



Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Graduação em Física

# **Gravidade quântica a baixas energias: correções fenomenológicas da Mecânica Quântica**

Kelvin Costa Rocha Sampaio

João Pessoa - PB  
2025

Kelvin Costa Rocha Sampaio

# **Gravidade quântica a baixas energias: correções fenomenológicas da Mecânica Quântica**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal da Paraíba (UFPB), como requisito para obtenção do grau de Bacharel em Física.

Orientador: Iarley Pereira Lobo

**Catálogo na publicação**  
**Seção de Catalogação e Classificação**

S192g Sampaio, Kelvin Costa Rocha.

Gravidade quântica a baixas energias : correções  
fenomenológicas da mecânica quântica / Kelvin Costa  
Rocha Sampaio. - João Pessoa, 2025.  
58 p. : il.

Orientação: Iarley Pereira Lobo.

TCC (Curso de Bacharelado em Física) - UFPB/CCEN.

1. Gravidade quântica. 2. Equação de Schrödinger. 3.  
Violação da invariância de Lorentz. 4. Modificações  
estocásticas. 5. Fenomenologia. I. Lobo, Iarley  
Pereira. II. Título.

UFPB/CCEN

CDU 53(043.2)



Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Coordenação dos Cursos de Graduação em Física

Ata da Sessão Pública da Defesa do Trabalho de  
Conclusão de Curso de Bacharelado em Física, do  
discente Kelvin Costa Rocha Sampaio.

Aos 03 dias do mês de outubro do ano de 2025, às 14h, na sala 201 do Departamento de Física da UFPB, realizou-se a Sessão Pública da Defesa do Trabalho de Conclusão de Curso de Bacharelado em Física, do discente Kelvin Costa Rocha Sampaio, sendo a Banca Examinadora constituída pelos docentes Prof. Dr. Iarley Pereira Lobo (UFPB), orientador e presidente da banca, Prof. Dr. Fabio Leal de Melo Dahia e Prof. Dr. Albert Petrov. Dando início aos trabalhos, o professor orientador e presidente da banca examinadora comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, concedeu a palavra ao discente para que fizesse a explanação de seu Trabalho de Conclusão de Curso, intitulado "*Gravidade quântica a baixas energias: correções fenomenológicas da Mecânica Quântica*". Concluída a exposição, o discente foi arguido pelos membros presentes da Banca Examinadora. Após as arguições, a Banca, de comum acordo, declarou que o Trabalho apresentado foi aprovado com nota 10,0. E para constar, encerrada a sessão, lavrou-se esta ata que será assinada pelos presentes. João Pessoa, 03 de outubro de 2025.

Prof. Dr. Iarley Pereira Lobo  
UFPB – Orientador

Prof. Dr. Fabio Leal de Melo Dahia

Prof. Dr. Albert Petrov

*“O primeiro gole da taça da ciência faz de alguém um  
ateu, mas no fundo da taça Deus espera.”*

— Werner Heisenberg

# Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus, por me guiar, me acompanhar e me conceder a capacidade de seguir por esta área tão fascinante que é a Física.

Ao meu orientador, Professor Iarley, dedico meu mais sincero obrigado pela amizade e também paciência nesta jornada, por sua notável dedicação à ciência e por me apresentar a este campo de pesquisa, no qual tive a oportunidade de submeter um artigo ainda na graduação sob sua tutela.

Estendo meus agradecimentos a todos os professores do Departamento de Física da UFPB, que me guiaram na construção do conhecimento ao longo do curso. Em especial, sou grato ao Professor Charlie Salvador, que foi um amigo e mentor desde o início, e ao Professor Paulo Porfírio, pela amizade e pelas conversas inspiradoras.

Ao grupo de pesquisa e aos meus amigos de jornada, em especial a Arthur, Michele, Erick, Rafaelly, Maria Isabel, Hugo, Apollo, Fernanda, Carlos, Inês, Mateus, Alysson Dantas, Pedro e Rhuan, minha gratidão é imensa. As histórias e os motivos preencheriam um capítulo à parte, mas o essencial é que vocês sabem exatamente por que estão aqui. Compartilhamos muitas risadas, conversas, raivas, frustrações, mas ainda assim permanecemos e seguimos construindo nossa base nessa área maravilhosa e desafiadora. Muito obrigado!

Agradeço também à Universidade Federal da Paraíba (UFPB) e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), que possibilitaram minha formação com o indispensável suporte estrutural e financeiro.

Por fim, meu mais profundo agradecimento vai para minha família, por todo o apoio oferecido ao longo deste trajeto. Em especial, à minha noiva, Samara. Ela foi minha base mais forte nos momentos de maior necessidade, apoiando-me e erguendo-me nas dificuldades mesmo que, em muitos momentos, não soubesse, e ouvindo pacientemente inúmeras apresentações e aulas que eu fazia para ela, e que me ajudaram a consolidar meus conhecimentos.

Meus mais sinceros agradecimentos a todos.

# Resumo

Este estudo visa explorar como sistemas quânticos e fenômenos de descoerência impactam o campo da gravidade quântica, sublinhando a importância de modelos fenomenológicos que tentam unir efeitos em escalas microscópicas com previsões que podem ser observadas. A investigação inclui uma revisão dos princípios teóricos da mecânica quântica e da relatividade, enfatizando sugestões de modificações sistemáticas e estocásticas na cinemática inspiradas por cenários de gravidade quântica. Adicionalmente, são analisadas as consequências observacionais e as limitações dos modelos em questão, conectando a teoria formulada a possíveis efeitos que podem ser detectados em energias acessíveis. Os achados sugerem que, apesar de a gravidade quântica continuar sendo um desafio em aberto, análises fenomenológicas podem oferecer pistas significativas para investigações e experimentos futuros.

**Palavras-chave:** Gravidade Quântica, Equação de Schrödinger, Violação da Invariância de Lorentz, Modificações Estocásticas, Fenomenologia

# Abstract

This study aims to explore how quantum systems and decoherence characteristics impact the field of quantum gravity, highlighting the importance of phenomenological models that bridge microscopic-scale effects with observable observations. The research includes a review of the theoretical principles of quantum mechanics and relativity, emphasizing suggestions for systematic and stochastic modifications in kinematics inspired by quantum gravity scenarios. Furthermore, the observational consequences and limitations of the models in question are highlighted, connecting the formulated theory to possible effects that can be detected at accessible energies. The findings suggest that, although quantum gravity remains an open challenge, phenomenological analyses may offer interesting clues for future investigations and experiments.

**Keywords:** Quantum Gravity, Schrödinger Equation, Lorentz Invariance Violation, Stochastic Modifications, Phenomenology

# Lista de ilustrações

|                                                                                                                                                                                                                      |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 1 – Poço quadrado infinito com leve perturbação . . . . .                                                                                                                                                     | 23 |
| Figura 2 – A esfera de Bloch, seus estados de base e seus dois ângulos. . . . .                                                                                                                                      | 33 |
| Figura 3 – Evolução temporal da Concorrência $C(t)$ , obtida numericamente a partir da solução da equação mestra para um estado de Bell inicial ( $\hbar = 1$ , $t_{QG} = 1$ , $A_n = 1$ , $\epsilon = 5$ ). . . . . | 48 |

# Sumário

|                |                                                                               |           |
|----------------|-------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b>       | <b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>                                                   | <b>11</b> |
| <b>2</b>       | <b>RELATIVIDADE RESTRITA . . . . .</b>                                        | <b>13</b> |
| <b>2.1</b>     | <b>Equações de Hamilton na Forma Covariante . . . . .</b>                     | <b>14</b> |
| <b>3</b>       | <b>FENOMENOLOGIA DE GRAVIDADE QUÂNTICA . . . . .</b>                          | <b>17</b> |
| <b>3.1</b>     | <b>Gravitação Quântica em Baixas Energias . . . . .</b>                       | <b>17</b> |
| <b>3.2</b>     | <b>Relação de Dispersão Modificada . . . . .</b>                              | <b>19</b> |
| <b>4</b>       | <b>MECÂNICA QUÂNTICA . . . . .</b>                                            | <b>21</b> |
| <b>4.1</b>     | <b>Equação de Schrödinger . . . . .</b>                                       | <b>21</b> |
| <b>4.2</b>     | <b>Interpretação Estatística . . . . .</b>                                    | <b>22</b> |
| <b>4.3</b>     | <b>Teoria de Perturbação Independente do Tempo (Não Degenerada) . . . . .</b> | <b>22</b> |
| <b>4.4</b>     | <b>Equação de Schrödinger na Representação do Momento . . . . .</b>           | <b>25</b> |
| <b>4.5</b>     | <b>Quantizando a Hamiltoniana . . . . .</b>                                   | <b>26</b> |
| <b>4.6</b>     | <b>Correção dos Níveis de Energia . . . . .</b>                               | <b>26</b> |
| <b>5</b>       | <b>FORMALISMO DE SISTEMAS QUÂNTICOS ABERTOS . . . . .</b>                     | <b>29</b> |
| <b>5.1</b>     | <b>Emaranhamento . . . . .</b>                                                | <b>29</b> |
| <b>5.2</b>     | <b>Matriz Densidade e Estados Puros e Mistos . . . . .</b>                    | <b>31</b> |
| <b>5.2.1</b>   | <b>Definição formal . . . . .</b>                                             | <b>31</b> |
| <b>5.2.2</b>   | <b>Propriedades fundamentais . . . . .</b>                                    | <b>32</b> |
| <b>5.2.3</b>   | <b>Mistura versus superposição . . . . .</b>                                  | <b>32</b> |
| <b>5.2.4</b>   | <b>Exemplos . . . . .</b>                                                     | <b>33</b> |
| <b>5.3</b>     | <b>Coerência e o Processo de Descoerência . . . . .</b>                       | <b>33</b> |
| <b>5.4</b>     | <b>Equação de Liouville-von Neumann . . . . .</b>                             | <b>35</b> |
| <b>5.4.1</b>   | <b>Derivação da Equação de Liouville-von Neumann . . . . .</b>                | <b>35</b> |
| <b>5.5</b>     | <b>Equação Mestra de Lindblad . . . . .</b>                                   | <b>36</b> |
| <b>5.5.1</b>   | <b>Contexto Histórico e Motivação . . . . .</b>                               | <b>37</b> |
| <b>5.5.2</b>   | <b>Derivação Conceitual . . . . .</b>                                         | <b>37</b> |
| <b>5.5.3</b>   | <b>Propriedades Fundamentais . . . . .</b>                                    | <b>38</b> |
| <b>5.5.4</b>   | <b>Exemplos Ilustrativos . . . . .</b>                                        | <b>38</b> |
| <b>5.5.4.1</b> | <b>Átomo de Dois Níveis . . . . .</b>                                         | <b>38</b> |
| <b>5.5.4.2</b> | <b>Descoerência de Fase . . . . .</b>                                         | <b>38</b> |
| <b>6</b>       | <b>RESULTADOS E DISCUSSÕES . . . . .</b>                                      | <b>40</b> |
| <b>6.1</b>     | <b>Equação de Lindblad - Gravidade Quântica . . . . .</b>                     | <b>40</b> |

|     |                                                  |    |
|-----|--------------------------------------------------|----|
| 6.2 | Tempo de Descoerência . . . . .                  | 44 |
| 6.3 | Aplicação: Sistema de Dois Níveis . . . . .      | 45 |
| 7   | CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .                   | 50 |
|     | Bibliografia . . . . .                           | 52 |
|     | APÊNDICE A – CÓDIGO DO WOLFRAM MATHEMATICA . . . | 56 |

# 1 Introdução

A busca por uma teoria quântica da gravidade é um dos desafios mais significativos da física contemporânea. A relatividade geral, proposta por Albert Einstein [15], oferece uma descrição acurada da gravitação em escalas extensas, enquanto a mecânica quântica se aplica a fenômenos em escalas minuciosas. No entanto, essas duas teorias se tornam incompatíveis em condições extremas, como próximo a buracos negros e nos primeiros momentos do universo. Essa discordância teórica ressalta a necessidade de um referencial que possa unificar ambas as descrições dentro de um único formalismo coerente.

Várias propostas surgiram nas últimas décadas, incluindo a Teoria das Cordas [44], a Gravidade Quântica de Laços [34], e abordagens de espaço-tempo não comutativo [39]. Apesar dos avanços teóricos trazidos por essas iniciativas, ainda não há provas experimentais conclusivas para validá-las. Nesse contexto, a importância de estudos fenomenológicos se destaca, pois buscam investigar consequências observáveis da quantização do espaço-tempo, mesmo que de maneira indireta, através da análise de sistemas físicos que podem ser explorados em experimentos de laboratório ou em observações astrofísicas [2].

Nesse sentido, um dos enfoques investigados envolve a alteração das relações de dispersão relativísticas, que podem introduzir correções na dinâmica de partículas livres e provocar efeitos que podem ser medidos [42]. Essas mudanças afetam diretamente a equação de Schrödinger, possibilitando a construção de modelos de perturbação aplicáveis a sistemas quânticos simples, como o poço de potencial infinito [6]. Essa relação entre estruturas fundamentais e cenários experimentais oferece uma abordagem prática para investigar os possíveis efeitos da gravidade quântica.

Outro ponto importante é a descoerência quântica [18, 36], um fenômeno que explica a transição de um sistema de um estado de superposição para estados clássicos como resultado da interação com o ambiente. A investigação de correções gravitacionais nesse processo tem mostrado resultados promissores, sugerindo que a própria estrutura quântica do espaço-tempo poderia induzir mecanismos de perda de coerência, até mesmo em sistemas teoricamente isolados. Dessa forma, o exame do tempo de descoerência em diversas situações pode fornecer conexões experimentais valiosas [3, 32].

Assim, este estudo tem como objetivo investigar os efeitos de correções estocásticas na relação de dispersão, examinando suas implicações sobre a equação de Schrödinger e o comportamento de sistemas quânticos em condições não relativísticas. Para isso, foram revisados conceitos fundamentais de relatividade restrita, mecânica quântica e a fenomenologia da gravidade quântica, a fim de estabelecer uma base sólida que possibilite a união entre teoria e potenciais observações.

Além da análise teórica, são discutidos os resultados alcançados relacionados às

correções nos níveis de energia e suas consequências para períodos de descoerência em contextos quânticos, enfatizando restrições, oportunidades de generalização e visões para investigações futuras. A importância deste trabalho reside não apenas na contribuição conceitual, mas também na tentativa de conectar as formulações teóricas da gravidade quântica a fenômenos que possam ser avaliados, de maneira direta ou indireta, pela física experimental e observacional.

Com os fundamentos da mecânica quântica e da teoria de perturbação estabelecidos neste capítulo, o ponto de partida fundamental é a revisão da teoria que governa a cinemática em altas energias. A relatividade restrita, com seus postulados sobre o espaço-tempo e a relação energia-momento, forma a base sobre a qual as modificações fenomenológicas são propostas. Portanto, no capítulo seguinte, serão revisitados os conceitos essenciais da relatividade restrita, preparando o terreno para a análise de como esses princípios podem ser alterados na busca por uma teoria quântica da gravidade.

## 2 Relatividade Restrita

Este capítulo é baseado no capítulo 6 do livro *Mecânica Analítica*, de Nivaldo Lemos [23], no qual se revisam os principais conceitos da relatividade restrita relevantes para a estruturação desta pesquisa.

A relatividade restrita, formulada por Albert Einstein em 1905 [16], é uma teoria fundamental que revolucionou a compreensão do espaço e do tempo. Ela é baseada em dois postulados principais:

- **Princípio da Relatividade:** as leis da física são as mesmas em todos os referenciais inerciais;
- **Constância da Velocidade da Luz:** a velocidade da luz no vácuo é a mesma para todos os observadores, independentemente do movimento da fonte ou do observador, sendo  $c = 3 \times 10^8$  m/s.

Antes de Einstein, o espaço e o tempo eram considerados entidades absolutas. No entanto, experimentos como o de Michelson-Morley (1887) [28], que falharam em detectar o éter luminífero, motivaram uma revisão desses conceitos, culminando na formulação da relatividade restrita.

A seguir, revisam-se alguns conceitos fundamentais da teoria:

- **Transformações de Lorentz:** descrevem como as coordenadas espaço-temporais de um evento se transformam entre dois referenciais inerciais em movimento relativo. Para um referencial em movimento com velocidade constante  $v$  ao longo do eixo  $x$ :

$$x' = \gamma(x - vt), \quad t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad (2.1)$$

onde  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$  é o fator de Lorentz. Essas transformações demonstram que espaço e tempo estão interligados, formando o espaço-tempo.

- **Dilatação do Tempo:** refere-se ao fato de que, para um observador, o tempo passa mais lentamente em um sistema em movimento. A relação é dada por:

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0, \quad (2.2)$$

onde  $\Delta t_0$  é o intervalo de tempo próprio e  $\Delta t$  é o intervalo medido pelo observador em repouso.

- **Contração da Distância:** o comprimento de um objeto em movimento é medido como menor do que seu comprimento próprio, segundo:

$$L = \frac{L_0}{\gamma}. \quad (2.3)$$

- **Relação de Dispersão (Energia-Momento):** uma das consequências mais notáveis da relatividade restrita é a equação:

$$E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2, \quad (2.4)$$

que expressa a equivalência entre massa, energia e momento. Em repouso, a equação reduz-se a  $E = mc^2$ , representando a energia de repouso da partícula.

Esses resultados mostram que espaço e tempo não são entidades absolutas, mas dependem do estado de movimento do observador, redefinindo conceitos fundamentais da física clássica.

A relação energia-momento descrita pela equação (2.4) é central na relatividade especial. Ela generaliza os conceitos de energia cinética e momento linear da física clássica para qualquer regime de velocidade.

Em velocidades próximas à da luz, o termo  $pc$  pode se tornar dominante em relação a  $mc^2$ , indicando que a maior parte da energia da partícula é cinética. Essa equação fornece uma estrutura teórica unificada para descrever partículas em repouso e em movimento, sendo essencial para a física de partículas e cosmologia.

## 2.1 Equações de Hamilton na Forma Covariante

Iniciamos esta seção com o formalismo hamiltoniano não covariante, no qual o tempo é tratado como um parâmetro externo. Esta escolha é feita pois é este o formalismo que, no limite de baixas velocidades, recupera a Hamiltoniana não relativística familiar, servindo como a ponte mais natural para o caminho tomado na pesquisa. A lagrangiana relativística para uma partícula livre em um potencial  $V(r)$  é dada por [23]:

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - V(r). \quad (2.5)$$

O momento canônico associado é:

$$p = \frac{\partial L}{\partial v} = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (2.6)$$

coincidindo com o momento linear relativístico. A hamiltoniana resulta em:

$$H = v \cdot p - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + V. \quad (2.7)$$

Expressando  $H$  como função de  $p$  e  $r$ , utiliza-se a relação de dispersão relativística, obtendo:

$$H = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} + V. \quad (2.8)$$

No caso de uma partícula sob ação de campos eletromagnéticos, a lagrangiana se torna:

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - e\phi(r, t) + \frac{e}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}(r, t). \quad (2.9)$$

O momento canônico é:

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{e}{c} \mathbf{A}, \quad (2.10)$$

e a hamiltoniana:

$$H = \mathbf{v} \cdot \mathbf{p} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + e\phi. \quad (2.11)$$

Substituindo-se o momento pela expressão do acoplamento mínimo, obtém-se:

$$H(r, \mathbf{p}, t) = \sqrt{\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}(r, t)\right)^2 c^2 + m^2 c^4} + e\phi(r, t). \quad (2.12)$$

A transição da hamiltoniana livre para o caso com campo externo é feita por meio do acoplamento mínimo:

$$H \rightarrow H - e\phi, \quad \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}. \quad (2.13)$$

Para expressar as leis da física de uma forma que seja manifestamente invariante sob transformações de Lorentz, adota-se o formalismo covariante. Nele, as grandezas dinâmicas são agrupadas em quadrivetores, como a quadri-velocidade da partícula ( $U^\alpha$ ) e o quadripotencial do campo eletromagnético ( $A^\alpha$ ). Dessa forma, a lagrangiana torna-se:

$$L = \frac{m}{2} U^\alpha U_\alpha + \frac{e}{c} A^\alpha U_\alpha, \quad (2.14)$$

e os momentos canônicos são dados por:

$$P^\mu = \frac{\partial L}{\partial U_\mu} = mU^\mu + \frac{e}{c} A^\mu. \quad (2.15)$$

A hamiltoniana covariante correspondente é:

$$H = P^\alpha U_\alpha - L = \frac{1}{2m} \left( P^\alpha - \frac{e}{c} A^\alpha \right) \left( P_\alpha - \frac{e}{c} A_\alpha \right). \quad (2.16)$$

Aplicando novamente o acoplamento mínimo na forma covariante:

$$P^\alpha \rightarrow P^\alpha - \frac{e}{c} A^\alpha,$$

obtêm-se as equações de Hamilton na forma covariante:

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial P_\mu}, \quad \frac{dP^\mu}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial x_\mu},$$

onde  $\tau$  é o parâmetro da curva  $(x^\mu(\tau), P_\mu(\tau))$  no espaço de fase formado pelas coordenadas espaço-temporais e os componentes do quadrimomento.

Com os alicerces da relatividade restrita revisados, em especial a relação de dispersão energia-momento, torna-se possível explorar o cerne deste trabalho: a fenomenologia da gravidade quântica. É precisamente essa relação fundamental que muitos modelos teóricos propõem modificar como consequência da estrutura granular do espaço-tempo em escala de Planck. O próximo capítulo será dedicado a discutir essas abordagens fenomenológicas, detalhando como as teorias de gravidade quântica podem gerar correções observáveis e introduzindo a relação de dispersão modificada que será utilizada nas análises subsequentes.

## 3 Fenomenologia de Gravidade Quântica

### 3.1 Gravitação Quântica em Baixas Energias

Tomando como base o trabalho de Amelino-Camelia [2], que serve como principal referência na construção do conhecimento sobre o tema, inicia-se esta pesquisa abordando um dos grandes desafios da física moderna: a incompatibilidade entre a relatividade geral, que descreve a gravidade e a estrutura do espaço-tempo em grandes escalas, e a mecânica quântica, que rege os fenômenos em escalas microscópicas. A necessidade de uma teoria de gravidade quântica é destacada, uma vez que as equações da relatividade geral perdem validade em regimes onde os efeitos quânticos se tornam dominantes — como nas proximidades de uma singularidade em buracos negros ou durante o Big Bang.

A fenomenologia do espaço-tempo quântico é introduzida como um campo promissor que busca sinais experimentais de uma estrutura quântica do espaço-tempo. Mesmo que as teorias de gravidade quântica ainda estejam em desenvolvimento e careçam de confirmação, o autor defende que a investigação de efeitos mensuráveis pode indicar se essas abordagens teóricas estão no caminho certo. Assim, essa linha de pesquisa representa uma tentativa concreta de conectar especulações teóricas com observações experimentais.

Diferentes abordagens à quantização do espaço-tempo são discutidas, com destaque para:

- **Gravidade Quântica de Laços (LQG):** propõe uma quantização direta do espaço-tempo, descrevendo-o como formado por unidades discretas (“laços” ou “redes de spin”) em escalas da ordem de Planck;
- **Espuma Quântica:** sugere que, em escalas extremamente pequenas, o espaço-tempo não é contínuo, mas sim uma “espuma” com intensas flutuações quânticas.

Apesar das diferenças entre essas teorias, todas convergem na ideia de que, em escalas de Planck ( $\sim 10^{-35}$  m), a estrutura do espaço-tempo pode se desviar radicalmente das previsões da relatividade geral. Enfatiza-se a importância de investigar as consequências fenomenológicas dessas propostas — como possíveis desvios na propagação de partículas de alta energia ou modificações na relação energia-momento relativística.

Nesse contexto, os cenários experimentais sugeridos onde tais efeitos poderiam se manifestar:

- **Astrofísica de altas energias:** Este é o principal campo para a busca de efeitos de

gravidade quântica, pois os sinais são tipicamente suprimidos pela enorme escala de Planck. Fenômenos como Erupções de Raios Gama (Gamma-Ray Bursts - GRBs), raios cósmicos de ultra-alta energia e neutrinos astrofísicos fornecem partículas que viajam por distâncias cosmológicas com energias altíssimas. Isso cria uma "alavanca" natural: efeitos minúsculos, acumulados ao longo de bilhões de anos-luz, podem se tornar mensuráveis. As observações focam em anomalias como atrasos no tempo de chegada ou modificações nos limiares de reações de partículas [41].

- **Violação da simetria de Lorentz:** A simetria de Lorentz é um pilar da física moderna, sustentando tanto a Relatividade Especial quanto o Modelo Padrão de partículas. No entanto, muitas abordagens de gravidade quântica sugerem que a natureza do espaço-tempo na escala de Planck é, na verdade, discreta ou "espumosa", o que poderia quebrar ou deformar essa simetria fundamental. Fenomenologicamente, uma das maneiras mais diretas de modelar essa quebra é através de uma *Relação de Dispersão Modificada* ou *Modified Dispersion Relation* (MDR), como a que será discutida na Seção 3.2. Conforme algumas teorias sugerem, tais violações, embora muito pequenas, poderiam afetar a velocidade de propagação de partículas ou alterar a dispersão da luz. Esses efeitos seriam detectáveis em observações de alta precisão [14]. Os testes mais sensíveis para a violação da simetria de Lorentz vêm da astrofísica, ao se comparar o tempo de chegada de fótons de diferentes energias emitidos por fontes distantes, como explosões de raios gama (GRBs). A ausência de um atraso significativo tem permitido impor os limites experimentais mais rigorosos sobre os parâmetros de violação [22].
- **Testes de precisão com fótons:** Esta é uma das técnicas mais poderosas para sondar a cinemática modificada. A ideia é que, se a velocidade da luz no vácuo depender da energia do fóton, então fótons de diferentes energias emitidos simultaneamente por uma fonte astrofísica distante chegarão à Terra em instantes ligeiramente diferentes. Ao medir com precisão o tempo de chegada de pulsos de luz de Erupções de Raios Gama ou de quasares ativos, os astrônomos podem impor limites extremamente restritivos sobre qualquer desvio da constância da velocidade da luz, testando diretamente as previsões dos modelos fenomenológicos [1].

Dada a ausência de uma teoria de gravidade quântica amplamente aceita, propõe-se uma abordagem fenomenológica pragmática: explorar diferentes cenários teóricos e buscar sinais observáveis, mesmo que pequenos. Essa postura estabelece as bases conceituais e metodológicas da fenomenologia do espaço-tempo quântico, que busca ligar a teoria da gravidade quântica a experimentos reais. Apesar do caráter especulativo das teorias, encontrar tais sinais em dados astrofísicos ou cosmológicos representa um avanço promissor no entendimento da natureza fundamental do espaço-tempo.

Na parte final do artigo, é ampliada a discussão para considerar regimes de baixas energias, ou seja, fenômenos no infravermelho (IR). Embora muitos estudos se concentrem nos efeitos quânticos em escalas de Planck (altas energias), é mostrado que a quantização do espaço-tempo pode gerar efeitos detectáveis também em baixas energias.

Algumas abordagens indicam que pode haver uma conexão entre os efeitos nos regimes ultravioleta (*ultraviolet*, UV), e infravermelho (*infrared*, IR) [29], ligados por uma mesma escala de deformação — a de Planck. Por exemplo, em modelos de espaço-tempo não comutativo, a relação de dispersão pode ser modificada com termos lineares no momento da partícula. Em baixas velocidades, essas correções lineares se tornam mais relevantes do que as cúbicas ou quadráticas previstas por teorias tradicionais. Isso torna os sistemas frios candidatos naturais para testes experimentais dessas propostas no IR.

De fato, destaca-se que experimentos com colisões e recuos de átomos frios, como no espalhamento Raman, oferecem condições ideais para impor limites experimentais à escala de Planck. Outro cenário de interesse envolve correções no potencial newtoniano gravitacional, que levariam a curvas não-Keplerianas, além de modificações na mecânica quântica não-relativística. Tais efeitos podem ser incorporados por meio de correções no princípio de incerteza de Heisenberg, sugerindo a existência de um comprimento mínimo ou alterações na equação de Schrödinger — tema que será desenvolvido nos próximos capítulos.

Com isso, justifica-se a relevância do estudo da fenomenologia do espaço-tempo quântico em regimes de baixa energia, apontando para possíveis caminhos experimentais na busca por sinais da gravidade quântica.

## 3.2 Relação de Dispersão Modificada

Como apresentado por Wagner et al. [42], uma relação de dispersão relativística modificada é introduzida com o intuito de modificar a hamiltoniana de uma partícula relativística e, portanto, a sua cinemática. Essa cinemática é modificada devido à propagação de uma partícula por um espaço-tempo quântico. Como explicado nesse trabalho, esses efeitos cinemáticos se acumulam com a distância de propagação e são normalmente analisados considerando partículas de altas energias, de origem astrofísica. No entanto, o foco desta análise são as correções relevantes para baixas energias, no IR. Tais correções manifestam-se através de modificações na equação de Schrödinger, que serão tratadas à luz da teoria de perturbação independente do tempo, o que permite trabalhar com ela dentro dos limites impostos pela gravidade quântica para o caso em estudo.

De forma geral, qualquer modificação na relação de dispersão padrão ( $m^2 c^4 = E^2 - p^2 c^2$ ) pode ser descrita por uma função  $F(E, p, m, E_p) = 0$ , onde  $E_p$  é a energia de Planck. Assumindo que os efeitos da gravidade quântica são suprimidos pela escala de

Planck, para energias e momentos muito menores que  $E_p$ , é natural expandir essa função em uma série de Taylor nas variáveis  $E/E_p$  e  $p/E_p$ . A Relação de Dispersão Modificada (MDR) é, portanto, a aproximação de primeira ordem nesta expansão. Mantendo os termos de ordem mais baixa, a relação de dispersão assume a seguinte forma polinomial geral:

$$M^2 c^4 = E^2 - p^2 c^2 + l_p \sum_{n=0}^2 \sum_{m=0}^{3-n} a_{n,m,3-n-m} (Mc)^n p^m \left( \frac{E}{c} \right)^{3-n-m}. \quad (3.1)$$

onde  $l_p = c^3/E_p$  e  $E_p$  é a energia de Planck, que corresponde a  $E_p = \sqrt{\hbar c^5/G} \approx 1.22 \times 10^{28}$  eV, e é a escala de energia esperada na qual efeitos de gravidade quântica apareçam, caso não haja amplificadores no sistema. Em unidades naturais, na qual  $\hbar = c = 1$ ,  $l_p = 1/E_p$ . Por isso, a menos de constantes, vamos chamar  $l_p$  de comprimento de Planck, que seria  $\sqrt{\hbar G/c^3}$ .

A forma geral da (3.1) abrange diversas possibilidades exploradas na literatura. Em muitas análises fenomenológicas, por exemplo, consideram-se casos mais simples com correções lineares ou quadráticas na escala de Planck, como  $E^2 \approx p^2 c^2 + m^2 c^4 \pm \xi E^{n+2}/E_p^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Variações destas relações são amplamente discutidas em trabalhos de revisão como [2]. Vale ressaltar, ainda, que existem propostas de relações de dispersão não-polinomiais, que podem envolver termos exponenciais, motivadas por outros cenários de gravidade quântica. Diante dessa definição, tornou-se necessário encontrar a energia da relação no limite no qual  $c$  tende ao infinito. Após a realização do cálculo do limite e da expansão em séries, obtém-se o seguinte resultado:

$$E = \frac{p^2}{2M} - \frac{cpl_p(2pMa_{0,0,3} + 2pMa_{0,2,1} + 2pMa_{1,2,0} + pMa_{1,0,2})}{4M} - \frac{pl_p(p^2a_{0,1,2} + 2p^2a_{0,3,0} - p^2a_{2,1,0})}{4M} - \frac{c^2pl_p(2M^2a_{0,1,2} + 2M^2a_{1,1,1} + 2M^2a_{2,1,0})}{4M}. \quad (3.2)$$

onde  $l_p$  é o comprimento de Planck.

Tendo apresentado as motivações e a forma geral de uma relação de dispersão modificada, o passo seguinte é traduzir essa alteração para o comportamento de sistemas quânticos não relativísticos. A ferramenta para descrever essa dinâmica é a equação de Schrödinger, o pilar da mecânica quântica. O capítulo a seguir fornecerá uma revisão detalhada desta equação e do formalismo da teoria de perturbação, que será essencial para calcular como as pequenas correções oriundas da gravidade quântica afetam os níveis de energia de sistemas conhecidos.

## 4 Mecânica Quântica

### 4.1 Equação de Schrödinger

A equação de Schrödinger é central na mecânica quântica, fornecendo a base matemática para descrever fenômenos quânticos em átomos, moléculas e partículas subatômicas [20, 35]. A equação permite que estados quânticos estejam em uma superposição de estados possíveis, o que leva a fenômenos como interferência quântica. A equação de Schrödinger tem a seguinte forma:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + V\Psi(x, t), \quad (4.1)$$

e, ao contrário da mecânica clássica, que usa as leis de Newton para prever a posição e a velocidade de partículas, a mecânica quântica usa a equação de Schrödinger para descrever e resolver a função de onda.

A função de onda, geralmente denotada por  $\Psi(x, t)$ , é uma função matemática que descreve o estado de uma partícula quântica, como a posição, momento, ou energia, contendo toda a informação necessária do sistema em que a partícula se encontra. A equação de Schrödinger desempenha um papel análogo à segunda lei de Newton: dadas condições iniciais apropriadas, a equação de Schrödinger determina  $\Psi(x, t)$  para qualquer instante de tempo futuro, assim como a lei de Newton determina  $x(t)$  para qualquer instante de tempo futuro na mecânica clássica.

A equação de Schrödinger também possui sua forma estacionária (independente do tempo). Para chegar nessa forma da equação, considera-se um potencial ( $V$ ) independente do tempo e faz-se uma separação de variáveis na função de onda ( $\Psi(x, t) = \psi(x)\phi(t)$ ). Efetuando as derivadas dos dois lados da equação e dividindo por  $\psi(x)\phi(t)$ , obtém-se:

$$i\hbar \frac{1}{\phi(t)} \frac{d\phi(t)}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\psi(x)} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V. \quad (4.2)$$

O lado esquerdo é uma função apenas de  $t$ , e o lado direito é uma função apenas de  $x$ . Isso só pode ser verdade se ambos os lados forem iguais a uma constante. Assim, pode-se separar as equações para depois juntá-las novamente numa solução mais geral, de forma que se tem:

$$i\hbar \frac{d\phi(t)}{dt} = E\phi(t) \quad (4.3)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V\psi(x) = E\psi(x). \quad (4.4)$$

Note-se que a separação de variáveis transformou uma equação diferencial parcial em duas equações diferenciais ordinárias. A equação 4.3 é facilmente resolvida, resultando

em:

$$\phi(t) = e^{-\frac{iEt}{\hbar}}. \quad (4.5)$$

A equação 4.4 é chamada equação de Schrödinger independente do tempo e também pode ser escrita na forma:

$$\hat{H}\psi(x) = E\psi(x). \quad (4.6)$$

## 4.2 Interpretação Estatística

O módulo quadrado da função de onda representa a probabilidade de encontrar a partícula em uma dada posição  $x$  num tempo  $t$ . Isso reflete a natureza probabilística da mecânica quântica, onde as previsões não são determinísticas, mas fornecem probabilidades de diferentes resultados [36]:

$$\int_a^b |\Psi(x, t)|^2 dx = P, \quad (4.7)$$

onde  $P$  é a probabilidade de encontrar a partícula entre  $a$  e  $b$  num instante  $t$ .

A interpretação estatística apresenta um tipo de indeterminação dentro da mecânica quântica, pois mesmo que se tenha todas as informações sobre a partícula (sua função de onda), não se pode prever com exatidão o resultado de um experimento simples para medir sua posição. Tudo que se pode obter é a informação estatística sobre os resultados possíveis. Esta característica fundamental abre caminho para discussões profundas sobre os fundamentos da teoria [36].

A função de onda é dada por:

$$\Psi(x, t) = \psi(x)e^{-\frac{iEt}{\hbar}}. \quad (4.8)$$

Note que:

$$|\Psi(x, t)|^2 = \Psi^*(x, t)\Psi(x, t) = \psi(x)e^{+\frac{iEt}{\hbar}}\psi(x)e^{-\frac{iEt}{\hbar}} = |\psi(x)|^2, \quad (4.9)$$

o que significa que se pode usar  $\psi(x)$  no lugar de  $\Psi(x, t)$  para o cálculo da densidade de probabilidade (para estados estacionários), tomando sempre o cuidado de lembrar do termo temporal, pois a função de onda sempre carrega o fator exponencial dependente do tempo.

## 4.3 Teoria de Perturbação Independente do Tempo (Não Degenerada)

Como veremos, as correções que analisaremos devido à gravidade quântica poderão ser tratadas como perturbações da mecânica quântica tradicional. Por isso, com base em [20], revisa-se a teoria de perturbação independente do tempo e não degenerada, considerando apenas termos de primeira ordem.

Levando em conta a conhecida solução do poço quadrado infinito unidimensional,

$$H^0 \psi_n^0 = E_n^0 \psi_n^0, \quad (4.10)$$

e supondo que se tenha resolvido, o conjunto completo de autofunções ortonormais obtido seria

$$\langle \psi(x)_n | \psi(x)_m \rangle = \delta_{nm} \quad (4.11)$$

e os autovalores seriam  $E_n^0$ . Agora, perturba-se levemente o potencial, como por exemplo:

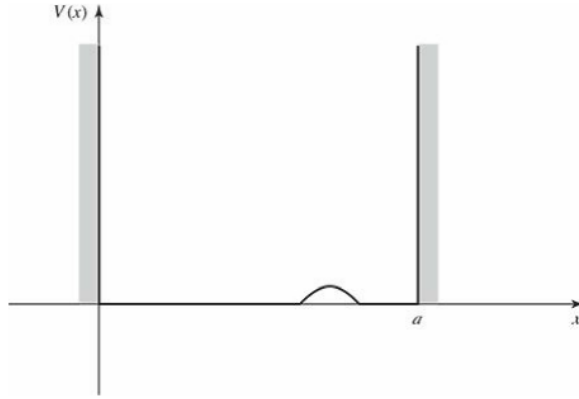


Figura 1 – Poço quadrado infinito com leve perturbação

Fonte: Griffiths (2018) [20].

Tem-se, então, uma nova equação de Schrödinger, dada por:

$$\hat{H} \psi(x)_n = E_n \psi(x)_n, \quad (4.12)$$

porém, tem-se uma nova hamiltoniana:

$$\hat{H} = \hat{H}^0 + \lambda \hat{H}', \quad (4.13)$$

onde  $\hat{H}^0$  é a hamiltoniana original (não perturbada) e  $\hat{H}'$  é a perturbação. Já  $\lambda$  é um número pequeno,  $\lambda \ll 1$ , e pode-se escrever  $E_n$  e  $\psi(x)_n$  como séries de potências com a finalidade de achar termos de correção para ajudar a simplificar a resolução da equação 4.12. As séries de potências ficam com a forma:

$$\psi(x)_n = \psi(x)_n^0 + \lambda \psi(x)_n^1 + \lambda^2 \psi(x)_n^2 + \dots \quad (4.14)$$

$$E_n = E_n^0 + \lambda E_n^1 + \lambda^2 E_n^2 + \dots \quad (4.15)$$

voltando então para 4.12, descartando os termos de segunda ordem por simplicidade, tem-se:

$$\begin{aligned} (\hat{H}^0 + \lambda \hat{H}')(\psi(x)_n^0 + \lambda \psi(x)_n^1) &= (E_n^0 + \lambda E_n^1)(\psi(x)_n^0 + \lambda \psi(x)_n^1) \\ \hat{H}^0 \psi(x)_n^0 + \hat{H}^0 \lambda \psi(x)_n^1 &= E_n^0 \psi(x)_n^0 + E_n^0 \lambda \psi(x)_n^1 + \lambda E_n^1 \psi(x)_n^0 \\ \hat{H}' \psi(x)_n^0 + \hat{H}' \lambda \psi(x)_n^1 &= E_n^1 \psi(x)_n^0 + E_n^1 \lambda \psi(x)_n^1. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Agora, fazendo o produto interno por  $\psi(x)_n^0$  (lembrando que  $\hat{H}^0$  é hermitiano), obtém-se:

$$\begin{aligned}\hat{H}^0 \langle \psi(x)_n^0 | \psi(x)_n^1 \rangle + \langle \psi(x)_n^0 | \hat{H}' | \psi(x)_n^0 \rangle &= E_n^0 \langle \psi(x)_n^0 | \psi(x)_n^1 \rangle + E_n^1 \langle \psi(x)_n^0 | \psi(x)_n^0 \rangle \\ E_n^1 &= \langle \psi(x)_n^0 | \hat{H}' | \psi(x)_n^0 \rangle\end{aligned}\quad (4.17)$$

Obteve-se, então, a equação da correção da energia, a qual diz que a correção de primeira ordem da energia é o valor esperado da perturbação no estado não-perturbado. Foi obtida a correção das energias, agora é necessário obter a correção para a função de onda. Pela equação 4.16 também se pode ter:

$$(\hat{H}^0 - E_n^0) \psi(x)_n^1 = -(\hat{H}' - E_n^1) \psi(x)_n^0, \quad (4.18)$$

como já se sabe os valores de todos os termos do lado direito da equação, e do lado esquerdo apenas  $\psi(x)_n^1$  não é conhecido, essa equação recai em uma equação diferencial ordinária (EDO) não homogênea para  $\psi(x)_n^1$ . Seja esta EDO:

$$\psi(x)_n^1 = \sum_{m \neq n} c_m^{(n)} \psi(x)_m^0 \quad (4.19)$$

Note que é necessário encontrar  $c_m^{(n)}$ ; fazendo isto agora, será mais simples no futuro resolver a equação. Aplicando 4.19 em 4.18, tem-se:

$$\sum_{m \neq n} (E_m^0 - E_n^0) c_m^{(n)} \psi(x)_m^0 = -(\hat{H}' - E_n^1) \psi(x)_n^0,$$

aplicando o produto interno com  $\psi(x)_n^1$ :

$$\sum_{m \neq n} (E_m^0 - E_n^0) c_m^{(n)} \langle \psi(x)_l^0 | \psi(x)_m^0 \rangle = -\langle \psi(x)_l^0 | \hat{H}' | \psi(x)_n^0 \rangle - E_n^1 \langle \psi(x)_l^0 | \psi(x)_m^0 \rangle. \quad (4.20)$$

O caso de interesse é quando  $l \neq m$ , no qual se obtém:

$$\begin{aligned}(E_l^0 - E_n^0) c_l^{(n)} &= -\langle \psi(x)_l^0 | \hat{H}' | \psi(x)_n^0 \rangle \\ c_m^{(n)} &= \frac{\langle \psi(x)_m^0 | \hat{H}' | \psi(x)_n^0 \rangle}{E_n^0 - E_m^0},\end{aligned}\quad (4.21)$$

e, portanto,

$$\psi(x)_n^1 = \sum_{m \neq n} \frac{\langle \psi(x)_m^0 | \hat{H}' | \psi(x)_n^0 \rangle}{E_n^0 - E_m^0} \psi(x)_m^0 \quad (4.22)$$

Note que o denominador está protegido (pois não há coeficiente com  $m = n$ ), desde que o espectro de energia não-perturbado seja não-degenerado. Assim, foram obtidas as correções para a energia e para a função de onda para perturbações.

## 4.4 Equação de Schrödinger na Representação do Momento

Levando em conta tudo que foi citado acima sobre a equação de Schrödinger, será agora apresentada outra maneira de representar essa equação.

Para a gravitação quântica é mais interessante que se resolvam problemas no espaço dos momentos ao invés de no espaço das posições, como se faz comumente em mecânica quântica. Tem-se, então, para uma partícula livre:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle &= \hat{H} |\psi(t)\rangle \\ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle &= \left( \frac{p^2}{2m} + V \right) |\psi(t)\rangle. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Para passar para a projeção do momento, faz-se um “sanduíche” com  $\langle p|$ . Assim, tem-se  $\langle p|\psi(t)\rangle = \Psi(p, t)$  como autofunção, portanto:

$$\hat{p}\Psi(p, t) = p\Psi(p, t). \quad (4.24)$$

Para o potencial, basta lembrar que  $\hat{x} = i\hbar \frac{\partial}{\partial p}$  e, logo,  $V(x) \rightarrow V(p)$ . Realizando os cálculos e substituições necessárias, tem-se então:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle &= \left( \frac{\hat{p}^2}{2m} |\psi(t)\rangle + V |\psi(t)\rangle \right); \\ i\hbar \langle p| \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle &= \frac{1}{2m} \langle p| \hat{p}^2 |\psi(t)\rangle + V(p) \langle p|\psi(t)\rangle; \\ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle p|\psi(t)\rangle &= \frac{\hat{p}^2}{2m} \langle p|\psi(t)\rangle + V(p) \langle p|\psi(t)\rangle; \\ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(p, t) &= \left( \frac{p^2}{2m} + V(p) \right) \Psi(p, t). \end{aligned} \quad (4.25)$$

A equação 4.25 é a equação de Schrödinger na representação dos momentos.

Que resulta na Hamiltoniana do modelo fenomenológico adotado neste trabalho. Sua forma não é arbitrária, mas sim o resultado direto do limite não relativístico da Relação de Dispersão Modificada (MDR), discutida no capítulo anterior. Ela descreve a energia corrigida da partícula, que tem a seguinte forma:

$$H = H_{nr} + \left[ -\frac{l_p}{2M} \sum_{n=1}^3 \xi_n (Mc)^{3-n} p^n \right] \quad (4.26)$$

Onde  $H_{nr} = \frac{p^2}{2M}$  e o termo de perturbação independente do tempo é  $\left( -\frac{l_p}{2M} \sum_{n=1}^3 \xi_n (Mc)^{3-n} p^n \right)$ . Os parâmetros  $\xi_n$  são função dos parâmetros  $a$  da equação (6.1). Portanto, reescrevendo a equação, obtém-se:

$$H = \frac{p^2}{2M} - \frac{l_p}{2M} \sum_{n=1}^3 \xi_n (Mc)^{3-n} p^n. \quad (4.27)$$

Sendo esta a forma final da hamiltoniana antes da quantização que será feita para se trabalhar na resolução do problema propriamente dito. As correções da hamiltoniana são

governadas pela escala da gravidade quântica e, portanto, proporcionais ao comprimento de Planck. No limite em que esse comprimento vai a zero, retomamos os resultados da relatividade especial e a hamiltoniana de “costume”.

## 4.5 Quantizando a Hamiltoniana

Para se quantizar, é necessário fazer a equivalência dos operadores com suas respectivas partes clássicas, deixando assim os operadores para que se possa ter uma hamiltoniana quantizada.

Assim, a hamiltoniana ficará com a forma:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2M} - \frac{l_p}{2M\hbar} \sum_{n=1}^3 \xi_n (Mc)^{3-n} \hat{p}^n \quad (4.28)$$

onde  $\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$  e  $l_p$  é o comprimento de Planck, que tem a forma<sup>1</sup>:

$$l_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}},$$

e, portanto, substituindo os operadores, tem-se:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar}{2M} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{2M\hbar} \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \sum_{n=1}^3 \xi_n (Mc)^{3-n} \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right)^n \quad (4.29)$$

Onde  $\xi_n = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$ , sendo  $\xi_1 = a_{1,1,1} + a_{2,1,0} + a_{0,1,2}$ ,  $\xi_2 = a_{1,2,0} + a_{0,2,1} + a_{1,0,2} + \frac{1}{2}a_{2,0,1} + \frac{3}{2}a_{0,0,3}$  e  $\xi_3 = a_{0,3,0}$ .

## 4.6 Correção dos Níveis de Energia

Para ilustrar os métodos revisados anteriormente, vamos aplicar os tópicos discutidos a um problema conhecido de Mecânica Quântica, que é o problema do poço quadrado infinito.

Para resolver o poço de potencial infinito, primeiramente deve-se achar a função de onda para o poço de potencial infinito na representação do momento.

Sabe-se que a função de onda do poço de potencial infinito para a representação de posição, [20], é dada por:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right); n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.30)$$

e os níveis de energia não deformados são dados por:

$$E_n^0 = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ML^2} \quad (4.31)$$

<sup>1</sup> A quantidade  $l_p/\hbar$  é o inverso do chamado momento de Planck e vale  $p_p = \hbar/l_p \approx 6.5 \text{ N}\cdot\text{s}$ , e deve ser introduzida por razões dimensionais.

Da teoria da perturbação, obtém-se uma correção da função de onda que tem a forma:

$$\phi_n^1(p) = \sum_{m \neq n} \frac{\langle m | \hat{H}' | n \rangle}{E_n^0 - E_m^0} \phi_m^0(p), \quad (4.32)$$

o termo de perturbação para a representação do momento é dado por:

$$\langle m | \hat{H}' | n \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_m^*(p) \hat{H}' \phi_n(p) dp \quad (4.33)$$

ainda da teoria da perturbação, a correção da energia é dada por:

$$E_n^1 = \langle n | \hat{V}' | n \rangle \quad (4.34)$$

Para passar para a representação do momento é necessário fazer uma transformada de Fourier, [6], na função de onda acima, ficando com:

$$\phi_n(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_0^L \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-ipx/\hbar}, n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.35)$$

Onde as correções já estão inclusas dentro da função de onda da representação do momento.

Agora, utilizando da função de onda do momento e expandindo através da distribuição de Wigner em termos dos autovalores de posição e de momento, são obtidos:

$$\phi_n(p) = -i \sqrt{\frac{L}{\hbar\pi}} e^{-ipL/2\hbar} e^{-in\pi/2} \frac{2n\pi}{\left[\left(\frac{pL}{\hbar}\right)^2 - (n\pi)^2\right]} \begin{cases} \sin(pL/2\hbar)(-1)^{\frac{n}{2}}, & \text{se } n \text{ é par} \\ \cos(pL/2\hbar)(-1)^{\frac{n+1}{2}}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases} \quad (4.36)$$

e também:

$$|\phi_n(p)|^2 = \frac{L}{\hbar\pi} \frac{2n\pi}{\left[\left(\frac{pL}{\hbar}\right)^2 - (n\pi)^2\right]} \begin{cases} \sin^2(pL/2\hbar), & \text{se } n \text{ é par} \\ \cos^2(pL/2\hbar), & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases} \quad (4.37)$$

Portanto, como também é sabido:

$$\langle \hat{p}^k \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi_n(p)|^2 p^k dp \quad (4.38)$$

e para resolver essa integral será necessário realizar uma integral de contorno, utilizando o teorema dos resíduos. Segundo [6] (veja a seção 5.3), um cálculo direto nos fornece

$$\langle \hat{p}^2 \rangle = \int_0^L |\phi_n(p)|^2 p^2 dp = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{L^2}. \quad (4.39)$$

Segundo Belloni [6], só são interessantes fisicamente os casos onde  $k = 1, 2, 3$ , pois a partir de  $k = 4$  todos os resultados divergem, confira a seção 5.3 de [6] para mais informações sobre essa divergência de  $\langle \hat{p}^4 \rangle$ . Perceba que só foi utilizado como exemplo o  $k = 2$ , pois quando  $k = 1$  e  $k = 3$ , ficamos com uma integral de uma função par multiplicada por uma função ímpar em um intervalo simétrico, integral essa que dará

zero para os dois valores de  $k$ , o que equivale a dizer que  $\langle \hat{p} \rangle = 0$  e  $\langle \hat{p}^3 \rangle = 0$ , com apenas  $\langle \hat{p}^2 \rangle = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{L^2}$  dando uma contribuição com a qual é possível trabalhar.

Utilizando teoria de perturbação independente do tempo, calculamos os valores esperados da correção nos níveis de energia devido a efeitos de gravidade quântica da seguinte forma:

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ML^2} \left( 1 - \xi_2 \frac{l_p}{\hbar} Mc \right) = \frac{n^2 \hbar^2}{8ML^2} \left( 1 - \xi_2 \frac{l_p}{\hbar} Mc \right). \quad (4.40)$$

Assim, num sistema que possa ser descrito por um poço quadrado infinito, por exemplo, pontos quânticos [11], o comprimento de onda  $\lambda$  da radiação emitida numa transição entre níveis de energia  $n_f$  e  $n_i$  é dado pela relação de de Broglie  $\lambda = hc/\Delta E$ . No nosso caso, essa frequência sofre uma correção da seguinte ordem:

$$\lambda = \frac{hc}{\Delta E} = \frac{8ML^2 c}{h(n_f^2 - n_i^2)} \left( 1 + \xi_2 \frac{l_p}{\hbar} Mc \right) \quad (4.41)$$

Tipicamente, medidas de comprimento envolvendo pontos quânticos têm uma incerteza relativa da ordem de 1% [38]. Portanto, é possível estimar a magnitude dos parâmetros da teoria (no caso,  $\xi_2$ ) de modo a não ter havido ainda detecção de efeitos Planckianos nessa quantidade. Para isso, basta que  $\xi_2 l_p Mc / \hbar \leq 1\%$ . Considerando que  $M$  é a massa efetiva presente nos níveis de energia dos pontos quânticos, que é da ordem de  $0.1m_e$ , onde  $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$  kg é a massa do elétron, tomando a velocidade da luz  $c = 3,0 \times 10^8$  m/s e o momento de Planck  $\hbar/l_p = p_p = 6.5$  N·s, podemos deduzir o seguinte vínculo para o parâmetro de deformação:

$$|\xi_2| \leq 5.6 \times 10^{19}. \quad (4.42)$$

Esse vínculo está muito longe da escala de Planck (que deveria ser de ordem 1), mas ele pode ser melhorado se for possível construir pontos quânticos com massas efetivas maiores. Outra possibilidade seria o uso de outros sistemas quânticos cujas medidas tenham maior precisão e permitam correções nos níveis de energia que sejam lineares no momento, e não apenas quadráticas. No futuro, poderemos analisar o caso do poço de potencial gravitacional, o qual, ao invés de ter um valor nulo entre as paredes do potencial, vale  $V(z) = Mgz$ , onde  $g$  é a aceleração da gravidade. Esse sistema foi tema de estudo em análises feitas nos últimos anos em fenomenologia de gravidade quântica, considerando nêutrons na superfície terrestre (veja seção 5.7 de [2] e suas referências).

Com os fundamentos da mecânica quântica e da teoria de perturbação estabelecidos neste capítulo, torna-se claro que o formalismo apresentado é ideal para sistemas isolados. No entanto, para analisar a interação com o ambiente, é preciso uma abordagem mais robusta. Dessa forma, o próximo capítulo será dedicado ao formalismo de sistemas quânticos abertos. Este arcabouço teórico é fundamental para a análise da descoerência, um fenômeno que afeta diretamente correlações quânticas cruciais como o emaranhamento. Serão vistos, então, as equações e os fenômenos que regem esse formalismo.

# 5 Formalismo de Sistemas Quânticos Abertos

Dentre esses fenômenos, merece destaque o emaranhamento quântico, já que ele constitui um dos aspectos mais sensíveis à descoerência e desempenha papel central na compreensão da coerência e das correlações não clássicas em sistemas quânticos. Assim, a seguir, será apresentada uma discussão sobre o conceito de emaranhamento quântico e sua relevância no contexto das modificações estocásticas.

## 5.1 Emaranhamento

O emaranhamento quântico é um dos fenômenos mais intrigantes e fundamentais da mecânica quântica, desafiando noções clássicas de localidade e realismo [31]. Ele ocorre quando o estado de um sistema composto não pode ser descrito como a combinação de estados independentes de seus subsistemas. Para formalizar essa ideia, considera-se um sistema de duas partículas, cujos estados pertencem a espaços de Hilbert separados  $\mathcal{H}_1$  e  $\mathcal{H}_2$  [35]. O estado total do sistema reside no espaço de Hilbert composto  $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ .

Um estado puro  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  é chamado de *separável* (ou *produto*) se pode ser escrito como:

$$|\psi\rangle = |\phi_1\rangle \otimes |\phi_2\rangle, \quad (5.1)$$

com  $|\phi_1\rangle \in \mathcal{H}_1$  e  $|\phi_2\rangle \in \mathcal{H}_2$ . Por outro lado, se não for possível escrever  $|\psi\rangle$  nesta forma, diz-se que ele está *emaranhado* [31].<sup>1</sup>

Para ilustrar, considere duas bases ortonormais  $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle\}$  para  $\mathcal{H}_1$  e  $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle\}$  para  $\mathcal{H}_2$ . Exemplos de estados separáveis incluem:

- Estado produto simples:  $|u_1\rangle \otimes |v_1\rangle$ ;
- Estado produto com superposições locais:

$$(\alpha_1|u_1\rangle + \alpha_2|u_2\rangle) \otimes (\beta_1|v_1\rangle + \beta_2|v_2\rangle), \quad (5.2)$$

cujos desenvolvimento resulta em uma combinação linear de quatro termos:

$$\alpha_1\beta_1|u_1\rangle \otimes |v_1\rangle + \alpha_1\beta_2|u_1\rangle \otimes |v_2\rangle + \alpha_2\beta_1|u_2\rangle \otimes |v_1\rangle + \alpha_2\beta_2|u_2\rangle \otimes |v_2\rangle. \quad (5.3)$$

---

<sup>1</sup> É crucial ressaltar que um estado emaranhado, como o descrito, ainda é um *estado puro*, sobre o qual se tem informação completa. Isso não deve ser confundido com um *estado misto*, que representa uma mistura estatística de diferentes estados quânticos e será formalmente introduzido na Seção 5.2.

Agora, considere o seguinte estado:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u_1\rangle \otimes |v_1\rangle + |u_2\rangle \otimes |v_2\rangle). \quad (5.4)$$

Tentativas de fatorar esse estado como um produto falham. Suponha que  $|\psi\rangle$  pudesse ser escrito como:

$$|\psi\rangle = (\alpha_1|u_1\rangle + \alpha_2|u_2\rangle) \otimes (\beta_1|v_1\rangle + \beta_2|v_2\rangle). \quad (5.5)$$

Expandindo o lado direito, obteríamos os mesmos quatro termos do exemplo anterior. No entanto, o lado esquerdo possui apenas dois termos. Isso é inconsistente a menos que todos os coeficientes  $\alpha_i\beta_j$  extras sejam nulos, o que levaria a uma contradição. Portanto, esse estado é **não separável**, ou seja, emaranhado.

Um exemplo físico importante de emaranhamento ocorre em sistemas de duas partículas com spin- $\frac{1}{2}$ . Os chamados *estados de Bell* formam uma base ortonormal de estados maximamente emaranhados<sup>2</sup>:

$$\begin{aligned} |\Phi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle), \\ |\Phi^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle), \\ |\Psi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle + |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle), \\ |\Psi^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Tais estados possuem correlações não locais que se manifestam em experimentos de medida. Por exemplo, se duas partículas estão no estado  $|\Psi^+\rangle$  e uma medição detecta a partícula 1 com spin  $\uparrow$ , a partícula 2 colapsa instantaneamente para o estado  $\downarrow$ , mesmo que estejam espacialmente separadas.

Importante destacar que, apesar da instantaneidade da correlação, o emaranhamento não permite transmissão de informação mais rápida que a luz. Isso garante sua compatibilidade com a relatividade restrita. As implicações desse fenômeno foram investigadas por John Bell [5], que formulou as *Desigualdades de Bell* — testes experimentais para verificar se a natureza pode ser explicada por teorias locais e realistas [13, 12].

As violações dessas desigualdades, como confirmado em diversos experimentos [4, 21], indicam que as predições da mecânica quântica, baseadas em estados emaranhados, não podem ser reproduzidas por nenhuma teoria que respeite simultaneamente os princípios de localidade e realismo. O emaranhamento, portanto, não é apenas uma curiosidade matemática, mas um fenômeno físico com profundas implicações teóricas e tecnológicas,

<sup>2</sup> O termo "maximamente" significa que, embora o estado combinado do par seja perfeitamente conhecido, o estado de cada partícula individual é completamente indefinido — qualquer medição em uma única partícula resultará em um resultado totalmente aleatório. Toda a informação do sistema reside nas correlações perfeitas entre as partículas, de modo que a medição de uma determina instantaneamente o estado da outra.

sendo fundamental para protocolos de comunicação quântica, criptografia e computação quântica.

## 5.2 Matriz Densidade e Estados Puros e Mistos

Na formulação tradicional da mecânica quântica, o estado de um sistema físico isolado é descrito por um vetor de estado  $|\psi\rangle$  em um espaço de Hilbert, ou, de forma equivalente, por uma função de onda. Essa descrição é adequada quando se conhece completamente o estado do sistema, como, por exemplo, um oscilador harmônico em um autovalor de energia específico ou uma combinação linear bem definida de autoestados. No entanto, existem situações em que não é possível ou não faz sentido físico atribuir um vetor de estado único ao sistema [9].

Isso ocorre, por exemplo, quando se lida com *ensembles* de sistemas preparados de maneira não idêntica, ou quando se considera apenas uma parte (subconjunto) de um sistema composto. Em um experimento de Stern–Gerlach, um feixe completamente não polarizado — composto por spins “para cima” e “para baixo” em proporções iguais — produz sempre dois feixes emergentes de igual intensidade, independentemente da orientação do aparato [35]. Esse é um caso típico de *estado misto*: não há um único vetor  $|\psi\rangle$  que o represente, mas sim uma mistura estatística de diferentes estados puros.

Para descrever de forma unificada tanto os estados puros quanto os mistos, [30] introduziu o formalismo do *operador densidade* (ou *matriz densidade*).

### 5.2.1 Definição formal

Considere um *ensemble* de sistemas quânticos em que cada membro está no estado puro  $|\psi_i\rangle$  com probabilidade  $p_i$ , onde  $p_i \geq 0$  e  $\sum_i p_i = 1$ . O *operador densidade* é definido por:

$$\rho \equiv \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|. \quad (5.7)$$

No caso particular de um estado puro  $|\psi\rangle$ , temos:

$$\rho = |\psi\rangle \langle \psi|. \quad (5.8)$$

O operador densidade contém toda a informação fisicamente acessível sobre o estado do sistema e permite calcular valores médios de observáveis  $A$  por [31]:

$$\langle A \rangle = \text{Tr}(\rho A). \quad (5.9)$$

Se o sistema evolui de forma unitária sob um operador  $U(t)$ , a matriz densidade evolui como:

$$\rho(t) = U(t) \rho(0) U^\dagger(t), \quad (5.10)$$

ou, de forma diferencial, pela *equação de Liouville–von Neumann* (Que será explorada na próxima seção):

$$i\hbar \frac{d\rho}{dt} = [H, \rho], \quad (5.11)$$

em analogia à equação de Liouville da mecânica estatística clássica [20, 35].

## 5.2.2 Propriedades fundamentais

O operador densidade de qualquer sistema quântico satisfaz as seguintes propriedades [31, 9]:

1. **Hermiticidade:**  $\rho^\dagger = \rho$ ;
2. **Normalização:**  $\text{Tr}(\rho) = 1$ ;
3. **Positividade:**  $\langle \phi | \rho | \phi \rangle \geq 0$  para todo  $|\phi\rangle$ .

Além disso, distingue-se entre estados puros e mistos por:

$$\text{Estado puro: } \rho^2 = \rho \quad \text{e} \quad \text{Tr}(\rho^2) = 1, \quad (5.12)$$

$$\text{Estado misto: } \rho^2 \neq \rho \quad \text{e} \quad \text{Tr}(\rho^2) < 1. \quad (5.13)$$

## 5.2.3 Mistura versus superposição

Uma analogia pode ajudar a distinguir os conceitos. Uma mistura é como ter uma moeda clássica no bolso: sabemos que ela é "cara" ou "coroa", mas temos 50% de incerteza sobre qual face está para cima. A incerteza é clássica, fruto do nosso desconhecimento. Já uma superposição é análoga a uma "moeda quântica" girando no ar. Ela não é nem "cara", nem "coroa", mas sim uma combinação coerente de "cara E coroa" ao mesmo tempo. Apenas o ato da medição (quando a moeda para de girar) força um resultado definitivo. A superposição permite o fenômeno da interferência, enquanto a mistura não.

É importante diferenciar *superposição* de *mistura*. Uma superposição quântica, como  $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ , ainda representa um estado puro: pode ser descrita por um vetor único em Hilbert e sua matriz densidade é idempotente. Já uma mistura, como “50% no estado  $|0\rangle$  e 50% no estado  $|1\rangle$ ”, não é representada por um único vetor — trata-se de uma combinação estatística de estados puros [20].

Para sistemas de spin-1/2, qualquer matriz densidade pode ser escrita como:

$$\rho = \frac{1}{2} (I + \vec{a} \cdot \vec{\sigma}), \quad (5.14)$$

onde  $\vec{a}$  é o *vetor de Bloch* e  $\|\vec{a}\| \leq 1$ . Estados puros correspondem a  $\|\vec{a}\| = 1$  (pontos na superfície da esfera de Bloch) e estados mistos a  $\|\vec{a}\| < 1$  (pontos internos) [31].

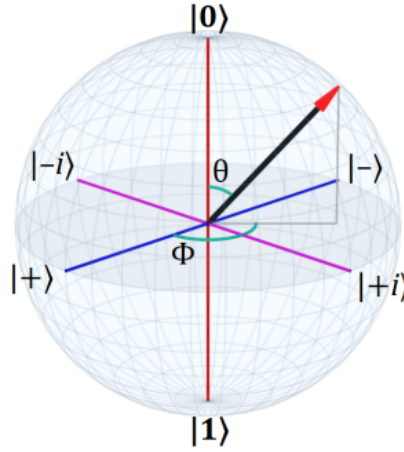


Figura 2 – A esfera de Bloch, seus estados de base e seus dois ângulos.

Fonte: Sen (2021) [37].

### 5.2.4 Exemplos

1. **Estado puro** — spin “para cima” no eixo  $x$ :

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.15)$$

Este  $\rho$  é hermitiano, normalizado, idempotente e satisfaz  $\text{Tr}(\rho^2) = 1$ .

2. **Estado misto** — spin “para cima” ou “para baixo” no eixo  $z$ , cada um com probabilidade  $1/2$ :

$$\rho = \frac{1}{2}I = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.16)$$

Neste caso,  $\text{Tr}(\rho^2) = 1/2 < 1$ , confirmando que é um estado misto.

Nota-se que o formalismo da matriz densidade é uma reformulação completa da mecânica quântica, equivalente à descrição por vetores de estado, mas mais geral e versátil. Ele permite lidar de forma natural com estados mistos, medições generalizadas e subsistemas, além de ser indispensável na teoria quântica da informação. Um aspecto importante é que a decomposição de  $\rho$  em um conjunto  $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$  *não é única*: diferentes ensembles podem gerar a mesma matriz densidade. Assim,  $\rho$  representa toda a informação física disponível sobre o sistema, mas não carrega, de forma única, um histórico sobre como essa mistura foi preparada [31].

## 5.3 Coerência e o Processo de Descoerência

A coerência quântica é uma das características definidoras da mecânica quântica, manifestando diretamente o princípio da superposição [20]. Enquanto um sistema clássico

se encontra em um único estado bem definido, um sistema quântico pode existir em uma superposição coerente de múltiplos estados simultaneamente, como um qubit no estado

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle.$$

No formalismo da matriz densidade, essa coerência é codificada nos **elementos fora da diagonal** de  $\rho$  [9]. Para o estado de qubit acima, a matriz densidade  $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$  possuiria termos  $\rho_{01} = \alpha\beta^*$  e  $\rho_{10} = \alpha^*\beta$  não nulos. Esses elementos representam as correlações de fase entre os estados da base e são responsáveis por fenômenos quânticos como a interferência. Em contraste, os elementos da diagonal,  $\rho_{00} = |\alpha|^2$  e  $\rho_{11} = |\beta|^2$ , representam as populações, ou seja, as probabilidades de se encontrar o sistema nos respectivos autoestados de uma base [31, 35].

A descoerência é o processo dinâmico através do qual a coerência quântica é perdida devido à interação inevitável de um sistema com seu ambiente — ou, como postulado no escopo deste trabalho, através de interações fundamentais com a própria estrutura quântica do espaço-tempo. Este fenômeno é considerado a chave para a compreensão da transição quântico-clássica e do problema da medida em mecânica quântica [36, 18]. Matematicamente, a descoerência se manifesta pelo decaimento, muitas vezes exponencial, dos elementos fora da diagonal da matriz densidade. À medida que o sistema evolui, os termos  $\rho_{ij}(t)$  (para  $i \neq j$ ) tendem a zero, e o sistema perde progressivamente sua capacidade de exibir comportamento quântico macroscópico [10].

O estado final de um processo de descoerência completo é aquele em que a matriz densidade se torna diagonal em uma base preferencial (geralmente a de energia). Uma matriz densidade diagonal, da forma

$$\rho_{\text{final}} = \sum_i p_i |i\rangle\langle i|,$$

não representa mais uma superposição quântica, mas sim uma **mistura estatística clássica**. O sistema se comporta como se estivesse no estado  $|i\rangle$  com probabilidade  $p_i$ , sem qualquer correlação de fase entre os diferentes estados. A coerência original do sistema foi, na prática, transferida para as correlações emaranhadas entre o sistema e os graus de liberdade do ambiente, que se tornam inacessíveis [36, 31].

O formalismo da equação mestra de Lindblad, que será detalhado na sequência, captura este processo de forma elegante e matematicamente rigorosa. A evolução unitária, governada pelo comutador  $[H, \rho]$ , preserva a coerência do sistema. É o termo dissipativo,  $\mathcal{D}[\rho]$ , o responsável direto por suprimir os elementos fora da diagonal, modelando o efeito do ambiente e, conseqüentemente, a descoerência [24, 10]. Este formalismo é a ferramenta essencial para modelar mecanismos de descoerência fundamental, cujo impacto em fenômenos como o emaranhamento será o foco da análise deste trabalho.

## 5.4 Equação de Liouville-von Neumann

Na formulação da Mecânica Quântica, a evolução temporal de um sistema físico pode ser descrita de duas maneiras equivalentes: pelo vetor de estado  $|\psi(t)\rangle$ , no formalismo de estados puros, ou pela matriz densidade  $\rho(t)$ , que permite descrever tanto estados puros quanto mistos. A matriz densidade é particularmente útil quando se deseja generalizar a descrição quântica para situações em que o sistema não está em um único estado vetorial, mas em uma distribuição estatística de estados.

Para sistemas **fechados**, isto é, aqueles que não interagem com o ambiente externo e cuja evolução é unitária, a dinâmica da matriz densidade é governada pela **equação de Liouville-von Neumann**. Esta equação é a análoga quântica da equação clássica de Liouville da Mecânica Estatística e é dada por [9]:

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \rho(t)], \quad (5.17)$$

onde  $\hat{H}$  é o Hamiltoniano do sistema e  $[\cdot, \cdot]$  denota o comutador entre operadores.

Essa equação expressa a evolução temporal da matriz densidade sob a ação do Hamiltoniano, implicando que, para sistemas fechados, a dinâmica é unitária e preserva tanto a traça quanto a positividade de  $\rho$ .

### 5.4.1 Derivação da Equação de Liouville-von Neumann

Começamos com a **equação de Schrödinger dependente do tempo**, válida para estados puros [20]:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle. \quad (5.18)$$

A matriz densidade para um estado puro é definida como:

$$\rho(t) = |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)|. \quad (5.19)$$

#### Passo 1: Derivar a matriz densidade no tempo

Tomando a derivada temporal de  $\rho(t)$ :

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} (|\psi(t)\rangle \langle \psi(t)|) = \left( \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle \right) \langle \psi(t)| + |\psi(t)\rangle \left( \frac{\partial}{\partial t} \langle \psi(t)| \right). \quad (5.20)$$

#### Passo 2: Substituir as equações de Schrödinger e sua adjunta

Da equação de Schrödinger:

$$\frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar} \hat{H} |\psi(t)\rangle, \quad (5.21)$$

e, tomando o conjugado Hermitiano:

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \psi(t) | = \frac{i}{\hbar} \langle \psi(t) | \hat{H}. \quad (5.22)$$

Substituindo em  $\frac{d\rho}{dt}$ :

$$\frac{d\rho}{dt} = \left( -\frac{i}{\hbar} \hat{H} |\psi\rangle \right) \langle \psi| + |\psi\rangle \left( \frac{i}{\hbar} \langle \psi| \hat{H} \right). \quad (5.23)$$

**Passo 3: Escrever em termos de comutador**

Reconhecendo que  $\rho = |\psi\rangle \langle \psi|$ , obtemos:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{i}{\hbar} \hat{H} \rho + \frac{i}{\hbar} \rho \hat{H}. \quad (5.24)$$

Assim, chegamos à forma final:

$$\boxed{\frac{d\rho}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \rho]}, \quad (5.25)$$

que é a **equação de Liouville-von Neumann** para sistemas fechados.

A solução formal dessa equação é dada por [9]:

$$\rho(t) = U(t) \rho(0) U^\dagger(t), \quad (5.26)$$

onde  $U(t) = e^{-i\hat{H}t/\hbar}$  é o operador de evolução temporal unitário.

Como  $\text{Tr}(\rho)$  é preservada e  $\rho$  mantém-se Hermitiana e positiva, a evolução é unitária e não há aumento de entropia (sem descoerência). Essa equação constitui a base para generalizações posteriores em sistemas abertos via equações de Lindblad.

## 5.5 Equação Mestra de Lindblad

A **Equação Mestra de Lindblad**, também conhecida como equação de Gorini–Kossakowski–Sudarshan–Lindblad (GKSL) [19], constitui o formalismo padrão para descrever a dinâmica *markoviana*<sup>3</sup> de sistemas quânticos abertos. Ela surge como generalização da equação de Liouville–von Neumann, incorporando de maneira consistente os efeitos de dissipação e descoerência devidos ao acoplamento com o ambiente [24, 19]. A principal virtude da forma de Lindblad é garantir que a evolução temporal seja um mapa linear, preservador de traço e completamente positivo (CPTP, *completely positive and trace-preserving*), assegurando que estados físicos (matrizes densidade) sejam levados sempre a estados físicos [24, 9].

<sup>3</sup> A dinâmica markoviana é um tipo específico de processo estocástico, caracterizado pela ausência de "memória". Fisicamente, isso corresponde à aproximação de que o ambiente tem tempos de correlação muito mais curtos que os do sistema, fazendo com que a evolução futura do sistema dependa apenas do seu estado atual.

### 5.5.1 Contexto Histórico e Motivação

O problema da descrição da evolução de sistemas quânticos abertos remonta à década de 1970, quando Gorini, Kossakowski e Sudarshan, independentemente de Lindblad, estabeleceram que o gerador de qualquer semigrupo dinâmico quântico markoviano deve possuir uma forma universal. Essa forma, conhecida como **teorema GKSL**, caracteriza de modo único todas as equações mestras lineares, homogêneas e que preservam a positividade. Assim, a equação de Lindblad não é apenas um modelo específico, mas a estrutura mais geral compatível com a física de sistemas abertos sob hipóteses de markovianidade [19, 24].

### 5.5.2 Derivação Conceitual

A derivação da equação mestra de Lindblad parte de um sistema  $S$  acoplado a um reservatório  $R$ , descrito pelo Hamiltoniano total:

$$H_{\text{tot}} = H_S \otimes I_R + I_S \otimes H_R + H_{SR}, \quad (5.27)$$

onde  $H_S$  é o Hamiltoniano do sistema,  $H_R$  o do reservatório, e  $H_{SR}$  o termo de interação. A dinâmica exata da matriz densidade reduzida  $\rho_S(t) = \text{Tr}_R[\rho_{SR}(t)]$  é, em geral, intratável. Assim, são feitas aproximações fundamentais:

1. **Aproximação de Born:** o acoplamento sistema–reservatório é fraco, permitindo fatorar o estado combinado como  $\rho_{SR}(t) \approx \rho_S(t) \otimes \rho_R$ .
2. **Aproximação de Markov:** as correlações no reservatório decaem rapidamente em comparação com as escalas temporais do sistema.
3. **Rotating Wave Approximation (RWA):** termos de oscilação rápida são desprezados, restando apenas contribuições ressonantes.

Aplicando essas aproximações, obtém-se uma equação diferencial local no tempo [24, 10], da forma:

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = \mathcal{L}[\rho(t)] = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho(t)] + \mathcal{D}[\rho(t)], \quad (5.28)$$

onde  $\mathcal{L}$  é o gerador do semigrupo dinâmico e  $\mathcal{D}$  é o dissipador de Lindblad:

$$\mathcal{D}[\rho] = \sum_k \gamma_k \left( L_k \rho L_k^\dagger - \frac{1}{2} \{L_k^\dagger L_k, \rho\} \right). \quad (5.29)$$

Os operadores  $L_k$  são chamados **operadores de salto** (*jump operators*) e modelam processos estocásticos induzidos pelo ambiente, como emissão espontânea, absorção ou descoerência de fase. Os coeficientes  $\gamma_k \geq 0$  representam taxas de dissipação associadas a cada processo.

### 5.5.3 Propriedades Fundamentais

A equação de Lindblad possui propriedades cruciais que asseguram consistência física [9, 31]:

- **Preservação do traço:**  $\text{Tr}[\rho(t)] = 1$ , garantindo conservação da probabilidade.
- **Completamente positiva:** qualquer estado físico é levado em outro estado físico, mesmo em sistemas emaranhados.
- **Irreversibilidade:** a presença do dissipador introduz uma flecha temporal, conectada ao aumento da entropia de von Neumann.
- **Invariância sob transformações unitárias locais:** a física não depende da escolha de base para os operadores de salto.

### 5.5.4 Exemplos Ilustrativos

#### 5.5.4.1 Átomo de Dois Níveis

Considere um sistema de dois níveis  $\{|g\rangle, |e\rangle\}$  acoplado a um reservatório térmico [9]. Os operadores de Lindblad relevantes são:

$$L_1 = \sigma_- = |g\rangle\langle e|, \quad (\text{emissão espontânea}), \quad (5.30)$$

$$L_2 = \sigma_+ = |e\rangle\langle g|, \quad (\text{absorção térmica}), \quad (5.31)$$

com taxas  $\gamma_1 = \Gamma(1 + n_{\text{th}})$  e  $\gamma_2 = \Gamma n_{\text{th}}$ , onde  $n_{\text{th}}$  é a ocupação média do reservatório. A equação resultante descreve relaxação populacional e mistura térmica.

#### 5.5.4.2 Descoerência de Fase

Para um qubit<sup>4</sup> sujeito a ruído de fase, o operador de Lindblad é  $L = \sigma_z$ , com taxa  $\gamma$  [9]. A equação resultante é:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho] + \gamma(\sigma_z \rho \sigma_z - \rho), \quad (5.32)$$

o que suprime os elementos fora da diagonal de  $\rho$  sem afetar as populações — modelo fundamental para descoerência quântica.

Assim, a Equação Mestra de Lindblad constitui o formalismo universal para a descrição de sistemas quânticos abertos sob hipóteses de markovianidade. Seu papel central na teoria da descoerência e na dinâmica dissipativa a torna indispensável em óptica

<sup>4</sup> Um qubit (ou bit quântico) é a unidade fundamental da informação quântica e o análogo quântico do bit clássico. Enquanto um bit clássico assume os valores 0 ou 1, um qubit pode existir em uma superposição coerente de ambos os estados, descrita por um vetor de estado da forma  $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ , onde  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ .

quântica, matéria condensada e ciência da informação quântica. Além disso, fornece a base matemática para a descrição de *canais quânticos*, essenciais em computação quântica e protocolos de correção de erros.

Com o formalismo da Equação Mestra de Lindblad estabelecido, temos agora o formalismo necessário para modelar como uma modificação estocástica na relação de dispersão, atuando como um ruído ambiental efetivo, pode induzir a descoerência em um sistema quântico. No capítulo seguinte, este arcabouço será aplicado diretamente ao problema em estudo. Serão apresentados os resultados originais, incluindo a derivação de uma equação de Lindblad específica para o modelo e a análise de como o emaranhamento quântico evolui sob a influência desse mecanismo de descoerência.

## 6 Resultados e Discussões

Os resultados a serem discutidos nesta seção foram desenvolvidos em colaboração com Iarley P. Lobo, Gislaine Varão, Moises Rojas e Valdir B. Bezerra, e são baseados no artigo **LIV-Decoherence on Gravitational Cat States**, publicado no periódico Physics Letters B [25].

Nesse contexto de colaboração, a derivação geral da equação mestra (Seção 6.1) e a análise do tempo de descoerência (Seção 6.2) estabelecem a base teórica. A contribuição original e foco deste TCC, apresentada na Seção 6.3, será aplicar este formalismo a um sistema de dois níveis para, então, resolver a dinâmica da matriz densidade, calcular analiticamente a Concorrência e analisar o fenômeno da 'Morte do Emaranhamento' como consequência direta do modelo.

### 6.1 Equação de Lindblad - Gravidade Quântica

Como discutido anteriormente, alguns modelos de gravitação quântica preveem que efeitos associados a essa teoria podem persistir mesmo no limite não-relativístico da dinâmica de partículas. Esse comportamento dual é conhecido como mistura ultravioleta/infravermelha [2], e tornou-se recentemente uma linha de investigação ativa na comunidade de gravidade quântica. Nesse contexto, destacam-se propostas que envolvem modificações do princípio da incerteza, associadas à existência de um comprimento mínimo [32], alterações nas álgebras no regime Galileano [3], bem como correções na relação de dispersão que impactam a equação de Schrödinger [42].

Quando esse parâmetro flutua de forma aleatória, denomina-se deformação estocástica, o enfoque estocástico vem sendo restringido por observações astrofísicas, como em explosões de raios gama [41], embora seu estudo em sistemas quânticos ainda seja relativamente pouco desenvolvido.

Um resultado de destaque é apresentado em [32], onde se mostra que uma equação de Schrödinger estocástica modificada, derivada de um princípio de incerteza generalizado (GUP), conduz a um mecanismo fundamental de descoerência. Apesar de os efeitos previstos serem extremamente pequenos — já que dependem das potências segunda e quarta do comprimento de Planck ( $\sim 10^{-35}$  m) — espera-se que tais correções sejam universais, dada a impossibilidade de blindagem contra a interação gravitacional. Dessa forma, elas devem impactar, por exemplo, sistemas compostos por duas partículas massivas em superposição de estados de posição (os chamados gravcat states). Estudos recentes mostram que, nessas condições, a incerteza gravitacional conduz inevitavelmente à formação de emaranhamento [7, 26, 27].

Aqui, analisamos como os efeitos estocásticos da gravidade quântica influenciam a formação de emaranhamento em sistemas quânticos. Para isso, adotamos uma abordagem distinta, baseada em uma equação de Schrödinger estocástica com correção de primeira ordem — e, portanto, com intensidade maior que a de [32] — a partir da qual derivamos uma equação de Lindblad.

Como visto em [25], sob uma lente fenomenológica, uma das direções mais promissoras de investigação em gravidade quântica explora a ideia de que a essência quântica do espaço-tempo pode deixar vestígios nas características cinemáticas das partículas. Essas variações em relação ao comportamento clássico se entrelaçam com a energia e o momento das partículas de teste e são atenuadas pela escala de energia associada à gravidade quântica. O efeito se revela através de uma alteração efetiva no hamiltoniano das partículas livres. Diferentes teorias de gravidade quântica oferecem previsões divergentes sobre como tais variações podem surgir. Uma abordagem fenomenológica para capturar essas correções e analisar suas manifestações consiste em considerar uma relação de dispersão alterada para partículas com energia  $E$ , momento  $p$  e massa  $M$ , da seguinte maneira:

$$M^2 c^2 = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - p^2 - \ell \xi_n (Mc)^{n-3} p^{3-n}, \quad (6.1)$$

onde  $\ell^{-1} = E_P/c \approx 6,5 \text{ N.s}$  é o momento de Planck,  $E_P \approx 1,22 \times 10^{19} \text{ GeV}$  denota a energia de Planck,  $c$  é a velocidade da luz e  $\xi_n$  são variáveis esperadas para ter uma magnitude da ordem de unidade. Conforme mencionado anteriormente, essa fórmula inclui correções gerais que são influenciadas pela energia e pelo momento das partículas que servem como teste.

A astrofísica relativística oferece o contexto mais prevalente para investigar os efeitos decorrentes dessas correções, uma vez que são intensificados pelas energias das partículas. Entretanto, investigações recentes indicam que essas correções podem igualmente impactar escalas não relativísticas, que estão agora sendo restringidas pela sensibilidade da escala de Planck. Neste contexto, como mencionado em [42], as contribuições mais significativas surgem de correções que são proporcionais às potências da massa e do momento:

$$E = \frac{p^2}{2M} + \frac{\ell}{2M} \xi_n (Mc)^{3-n} p^n. \quad (6.2)$$

Os sistemas quânticos ofereceram a mais significativa perspectiva para a pesquisa desses efeitos no infravermelho. Para isso, foi essencial formular uma equação de Schrödinger correspondente. De fato, ao realizar uma folheação do espaço-tempo e quantizar a Eq.(6.2) ou ao calcular o limite não relativístico da equação de Klein-Gordon que se alinha com (6.2), a equação de Schrödinger adquire a forma

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\ell, NR, EM} \psi = & \left[ -\frac{\hbar^2 h^{ij}}{2M} (\nabla_i - ieA_i^e - iMA_i^g) (\nabla_j - ieA_j^e - iMA_j^g) + e\phi_e + M\phi_g \right. \\ & \left. - \frac{\ell}{2M} \sum_{n=1}^3 \xi_n (Mc)^{3-n} \left[ -\hbar^2 h^{ij} (\nabla_i - ieA_i^e) (\nabla_j - ieA_j^e) \right]^{\frac{n}{2}} \right] \psi. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Aqui,  $\phi$  e  $A_i^e$  representam os potenciais escalar e vetorial associados ao eletromagnetismo, sendo  $e$  a carga elétrica da partícula. As quantidades  $\phi$  e  $A_i^g$  referem-se ao potencial escalar do campo gravitoeletrostático e ao potencial vetorial do campo gravitomagnético para uma partícula com massa  $M$ , como indicado em [33]. Por sua vez,  $h_{ij}$  denota a métrica espacial do folheamento.

Foram analisados diversos efeitos que derivam dessa equação, abrangendo alterações nos níveis de Landau, nos níveis de energia do oscilador harmônico e no princípio da equivalência fraca [42]. Foi igualmente demonstrado que existe uma correspondência um-para-um entre a abordagem da relação de dispersão alterada e a que modifica o princípio da incerteza devido a um comprimento mínimo [42]. Essa conexão revelou-se fundamental para mapear as restrições identificadas em diferentes contextos de princípio da incerteza generalizada (GUP)<sup>1</sup> e na relação de dispersão modificada (MDR), proporcionando avanços significativos em relação aos limites previamente estabelecidos. Apesar dessas alterações, o sistema se mantém isolado e a natureza quântica do espaço-tempo não provoca efeitos adicionais, como a descoerência.

Entretanto, recentemente, o foco se voltou para a possibilidade de que flutuações no espaço-tempo, causadas pela gravidade quântica, possam não apenas alterar o hamiltoniano, mas também trazer efeitos de descoerência em sistemas quânticos. Matematicamente, isso é expresso por uma equação de Lindblad que regula a evolução da matriz de densidade do sistema. Esses efeitos surgem de forma natural a partir do GUP quando o parâmetro de deformação é estocástico. De fato, o próprio GUP não é essencial, já que o elemento central é uma equação de Schrödinger parametrizada de maneira estocástica, da qual uma matriz de densidade média evolui sob uma equação de Lindblad.

Considere, então, a equação de Schrödinger (6.3) com parâmetros que flutuam, simbolizados por  $\xi_n$ . Analisamos a situação em que os potenciais vetoriais se tornam nulos e tratamos cada valor de  $n$  separadamente. Isso gera um hamiltoniano com forma

$$\hat{H} = \hat{K} + e\phi_e + M\phi_g - \xi_n \ell (Mc)^{3-n} (2M)^{\frac{n-2}{2}} \hat{K}^{n/2} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{\ell,n}, \quad (6.4)$$

onde  $\hat{K} = -\frac{\hbar^2}{2M} h^{ij} \nabla_i \nabla_j$  é o operador energia cinética,  $\hat{H}_0 = \hat{K} + \phi_e + M\phi_g$  representa o hamiltoniano que não passa por deformação e  $\hat{H}_{\ell,n} = -\xi_n \ell (Mc)^{3-n} (2M)^{\frac{n-2}{2}} \hat{K}^{n/2}$  expressa a correção hamiltoniana resultante de MDR ou GUP. Esse hamiltoniano influencia a evolução temporal do vetor de estado  $|\phi\rangle$ , e a sua correspondente matriz de densidade de estado puro  $\varrho = |\psi\rangle\langle\psi|$  obedece à equação de Liouville-von Neumann.

$$i\hbar \partial_t |\psi\rangle = (\hat{H}_0 + \hat{H}_{\ell,n}) |\psi\rangle \Rightarrow \partial_t \varrho = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}_0 + \hat{H}_{\ell,n}, \varrho]. \quad (6.5)$$

<sup>1</sup> O Princípio da Incerteza Generalizado (GUP) postula a existência de um comprimento mínimo mensurável. Formalmente, o GUP pode ser derivado de "relações de comutação deformadas", que modificam o comutador canônico de Heisenberg.

Para examinar esta equação, seguimos as etapas mencionadas em [14]. Estabelecemos um novo hamiltoniano e sua perturbação aleatória como

$$\hat{H}'_0 = \hat{H}_0 + g(\hat{K}), \quad (6.6)$$

$$\hat{H}'_{\ell,n} = \hat{H}_{\ell,n} - g(\hat{K}), \quad (6.7)$$

onde  $g(\hat{K}) = \langle \hat{H}_{\ell,n} \rangle$  e  $\langle * \rangle$  indica a média em relação ao processo estocástico. Isso assegura que  $\langle \hat{H}'_{\ell,n} \rangle = 0$ .

A característica estocástica de  $\xi_n$  levará à formulação de uma equação mestra que elucidará um sistema quântico aberto, conforme iremos demonstrar a seguir. Com base na metodologia apresentada em [32], consideramos a contribuição hamiltoniana modificada  $\hat{H}_{\ell,n}$  como representando a interação da partícula com os graus de liberdade gravitacionais. Operamos na representação de interação, definindo o estado  $|\psi^I\rangle$  como

$$|\psi\rangle = e^{-i\hat{H}'_0 t/\hbar} |\psi^I\rangle. \quad (6.8)$$

Isso nos permite escrever a equação de Schrödinger como

$$i\hbar\partial_t |\psi^I\rangle = e^{i\hat{H}'_0 t/\hbar} \hat{H}'_{\ell,n} e^{-i\hat{H}'_0 t/\hbar} |\psi^I\rangle \doteq \hat{H}'_{\ell,n} |\psi^I\rangle. \quad (6.9)$$

Portanto, a equação de Liouville-von Neumann referente à matriz de densidade  $\varrho^I = |\psi^I\rangle\langle\psi^I|$  na representação de interação se transforma em

$$\partial_t \varrho^I = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}'_{\ell,n}, \varrho^I]. \quad (6.10)$$

A solução formal dessa equação é:

$$\varrho^I(t) = \varrho^I(0) - \frac{i}{\hbar} \int_0^t [\hat{H}'_{\ell,n}(t'), \varrho^I(t')] dt'. \quad (6.11)$$

Substituindo (6.11) de volta em (6.10) resulta

$$\partial_t \varrho^I(t) = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}'_0(t), \varrho^I(0)] - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t [\hat{H}'_0(t), [\hat{H}'_0(t'), \varrho^I(t')]] dt', \quad (6.12)$$

onde utilizamos a aproximação de Born-Markov para incorporar  $\hat{H}'_0(t)$  na integral como uma função unicamente dependente de  $t$ . Consideramos  $\xi_n$  como um ruído gaussiano com média constante e autocorrelação acentuada:

$$\langle \xi_n(t) \rangle = 1, \quad \xi_n = \sqrt{t_{QG}} \chi_n(t), \quad \langle \chi_n(t), \chi_n(t') \rangle = \delta(t - t'), \quad (6.13)$$

onde  $t_{QG}$  representa a escala temporal da gravidade quântica, presumivelmente da magnitude do tempo de Planck.

Dado que a equação de evolução apresenta flutuações, analisamos a matriz de densidade média  $\langle \varrho \rangle \doteq \rho$  para investigar o sistema quântico. A equação diferencial média

pode ser obtida através do método de expansão cumulante, desenvolvendo as equações de movimento de  $\rho^I$  em função do cumulante do operador  $[\hat{H}_\ell^I, *]$  [40]:

$$\partial_t \rho^I = - \int_0^t \langle [\hat{H}_{\ell,n}^I(t), [\hat{H}_\ell^I(t'), \rho^I(t)]] \rangle dt'. \quad (6.14)$$

Considerando que  $\hat{H}_{\ell,n}^I(t)$  siga as estatísticas de ruído branco gaussiano, é obtida a equação de evolução:

$$\begin{aligned} \partial_t \rho^I &= -\frac{\ell^2}{\hbar^2} t_{QG} (Mc)^{6-2n} (2M)^{n-2} \int_0^t \langle \xi_n(t), \xi_n(t') \rangle [(\hat{K}^I)^{n/2}(t), [(\hat{K}^I)^{n/2}(t'), \rho^I(t)]] \\ &= -\frac{\sigma_n^2}{\hbar^2} t_{QG} [(\hat{K}^I)^{n/2}, [(\hat{K}^I)^{n/2}, \rho^I]], \end{aligned} \quad (6.15)$$

onde  $\sigma_n = \ell(Mc)^{3-n}(2M)^{\frac{n-2}{2}}$ . Para a matriz densidade  $\rho = e^{-i\hat{H}_0^I t/\hbar} \rho^I e^{i\hat{H}_0^I t/\hbar}$ , é obtida a principal expressão para este trabalho, a equação mestra de Lindblad:

$$\partial_t \rho(t) = -\frac{i}{\hbar} [\hat{K} + \hat{V} - \sigma_n \hat{K}^{n/2}, \rho(t)] - \frac{\sigma_n^2}{\hbar^2} t_{QG} [\hat{K}^{n/2}(t), [\hat{K}^{n/2}(t), \rho(t)]] . \quad (6.16)$$

Esta equação descreve um sistema quântico aberto que sofre descoerência devido a flutuações do espaço-tempo quântico. A intensidade da interação com o meio ambiente é definida por  $\sigma_n$ , que é influenciada pela massa do sistema. Quando  $n = 1$ , nosso Lindbladiano  $\sqrt{\hat{K}} \propto \hat{p}$  é semelhante ao apresentado em [3], embora este último empregue componentes de momento  $\hat{p}_i$  como Lindbladianos. Para  $n = 2$ , o termo de Lindblad se assemelha ao de [8], onde  $\hat{p}^2 \propto \hat{K}$  serve como Lindbladiano. No cenário de  $n = 3$ , um novo termo  $\hat{K}^{3/2}$  é introduzido.

## 6.2 Tempo de Descoerência

Para calcular a escala temporal de descoerência, analisamos uma partícula não relativística livre com  $\hat{H}_0 = \hat{K} - \sigma_n K^{n/2}$ . Na representação de momento, os elementos da matriz de densidade  $\rho_{p,q} = \langle p | \rho | q \rangle$  (sendo  $|p\rangle$  um autovetor de momento) evoluem conforme:

$$\partial_t \rho_{pq} = \left[ -\frac{i}{\hbar} (\tilde{E}(p) - \tilde{E}(q)) - \sigma_n (E^{n/2}(p) - E^{n/2}(q))^2 \right] \rho_{pq}, \quad (6.17)$$

onde  $\tilde{E} = E - \sigma_n E^{n/2}$ . A solução fornece as componentes da matriz densidade:

$$\rho_{pq}(t) = \rho_{pq}(0) \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} (\tilde{E}(p) - \tilde{E}(q)) t \right] \exp \left[ -\sigma_n (E^{n/2}(p) - E^{n/2}(q))^2 t \right]. \quad (6.18)$$

Elementos que não estão na diagonal são reduzidos pelo fator de amortecimento  $\sigma_n$ , tendo um tempo de descoerência definido como  $\tau_D = 1/(\sigma_n (\Delta E^{n/2})^2)$ , sendo que  $(\Delta E^{n/2})^2 = (E^{n/2}(p) - E^{n/2}(q))^2$ . Substituindo  $\ell = c/E_p$ , o tempo de descoerência se torna:

$$\tau_{D,n} = \frac{2^{2-n} \hbar^2}{(Mc^2)^{4-n} (\Delta E^{n/2})^2} \frac{E_p^2}{t_{QG}}. \quad (6.19)$$

Para a comparação com os modelos de descoerência gravitacional quântica relativística, estabelecemos  $M = E/c^2$  e  $\Delta E^{n/2} \sim E^{n/2}$ . Ao considerarmos  $t_{QG} = t_p = \hbar/E_p$  (tempo de Planck), chegamos a um tempo de descoerência que não depende de  $n$ :

$$\tau_D \propto \hbar \frac{E_p^3}{E^4}, \quad (6.20)$$

Compartilhando a dependência energética do modelo de Ellis-Mohanty-Nanopoulos [17]. O objetivo é investigar como o LIV afeta o emaranhamento em estados quânticos massivos que interagem através da gravidade.

### 6.3 Aplicação: Sistema de Dois Níveis

Para demonstrar uma consequência física direta do mecanismo de descoerência derivado neste trabalho, aplicamos a equação mestra (6.16) a um sistema composto por dois qubits não interagentes. Esta análise, que constitui um dos resultados centrais do artigo submetido [25], tem como objetivo investigar a evolução temporal do emaranhamento, uma das mais frágeis e importantes correlações quânticas, sob a influência das flutuações do espaço-tempo.

Um qubit é um sistema de dois níveis de energia, descrito numa base de autoestados de energia por uma hamiltoniana de evolução  $\hat{H}_0$  dada por

$$\hat{H}_0 = \begin{bmatrix} \frac{E}{2} + \frac{\epsilon}{2} & 0 \\ 0 & \frac{E}{2} - \frac{\epsilon}{2} \end{bmatrix}, \quad (6.21)$$

onde  $E/2$  é o nível de energia fixa de referência e  $\epsilon/2$  é o desvio no nível de energia. Os autoestados são

$$|\uparrow\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |\downarrow\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (6.22)$$

essa é a chamada base computacional.

Utilizando a matriz de Pauli  $\sigma_z = \text{diag}(1, -1)$  e a matriz identidade  $\mathbb{I}$ , pode-se escrever essa hamiltoniana como

$$\hat{H}_0 = \frac{E}{2}\mathbb{I} + \frac{\epsilon}{2}\sigma_z. \quad (6.23)$$

Se essa hamiltoniana puder ser definida por meio de um acoplamento mínimo com um campo eletromagnético, pode-se identificar  $\hat{H}_0$  com a energia cinética da partícula, onde o momentum minimamente acoplado é dado por (2.13). Nesse caso, teremos  $\hat{H}_0 = \hat{K}$  em (6.16).

<sup>1</sup> A suposição  $\Delta E^{n/2} \sim E^{n/2}$  corresponde ao cenário em que a separação de energia entre os estados em superposição é da mesma ordem da energia da partícula. Esta é uma estimativa fisicamente motivada ao se buscar um limite superior para a taxa de descoerência.

Um sistema de 2 partículas livres ( $\hat{V} = 0$ ) é dada pela hamiltoniana, que vamos chamar de  $\hat{K}$ , por conveniência:

$$\hat{K} = E\mathbb{K} \otimes \mathbb{K} + \epsilon\sigma_z \otimes \sigma_z = \begin{bmatrix} E + \epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E - \epsilon \end{bmatrix}. \quad (6.24)$$

Esse operador será utilizado na equação de evolução (6.16) para estudar os efeitos de descoerência. O estado que descreve as duas partículas é dado pelo produto tensorial (5.1), onde  $\phi_{1,2}$  é o estado da partícula 1, 2.

O sistema é preparado no instante  $t = 0$  em um estado maximamente emaranhado, especificamente o estado de Bell  $|\Phi^+\rangle$  (5.6) que será chamado de  $|\Psi(0)\rangle$ . O estado inicial é, portanto:

$$|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle) \quad (6.25)$$

A matriz densidade inicial,  $\rho(0) = |\Psi(0)\rangle\langle\Psi(0)|$ , que ao realizar esse produto o resultado se dá em sua forma matricial,

$$\rho(0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad (6.26)$$

descreve um sistema com o máximo grau de emaranhamento.

Tomamos como ansatz o seguinte formato da matriz densidade dependente do tempo, que corresponde a um chamado estado-X

$$\rho(t) = \begin{bmatrix} \rho_{11}(t) & 0 & 0 & \rho_{14}(t) \\ 0 & \rho_{22}(t) & \rho_{23}(t) & 0 \\ 0 & \rho_{32}(t) & \rho_{33}(t) & 0 \\ \rho_{41}(t) & 0 & 0 & \rho_{44}(t) \end{bmatrix}, \quad (6.27)$$

Assim, ao aplicar (6.16) ao sistema. Obtemos os termos não nulos da matriz densidade da equação mestra de Lindblad que rege este sistema:

$$\begin{aligned} \rho'_{11}(t) &= \rho'_{22}(t) = \rho'_{33}(t) = \rho'_{44}(t) = \rho'_{23}(t) = 0 \\ \rho'_{14}(t) &= \frac{2i\epsilon\rho_{14}(t)}{\hbar} + \frac{iA_n\rho_{14}(t)}{\hbar} - \frac{t_{QG}A_n^2\rho_{14}(t)}{\hbar^2}, \end{aligned}$$

onde  $A_n = \sigma_n \left| (E + \epsilon)^{n/2} - (E - \epsilon)^{n/2} \right|$ . E lembrando que a matriz densidade é hermitiana, o que significa que a evolução temporal dos termos cruzados da matriz está bem determinado pelas equações acima.  $A_n$  combina a intensidade da interação com o ambiente, dada por  $\sigma_n$ , com a diferença entre os autovalores do operador de Lindblad  $\hat{K}^{n/2}$  para os estados

que compõem a superposição. A equação mestra que governa a dinâmica do sistema foi resolvida para os elementos da matriz densidade utilizando a função `DSolve` do software Wolfram Mathematica. Os elementos não nulos da matriz que rege o sistema são dados por:

$$\rho_{11}(t) = \rho_{44}(t) = \frac{1}{2} \quad (6.28)$$

$$\rho_{14}(t) = \frac{1}{2} \exp \left[ -\frac{2i\epsilon t}{\hbar} - \frac{iA_n t}{\hbar} - \frac{t_{QG} A_n^2 t}{\hbar^2} \right] \quad (6.29)$$

$$\rho_{41}(t) = \rho_{14}^*(t) \quad (6.30)$$

Note que os elementos da diagonal que representam as populações ( $\rho_{11}$  e  $\rho_{44}$ ) permanecem constantes, enquanto os elementos fora da diagonal ( $\rho_{14}$  e  $\rho_{41}$ ), que carregam a informação do emaranhamento, decaem exponencialmente com uma taxa determinada pela parte real do expoente.

Para quantificar a evolução do emaranhamento, utiliza-se a **Concorrência**,  $C(\rho)$ , esta pode ser definida como uma régua que mede a “força” do emaranhamento entre duas partículas quânticas, como dois qubits. Imagine o emaranhamento como uma conexão invisível e especial entre essas duas partículas. A concorrência nos dá um número exato para o quão forte é essa conexão. A Concorrência varia de  $C = 1$  para estados maximamente emaranhados a  $C = 0$  para estados separáveis (não emaranhados). Então, a concorrência pode ser vista como uma ferramenta matemática para “ver o quão emaranhado este par de partículas está” [31, 43].

O cálculo da Concorrência para uma matriz densidade genérica  $\rho$  é complexo. Envolve calcular os autovalores da matriz não-hermitiana  $R = \rho(\sigma_y \otimes \sigma_y)\rho^*(\sigma_y \otimes \sigma_y)$ . Se os autovalores de  $R$  são  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4$ , a Concorrência é dada por:<sup>2</sup>

$$C(\rho) = \max(0, \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4}). \quad (6.31)$$

Felizmente, para a classe de matrizes densidade conhecidas como estados-X, que possuem elementos não nulos apenas na diagonal principal e na anti-diagonal, a fórmula pode ser drasticamente simplificada [31]. A matriz densidade  $\rho(t)$  do nosso sistema, que parte de um estado de Bell e evolui sob a equação mestra derivada, pertence a essa classe. Para tais estados, a Concorrência é dada por:

$$C(\rho) = 2 \max(0, |\rho_{23}| - \sqrt{\rho_{11}\rho_{44}}, |\rho_{14}| - \sqrt{\rho_{22}\rho_{33}}). \quad (6.32)$$

No nosso caso específico, a solução analítica mostra que os elementos  $\rho_{22}(t)$ ,  $\rho_{33}(t)$  e  $\rho_{23}(t)$  são identicamente nulos para todo tempo  $t$ . Isso simplifica a Eq. (6.32):

$$C(\rho(t)) = 2 \max(0, |\rho_{14}(t)|). \quad (6.33)$$

<sup>2</sup> A função  $\max(0, X)$  retorna o maior valor entre seus argumentos. Sua presença na definição da Concorrência assegura a condição física de que o emaranhamento é uma quantidade não-negativa ( $C \geq 0$ ), forçando qualquer resultado de cálculo negativo a ser zero.

Como o módulo  $|\rho_{14}(t)|$  é sempre uma quantidade não negativa, podemos remover o operador max, chegando à uma simples relação:

$$C(t) = 2|\rho_{14}(t)|. \quad (6.34)$$

Esta equação é fundamental, pois demonstra que, para o nosso sistema, a dinâmica do emaranhamento é governada diretamente pela evolução do elemento de coerência  $\rho_{14}(t)$ .

Substituindo a solução analítica para  $\rho_{14}(t)$  encontrada, obtemos a expressão para a evolução da Concorrência:

$$C(t) = 2 \left| \frac{1}{2} \exp \left( -\frac{2i\epsilon A_n t}{\hbar} - \frac{t_{QG} A_n^2 t}{\hbar^2} \right) \right| = \exp \left( -\frac{t_{QG} A_n^2 t}{\hbar^2} \right). \quad (6.35)$$

Isso nos permite identificar a taxa de decaimento exponencial do emaranhamento.

O resultado da simulação numérica demonstra inequivocamente que o emaranhamento do sistema decai com o tempo devido à descoerência induzida pelo modelo. Este fenômeno é conhecido como “**morte do emaranhamento**” [10], no qual a correlação quântica inicial é irreversivelmente destruída pela interação com o “ambiente” efetivo criado pelas flutuações do espaço-tempo. O comportamento é ilustrado na Figura 3.

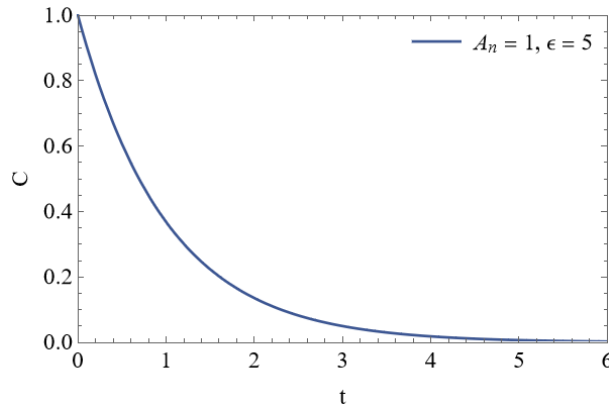


Figura 3 – Evolução temporal da Concorrência  $C(t)$ , obtida numericamente a partir da solução da equação mestra para um estado de Bell inicial ( $\hbar = 1$ ,  $t_{QG} = 1$ ,  $A_n = 1$ ,  $\epsilon = 5$ ).

Esta análise fornece uma previsão concreta e testável do modelo: a existência de um mecanismo de descoerência fundamental, originado na gravidade quântica, impõe um tempo de vida finito para o emaranhamento quântico. Tal efeito, embora possivelmente pequeno, poderia, em princípio, ser procurado em experimentos de alta precisão envolvendo sistemas quânticos massivos. Os detalhes da implementação e o código utilizado no Wolfram Mathematica, para a resolução desse sistema, são apresentados no Apêndice.

A análise apresentada neste capítulo demonstrou quantitativamente como as flutuações estocásticas na cinemática, inspiradas por modelos de gravidade quântica, levam a um decaimento mensurável do emaranhamento. Este fenômeno, fornece uma previsão

concreta e testável do modelo. Tendo detalhado estes resultados, o próximo passo será sintetizar as conclusões, discutir as implicações mais amplas da abordagem fenomenológica adotada e apontar possíveis direções para investigações futuras neste promissor campo de pesquisa.

## 7 Considerações finais

Neste trabalho, foi realizado um exame sobre as implicações fenomenológicas que os modelos de gravidade quântica podem ter em sistemas quânticos que são acessíveis, concentrando-se em como a relação de dispersão pode ser alterada de maneira estocástica e nas repercussões disso para a equação de Schrödinger. Através de uma revisão teórica e da formulação discutida, foi viável utilizar técnicas de perturbação para calcular correções nos níveis de energia e analisar os efeitos dessas correções sobre o processo de descoerência.

Os achados confirmam a hipótese de que efeitos gravitacionais a nível quântico, embora extremamente diminutos, podem provocar mecanismos universais que resultam na perda de coerência em sistemas quânticos. Essa descoberta é de grande relevância, pois indica que a gravidade quântica pode produzir indícios observáveis não somente em cenários astrofísicos de alta energia, mas também em experimentos de baixa energia, contanto que esses sejam suficientemente precisos. Exemplos desse fenômeno incluem sistemas confinados, como pontos quânticos, ou estudos com átomos frios, onde correções sutis podem ser investigadas.

Apesar das atuais limitações práticas, a abordagem fenomenológica mostrou-se crucial para estabelecer conexões entre a teoria e a observação. A análise da descoerência resultante de correções gravitacionais quânticas demonstra como fenômenos que costumam ser associados a escalas que não podem ser alcançadas podem se manifestar, mesmo que de forma indireta, em sistemas de laboratório. Além do mais, a descrição por meio de equações mestras, incluindo a equação de Lindblad, permite generalizações que considerem ruídos gravitacionais de natureza estocástica, criando uma base mais ampla para a avaliação de sistemas abertos.

Dessa forma, conclui-se que a pesquisa fenomenológica em gravidade quântica representa um campo de investigação promissor e indispensável. Embora o caminho rumo a uma teoria completa seja incerto, trabalhos como o apresentado ajudam a definir os limites do espaço de parâmetros físicos que ainda carecem de exploração, além de sugerir possíveis direções experimentais para a identificação de efeitos sutis. Essas direções abrangem desde sistemas quânticos microscópicos de alta precisão, como átomos frios e osciladores optomecânicos, até observações astrofísicas. Os resultados desses experimentos são cruciais para impor vínculos aos parâmetros dos modelos, um esforço continuamente atualizado em compilações como as "Data Tables" para violação de Lorentz [22]. No futuro, melhorias na precisão experimental poderão possibilitar a verificação de hipóteses que, até então, eram apenas especulativas, aproximando a física teórica de uma compreensão mais aprofundada da estrutura fundamental do espaço-tempo.

Em resumo, este estudo enfatiza a importância de continuar a busca por indícios

da gravidade quântica em variados contextos energéticos, ressaltando que a conexão entre teoria e observação deve ser construída através de aproximações fenomenológicas, que são capazes de guiar experimentos e traduzir conceitos abstratos em previsões práticas.

# Bibliografia

- [1] A. A. Abdo et al. “A limit on the variation of the speed of light arising from quantum gravity effects”. Em: *Nature* 462 (2009), pp. 331–334. DOI: <10.1038/nature08574>. arXiv: <0908.1832> [astro-ph.HE].
- [2] Giovanni Amelino-Camelia. “Quantum-Spacetime Phenomenology”. Em: *Living Rev. Rel.* 16 (2013), p. 5. DOI: <10.12942/lrr-2013-5>. arXiv: <0806.0339> [gr-qc].
- [3] Michele Arzano, Vittorio D’Esposito e Giulia Gubitosi. “Fundamental decoherence from quantum spacetime”. Em: *Commun. Phys.* 6.1 (2023), p. 242. DOI: <10.1038/s42005-023-01159-3>. arXiv: <2208.14119> [gr-qc].
- [4] Alain Aspect, Jean Dalibard e Gérard Roger. “Experimental Test of Bell’s Inequalities Using Time-Varying Analyzers”. Em: *Physical Review Letters* 49.25 (1982), pp. 1804–1807. DOI: <10.1103/PhysRevLett.49.1804>.
- [5] J. S. Bell. “On the Einstein Podolsky Rosen Paradox”. Em: *Physics Physique Fizika* 1.3 (1964), pp. 195–200. DOI: <10.1103/PhysicsPhysiqueFizika.1.195>.
- [6] Mario Belloni e Richard W Robinett. “The infinite well and Dirac delta function potentials as pedagogical, mathematical and physical models in quantum mechanics”. Em: *Physics Reports* 540.2 (2014), pp. 25–122. DOI: <10.1016/j.physrep.2014.02.005>.
- [7] Sougato Bose et al. “Spin Entanglement Witness for Quantum Gravity”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 119.24 (2017), p. 240401. DOI: <10.1103/PhysRevLett.119.240401>. arXiv: <1707.06050> [quant-ph].
- [8] H. -P. Breuer, E. Goklu e C. Lammerzahl. “Metric fluctuations and decoherence”. Em: *Class. Quant. Grav.* 26 (2009), p. 105012. DOI: <10.1088/0264-9381/26/10/105012>. arXiv: <0812.0420> [gr-qc].
- [9] Heinz-Peter Breuer e Francesco Petruccione. *The Theory of Open Quantum Systems*. Oxford: Oxford University Press, 2002.
- [10] Heinz-Peter Breuer e Francesco Petruccione. *The Theory of Open Quantum Systems*. Oxford: Oxford University Press, 2002.
- [11] Ephrem O. Chukwuocha, Michael C. Onyaeju e Taylor S. T. Harry. “Theoretical Studies on the Effect of Confinement on Quantum Dots Using the Brus Equation”. Em: *World Journal of Condensed Matter Physics* 2.2 (2012), pp. 96–100. DOI: <10.4236/wjcmp.2012.22017>.

- [12] John F. Clauser e Stuart J. Freedman. “Experimental Test of Local Hidden-Variable Theories”. Em: *Physical Review Letters* 28.14 (1972), pp. 938–941. DOI: <10.1103/PhysRevLett.28.938>.
- [13] John F. Clauser et al. “Proposed experiment to test local hidden-variable theories”. Em: *Physical Review Letters* 23.15 (1969), pp. 880–884. DOI: <10.1103/PhysRevLett.23.880>.
- [14] Sandro Donadi e Matteo Fadel. “Quantum gravitational decoherence of a mechanical oscillator from spacetime fluctuations”. Em: *Phys. Rev. D* 111.2 (2025), p. 026009. DOI: <10.1103/PhysRevD.111.026009>. arXiv: <2411.13523> [quant-ph].
- [15] Albert Einstein. “Die Feldgleichungen der Gravitation”. German. Em: *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)* (1915), pp. 844–847.
- [16] Albert Einstein. “Zur Elektrodynamik bewegter Körper”. German. Em: *Annalen der Physik* 322.10 (1905), pp. 891–921. DOI: <10.1002/andp.19053221004>.
- [17] John R. Ellis, Subhendra Mohanty e Dimitri V. Nanopoulos. “Quantum Gravity and the Collapse of the Wave Function”. Em: *Phys. Lett. B* 221 (1989), pp. 113–119. DOI: <10.1016/0370-2693(89)91482-2>.
- [18] Domenico Giulini et al. *Decoherence and the Appearance of a Classical World in Quantum Theory*. 2nd. Berlin: Springer, 2003. DOI: <10.1007/978-3-662-05328-7>.
- [19] Vittorio Gorini, Andrzej Kossakowski e E. C. G. Sudarshan. “Completely positive dynamical semigroups of N-level systems”. Em: *J. Math. Phys.* 17 (1976), pp. 821–825. DOI: <10.1063/1.522979>.
- [20] David J. Griffiths e Darrell F. Schroeter. *Introduction to Quantum Mechanics*. 3<sup>a</sup> ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2018. ISBN: 9781107189638.
- [21] B. Hensen et al. “Loophole-free Bell inequality violation using electron spins separated by 1.3 kilometres”. Em: *Nature* 526 (2015), pp. 682–686. DOI: <10.1038/nature15759>.
- [22] V. Alan Kostelecký e Neil Russell. “Data tables for Lorentz violation”. Em: *Rev. Mod. Phys.* 83 (2011), p. 11. DOI: <10.1103/RevModPhys.83.11>. arXiv: <0801.0287> [hep-ph].
- [23] Nivaldo A Lemos. *Mecânica analítica*. Editora Livraria da Física, São Paulo, 2013.
- [24] Göran Lindblad. “On the Generators of Quantum Dynamical Semigroups”. Em: *Communications in Mathematical Physics* 48.2 (1976), pp. 119–130. DOI: <10.1007/BF01608499>.

- [25] Iarley P. Lobo et al. “LIV-decoherence on gravitational cat states”. Em: *Physics Letters B* 870 (2025), p. 139923. ISSN: 0370-2693. DOI: <<https://doi.org/10.1016/j.physletb.2025.139923>>. URL: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269325006811>>.
- [26] Chiara Marletto e Vlatko Vedral. “Gravitationally-Induced Entanglement Between Two Massive Particles is Sufficient Evidence of Quantum Effects in Gravity”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 119.24 (2017), p. 240402. DOI: <10.1103/PhysRevLett.119.240402>. arXiv: <1707.06036> [quant-ph].
- [27] Chiara Marletto e Vlatko Vedral. “Quantum-information methods for quantum gravity laboratory-based tests”. Em: *Rev. Mod. Phys.* 97.1 (2025), p. 015006. DOI: <10.1103/RevModPhys.97.015006>. arXiv: <2410.07262> [quant-ph].
- [28] A. A. Michelson e E. W. Morley. “On the Relative Motion of the Earth and the Luminiferous Ether”. Em: *American Journal of Science* 34.203 (1887), pp. 333–345. DOI: <10.2475/ajs.s3-34.203.333>.
- [29] Shiraz Minwalla, Mark Van Raamsdonk e Nathan Seiberg. “Noncommutative perturbative dynamics”. Em: *J. High Energy Phys.* 2000.02 (2000), p. 020. DOI: <10.1088/1126-6708/2000/02/020>.
- [30] John von Neumann. “Wahrscheinlichkeitstheoretischer Aufbau der Quantenmechanik”. Em: *Göttinger Nachrichten* (1927), pp. 245–272.
- [31] Michael A. Nielsen e Isaac L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. 10th Anniversary. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. ISBN: 9781107002173.
- [32] F. Petruzziello e F. Illuminati. “Quantum gravitational decoherence from fluctuating minimal length and deformation parameter at the Planck scale”. Em: *Nature Communications* 12 (2021), p. 4449. DOI: <10.1038/s41467-021-24689-3>. URL: <<https://doi.org/10.1038/s41467-021-24689-3>>.
- [33] Luciano Petruzziello e Fabian Wagner. “Gravitationally induced uncertainty relations in curved backgrounds”. Em: *Phys. Rev. D* 103.10 (2021), p. 104061. DOI: <10.1103/PhysRevD.103.104061>. arXiv: <2101.05552> [gr-qc].
- [34] Carlo Rovelli. *Quantum Gravity*. Cambridge: Cambridge University Press, 2004. ISBN: 9780521837330.
- [35] J. J. Sakurai e Jim Napolitano. *Mecânica Quântica Moderna*. 2ª ed. Porto Alegre: Bookman, 2017. ISBN: 9788582604897.
- [36] Maximilian Schlosshauer. “Decoherence, the measurement problem, and interpretations of quantum mechanics”. Em: *Reviews of Modern Physics* 76 (2004), pp. 1267–1305. DOI: <10.1103/RevModPhys.76.1267>.

- [37] Abhijit Sen. *QM 101: Bloch Sphere*. <<https://logosconcarne.com/2021/03/15/qm-101-bloch-sphere/>>. Acesso em: 10 set. 2025. 2021.
- [38] Anshuman Singh et al. “Quantum frequency conversion of a quantum dot single-photon source on a nanophotonic chip”. Em: *Optica* 6.5 (2019), pp. 563–569. DOI: <10.1364/OPTICA.6.000563>. arXiv: <1904.12041> [quant-ph].
- [39] Richard J. Szabo. “Quantum field theory on noncommutative spaces”. Em: *Physics Reports* 378 (2003), pp. 207–299. DOI: <10.1016/S0370-1573(03)00059-0>.
- [40] N. G. Van Kampen. “A cumulant expansion for stochastic linear differential equations. I”. Em: *Physica* 74.2 (jun. de 1974), pp. 215–238. DOI: <10.1016/0031-8914(74)90121-9>.
- [41] Vlasios Vasileiou et al. “A Planck-scale limit on spacetime fuzziness and stochastic Lorentz invariance violation”. Em: *Nature Phys.* 11.4 (2015), pp. 344–346. DOI: <10.1038/nphys3270>.
- [42] Fabian Wagner et al. “Quantum-spacetime effects on nonrelativistic Schrödinger evolution”. Em: *Phys. Rev. D* 108.6 (2023), p. 066008. DOI: <10.1103/PhysRevD.108.066008>. arXiv: <2306.05205> [gr-qc].
- [43] William K. Wootters. “Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits”. Em: *Physical Review Letters* 80.10 (mar. de 1998), pp. 2245–2248. DOI: <10.1103/PhysRevLett.80.2245>.
- [44] Barton Zwiebach. *A First Course in String Theory*. 2<sup>a</sup> ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2009. ISBN: 9780521880329.

Bibliografia

# APÊNDICE A – Código do Wolfram Mathematica

Este apêndice contém o código principal utilizado no Wolfram Mathematica para simular a dinâmica de um sistema de dois qubits em um estado de Bell sob a influência da decoerência induzida por gravidade quântica, conforme discutido no Capítulo 6.

Listing A.1 – Código principal da simulação no Wolfram Mathematica.

---

```
(* ::Package:: *)
(* ::Title:: *)
(*DSR-induced correlations*)

(*Definicao das matrizes e operadores base*)
$Assumptions = {e > 0, \[Epsilon] > 0, w > 0, m > 0, \[Eta] > 0, l > 0,
  tp > 0, h > 0, \[Delta] > 0, \[Omega] > 0, \[Xi] \[Element] Reals,
  n \[Element] Integers && n > 0};

sz = {{1, 0}, {0, -1}};
s1 = {{0, 1}, {1, 0}};
id = {{1, 0}, {0, 1}};

(* Hamiltoniano nao perturbado para o sistema de dois qubits *)
K = e KroneckerProduct[id, id] + \[Epsilon]/2 KroneckerProduct[sz, id] +
  \[Epsilon]/2 KroneckerProduct[id, sz];
H0 = K;

(*Definicao do Hamiltoniano perturbado e dos termos da equacao de Lindblad*)

(* Parametro sigma_n da perturbacao *)
sn = (2*m)^((n - 2)/2)*(m*c)^(3 - n)*1;

(* Hamiltoniano completo (nao perturbado + perturbacao) *)
H = K - sn*MatrixPower[K, n/2];

(* Matriz densidade generica para o sistema de dois qubits *)
Density = {{p11[t], 0, 0, p14[t]}, {0, p22[t], p23[t], 0},
```

```

{0, p32[t], p33[t], 0}, {p41[t], 0, 0, p44[t]}};

(* Funcao para o comutador *)
commutator[A_, B_] := A.B - B.A;

(* Termo dissipativo (Lindbladiano) da equacao mestra *)
kn = MatrixPower[K, n/2];
source2 = sn^2*tp/(h^2)*commutator[kn, commutator[kn, Density]];

(* Equacao Mestra de Lindblad Completa *)
Lindblad0 = D[Density, t] - (-I/h commutator[H, Density] - source2);

(*Condicoes iniciais para um estado de Bell*)

(* Vetor de estado inicial parametrizado por theta *)
initialstate2 = Sin\[Theta] KroneckerProduct[{{0}, {1}}, {{0}, {1}}] +
  Cos\[Theta] KroneckerProduct[{{1}, {0}}, {{1}, {0}}];

(* Matriz densidade inicial *)
initialdensity2 = initialstate2.Transpose[initialstate2];

(*Solucao numerica do sistema de EDOs*)

(* Definindo o sistema de equacoes a ser resolvido.
  O estado inicial eh o de Bell com theta = Pi/4 *)
system1 = {Lindblad1[[1]][[1]] == 0, Lindblad1[[1]][[4]] == 0,
  Lindblad1[[2]][[2]] == 0, Lindblad1[[2]][[3]] == 0,
  Lindblad1[[3]][[2]] == 0, Lindblad1[[3]][[3]] == 0,
  Lindblad1[[4]][[1]] == 0, Lindblad1[[4]][[4]] == 0,
  p11[0] == Cos\[Theta]^2, p14[0] == Cos\[Theta] Sin\[Theta],
  p22[0] == 0, p23[0] == 0, p32[0] == 0, p33[0] == 0,
  p41[0] == Cos\[Theta] Sin\[Theta], p44[0] == Sin\[Theta]^2 /.
  {\[Theta] -> \[Pi]/4};

(* Resolvendo numericamente com NDSolve *)
solution2 = NDSolve[system1, {p11, p14, p22, p23, p32, p33, p41, p44},
  {t, 0, 20000}, MaxSteps -> 1000000];

(* Extraindo as solucoes para cada elemento da matriz densidade *)
RR11 = Evaluate[p11[t] /. solution2];

```

---

```

RR14 = Evaluate[p14[t] /. solution2];
RR22 = Evaluate[p22[t] /. solution2];
(* ... (demais elementos) ... *)
RR44 = Evaluate[p44[t] /. solution2];

(*Calculo e plot da Concorrencia*)

(* Funcao para a Concorrencia *)
C41 = Plot[Evaluate[2 (Abs[RR14] - Sqrt[Simplify[RR11]*Simplify[RR44]])],
  {t, 0, 20},
  PlotRange -> {{0, 6}, {0, 1}}, Frame -> True,
  FrameLabel -> {"t", "C"},
  PlotLegends -> Placed[LineLegend[{"An = 1, \[Epsilon] = 5"}], {Right, Top}]
];

(* Define o sistema de EDOs e as condicoes iniciais *)
system2 = {Lindblad1[[1]][[1]] == 0, Lindblad1[[1]][[4]] == 0,
  Lindblad1[[2]][[2]] == 0, Lindblad1[[2]][[3]] == 0,
  Lindblad1[[3]][[2]] == 0, Lindblad1[[3]][[3]] == 0,
  Lindblad1[[4]][[1]] == 0, Lindblad1[[4]][[4]] == 0,
  Subscript[\[Rho], 11][0] == Cos[\[Theta]]^2,
  Subscript[\[Rho], 14][0] == Cos[\[Theta]] Sin[\[Theta]],
  Subscript[\[Rho], 22][0] == 0, Subscript[\[Rho], 23][0] == 0,
  Subscript[\[Rho], 32][0] == 0, Subscript[\[Rho], 33][0] == 0,
  Subscript[\[Rho], 41][0] == Cos[\[Theta]] Sin[\[Theta]],
  Subscript[\[Rho], 44][0] == Sin[\[Theta]]^2};

(* Resolve o sistema analiticamente *)
solution3 = DSolve[system2, {Subscript[\[Rho], 11][t], Subscript[\[Rho],
  14][t],
  Subscript[\[Rho], 41][t], Subscript[\[Rho], 44][t], Subscript[\[Rho],
  22][t],
  Subscript[\[Rho], 23][t], Subscript[\[Rho], 32][t], Subscript[\[Rho],
  33][t]}, t]

```

---