



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Um breve estudo sobre espaços de Hilbert

Flávio Medeiros de Freitas

João Pessoa - PB

2025

Flávio Medeiros de Freitas

Um breve estudo sobre espaços de Hilbert

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Paraíba - *Campus I* - como requisito para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Everaldo Souto de Medeiros.

João Pessoa - PB
30 de Setembro de 2025

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

F866b Freitas, Flávio Medeiros de.

Um breve estudo sobre espaços de Hilbert / Flávio Medeiros de Freitas. - João Pessoa, 2025.

57 p. : il.

Orientação: Everaldo Souto de Medeiros.

TCC (Curso de Licenciatura em Matemática) -
UFPB/CCEN.

1. Espaços de Hilbert. 2. Teorema da Representação de Riesz. 3. Espaços de Sobolev. I. Medeiros, Everaldo Souto de. II. Título.

UFPB/CCEN

CDU 51(043.2)

Flávio Medeiros de Freitas

Um breve estudo sobre espaços de Hilbert

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Paraíba - *Campus I* - como requisito para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Aprovado em: 30 / 09 / 2025

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros
Departamento de Matemática - UFPB
Orientador

Prof. Dr. Manassés Xavier de Souza
Departamento de Matemática - UFPB
Avaliador

Prof. Dr. Uberlândio Batista Severo
Departamento de Matemática - UFPB
Avaliador



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

ATA Nº 18 / 2025 - CCEN-CGM (11.01.14.44)

Nº do Protocolo: 23074.100882/2025-98

João Pessoa-PB, 30 de Setembro de 2025

**ATA DA SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DO TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO DO
DISCENTE FLÁVIO MEDEIROS DE FREITAS, MATRÍCULA 20210047723, DO CURSO DE
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

Ao trigésimo dia do mês de setembro de dois mil e vinte e cinco, às 10:00 horas, no auditório do prédio da Pós-Graduação em Matemática, reuniram-se em caráter de solenidade pública os membros da comissão designada para avaliar Flávio Medeiros de Freitas. Foram componentes da Banca Examinadora os senhores Everaldo Souto de Medeiros (Presidente DM/UFPB), Manassés Xavier de Souza (Docente Interno DM/UFPB) e Uberlândio Batista Severo (Docente Interno DM/UFPB).

Dando início aos trabalhos, o presidente da banca, Everaldo Souto de Medeiros, após declarar os objetivos da reunião, apresentou o candidato e, em seguida, concedeu-lhe a palavra para que explicasse, oral e sucintamente, o tema apresentado, intitulado: **“UM BREVE ESTUDO SOBRE ESPAÇOS DE HILBERT”**. Após discorrer sobre o referido tema, o candidato foi arguido pelos examinadores na forma regimental.

Sequencialmente, a comissão, em caráter secreto, procedeu à avaliação e julgamento do trabalho, concluindo por atribuir-lhe a nota **9,0 (nove)** e, portanto, o conceito **aprovado**.

(Assinado digitalmente em 03/10/2025 06:44)
EVERALDO SOUTO DE MEDEIROS
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
Matrícula: 1279086

(Assinado digitalmente em 30/09/2025 19:08)
MANASSES XAVIER DE SOUZA
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
Matrícula: 1774119

(Assinado digitalmente em 30/09/2025 12:03)
UBERLANDIO BATISTA SEVERO
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
Matrícula: 3279692

Para verificar a autenticidade deste documento entre em <https://sipac.ufpb.br/documentos/> informando seu número: **18**, ano: **2025**, documento(espécie): **ATA**, data de emissão: **30/09/2025** e o código de verificação: **91ab689a18**

Ao meu avô Flávio.

Agradecimentos

Tão importante quanto a matemática presente neste trabalho são os agradecimentos que registro aqui. Se essa é uma grande conquista, ela não é só minha. Devo compartilhá-la com as pessoas que me proporcionaram essa vitória.

Antes de qualquer coisa, quero agradecer à minha mãe Flávia Medeiros de Freitas, *a quem devo a vida, e jamais conseguirei pagá-la*¹, por tudo aquilo que as palavras são insuficientes para expressar, e ao meu pai Washington de Freitas Santos, por ser o exemplo de homem para mim.

Também aos meus irmãos João Paulo Medeiros de Freitas e Lucas Emanuel Medeiros de Freitas, por todo o divertimento, as boas risadas, as gargalhadas e toda a felicidade que eles proporcionam à minha vida.

Estendo os agradecimentos às minhas avós Carmem Lúcia Miranda de Medeiros e Marluce de Freitas, por todo o amor que elas me proporcionaram; e aos meus tios Lúcio, Clóvis, Daniel, Alisson e Wilson, pela torcida.

Não menos importante nesta jornada, registro a fundamental importância da minha namorada Milena Ribeiro da Silva. Agradeço por todos os momentos em que ela segurou minha mão e me ajudou a superar minhas adversidades. Por todo o apoio emocional que ela me proporcionou, por todo o carinho e a confiança. Por me inspirar, por me fazer desempenhar o melhor de mim. Por tudo. E, principalmente, por me ensinar o que é amor.

Registro também a participação dos meus bons amigos, que me ajudaram muito nesses anos de universidade. Em especial, agradeço ao Centro Acadêmico de Engenharia Elétrica, pelos bons momentos vividos e pelas amizades acolhedoras.

Por fim, mas não menos importante, quero reconhecer os professores que me ajudaram a chegar nesse momento ímpar da minha trajetória acadêmica. Em especial, a minha primeira professora de matemática, *Tia Taci*, a minha primeira professora de língua portuguesa, *Tia Lu*. Quero agradecer também a todos os bons professores que tive desde a época do Colégio da Luz, que me proporcionaram todo o arcabouço acadêmico que tenho.

Quero agradecer também aos excelentes professores da UFPB que me guiaram nesses últimos anos e que tive o prazer de ser aluno, em especial: a Profa. Dra. Miriam

¹RICARDO, Celso. *Literatura Brasileira para Ingresso nas Universidades*. - vol 1.

Pereira da Silva, a professora que me descobriu e me deu a primeira oportunidade no curso; o Prof. Dr. Fágner Dias Araruna, pelas excelentes aulas de introdução à análise real e pelos momentos inspiradores; o Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros, pela paciência, confiança e pelos ensinamentos neste processo de orientação; o Prof. Dr. Manassés Xavier de Souza e o Prof. Dr. Uberlândio Batista Severo pela participação nesta banca; e, mais geralmente, aos professores Dr. Bruno Henrique Carvalho Ribeiro, Dr. Pedro Antonio Gómez Venegas, Dra. Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia, Dr. Ricardo Burity Croccia Macedo, Dr. Flank David Moraes Bezerra, dentre outros docentes do Departamento de Matemática da UFPB. Também agradeço aos professores já aposentados: a Profa. Dra. Rogéria Gaudêncio do Rêgo, por sua humanidade no ensino da matemática; e o Prof. Dr. Marivaldo Pereira Matos, por ser um exemplo da profissão.

Dentre tantos agradecimentos, reitero que há muitos nomes que não foram mencionados. Felizmente, tive muitos amigos e apoiadores que me ajudaram ao longo de toda a minha trajetória, mas, infelizmente, não posso mencioná-los, um a um, sem tornar essa seção longa demais.

A todos que me ajudaram, meus sinceros agradecimentos.

*Remember, no man is a failure who has friends.*²

²ODDBODY, Clarence. Frank Capra's: *It's A Wonderful Life*. (1946)

*Se enxerguei mais longe,
foi por estar sobre os ombros de gigantes.*

Sir Isaac Newton

Resumo

Neste trabalho, apresentamos de forma concisa os principais conceitos fundamentais de Análise Funcional necessários para a formulação e demonstração do Teorema da Representação de Riesz em dimensão infinita. Como aplicação desse resultado, e com uma introdução preliminar aos espaços de Sobolev, estabelecemos a existência e unicidade da solução fraca para o problema de Dirichlet, que constituiu o principal objetivo deste projeto.

Palavras-chave: Espaços de Hilbert; Teorema da Representação de Riesz; Espaços de Sobolev.

Abstract

In this work, we present in a concise manner the main fundamental concepts of Functional Analysis necessary for the formulation and demonstration of the Riesz Representation Theorem in infinite dimensions. As an application of this result, and with a preliminary introduction to Sobolev spaces, we establish the existence and uniqueness of the weak solution to the Dirichlet problem, which constitutes the main objective of this project.

Keywords: Hilbert spaces; Riesz Representation Theorem; Sobolev spaces.

Sumário

1	Introdução	10
2	Espaços Normados	11
2.1	Definição e Exemplos	11
2.2	Um pouco sobre sequências reais	14
2.3	Espaço de Banach	15
2.4	Desigualdades de Young, Hölder e Minkowski	17
2.5	Normas equivalentes	22
2.6	Operadores lineares limitados e Espaço Dual	27
2.7	Forma analítica do Teorema de Hahn-Banach	33
3	Espaços de Hilbert	36
3.1	Definição e Exemplos	36
3.2	Geometria dos espaços com produto interno	38
3.3	Teorema da Representação de Riesz	43
3.4	Espaços Reflexivos	47
4	Aplicação	50
4.1	A desigualdade de Poincaré	50
4.2	O problema de Dirichlet	54
5	Considerações Finais	56
	Referências	57

1 Introdução

A Análise Funcional constitui um dos pilares da matemática moderna, oferecendo uma estrutura rigorosa para o estudo de espaços vetoriais de dimensão infinita e suas aplicações em diversas áreas, como física, engenharia e ciências computacionais. Diferentemente da álgebra linear clássica, restrita a dimensões finitas, a análise funcional estende conceitos como norma, produto interno e operadores lineares para contextos mais gerais, permitindo a formulação e resolução de problemas complexos.

Entre os diversos tipos de espaços normados, os espaços de Hilbert desempenham um papel central por possuírem uma rica estrutura geométrica advinda do produto interno. Essa estrutura não apenas generaliza propriedades do espaço euclidiano, mas também fornece ferramentas essenciais para a formulação de resultados fundamentais, como o Teorema da Representação de Riesz, o qual estabelece uma correspondência profunda entre funcionais lineares contínuos e elementos do próprio espaço de Hilbert.

O estudo de tais resultados tem relevância não apenas teórica, mas também prática. Em particular, problemas em Equações Diferenciais Parciais, mecânica quântica, teoria da informação e processamento de sinais podem ser formulados em termos de espaços de Hilbert, onde as noções de ortogonalidade e projeção desempenham um papel crucial. Neste trabalho, após apresentar os conceitos fundamentais da análise funcional, será dada ênfase ao Teorema da Representação de Riesz, bem como a algumas de suas consequências e aplicações.

Dentre uma das aplicações, abordaremos, preliminarmente, os espaços de Sobolev, que estendem a noção de diferenciabilidade para um contexto mais geral e são indispensáveis no tratamento moderno de problemas de valores de contorno. Utilizando esses espaços, será possível demonstrar a existência e a unicidade da solução fraca para o problema de Dirichlet, o que ilustra a relevância prática da teoria desenvolvida ao longo deste trabalho, o qual busca não apenas consolidar os principais conceitos da análise funcional relacionados a espaços de Hilbert, mas também evidenciar sua importância como ferramenta para a resolução de problemas matemáticos de grande interesse teórico e aplicado.

2 Espaços Normados

O estudo dos espaços normados é fundamental na análise funcional e em diversas áreas da matemática aplicada, pois fornece um arcabouço rigoroso para medir o tamanho (norma) de vetores em espaços vetoriais.

Essa estrutura permite a definição de conceitos essenciais, dos quais destacamos convergência e continuidade, indispensáveis na formulação e na análise dos problemas matemáticos tratados ao longo deste trabalho.

Os espaços normados generalizam o ambiente dos espaços euclidianos, possibilitando o tratamento de funções e operadores de maneira abstrata e sistemática. Além disso, eles constituem a base para o desenvolvimento de espaços mais específicos, como os espaços de Banach e de Hilbert, amplamente utilizados na resolução de equações diferenciais, na teoria de operadores lineares, na física matemática e em problemas de otimização.

2.1 Definição e Exemplos

Definição 2.1 (Espaço Normado). Seja E um espaço vetorial real. Uma *norma* $\| \cdot \|$ em E é uma aplicação

$$\begin{aligned} \| \cdot \| : E &\rightarrow [0, +\infty) \\ x &\mapsto \|x\| \end{aligned}$$

que satisfaz as seguintes condições:

- i. $\|x\| \geq 0$, $\forall x \in E$ e, $\|x\| = 0$ se, e somente se, $x = \mathbf{0}$.
- ii. $\|\beta x\| = |\beta| \|x\|$, $\forall x \in E$ e $\forall \beta \in \mathbb{R}$.
- iii. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in E$.

Chamamos de *espaço normado* este espaço vetorial E cuja norma atende às condições listadas acima. Notamos formalmente por $(E, \| \cdot \|)$, ou simplesmente por E , sempre que não houver ambiguidade quanto à norma em questão.

Observação 2.1. Vale a igualdade do terceiro item da definição acima se, e somente se, $x = \lambda y$, $\forall \lambda \geq 0$.

Exemplo 2.1. O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, munido da norma

$$\|x\| := |x|,$$

é um espaço normado.

Exemplo 2.2. O espaço euclidiano n -dimensional $\mathbb{R}^n$, munido da norma

$$\|x\|_2 := \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2},$$

é um espaço normado.

Exemplo 2.3. O espaço

$$l^\infty := \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \ ; \ \forall n \in \mathbb{N}, |x_n| < C, C \in \mathbb{R}\}$$

formado por todas as sequências reais limitadas, munido da norma

$$\|x\|_\infty := \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|,$$

é um espaço normado.

Exemplo 2.4. Dado $p \in \mathbb{R}$ tal que $1 \leq p < +\infty$, o espaço

$$l^p := \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \ ; \ \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p < +\infty \right\}$$

formado pelas sequências reais p -somáveis, munido da norma

$$\|x\|_p := \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

é um espaço normado.

Exemplo 2.5. Dados $1 \leq p < +\infty$ e $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$, o espaço

$$L^p(I) := \left\{ u : I \rightarrow \mathbb{R} \ ; \ \int_a^b |u(t)|^p dt < +\infty \right\}$$

das funções mensuráveis, na integral de Lebesgue, definidas em I , munido da norma

$$\|u\|_p := \left(\int_a^b |u(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}},$$

é um espaço normado.

Note que, $L^1(I)$ é um espaço normado de inúmeras funções. Apesar disso, há algumas outras que não têm integral convergente em um intervalo aberto real qualquer e, por consequência, não fazem parte deste espaço. Por exemplo, consideremos $I = (0, 1)$ e tomemos $u(t) = \frac{1}{t}$. Note que a integral

$$\int_0^1 \frac{1}{t} dt = \ln t \Big|_0^1 = \ln 1 - \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln t = 0 - \infty = -\infty$$

é divergente. Porém, se tomarmos qualquer intervalo compacto $[a, b] \subset (0, 1)$, então a integral passa a ser finita. Desse modo, surge a necessidade de definir o espaço $L^1_{loc}(I)$ para algumas funções não convergentes em $L^1(I)$ tenham integral finita.

Exemplo 2.6. Sejam $I = (a, b)$ um intervalo aberto, $\Omega \subset I$ um subconjunto compacto, isto é, $\Omega \subset\subset I$, e $p = 1$. O conjunto

$$L^1_{loc}(I) := \left\{ u : I \rightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad \int_{\Omega} |u| < +\infty, \quad \forall \Omega \subset\subset I \right\}$$

munido da norma

$$\|u\|_1 := \int_{\Omega} |u(t)| dt < +\infty,$$

para um fixado $\Omega \subset\subset I$, é um espaço normado.

O espaço $L^1_{loc}(I)$ será bastante útil mais adiante, na seção de aplicações, quando definirmos a derivada fraca. A condição suficiente para que uma determinada função u possua derivada fraca é justamente que $u \in L^1_{loc}(I)$.

Exemplo 2.7. Seja $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$. O espaço

$$C([a, b], \mathbb{R}) := \{u : I \rightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad u \text{ é contínua}\}$$

formado por todas as funções escalares contínuas em um intervalo fechado I , munido com a norma

$$\|u\|_\infty := \max_{t \in I} |u(t)|,$$

é um espaço normado e o representaremos por $C[a, b]$.

2.2 Um pouco sobre sequências reais

Agora, apresentaremos os conceitos de sequência convergente e sequência de Cauchy, cruciais para a definição de espaço normado completo, presente na próxima seção.

Definição 2.2. Sejam E um espaço normado e (a_n) uma sequência em E , isto é, $a_n \in E$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Diremos que (a_n) é *convergente* se, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|a_n - L\| < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0$$

sendo L o elemento para o qual a sequência converge. Notação: $a_n \rightarrow L$.

Definição 2.3 (Sequência de Cauchy). Sejam E um espaço normado e (a_n) uma sequência em E . Diremos que (a_n) é uma *sequência de Cauchy* se, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|a_n - a_m\| < \varepsilon, \quad \forall n, m \geq n_0.$$

Teorema 2.1. *Toda sequência convergente é de Cauchy.*

Demonstração. Seja (a_n) uma sequência convergente, isto é, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|a_n - L\| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall n \geq n_0$. De fato,

$$\|a_n - a_m\| = \|a_n - L + L - a_m\| \leq \|a_n - L\| + \|L - a_m\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

■

Lema 2.1. *Em $\mathbb{R}$, toda sequência de Cauchy é convergente.*

Demonstração. Seja (a_n) uma sequência de Cauchy. Note que (a_n) é limitada.

Por hipótese, $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall \varepsilon > 0$ temos que $\|a_n - a_m\| < \varepsilon$, $\forall n, m \geq n_1$. Em

particular, tomemos $m = n_1$. Temos que

$$\|a_n\| = \|a_n - a_{n_1} + a_{n_1}\| \leq \|a_n - a_{n_1}\| + \|a_{n_1}\| < \varepsilon + \|a_{n_1}\|, \quad \forall n > n_1.$$

Em seguida, definamos $k = \max\{\|a_1\|, \|a_2\|, \dots, \|a_{n_1}\|, \varepsilon + \|a_{n_1}\|\}$. Logo, temos $\|a_n\| \leq k, \forall n \in \mathbb{N}$, ou seja, (a_n) é, de fato, limitada.

Pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, existe uma subsequência (a_{n_k}) de (a_n) tal que $a_{n_k} \rightarrow L$. Assim, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|a_{n_k} - L\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n_k \geq n_2.$$

Pelo Teorema 2.1, (a_{n_k}) é de Cauchy. Logo, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_3 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|a_{n_k} - a_n\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n, n_k \geq n_3.$$

Como (a_{n_k}) é uma subsequência de (a_n) , então o único elemento para o qual (a_n) pode convergir é L , isto é, se convergir. Mostremos, por fim, que (a_n) converge. De fato, basta tomar $n_0 = \max\{n_2, n_3\}$. Daí, concluímos que, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|a_n - L\| = \|a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - L\| \leq \|a_n - a_{n_k}\| + \|a_{n_k} - L\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0.$$

■

2.3 Espaço de Banach

Definição 2.4 (Espaço de Banach). Seja E um espaço normado. Diremos que E é *completo*, se toda sequência de Cauchy em E for convergente em E . Em especial, chama-se de *espaço de Banach* todo espaço normado completo.

Observação 2.2. Os Exemplos 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6 e 2.7 são casos de espaços de Banach.

Exemplo 2.8. Considere o espaço normado $C[0, 1]$ munido da norma

$$\|u\|_1 := \int_0^1 |u(t)| dt.$$

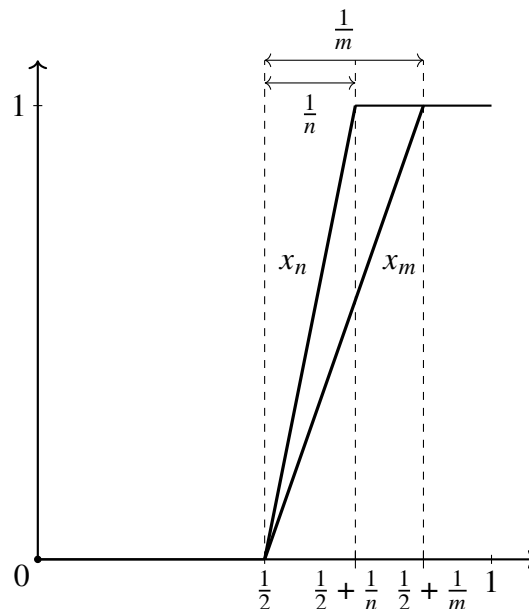
Afirmamos que este espaço não é um espaço de Banach, ou seja, não é completo. De fato, podemos verificar que a sequência (x_n) dada por

$$x_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ n\left(t - \frac{1}{2}\right), & \text{se } t \in \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right] \\ 1, & \text{se } t \in \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1\right] \end{cases}$$

é de Cauchy. Ao tomar $n \rightarrow +\infty$, a sequência (x_n) converge para a função descontínua

$$x(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ 1, & \text{se } t \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

Obviamente, $x \notin C[0, 1]$, portanto, é impossível que uma sequência de Cauchy seja convergente neste espaço. O gráfico a seguir ilustra o comportamento das funções descritas neste exemplo.



Exemplo 2.9. O espaço l^p munido da norma $\|u\|_p$ do exemplo anterior é completo e, portanto, de Banach.

Exemplo 2.10. Seja $p \in \mathbb{R}$ tal que $1 \leq p < +\infty$. O espaço $\mathbb{R}^n$ munido da norma

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

é um espaço de Banach.

2.4 Desigualdades de Young, Hölder e Minkowski

Nesta seção, em ordem de provar que o espaço l^p é um espaço normado, é necessário introduzir algumas desigualdades básicas. Antes disso, definiremos o conceito de função convexa, necessário para a demonstração da Desigualdade de Young, expressa através do Lema 2.2.

Definição 2.5. Seja I um intervalo real tal que $(a, b) \subset I$. Uma função $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita *convexa* quando, para $a < x < b$, o ponto $(x, f(x))$ do gráfico de f se encontra sempre abaixo do segmento de reta que une os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

Definamos os pontos $A = (a, f(a))$, $B = (b, f(b))$, $C = (x, f(x))$, $D = (x, d)$ tal que D está sobre a corda que une os pontos A e B . Sendo f uma função convexa, façamos a seguinte análise:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{x-a}{b-a}, & 0 \leq \mu \leq 1 \\ x &= a + (x-a) = a + \mu(b-a) \\ x &= (1-\mu)a + \mu b \\ x &= \lambda a + \mu b, & \lambda = 1-\mu \end{aligned}$$

Por definição, a função é convexa quando o ponto D está sempre acima do ponto C , logo, $\forall a, b \in I$ e $\forall \lambda, \mu \geq 0$, tal que $\lambda + \mu = 1$, vale

$$f(\lambda a + \mu b) \leq \lambda f(a) + \mu f(b).$$

Lema 2.2 (Desigualdade de Young). *Sejam $a, b \geq 0$. Então,*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

com $p, q > 0$ tais que

$$1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

Por satisfazerem essa igualdade, p, q são chamados de *expoentes conjugados*.

Demonstração. Note que

$$ab = e^{\ln(ab)} = e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln\left(a^{\frac{p}{p}}\right) + \ln\left(b^{\frac{q}{q}}\right)} = e^{\left(\frac{1}{p} \ln a^p + \frac{1}{q} \ln b^q\right)} = e^{\lambda x + \mu y}$$

tal que $x = \ln a^p$, $y = \ln b^q$, $\lambda = \frac{1}{p}$, $\mu = \frac{1}{q}$, com p e q expoentes conjugados. Sendo $f(x) = e^x$ uma função convexa, temos

$$ab = e^{\lambda x + \mu y} \leq \lambda e^x + \mu e^y = \frac{1}{p} e^{\ln a^p} + \frac{1}{q} e^{\ln b^q}.$$

Usando as propriedades das funções exponencial e logarítmica, obtemos

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

o que conclui a demonstração. ■

Lema 2.3 (Desigualdade de Hölder). *Sejam $(a_n) \in l^p$, $(b_n) \in l^q$, com p, q expoentes conjugados tais que $1 \leq p < +\infty$ e $1 \leq q < +\infty$. Então, $(a_n b_n) \in l^1$ e vale:*

$$\|(a_n b_n)\|_1 \leq \|(a_n)\|_p \|(b_n)\|_q.$$

Demonstração. Se (a_n) ou (b_n) for a sequência nula, então não há o que demonstrar. Por isso, suponhamos que $\|(a_n)\|_p > 0$ e que $\|(b_n)\|_q > 0$. Inicialmente, note que

$$\|a_n\|_p^p = \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^p \quad \text{e} \quad \|b_n\|_q^q = \sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|^q.$$

Usando a desigualdade de Young

$$x^{\frac{1}{p}} y^{\frac{1}{q}} \leq \frac{x}{p} + \frac{y}{q}$$

com $x = \frac{|a_n|^p}{\|a_n\|_p^p}$ e $y = \frac{|b_n|^q}{\|b_n\|_q^q}$, obtemos

$$\left(\frac{|a_n|}{\|a_n\|_p} \right) \left(\frac{|b_n|}{\|b_n\|_q} \right) \leq \frac{1}{p} \left(\frac{|a_n|^p}{\|a_n\|_p^p} \right) + \frac{1}{q} \left(\frac{|b_n|^q}{\|b_n\|_q^q} \right).$$

Aplicando o somatório em ambos os lados, temos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{|a_n| |b_n|}{\|a_n\|_p \|b_n\|_q} \right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{p} \frac{|a_n|^p}{\|a_n\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|b_n|^q}{\|b_n\|_q^q} \right).$$

Do lado esquerdo, as normas são valores fixos. Desse modo, podemos colocá-las fora do somatório. Quanto ao termo do lado direito, simplificando a fração, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|a_n\|_p \|b_n\|_q} \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| |b_n| &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q \|b_n\|_q^q |a_n|^p + p \|a_n\|_p^p |b_n|^q}{pq \|a_n\|_p^p \|b_n\|_q^q} \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q \|b_n\|_q^q |a_n|^p}{pq \|a_n\|_p^p \|b_n\|_q^q} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p \|a_n\|_p^p |b_n|^q}{pq \|a_n\|_p^p \|b_n\|_q^q} \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|a_n|^p}{p \|a_n\|_p^p} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|b_n|^q}{q \|b_n\|_q^q} \\ &\leq \frac{1}{p \|a_n\|_p^p} \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^p + \frac{1}{q \|b_n\|_q^q} \sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|^q \\ &\leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n b_n| \leq \|a_n\|_p \|b_n\|_q$$

que é a desigualdade desejada. ■

Lema 2.4 (Desigualdade de Minkowski). *Sejam $1 \leq p < +\infty$ e $(a_n), (b_n) \in l^p$. Então*

$(a_n + b_n) \in l^p$ e vale:

$$\|(a_n + b_n)\|_p \leq \|(a_n)\|_p + \|(b_n)\|_p.$$

Demonstração. Se $p = 1$, então $\|a_n + b_n\|_p \leq \|a_n\|_p + \|b_n\|_p$ e a desigualdade de Minkowski torna-se naturalmente trivial. Além disso, se $\|a_n + b_n\| = 0$, então não há o que fazer. Desse modo, suponhamos $p > 1$ e $\|a_n + b_n\| > 0$. Mostremos inicialmente que $(a_n + b_n) \in l^p$. De fato, note que

$$\begin{aligned} |a_n + b_n|^p &\leq (|a_n| + |b_n|)^p \leq [2 \sup_{n \in \mathbb{N}} \{|a_n|, |b_n|\}]^p \leq 2^p \left(\sup_{n \in \mathbb{N}} \{|a_n|^p, |b_n|^p\} \right) \\ &\leq 2^p (|a_n|^p + |b_n|^p). \end{aligned}$$

Aplicando o somatório em $|a_n + b_n|^p \leq 2^p (|a_n|^p + |b_n|^p)$, temos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n + b_n|^p \leq 2^p \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^p + \sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|^p \right).$$

Por hipótese, temos $(a_n) \in l^p$ e $(b_n) \in l^p$, o que implica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^p < +\infty \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|^p < +\infty.$$

Como 2^p é um número finito, fixado $p \in \mathbb{R}$, temos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n + b_n|^p < +\infty.$$

Portanto, $(a_n + b_n) \in l^p$, como gostaríamos inicialmente.

Agora, mostremos que vale a desigualdade algébrica. Inicialmente, note que

$$\begin{aligned} |a_n + b_n|^p &= |a_n + b_n| |a_n + b_n|^{p-1} \leq (|a_n| + |b_n|) |a_n + b_n|^{p-1} \\ &\leq |a_n| |a_n + b_n|^{p-1} + |b_n| |a_n + b_n|^{p-1}. \end{aligned}$$

Seja q o expoente conjugado de p . Observe que, $(a_n + b_n)^{p-1} \in l^q$, pois

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |(a_n + b_n)^{p-1}|^q = \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n + b_n|^p < +\infty.$$

Note que, se $(a_n), (b_n) \in l^p$ e $(a_n + b_n)^{p-1} \in l^q$, então $(a_n)(a_n + b_n)^{p-1} \in l^1$ e $(b_n)(a_n + b_n)^{p-1} \in l^1$.

Desse modo, aplicando o somatório em $|a_n + b_n|^p \leq |a_n||a_n + b_n|^{p-1} + |b_n||a_n + b_n|^{p-1}$, temos

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n + b_n|^p &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left(|a_n||a_n + b_n|^{p-1} + |b_n||a_n + b_n|^{p-1} \right) \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n||a_n + b_n|^{p-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} |b_n||a_n + b_n|^{p-1}. \end{aligned}$$

Pela Desigualdade de Hölder, temos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n||a_n + b_n|^{p-1} = \|a_n(a_n + b_n)^{p-1}\|_1 \leq \|a_n\|_p \|(a_n + b_n)^{p-1}\|_q$$

e

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n||a_n + b_n|^{p-1} = \|b_n(a_n + b_n)^{p-1}\|_1 \leq \|b_n\|_p \|(a_n + b_n)^{p-1}\|_q.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n + b_n|^p &\leq \|a_n\|_p \|(a_n + b_n)^{p-1}\|_q + \|b_n\|_p \|(a_n + b_n)^{p-1}\|_q \\ &\leq (\|a_n\|_p + \|b_n\|_p) \|(a_n + b_n)^{p-1}\|_q \\ &\leq (\|a_n\|_p + \|b_n\|_p) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} [|a_n + b_n|^{p-1}]^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq (\|a_n\|_p + \|b_n\|_p) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n + b_n|^p \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n + b_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n + b_n|^p \right)^{1-\frac{1}{q}} \leq \|a_n\|_p + \|b_n\|_p$$

que é a desigualdade desejada. ■

Observação 2.3. As desigualdades de Minkowski e Hölder foram enunciadas e demonstradas para l^p , mas também são válidas para $L^p(I)$ e sua respectiva norma.

2.5 Normas equivalentes

Definição 2.6 (Normas equivalentes). Seja E um espaço normado. Duas normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ são ditas *equivalentes* se existem constantes reais $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$C_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2\|x\|_1, \quad \forall x \in E.$$

Exemplo 2.11. Em $\mathbb{R}^n$, são equivalentes as normas

$$\|x\|_\infty = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |x_i| \quad \text{e} \quad \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Por um lado, trivialmente, vale

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p. \quad (1)$$

Por outro lado, temos que

$$\|x\|_p^p = \sum_{i=1}^n |x_i|^p \leq n \left(\max_{i \in \{1, \dots, n\}} |x_i|^p \right) = n\|x\|_\infty^p.$$

Logo,

$$\|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty. \quad (2)$$

Portanto, como consequência de (1) e de (2), temos que as normas $\|\cdot\|_p$ e $\|\cdot\|_\infty$ são equivalentes, como gostaríamos.

Teorema 2.2. *Em um espaço vetorial de dimensão finita, quaisquer duas normas são equivalentes.*

Demonstração. Suponhamos $\dim E = k$. Assim, seja $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ uma base para E . Queremos provar que duas normas quaisquer $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ são equivalentes em E .

Para isso, observe inicialmente que, dado $x \in E$, temos

$$x = \sum_{i=1}^k \alpha_i e_i, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}.$$

Sem perda de generalidade, podemos fixar a primeira norma. Desse modo, consideremos

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^k |\alpha_i|.$$

Nosso objetivo é mostrar que existem $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$\|x\|_2 \leq C_1 \|x\|_1 \quad \text{e} \quad \|x\|_1 \leq C_2 \|x\|_2$$

para qualquer x que seja a norma $\|\cdot\|_2$. Por um lado, note que

$$\begin{aligned} \|x\|_2 &= \left\| \sum_{i=1}^k \alpha_i e_i \right\|_2 \leq \sum_{i=1}^k |\alpha_i| \|e_i\|_2 \leq \sum_{i=1}^k |\alpha_i| \max_{i \in \{1, \dots, k\}} \|e_i\|_2 \\ &\leq k \left(\max_{i \in \{1, \dots, k\}} \|e_i\|_2 \right) \sum_{i=1}^k |\alpha_i| \leq C_1 \|x\|_1 \end{aligned}$$

isto é

$$\|x\|_2 \leq C_1 \|x\|_1 \tag{3}$$

em que $C_1 = k \left(\max_{i \in \{1, \dots, k\}} \|e_i\|_2 \right)$.

Por outro lado, afirmamos que existe uma constante $C_2 > 0$ tal que $\|x\|_1 \leq C_2 \|x\|_2$. De fato, suponhamos, por contradição, que não. Isto é, $\nexists C_2 > 0$ tal que

$$\frac{\|x\|_1}{\|x\|_2} \leq C_2.$$

Logo, existe uma sequência (x_n) tal que

$$\frac{\|x_n\|_1}{\|x_n\|_2} \geq n.$$

Definamos a sequência (y_n) da seguinte forma

$$y_n := \frac{x_n}{\|x_n\|_1}$$

tal que

$$y_n = \sum_{i=1}^k |\alpha_{in}| \|e_i\|.$$

Note que $\|y_n\|_2 \rightarrow 0$. De fato,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|y_n\|_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| \frac{x_n}{\|x_n\|_1} \right\|_2 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Como $\|y_n\|_2 \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, temos, obrigatoriamente, que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|y_n\|_2 = 0.$$

Trivialmente, observe também que $\|y_n\|_1 \rightarrow 1$. De fato,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|y_n\|_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| \frac{x_n}{\|x_n\|_1} \right\|_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\|x_n\|_1}{\|x_n\|_1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1.$$

Consequentemente,

$$1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|y_n\|_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^k |\alpha_{in}| = \sum_{i=1}^k |\alpha_{in}| = \|y_n\|_1.$$

Notoriamente, (α_{in}) é uma sequência limitada, veja

$$\alpha_{in} \leq |\alpha_{in}| \leq \sum_{i=1}^k |\alpha_{in}| = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo, vale o Teorema de Bolzano-Weierstrass. Assim, existe uma subsequência (α_{in_j}) que converge para α_i . Devido a isso, podemos afirmar que $y_{n_j} \rightarrow y$, tal que

$$y = \sum_{i=1}^k \alpha_i e_i.$$

Por fim, note que

$$\|y\|_2 = \|y - y_{n_j} + y_{n_j}\|_2 \leq \|y - y_{n_j}\|_2 + \|y_{n_j}\|_2 .$$

Aplicando o limite, temos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \|y\|_2 &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \|y - y_{n_j}\|_2 + \lim_{n \rightarrow +\infty} \|y_{n_j}\|_2 \\ &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| \sum_{i=1}^k \left(|\alpha_i| - |\alpha_{in_j}| \right) \|e_i\| \right\|_2 \\ &\leq \left\| \sum_{i=1}^k \left(|\alpha_i| - \lim_{n \rightarrow \infty} |\alpha_{in_j}| \right) \|e_i\| \right\|_2 \\ &\leq \left\| \sum_{i=1}^k (|\alpha_i| - |\alpha_i|) \|e_i\| \right\|_2 = 0 \end{aligned}$$

Porém, pela propriedade da norma, $\|y\|_2 \geq 0$, portanto, $\|y\|_2 = 0$. Logo, $y = \mathbf{0}$. Entretanto, veja que

$$\|y\|_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|y_n\|_1 = 1 .$$

Uma contradição. Assim, obrigatoriamente, $\exists C_2 > 0$ tal que

$$\|x\|_1 \leq C_2 \|x\|_2 . \quad (4)$$

Portanto, devido a (3) e (4), concluímos que as normas são equivalentes. ■

Entretanto, se E é um espaço normado de dimensão infinita, então o teorema acima não é válido em geral, como mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 2.12. Dado o espaço normado $C[0, 1]$, considere as normas

$$\|u\|_\infty = \max_{t \in [0,1]} |u(t)| \quad \text{e} \quad \|u\|_1 = \int_0^1 |u(t)| dt .$$

Note que

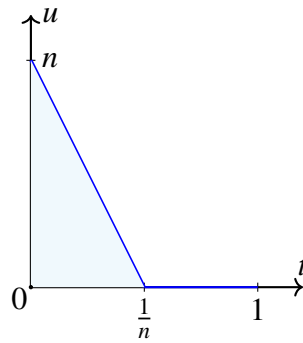
$$\|u\|_1 \leq \|u\|_\infty, \quad \forall u \in C[0, 1] .$$

Entretanto, a desigualdade contrária não pode ser verdadeira. Para verificar, seja (u_n)

uma sequência de funções tais que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, temos:

$$u_n(t) = \begin{cases} n - n^2 t, & \text{se } t \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ 0, & \text{se } t \in \left[\frac{1}{n}, 1\right] \end{cases}$$

Note que $\|u_n\|_\infty = n$, pois n é o maior valor que a família de funções assume, no ponto $t = 0$. Veja também que $\|u_n\|_1 = \frac{1}{2}$, que é numericamente igual à área azulada sob o gráfico abaixo que representa o comportamento da função arbitrária u_n .



Como $\|u_n\|_\infty = n$ e $\|u_n\|_1 = \frac{1}{2}$, a desigualdade contrária é, de fato, impossível. Portanto, concluímos que essas normas não são equivalentes.

Proposição. Dadas as normas $\|\cdot\|_p$ e $\|\cdot\|_\infty$ em l^p , temos que, $\forall x \in E$:

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty.$$

Demonstração. Note inicialmente que

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq (|x_i|^p)^{\frac{1}{p}} = |x_i|, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Consequentemente,

$$\|x\|_p \geq \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i| = \|x\|_\infty$$

portanto,

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \|x\|_p \geq \|x\|_\infty. \quad (5)$$

Por outro lado, sabemos que $|x_i| \leq \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i|$, $\forall i \in \mathbb{N}$, assim fixado um arbitrário $n \in \mathbb{N}$, temos que:

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\sum_{i=1}^n \left(\max_{i \in \{1, \dots, n\}} |x_i| \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left[\left(\max_{i \in \{1, \dots, n\}} |x_i| \right)^p \left(\sum_{i=1}^n 1^p \right) \right]^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left[\left(\max_{i \in \{1, \dots, n\}} |x_i| \right)^p \right]^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n 1 \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\max_{i \in \{1, \dots, n\}} |x_i| \right) n^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

À medida que $p \rightarrow +\infty$, o termo $n^{\frac{1}{p}} \rightarrow 1$, assim, é interessante aplicar o limite para que nossa expressão seja simplificada para nossos interesses. Desse modo, $\forall n \in \mathbb{N}$, vale

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |x_i|$$

Agora, é de nosso interesse aplicar o limite fazendo $n \rightarrow +\infty$ para que possam aparecer as normas desejadas.

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\max_{i \in \{1, \dots, n\}} |x_i| \right) \leq \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i|.$$

Assim,

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \|x\|_p = \lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \|x\|_{\infty} \tag{6}$$

Portanto, de (5) e (6) obtemos $\lim_{p \rightarrow +\infty} \|x\|_p = \|x\|_{\infty}$. ■

2.6 Operadores lineares limitados e Espaço Dual

O estudo do espaço dual é essencial na análise funcional e em diversas áreas da matemática, pois permite uma compreensão mais profunda da estrutura dos espaços

vetoriais normados e nos fornece uma forma de representar e analisar propriedades dos vetores por meio de suas ações em funções. O espaço dual de um espaço vetorial consiste no conjunto de todos os funcionais lineares contínuos definidos sobre ele.

Essa abordagem é especialmente útil na formulação de problemas variacionais, na teoria da dualidade e na análise de operadores lineares. Além disso, o espaço dual desempenha um papel central em resultados fundamentais apresentados neste trabalho, como o Teorema de Hahn-Banach, o Teorema de Representação de Riesz.

Definição 2.7 (Operador Limitado). Sejam $(E, \|\cdot\|_E)$ e $(F, \|\cdot\|_F)$ espaços normados. Um operador linear $T : E \rightarrow F$ é dito *limitado* se $\exists C > 0$ tal que

$$\|T(x)\|_F \leq C\|x\|_E, \quad \forall x \in E.$$

Como mencionado anteriormente, um dos nossos objetivos principais é o estudo dos funcionais lineares, isto é, os operadores definidos em E com contradomínio $F = \mathbb{R}$. Assim, definimos um funcional $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ limitado se $\exists C > 0$ tal que

$$|f(x)| \leq C\|x\|_E, \quad \forall x \in E.$$

Definição 2.8 (Operador Contínuo). Sejam $(E, \|\cdot\|_E)$ e $(F, \|\cdot\|_F)$ espaços normados e $T : E \rightarrow F$ um operador linear. Então, T é dito *contínuo em um ponto* $x_0 \in E$ se $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que

$$[\|x - x_0\|_E < \delta] \implies [\|T(x) - T(x_0)\|_F < \varepsilon]$$

com $x \in E$. Generalizando, dizemos simplesmente que T é *contínuo* se ele for contínuo em todo ponto $x_0 \in E$.

Definição 2.9 (Espaço Dual). Seja E um espaço normado. O seguinte conjunto

$$\mathcal{L}(E, \mathbb{R}) := \{f : E \rightarrow \mathbb{R} \ ; \ f \text{ é um funcional linear limitado}\},$$

munido com a norma

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{|f(x)|}{\|x\|},$$

é um espaço normado e o chamamos de *espaço dual contínuo* ou, simplesmente, *espaço dual*. Notação: $\mathcal{L}(E, \mathbb{R}) = E'$.

Observação 2.4. Existe uma relação entre a constante C e o operador T , de tal forma que sua norma $\|T\|$ é definida a partir da menor constante que satisfaz a desigualdade da Definição 2.7 acima.

Exemplo 2.13. O operador linear $I : E \rightarrow E$ definido como

$$I(x) := x, \quad \forall x \in E$$

é limitado. Mais ainda, $\|I\| = 1$.

Exemplo 2.14. Seja E o espaço normado de todos os polinômios definidos em $I = [0, 1]$ munido com a norma $\|x\| = \max_{t \in I} |x(t)|$. O operador linear $T : E \rightarrow E$ definido como

$$T(x) := x'(t)$$

não é limitado. De fato, considere $x(t) = t^n$, com $n \in \mathbb{N}$. Note que $\|x\| = 1$ e que

$$\|T(x)\| = \|(t^n)'\| = \|nt^{n-1}\| = |n| \cdot \|t^{n-1}\| = n.$$

Assim, $\nexists C \in \mathbb{R}$ tal que $n \leq C$, $\forall n \in \mathbb{N}$, portanto, a aplicação não é limitada.

Exemplo 2.15. O funcional linear $T : C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$T(f) := \int_0^1 f(t) dt$$

cuja norma é

$$\|T\| = \sup_{f \in E' \setminus \{0\}} \frac{|T(f)|}{\|f\|_\infty}$$

é limitado, com $\|T\| = 1$. De fato, veja que

$$|f(t)| \leq \max_{t \in [0, 1]} |f(t)|.$$

Logo,

$$\int_0^1 f(t)dt \leq \int_0^1 \max_{t \in [0,1]} |f(t)| dt \leq \left(\max_{t \in [0,1]} |f(t)| \right) \int_0^1 1 dt \leq \max_{t \in [0,1]} |f(t)|$$

Isto é,

$$|T(f)| \leq 1 \|f\|_\infty, \quad \forall f \in C[0, 1].$$

Portanto, T é limitado, como gostaríamos. Deste modo

$$\|T\| := \sup_{f \in E' \setminus \{0\}} \frac{|T(f)|}{\|f\|}.$$

Veja que, $\forall f \in E'$, temos

$$\frac{|T(f)|}{\|f\|_\infty} \leq \sup_{f \in E' \setminus \{0\}} \frac{|T(f)|}{\|f\|_\infty} \leq 1.$$

Em particular, tomando $f \equiv 1$, temos

$$\frac{|T(f)|}{\|f\|} = \frac{|T(1)|}{\|1\|} = 1 \leq \sup_{f \in E' \setminus \{0\}} \frac{|T(f)|}{\|f\|} \leq 1.$$

Portanto, $\|T\| = 1$, como queríamos.

Observação 2.5. Uma identidade alternativa para a norma definida acima na Observação 2.4 é

$$\|T\| := \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|.$$

De fato, suponhamos que $\|x\| = \alpha \neq 1$. Basta tomarmos $y = \left(\frac{1}{\alpha}\right)x$, $\alpha \neq 0$.

$$\|T\| = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|T(x)\|}{\alpha} = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \left\| T \left(\left(\frac{1}{\alpha} \right) x \right) \right\| = \sup_{\|y\|=1} \|T(y)\|.$$

Teorema 2.3. *Sejam E e F espaços normados, com $\dim E < +\infty$. Então, todo operador linear $T : E \rightarrow F$ é limitado.*

Demonstração. Suponhamos que $\dim E = k$. Assim, seja $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ a base de E .

Temos que, $\forall x \in E$, podemos escrever

$$x = \sum_{i=1}^k \alpha_i e_i, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}.$$

Logo,

$$\|T(x)\| = \left\| T \left(\sum_{i=1}^k \alpha_i e_i \right) \right\| = \left\| \sum_{i=1}^k \alpha_i T(e_i) \right\| \leq \sum_{i=1}^k |\alpha_i| \|T(e_i)\|.$$

Como demonstrado no Teorema 2.2, todas as normas em um espaço de dimensão finita são equivalentes. Deste modo, sem perda de generalidade, escolhamos $\|x\| = \sum_{i=1}^k |\alpha_i|$. Assim,

$$\|T(x)\| \leq \sum_{i=1}^k \|T(e_i)\| |\alpha_i| \leq \sum_{i=1}^k \max_{i \in \{1, \dots, k\}} \|T(e_i)\| |\alpha_i| \leq k \left(\max_{i \in \{1, \dots, k\}} \|T(e_i)\| \right) \sum_{i=1}^k |\alpha_i|.$$

Portanto, $\|T(x)\| \leq C\|x\|$, com $C = k \left(\max_{i \in \{1, \dots, k\}} \|T(e_i)\| \right)$. ■

Teorema 2.4. *Seja $T : E \rightarrow F$ um operador linear entre espaços normados. Então:*

- i. *T é contínuo se, e somente se, T é limitado.*
- ii. *Se T é contínuo em um ponto, então T é contínuo em todo ponto.*

Demonstração. Provaremos, inicialmente, a recíproca do primeiro item, pois é mais simples. Em seguida, provaremos a implicação do mesmo item.

- i. $[\Leftarrow]$ Suponhamos T um operador linear limitado. Queremos mostrar que

$$[\|x - x_0\| < \delta] \implies [\|T(x) - T(x_0)\| < \varepsilon].$$

Assim, $\forall \varepsilon > 0$, basta considerar $\delta = \frac{\varepsilon}{\|T\|} > 0$. De fato, pela linearidade de T , temos

$$\|T(x) - T(x_0)\| = \|T(x - x_0)\| \leq \|T\| \|x - x_0\|.$$

Por hipótese, T é limitada, logo,

$$\|T\| \|x - x_0\| < \|T\| \frac{\varepsilon}{\|T\|} = \varepsilon.$$

Portanto, $\left[\|x - x_0\| < \frac{\varepsilon}{\|T\|} \right] \implies [\|T(x - x_0)\| < \varepsilon]$, como gostaríamos.

[$\implies$] Seja T um operador linear contínuo. Provemos que $\|T\| \leq C\|x\|$, $\forall x \in E$.
De fato, se $x \in B_\delta(x_0)$, isto é, se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $\|x - x_0\| < \delta$, então

$$\|T(x)\| = \|T(x) - T(x_0) + T(x_0)\| \leq \|T(x) - T(x_0)\| + \|T(x_0)\| < \varepsilon + \|T(x_0)\|.$$

Entretanto, se x não faz parte da vizinhança de x_0 , isto é, se $x \notin B_\delta(x_0)$, então definamos

$$y := \frac{\delta}{2\|x\|}x + x_0.$$

Note que $y \in B_\delta(x_0)$, $\forall x \in E$. De fato,

$$\|y - x_0\| = \left\| \frac{\delta}{2\|x\|}x + x_0 - x_0 \right\| = \left\| \frac{\delta}{2\|x\|}x \right\| = \frac{\delta}{2\|x\|}\|x\| = \frac{\delta}{2} < \delta.$$

Devido à linearidade de T , temos

$$\left\| T\left(\frac{\delta}{2\|x\|}x\right) \right\| = \left\| T\left(\frac{\delta}{2\|x\|}x\right) + T(x_0) - T(x_0) \right\| = \left\| T\left(\frac{\delta}{2\|x\|}x + x_0\right) - T(x_0) \right\|.$$

Utilizando a desigualdade triangular, temos

$$\begin{aligned} \left\| T\left(\frac{\delta}{2\|x\|}x\right) \right\| &= \left\| T\left(\frac{\delta}{2\|x\|}x + x_0\right) - T(x_0) \right\| \leq \|T(y)\| + \|-T(x_0)\| \\ &\leq \|T(y)\| + \|T(x_0)\| \\ &< \varepsilon + \|T(x_0)\| + \|T(x_0)\| = C. \end{aligned}$$

Por outro lado, observe que

$$\left\| T\left(\frac{\delta}{2\|x\|}x\right) \right\| = \left\| \frac{\delta}{2\|x\|}T(x) \right\| = \left| \frac{\delta}{2\|x\|} \right| \|T(x)\| = \frac{\delta}{2\|x\|} \|T(x)\|.$$

Por fim, concluimos que

$$\begin{aligned}\frac{\delta}{2\|x\|} \|T(x)\| &= \left\| T\left(\frac{\delta}{2\|x\|}x\right) \right\| \leq C \\ \|T(x)\| &\leq \frac{2C}{\delta} \|x\| \\ \|T(x)\| &\leq \tilde{C} \|x\|\end{aligned}$$

em que $\tilde{C} = \frac{2C}{\delta}$, com $C = \varepsilon + 2\|T(x_0)\|$, como gostaríamos.

- ii. Note que, na implicação do item anterior, nosso raciocínio foi todo desenvolvido a partir de um x_0 fixo, porém arbitrário. Logo, $\forall x_0 \in E$, temos que, se T é contínua em x_0 , então T é contínua em todo ponto.

■

2.7 Forma analítica do Teorema de Hahn-Banach

O Teorema de Hahn-Banach é um dos pilares fundamentais da análise funcional. Ele garante que, sob certas condições, é possível estender linearmente um funcional linear definido em um subespaço para todo o espaço vetorial, sem aumentar sua norma.

Essa propriedade de extensão é essencial para o desenvolvimento da dualidade em espaços normados, permitindo a caracterização e análise de funcionais lineares contínuos. Além disso, o teorema fornece as bases para muitos resultados posteriores, como a separação de conjuntos convexos por hiperplanos e a representação de funcionais em espaços de Banach, desempenhando um papel central em áreas como teoria da medida, otimização convexa e equações funcionais.

Definição 2.10 (Funcional de Minkowski). Seja E um espaço normado. Diremos que $p : E \rightarrow \mathbb{R}$ é um *funcional de Minkowski* se ele satisfizer as seguintes condições:

- i. $p(\lambda x) = \lambda p(x)$, $\forall x \in E$ e $\forall \lambda \geq 0$.
- ii. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, $\forall x, y \in E$.

Exemplo 2.16. Seja E um espaço normado. Um exemplo de funcional de Minkowski é $p(x) = \|x\|$.

Teorema 2.5 (Hahn-Banach). *Sejam $p : E \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional de Minkowski e $g : G \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear tal que $g(x) \leq p(x)$, $\forall x \in G$, com $G \subset E$ um subespaço vetorial. Então, existe um funcional linear f que estende o funcional g em todo E , isto é,*

$$\exists f : E \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } f(x) \leq p(x), \forall x \in E, \text{ e } f|_G = g.$$

Mais ainda, este funcional f é único.

Como consequência do Teorema de Hahn-Banach, temos a seguinte expressão para a norma de um vetor em um espaço normado.

Proposição. *Seja E um espaço normado. Então, para um fixado $x \in E$, temos*

$$\|x\| = \sup_{f \in E' \setminus \{0\}} \frac{|f(x)|}{\|f\|_\infty}$$

tal que $\|f\|_\infty$ é a norma definida em (2.9).

Demonstração. Seja E um espaço normado. Provaremos a igualdade através de duas desigualdades. Por um lado, observe que, fixado $x \in E$, temos $\forall f \in E'$,

$$|f(x)| \leq \|f\|_\infty \|x\|.$$

Consequentemente,

$$\sup_{f \in E' \setminus \{0\}} \frac{|f(x)|}{\|f\|_\infty} \leq \|x\|. \quad (7)$$

Para a outra desigualdade, fixado $x \in E$, consideremos $G = [x]$. Obviamente, $G \subsetneq E$. Note que $y \in G$ implica em $y = \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Seja $f_0(y) = f_0(\alpha x) := \alpha \|x\|^2$. Inicialmente, note que f_0 é um operador linear e limitado. De fato, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ e $\forall y, z \in E$, temos que

$$\begin{aligned} f_0(ay + bz) &= f_0(ay + bz) = f_0(a\alpha x + b\beta x) = f_0([a\alpha + b\beta]x) = [a\alpha + b\beta]\|x\|^2 \\ &= a\alpha\|x\|^2 + b\beta\|x\|^2 = af_0(\alpha x) + bf_0(\beta x) = af_0(y) + bf_0(z). \end{aligned}$$

Vejamos agora que f_0 é limitado. De fato,

$$|f_0(y)| = |f_0(\alpha x)| = |\alpha|\|x\|^2 = |\alpha|\|x\|\|x\| = C\|y\|$$

com $C = \|x\|$. Logo, $f_0 \in G'$. Mais ainda, tomando $\gamma \geq 0$, temos que

$$p(y) := \gamma \|x\| \|y\|$$

é um funcional de Minkowski que domina o funcional f_0 . Desse modo, pelo Teorema de Hahn-Banach, existe um funcional linear f que estende f_0 em todo o espaço E .

Por fim, observe

$$\|f_0\|_\infty = \sup_{y \in E \setminus \{0\}} \frac{|f_0(y)|}{\|y\|} = \sup_{y \in E \setminus \{0\}} \frac{|f_0(\alpha x)|}{\|\alpha x\|} = \sup_{y \in E \setminus \{0\}} \frac{|\alpha| \|x\|^2}{\alpha \|x\|} = \sup_{y \in E \setminus \{0\}} \|x\| = \|x\|.$$

Assim, como consequência do Teorema 2.5, temos

$$\|y\| = \frac{|f_0(y)|}{\|f_0\|_\infty} \leq \sup_{f \in E' \setminus \{0\}} \frac{|f(y)|}{\|f\|_\infty}. \quad (8)$$

Portanto, por (7) e (8) conclui-se que

$$\|x\| = \sup_{f \in E' \setminus \{0\}} \frac{|f(x)|}{\|f\|_\infty}$$

mostrando a igualdade desejada. ■

3 Espaços de Hilbert

O estudo de espaços com produto interno é de grande relevância na matemática, especialmente na análise funcional e em diversas aplicações da física e da engenharia. Esses espaços, também conhecidos como espaços pré-Hilbert, permitem a definição de conceitos fundamentais como ortogonalidade, projeções e ângulos entre vetores. A estrutura adicional fornecida pelo produto interno possibilita uma análise mais rica e precisa do comportamento de funções e operadores, além de ser essencial para o desenvolvimento de métodos numéricos, como os baseados em séries de Fourier. Em contextos mais avançados, esses espaços servem como base para a definição dos Espaços de Hilbert, que desempenham um papel central na formulação matemática da mecânica quântica e na teoria das equações diferenciais parciais.

3.1 Definição e Exemplos

Definição 3.1 (Espaço com Produto Interno). Seja H um espaço vetorial real. Um *produto interno* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é uma aplicação

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

que satisfaz as seguintes condições:

- i. $\langle x, x \rangle \geq 0$, $\forall x \in H$ e, em particular, $\langle x, x \rangle = 0$ se, e somente se, $x = \mathbf{0}$.
- ii. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$, $\forall x, y \in H$.
- iii. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$, $\forall x, y, z \in H$.
- iv. $\langle \beta x, y \rangle = \beta \langle x, y \rangle$, $\forall x, y \in H$ e $\forall \beta \in \mathbb{R}$.

Chamamos de *espaço com produto interno* o espaço vetorial H cujo produto interno atende às condições listadas acima. Notamos formalmente por $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, ou simplesmente por H , sempre que não houver ambiguidade quanto ao produto interno em questão.

Exemplo 3.1. $\mathbb{R}^n$ é espaço com produto interno, cujo produto interno é

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i .$$

Exemplo 3.2. l^p é um espaço com produto interno, cujo produto interno é

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n y_n$$

desde que $p = 2$. Se $p \neq 2$, então l^p não será um espaço com produto interno, como veremos a seguir.

Exemplo 3.3. $L^p(I)$ é espaço com produto interno, cujo produto interno é

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$$

desde que $p = 2$. Se $p \neq 2$, então $L^p(I)$ não será um espaço com produto interno.

Observação 3.1. Um produto interno define de forma natural uma norma definida por

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Neste caso, dizemos que a norma é induzida pelo produto interno (ou que o produto interno induz a norma).

Teorema 3.1 (Cauchy-Schwarz). *Seja H um espaço com produto interno. A seguinte desigualdade é válida:*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|, \quad \forall x, y \in H$$

e, em particular,

$$|\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\| \iff x = \lambda y, \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Observação 3.2. A Desigualdade de Cauchy-Schwarz, enunciada no teorema acima, é o caso particular $p = q = 2$ da Desigualdade de Hölder, enunciada no Lema 2.3.

Definição 3.2 (Espaço de Hilbert). Seja H um espaço com produto interno. Dizemos que H é um *Espaço de Hilbert*, se H for completo.

Como todo produto interno induz uma norma, fato enunciado na Observação 3.1, temos que todo espaço de produto interno é um espaço normado, com respeito ao produto interno que induz a métrica. Mais ainda, em particular, todo espaço de Hilbert é um espaço de Banach, uma vez que a completude do espaço é também estendida com a métrica induzida pela respectiva norma.

3.2 Geometria dos espaços com produto interno

Lema 3.1 (Identidade do Paralelogramo). *Em um espaço H com produto interno, a seguinte identidade é válida:*

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 = \frac{1}{2} [\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2], \quad \forall x, y \in H.$$

Lema 3.2 (Identidade de Polarização). *Em um espaço H com produto interno, a seguinte identidade é válida:*

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} [\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2], \quad \forall x, y \in H.$$

Exemplo 3.4. O espaço normado $C[0, 1]$ com a norma $\|\cdot\|_\infty$ definida no Exemplo 2.7 não configura um espaço com produto interno por não satisfazer o Lema 3.1. Para verificar o fato, basta considerar as funções $f(t) = 1$ e $g(t) = t$. Note que $\|f\|_\infty = 1$, $\|g\|_\infty = 1$, $\|f + g\|_\infty = 2$, $\|f - g\|_\infty = 1$. Aplicando na identidade do paralelogramo, temos

$$1^2 + 1^2 = \frac{1}{2} [2^2 + 1^2] \\ 4 \neq 5$$

Exemplo 3.5. Como dito acima, o espaço normado l^p não será um espaço com produto interno, quando $p \neq 2$. Novamente, o Lema 3.1 não é satisfeito. Para isso, sejam as sequências $x = (1, 1, 0, 0, \dots)$, $y = (1, -1, 0, 0, \dots)$. Note que $x + y =$

$(2, 0, 0, 0, \dots)$, $x - y = (0, -2, 0, 0, \dots)$. Veja que

$$\|x\|_p = \|y\|_p = (1^p + |-1|^p + 0 + 0 + \dots)^{\frac{1}{p}} = (2 \cdot 1^p)^{\frac{1}{p}} = 2^{\frac{1}{p}}$$

$$\|x + y\|_p = \|x - y\|_p = (2^p)^{\frac{1}{p}} = 2$$

Aplicando na identidade do paralelogramo, temos

$$\left(2^{\frac{1}{p}}\right)^2 + \left(2^{\frac{1}{p}}\right)^2 = \frac{1}{2}[2^2 + 2^2].$$

Portanto, é necessário que $p = 2$, caso contrário, a igualdade não ocorrerá e l^p não será um espaço com produto interno.

Definição 3.3 (Ortogonalidade). Sejam H um espaço com produto interno e $x, y \in H$. Diremos que x é *ortogonal* (ou *perpendicular*) a y se

$$\langle x, y \rangle = 0.$$

Notação: $x \perp y$.

Teorema 3.2 (Soma Direta). *Sejam H um espaço de Hilbert e $Y \subseteq H$ um subespaço vetorial fechado qualquer. Então:*

$$H = Y \oplus Y^\perp.$$

Teorema 3.3 (Bessel). *Sejam H um espaço de Hilbert e (e_n) uma sequência ortonormal. Então, para todo $x \in H$, temos que*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Demonstração. Inicialmente, fixemos um número arbitrário $k \in \mathbb{N}$. Assim, seja $M = [e_1, e_2, \dots, e_k]$ um conjunto ortonormal em H . Veja que $x \in H$, mas x não necessariamente é um elemento de M . Mas, podemos considerar $y \neq \mathbf{0}$ tal que $y \in M$, isto é, $y = \sum_{i=1}^k \langle x, e_i \rangle e_i$. Então, definamos $z \in H$ tal que $x = y + z$, ou seja, $z = x - y$.

Queremos mostrar que $z \perp y$. Note que, por ortogonalidade, temos

$$\begin{aligned}\|y\|^2 = \langle y, y \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^k \langle x, e_i \rangle e_i, \sum_{j=1}^k \langle x, e_j \rangle e_j \right\rangle \\ &= \langle \langle x, e_1 \rangle e_1 + \cdots + \langle x, e_k \rangle e_k, \langle x, e_1 \rangle e_1 + \cdots + \langle x, e_k \rangle e_k \rangle .\end{aligned}$$

Veja que $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ são elementos ortonormais, isto é,

$$e_i e_j = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Consequentemente,

$$\|y\|^2 = \sum_{i=1}^k \langle x, e_i \rangle^2$$

Agora, observe que

$$\langle x, y \rangle = \left\langle x, \sum_{i=1}^k \langle x, e_i \rangle e_i \right\rangle = \langle x, \langle x, e_1 \rangle e_1 + \cdots + \langle x, e_k \rangle e_k \rangle = \sum_{i=1}^k \langle x, e_i \rangle^2 = \|y\|^2 .$$

Note que $\langle z, y \rangle = 0$. De fato,

$$\langle z, y \rangle = \langle x - y, y \rangle = \langle x, y \rangle - \langle y, y \rangle = 0 .$$

Como $y \perp z$, vale o Teorema de Pitágoras. Logo,

$$\|z\|^2 = \|x\|^2 - \|y\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^k \langle x, x_i \rangle^2 \geq 0$$

o que implica em

$$\|x\|^2 \geq \sum_{i=1}^k \langle x, x_i \rangle^2 .$$

Note que todo o nosso raciocínio independe de k . Portanto, fazendo $k \rightarrow +\infty$, temos a

desigualdade de Bessel

$$\|x\|^2 = \lim_{k \rightarrow +\infty} \|x\|^2 \geq \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^k \langle x, x_i \rangle^2 = \sum_{i=1}^{+\infty} \langle x, x_i \rangle^2$$

e isto conclui a prova. ■

Teorema 3.4 (Projeção). *Sejam H um espaço de Hilbert e $M \subseteq H$ um subconjunto convexo, fechado e não vazio de H . Então, para cada $x \in H$, existe um único $y_x \in M$ tal que*

$$\|x - y_x\| = \inf_{y \in M} \|x - y\|.$$

Demonstração. Mostremos inicialmente que existe $y_x \in M$, denominado projeção ortogonal do elemento x no subconjunto M .

Existência: Fixado $x \in H$, definamos $L := \inf_{y \in M} \|x - y\|$. Note que, $\forall n \in \mathbb{N}$, temos que $L + \frac{1}{n}$ não é cota inferior de M . Isto é, existe $y_n \in M$ tal que

$$L \leq \|x - y_n\| < L + \frac{1}{n}.$$

Afirmamos que $(y_n) \rightarrow y_x$. E, devido ao fato de M ser fechado, é imediato que $y_x \in M$. Para mostrar que (y_n) converge para y_x , basta mostrar que essa sequência é de Cauchy, pois H é completo. Desse modo, queremos mostrar que, $\forall \varepsilon > 0$, temos que $\|y_n - y_m\| < \varepsilon$, $\forall n, m \geq n_0$. De fato, usando a identidade do paralelogramo, temos que

$$\|y_n - y_m\|^2 = 2 [\|y_n\|^2 + \|y_m\|^2] - \|y_n + y_m\|^2.$$

Agora, observe que

$$\|y_n - y_m\|^2 = \|y_n - x + x - y_m\|^2 = \|(y_n - x) - (y_m - x)\|^2.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\|y_n - y_m\|^2 &= \|(y_n - x) - (y_m - x)\|^2 \\ &= 2 [\|y_n - x\|^2 + \|y_m - x\|^2] - \|y_n + y_m - 2x\|^2 \\ &= 2 [\|y_n - x\|^2 + \|y_m - x\|^2] - 4 \left\| \frac{y_n + y_m}{2} - x \right\|^2\end{aligned}$$

Por hipótese, M é um subconjunto convexo. Logo,

$$[(1-t)y_n + ty_m] \in M, \quad \forall t \in [0, 1].$$

Tomando $t = \frac{1}{2}$, temos $\frac{y_n + y_m}{2} \in M$. Mais ainda, $\forall n, m \geq n_0$, vale

$$\|y_n - y_m\|^2 < 2 \left(L + \frac{1}{n} \right)^2 + 2 \left(L + \frac{1}{m} \right)^2 - 4L^2.$$

Ao tomar $n, m \rightarrow \infty$, temos que $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, que $\frac{1}{m} \rightarrow 0$ e que $\|y_n - y_m\|^2 \rightarrow 0$. Consequentemente, $\|y_n - y_m\| \rightarrow 0$, concluindo que (y_n) é de Cauchy, e converge para um certo elemento y_x do subconjunto fechado M .

Unicidade: Suponhamos que existam $y_x, z_x \in M$ tais que

$$\|x - y_x\| = \|x - z_x\| = L = \inf_{w \in M} \|x - w\|.$$

Pela identidade do paralelogramo, temos que

$$\begin{aligned}\|y_x - z_x\|^2 &= \|(y_x - x) - (z_x - x)\|^2 \\ &= 2 [\|y_x - x\|^2 + \|z_x - x\|^2] - \|y_x + z_x - 2x\|^2 \\ &= 2L^2 + 2L^2 - 4 \left\| \frac{y_x + z_x}{2} - x \right\|^2.\end{aligned}$$

De novo, note que $\left\| \frac{y_x + z_x}{2} - x \right\| \geq L$ implica que

$$\|y_x - z_x\|^2 \leq 4L^2 - 4L^2 = 0.$$

Por outro lado, obviamente, $\|y_x - z_x\|^2 \geq 0$. Daí, conclui-se que $\|y_x - z_x\|^2 = 0$,

consequentemente, $y_x = z_x$, concluindo a demonstração. ■

3.3 Teorema da Representação de Riesz

O Teorema da Representação de Riesz é um dos pilares da análise funcional, especialmente no estudo de espaços de Hilbert. Ele afirma que todo funcional linear limitado sobre um espaço de Hilbert pode ser representado como um produto interno da própria variável do funcional linear com um vetor fixo desse espaço, o qual independe da incógnita em questão.

Isso significa que há uma correspondência direta entre funcionais lineares limitados e elementos do próprio espaço, o que simplifica enormemente o estudo de operadores e dualidades. Essa representação fornece uma maneira concreta de entender o espaço dual de um espaço de Hilbert, além de ser essencial na formulação de problemas variacionais, no estudo de equações diferenciais e em diversas aplicações na física matemática e engenharia.

Teorema 3.5 (Dimensão Finita). *Se H é um espaço de Hilbert de dimensão finita e $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ é um funcional linear, então existe um único $z \in H$ tal que*

$$f(x) = \langle x, z \rangle, \quad \forall x \in H.$$

Demonstração. De fato, se $\dim H = n$, então $H = [e_1, e_2, \dots, e_n]$. Sem perda de generalidade, podemos considerar $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ uma base ortonormal, pois, se não o fosse, poderíamos ortogonalizá-la pelo mecanismo de Gram-Schmidt. Daí, bastaria considerar H gerada pela base ortogonalizada a partir de $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$.

Assim, $\forall x \in H$, temos que $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. Veja que,

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i f(e_i), \sum_{i=1}^n e_i f(e_i) \right\rangle = \langle x, z \rangle$$

onde

$$z = \sum_{i=1}^n e_i f(e_i).$$

Quanto à unicidade, a demonstração é idêntica para o caso de dimensão infinita

e será exibida abaixo. ■

No que se segue, veremos que tal teorema é válido também em dimensão infinita, desde que f seja um funcional linear limitado.

Teorema 3.6 (Riesz). *Todo funcional linear limitado $f \in H'$ pode ser representado através de um produto interno em um espaço de Hilbert H , isto é,*

$$f(x) = \langle x, z \rangle, \quad \forall x \in H$$

para um determinado $z \in H$ dependente apenas de f . Mais ainda: $\|z\| = \|f\|$.

Demonstração. Demonstramos acima o teorema para o caso do espaço H ser de dimensão finita. Trataremos agora o caso da dimensão de H não ser finita.

Unicidade: Suponhamos que $f(x) = \langle x, z \rangle = \langle x, w \rangle$, tais que $z \neq w$.

$$\langle x, z \rangle = \langle x, w \rangle \implies \langle x, z \rangle - \langle x, w \rangle = \langle x, z - w \rangle = 0, \quad \forall x \in H.$$

Escolhamos especificamente $x = z - w \neq \mathbf{0}$. Assim,

$$\langle z - w, z - w \rangle = \|z - w\|^2 = 0 \implies z - w = \mathbf{0} \implies z = w$$

o que é uma contradição. Portanto, obrigatoriamente, temos que $z = w$, como gostaríamos. Veja que tal demonstração independe da dimensão de H , ou seja, é válida para H de dimensão finita ou infinita.

Existência: Se $f \equiv 0$, então basta tomar $z = \mathbf{0}$.

Se $f \neq 0$, então $\exists y \in H$ tal que $f(y) \neq 0$. Consequentemente, $y \notin \ker(f)$, mas $y \in \ker(f)^\perp$ pois, pelo Teorema 3.2, temos que $H = \ker(f) \oplus \ker(f)^\perp$, uma vez que $\ker(f)$ é um subespaço fechado.

De fato, seja (x_i) uma sequência tal que $x_i \in \ker(f)$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Suponhamos que $(x_i) \rightarrow x_0$. Sendo $f \in H'$, temos que f é contínuo.

Logo, $[(x_i) \rightarrow x_0] \implies [f(x_i) \rightarrow f(x_0)]$, mas $f(x_i) = 0$, pois $(x_i) \in \ker(f)$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Daí, $f(x_0) = 0$. Portanto, $\ker(f)$ é fechado, como gostaríamos.

Assim, $f(x) = \langle x, y \rangle = 0$, $\forall x \in \ker(f)^\perp$ e $\forall y \in \ker(f)$.

Fixemos $w \in \ker(f)^\perp \subseteq H$, $w \neq \mathbf{0}$.

Desse modo, $f(w) = \langle w, y \rangle = 0$. Definamos

$$v = f(x)w - f(w)x.$$

Devido à linearidade de f , veja que $f(v) = f(x)f(w) - f(w)f(x) = 0$. Consequentemente, $v \in \ker(f)$, logo, $\langle v, w \rangle = 0$. Portanto,

$$\langle v, w \rangle = \langle f(x)w - f(w)x, w \rangle = f(x)\langle w, w \rangle - f(w)\langle x, w \rangle = 0.$$

Daí,

$$\langle x, z \rangle = f(x) = f(w) \frac{\langle x, w \rangle}{\|w\|^2} = \left\langle x, \frac{f(w)}{\|w\|^2} w \right\rangle.$$

com

$$z = \left(\frac{f(w)}{\|w\|^2} \right) w, \quad w \in \ker(f)^\perp,$$

como gostaríamos.

Por fim, vamos provar que $\|f\|_\infty = \|z\|$.

De fato, utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos que

$$|f(x)| = |\langle x, z \rangle| \leq \|x\| \|z\|.$$

Logo, $\forall x \in H$, com $x \neq \mathbf{0}$, temos que

$$\frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq \|z\|.$$

Consequentemente,

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in E \setminus \{\mathbf{0}\}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq \|z\|. \quad (9)$$

Por outro lado, observe que $f(z) = \langle z, z \rangle = \|z\|^2$, logo,

$$\|z\|^2 = f(z) \leq |f(z)| \leq \sup_{z \in E \setminus \{\mathbf{0}\}} |f(z)| \leq \|f\|_\infty \|z\|.$$

Donde conclui-se que

$$\|z\| \leq \|f\|. \quad (10)$$

Portanto, devido a (9) e (10), tem-se $\|f\| = \|z\|$, como gostaríamos. ■

Observação 3.3. Fixemos $z \in H$. Definamos

$$\varphi(x) := \langle x, z \rangle \quad \forall x \in H.$$

Note que φ é um funcional linear. De fato,

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha x + \beta y) &= \langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \langle \alpha x, z \rangle + \langle \beta y, z \rangle \\ &= \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle = \alpha \varphi(x) + \beta \varphi(y). \end{aligned}$$

E que φ é um funcional limitado. De fato, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos que

$$|\varphi(x)| = |\langle x, z \rangle| \leq \|x\| \|z\|.$$

Uma vez que x é um elemento fixo, temos $\|x\|$ constante.

Corolário 3.1. *Se H é um espaço de Hilbert, então H' também o é.*

Demonstração. De fato, sejam $f, g \in H'$. Pelo Teorema da Representação de Riesz, existem $u, v \in H$ tais que

$$f(x) = \langle x, u \rangle \quad \text{e} \quad g(x) = \langle x, v \rangle$$

com

$$\|f\| = \|u\| \quad \text{e} \quad \|g\| = \|v\|.$$

Definamos

$$\langle f, g \rangle_{H'} := \langle u, v \rangle.$$

Por fim, veja que

$$\langle f, f \rangle_{H'} = \langle u, u \rangle = \|u\|^2 = \|f\|^2.$$

Consequentemente,

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle_{H'}}.$$

Portanto, como o produto interno definido para H' induz uma norma, logo, H' é espaço de produto interno. Mais ainda, H' é completo pois sua completude é herdada de H . ■

3.4 Espaços Reflexivos

O estudo dos espaços reflexivos é de grande importância na análise funcional, pois esses espaços apresentam propriedades estruturais que facilitam a análise de sequências e operadores.

Um espaço normado é dito reflexivo quando é isometricamente isomorfo ao seu bidual, o que implica, entre outras coisas, que toda sequência limitada possui uma subsequência fracamente convergente. Essa característica torna os espaços reflexivos especialmente adequados para o estudo de problemas variacionais e para a aplicação de métodos funcionais em equações diferenciais e integrais. Além disso, a reflexividade garante condições favoráveis à compacidade e à continuidade de operadores, sendo, portanto, uma ferramenta fundamental em diversas aplicações teóricas e práticas da matemática.

Definição 3.4 (Espaço Bidual). Seja E espaço normado. O espaço vetorial

$$\mathcal{L}(E', \mathbb{R}) := \{f : E' \rightarrow \mathbb{R} \ ; \ f \text{ é um funcional linear limitado}\}$$

é um espaço normado, cuja norma é

$$\|T\| := \sup_{f \in E' \setminus \{0\}} \frac{|T(f)|}{\|f\|_\infty}$$

para um fixado $x \in E$. Denominamos $\mathcal{L}(E', \mathbb{R})$ como o *espaço bidual contínuo* ou, simplesmente, *espaço bidual*. Notação: $\mathcal{L}(E', \mathbb{R}) = E''$.

Definição 3.5 (Espaços Reflexivos). Seja E um espaço normado. Diremos que E é um *espaço reflexivo* se a aplicação canônica

$$\begin{aligned} J : E &\rightarrow E'' \\ x &\mapsto J_x(f) = J(f(x)) = f(x) \end{aligned}$$

for sobrejetiva $\forall f \in E'$, dado um fixado $x \in E$.

Teorema 3.7. *Todo espaço de Hilbert é reflexivo.*

Demonstração. Seja $\varphi \in H''$. Pelo Teorema da Representação de Riesz, existe $g \in H'$

tal que

$$\varphi(f) = \langle f, g \rangle \quad \forall f \in H'.$$

Novamente, pelo Teorema de Riesz, $\exists u, z \in H$, tais que, $\forall x \in H$, temos que

$$g(x) = \langle x, u \rangle \quad \text{e} \quad f(x) = \langle x, z \rangle.$$

Por fim, utilizando o produto interno definido em (3.1), temos que

$$\langle g, f \rangle_{H'} = \langle u, z \rangle = f(u) = J_u(f).$$

Com tal sorte que φ é fixo, porém arbitrário, basta considerar $\varphi = J_u$ e perceber que o raciocínio é válido para qualquer $\varphi \in H''$. Portanto, a aplicação canônica J é sobrejetiva, donde conclui-se que H é reflexivo, como queríamos. ■

Existe uma maneira de demonstrar a reflexividade de um espaço sem apelar à definição, isto é, sem precisar mostrar a sobrejetividade da aplicação canônica definida em (3.5). Para tal, vamos definir o que é um espaço uniformemente convexo, condição suficiente para que o Teorema de Milman-Pettis possa ser enunciado.

Definição 3.6. Seja E um espaço de Banach. Diremos que E é *uniformemente convexo* se, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, tal que, dados $x, y \in E$ com $\|x\| \leq 1$ e $\|y\| \leq 1$, temos que

$$[\|x - y\| > \varepsilon] \implies \left[\left\| \frac{x + y}{2} \right\| < 1 - \delta \right].$$

Exemplo 3.6. A norma euclideana $\|x\|_2 = (|x_1|^2 + |x_2|^2)^{\frac{1}{2}}$ é uniformemente convexa em $\mathbb{R}^2$, enquanto a norma $\|x\|_\infty = \sup\{|x_1|, |x_2|\}$ não é uniformemente convexa no mesmo espaço.

Teorema 3.8 (Milman-Pettis). *Todo espaço de Banach uniformemente convexo é reflexivo.*

Uma consequência imediata do importante teorema de Milman-Pettis é verificar a reflexividade em espaços de Hilbert, pois, como todo espaço de Hilbert também é um espaço de Banach, nos restaria mostrar que, se H é uniformemente convexo, então ele é reflexivo. Faremos isto na demonstração do corolário abaixo.

Corolário 3.2. *Todo espaço de Hilbert é reflexivo.*

Demonstração. Seja H um espaço de Hilbert. Queremos mostrar que H é uniformemente convexo. Para tal, usaremos a identidade apresentada no Lema 3.1. Assim, suponhamos $\|x\| \leq 1$ e $\|y\| \leq 1$. Logo,

$$\|x - y\|^2 + \|x + y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \leq 4.$$

Suponhamos $\|x - y\| > \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$. Consequentemente,

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &< 4 - \varepsilon^2 \\ \left\|\frac{x + y}{2}\right\|^2 &< 1 - \frac{\varepsilon^2}{4} \\ \left\|\frac{x + y}{2}\right\| &< \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}} = 1 - 1 + \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}} \\ \left\|\frac{x + y}{2}\right\| &< 1 - \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}}\right)\end{aligned}$$

Afirmção: $\delta = 1 - \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}} > 0$, $\forall 0 < \varepsilon \leq 2$.

Portanto, H é um espaço uniformemente convexo. Consequentemente, pelo Teorema 3.8, é reflexivo, como gostaríamos. ■

4 Aplicação

Nesta seção, nosso objetivo será aplicar o Teorema da Representação de Riesz para obter a existência de solução fraca para o problema de Dirichlet.

4.1 A desigualdade de Poincaré

A desigualdade de Poincaré é uma ferramenta fundamental na análise funcional, especialmente no estudo dos espaços de Sobolev. Ela majora a norma da função pelas normas de suas derivadas, desde que certas condições sejam satisfeitas, como o fato de a função se anular na fronteira do domínio.

Esse resultado é essencial para o tratamento de Equações Diferenciais Parciais (EDPs), especialmente aquelas com condições de fronteira, como o Problema de Dirichlet (11), pois garante propriedades como existência, unicidade e continuidade de soluções em formulações variacionais.

Em formulações fracas de EDPs (usando métodos variacionais), ela é necessária para garantir que o funcional energia é coercivo (ou seja, cresce suficientemente para garantir a existência de minimizadores).

Além disso, é amplamente utilizada para demonstrar compacidade, convergência de sequências de funções e a coerção de funcionais em métodos de energia.

É uma ferramenta crucial para provar que certas sequências de funções são limitadas ou convergentes em alguns sentidos.

Neste trabalho, ela servirá para solucionarmos o problema de Dirichlet na reta.

Teorema 4.1 (Poincaré). *Sejam $I = (a, b)$ um intervalo real e $u \in C_0^\infty(I)$. Então, existe uma constante real $C > 0$ que satisfaz a seguinte desigualdade:*

$$\|u\|_2 \leq C \|u'\|_2, \quad \forall u \in L^2(I).$$

Demonstração. Sabe-se que

$$\|u\|_2^2 = \int_a^b u^2(t) dt.$$

Assim, multipliquemos a função $u^2(t)$ por t e calculemos a integral

$$\int_a^b [u^2(t)t]' dt .$$

Por um lado, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\int_a^b [u^2(t)t]' dt = [u^2(t)t]_a^b = [u^2(b)b] - [u^2(a)a] = 0 \cdot b - 0 \cdot a = 0 .$$

Por outro lado, temos

$$\int_a^b [u^2(t)t]' dt = \int_a^b [2u(t)u'(t)t + u^2(t)] dt .$$

Logo,

$$0 = \int_a^b [u^2(t)t]' dt = \int_a^b [2u(t)u'(t)t + u^2(t)] dt = \int_a^b 2u(t)t dt + \int_a^b u^2(t) dt .$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \int_a^b u^2(t) dt &= -2 \int_a^b [u(t)u'(t)t] dt \\ \left| \int_a^b u^2(t) dt \right| &= \left| -2 \int_a^b [u(t)u'(t)t] dt \right| \leq 2 \int_a^b |u(t)||u'(t)||t| dt \end{aligned}$$

Note que, $a \leq t \leq b$ implica em $|t| \leq \max\{|a|, |b|\}$. Tomando $c = \max\{|a|, |b|\}$, temos

$$\left| \int_a^b u^2(t) dt \right| \leq C \int_a^b |u(t)||u'(t)| dt$$

com $C = 2c$. Desse modo, pela Desigualdade de Hölder, temos

$$\left| \int_a^b |u(t)|^2 dt \right| \leq C \left(\int_a^b |u(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |u'(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Por fim,

$$\left(\int_a^b |u(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \left(\int_a^b |u'(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

concluindo a demonstração. ■

Definição 4.1 (Derivada fraca). Seja uma função $u \in L^1_{loc}(I)$. Dizemos que u tem derivada fraca se existir $v \in L^1_{loc}(I)$ tal que

$$\int_a^b u(t)\varphi'(t)dt = - \int_a^b v(t)\varphi(t)dt, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(a, b).$$

Usaremos a notação $v = u'$ para denotar a derivada fraca de u .

Observação 4.1. Usando integração por partes, podemos verificar que toda função que tem derivada (no sentido clássico) também tem derivada fraca. Mais ainda: a sua derivada fraca coincide com a sua derivada clássica.

De fato, uma vez que u é derivável, no sentido clássico, veja, pela regra do produto, temos

$$[u(t)\varphi(t)]' = u'(t)\varphi(t) + u(t)\varphi'(t).$$

Aplicando a integral em ambos os lados, e usando integração por partes e o Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\begin{aligned} \int_a^b [u(t)\varphi(t)]' dt &= \int_a^b [u'(t)\varphi(t) + u(t)\varphi'(t)] dt \\ u(b)\varphi(b) - u(a)\varphi(a) &= \int_a^b u'(t)\varphi(t) dt + \int_a^b u(t)\varphi'(t) dt \\ 0 &= \int_a^b u'(t)\varphi(t) dt + \int_a^b u(t)\varphi'(t) dt \\ - \int_a^b u'(t)\varphi(t) dt &= \int_a^b u(t)\varphi'(t) dt. \end{aligned}$$

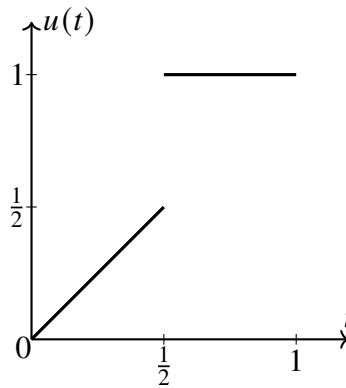
Entretanto, a recíproca não é verdadeira; para isto, basta considerar $u(t) = |t|$, que não possui derivada, no sentido clássico, mas sua derivada fraca existe e é dada

$$v(t) = \begin{cases} -1, & \text{se } -\infty < t < 0 \\ 1, & \text{se } 0 < t < +\infty \end{cases}$$

Exemplo 4.1. Definamos a função

$$u(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} \leq t < 1. \end{cases}$$

Seu gráfico está desenhado abaixo. Essa função não possui derivada fraca.



Mais geralmente, toda função que possuir saltos, como representado no gráfico do exemplo acima, não vai admitir derivada fraca.

Definição 4.2 (Espaço de Sobolev). Seja $u \in L^2(I)$. Definimos o *espaço de Sobolev* como o conjunto de todas as funções u que possuem derivada fraca. Mais formalmente:

$$H^1(I) := \left\{ u ; \exists v \in L^2(I) \text{ tal que } \int_a^b u(t) \varphi'(t) dt = - \int_a^b v(t) \varphi(t) dt, \forall \varphi \in C_0^\infty \right\}.$$

Observação 4.2. O espaço de Sobolev $H^1(I)$ munido do produto interno

$$\langle u, \varphi \rangle := \int_a^b [u'(t) \varphi'(t) + u(t) \varphi(t)] dt$$

é um espaço de Hilbert, cuja norma é dada por

$$\|u\| = \left(\int_a^b (|u'|^2 + |u|^2) dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

4.2 O problema de Dirichlet

Nesta subseção aplicaremos o Teorema da Representação de Riesz para obter resultados acerca da existência de solução fraca para o seguinte problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} -u''(t) + u(t) = f(t), & \forall t \in (a, b) \\ u(a) = 0 = u(b) \end{cases} \quad (11)$$

Definição 4.3 (Solução fraca). Uma função $u \in H_0^1$ é dita uma *solução fraca* de (11) quando

$$\int_a^b [u'(t)\varphi'(t) + u(t)\varphi(t)]dt = \int_a^b f(t)\varphi(t)dt, \quad \forall \varphi \in H_0^1(a, b).$$

Observação 4.3. Toda solução clássica é solução fraca. De fato, multipliquemos a equação pela função teste $\varphi(t)$ e integrando obtemos

$$-\int_a^b [u''(t)\varphi(t)]dt + \int_a^b [u(t)\varphi(t)]dt = \int_a^b [f(t)\varphi(t)]dt.$$

Por integração por partes, temos que

$$\int_a^b [u''(t)\varphi(t)]dt = \left([u'(t)\varphi(t)]|_a^b - \int_a^b u'(t)\varphi'(t)dt \right) = - \int_a^b u'(t)\varphi'(t)dt$$

uma vez que φ se anula para $t = a$ e $t = b$, por hipótese. Logo,

$$\int_a^b u'(t)\varphi'(t)dt + \int_a^b u(t)\varphi(t)dt = \int_a^b f(t)\varphi(t)dt,$$

e, portanto, u é solução fraca do Problema de Dirichlet.

Teorema 4.2 (Dirichlet). *Suponha que $f \in L^2(I)$. Então o problema (11) possui uma única solução fraca.*

Demonstração. Inicialmente, mostraremos que existe a solução $u \in H_0^1$. Considere o funcional $F : H_0^1(I) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$F(\varphi) = \int_a^b f(t)\varphi(t)dt.$$

Note que

$$|F(\varphi)| \leq \|f\|_2 \|\varphi\|_2.$$

Desse modo, note que o lado esquerdo da equação representa o produto interno do espaço de Hilbert H^1 . Logo, podemos definir o funcional linear limitado $F(\varphi) = \langle u, \varphi \rangle$ e, portanto, a função φ é única, uma vez que sua unicidade está garantida como consequência do Teorema **3.6** acima. ■

5 Considerações Finais

Esta monografia é baseada na pesquisa desenvolvida na Iniciação Científica, entre 01 de Setembro de 2024 e 31 de Agosto de 2025, período de um ano em que o Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros foi orientador do discente autor deste trabalho. Os resultados foram tão frutíferos que o tema da pesquisa foi aproveitado para este Trabalho de Conclusão de Curso.

Desse modo, é fundamental agradecer ao Conselho Nacional de Pesquisas (CNPq) pela bolsa PIBIC que fomentou financeiramente a IC, e à Universidade Federal da Paraíba (UFPB) pela infraestrutura e por todos os aparatos que propiciaram esse estudo.

Gostaria também de estender meus agradecimentos ao professor *Dr. João Antônio Miranda Gondim*, docente da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) que, com sua playlist de Análise Funcional no *YouTube*, foi um instrumento excepcional de ensino e aprendizado.

Este trabalho tem como fundamento a teoria da Análise Funcional, e seu desenvolvimento exigiu a abordagem de diferentes áreas da matemática. Dentre os principais tópicos abordados, destacam-se a Análise Real e a Álgebra Linear. A partir desse estudo, foi possível compreender a relevância da Análise Matemática e suas possíveis aplicações. No decorrer da pesquisa, exploramos um resultado significativo da Análise Funcional, que se aplica a outra área da matemática: a Teoria das Equações Diferenciais Parciais.

Conseguimos, assim, alcançar os objetivos inicialmente estabelecidos, ressaltando, porém, a distância entre os conceitos abordados neste trabalho e o currículo do curso de Licenciatura em Matemática.

Por fim, destaca-se que o desenvolvimento da pesquisa proporcionou amadurecimento matemático no discente e despertou sua vontade de seguir na carreira universitária. O próximo passo consiste em avançar para um nível superior de formação, com foco no aprofundamento da área estudada.

Referências

- [1] BOTELHO, Geraldo; PELLEGRINO, Daniel; TEIXEIRA, Eduardo. *Fundamentos da Análise Funcional*. SBM, 2015.
- [2] BREZIS, Haïm. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, 2010.
- [3] EVANS, Lawrence Craig. *Partial Differential Equations*. AMS, 2010.
- [4] KREYSZIG, Erwin. *Introductory functional analysis with applications*. New York: John Wiley & Sons, 1978.
- [5] LIMA, Elon Lages. *Curso de Análise - vol. 1*. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.