$ e $k \in \mathbb{N}$, $U_k \cap f^{-1}\{y\}$ é boreliano e a sequência $(U_k \cap f^{-1}\{y\})_{k \in \mathbb{N}}$ decresce para $B \cap f^{-1}\{y\}$. Além disso, podemos assumir que $\mathcal{L}^n(U_1) < \infty$ (descartando os primeiros termos da sequência $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$, se necessário). Então segue da desigualdade de Eilenberg 2.6 com $k = n - m$ e $l = m$ que

$$\int_{\mathbb{R}^m} N(f|_{U_1}) d\mathcal{L}^m = \int_{\mathbb{R}^m}^* N(f|_{U_1}) d\mathcal{L}^m < \infty.$$

Portanto, para $\mathcal{L}^m$ -q.t.p. $y \in \mathbb{R}^m$, $N(f|_{U_1})(y) = \mathcal{H}^{n-m}(U_1 \cap f^{-1}\{y\}) < \infty$; para um tal y , concluímos, pelo Teorema 1.2 que $N(f|_{U_k})$ decresce $\mathcal{L}^m$ -q.s. para $N(f|_B)$. Então segue que $N(f|_B)$ é $\mathcal{L}^m$ -mensurável (em vista do caso 2 e do Teorema 1.5), como afirmado.

Caso geral:

Pela σ -finitude de $\mathcal{L}^n$, podemos escrever $A = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$, com, A_k $\mathcal{L}^n$ -mensurável e $\mathcal{L}^n(A_k) < \infty$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Então $A \cap f^{-1}\{y\} = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} (A_k \cap f^{-1}\{y\})$. Segue do caso 4 que, para $\mathcal{L}^m$ -q.t.p. $y \in \mathbb{R}^m$, para todo $k \in \mathbb{N}$, $A_k \cap f^{-1}\{y\}$ é $\mathcal{H}^{n-m}$ -mensurável; logo, para tais y , $A \cap f^{-1}\{y\}$ é $\mathcal{H}^{n-m}$ -mensurável e $N(f|_A)(y) = \sum_{k \in \mathbb{N}} N(f|_{A_k})(y)$. Então $N(f|_A)$ é $\mathcal{L}^m$ -mensurável (em vista do caso 4 e do Teorema 1.5).

□

Lema 2.8. *Sejam $n \leq m \leq k$, $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $R : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ aplicações lineares. Então $\|R \circ L\| \leq \|R\|^n \|L\|$. Além disso, se R for injetora, então $\|R^{-1}\|^{-n} \|L\| \leq \|R \circ L\| \leq \|R\|^n \|L\|$*

Demonstração. Denotando por $\mathbb{B}$ a bola fechada unitária em $\mathbb{R}^n$, segue do Lema 2.3 que:

$$\begin{aligned} \|R \circ L\| &\stackrel{2.3}{=} \mathcal{L}^n(\mathbb{B})^{-1} \mathcal{H}^n(R \circ L(\mathbb{B})) \\ &\stackrel{1.4}{\leq} \mathcal{L}^n(\mathbb{B})^{-1} (\text{Lip} R)^n \mathcal{H}^n(L(\mathbb{B})) \\ &\stackrel{2.3}{\leq} (\text{Lip} R)^n \|L\| = \|R\|^n \|L\|. \end{aligned}$$

o que prova a primeira afirmação.

Se $m = k$ e $R \in \text{GL}(\mathbb{R}^m)$, então $L = R^{-1} \circ R \circ L$; logo, pela primeira afirmação, $\|L\| \leq \|R^{-1}\|^n \|R \circ L\| \Leftrightarrow \|R \circ L\| \geq \|R^{-1}\|^{-n} \|L\|$.

Se $m < k$ e R é injetora, tomamos uma isometria linear $P : \text{Im} R \rightarrow \mathbb{R}^m$, de modo que $\|R \circ L\| = \|P \circ R \circ L\|$, $\|P \circ R\| = \|R\|$ e $\|(P \circ R)^{-1}\| = \|R^{-1}\|$. A tese segue, então, aplicando o caso já provado com $P \circ R \in \text{GL}(\mathbb{R}^m)$ no lugar de R . □

Teorema 2.11. *(Fórmula da Coárea). Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ Lipschitz com $n \geq m$. Então, para cada $A \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{L}^n$ -mensurável*

$$\int_A Jf d\mathcal{L}^n = \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\}) d\mathcal{L}^m(y). \quad (7)$$

Observação 2.5. 1. Pela Lema 2.7, sabemos que a integral do lado direito está bem definida.

2. Se $f = \text{pr}_1 : \mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ é a projeção no primeiro fator, temos $Jf = 1$ e a fórmula da coárea se reduz ao Teorema de Fubini-Tonelli 1.10.

3. Se $n = m$, temos a fórmula da área 2.10.

Notação: Seja $n \geq m$ e considere $\{e_1, \dots, e_n\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^n$.

1. Definimos

$$\Lambda(n, n-m) := \{\lambda : \{1, \dots, n-m\} \rightarrow \{1, \dots, n\} \mid \lambda \text{ estritamente crescente}\}.$$

2. Para cada $\lambda \in \Lambda(n, n-m)$, definimos o subespaço $n-m$ -dimensional

$$S_\lambda := \text{span}\{e_{\lambda(i)} \mid 1 \leq i \leq n-m\} \subset \mathbb{R}^n.$$

3. Para cada $\lambda \in \Lambda(n, n-m)$, definimos $P_\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow S_\lambda$ a projeção ortogonal sobre S_λ , isto é,

$$P_\lambda(x_1, \dots, x_n) := (x_{\lambda(1)}, \dots, x_{\lambda(n-m)}).$$

Demonstração. Se $A \subset \mathbb{R}^n \setminus D_f$, então pelo teorema de Rademacher 2.2, $\mathcal{L}^n(A) = 0$, donde em vista de Eilenberg 2.6 com $k = n-m$ e $l = m$, obtemos a igualdade $0 = 0$ em (7), provando o teorema. Assim, é suficiente mostrar a igualdade para $A \subset D_f = J_f^+ \sqcup J_f^0$. Donde, pela aditividade em $\mathcal{L}^n$, é suficiente considerar os casos $A \subset J_f^+$ e $A \subset J_f^0$.

Caso 1: $A \subset J_f^+$

Para cada $\lambda \in \Lambda(n, n-m)$, defina $h_\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ por

$$h_\lambda(x) := (f(x), P_\lambda(x)),$$

Para todo $x \in D_{h_\lambda} = D_f$, tem-se $Dh_\lambda(x) = (Df(x), P_\lambda)$; logo, $Jh_\lambda(x) > 0 \Leftrightarrow x \in J_f^\lambda$, onde

$$J_f^\lambda := \{x \in J_f^+ \mid P_\lambda|_{\ker Df(x)} \text{ é injetora}\}.$$

Para cada $x \in J_f^+$, existe $\lambda \in \Lambda(n, n-m)$ tal que $\ker Df(x)$ é transversal a $S_\lambda \equiv \mathbb{R}^{n-m}$ (logo $x \in J_f^\lambda$). Ou seja, $J_f^+ = \cup_{\lambda \in \Lambda(n, n-m)} J_f^\lambda$. Portanto, podemos decompor A numa união disjunta $A = \sqcup_{\lambda \in \Lambda(n, n-m)} A_\lambda$, com $A_\lambda \subset J_f^\lambda$ $\mathcal{L}^n$ -mensurável. Então, pela aditividade de ambos os membros de (7) em $\mathcal{L}^n$, é suficiente mostrar a igualdade para cada A_λ . Assim, podemos assumir que $A \subset J_f^\lambda = J_{h_\lambda}^+$ para um dado $\lambda \in \Lambda(n, n-m)$.

Por simplicidade de notação, pomos $h := h_\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$. Seja $\text{pr}_1 : \mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ a projeção no primeiro fator, de modo que $f = \text{pr}_1 \circ h$.

Fixe $t > 1$. Aplique o Teorema 2.9 para h de forma a obter uma família enumerável disjunta $(E_k)_{k \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{B}_{J_h^+}$ e uma sequência $(S_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \text{Sym}(n) \cap \text{GL}(\mathbb{R}^n)$ tais que $\mathcal{L}^n(J_h^+ \setminus \sqcup_{k \in \mathbb{N}} E_k) = 0$ e, para todo $k \in \mathbb{N}$, $h|_{E_k}$ é injetora e as condições (i) e (ii) no enunciado do referido lema são satisfeitas. Tome, para todo $k \in \mathbb{N}$, $A_k := A \cap E_k$ que é $\mathcal{L}^n$ -mensurável, de modo que $\mathcal{L}^n(A \setminus \sqcup_{k \in \mathbb{N}} A_k) = 0$ (pois $A \subset J_h^+$).

⊢ Para todo $k \in \mathbb{N}$ e para todo $x \in A_k$,

$$t^{-m} \llbracket \text{pr}_1 \circ S_k \rrbracket \leq Jf(x) \leq t^m \llbracket \text{pr}_1 \circ S_k \rrbracket. \quad (8)$$

De fato, como $f = \text{pr}_1 \circ h$, $Df(x) = \text{pr}_1 \circ Dh(x) = \text{pr}_1 \circ S_k \circ (S_k^{-1} \circ Dh(x))$. Logo, definindo $C := S_k^{-1} \circ Dh(x)$, tem-se $\text{pr}_1 \circ S_k = Df(x) \circ C^{-1}$, donde $(\text{pr}_1 \circ S_k)^* = (C^{-1})^* \circ Df(x)^*$. Portanto, aplicando o Lema 2.8 com $Df(x)^* : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ no lugar de T e $(C^{-1})^* \in \text{GL}(\mathbb{R}^n)$ no lugar de R , e notando que $(C^{-1})^* = (C^*)^{-1}$ e que a operação de transposição⁶ $(\cdot)^*$ preserva jacobianos e é uma isometria linear, conclui-se que

$$\|C\|^{-m} Jf(x) \leq \llbracket \text{pr}_1 \circ S_k \rrbracket \leq \|C^{-1}\|^m Jf(x),$$

logo,

$$t^{-m} \llbracket \text{pr}_1 \circ S_k \rrbracket \stackrel{2.9}{\leq} \|C^{-1}\|^{-m} \llbracket \text{pr}_1 \circ S_k \rrbracket \leq Jf(x) \leq \|C\|^m \llbracket \text{pr}_1 \circ S_k \rrbracket \stackrel{2.9}{\leq} t^m \llbracket \text{pr}_1 \circ S_k \rrbracket,$$

concluindo a prova da nossa afirmação.

Note que, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} & t^{-2n} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A_k \cap f^{-1}\{y\}) d\mathcal{L}^m(y) \\ &= t^{-2n} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}((S_k^{-1} \circ h|_{A_k})^{-1} \circ S_k^{-1} \circ h|_{A_k}(A_k \cap h^{-1}\text{pr}_1^{-1}\{y\})) d\mathcal{L}^m(y) \\ &= t^{-2n} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}((S_k^{-1} \circ h|_{A_k})^{-1}[S_k^{-1} \circ h(A_k) \cap (\text{pr}_1 \circ S_k)^{-1}\{y\}]) d\mathcal{L}^m(y) \\ &\stackrel{1.4}{\leq} [\text{Lip}((h|_{A_k})^{-1} \circ S_k)]^{n-m} t^{-2n} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(S_k^{-1} \circ h(A_k) \cap (\text{pr}_1 \circ S_k)^{-1}\{y\}) d\mathcal{L}^m(y) \\ &\stackrel{2.9}{\leq} t^{-n-m} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(S_k^{-1} \circ h(A_k) \cap (\text{pr}_1 \circ S_k)^{-1}\{y\}) d\mathcal{L}^m(y) \\ &\stackrel{2.5}{=} t^{-n-m} \llbracket \text{pr}_1 \circ S_k \rrbracket \mathcal{L}^n(S_k^{-1} \circ h(A_k)) \\ &\stackrel{1.4}{\leq} t^{-n-m} \llbracket \text{pr}_1 \circ S_k \rrbracket (\text{Lip}(S_k^{-1} \circ h|_{A_k}))^n \mathcal{L}^n(A_k) \\ &\stackrel{2.9}{\leq} t^{-m} \llbracket \text{pr}_1 \circ S_k \rrbracket \mathcal{L}^n(A_k) \\ &\stackrel{(8)}{\leq} \int_{A_k} Jf d\mathcal{L}^n. \end{aligned}$$

Por um raciocínio análogo, podemos seguir a desigualdade para majorar a integral,

$$\begin{aligned} \int_{A_k} Jf d\mathcal{L}^n &\stackrel{(8)}{\leq} t^m \llbracket \text{pr}_1 \circ S_k \rrbracket \mathcal{L}^n(A_k) \\ &= t^m \llbracket \text{pr}_1 \circ S_k \rrbracket \mathcal{L}^n((h|_{A_k}^{-1} \circ S_k) \circ (S_k^{-1} \circ h|_{A_k})(A_k)) \\ &\stackrel{1.4}{\leq} t^m \llbracket \text{pr}_1 \circ S_k \rrbracket (\text{Lip}(h|_{A_k}^{-1} \circ S_k))^n \mathcal{L}^n(S_k^{-1} \circ h|_{A_k}(A_k)) \\ &\stackrel{2.9}{\leq} t^{m+n} \llbracket \text{pr}_1 \circ S_k \rrbracket \mathcal{L}^n(S_k^{-1} \circ h|_{A_k}(A_k)) \\ &\stackrel{2.5}{=} t^{m+n} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(S_k^{-1} \circ h(A_k) \cap (\text{pr}_1 \circ S_k)^{-1}\{y\}) d\mathcal{L}^m(y) \\ &= t^{m+n} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}[(S_k^{-1} \circ h|_{A_k}) \circ (h|_{A_k}^{-1} \circ S_k)(S_k^{-1} \circ h(A_k) \cap (\text{pr}_1 \circ S_k)^{-1}\{y\})] d\mathcal{L}^m(y) \end{aligned}$$

⁶lembre que estamos em espaços euclidianos, portanto, adjunção e transposição são operações confundíveis (cf. [1]).

$$\begin{aligned}
&= t^{m+n} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}[S_k^{-1} \circ h|_{A_k}(A_k \cap h|_{A_k}^{-1} \text{pr}_1^{-1}\{y\})] d\mathcal{L}^m(y) \\
&= t^{m+n} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}[S_k^{-1} \circ h|_{A_k}(A_k \cap f^{-1}\{y\})] d\mathcal{L}^m(y) \\
&\stackrel{1.4}{\leq} t^{m+n} (\text{Lip}(S_k^{-1} \circ h|_{A_k}))^{n-m} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A_k \cap f^{-1}\{y\}) d\mathcal{L}^m(y) \\
&\stackrel{2.9}{\leq} t^{2n} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A_k \cap f^{-1}\{y\}) d\mathcal{L}^m(y).
\end{aligned}$$

Em particular, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$t^{-2n} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A_k \cap f^{-1}\{y\}) d\mathcal{L}^m(y) \leq \int_{A_k} Jf d\mathcal{L}^n \leq t^{2n} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A_k \cap f^{-1}\{y\}) d\mathcal{L}^m(y). \quad (9)$$

Segue do Lema 2.7 que, para $\mathcal{L}^m$ -q.t.p. $y \in \mathbb{R}^m$ e, para todo $k \in \mathbb{N}$, $A_k \cap f^{-1}\{y\}$ é $\mathcal{H}^{n-m}$ -mensurável, donde $\mathcal{H}^{n-m}(\sqcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \cap f^{-1}\{y\}) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{H}^{n-m}(A_k \cap f^{-1}\{y\})$. Daí segue do TCM 1.7 que

$$\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}\left(\bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \cap f^{-1}\{y\}\right) d\mathcal{L}^m(y) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A_k \cap f^{-1}\{y\}) d\mathcal{L}^m(y). \quad (10)$$

⊢ Vale a seguinte igualdade:

$$\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}\left(\bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \cap f^{-1}\{y\}\right) d\mathcal{L}^m(y) = \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\}) d\mathcal{L}^m(y). \quad (11)$$

De fato, como $\sqcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \subset A$, a desigualdade “ $\leq$ ” vale trivialmente em (11). Por outro lado, por subaditividade, temos que, para todo $y \in \mathbb{R}^m$,

$$\mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\}) \leq \mathcal{H}^{n-m}(\sqcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \cap f^{-1}\{y\}) + \mathcal{H}^{n-m}((A \setminus \sqcup_{k \in \mathbb{N}} A_k) \cap f^{-1}\{y\}),$$

donde

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\}) d\mathcal{L}^m(y) \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(\sqcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \cap f^{-1}\{y\}) d\mathcal{L}^m(y) + \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}((A \setminus \sqcup_{k \in \mathbb{N}} A_k) \cap f^{-1}\{y\}) d\mathcal{L}^m(y).
\end{aligned}$$

Como já vimos que $\mathcal{L}^n(A \setminus \sqcup_{k \in \mathbb{N}} A_k) = 0$, segue de Eilenberg 2.6 (com $k = n - m$ e $l = m$) que $\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}((A \setminus \sqcup_{k \in \mathbb{N}} A_k) \cap f^{-1}\{y\}) d\mathcal{L}^m(y) = 0$, assim provando a desigualdade oposta e a afirmação segue.

Então segue de (10) e (11) que

$$\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\}) d\mathcal{L}^m(y) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A_k \cap f^{-1}\{y\}) d\mathcal{L}^m(y). \quad (12)$$

Como $\mathcal{L}^n(A \setminus \sqcup_{k \in \mathbb{N}} A_k) = 0$, tem-se pelo TCM,

$$\int_A Jf d\mathcal{L}^n = \int_{\sqcup_{k \in \mathbb{N}} A_k} Jf d\mathcal{L}^n = \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{A_k} Jf d\mathcal{L}^n. \quad (13)$$

Finalmente, de (13), (12) e (9), conclui-se que

$$t^{-2n} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\}) d\mathcal{L}^m(y) \leq \int_A Jf d\mathcal{L}^n \leq t^{2n} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\}) d\mathcal{L}^m(y).$$

Como $t > 1$ foi tomado arbitrariamente, podemos fazer $t \rightarrow 1$ para obter

$$\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\}) d\mathcal{L}^m(y) = \int_A Jf d\mathcal{L}^n,$$

o que conclui a prova do caso 1.

Caso 2: $A \subset J_f^0$

Pela σ -finitude de $\mathcal{L}^n$, podemos assumir que $\mathcal{L}^n(A) < \infty$.

Fixe $\varepsilon > 0$ e defina $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ por $g(x, y) := f(x) + \varepsilon y$, $\text{pr}_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\text{pr}_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ as projeções no primeiro e segundo fatores, respectivamente. Então g é Lipschitz e, para todo $(x, y) \in D_g = D_f \times \mathbb{R}^m$, $Dg(x, y) = Df(x) \circ \text{pr}_1 + \varepsilon \text{pr}_2$. Portanto, a transposta da matriz jacobiana $[Dg(x, y)]$ se escreve em blocos como

$$[Dg(x, y)^*] = \begin{pmatrix} [Df(x)^*] \\ \varepsilon I_m \end{pmatrix}_{(n+m) \times m}$$

Portanto, pelo mesmo argumento usado no caso 2 da fórmula da área, usando a fórmula de Binet-Cauchy 2.7, conclui-se que, para todo $(x, y) \in D_g = D_f \times \mathbb{R}^m$,

$$Jg(x, y) \geq \varepsilon^m > 0,$$

$$(Jg(x, y))^2 \leq (Jf(x))^2 + \left(\binom{n+m}{m} - \binom{n}{m} \right) \varepsilon^2 \cdot \max\{1, (\text{Lip } f)^{m-1}\}^2.$$

Em particular, se $(x, y) \in A \times \mathbb{R}^m \subset J_f^0 \times \mathbb{R}^m$, podemos concluir que $Jg(x, y) \leq C\varepsilon$, onde

$$C := \sqrt{\left(\binom{n+m}{m} - \binom{n}{m} \right) \max\{1, (\text{Lip } f)^{m-1}\}}.$$

Logo, para todo $(x, y) \in A \times \mathbb{R}^m$, $0 < Jg(x, y) \leq C\varepsilon$; em particular, $A \times \mathbb{R}^m \subset J_g^+$, e assim podemos aplicar o caso 1 com g no lugar de f e qualquer subconjunto $\mathcal{L}^{n+m}$ -mensurável de $A \times \mathbb{R}^m$ no lugar de A .

Recorde que pelo Lema 2.7, a aplicação $N(f|_A) : \mathbb{R}^m \rightarrow [0, \infty]$ dada por $N(f|_A)(y) = \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\})$ é $\mathcal{L}^m$ -mensurável. Como $\eta : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ dada por $\eta(y, w) := y - \varepsilon w$ é linear e sobrejetiva, ela é boreliana. Portanto, a composta $N(f|_A) \circ \eta$ é ≥ 0 e $\mathcal{L}^{2m}$ -mensurável, e também o é a aplicação $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow [0, \infty]$ dada por $(y, w) \mapsto \chi_{\mathbb{B}(0,1)}(w) \cdot N(f|_A)(y - \varepsilon w)$. Como $\mathcal{L}^{2m} = \mathcal{L}^m \times \mathcal{L}^m$, temos por Fubini-Tonelli 1.10 que, para todo $w \in \mathbb{R}^m$,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\}) d\mathcal{L}^m(y) \\ & \stackrel{1.2}{=} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y - \varepsilon w\}) d\mathcal{L}^m(y) \\ & = \frac{1}{\alpha(m)} \int_{\mathbb{B}(0,1)} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y - \varepsilon w\}) d\mathcal{L}^m(y) d\mathcal{L}^m(w) \\ & = \frac{1}{\alpha(m)} \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^m} \chi_{\mathbb{B}(0,1)}(w) \cdot \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y - \varepsilon w\}) d\mathcal{L}^m(y) d\mathcal{L}^m(w) \\ & \stackrel{1.10}{=} \frac{1}{\alpha(m)} \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^m} \chi_{\mathbb{B}(0,1)}(w) \cdot \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y - \varepsilon w\}) d\mathcal{L}^m(w) d\mathcal{L}^m(y) \end{aligned} \tag{14}$$

$$= \frac{1}{\alpha(m)} \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^m} \chi_{\mathbb{B}(0,1)}(w) \cdot \mathcal{H}^{n-m}((A \cap f^{-1}\{y - \varepsilon w\}) \times \{w\}) d\mathcal{L}^m(w) d\mathcal{L}^m(y),$$

onde a última igualdade se deve à Proposição 1.4 aplicada à isometria $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ dada por $x \mapsto (x, w)$.

Note que, se $x \in \mathbb{R}^n$ e $w, y \in \mathbb{R}^m$, tem-se

$$(x \in A \text{ e } g(x, w) = y) \Leftrightarrow (x \in A \text{ e } f(x) = y - \varepsilon w) \Leftrightarrow x \in A \cap f^{-1}\{y - \varepsilon w\}.$$

Logo, definindo $B := A \times \mathbb{B}(0, 1) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, vale a seguinte igualdade:

$$B \cap g^{-1}\{y\} \cap \text{pr}_2^{-1}\{w\} = \begin{cases} \emptyset, & \text{se } w \notin \mathbb{B}(0, 1) \\ (A \cap f^{-1}\{y - \varepsilon w\}) \times \{w\}, & \text{se } w \in \mathbb{B}(0, 1). \end{cases}$$

Então, para todo $(y, w) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$,

$$\chi_{\mathbb{B}(0,1)}(w) \cdot \mathcal{H}^{n-m}((A \cap f^{-1}\{y - \varepsilon w\}) \times \{w\}) = \mathcal{H}^{n-m}(B \cap g^{-1}\{y\} \cap \text{pr}_2^{-1}\{w\}).$$

Portanto, segue de (14) que

$$\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\}) d\mathcal{L}^m(y) = \frac{1}{\alpha(m)} \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(B \cap g^{-1}\{y\} \cap \text{pr}_2^{-1}\{w\}) d\mathcal{L}^m(w) d\mathcal{L}^m(y).$$

Para continuar este cálculo, aplicamos Eilenberg 2.6 à integral interna, com $B \cap g^{-1}\{y\}$ (que é $\mathcal{L}^{n+m}$ -mensurável) no lugar de A , $\text{pr}_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ no lugar de f , $k = n - m$ e $l = m$, o que resulta em

$$\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\}) d\mathcal{L}^m(y) \leq \frac{1}{\alpha(m)} \frac{\alpha(n-m)\alpha(m)}{\alpha(n)} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^n(B \cap g^{-1}\{y\}) d\mathcal{L}^m(y).$$

Portanto, pelo caso 1, temos

$$\begin{aligned} \frac{\alpha(n-m)}{\alpha(n)} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^n(B \cap g^{-1}\{y\}) d\mathcal{L}^m(y) &= \frac{\alpha(n-m)}{\alpha(n)} \int_B Jg d\mathcal{L}^{n+m} \\ &\leq \frac{\alpha(n-m)}{\alpha(n)} C\varepsilon \cdot \mathcal{L}^{n+m}(B) \\ &= \frac{\alpha(n-m)\alpha(m)}{\alpha(n)} C\varepsilon \cdot \mathcal{L}^n(A). \end{aligned}$$

Como $\mathcal{L}^n(A) < \infty$ e $\varepsilon > 0$ é arbitrário, fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\}) d\mathcal{L}^m(y) = 0 = \int_A Jf d\mathcal{L}^n,$$

o que conclui a prova do caso 2 e o teorema segue. $\square$

2.5.1 Corolários e Aplicações da Fórmula da Coárea

Corolário 2.8. *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ Lipschitz com $n \geq m$. Então, para toda $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{L}^n$ -mensurável com $g \geq 0$ ou g somável, temos*

$$\int_{\mathbb{R}^n} g Jf d\mathcal{L}^n = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{f^{-1}\{y\}} g(x) d\mathcal{H}^{n-m}(x) \right) d\mathcal{L}^m(y).$$

Demonstração. Suponha $g \geq 0$. Pela Proposição 1.2, existe uma sequência $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de conjuntos $\mathcal{L}^n$ -mensuráveis tal que

$$g = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \chi_{A_i}. \text{ Logo, } g \cdot \chi_{f^{-1}\{y\}} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \chi_{A_i \cap f^{-1}\{y\}}.$$

Pelo Lema 2.7 e pelo Teorema 1.5, segue que ambos os membros da última igualdade acima são $\mathcal{H}^{n-m}$ -mensuráveis $\mathcal{L}^m$ -q.s. e também, pelo TCM 1.7, segue que

$$\int g \cdot \chi_{f^{-1}\{y\}}(x) d\mathcal{H}^{n-m}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \mathcal{H}^{n-m}(A_i \cap f^{-1}\{y\}),$$

onde o lado esquerdo da igualdade acima, vista como função definida em $y \in \mathbb{R}^m$ (quase sempre), é $\mathcal{L}^m$ -mensurável e

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{f^{-1}\{y\}} g(x) d\mathcal{H}^{n-m}(x) \right) d\mathcal{L}^m(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \mathcal{H}^{n-m}(A_i \cap f^{-1}\{y\}) d\mathcal{L}^m(y) \\ &\stackrel{1.7}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A_i \cap f^{-1}\{y\}) d\mathcal{L}^m(y) \\ &\stackrel{3.23}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \int_{A_i} Jf d\mathcal{L}^n \\ &\stackrel{1.7}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \chi_{A_i} Jf d\mathcal{L}^n = \int_{\mathbb{R}^n} g Jf d\mathcal{L}^n, \end{aligned}$$

o que conclui a prova do caso em que $g \geq 0$. Para g somável, basta aplicar o caso que acabamos de provar para as partes positiva e negativa de g . □

Corolário 2.9. (*Integração em Conjuntos de Nível*). Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz. Então,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla f\| d\mathcal{L}^n = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}^{n-1}(\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = t\}) dt$$

Demonstração. Basta notar que $Jf = \|\nabla f\|$. □

Observação 2.6. Assim como a fórmula da área; a fórmula da coárea e os corolários acima continuam válidos se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ for substituída por $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ localmente Lipschitz, com $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto.

Vejamos agora, algumas aplicações da fórmula da coárea.

Coordenadas Polares

Seja $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{L}^n$ -mensurável com $g \geq 0$ ou g somável. Tome $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \|x\|$. Então f é Lipschitz e, para todo $x \in D_f = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\nabla f(x) = x/\|x\|$. Logo

$Jf(x) = \|\nabla f(x)\| = 1$. Como, para todo $r \in \mathbb{R}$, $f^{-1}\{r\} = \partial\mathbb{B}(0, r)$, então pelo Corolário 2.8, temos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} g d\mathcal{L}^n &= \int_0^\infty \left(\int_{\partial\mathbb{B}(0, r)} g d\mathcal{H}^{n-1} \right) dr \\ &= \int_0^\infty r^{n-1} \left(\int_{\partial\mathbb{B}(0, 1)} g(rx) d\mathcal{H}^{n-1}(x) \right) dr,\end{aligned}$$

visto que o mapa $x \mapsto rx$ muda a medida $\mathcal{H}^{n-1}$ por um fator r^{n-1} .

Em particular, tomando $g := \chi_{\mathbb{B}(0, 1)}$, obtemos que

$$\alpha(n) = \int_0^1 r^{n-1} \mathcal{H}^{n-1}(\partial\mathbb{B}(0, 1)) dr = \frac{\mathcal{H}^{n-1}(\partial\mathbb{B}(0, 1))}{n}.$$

Funções Distância

Um fato interessante que nos apresentado no Cálculo Diferencial e Integral, é o que nos diz que a derivada do volume de uma bola (com respeito ao raio), nos dá a área superficial dessa bola. Por exemplo, no $\mathbb{R}^3$, o volume de uma bola de raio r é dada por

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

e sua área superficial é dada por

$$A(r) = 4\pi r^2 = V'(r)$$

A seguinte aplicação da Fórmula da Coárea não só justifica isso, como também generaliza essa situação.

Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto e não-vazio, e considere $f(x) := d(x, K) = \inf\{\|x - y\| \mid y \in K\}$. Então, f é Lipschitz com $\text{Lip} f \leq 1$, donde, por Rademacher 2.2, f é diferenciável $\mathcal{L}^n$ -q.s.

Seja $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$ onde existe $Df(x)$. Então, como $\text{Lip} f \leq 1$, segue que $\|\nabla f(x)\| \leq 1$. Considere $c \in K$ onde $f(x) = \|x - c\|$. Então,

$$f(tx + (1-t)c) = t\|x - c\|, \quad \forall t \in [0, 1],$$

e portanto,

$$\|x - c\| = \langle \nabla f(x), x - c \rangle \leq \|\nabla f(x)\| \|x - c\|,$$

donde segue que $\|\nabla f(x)\| \geq 1$. Logo, $\|\nabla f(x)\| = 1$ para $\mathcal{L}^n$ -q.t.p. $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$.

Daí, para cada $0 < a < b$ e aplicando a Fórmula da Coárea 2.11 com

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a \leq f(x) \leq b\},$$

obtemos

$$\mathcal{L}^n(\{x \in \mathbb{R}^n \mid a \leq f(x) \leq b\}) = \int_a^b \mathcal{H}^{n-1}(\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = t\}) dt.$$

3 Retificabilidade

Neste capítulo vamos introduzir um conceito muito relevante na TGM, os conjuntos retificáveis. Pretendemos aqui, apenas motivar e estabelecer resultados básicos a respeito destes objetos de tal forma que, nem todos os resultados serão demonstrados, visto que muitos deles dependem de ferramentas e teoremas ainda mais robustos do que os que foram apresentados até então.

Na seção 3.1, vemos a definição de conjuntos retificáveis e mostramos como estes objetos admitem uma geometria em que se pode considerar espaços tangentes em cada ponto e apresentamos um teorema de estrutura que caracteriza todos os conjuntos de $\mathbb{R}^m$ com medida $\mathcal{H}^n$ finita, onde $m \geq n$. As principais referências desta seção são [2], [8], [10] e [11]. Na seção 3.2, tratamos de uma generalização da fórmula da área e coárea para conjuntos retificáveis e as referências usadas nesta seção variam entre [2] e [7].

3.1 Conjuntos Retificáveis

Um conjunto $E \subset \mathbb{R}^m$, $\mathcal{H}^n$ -mensurável, é dito n -enumeravelmente retificável se $\mathcal{H}^n$ -quase todo E está contido numa união enumerável de imagens de aplicações Lipschitz de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$. Esses conjuntos são as superfícies generalizadas da TGM. Além de subvariedades, incluímos objetos com singularidades, como por exemplo, cubos ou cones. Na verdade, os conjuntos retificáveis abrangem objetos extremamente patológicos; podemos considerar uma união enumerável de variedades imersas (desde que a área total se mantenha finita) e mais do que isso, conjuntos retificáveis podem possuir uma quantidade enumerável de pedaços retificáveis, talvez conectados por uma quantidade enumerável de tubos e alças, e possivelmente tendo todos os pontos em $\mathbb{R}^m$ como pontos de acumulação. No entanto, veremos que, sob o ponto de vista da teoria da medida, conjuntos retificáveis comportam-se como subvariedades de classe C^1 .

Definição 3.1. Dados $m \geq n \geq 1$, dizemos que um conjunto $E \subset \mathbb{R}^m$, $\mathcal{H}^n$ -mensurável, é n -enumeravelmente retificável⁷, se existir uma sequência $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de aplicações Lipschitz $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que

$$\mathcal{H}^n \left(E \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} f_i(\mathbb{R}^n) \right) = 0,$$

ou equivalentemente,

$$E \subset E_0 \cup \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} f_i(\mathbb{R}^n) \right) \text{ com } \mathcal{H}^n(E_0) = 0.$$

Observação 3.1. Note que pelo teorema de Kirszbraun 2.1, a definição acima também é equivalente a dizer que

$$\mathcal{H}^n \left(E \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} f_i(A_i) \right) = 0,$$

⁷estamos usando a nomenclatura e definição adotadas nas referências [6], [8] e [11] e ressaltamos que em [4] há uma generalização ainda maior.

onde, para todo $i \in \mathbb{N}$, temos que $A_i \subset \mathbb{R}^n$ e $f_i : A_i \rightarrow \mathbb{R}^m$ são aplicações Lipschitz.

Note que segue imediatamente da definição que, todo subconjunto $\mathcal{H}^n$ -mensurável de um conjunto n -enumeravelmente retificável é n -enumeravelmente retificável e, a união enumerável de conjuntos n -enumeravelmente retificáveis é ainda, n -enumeravelmente retificável.

Observação 3.2. Também segue imediatamente da definição, juntamente do Corolário 1.1 e da Proposição 1.6 que, se $E \subset \mathbb{R}^m$ for n -enumeravelmente retificável, então $\dim_{\mathcal{H}} E \leq n$.

Exemplo 3.1. Se $E \subset \mathbb{R}^m$ for uma n -subvariedade mergulhada de classe C^1 , então E é n -enumeravelmente retificável e $\dim_{\mathcal{H}} E = n$.

De fato, podemos cobrir E com uma família enumerável⁸ $\{\varphi_i : U_i \subset E \rightarrow \mathbb{R}^n\}_{i \in \mathbb{N}}$ de cartas C^1 tal que, para todo $i \in \mathbb{N}$, $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ é bi-Lipschitz sobre sua imagem $\varphi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^n$. Então E se escreve como união enumerável das imagens das aplicações Lipschitz $\varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i) \rightarrow \mathbb{R}^m$, $i \in \mathbb{N}$, logo E é n -enumeravelmente retificável. Portanto, segue da Observação 3.2 que $\dim_{\mathcal{H}} E \leq n$.

Por outro lado, tomando cartas $\{\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n\}_{i \in \mathbb{N}}$ como acima, segue da Proposição 1.6 que $\dim_{\mathcal{H}} E \geq \dim_{\mathcal{H}} U_1 = \dim_{\mathcal{H}} \varphi_1(U_1) = n$ (pois φ_1 é bi-Lipschitz sobre sua imagem $\varphi_1(U_1)$, que é um aberto não vazio de $\mathbb{R}^n$). Portanto, $\dim_{\mathcal{H}} E = n$, como afirmado.

3.1.1 Conjuntos Retificáveis São Quase Subvariedades

Lema 3.1. $E \subset \mathbb{R}^m$ é n -enumeravelmente retificável se, e somente se, $E \subset \bigcup_{i=0}^{\infty} M_i$, com $\mathcal{H}^n(M_0) = 0$ e cada M_i , $i \geq 1$, é uma n -subvariedade mergulhada C^1 .

Demonstração. A volta é imediata, basta usar que cada M_i é localmente gráfico de uma aplicação C^1 , que por sua vez, são localmente Lipschitz. Vejamos a ida.

Se $E \subset M_0 \cup \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} f_i(\mathbb{R}^n)\right)$ com $\mathcal{H}^n(M_0) = 0$ e $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ Lipschitz então, fixado i , pelo Teorema 2.3, para cada $j \in \mathbb{N}$, existem aplicações C^1 , $g_{ij} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tais que

$$\mathcal{H}^n(\{x \in \mathbb{R}^n \mid f_i(x) \neq g_{ij}(x)\}) < \frac{1}{j}.$$

Daí, fazendo $Z_i := \mathbb{R}^n \setminus \left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_i(x) = g_{ij}(x)\}\right)$, temos $\mathcal{H}^n(Z_i) = 0$, donde para cada $i \in \mathbb{N}$,

$$f_i(\mathbb{R}^n) \subset f_i(Z_i) \cup \left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} g_{ij}(\mathbb{R}^n)\right).$$

Então, $\mathcal{H}^n(f_i(Z_i)) = 0$, pois f_i é Lipschitz e portanto, $\mathcal{H}^n(N_0) = 0$, onde $N_0 := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} f_i(Z_i)$. Logo, temos $E \subset M_0 \cup N_0 \cup \left(\bigcup_{i,j} g_{ij}(\mathbb{R}^n)\right)$.

Seja $C_{ij} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Jg_{ij}(x) = 0\}$. Pela Fórmula da Área 2.10, temos que

$$\mathcal{H}^0(C_{ij} \cap g_{ij}^{-1}\{y\}) = 0, \text{ para } \mathcal{H}^n - \text{q.t.p. } y \in \mathbb{R}^m.$$

Logo,

$$C_{ij} \cap g_{ij}^{-1}\{y\} = \emptyset, \text{ para } \mathcal{H}^n - \text{q.t.p. } y \in \mathbb{R}^m, \text{ donde, } \mathcal{H}^n(g_{ij}(C_{ij})) = 0.$$

⁸aproveitamos este momento para avisar o leitor que durante este capítulo, usaremos com total liberdade a propriedade de Lindelöf que os espaços euclidianos admitem.

Por outro lado, dado $x \in \mathbb{R}^n \setminus C_{ij}$, pelo Teorema da Aplicação Inversa, existe uma vizinhança $V_x \subset \mathbb{R}^n$ contendo x tal que, $g_{ij}(V_x)$ é uma subvariedade euclidiana, dada por uma única carta. Podemos, evidentemente, tomar uma coleção enumerável de pontos $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ com $x_k \in \mathbb{R}^n \setminus C_{ij}$, tais que $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} V_k = \mathbb{R}^n \setminus C_{ij}$. Portanto, temos

$$g_{ij}(\mathbb{R}^n) = g_{ij}(C_{ij}) \cup g_{ij}(\mathbb{R}^n \setminus C_{ij}) = g_{ij}(C_{ij}) \cup g_{ij}\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} V_k\right) = g_{ij}(C_{ij}) \cup \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} g_{ij}(V_k)\right).$$

Logo, segue que

$$\bigcup_{i,j} g_{ij}(\mathbb{R}^n) = \bigcup_{i,j} g_{ij}(C_{ij}) \cup \bigcup_{i,j,k} g_{ij}(V_k), \text{ com } \mathcal{H}^n\left(\bigcup_{i,j} g_{ij}(C_{ij})\right) = 0.$$

Portanto,

$$E \subset M_0 \cup N_0 \cup \bigcup_{i,j} g_{ij}(C_{ij}) \cup \bigcup_{i,j,k} g_{ij}(V_k),$$

onde $\mathcal{H}^n(M_0 \cup N_0 \cup \bigcup_{i,j} g_{ij}(C_{ij})) = 0$ e $g_{ij}(V_k)$ são n -subvariedades de classe C^1 . $\square$

Corolário 3.1. *Se $E \subset \mathbb{R}^m$ é n -enumeravelmente retificável, então podemos escrever E como união disjunta $E = \bigsqcup_{i=0}^{\infty} E_i$ onde, $\mathcal{H}^n(E_0) = 0$ e para todo $i \geq 0$, $E_i \subset M_i$, onde M_{i+1} é uma n -subvariedade de classe C^1 .*

Demonstração. Basta definir $E_0 := E \cap M_0$ e $E_i := (E \cap M_i) \setminus \bigcup_{j=0}^{i-1} E_j$, $i \geq 1$. $\square$

3.1.2 Espaços Tangentes Aproximados

Apesar da noção de conjuntos retificáveis ser muito delicada, eles também admitem, num sentido de teoria da medida, espaços tangentes em quase todo ponto, o que é bom o suficiente para fazer bastante geometria. É possível, por exemplo, definir uma orientação em um conjunto retificável, assim como, definir fronteira e munir o conjunto de uma topologia. Entretanto, reservamos estes últimos tópicos para livros como [4], [6] e [11].

Definição 3.2. Seja $E \subset \mathbb{R}^m$ n -enumeravelmente retificável. Dizemos que E é:

1. localmente n -retificável, se $\mathcal{H}^n \llcorner E$ for uma medida de Radon em $\mathbb{R}^m$.
2. n -retificável, se $\mathcal{H}^n \llcorner E$ for uma medida de Radon finita em $\mathbb{R}^m$.

Vejamos a definição de espaços tangentes aproximados.

Definição 3.3. Seja $E \subset \mathbb{R}^m$, $\mathcal{H}^n$ -mensurável com $\mathcal{H}^n(E \cap K) < \infty$, para todo $K \subset \mathbb{R}^m$ compacto. Dizemos que um subespaço vetorial n -dimensional $P \subset \mathbb{R}^m$ é um espaço tangente aproximado de E em $x \in \mathbb{R}^m$ se

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \int_{\lambda^{-1}(E-x)} f(y) d\mathcal{H}^n(y) = \int_P f(y) d\mathcal{H}^n(y), \quad \forall f \in C_c^0(\mathbb{R}^m),$$

onde $y \in \lambda^{-1}(E-x)$ se, e só se, $y = \lambda^{-1}(z-x)$, para algum $z \in E$.

Na definição acima, o espaço $C_c^0(\mathbb{R}^m)$ representa o conjunto de todas as funções contínuas com suporte compacto $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$.

Veremos na Observação 3.6 que, se E é uma n -subvariedade C^1 do $\mathbb{R}^m$, então o espaço tangente aproximado coincide com a noção de espaço tangente usual. Além disso, quando P existe, ele é único e o denotamos por $T_x E$.

O que a igualdade na Definição 3.3 está expressando é que, a medida $\mathcal{H}^n \llcorner (\lambda^{-1}(E - x))$ está “convergindo fraco-estrela” para a medida $\mathcal{H}^n \llcorner P$. Intuitivamente, isso significa que a medida ao redor do conjunto $\lambda^{-1}(E - x)$ começa a concentrar (conforme $\lambda \rightarrow 0$) para a medida ao redor do plano P . Para uma abordagem via convergência fraco-estrela de medidas de Radon, veja [2] e [7].

Notação: Seja $m \geq k \geq 1$.

1. Denotamos a Grassmanniana $Gr(k, m)$ como sendo o conjunto formado pelos subespaços vetoriais k -dimensionais do $\mathbb{R}^m$.
2. Dado $\pi \in Gr(k, m)$, lembre que o conjunto ortogonal de π é dado por

$$\pi^\perp := \{z \in \mathbb{R}^m \mid \langle z, w \rangle = 0, \forall w \in \pi\}.$$

3. Dado $\pi \in Gr(k, m)$, denotamos por pr_π e $\text{pr}_\pi^\perp$ as projeções ortogonais em π e $\pi^\perp$, respectivamente.
4. Dados $\pi \in Gr(k, m)$, $\alpha \in (0, 1)$ e $x \in E$, denotamos por $X_\alpha(\pi, x)$ o cone duplo com vértice em x e abertura α , definido por

$$\begin{aligned} X_\alpha(\pi, x) &:= \{y \in \mathbb{R}^m \mid \|\text{pr}_\pi^\perp(y - x)\| \leq \alpha \|y - x\|\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^m \mid d(y - x, \pi) \leq \alpha \|y - x\|\}, \end{aligned}$$

onde d representa a função distância de um ponto a um conjunto.

Observação 3.3. Identificando cada subespaço k -dimensional $\pi \in Gr(k, m)$ com a projeção ortogonal pr_π , podemos metrizar $Gr(k, m)$ da seguinte forma. Para todos $\pi, \sigma \in Gr(k, m)$,

$$d(\pi, \sigma) := \|\text{pr}_\pi - \text{pr}_\sigma\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \{\|\text{pr}_\pi(x) - \text{pr}_\sigma(x)\|\}.$$

Munido desta métrica, $Gr(k, m)$ é um espaço métrico compacto.

Observação 3.4. Ao fazermos $f : \mathbb{R}^m \rightarrow [0, 1]$, $f \in C_c^0(\mathbb{R}^m)$ se aproximar da função característica $\chi_{\mathbb{B}(0,1)}$, com $f \equiv 1$ em $\mathbb{B}(0, 1)$ e $f \equiv 0$ em $\mathbb{R}^m \setminus \mathbb{B}(0, 1 + \varepsilon)$ na Definição 3.3, vemos que (ao fazer $\varepsilon \rightarrow 0$), se $T_x E$ existe, então

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^n(E \cap \mathbb{B}(x, \rho))}{\alpha(n)\rho^n} = 1.$$

Da mesma forma, se $T_x E$ existe e sendo $0 < \alpha < 1$, ao fazermos $f : \mathbb{R}^m \rightarrow [0, 1]$, $f \in C_c^0(\mathbb{R}^m)$ se aproximar da função característica $\chi_{X_\alpha(\pi_x, 0) \cap \mathbb{B}(0,1)}$, vemos que

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^n(E \cap X_\alpha(\pi_x, x) \cap \mathbb{B}(x, \rho))}{\alpha(n)\rho^n} = 0,$$

onde $\pi_x := (T_x E)^\perp$.

Teorema 3.1. *Seja $E \subset \mathbb{R}^m$, $\mathcal{H}^n$ -mensurável com $\mathcal{H}^n(E \cap K) < \infty$, para todo $K \subset \mathbb{R}^m$ compacto. Então E é localmente n -retificável se, e somente se, o espaço tangente aproximado $T_x E$ existe para $\mathcal{H}^n$ -q.t.p. $x \in E$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$)

Pelo Corolário 3.1 podemos escrever $E = \bigsqcup_{i=0}^{\infty} E_i$ onde, $\mathcal{H}^n(E_0) = 0$ e para todo $i \geq 0$, $E_i \subset M_i$, onde M_{i+1} é uma n -subvariedade de classe C^1 . Seja $R > 0$ e $f \in C_c^0(\mathbb{R}^m)$ dada por $f \equiv 0$ em $\mathbb{R}^m \setminus \mathbb{B}(0, R)$. Para cada $i \geq 1$, podemos escrever

$$E = (E \setminus M_i) \cup (E \cap M_i) = (E \setminus M_i) \cup (M_i \setminus (M_i \setminus E)),$$

e portanto,

$$\int_{\lambda^{-1}(E-x)} f d\mathcal{H}^n = \int_{\lambda^{-1}(E \setminus M_i - x)} f d\mathcal{H}^n + \int_{\lambda^{-1}(M_i - x)} f d\mathcal{H}^n - \int_{\lambda^{-1}(M_i \setminus E - x)} f d\mathcal{H}^n. \quad (15)$$

Se $x \in E_i$, então $x \in M_i$ que é subvariedade, então,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \int_{\lambda^{-1}(M_i - x)} f d\mathcal{H}^n = \int_{T_x M_i} f d\mathcal{H}^n.$$

Além disso, temos

$$\begin{aligned} \left| \int_{\lambda^{-1}(E \setminus M_i - x)} f d\mathcal{H}^n \right| &\leq \mathcal{H}^n(\mathbb{B}(0, R) \cap \lambda^{-1}(E \setminus M_i - x)) \sup |f| \\ &= \lambda^{-n} \sup |f| \mathcal{H}^n(\mathbb{B}(x, \lambda R) \cap E \setminus M_i) \end{aligned}$$

Pelo Teorema da Densidade Superior 1.14, segue que

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \left| \int_{\lambda^{-1}(E \setminus M_i - x)} f d\mathcal{H}^n \right| &\leq \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \lambda^{-n} \sup |f| \mathcal{H}^n(\mathbb{B}(x, \lambda R) \cap E \setminus M_i) \\ &\leq \sup |f| \alpha(n) \Theta^{*n}(\mathcal{H}^n, E \setminus M_i, x) = 0, \quad \mathcal{H}^n - \text{q.t.p. } x \in E_i \end{aligned}$$

Analogamente, $\left| \int_{\lambda^{-1}(M_i \setminus E - x)} f d\mathcal{H}^n \right| \rightarrow 0$, $\mathcal{H}^n$ -q.t.p. $x \in E_i$.

Logo, aplicando o limite em (15), temos que

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \int_{\lambda^{-1}(E - x)} f d\mathcal{H}^n = \int_{T_x M_i} f d\mathcal{H}^n, \quad \mathcal{H}^n\text{-q.t.p. } x \in E_i.$$

Portanto, $T_x E$ existe e $T_x E = T_x M_i$, $\mathcal{H}^n$ -q.t.p. $x \in E_i$, para todo $i \geq 1$.

($\Leftarrow$)

Nós podemos assumir $\mathcal{H}^n(E) > 0$. Defina $\mu := \mathcal{H}^n \llcorner (E \cap \mathbb{B}(0, R))$, com algum $R > 0$ tal que $\mathcal{H}^n(E \cap \mathbb{B}(0, R)) > 0$. Então μ é Borel regular com $0 < \mu(\mathbb{R}^m) < \infty$.

Pela Observação 3.4, temos que

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\mu(\mathbb{B}(x, \rho))}{\alpha(n)\rho^n} = 1 \text{ e } \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\mu(X_{\frac{1}{2}}(\pi_x, x) \cap \mathbb{B}(x, \rho))}{\alpha(n)\rho^n} = 0,$$

para μ -q.t.p. $x \in E \cap \mathbb{B}(0, R)$, onde $\pi_x = (T_x E)^\perp$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$ e $\mathcal{H}^n$ -q.t.p. $x \in E \cap \mathbb{B}(0, R)$, defina

$$f_k(x) = \inf_{0 < \rho < \frac{1}{k}} \frac{\mu(\mathbb{B}(x, \rho))}{\alpha(n)\rho^n} = 1 \text{ e } g_k(x) = \sup_{0 < \rho < \frac{1}{k}} \frac{\mu(X_{\frac{1}{2}}(\pi_x, x) \cap \mathbb{B}(x, \rho))}{\alpha(n)\rho^n} = 0.$$

Então, $f_k(x) \rightarrow 1$ e $g_k(x) \rightarrow 0$ para μ -q.t.p. $x \in E \cap \mathbb{B}(0, R)$. Por Egorov 1.6, existe um conjunto de Borel $M \subset E \cap \mathbb{B}(0, R)$ com ambas as convergências acima valendo uniformemente para $x \in M$ e com

$$\mu(\mathbb{R}^m \setminus M) \leq \frac{1}{2}\mu(\mathbb{R}^m). \quad (16)$$

Então, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\frac{\mu(\mathbb{B}(x, \rho))}{\alpha(n)\rho^n} \geq 1 - \varepsilon \text{ e } \frac{\mu(X_{\frac{1}{2}}(\pi_x, x) \cap \mathbb{B}(x, \rho))}{\alpha(n)\rho^n} \leq \varepsilon, \quad (17)$$

para $x \in M$ e com $0 < \rho \leq \delta$.

Pela Observação 3.3, como $Gr(m-n, m)$ é compacto, podemos tomar $\pi_1, \dots, \pi_N$ subespaços $(m-n)$ -dimensionais de $\mathbb{R}^m$ tais que

$$Gr(m-n, m) = \bigcup_{i=1}^N \mathbb{U}\left(\pi_i, \frac{1}{16}\right).$$

Para qualquer $x \in M$, como $\pi_x = (T_x E)^\perp \in Gr(m-n, m)$, então $\pi_x \in \mathbb{U}\left(\pi_i, \frac{1}{16}\right)$, donde $d(\pi_i, \pi_x) < \frac{1}{16}$, para algum $i \in \{1, \dots, N\}$. Consideramos então, para cada $i \in \{1, \dots, N\}$, os conjuntos $M_i := \{x \in M \mid d(\pi_i, \pi_x) < \frac{1}{16}\}$. Então, $M = \bigcup_{i=1}^N M_i$.

Tomando $\delta > 0$ tal que (17) vale para $\varepsilon = 1/16^{n+1}$, então

$$X_{\frac{1}{4}}(\pi_i, x) \cap M_i \cap \mathbb{B}\left(x, \frac{\delta}{2}\right) = \{x\}, \forall x \in M_i, \forall i \in \{1, \dots, N\}.$$

De fato, caso contrário, teríamos um $x \in M_i$ e um $y \in X_{\frac{1}{4}}(\pi_i, x) \cap M_i \cap \partial\mathbb{B}(x, \rho)$, para algum $0 < \rho \leq \delta$.

Mas como $x \in M$ e $2\rho \leq \delta$, temos de (17) com $\varepsilon = 1/16^{n+1}$ que

$$\mu(X_{\frac{1}{2}}(\pi_x, x) \cap \mathbb{B}(x, 2\rho)) < \frac{\alpha(n)(2\rho)^n}{16^{n+1}} = \frac{\alpha(n)}{16} \left(\frac{\rho}{8}\right)^n. \quad (18)$$

Tomando $\mathbb{B}(y, \frac{\rho}{8}) \subset X_{\frac{1}{2}}(\pi_x, x) \cap \mathbb{B}(x, 2\rho)$ Dado $z \in \mathbb{B}(y, \frac{\rho}{8})$ e, como a função distância é Lipschitz, temos

$$|d(z-x, \pi_x) - d(y-x, \pi_x)| \leq \|z-y\|.$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned} d(z-x, \pi_x) &\leq \|z-x\| + d(y-x, \pi_x) \\ &\leq \frac{\rho}{8} + d(y-x, \pi_x) = \frac{\rho}{8} + \|(y-x) - \text{pr}_{\pi_x}(y-x)\| \\ &\leq \frac{\rho}{8} + \|(y-x) - \text{pr}_{\pi_i}(y-x)\| + \|(\text{pr}_{\pi_i} - \text{pr}_{\pi_x})(y-x)\| \\ &\leq \frac{\rho}{8} + \underbrace{d(y-x, \pi_i)}_{< \frac{1}{4}\|y-x\|} + \underbrace{\|\text{pr}_{\pi_i} - \text{pr}_{\pi_x}\|}_{< \frac{1}{16}, \text{ pois } x \in M_i} \|y-x\| \\ &\leq \frac{\rho}{8} + \frac{5}{16}\|y-x\| \stackrel{y \in \partial\mathbb{B}(x, \rho)}{=} \frac{7\rho}{16} \leq \frac{\|z-x\|}{2}. \end{aligned}$$

donde segue que $z \in X_{\frac{1}{2}}(\pi_x, x)$. A última desigualdade segue do fato que $\|z - x\| \geq \|y - x\| - \|z - y\|$. Por outro lado, como $\|z - x\| \leq \|y - x\| + \|z - y\| \leq \rho + \frac{\rho}{8} = \frac{9\rho}{8} < 2\rho$, então $z \in \mathbb{B}(x, 2\rho)$, provando nossa segunda afirmação.

Temos então que,

$$\mu(X_{\frac{1}{2}}(\pi_x, x) \cap \mathbb{B}(x, 2\rho)) \geq \mu\left(\mathbb{B}\left(y, \frac{\rho}{8}\right)\right) \underbrace{\geq}_{(17)} \alpha(n) \left(\frac{\rho}{8}\right)^n \underbrace{(1 - \varepsilon)}_{> \frac{1}{2}} > \frac{\alpha(n)}{2} \left(\frac{\rho}{8}\right)^n,$$

o que é um absurdo com o que encontramos em (18), provando nossa primeira afirmação.

Tome um $x_0 \in M_i$ fixo. Como $\mathbb{B}(x_0, \frac{\delta}{4}) \subset \mathbb{B}(x, \frac{\delta}{2})$, para qualquer $x \in \mathbb{B}(x_0, \frac{\delta}{4})$, então temos

$$X_{\frac{1}{4}}(\pi_i, x) \cap \left(M_i \cap \mathbb{B}\left(x_0, \frac{\delta}{4}\right)\right) = \{x\}, \quad \forall x \in M_i \cap \mathbb{B}\left(x_0, \frac{\delta}{4}\right), \quad i \in \{1, \dots, N\}. \quad (19)$$

Se Q é uma aplicação ortogonal de $\mathbb{R}^m$ com $\pi_i = Q(\{0\} \times \mathbb{R}^{m-n})$, (19) evidentemente implica que $M_i \cap \mathbb{B}\left(x_0, \frac{\delta}{4}\right)$ está contido no gráfico de uma aplicação Lipschitz definida sobre um domínio do $\mathbb{R}^n$ e portanto, por Kirschbraun 2.1, temos

$$M_i \cap \mathbb{B}\left(x_0, \frac{\delta}{4}\right) \subset Q(\text{graf } f),$$

onde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m-n}$ é Lipschitz.

Como $i \in \{1, \dots, N\}$ e $x_0 \in M_i$ são arbitrários e como M é totalmente limitado, podemos cobrir M com um número finito de bolas $\mathbb{B}(x_j, \frac{\delta}{4})$, com $x_j \in M$ e portanto, concluímos que existem finitos mapas Lipschitz $f_1, \dots, f_J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m-n}$ e aplicações ortogonais $Q_1, \dots, Q_J$ de $\mathbb{R}^m$ tais que

$$M \subset \bigcup_{i=1}^J Q_i(\text{graf } f_i).$$

Logo, por (16), temos

$$\mu\left(\mathbb{R}^m \setminus \bigcup_{i=1}^J Q_i(\text{graf } f_i)\right) \leq \frac{1}{2}\mu(\mathbb{R}^m).$$

Repetindo todo o argumento, mas com $E \cap \mathbb{B}(0, R) \setminus \bigcup_{i=1}^J Q_i(\text{graf } f_i)$ no lugar de $E \cap \mathbb{B}(0, R)$, deduzimos que existe uma família enumerável de aplicações Lipschitz $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m-n}$ e aplicações ortogonais Q_i com $\mu(\mathbb{R}^m \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i(\text{graf } f_i)) = 0$.

Considerando o mapa $G_i(x) := (x, f_i(x))$ e fazendo $F_i := Q_i \circ G_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, então temos que cada F_i é Lipschitz e $\mathcal{H}^n(E \cap \mathbb{B}(0, R) \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i(\mathbb{R}^n)) = 0$.

Como $E = \bigcup_{r \in \mathbb{N}} E \cap \mathbb{B}(0, r)$, temos que E é n -enumeravelmente retificável e portanto, localmente n -retificável. $\square$

Exemplo 3.2. Este exemplo nos dá uma indicação modesta do quão “ruim” conjuntos retificáveis podem ser e consequentemente, o quão forte é o Teorema 3.1 acima.

Primeiramente, vamos construir um conjunto do tipo Cantor de medida positiva da seguinte forma. Comece com o intervalo $[0, 1]$, remova o intervalo médio aberto de comprimento $\frac{1}{4}$. (Veja a figura 1 abaixo.) Depois, dos dois intervalos restantes, remova os seus respectivos intervalos

médios abertos cujo comprimento total é $\frac{1}{8}$. No n -ésimo passo, dentre os 2^{n-1} intervalos restantes, remova os seus respectivos intervalos médios abertos cujo comprimento total é $2^{-(n+1)}$. Seja C a interseção. Claramente C não contém nenhum intervalo. Entretanto, como o comprimento total removido foi $\sum 2^{-(n+1)} = \frac{1}{2}$, o comprimento restante é $\mathcal{H}^1(C) = \frac{1}{2}$.



Figura 2: Um conjunto do tipo Cantor C com $\mathcal{H}^1(C) = \frac{1}{2}$.

Fonte: Morgan [10, p. 30].

Agora defina $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ por $g(x) := (x, d(x, C))$. Veja a figura 2.



Figura 3: A imagem de g intersecta $[0, 1]$ no conjunto C .

Fonte: Morgan [10, p. 30].

Então, a imagem de g e, portanto, $E := [0, 1] \cup \text{Img}$ são retificáveis, mesmo que E não seja uma subvariedade em todos os pontos de C . Apesar disso, o Teorema 3.1 e a Observação 3.4 nos garantem que $T_x E$ é uma reta e que $\Theta^1(\mathcal{H}^1, E, x) = 1$ em quase todos os pontos $x \in E$.

Abaixo, enunciamos um resultado que mostra que a noção de espaço tangente aproximado é local. Para uma demonstração detalhada, veja [2].

Proposição 3.1. *Sejam $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^m$ localmente n -retificáveis. Então,*

$$T_x E_1 = T_x E_2, \text{ para } \mathcal{H}^n\text{-q.t.p. } x \in E_1 \cap E_2.$$

3.1.3 Conjuntos Não-Retificáveis

Definição 3.4. Um conjunto $E \subset \mathbb{R}^m$ é dito n -puramente não-retificável se $\mathcal{H}^n(E \cap F) = 0$, para todo $F \subset \mathbb{R}^m$ n -enumeravelmente retificável.

O teorema seguinte nos mostra que todo conjunto $A \subset \mathbb{R}^m$ com $\mathcal{H}^n(A) < \infty$ pode ser escrito como união disjunta de um conjunto n -enumeravelmente retificável e um conjunto n -puramente não-retificável. Neste sentido, o estudo de conjuntos mensuráveis com medida finita é reduzido ao estudo de conjuntos retificáveis e não-retificáveis.

Teorema 3.2. *Seja $A \subset \mathbb{R}^m$ com $\mathcal{H}^n(A) < \infty$. Então existe um boreliano B tal que $A \setminus B$ é n -puramente não-retificável. Logo, A admite uma decomposição entre conjuntos E e F , n -enumeravelmente retificável e n -puramente não-retificável, respectivamente. Isto é,*

$$A = E \cup F, \quad E = A \cap B, \quad F = A \setminus B.$$

Demonstração. Seja $\mathcal{R}$ a família de todos os borelianos n -enumeravelmente retificáveis de $\mathbb{R}^m$ e defina $M := \sup\{\mathcal{H}^n(A \cap K) \mid K \in \mathcal{R}\} < \infty$. Podemos tomar para cada $j \in \mathbb{N}$, um $B_j \in \mathcal{R}$ tal que

$$\mathcal{H}^n(A \cap B_j) > M - \frac{1}{j}.$$

Considere $B := \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j$. Como cada $B_j \in \mathcal{R}$, então $B \in \mathcal{R}$, donde $A \cap B \in \mathcal{R}$.

$$\vdash \mathcal{H}^n(A \cap B) = M$$

Como $B_j \subset B$ para todo $j \in \mathbb{N}$, temos que

$$\mathcal{H}^n(A \cap B) \geq \mathcal{H}^n(A \cap B_j) > M - 1/j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} M.$$

Por outro lado, como B é n -enumeravelmente retificável segue da definição de M que $\mathcal{H}^n(A \cap B) \leq M$. Logo, segue a igualdade desejada.

$\vdash F := A \setminus B$ é n -puramente não-retificável.

Suponha, por absurdo, que F não seja n -puramente não-retificável. Logo, existe um conjunto n -enumeravelmente retificável E tal que

$$\mathcal{H}^n(F \cap E) > 0.$$

Defina o conjunto $\tilde{B} = B \cup E$ que é n -enumeravelmente retificável. Note que,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^n(A \cap \tilde{B}) &= \mathcal{H}^n(A \cap (B \cup E)) \\ &= \mathcal{H}^n((A \cap B) \cup (A \cap E)) \\ &= \mathcal{H}^n((A \cap B) \cup ((A \cap E) \setminus B)) \\ &= \mathcal{H}^n((A \cap B) \cup (\underbrace{(A \setminus B)}_F \cap E)) \\ &= \mathcal{H}^n(A \cap B) + \mathcal{H}^n(F \cap E). \end{aligned}$$

Substituindo $\mathcal{H}^n(A \cap B) = M$, obtemos $\mathcal{H}^n(A \cap \tilde{B}) = M + \mathcal{H}^n(F \cap E) > M$.

Isto contradiz a definição de M , o que prova que F é puramente n -não-retificável. $\square$

Claro que caracterizações de retificabilidade nos leva automaticamente a caracterizações de não-retificabilidade; portanto, temos a seguinte proposição.

Proposição 3.2. *Seja $E \subset \mathbb{R}^m$ com $\mathcal{H}^n(E) < \infty$. Então, E é n -puramente não-retificável se, e somente se, para $\mathcal{H}^n$ -q.t.p. $x \in E$, o espaço tangente aproximado $T_x E$ não existe.*

Uma propriedade muito interessante dos conjuntos puramente não-retificáveis é que em certo sentido, eles são invisíveis de quase todas as direções.

Proposição 3.3. *Seja $E \subset \mathbb{R}^m$ com $\mathcal{H}^n(E) < \infty$. Então, E é n -puramente não-retificável se, e somente se, $\mathcal{H}^n(pr_\pi E) = 0$ para quase todo $\pi \in Gr(n, m)$.*

Aqui, o termo “quase todo” diz respeito a medida de Haar no grupo ortogonal $O(m)$. Para entender todos os detalhes e conhecer ainda mais a teoria dos conjuntos não-retificáveis, recomendamos [8].

3.2 Fórmula da Área e Coárea em Conjuntos Retificáveis

Nosso objetivo nesta seção é estender as fórmulas da área e coárea vistas anteriormente, para conjuntos retificáveis.

3.2.1 Uma Decomposição Mais Forte

Vimos que $E \subset \mathbb{R}^m$ é n -enumeravelmente retificável, se a menos de conjunto de medida $\mathcal{H}^n$ -nula, E pode ser escrito como união enumerável de imagens de aplicações Lipschitz de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$. Veremos agora que tal decomposição pode ser tomada de forma ainda mais restrita, nos garantindo uma boa regularidade nas aplicações Lipschitz e nos conjuntos em que são consideradas as imagens. Tal decomposição será muito útil para lidarmos com as fórmulas da área e coárea em conjuntos retificáveis.

Definição 3.5. Sejam $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ Lipschitz e $A \subset \mathbb{R}^n$ boreliano limitado. Diz-se que o par (f, A) define uma imagem Lipschitz regular $f(A)$ em $\mathbb{R}^m$ se:

1. f é injetora e diferenciável em A , com $Jf(x) > 0$ em todo $x \in A$;
2. Todo $x \in A$ é ponto de densidade 1 para A , isto é,

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{L}^n(A \cap \mathbb{B}(x, r))}{\alpha(n)r^n} = 1;$$

3. Todo $x \in A$ é ponto de Lebesgue para $Df : D_f \subset \mathbb{R}^n \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, isto é,

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{\mathcal{L}^n(\mathbb{B}(x, r))} \int_{\mathbb{B}(x, r)} \|Df(y) - Df(x)\| d\mathcal{L}^n(y) = 0.$$

Lema 3.2. Com a notação acima, se $f(A)$ é uma imagem Lipschitz regular definida pelo par (f, A) , então todo $x \in A$ é ponto de Lebesgue para $Jf : D_f \rightarrow \mathbb{R}$.

Teorema 3.3. Sejam $E \subset \mathbb{R}^m$ é n -enumeravelmente retificável e $t > 1$. Então existem $E_0 \subset \mathbb{R}^m$ e $(f_i(A_i))_{i \in \mathbb{N}}$ sequência de imagens Lipschitz regulares induzidas por pares $(f_i, A_i)_{i \in \mathbb{N}}$, com $A_i \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos borelianos e limitados, para todo $i \in \mathbb{N}$, tais que

- (i) $E = E_0 \cup \bigcup_{i \in \mathbb{N}} f_i(A_i)$, com $\mathcal{H}^n(E_0) = 0$
- (ii) Para cada $i \in \mathbb{N}$, para todos $x, y \in A_i$ e, para todo $v \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} t^{-1}\|x - y\| &\leq \|f_i(x) - f_i(y)\| \leq t\|x - y\| \\ t^{-1}\|v\| &\leq \|Df_i(x)v\| \leq t\|v\| \\ t^{-n} &\leq Jf_i(x) \leq t^n \end{aligned}$$

Reservamos as demonstrações do lema e teorema acima, para a seção 4.2 de [2] ou a seção 10.1 de [7].

Observação 3.5. Podemos ainda tomar, no teorema acima, $E_0 \subset \mathbb{R}^m$ e $(f_i, A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ satisfazendo as mesmas condições enunciadas na tese e a condição adicional de que a união enunciada no item (i) seja disjunta.

Para cada $i \geq 1$, $f_i(A_i)$ é $\mathcal{H}^n$ -mensurável (pelo Lema 2.4) e tem medida $\mathcal{H}^n$ finita (pois A_i é limitado). Portanto, $\{f_i(A_i) \setminus \bigcup_{j < i} f_j(A_j)\}_{i \geq 1}$ é uma sequência disjunta de $\mathcal{H}^n$ -mensuráveis em E com medidas $\mathcal{H}^n$ finitas, cuja união é a mesma que a da sequência $(f_i(A_i))_{i \geq 1}$. Como $\mathcal{H}^n$ é Borel regular, não é difícil verificar que podemos, para cada $i \geq 1$, tomar $N_i \subset f_i(A_i) \setminus \bigcup_{j < i} f_j(A_j)$ boreliano tal que $\mathcal{H}^n([f_i(A_i) \setminus \bigcup_{j < i} f_j(A_j)] \setminus N_i) = 0$, logo $E'_0 := E \setminus \bigcup_{i \geq 1} N_i$ é $\mathcal{H}^n$ -nulo e $(N_i)_{i \geq 1}$ é uma sequência disjunta de borelianos com cada N_i contido na imagem de $f_i|_{A_i}$. Substitua E_0 por E'_0 e, para cada $i \geq 1$, substitua A_i por $f_i|_{A_i}^{-1}(N_i) = f_i^{-1}(N_i) \cap A_i \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$. Retirando do novo A_i um conjunto Lebesgue-nulo, se necessário (cuja imagem por f_i será $\mathcal{H}^n$ -nula e pode ser acrescentada a E_0), ainda podemos supor que todo ponto do novo A_i é um ponto de densidade 1 para A_i e que, portanto, o par (f_i, A_i) ainda define uma imagem Lipschitz regular. A nova sequência $(f_i(A_i))_{i \geq 1}$ agora é disjunta e valem as mesmas condições anteriores.

Definição 3.6. Sejam $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $L^1_{\text{loc}}(\mathcal{L}^n)$. Diz-se que $f_i \rightarrow f$ em $L^1_{\text{loc}}(\mathcal{L}^n)$ se, para todo $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto, $f_i|_K \rightarrow f|_K$ em $L^1(K)$.

Lema 3.3. Sejam $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathcal{L}^n)$ e $y \in \mathbb{R}^n$ ponto de Lebesgue de f . Defina, para $r > 0$, $g_r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ por $g_r(w) := f(y + rw)$. Então $g_r \in L^1_{\text{loc}}(\mathcal{L}^n)$ e $g_r \xrightarrow{r \rightarrow 0} f(y)$ em $L^1_{\text{loc}}(\mathcal{L}^n)$.

Demonstração. O fato de que $g_r \in L^1_{\text{loc}}(\mathcal{L}^n)$ para $r > 0$ é imediato. Além disso, pela hipótese de ser y ponto de Lebesgue de f , tem-se:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int_{\mathbb{B}(y,r)} |f(x) - f(y)| d\mathcal{L}^n(x) = 0.$$

Mas, fazendo uma mudança de variáveis, para todo $R > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int_{\mathbb{B}(y,r)} |f(x) - f(y)| d\mathcal{L}^n(x) &\stackrel{x=y+rw}{=} \frac{1}{\alpha(n)} \int_{\mathbb{B}(0,1)} |f(y + rw) - f(y)| d\mathcal{L}^n(w) \\ &\stackrel{w=u/R}{=} \frac{1}{\alpha(n)R^n} \int_{\mathbb{B}(0,R)} \left| f\left(y + \frac{r}{R}u\right) - f(y) \right| d\mathcal{L}^n(u), \end{aligned}$$

portanto

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\mathbb{B}(0,R)} \left| f\left(y + \frac{r}{R}u\right) - f(y) \right| d\mathcal{L}^n(u) = 0.$$

Daí, para todo $R > 0$, tomando $(r_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sequência em $(0, \infty)$ com $r_i \rightarrow 0$, tem-se

$$\begin{aligned} \|g_{r_i} - f(y)\|_{L^1(\mathbb{B}(0,R))} &= \int_{\mathbb{B}(0,R)} |f(y + r_i w) - f(y)| d\mathcal{L}^n(w) \\ &= \int_{\mathbb{B}(0,R)} \underbrace{\left| f\left(y + (r_i R) \frac{w}{R}\right) - f(y) \right|}_{\xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0} d\mathcal{L}^n(w) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

□

Teorema 3.4. *Seja $E = f(A)$ uma imagem Lipschitz regular definida por (f, A) , com $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ Lipschitz, $A \subset \mathbb{R}^n$ boreliano limitado. Então, para todo $z \in A$,*

$$T_x E = Df(z)(\mathbb{R}^n), \quad x = f(z)$$

Demonstração. Com efeito, dada $\varphi \in C_c^0(\mathbb{R}^m)$, para todo $r > 0$, tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{r^{-1}(E-x)} \varphi(y) d\mathcal{H}^n(y) &= \frac{1}{r^n} \int_E \varphi\left(\frac{y-x}{r}\right) d\mathcal{H}^n(y) \\ &\stackrel{2.7}{=} \frac{1}{r^n} \int_A \varphi\left(\frac{f(w)-f(z)}{r}\right) Jf(w) d\mathcal{L}^n(w) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} u_r(w) d\mathcal{L}^n(w), \end{aligned} \quad (20)$$

onde $u_r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$u_r(w) := \chi_A(z+rw) \varphi\left(\frac{f(z+rw)-f(z)}{r}\right) Jf(z+rw).$$

$\vdash u_r \rightarrow u_0$ em $L^1_{\text{loc}}(\mathcal{L}^n)$, onde $u_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $u_0(w) := \varphi(Df(z)w) Jf(z)$.

Com efeito, aplicando a desigualdade triangular temos que, para todo $R > 0$,

$$\begin{aligned} &\|u_r - u_0\|_{L^1(\mathbb{B}(0,R))} \\ &\leq \int_{\mathbb{B}(0,R)} \underbrace{|\chi_A(z+rw) - \underbrace{\chi_A(z)}_{=1}|}_{\xrightarrow{r \rightarrow 0} 0 \text{ em } L^1(\mathbb{B}(0,R)) \text{ pelo Lema 3.3}} \underbrace{\left| \varphi\left(\frac{f(z+rw)-f(z)}{r}\right) \right|}_{\leq \sup_{\mathbb{R}^m} |\varphi|} \underbrace{|Jf(z+rw)|}_{\leq (\text{Lip } f)^n} d\mathcal{L}^n(w) \\ &+ \int_{\mathbb{B}(0,R)} \underbrace{\left| \varphi\left(\frac{f(z+rw)-f(z)}{r}\right) - \varphi(Df(z)w) \right|}_{\leq 2 \sup_{\mathbb{R}^m} |\varphi| \text{ e } \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0 \text{ pontualmente}} \underbrace{|Jf(z+rw)|}_{\leq (\text{Lip } f)^n} d\mathcal{L}^n(w) \\ &+ \int_{\mathbb{B}(0,R)} \underbrace{|\varphi(Df(z)w)|}_{\leq \sup_{\mathbb{R}^m} |\varphi|} \underbrace{|Jf(z+rw) - Jf(z)|}_{\xrightarrow{r \rightarrow 0} 0 \text{ em } L^1(\mathbb{B}(0,R)) \text{ por 3.2, 3.3}} d\mathcal{L}^n(w), \end{aligned}$$

o que prova nossa afirmação, pois todo o segundo membro converge para zero quando $r \rightarrow 0$ (na segunda integral aplicamos o teorema da convergência dominada 1.9).

$\vdash$ Existem $r_0 > 0$ e $L > 0$ tal que, para todo $r \in (0, r_0)$, $\text{supp } u_r \subset \mathbb{U}(0, L)$.

Como $Jf(z) > 0$ e f é diferenciável em z , existem $s_0, \lambda > 0$ tais que

$$\|f(z') - f(z)\| \geq \lambda \|z' - z\|, \quad \forall z' \in \mathbb{U}(z, s_0).$$

Assim, se $\rho > 0$ é tal que $\text{supp } \varphi \subset \mathbb{U}(0, \rho)$, tem-se,

$$\|f(z+rw) - f(z)\| \leq r\rho, \quad \forall w \in \text{supp } u_r.$$

Portanto, se $w \in \text{supp } u_r$ e $r < \frac{s_0}{\rho}$, então $z+rw \in \mathbb{U}(z, s_0)$ e,

$$r\rho \geq \|f(z+rw) - f(z)\| \geq \lambda r \|w\|,$$

donde $\lambda \|w\| \leq \rho$. Tomando $L := \rho/\lambda$ e $r_0 := \frac{s_0}{\rho}$, provamos nossa afirmação.

Logo, conclui-se que $u_r \rightarrow u_0$ em $L^1(\mathcal{L}^n)$. Portanto, em vista de (20), obtém-se

$$\begin{aligned} \int_{r^{-1}(E-x)} \varphi d\mathcal{H}^n &\xrightarrow{r \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} u_0 d\mathcal{L}^n \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(Df(z)w)Jf(z) d\mathcal{L}^n(w) \\ &\stackrel{2.7}{=} \int_{Df(z)(\mathbb{R}^n)} \varphi d\mathcal{H}^n. \end{aligned}$$

Portanto, conseguimos mostrar que $T_x E = Df(z)(\mathbb{R}^n)$ para todo $x = f(z) \in f(A) = E$. $\square$

Observação 3.6. Se $E \subset \mathbb{R}^m$ é n -enumeravelmente retificável então, usando a notação e os resultados dos Teoremas 3.3 e 3.4, se $E_i := f_i(A_i)$ for uma vizinhança de x em E (na topologia relativa), então segue que o espaço tangente aproximado em x existe e é dado por $T_x E = Df_i(f_i^{-1}|_{E_i}(x))(\mathbb{R}^n)$. Em particular, se E for uma subvariedade C^1 mergulhada em $\mathbb{R}^n$, E admite espaço tangente aproximado em todo $x \in E$, que coincide com o espaço tangente usual da Análise em Variedades.

3.2.2 Fórmula da Área em Conjuntos Retificáveis

Agora que estamos lidando com conjuntos retificáveis, precisamos redefinir nossas noções de derivada e jacobianos. Vejamos isso agora.

Definição 3.7. Sejam $E \subset \mathbb{R}^n$ localmente k -retificável e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ Lipschitz. Dizemos que f é tangencialmente diferenciável em $x \in E$ com respeito a E , se o espaço tangente aproximado $T_x E$ existe e se a restrição de f a $x + T_x E$ for diferenciável em x , no sentido de Fréchet. Isto é, se existe um mapa linear $D^E f(x) \in L(T_x E, \mathbb{R}^m)$ tal que

$$D^E f(x)v = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + hv) - f(x)}{h}$$

e a convergência é uniforme na esfera $\{v \in T_x E \mid \|v\| = 1\}$. Diz-se então que $D^E f(x)$ é a derivada tangencial de f em x com respeito a E .

Também definimos neste caso, o jacobiano tangencial de f em x com respeito a E ,

$$J^E f(x) := \llbracket D^E f(x) \rrbracket = \sqrt{\det[D^E f(x)^* \circ D^E f(x)]},$$

onde $D^E f(x)^* \in L(\mathbb{R}^m, T_x E)$ denota a transposta de $D^E f(x)$.

Lema 3.4. Sejam $E = g(A) \subset \mathbb{R}^n$ imagem Lipschitz regular k -dimensional definida pelo par (g, A) e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ Lipschitz. Então, para $\mathcal{H}^k$ -q.t.p. $x \in E$, $f \circ g$ é diferenciável em $g^{-1}(x)$, f é tangencialmente diferenciável em x com respeito a E ,

$$D^E f(x) = D(f \circ g)(g^{-1}(x)) \circ Dg(g^{-1}(x))^{-1}.$$

Demonstração. Pelo Teorema 3.4, para todo $x \in E$, o espaço tangente aproximado em x existe e é dado por $T_x E = Dg(g^{-1}(x))(\mathbb{R}^k)$. Além disso, temos que $Dg(g^{-1}(x)) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo linear sobre $T_x E$.

Como $f \circ g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ é Lipschitz então por Rademacher 2.2, $f \circ g$ é diferenciável em $\mathcal{L}^k$ -q.t.p. $z \in \mathbb{R}^k$ (em particular, para $\mathcal{L}^k$ -q.t.p. $z \in A$). Seja $D := \{z \in A \mid \exists D(f \circ g)(z)\}$.
 $\vdash f$ é tangencialmente diferenciável em $g(D)$ com respeito a E e

$$D^E f(x) = D(f \circ g)(g^{-1}(x)) \circ Dg(g^{-1}(x))^{-1}.$$

Seja $z \in D$ e $x = g(z)$. Para todo $w \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ e $v = Dg(z)(w) \in T_x E = Dg(z)(\mathbb{R}^k)$, temos

$$\begin{aligned} f(x+v) - f(x) - D(f \circ g)(g^{-1}(x)) \circ Dg(g^{-1}(x))^{-1}(v) \\ = f(g(z) + Dg(z)w) - f(g(z)) - D(f \circ g)(z)w \\ = [f(g(z) + Dg(z)w) - f(g(z+w))] + [f(g(z+w)) - f(g(z)) - D(f \circ g)(z)w]. \end{aligned} \quad (21)$$

Como $\|w\| = \|Dg(z)^{-1}v\| \leq \|Dg(z)^{-1}\|\|v\|$, tem-se

$$\frac{1}{\|v\|} \leq \frac{\|Dg(z)^{-1}\|}{\|w\|}. \quad (22)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{\|f(x+v) - f(x) - D(f \circ g)(g^{-1}(x)) \circ Dg(g^{-1}(x))^{-1}(v)\|}{\|v\|} &\stackrel{(21)+f \text{ Lip.}+(22)}{\leq} \\ &\leq \|Dg(z)^{-1}\|(\text{Lip } f) \frac{\|g(z+w) - g(z) - Dg(z)w\|}{\|w\|} + \\ &+ \|Dg(z)^{-1}\| \frac{\|f(g(z+w)) - f(g(z)) - D(f \circ g)(z)w\|}{\|w\|}. \end{aligned}$$

Como $w = Dg(z)^{-1}v$, se $v \rightarrow 0$ então $w \rightarrow 0$; daí, pela diferenciabilidade de g e de $f \circ g$ em z , conclui-se que

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{\|f(x+v) - f(x) - D(f \circ g)(g^{-1}(x)) \circ Dg(g^{-1}(x))^{-1}(v)\|}{\|v\|} = 0,$$

o que prova nossa afirmação.

Além disso, $\mathcal{H}^k(E \setminus g(D)) = \mathcal{H}^k(g(A \setminus D)) \leq (\text{Lip } g)^k \mathcal{L}^k(A \setminus D) = 0$, por Rademacher 2.2. $\square$

Enunciamos agora uma versão do teorema de Rademacher para aplicações Lipschitz em conjuntos retificáveis, reservamos a demonstração para [2] e [7].

Teorema 3.5. *Sejam $E \subset \mathbb{R}^n$ localmente k -retificável e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ Lipschitz. Então $D^E f(x)$ existe para $\mathcal{H}^k$ -q.t.p. $x \in E$.*

Teorema 3.6. *(Fórmula da Área em Conjuntos Retificáveis). Sejam $E \subset \mathbb{R}^n$ localmente k -retificável e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ Lipschitz, com $1 \leq k \leq m$. Então:*

- (i) $J^E f$ é uma função $\mathcal{H}^k$ -mensurável definida $\mathcal{H}^k$ -q.s. em E ;
- (ii) A função $N(f|_E) : \mathbb{R}^m \rightarrow [0, \infty]$ dada por $y \mapsto \mathcal{H}^0(E \cap f^{-1}\{y\})$ é $\mathcal{H}^k$ -mensurável;
- (iii)

$$\int_E J^E f d\mathcal{H}^k = \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^0(E \cap f^{-1}\{y\}) d\mathcal{H}^k(y).$$

Demonstração. Caso reduzido: $E = g(A)$ é uma imagem Lipschitz regular k -dimensional.

Pelo Teorema 3.4 e pelo Lema 3.4, sabemos que existe o espaço tangente aproximado em todo $x \in E$ dado por $T_x E = Dg(g^{-1}(x))(\mathbb{R}^k)$ e além disso, existe $D_f \subset E$ $\mathcal{H}^k$ -mensurável com $\mathcal{H}^k(E \setminus D_f) = 0$ e tal que para todo $x \in D_f$, $f \circ g$ é diferenciável em $g^{-1}(x)$, f é tangencialmente diferenciável em x com respeito a E e $D(f \circ g)(g^{-1}(x)) = D^E f(x) \circ Dg(g^{-1}(x))$.

Dado $x \in D_f$, segue que

$$J(f \circ g)(g^{-1}(x)) = \llbracket D^E f(x) \circ Dg(g^{-1}(x)) \rrbracket = \llbracket D^E f(x) \rrbracket \llbracket Dg(g^{-1}(x)) \rrbracket = J^E f(x) Jg(g^{-1}(x)). \quad (23)$$

Portanto, $J^E f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$J^E f = \frac{[J(f \circ g)] \circ g^{-1}}{[Jg] \circ g^{-1}}. \quad (24)$$

Como $g^{-1} : E \rightarrow A$ é mensurável, segue do Lema 2.4 que, para todo $B \subset A$ $\mathcal{L}^k$ -mensurável, $g(B)$ é $\mathcal{H}^k$ -mensurável, e como Jf e $J(f \circ g)$ são borelianas, concluímos de (24) que $J^E f$ é $\mathcal{H}^k$ -mensurável, o que prova (i).

Por outro lado, como $g : A \rightarrow E = g(A)$ é uma bijeção, tem-se, para todo $y \in \mathbb{R}^m$,

$$\mathcal{H}^0(E \cap f^{-1}\{y\}) = \mathcal{H}^0(A \cap (f \circ g)^{-1}\{y\}). \quad (25)$$

Ou seja, $N(f|_E) = N((f \circ g)|_A)$ e, aplicando-se o Lema 2.4 para a função Lipschitz $f \circ g$, conclui-se que $N(f|_E)$ é $\mathcal{H}^k$ -mensurável, provando (ii).

Finalmente,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^0(E \cap f^{-1}\{y\}) d\mathcal{H}^k(y) &\stackrel{(25)}{=} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^0(A \cap (f \circ g)^{-1}\{y\}) \\ &\stackrel{2.10}{=} \int_A J(f \circ g) d\mathcal{L}^k \\ &\stackrel{(23)}{=} \int_A (J^E f) \circ g Jg d\mathcal{L}^k \\ &\stackrel{2.7}{=} \int_E J^E f d\mathcal{H}^k, \end{aligned}$$

provando (iii) e finalizando o teorema para o caso reduzido.

Caso geral: Pela Observação 3.5, podemos escrever $E = E_0 \cup \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} g_i(A_i)$, com $\mathcal{H}^k(E_0) = 0$ e, para cada $i \in \mathbb{N}$, $g_i(A_i)$ é imagem Lipschitz regular definida pelo par (g_i, A_i) , com $A_i \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^k}$ limitado.

Além disso, pelo caso reduzido e para cada $i \in \mathbb{N}$:

1. $g_i(A_i)$ é $\mathcal{H}^k$ -mensurável (Lema 2.4) e $\mathcal{H}^k(g_i(A_i)) < \infty$, donde, $\mathcal{H}^k \llcorner g_i(A_i)$ é uma medida de Radon finita, e portanto, $g_i(A_i)$ é k -retificável.
2. $J^{g_i(A_i)} f$ é uma função definida $\mathcal{H}^k$ -q.s. em $g_i(A_i)$ e $\mathcal{H}^k$ -mensurável. Como $T_x g_i(A_i) = T_x E$ para $\mathcal{H}^k$ -q.t.p. $x \in g_i(A_i)$ (pela Proposição 3.1), concluímos que $J^E f = J^{g_i(A_i)} f$, $\mathcal{H}^k$ -q.s. em $g_i(A_i)$. Portanto, $J^E f|_{g_i(A_i)}$ é $\mathcal{H}^k$ -mensurável, donde $J^E f$ é $\mathcal{H}^k$ -mensurável.

3. $N(f|_{g_i(A_i)})$ é $\mathcal{H}^k$ -mensurável. Além disso, é fácil ver que $N(f|_{E_0}) \equiv 0$, $\mathcal{H}^k$ -q.s. em $\mathbb{R}^m$, donde, em particular, $N(f|_{E_0})$ é $\mathcal{H}^k$ -mensurável. Logo, $N(f|_E)$ é o limite pontual de uma sequência de funções $\mathcal{H}^k$ -mensuráveis e, portanto, é $\mathcal{H}^k$ -mensurável em $\mathbb{R}^m$.

4. Como $J^E f = J^{g_i(A_i)} f$, $\mathcal{H}^k$ -q.s. em $g_i(A_i)$,

$$\int_{\mathbb{R}^m} N(f|_{g_i(A_i)}) d\mathcal{H}^k = \int_{g_i(A_i)} J^E f d\mathcal{H}^k.$$

Daí, como $N(f|_E) = N(f|_{E_0}) + \sum_{i \in \mathbb{N}} N(f|_{g_i(A_i)})$ e $N(f|_{E_0})$ é $\mathcal{H}^k$ -nula, pelo TCM 1.7, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^m} N(f|_E) d\mathcal{H}^k = \int_E J^E f d\mathcal{H}^k,$$

o que prova o teorema para o caso geral. □

Corolário 3.2. *Sejam $E \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto localmente k -retificável e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ Lipschitz, com $1 \leq k \leq m$.*

(i) *Se $g : E \rightarrow [0, \infty]$ for $\mathcal{H}^k \llcorner E$ -mensurável, então*

$$\int_M g J^E f d\mathcal{H}^k = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\sum_{x \in E \cap f^{-1}\{y\}} g(x) \right) d\mathcal{H}^k(y).$$

(ii) *Se $f|_M$ for injetora e $g : \text{Im } f \rightarrow [0, \infty]$ for boreliana, então*

$$\int_{\text{Im } f} g d\mathcal{H}^k = \int_M g \circ f J^E f d\mathcal{H}^k.$$

Demonstração. A demonstração de ambos os itens é análoga aos Corolários 2.6 e 2.7. □

3.2.3 Fórmula da Coárea em Conjuntos Retificáveis

O lema abaixo nos diz que conjuntos retificáveis ocorrem em conjuntos de nível de aplicações Lipschitz. Reservamos a demonstração para [4].

Lema 3.5. *Sejam $n > m$ e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ Lipschitz. Então, para $\mathcal{L}^m$ -q.t.p. $y \in \mathbb{R}^m$, $f^{-1}\{y\}$ é $n - m$ -enumeravelmente retificável.*

Lema 3.6. *Sejam $E \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto k -enumeravelmente retificável e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ Lipschitz com $k \leq m$. Então $f(E)$ é k -enumeravelmente retificável.*

Demonstração. Podemos tomar uma sequência $(g_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de aplicações Lipschitz $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ e uma sequência de borelianos $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}^k$ tais que $E = E_0 \cup (\bigcup_{i \in \mathbb{N}} g_i(A_i))$, com $\mathcal{H}^k(E_0) = 0$. Então $f(E) = f(E_0) \cup (\bigcup_{i \in \mathbb{N}} f \circ g_i(A_i))$, onde $\mathcal{H}^k(f(E_0)) \leq (\text{Lip } f)^k \mathcal{H}^k(E_0) = 0$ e, para cada $i \in \mathbb{N}$, $f \circ g_i$ é Lipschitz. □

Corolário 3.3. *Sejam $E \subset \mathbb{R}^n$ k -enumeravelmente retificável e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ Lipschitz, com $k > m$. Então existe um boreliano $C \subset \mathbb{R}^m$ tal que $\mathcal{L}^m(\mathbb{R}^m \setminus C) = 0$ e, para todo $y \in C$, $E \cap f^{-1}\{y\}$ é $(k - m)$ -enumeravelmente retificável.*

Demonstração. Podemos tomar uma sequência $(g_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de aplicações Lipschitz $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ e uma sequência de borelianos $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}^k$ tais que $E = E_0 \cup (\bigcup_{i \in \mathbb{N}} g_i(A_i))$, com $\mathcal{H}^k(E_0) = 0$. Então aplicando, para cada $i \in \mathbb{N}$, o Lema 3.5 para $f \circ g_i$, existe $C_i \subset \mathbb{R}^m$ boreliano com $\mathcal{L}^m(\mathbb{R}^m \setminus C_i) = 0$ e, para todo $y \in C_i$, $(f \circ g_i)^{-1}\{y\}$ é $(k - m)$ -enumeravelmente retificável, logo $A_i \cap (f \circ g_i)^{-1}\{y\}$ também o é. Portanto, para todo $y \in C_i$, $g_i(A_i \cap (f \circ g_i)^{-1}\{y\}) = g_i(A_i) \cap f^{-1}\{y\}$ é $(k - m)$ -enumeravelmente retificável pelo Lema 3.6.

Segue da desigualdade de Eilenberg 2.6 que

$$\int^* \mathcal{H}^{k-m}(E_0 \cap f^{-1}\{y\}) d\mathcal{L}^m(y) \leq \frac{\alpha(k-m)\alpha(m)}{\alpha(k)} (\text{Lip } f)^m \mathcal{H}^k(E_0) = 0.$$

Logo, da Proposição 1.3, conclui-se que existe $C_0 \subset \mathbb{R}^m$ boreliano tal que $\mathcal{L}^m(\mathbb{R}^m \setminus C_0) = 0$ e para todo $y \in C_0$, $\mathcal{H}^{k-m}(E_0 \cap f^{-1}\{y\}) = 0$. Em particular, para todo $y \in C_0$, $E_0 \cap f^{-1}\{y\}$ é $(k - m)$ -enumeravelmente retificável.

Tome $C := \bigcap_{i \geq 0} C_i \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^m}$. Então $\mathcal{L}^m(\mathbb{R}^m \setminus C) = 0$ e, para todo $y \in C$, $E_0 \cap f^{-1}\{y\}$ e $g_i(A_i) \cap f^{-1}\{y\}$ são $(k - m)$ -enumeravelmente retificáveis, para todo $i \in \mathbb{N}$. Logo, para todo $y \in C$,

$$E \cap f^{-1}\{y\} = (E_0 \cap f^{-1}\{y\}) \cup \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} g_i(A_i) \cap f^{-1}\{y\} \right)$$

é $(k - m)$ -enumeravelmente retificável. $\square$

Teorema 3.7. (*Fórmula da Coárea em Conjuntos Retificáveis*). *Sejam $E \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto localmente k -retificável e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ Lipschitz, com $k \geq m$. Então:*

- (i) $J^E f$ é uma função $\mathcal{H}^k$ -mensurável definida $\mathcal{H}^k$ -q.s. em E ;
- (ii) A função $N(f|_E) : \mathbb{R}^m \rightarrow [0, \infty]$ dada por $y \mapsto \mathcal{H}^{k-m}(E \cap f^{-1}\{y\})$ é $\mathcal{L}^m$ -mensurável;
- (iii)

$$\int_E J^E f d\mathcal{H}^k = \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{k-m}(E \cap f^{-1}\{y\}) d\mathcal{L}^m(y).$$

Demonstração. Podemos supor $k > m$, pois o caso $k = m$ segue da Fórmula da Área 3.6.

Vejamos que $J^E f$ é $\mathcal{H}^k$ -mensurável. Vamos considerar o caso reduzido em que $E = g(A)$ é uma imagem Lipschitz regular induzida pelo par (g, A) com $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz e $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^k}$ limitado; o caso geral segue pelo mesmo raciocínio usado para provar o caso geral na Fórmula da Área 3.6.

Pelo Lema 3.4 e pelo Teorema 3.4 segue que, para $\mathcal{H}^k$ -q.t.p. $x \in E$, $f \circ g$ é diferenciável em $g^{-1}(x)$, $T_x E = Dg(g^{-1}(x))(\mathbb{R}^k)$ e $D^E f(x) = D(f \circ g)(g^{-1}(x)) \circ Dg(g^{-1}(x))^{-1}$. Para tal x , sabemos que

$$J^E f(x) = \llbracket D^E f(x) \rrbracket = \sqrt{\det D^E f(x) \circ D^E f(x)^*}.$$

$\vdash$ As entradas da matriz da aplicação linear $D^E f(x) \circ D^E f(x)^*$ na base canônica $(e_1, \dots, e_m)$ de $\mathbb{R}^m$ são, como funções de x , $\mathcal{H}^k$ -mensuráveis definidas $\mathcal{H}^k$ -q.s. em E .

De fato, da álgebra linear elementar sabemos que a (i, j) -ésima entrada da referida matriz é dada por

$$\langle D^E f(x) \circ D^E f(x)^* \cdot e_i, e_j \rangle = \langle D^E f(x)^* \cdot e_i, D^E f(x)^* \cdot e_j \rangle = \beta_i(x)^t \cdot G(x) \cdot \beta_j(x),$$

onde, para $1 \leq i \leq m$ e denotando por $(f_1, \dots, f_k)$ a base canônica de $\mathbb{R}^k$, $\beta_i(x)$ é a matriz coluna $k \times 1$ cuja j -ésima linha é dada por

$$\langle D(f \circ g)(g^{-1}(x)) \cdot f_j, e_i \rangle.$$

Como $g^{-1} : E \rightarrow \mathbb{R}^k$ é $\mathcal{H}^k$ -mensurável (pelo Lema 2.4 aplicado a g) e $D(f \circ g)$ é boreliana, conclui-se que β_i é uma função $\mathcal{H}^k$ -mensurável definida $\mathcal{H}^k$ -q.s. em E .

Além disso, $G(x)$ é a inversa da matriz dos vetores $Dg(g^{-1}(x)) \cdot f_1, \dots, Dg(g^{-1}(x)) \cdot f_k \in T_x E \subset \mathbb{R}^n$, isto é, a inversa da matriz $k \times k$ cuja (i, j) -ésima entrada é

$$\langle Dg(g^{-1}(x)) \cdot f_i, Dg(g^{-1}(x)) \cdot f_j \rangle.$$

Como a inversão de matrizes é contínua, Dg é boreliana e $g^{-1} : E \rightarrow \mathbb{R}^k$ é $\mathcal{H}^k$ -mensurável, conclui-se que G é uma função $\mathcal{H}^k$ -mensurável definida $\mathcal{H}^k$ -q.s. em E .

Portanto, nossa afirmação está provada e, como $\sqrt{\cdot}$ e $\det$ são funções contínuas segue que $J^E f(x)$ é $\mathcal{H}^k$ -mensurável definida $\mathcal{H}^k$ -q.s. em E , concluindo a prova do item (i).

Vamos supor $\mathcal{H}^k(E) < \infty$. No caso geral, basta considerar uma sequência de conjuntos com medida finita se aproximando de E .

Note que $\int_E J^E f d\mathcal{H}^k$ é finita, pois $J^E f$ é limitada por $(\text{Lip } f)^k$. Além disso, o Corolário 3.3 garante a existência de um boreliano $C \subset \mathbb{R}^m$ tal que $\mathcal{L}^m(\mathbb{R}^m \setminus C) = 0$ e, para todo $y \in C$, $E \cap f^{-1}\{y\}$ é $k - m$ -enumeravelmente retificável. Fixado $t > 1$, pelo Teorema 3.3 e a Observação 3.5, podemos tomar a união $E = E_0 \cup \left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} g_i(A_i) \right)$ onde os pares $(g_i, A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ definem imagens Lipschitz regulares k -dimensionais $E_i := g_i(A_i)$ para cada $i \in \mathbb{N}$ com $\mathcal{H}^k(E_0) = 0$, e valem as condições do Teorema 3.3, donde temos, para todo $i \in \mathbb{N}$ e todo $x \in A_i$,

$$\text{Lip } g_i|_{A_i} \leq t, \text{ Lip } g_i|_{A_i}^{-1} \leq t, \|Dg_i(x)\| \leq t, \|Dg_i(x)^{-1}\| \leq t, t^{-k} \leq Jg_i(x) \leq t^k. \quad (26)$$

Segue de Eilenberg 2.6 que,

$$\int^* \mathcal{H}^{k-m}(E_0 \cap f^{-1}\{y\}) d\mathcal{L}^m(y) = 0.$$

Assim, diminuindo o boreliano C se necessário, podemos supor $\mathcal{H}^{k-m}(E_0 \cap f^{-1}\{y\}) = 0$, para todo $y \in C$. Além disso, pelo Lema 3.5, podemos diminuir C mais ainda, se necessário, para garantir que, para todo $i \in \mathbb{N}$ e todo $y \in C$, $A_i(y) := A_i \cap (f \circ g_i)^{-1}\{y\}$ é $k - m$ -enumeravelmente retificável. Portanto, pelo Lema 3.6, para cada $y \in C$ e cada $i \in \mathbb{N}$, $g_i(A_i(y)) = E_i \cap f^{-1}\{y\}$ é $k - m$ -enumeravelmente retificável; em particular, $\mathcal{H}^{k-m}$ -mensurável. Assim, para todo $y \in C$,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{k-m}(E \cap f^{-1}\{y\}) &= \underbrace{\mathcal{H}^{k-m}(E_0 \cap f^{-1}\{y\})}_{=0} + \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{H}^{k-m}(E_i \cap f^{-1}\{y\}) = \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{H}^{k-m}(E_i \cap f^{-1}\{y\}). \end{aligned} \quad (27)$$

Para todo $i \in \mathbb{N}$, temos pelo Lema 3.4 e da Observação 3.6 que, para $\mathcal{L}^k$ -q.t.p. $z \in A_i$, $f \circ g_i$ é diferenciável em z , $T_{g_i(z)} E_i = Dg_i(z)(\mathbb{R}^k)$, f é tangencialmente diferenciável em $g_i(z)$ com

respeito a E_i e $D(f \circ g_i)(z) = D^E f(g_i(z)) \circ Dg_i(z)$. Além disso, da Proposição 3.1, segue que $T_{g_i(z)}E_i = T_{g_i(z)}E$ para $\mathcal{H}^k$ -q.t.p $z \in E_i$.

Conclui-se então que, para todo $i \in \mathbb{N}$ e $\mathcal{L}^k$ -q.t.p. $z \in A_i$, $f \circ g_i$ é diferenciável em z , $T_{g_i(z)}E = Dg_i(z)(\mathbb{R}^k)$, f é tangencialmente diferenciável em $g_i(z)$ com respeito a E e $D(f \circ g_i)(z) = D^E f(g_i(z)) \circ Dg_i(z)$. Para tais z , tomando a adjunta em ambos os membros da última igualdade segue $D(f \circ g_i)(z)^* = Dg_i(z)^* \circ D^E f(g_i(z))^*$; daí, tendo em vista que $\|Dg_i(z)^*\| = \|Dg_i(z)\| \leq t$ e $\|[Dg_i(z)^*]^{-1}\| = \|Dg_i(z)^{-1}\| \leq t$, podemos aplicar o Lema 2.8 com $R = Dg_i(z)^*$ e $L = D^E f(g_i(z))^*$ para concluir que

$$t^{-k} J^E f(g_i(z)) \leq J(f \circ g_i)(z) \leq t^k J^E f(g_i(z)). \quad (28)$$

Temos também que, para todo $y \in \mathbb{R}^m$, $g_i|_{A_i}$ leva $A_i(y) = A_i \cap (f \circ g_i)^{-1}\{y\}$ bijetivamente sobre $E_i \cap f^{-1}\{y\}$ e $\text{Lip } g_i|_{A_i} \leq t$, $\text{Lip } g_i|_{A_i}^{-1} \leq t$. Portanto, para todo $y \in \mathbb{R}^m$,

$$t^{-(k-m)} \mathcal{H}^{k-m}(A_i(y)) \leq \mathcal{H}^{k-m}(E_i \cap f^{-1}\{y\}) \leq t^{k-m} \mathcal{H}^{k-m}(A_i(y)). \quad (29)$$

Finalmente, como para todo $i \in \mathbb{N}$, $E_i = g_i(A_i)$ então, usando o Corolário 2.7 da Fórmula da Área, a Fórmula da Coárea 2.11 e via (26) e (28), ambos sendo usados na primeira e última desigualdades abaixo, segue que

$$\begin{aligned} t^{-(3k-m)} \int J^E f d\mathcal{H}^k &\stackrel{2.7}{=} t^{-(3k-m)} \int_{A_i} J^E f \circ g_i Jg_i d\mathcal{L}^k \\ &\leq t^{-(k-m)} \int_{A_i} J(f \circ g_i) d\mathcal{L}^k \\ &\stackrel{2.11}{=} t^{-(k-m)} \int \underbrace{\mathcal{H}^{k-m}(A_i \cap (f \circ g_i)^{-1}\{y\})}_{=A_i(y)} d\mathcal{L}^m(y) \\ &\stackrel{(29)}{\leq} \int_* \mathcal{H}^{k-m}(E_i \cap f^{-1}\{y\}) d\mathcal{L}^m(y) \\ &\leq \int^* \mathcal{H}^{k-m}(E_i \cap f^{-1}\{y\}) d\mathcal{L}^m(y) \\ &\stackrel{(29)}{\leq} t^{k-m} \int \mathcal{H}^{k-m}(A_i \cap (f \circ g_i)^{-1}\{y\}) d\mathcal{L}^m(y) \\ &\stackrel{2.11}{=} t^{k-m} \int_{A_i} J(f \circ g_i) d\mathcal{L}^k \\ &\leq t^{3k-m} \int_{A_i} J^E f \circ g_i Jg_i d\mathcal{L}^k \\ &\stackrel{2.7}{=} t^{3k-m} \int_{E_i} J^E f d\mathcal{H}^k. \end{aligned} \quad (30)$$

Note que, nas estimativas acima, tomamos as integrais inferior e superior de $\mathcal{H}^{k-m}(M_i \cap f^{-1}\{\cdot\})$, ao invés de tomar a integral usual contra a medida de Lebesgue, porque não sabemos, a priori, se esta função é $\mathcal{L}^m$ -mensurável.

Claro que, como $\mathcal{H}^k(E_0) = 0$, temos $\int_{E_0} J^E f d\mathcal{H}^k = 0$. Logo, conforme o que foi obtido anteriormente, segue

$$\int_{E_0} J^E f d\mathcal{H}^k = \int_* \mathcal{H}^{k-m}(E_0 \cap f^{-1}\{y\}) d\mathcal{L}^m(y) = \int^* \mathcal{H}^{k-m}(E_0 \cap f^{-1}\{y\}) d\mathcal{L}^m(y) = 0. \quad (31)$$

De (30), (31) e do TCM 1.7, obtém-se:

$$\begin{aligned}
t^{-(3k-m)} \int_E J^E f d\mathcal{H}^k &\stackrel{1.7}{=} t^{-(3k-m)} \sum_{i=0}^{\infty} \int_{E_i} J^E f d\mathcal{H}^k \\
&\leq \sum_{i=0}^{\infty} \int_* \mathcal{H}^{k-m}(E_i \cap f^{-1}\{y\}) d\mathcal{L}^m(y) \\
&\stackrel{1.3}{\leq} \int_* \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{H}^{k-m}(E_i \cap f^{-1}\{y\}) d\mathcal{L}^m(y)
\end{aligned}$$

Usando (27), (31), o fato de que $\mathcal{L}^m(\mathbb{R}^m \setminus C) = 0$ e, na última desigualdade, usando (30) e (31), temos

$$\begin{aligned}
\int_* \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{H}^{k-m}(E_i \cap f^{-1}\{y\}) d\mathcal{L}^m(y) &= \int_* \mathcal{H}^{k-m}(E \cap f^{-1}\{y\}) d\mathcal{L}^m(y) \\
&\leq \int_*^* \mathcal{H}^{k-m}(E \cap f^{-1}\{y\}) d\mathcal{L}^m(y) \\
&= \int_*^* \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{H}^{k-m}(E_i \cap f^{-1}\{y\}) d\mathcal{L}^m(y) \\
&\stackrel{1.3}{\leq} \sum_{i=0}^{\infty} \int_*^* \mathcal{H}^{k-m}(E_i \cap f^{-1}\{y\}) d\mathcal{L}^m(y) \\
&\leq t^{3k-m} \sum_{i=0}^{\infty} \int_{E_i} J^E f d\mathcal{H}^k \\
&\stackrel{1.7}{=} t^{3k-m} \int_E J^E f d\mathcal{H}^k.
\end{aligned}$$

Em particular,

$$\begin{aligned}
t^{-(3k-m)} \int_E J^E f d\mathcal{H}^k &\leq \int_*^* \mathcal{H}^{k-m}(E \cap f^{-1}\{y\}) d\mathcal{L}^m(y) \\
&\leq \int_*^* \mathcal{H}^{k-m}(E \cap f^{-1}\{y\}) d\mathcal{L}^m(y) \\
&\leq t^{3k-m} \int_E J^E f d\mathcal{H}^k.
\end{aligned} \tag{32}$$

Como $t > 1$ foi fixado arbitrariamente e $k > m$, tomando $t \rightarrow 1$ em (32) obtém-se:

$$\int_* \mathcal{H}^{k-m}(E \cap f^{-1}\{y\}) d\mathcal{L}^m(y) = \int_*^* \mathcal{H}^{k-m}(E \cap f^{-1}\{y\}) d\mathcal{L}^m(y) = \int_E J^E f d\mathcal{H}^k < \infty.$$

Logo, da Proposição 1.3, conclui-se que valem as afirmações (ii) e (iii) do enunciado do teorema, isto é, $y \mapsto \mathcal{H}^{k-m}(E \cap f^{-1}\{y\})$ é $\mathcal{L}^m$ -mensurável e

$$\int_E J^E f d\mathcal{H}^k = \int \mathcal{H}^{k-m}(E \cap f^{-1}\{y\}) d\mathcal{L}^m(y),$$

o que conclui a demonstração. $\square$

Referências

- [1] AXLER, S. **Linear Algebra Done Right**. 3. ed. Cham: Springer, 2015. (Undergraduate Texts in Mathematics).
- [2] CUPITRA, E. A. V. **Fórmula de Área e Coarea em conjuntos Retificáveis**. 2020. 60 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2020.
- [3] EVANS, L. C.; GARIEPY, R. F. **Measure Theory and fine properties of functions**. Revised ed. Boca Raton: CRC Press, 2015.
- [4] FEDERER, H. **Geometric Measure Theory**. Berlin: Springer-Verlag, 1969. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 153).
- [5] FEDERER, H.; FLEMING, W. H. **Normal and integral currents**. Annals of Mathematics, v. 72, n. 3, p. 458-520, 1960.
- [6] KRANTZ, S. G.; PARKS, H. R. **Geometric Integration Theory**. Boston: Birkhäuser, 2008.
- [7] MAGGI, F. **Sets of finite perimeter and geometric variational problems: an introduction to Geometric Measure Theory**. Cambridge: Cambridge University Press, 2012.
- [8] MATTILA, P. **Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces: fractals and self-similarity**. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.
- [9] MATTILA, P. **Rectifiability: a survey**. Cambridge: Cambridge University Press, 2023. (London Mathematical Society Lecture Note Series, 483).
- [10] MORGAN, F. **Geometric Measure Theory: a beginner's guide**. 3. ed. San Diego: Academic Press, 2000.
- [11] SIMON, L. **Introduction to Geometric Measure Theory**. Stanford: Stanford University, 2014.
- [12] STEIN, E. M.; SHAKARCHI, R. **Real analysis: measure theory, integration, and Hilbert spaces**. Princeton: Princeton University Press, 2009.
- [13] TERRA, G. **Introduction to Geometric Measure Theory**. São Paulo: IME-USP, 2019. Notas de aula não publicadas. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~glaucio/mat6704/textos/GMTLectureNotes.pdf>.