



**UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA (UFPB)**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS APLICADAS (CCSA)**  
**DEPARTAMENTO DE FINANÇAS E CONTABILIDADE (DFC)**  
**CURSO DE GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS ATUARIAIS (CCA)**

**FRED ABRAÃO DOS SANTOS PEDRO**

**MODELOS LEE-CARTER VIA SVD E GLM POISSON: UM ESTUDO  
COMPARATIVO APLICADO À MORTALIDADE NO BRASIL**

**JOÃO PESSOA**  
**2026**

FRED ABRAÃO DOS SANTOS PEDRO

**MODELOS LEE-CARTER VIA SVD E GLM POISSON: UM ESTUDO  
COMPARATIVO APLICADO À MORTALIDADE NO BRASIL**

Trabalho de conclusão de curso II, apresentado ao curso de Ciências Atuariais da Universidade Federal da Paraíba, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Bacharel em Ciências Atuariais.

**Orientador:** Prof. Dr. Filipe Coelho de Lima Duarte.

**Coorientador:** Profa. Dra. Vera Lúcia Cruz.

**João Pessoa, PB  
2026**

**Catálogo na publicação**  
**Seção de Catalogação e Classificação**

P372m Pedro, Fred Abraao Dos Santos.

Modelos Lee-Carter via SVD e GLM Poisson: um estudo comparativo aplicado à mortalidade no Brasil / Fred Abraao Dos Santos Pedro. - João Pessoa, 2026.

47 f. : il.

Orientação: Filipe Duarte.

Coorientação: Vera Cruz.

TCC (Graduação) - UFPB/CCSA.

1. Mortalidade. 2. Lee-Carter. 3. Previsão. I. Duarte, Filipe. II. Cruz, Vera. III. Título.

UFPB/CCSA

CDU 368(043)

FRED ABRAÃO DOS SANTOS PEDRO

**MODELOS LEE-CARTER VIA SVD E GLM POISSON: UM ESTUDO  
COMPARATIVO APLICADO À MORTALIDADE NO BRASIL**

Trabalho de Conclusão de Curso como  
requisito parcial à obtenção do título de  
Bacharel em Ciências Atuariais pela  
Universidade Federal da Paraíba.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. Filipe Coelho de Lima Duarte  
Orientador  
Universidade Federal da Paraíba (UFPB)

---

Prof. Me. Yuri Martí Santana Santos  
Membro Avaliador  
Universidade Federal da Paraíba (UFPB)

---

Prof. Bel. Hugo Vieira Sá Ferreira Gomes  
Membro Avaliador  
Universidade Federal da Paraíba (UFPB)

À Natália, à minha mãe e às minhas irmãs,  
a quem tanto devo, e que tornaram esta  
jornada possível, dedico esta obra.

## AGRADECIMENTOS

O desenvolvimento deste trabalho contou com o apoio de pessoas fundamentais, às quais expresso minha gratidão.

Ao Prof. Dr. Filipe Duarte, pela orientação precisa e pelo esclarecimento das principais dúvidas ao longo do processo. À Profa. Dra. Vera Cruz, pelo auxílio constante na escrita e na revisão do texto.

Aos meus pais, Maria Auxiliadora e Fernando José, pelo apoio incondicional desde o dia em que decidi entrar na universidade. À minha irmã Flávia, por nunca ter duvidado que eu chegaria até aqui. Principalmente, você minha irmã que me esperou chegar tarde da noite em casa nessa jornada.

À Natália Narciso, meu grande amor e companheira nas madrugadas de escrita, minha verdadeira Samwise, que carregou junto quando o peso ficou grande demais. E ao meu amigo Carlos: todo hobbit precisa de um Gandalf, e o meu apareceu na hora certa.

Aos membros da banca, pela disposição em avaliar este trabalho e pela oportunidade de apresentar minhas ideias no campo das Ciências Atuariais.

## RESUMO

A projeção da mortalidade ocupa papel relevante em aplicações atuariais, previdenciárias e demográficas, pois afeta a formulação de hipóteses biométricas, a avaliação de passivos e a mensuração do risco de longevidade. No caso brasileiro, essa discussão ganha importância diante da necessidade de trabalhar com séries recentes, organizadas por idade e sexo, e de avaliar empiricamente o efeito das escolhas metodológicas sobre a qualidade preditiva. Nesse contexto, compara-se o desempenho de duas estratégias de estimação do modelo de Lee-Carter aplicadas à mortalidade brasileira por sexo: a abordagem clássica via decomposição em valores singulares (LC-SVD) e a formulação via modelo linear generalizado com distribuição de Poisson e offset de exposição (LC-Poisson). A base analítica foi construída para o Brasil no período de 1994 a 2022, com idades de 0 a 90 anos e segmentação nos grupos masculino, feminino e ambos. A avaliação empírica foi conduzida por backtesting com split fixo, utilizando-se 1994 a 2017 para estimação e 2018 a 2022 para teste, em horizontes de previsão de 1 a 5 anos. A comparação entre os modelos foi feita com base no erro absoluto médio e na raiz do erro quadrático médio, em nível e em log, com e sem ponderação por exposição, complementados por análise gráfica dos parâmetros estimados, das trajetórias observadas e previstas e da distribuição dos erros por idade e ano. Os resultados indicam vantagem do LC-Poisson nos horizontes mais curtos, especialmente em um e dois anos à frente, enquanto o LC-SVD se torna relativamente mais competitivo em parte dos horizontes mais longos. Também se observou concentração dos maiores erros nas idades avançadas e nos anos recentes do período de teste, particularmente sob o impacto da pandemia de COVID-19. Conclui-se que a escolha do método de estimação afeta de forma relevante o desempenho preditivo do modelo de Lee-Carter no caso brasileiro.

**Palavras-chave:** Mortalidade. Lee-Carter. Previsão.

## ABSTRACT

Mortality forecasting plays a relevant role in actuarial, pension and demographic applications, since it affects the definition of biometric assumptions, the assessment of liabilities and the measurement of longevity risk. In the Brazilian case, this discussion becomes especially important due to the need to work with recent age- and sex-specific series and to assess empirically how methodological choices affect predictive performance. In this context, the predictive performance of two estimation strategies for the Lee-Carter model applied to Brazilian mortality by sex is compared: the classical singular value decomposition approach (LC-SVD) and the generalized linear model formulation with Poisson distribution and exposure offset (LC-Poisson). The analytical database was built for Brazil over the period from 1994 to 2022, covering ages 0 to 90 and the groups male, female and total. The empirical assessment was carried out through backtesting with a fixed split, using 1994 to 2017 for estimation and 2018 to 2022 for testing, with forecasting horizons from 1 to 5 years ahead. Model comparison was based on mean absolute error and root mean squared error, computed on both the original and logarithmic scales, with and without exposure weighting, and complemented by graphical analysis of estimated parameters, observed and predicted trajectories, and the distribution of errors by age and year. The results indicate an advantage for LC-Poisson over shorter horizons, especially one- and two-year-ahead forecasts, whereas LC-SVD becomes relatively more competitive in part of the longer-term horizons. The largest errors were concentrated at older ages and in the most recent years of the testing period, particularly under the impact of the COVID-19 pandemic. It is concluded that the choice of estimation method has a relevant effect on the predictive performance of the Lee-Carter model in the Brazilian case.

**Keywords:** Mortality. Lee-Carter. Forecasting.

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 1</b> - Média de $\log(mx, t)$ por ano e sexo .....	27
<b>Figura 2</b> - Parâmetro $ax$ por idade.....	29
<b>Figura 3</b> - $bx$ por idade .....	30
<b>Figura 4</b> - Índice temporal $kt$ .....	31
<b>Figura 5</b> - Erro por idade e ano - LC-SVD - Ambos .....	34
<b>Figura 6</b> - Erro por idade e ano - LC-Poisson - Ambos .....	35
<b>Figura 7</b> - Ajuste por idade - observado vs previsto (Ambos) .....	36
<b>Figura 8</b> - Nível médio observado e previsto de $m[x,t]$ .....	37

## LISTA DE TABELAS

<b>Tabela 1</b> - Desempenho preditivo dos modelos (RMSE e MAE) por sexo e horizonte (2018-2022). .....	32
---	----

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	9
1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO E PROBLEMA.....	9
1.2 OBJETIVOS .....	11
<b>1.2.1 Objetivo geral</b> .....	11
<b>1.2.2 Objetivos específicos</b> .....	11
1.3 JUSTIFICATIVA .....	11
<b>2 REFERENCIAL TEÓRICO</b> .....	13
2.1 MORTALIDADE E DADOS DEMOGRÁFICOS NO BRASIL.....	13
2.2 PROJEÇÃO DE TAXAS DE MORTALIDADE .....	14
2.3 MODELO LEE-CARTER .....	14
<b>2.3.1 Estratégias de estimação: SVD e GLM Poisson</b> .....	16
<b>3 METODOLOGIA</b> .....	19
3.1 DADOS DA PESQUISA .....	19
3.2 TAXA DE MORTALIDADE E MODELOS LEE-CARTER .....	20
<b>3.2.1 Lee-Carter Via SVD</b> .....	21
<b>3.2.2 Lee-Carter Via GLM de família Poisson com offset</b> .....	23
<b>3.2.3 Métricas de avaliação</b> .....	25
<b>4 RESULTADOS E DISCUSSÕES</b> .....	27
4.1 PANORAMA DOS DADOS DE MORTALIDADE.....	27
4.2 PARÂMETROS ESTIMADOS DO MODELO .....	28
4.3 AVALIAÇÃO PREDITIVA FORA DA AMOSTRA.....	31
4.4 DIAGNÓSTICO DO ERRO POR IDADE E PERÍODO .....	33
4.5 VALIDAÇÃO VISUAL DAS PREVISÕES .....	35
4.6 SÍNTESE DOS RESULTADOS .....	37
<b>5 CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	39
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	41

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO E PROBLEMA

Em contextos de envelhecimento populacional, diferenças aparentemente pequenas nas hipóteses biométricas podem produzir efeitos relevantes sobre resultados financeiros e sobre a sustentabilidade de arranjos previdenciários e securitários, o que torna a escolha do modelo de mortalidade uma questão metodológica e aplicada de primeira importância, como já destacavam Lee e Carter (1992) e, em avaliações posteriores, Booth *et al.* (2006).

Projeções de mortalidade são alicerce da previdência, dos seguros e das políticas públicas, pois orientam decisões de precificação, provisões e gestão do risco de longevidade no setor público e privado (Garcia; Simões, 2010). Em 2023, os ativos previdenciários baseados em investimentos superaram USD 56 trilhões no mundo, o que eleva o custo potencial de hipóteses biométricas mal calibradas e reforça a exigência de modelos transparentes e testáveis para sustentar decisões prudentiais (OECD, 2024). Na Europa, um exercício de estresse conduzido pela autoridade setorial em 2018 com choque de longevidade evidenciou a sensibilidade do sistema a erros de projeção e consolidou a demanda por práticas de modelagem mais robustas e comunicáveis (EIOPA, 2018).

No Brasil, as Tábuas Completas de Mortalidade do IBGE informam probabilidades de morte por idade simples até o topo etário aberto 90+ e constituem referência para aplicações oficiais e estudos demográficos que alimentam políticas e avaliações atuariais (IBGE, 2023). Quando se faz necessário fechar o topo etário até idades muito avançadas, recorrem-se às tábuas extrapoladas disponibilizadas pelo Ministério da Previdência Social, que são utilizadas em análises atuariais e na supervisão de regimes próprios (Ministério da Previdência Social, 2024). A utilidade dessas tábuas depende da qualidade e da completude dos registros de óbito, que variam entre Unidades da Federação e recomendam diagnóstico prévio e cautela na aplicação direta em contextos subnacionais por idade e sexo (Lima *et al.*, 2024). As diferenças regionais persistentes em níveis e tendências etárias exigem verificações e ajustes para garantir comparabilidade temporal e espacial quando se pretende projetar e comparar populações brasileiras ao longo do tempo (Gonzaga *et al.*, 2024).

As desigualdades socioeconômicas produzem diferenças relevantes de mortalidade com maior impacto em idades jovens e adultas, o que altera o desenho etário das séries e afeta a estabilidade das estimativas em janelas curtas e em faixas de baixa exposição (Lima *et al.*, 2024). Nesse cenário, configura-se risco de base quando se aplica uma única tábua a populações heterogêneas, pois discrepâncias estruturais entre grupos podem induzir viés em projeções e comprometer decisões de preço, provisões e capital regulatório nos diferentes contextos brasileiros (Gonzaga *et al.*, 2024).

Projetar mortalidade consiste em extrapolar, para anos futuros, a matriz por idade e ano das taxas específicas de mortalidade, a partir da qual se derivam sobrevivências e fluxos esperados para uso em precificação e provisões técnicas em seguros e previdência (Lee; Carter, 1992). A família Lee-Carter é amplamente empregada por equilibrar simplicidade, interpretabilidade e desempenho em séries etárias longas, com a dinâmica temporal sintetizada em um índice univariado que permite modelagem e comunicação da incerteza preditiva (Li; Lee, 2005). No âmbito do risco de longevidade, a modelagem do índice temporal e a propagação adequada da incerteza são passos centrais para converter diferenças metodológicas em impactos mensuráveis sobre métricas atuariais de interesse (Cairns; Blake; Dowd, 2006).

Duas estratégias de estimação são particularmente relevantes neste estudo, pois respondem de maneira distinta à heterogeneidade etária e à variância crescente nas caudas das séries brasileiras, que são o Lee-Carter estimado por decomposição em valores singulares na escala do log das taxas e o Lee-Carter formulado como modelo de contagens com verossimilhança Poisson e ponderação por exposição (Camarda; Basellini, 2021). Na primeira abordagem, a hipótese de erro aproximadamente homocedástico em log pode aumentar a sensibilidade a ruído em idades com pouca exposição, o que exige cuidado em caudas etárias e avaliação criteriosa da estabilidade do índice temporal (Booth *et al.*, 2006). Na alternativa em GLM, a estrutura de verossimilhança e o *offset* de exposição reconhecem a heterocedasticidade natural das contagens e tendem a estabilizar o ajuste onde a informação é escassa (Brouhns; Denuit; Vermunt, 2002).

Diante desse quadro, a comparação entre estratégias deve contemplar medidas de erro por idade e por horizonte para o contexto brasileiro recente (Jordan; Krüger; Lerch, 2019).

Assim, caracteriza-se como pergunta que guia esta pesquisa: **Em que medida a escolha do método de estimação (SVD versus GLM Poisson) afeta o desempenho preditivo do modelo Lee-Carter quando aplicado aos dados de mortalidade do Brasil no período de 1994 a 2022?**

## 1.2 OBJETIVOS

### 1.2.1 Objetivo geral

Comparar o desempenho preditivo do modelo Lee-Carter estimado via SVD e via GLM Poisson aplicado às taxas de mortalidade da população brasileira, por sexo, no período de 1994 a 2022.

### 1.2.2 Objetivos específicos

- Estimar o modelo Lee-Carter nas versões LC-SVD e LC-Poisson para os grupos masculino, feminino e total, variando apenas o método de estimação.
- Projetar as taxas de mortalidade para 2018-2022 e avaliar o desempenho preditivo em horizontes de 1 a 5 anos fora da amostra.
- Comparar os modelos via RMSE e MAE, em nível e em log, com e sem ponderação por exposição.
- Analisar o desempenho por idade, ano e horizonte, identificando onde cada especificação se sobressai.

## 1.3 JUSTIFICATIVA

No Brasil, as tábuas do IBGE são referência operacional para previdência, seguros e estudos demográficos, mas a qualidade dos dados enfrenta heterogeneidades regionais e histórico de sub-registro que afetam níveis e variâncias das séries por idade e ano (Gomes; Loschi, 2025; Lima *et al.*, 2024; Gonzaga *et al.*, 2024; IBGE, 2023). Em paralelo, o volume de ativos de aposentadoria é muito elevado, o que torna caros erros de previsão: o relatório OECD *Pensions Outlook 2024* documenta que os ativos previdenciários baseados em investimentos somaram mais

de US\$ 56 trilhões em 2023, o que reforça a importância de hipóteses biométricas transparentes e testáveis (OECD, 2024).

O método de Lee-Carter é amplamente usado como padrão de comparação em projeções de mortalidade pela sua simplicidade estruturada e bom desempenho empírico em muitas populações, o que inclui a formulação em log-taxas estimada por SVD e a formulação em contagens via GLM de família Poisson (Lee; Carter, 1992; Brouhns; Denuit; Vermunt, 2002; Booth *et al.*, 2006). O vácuo identificado não é a ausência de comparações metodológicas na literatura Lee-Carter, já consolidadas em estudos internacionais, mas a limitada evidência, para o caso brasileiro, de uma comparação padronizada entre as estratégias SVD e GLM Poisson sob protocolo único de avaliação fora da amostra, por sexo e horizonte de previsão de 1 a 5 anos (Booth *et al.*, 2006; Basellini; Camarda; Booth, 2023).

As Tábuas Completas do IBGE aparecem como referência de consistência e ponto de checagem em níveis e gradientes por idade, não como insumo direto do modelo, o que esclarece a opção por “usar tábuas” neste texto (IBGE, 2023; IBGE, 2024).

A comparação entre LC-SVD e LC-Poisson é pertinente porque as duas rotas tratam o erro e o peso por exposição de modos diferentes, o que pode alterar o desempenho em idades extremas e em janelas curtas, frequentes no Brasil recente; por isso, a avaliação fora da amostra com *split* fixo, utilizando 1994-2017 para estimação e 2018-2022 para teste, permite comparar o desempenho dos modelos em horizontes de previsão de 1 a 5 anos (Brouhns; Denuit; Vermunt, 2002; Booth *et al.*, 2006; Azman; Pathmanathan, 2022).

## 2 REFERENCIAL TEÓRICO

Esta seção descreve as definições de mortalidade por idade e ano, óbitos  $D_{x,t}$ , exposições  $E_{x,t}$ , taxas de mortalidade central  $m_{x,t}$  e probabilidades  $q_{x,t}$ , os procedimentos de preparação e extrapolação temporal dessas séries, as famílias de modelos utilizadas para projeção e seus usos em atuária e estatística oficial, com foco em aplicações no Brasil.

### 2.1 MORTALIDADE E DADOS DEMOGRÁFICOS NO BRASIL

A análise da mortalidade exige informações consistentes sobre óbitos e população exposta ao risco, organizadas por idade, sexo e período. Em aplicações atuariais e demográficas, essa estrutura é essencial porque a projeção depende não apenas do nível médio da mortalidade, mas também da forma como seus padrões variam ao longo do tempo e entre grupos populacionais. No Brasil, as Tábuas Completas de Mortalidade do IBGE constituem referência importante para aplicações oficiais e estudos populacionais, ao fornecer probabilidades de morte por idade simples e por sexo até o topo etário aberto 90+ (IBGE, 2023).

Quando se torna necessário estender a análise para idades mais avançadas, também se recorre a tábuas extrapoladas disponibilizadas pelo Ministério da Previdência Social, sobretudo em contextos atuariais e previdenciários.

Ainda assim, a utilidade prática dessas informações depende da qualidade dos registros vitais e da consistência entre óbitos e exposições. Estudos recentes mostram que a qualidade e a cobertura dos dados variam entre unidades da federação e podem comprometer comparações temporais e espaciais quando não há tratamento prévio adequado (Lima *et al.*, 2024; Gonzaga *et al.*, 2024).

Essas limitações são particularmente relevantes em idades avançadas e em populações subnacionais, nas quais sub-registro, erro de idade e heterogeneidade de cobertura tendem a afetar o perfil das taxas. Além disso, desigualdades socioeconômicas produzem diferenças relevantes de mortalidade, sobretudo em idades jovens e adultas, o que altera a forma da curva etária e pode introduzir viés quando se utilizam referências nacionais de forma indiscriminada (Lima *et al.*, 2024).

A literatura também enfatiza que o tratamento de zeros, a concentração irregular de óbitos em idades redondas e a documentação das correções adotadas

fazem parte das boas práticas de preparação dos dados de mortalidade (Wilmoth *et al.*, 2025). Recomendações nesse sentido aparecem tanto em bases internacionais de referência quanto em trabalhos recentes sobre suavização e modelagem por idade, que destacam a necessidade de procedimentos transparentes antes da etapa de projeção (Camarda; Basellini, 2021).

## 2.2 PROJEÇÃO DE TAXAS DE MORTALIDADE

Projetar mortalidade significa extrapolar, para anos futuros, a matriz de taxas específicas por idade e ano, a partir da qual se derivam probabilidades de sobrevivência, fluxos esperados e medidas de interesse atuarial (Lee; Carter, 1992). Em seguros e previdência, isso se traduz diretamente em impactos sobre precificação, provisões e avaliação do risco de longevidade, razão pela qual a escolha do procedimento de projeção possui relevância prática e não apenas estatística (Cairns; Blake; Dowd, 2006).

Em calendários anuais usa-se  $q_{x,t} \approx 1 - \exp(-m_{x,t})$ , sendo uma das formas para obter probabilidades anuais a partir das taxas centrais. (Camarda; Basellini, 2021). A construção de  $E_{x,t}$  pode empregar o diagrama de Lexis e regras de calendário para compatibilizar eventos dentro do ano civil. (Wilmoth *et al.*, 2025). Em aplicações subnacionais no Brasil é comum padronizar idades simples, tratar intervalos abertos nas idades avançadas e documentar supostos de qualidade do dado antes da modelagem. (Bergeron-Boucher; Kjærgaard, 2022; Gonzaga *et al.*, 2024).

A etapa de extrapolação temporal pode ser realizada de diversas formas, mas que a avaliação do modelo deve, idealmente, considerar seu desempenho fora da amostra. Esse ponto é central porque um ajuste histórico satisfatório não garante capacidade de generalização. Por essa razão, trabalhos comparativos frequentemente recorrem a protocolos de previsão para verificar o comportamento dos modelos em horizontes futuros, analisando tanto a magnitude dos erros quanto sua distribuição por idade e por período (Booth *et al.*, 2006).

## 2.3 MODELO LEE-CARTER

Entre os modelos de projeção de mortalidade, o de Lee-Carter ocupa posição central por combinar parcimônia, interpretabilidade e bom desempenho empírico em diferentes populações. Sua formulação Lee e Carter (1992) representa o logaritmo das taxas como a soma de um perfil médio por idade, uma sensibilidade etária e um índice temporal comum, isto é,

$$\ln m_{x,t} = a_x + b_x k_t + \varepsilon_{x,t} \quad (1)$$

Nessa formulação  $a_x$  descreve o nível médio por idade,  $b_x$  quantifica a resposta relativa por idade ao índice temporal e  $k_t$  resume o nível anual de mortalidade observado na série histórica (Basellini; Camarda; Booth, 2023).

Essa estimação clássica calcula  $a_x$  como média temporal do log das taxas, aplica a decomposição em valores singulares para obter  $b_x$  e  $k_t$ , e utiliza um ajuste para compatibilizar órbitos previstos e observados quando necessário (Booth *et al.*, 2006). Para extrapolação no tempo o índice temporal da mortalidade geral ( $k_t$ ) é tratado como série temporal e pode ser projetado por uma metodologia chamada passeio aleatório com tendência média descrito na literatura como ARIMA(0,1,0) com termo de deriva (Azman; Pathmanathan, 2022).

Para tornar o modelo identificável, impõem-se as restrições padrão

$$\sum_x^{x_\omega} b_x = 1 \text{ e } \sum_{t=t_0}^{t_1} k_t = 0 \quad (2)$$

em que  $x_\omega$  é a idade máxima considerada na modelagem,  $t_0$  e  $t_1$  delimitam a janela de estimação. Os parâmetros podem ser estimados por decomposição em valores singulares (SVD) aplicada à matriz centrada de  $\ln m_{x,t}$ . Após a etapa inicial, costuma-se reajustar  $\hat{k}_t$  mantendo  $\hat{a}_x$  e  $\hat{b}_x$  fixos para que os órbitos agregados previstos por ano coincidam com os observados (Lee; Carter, 1992; Li; Lee, 2005).

A extrapolação de  $k_t$  é frequentemente feita por modelos ARIMA, a especificação de passeio aleatório com deriva (ARIMA(0,1,0) com constante) aparece como escolha operacional em estudos comparativos (Booth *et al.*, 2006). Revisões recentes indicam que a janela de calibração afeta a deriva e a variância projetada de  $k_t$ , recomendando verificar linearidade e horizonte antes da extrapolação (Basellini;

Camarda; Booth, 2023). Conforme Booth *et al.* (2006) e Basellini, Camarda e Booth (2023), explicam que a abordagem permanece como *benchmark* na literatura por sua simplicidade estrutural e por seu papel histórico em projeções comparativas.

### 2.3.1 Estratégias de estimação: SVD e GLM Poisson

No LC-Poisson assume-se  $D_{x,t} \sim \text{Poisson}(E_{x,t} \mu_{x,t})$ , em que  $E_{x,t}$  é a exposição ao risco medida em pessoas-ano para a idade  $x$  no ano  $t$  e  $\mu_{x,t}$  é a taxa de mortalidade desse estrato que, em calendário anual, é bem aproximada pela taxa central  $m_{x,t}$  (Brouhns; Denuit; Vermunt, 2002). Com ligação log, o preditor fica

$$\text{Log } \mathbb{E}[D_{x,t}] = a_x + b_x k_t + \log E_{x,t} \quad (3)$$

em que  $\log E_{x,t}$  entra como *offset*, isto é, um termo conhecido com coeficiente fixo igual a 1 que apenas ajusta a escala para que o modelo trabalhe efetivamente com taxas e não confunda contagens baixas com taxas baixas quando as exposições variam entre idades e anos (Brouhns; Denuit; Vermunt, 2002). Intuitivamente, o produto  $E_{x,t} \mu_{x,t}$  é a esperança de óbitos no estrato porque exposição multiplicada pela taxa fornece a contagem esperada em um modelo de contagens com ponderação automática por tamanho do grupo no ajuste (Booth *et al.*, 2006).

A principal diferença entre SVD e GLM Poisson está, portanto, na forma como o peso estatístico das observações é tratado. Na abordagem SVD, o ajuste ocorre sobre as log-taxas; na abordagem Poisson, a verossimilhança reconhece explicitamente a natureza de contagem dos óbitos e a heterogeneidade das exposições. Em contextos com forte variação de exposição entre idades e anos, essa diferença pode alterar a sensibilidade do ajuste, especialmente nas caudas etárias, como argumentam Brouhns, Denuit e Vermunt (2002) e Camarda e Basellini (2021).

Aplicações recentes no Brasil reforçam a necessidade de documentar a preparação da base e o protocolo de comparação ao trabalhar com contagens e exposições heterogêneas (Gonzaga *et al.*, 2024). Por isso, a comparação entre LC-SVD e LC-Poisson é especialmente pertinente em séries brasileiras recentes, nas quais a heterogeneidade etária e a variabilidade das idades avançadas podem afetar o desempenho relativo das duas estratégias.

No modelo de Lee-Carter, a qualidade da previsão depende tanto da estimação dos componentes etários quanto da extrapolação do índice temporal  $k_t$ . Como esse índice resume a evolução global da mortalidade, sua projeção é a etapa que conecta a estrutura ajustada aos anos futuros. Em aplicações empíricas, isso costuma ser feito por modelagem univariada simples, especialmente por passeio aleatório com deriva, escolha recorrente em estudos comparativos por sua parcimônia e estabilidade (Booth *et al.*, 2006; Azman; Pathmanathan, 2022).

Do ponto de vista da avaliação, Booth *et al.* (2006) enfatiza a importância de procedimentos fora da amostra, nos quais o modelo é estimado em um intervalo histórico e testado em anos não utilizados na estimação. Esse tipo de protocolo é mais informativo do que a análise apenas do ajuste interno, porque permite examinar a capacidade de generalização da estrutura estimada para períodos posteriores (Booth *et al.*, 2006). Em trabalhos comparativos, essa avaliação costuma ser feita por horizonte de previsão e por idade, dado que o erro da projeção não tende a ser uniforme ao longo da distribuição etária.

Nesse contexto, métricas pontuais de erro, como *Mean Absolute Error* (MAE) e *Root Mean Squared Error* (RMSE), são particularmente úteis, pois sintetizam a magnitude dos desvios entre observado e previsto em diferentes escalas. O MAE é o erro absoluto médio e preserva a unidade da variável; o RMSE, por sua vez, penaliza com mais intensidade discrepâncias elevadas, sendo mais sensível à presença de erros grandes. Em aplicações de mortalidade, essas medidas podem ser calculadas tanto em  $m_{x,t}$  quanto em  $\ln(m_{x,t})$ , o que permite comparar simultaneamente diferenças absolutas e relativas.

A análise gráfica complementa essas métricas ao mostrar em quais idades e períodos os erros se concentram. Em estudos de mortalidade, esse diagnóstico é particularmente importante porque o desempenho pode variar de forma relevante entre idades centrais e idades avançadas, bem como entre anos de maior estabilidade e anos sujeitos a choques exógenos (Bergeron-Boucher; Kjærgaard, 2022).

A literatura que compara LC-SVD e LC-Poisson sugere que as duas estratégias preservam a mesma estrutura substantiva do modelo, mas podem produzir diferenças importantes de ajuste e previsão.

Booth *et al.* (2006) mostram que a avaliação comparativa de modelos de mortalidade deve considerar não apenas a qualidade do ajuste histórico, mas também seu desempenho preditivo em protocolos fora da amostra. Nessa linha, estudos mais

recentes observam que a escolha do método de estimação pode alterar a estabilidade do índice temporal, a sensibilidade a idades com menor exposição e a distribuição dos erros ao longo dos horizontes de previsão (Basellini; Camarda; Booth, 2023).

Em aplicações com maior heterogeneidade etária e variabilidade nas caudas, como frequentemente ocorre em dados brasileiros, essa comparação se torna ainda mais relevante. O argumento central não é que uma abordagem substitua a outra em todos os cenários, mas que a forma de estimação pode influenciar a capacidade do modelo de capturar padrões recentes da mortalidade e de equilibrar responsividade local com estabilidade temporal. É precisamente nesse ponto que se insere a contribuição deste trabalho: comparar, em base brasileira recente e sob protocolo único, duas estratégias de estimação do próprio Lee-Carter.

### 3 METODOLOGIA

Este capítulo descreve o percurso metodológico adotado para responder à pergunta central do estudo. Apresenta-se (i) a natureza e o desenho da pesquisa; (ii) a base de dados e os critérios de crítica e preparo; (iii) os modelos de mortalidade comparados, com ênfase nas duas estratégias de estimação do Lee-Carter (LC) via decomposição em valores singulares (SVD) e via GLM Poisson; e (iv) o protocolo de previsão e avaliação, incluindo métricas pontuais de erro e análise gráfica dos resultados.

Todas as análises foram realizadas no software R, com apoio de pacotes para séries temporais e avaliação probabilística, em linha com boas práticas contemporâneas de avaliação de previsões e com documentação consolidada na literatura (Jordan; Krüger; Lerch, 2019).

#### 3.1 DADOS DA PESQUISA

As taxas centrais de mortalidade por idade e ano são definidas como  $m_{x,t} = D_{x,t}/E_{x,t}$ , em que  $D_{x,t}$  são os óbitos observados e  $E_{x,t}$  é a exposição média ao risco do mesmo estrato (Brouhns; Denuit; Vermunt, 2002). Em calendário anual  $m_{x,t}$  aproxima a intensidade  $\mu_{x,t}$  e permite derivar probabilidades anuais  $q_{x,t}$  sob hipóteses padrão de risco aproximadamente constante no intervalo de tempo (Booth *et al.*, 2006).

As contagens  $D_{x,t}$  provêm do Sistema de Informações sobre Mortalidade (SIM), sistema disponibilizado pelo DATASUS. Essa base reúne registros administrativos oficiais de óbitos ocorridos no país, permitindo a extração de dados detalhados por ano, faixa etária, sexo, localidade e causa de morte (CID-10). O acesso a esses dados é realizado por meio da plataforma *TabNet* do DATASUS, que possibilita consultas customizadas e exportação das informações em formato tabular para tratamento posterior.

Já os dados da população exposta usada para compor  $E_{x,t}$  provêm do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) com organização por idade simples, sexo e Unidade da Federação para o período 1994-2022, disponíveis no site oficial do instituto. Sendo a população no meio do ano (*mid-year population*) a mais adequada para cálculo de exposição ao risco.

Nas análises agregadas e desagregadas utiliza-se a disponibilização contínua das séries nacionais de 1994-2022 conforme a documentação oficial das bases (IBGE, 2023). A exposição  $E_{x,t}$  é aproximada pela população de meio do ano e ajustadas nos anos intercensitários para assegurar comparabilidade temporal entre idades e unidades geográficas (Calazans; Guimarães; Nepomuceno, 2023).

Essa definição demográfica é comum às duas formulações do Lee-Carter e permite comparar a versão em log-taxas estimada por SVD com a versão em contagens com *offset* na estrutura GLM Poisson em condições equivalentes de medida (Brouhns; Denuit; Vermunt, 2002).

Como o recorte empírico do trabalho utiliza idades de 0 a 90 anos, a base foi mantida nesse intervalo etário, compatível com a disponibilidade e a organização dos dados empregados na comparação entre os modelos.

Esse fechamento mantém taxas definidas e comparáveis nas caudas etárias em contextos de pequena exposição e maior variabilidade, reduzindo a influência de flutuações amostrais em idades extremas (Gonzaga *et al.*, 2024).

Dada a heterogeneidade regional do registro de óbitos no Brasil, a base foi inspecionada quanto à completude e à consistência entre óbitos e exposições antes da modelagem (Lima *et al.*, 2024).

As séries  $m_{x,t}$  preparadas segundo estes passos constituem a entrada para o Lee-Carter em log-taxas com estimação por SVD e para a formulação em contagens com *offset* no GLM Poisson, preservando a mesma base demográfica na comparação entre estratégias (Lee; Carter, 1992; Brouhns; Denuit; Vermunt, 2002).

### 3.2 TAXA DE MORTALIDADE E MODELOS LEE-CARTER

A partir das taxas centrais, também foram obtidas probabilidades anuais de morte  $q_x$  para fins de apoio descritivo da base. No entanto, a modelagem principal foi conduzida sobre  $m_{x,t}$ , por ser essa a variável diretamente utilizada nas especificações comparadas do modelo de Lee-Carter.

Com isso, a transformação logarítmica das taxas foi utilizada na estimação da versão clássica do modelo, em linha com a formulação original de Lee e Carter (1992). Já na versão Poisson, a estrutura de modelagem parte das contagens de óbitos, incorporando explicitamente a exposição como *offset*, o que permite tratar de modo

mais direto a escala populacional de cada célula idade-ano, conforme Brouhns, Denuit e Vermunt (2002). Assim, embora ambas as abordagens utilizem a mesma base demográfica, elas diferem na forma de traduzir estatisticamente essa informação.

A diferença crucial é que a versão em log-taxas estimada por SVD ajusta uma decomposição determinística sobre  $\log m_{x,t}$ , enquanto a versão em contagens formula um GLM de família Poisson com *offset*  $\log E_{x,t}$ , o que introduz a exposição diretamente na verossimilhança. Essa escolha altera a forma como a incerteza é propagada e como cada idade influencia o ajuste e a previsão.

### 3.2.1 Lee-Carter Via SVD

Na versão clássica do modelo, os parâmetros são estimados a partir da decomposição em valores singulares aplicada à matriz de log-taxas centralizadas por idade. Nesse procedimento,  $a_x$  é obtido a partir do nível médio da série por idade, enquanto  $b_x$  e  $k_t$  são extraídos da decomposição da variação residual ao redor desse nível, conforme a proposta original de Lee e Carter (1992).

A estimação por SVD inicia com o perfil etário médio

$$\hat{a}_x = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \ln m_{x,t}, \quad T = t_1 - t_0 + 1 \quad (5)$$

para separar a variação no tempo da variação por idade (Lee; Carter, 1992), em que na presente pesquisa é definido como  $t_0 = 1994$ ,  $t_1 = 2017$  e, portanto,  $T = 24$ .

Em seguida centraliza-se a matriz  $Y = [y_{x,t}]$  com  $y_{x,t} = \ln m_{x,t} - \hat{a}_x$  e aplica-se a decomposição  $Y = U\Sigma V^T$ , retendo o primeiro triplo singular para obter

$$\tilde{b}_x = u_{1,x} \quad \text{e} \quad \tilde{k}_t = \sigma_1 v_{1,t} \quad (6)$$

como aproximação de posto um (Lee; Carter, 1992).

Em que  $Y = [y_{x,t}]$  é a matriz de log-taxas centralizadas,  $U$  e  $V$  são matrizes de vetores singulares,  $\Sigma$  é a matriz diagonal dos valores singulares,  $\sigma_1$  é o primeiro valor singular,  $u_{1,x}$  é o elemento do primeiro vetor singular à esquerda associado à idade  $x$ , e  $v_{1,t}$  é o elemento do primeiro vetor singular à direita associado ao ano  $t$ .

Para garantir identificabilidade impõem-se as restrições Eq. (3) o que se implementa recentrando  $\tilde{k}_t$  e reescalando conjuntamente  $(\tilde{a}_x, \tilde{b}_x, \tilde{k}_t)$  sem alterar a Eq. (1) (Lee; Carter, 1992).

Com  $a_x$  e  $b_x$  fixos refina-se  $k_t$  impondo a compatibilização anual de óbitos

$$\sum_{x=0}^{x_\omega} E_{x,t} \exp(a_x + b_x k_t) = D_{.,t} \quad (7)$$

Em que  $D_{.,t} = \sum_{x=0}^{x_\omega} D_{x,t}$ , sendo resolvida em uma dimensão por Newton com atualização

$$k_t^{(n+1)} = k_t^{(n)} + \frac{D_{.,t} - \sum_{x=0}^{x_\omega} E_{x,t} \exp(a_x + b_x k_t^{(n)})}{\sum_{x=0}^{x_\omega} b_x E_{x,t} \exp(a_x + b_x k_t^{(n)})} \quad (8)$$

até convergência numérica por ano  $t$  (Lee; Carter, 1992), em que  $n$  indica a iteração do algoritmo de Newton-Raphson.

Para projeção do índice temporal adota-se processo univariado simples do tipo passeio aleatório com deriva

$$k_{t+1} = k_t + c + \eta_t \quad (9)$$

em que  $c$  é a tendência estimada na janela de calibração e  $\eta_t$  é ruído branco, conforme prática de séries temporais em aplicações de mortalidade (Booth *et al.*, 2006).

Esse enquadramento supõe variância aproximadamente constante do erro em  $\ln m_{x,t}$  e não pondera explicitamente por  $E_{x,t}$ , razão pela qual, quando exposições variam muito entre idades e anos, considera-se a formulação alternativa em GLM Poisson com *offset*  $\log E_{x,t}$ ,

$$\log \mathbb{E}[D_{x,t}] = a_x + b_x k_t + \log E_{x,t} \quad (10)$$

preservando o preditor do LC e incorporando o tamanho populacional na máxima verossimilhança (Brouhns; Denuit; Vermunt, 2002).

Em idades avançadas a exposição tende a ser menor e a variabilidade relativa aumenta, por isso recomenda-se inspecionar resíduos e sensibilidade a janelas de calibração e relatar resultados por idade nas avaliações preditivas (Bergeron-Boucher; Kjærgaard, 2022).

### 3.2.2 Lee-Carter Via GLM de família Poisson com offset

No enquadramento Poisson assume-se que as contagens de óbitos por idade e ano seguem  $D_{x,t} | E_{x,t} \sim \text{Poisson}(E_{x,t} \mu_{x,t})$ , em que  $E_{x,t}$  é a exposição em pessoas-ano e  $\mu_{x,t}$  é a intensidade anual de mortalidade para a célula  $(x, t)$  (Brouhns; Denuit; Vermunt, 2002).

A estrutura Lee-Carter é preservada impondo o vínculo logarítmico  $\log \mu_{x,t} = a_x + b_x k_t$ , de modo que a média de  $D_{x,t}$  obedece  $\mathbb{E}[D_{x,t}] = E_{x,t} \exp(a_x + b_x k_t)$  em cada célula (Brouhns; Denuit; Vermunt, 2002).

O *offset* é um termo conhecido somado ao preditor linear com coeficiente fixo igual a 1, de forma que o preditor para a média das contagens é

$$\eta_{x,t} = \log \mathbb{E}[D_{x,t}] = a_x + b_x k_t + \log E_{x,t} \quad (11)$$

incorporando explicitamente o tamanho da população em risco na estimação (Camarda; Basellini, 2021).

A log-verossimilhança no painel  $(x, t)$  é

$$\ell(a, b, k) = \sum_{x=0}^{x_\omega} \sum_{t=t_0}^{t_1} \{ D_{x,t} (a_x + b_x k_t + \log E_{x,t}) - E_{x,t} \exp(a_x + b_x k_t) - \log(D_{x,t}!) \} \quad (12)$$

e sua maximização é feita por máxima verossimilhança (Brouhns; Denuit; Vermunt, 2002).

Como no LC clássico, impõem-se as restrições de identificabilidade  $\sum_x^{x_\omega} b_x = 1$  e  $\sum_{t=t_0}^{t_1} k_t = 0$  após cada iteração para fixar escala de  $b_x$  e localização de  $k_t$  sem alterar o valor de  $\ell(a, b, k)$  no ótimo, conforme a Eq. (4) do protocolo geral (Camarda;

Basellini, 2021). Com os parâmetros estimados, projeta-se  $k_t$  por ARIMA com deriva, mantendo a mesma rotina adotada na formulação SVD (Li; Lee, 2005).

As propriedades de primeira e segunda ordem são  $\mathbb{E}[D_{x,t} | E_{x,t}] = E_{x,t} \mu_{x,t}$  e  $\text{Var}(D_{x,t} | E_{x,t}) = E_{x,t} \mu_{x,t}$ , o que torna coerentes média e variância (Brouhns; Denuit; Vermunt, 2002).

A exposição  $E_{x,t}$  é construída como pessoas-ano por idade e ano e pode ser aproximada pela população de meio do ano nos anos intercensitários, com documentação das escolhas para assegurar comparabilidade temporal e reprodutibilidade nas desagregações por sexo e Unidade da Federação (Calazans; Guimarães; Nepomuceno, 2023).

As duas estratégias diferem na escala de trabalho. A SVD opera em  $\log m_{x,t}$  e pressupõe um erro aproximadamente gaussiano nessa escala. O GLM trabalha com  $D_{x,t}$  e induz uma distribuição assimétrica em  $m_{x,t}$  por construção, já que  $m_{x,t} = \frac{D_{x,t}}{E_{x,t}}$  (Cairns; Blake; Dowd, 2006).

Essa diferença importa quando se traduzem previsões para indicadores derivados, como  $q_{x,t}$  e esperança de vida, pois a transformação entre escalas pode alterar o viés e a dispersão (Camarda; Basellini, 2021). Uma prática recomendada é reportar resultados em ambas as escalas, isto é, comparar erros em  $\log m_{x,t}$  e em  $m_{x,t}$ , a fim de separar precisão relativa de precisão absoluta (Jordan; Krüger; Lerch, 2019).

As restrições de identificabilidade eliminam indeterminâncias de escala e nível, mas também influenciam a interpretação de  $k_t$ , e com  $\sum_x b_x = 1$ , o índice temporal pode ser lido como um deslocamento médio do log-nível de mortalidade ao longo do tempo, assim, essa leitura ajuda a comparar as estimativas de  $k_t$  geradas pelas duas estratégias (Li; Lee, 2005; Camarda; Basellini, 2021).

Se a série de  $k_t$  do GLM apresenta menor volatilidade, isso geralmente decorre da ponderação por exposição que reduz o peso de idades muito ruidosas (Azman; Pathmanathan, 2022). Por outro lado, a SVD pode produzir um  $k_t$  mais sensível a mudanças relativas em idades de baixa exposição, o que às vezes antecipa inflexões, mas também pode amplificar ruído (Bergeron-Boucher; Kjærgaard, 2022).

A previsão depende da dinâmica imposta a  $k_t$  (Li; Lee, 2005). O passeio aleatório com deriva é um ponto de partida simples e frequentemente adequado nos

curto e médio prazos (Cairns; Blake; Dowd, 2006). Em contextos com padrões sazonais inexistentes e tendência suave, um ARIMA parco tende a oferecer bom compromisso entre parcimônia e ajuste (Bergeron-Boucher; Kjærsgaard, 2022).

### 3.2.3 Métricas de avaliação

O índice temporal  $k_t$  foi projetado por passeio aleatório com deriva, conforme prática consolidada em estudos comparativos do Lee-Carter (Booth *et al.*, 2006).

A comparação entre os modelos foi realizada por meio de métricas pontuais de erro calculadas entre valores observados e previstos das taxas de mortalidade. As medidas centrais do estudo foram o MAE e a RMSE, calculados tanto na escala original das taxas quanto na escala logarítmica.

O MAE sintetiza a magnitude média dos desvios absolutos entre observado e previsto, sendo menos sensível a erros extremos. Já o RMSE atribui peso relativamente maior a discrepâncias elevadas, o que o torna útil quando se deseja penalizar previsões com erros grandes de forma mais intensa. Em conjunto, essas duas medidas oferecem uma leitura complementar da acurácia preditiva, prática recorrente em avaliações empíricas de modelos de mortalidade e previsão.

Seja  $y$  a quantidade avaliada para idade  $x$  e horizonte  $h$  no tempo  $t$  (em  $m_{x,t+h}$  ou  $\log m_{x,t+h}$ ),  $\hat{y}_{x,t+h}$  a previsão correspondente e

$$e_{x,t+h} = y_{x,t+h} - \hat{y}_{x,t+h} \quad (13)$$

o erro. Quando houver ponderação por exposição, define-se

$$w_{x,t+h} = E_{x,t+h} / \sum E_{x,t+h} \quad (14)$$

I. RMSE (raiz do erro quadrático médio):

$$RMSE \sqrt{\frac{1}{N} \sum e_{x,t+h}^2}, \quad RMSE_w = \sqrt{\frac{1}{N} \sum w_{x,t+h} e_{x,t+h}^2} \quad (15)$$

Decorre de função de perda quadrática e impõe penalização convexa a grandes desvios; sob homoscedasticidade e aproximação normal dos resíduos, é

estatisticamente eficiente e aproxima o desvio-padrão do erro na mesma escala da variável.

II. MAE (erro absoluto médio):

$$MAE = \frac{1}{N} \sum |e_{x,t+h}|, \quad MAE_w = \sum w_{x,t+h} |e_{x,t+h}| \quad (16)$$

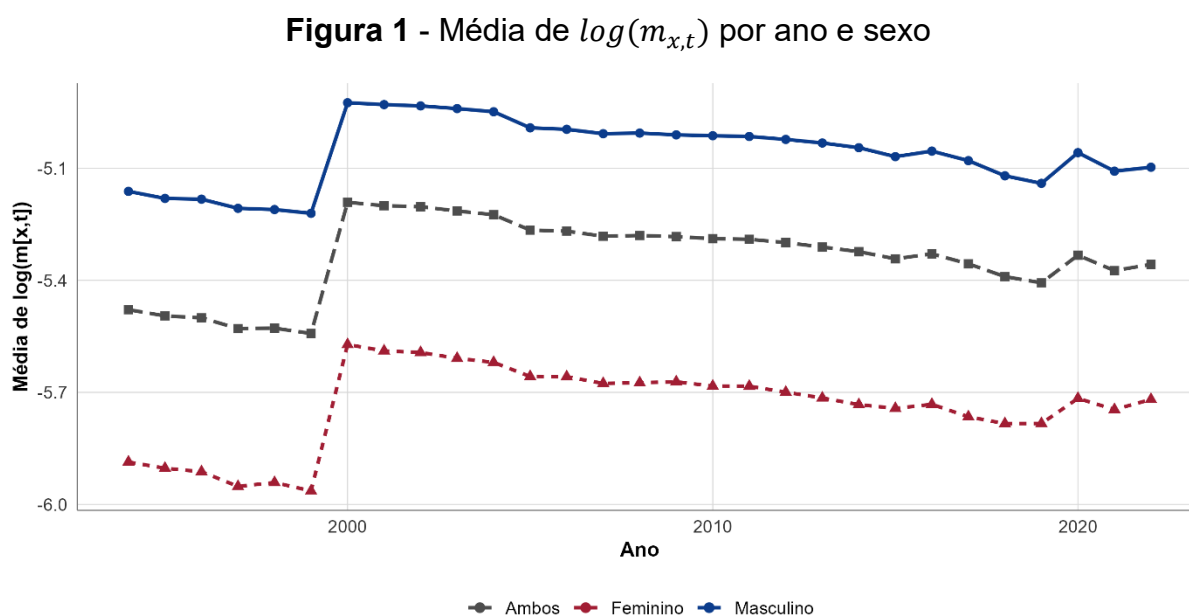
em que  $N$  é o número de observações usadas no cálculo da métrica no horizonte  $h$ . Baseado em perdas, a perda absoluta, apresenta menor sensibilidade a observações extremas do que o RMSE e preserva a unidade original da variável, favorecendo comparações diretas entre idades e subgrupos.

Por fim, para replicação de estudo. Segue link com o código com a metodologia aplicada no projeto: [https://github.com/fred1u/TCC\\_2026.git](https://github.com/fred1u/TCC_2026.git)

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

### 4.1 PANORAMA DOS DADOS DE MORTALIDADE

Antes de comparar o desempenho preditivo dos modelos, convém examinar o comportamento geral da mortalidade ao longo da série, pois esse movimento de fundo ajuda a interpretar tanto os parâmetros estimados quanto os erros de previsão. A trajetória temporal da média de  $\ln(m_{x,t})$ , apresentada na Figura 1, permite visualizar esse padrão de forma sintética.



**Fonte:** Elaboração Própria (2026).

Ao longo do período de 1994 a 2022, a série exibe uma tendência predominante de queda, o que é compatível com a redução gradual da mortalidade observada em vários contextos demográficos nas últimas décadas, como discutem Wilmoth (1998) e Booth *et al.* (2006). Esse declínio, contudo, não ocorre de maneira uniforme. A partir da década de 2010, o ritmo de redução parece perder intensidade e, nos anos finais, a série deixa de seguir o mesmo comportamento observado anteriormente.

A quebra visual em torno do ano 2000 sugere um problema de comparabilidade da série de exposição populacional. Segundo o IBGE (2013), a população do Censo Demográfico 2000 foi ajustada por sexo e idade mediante conciliação demográfica para servir de base às projeções populacionais; na revisão mais recente, o instituto

reafirma que as estimativas anuais de 2000 a 2022 foram construídas a partir desse arcabouço metodológico de estimação e conciliação (IBGE, 2024). Nesse contexto, como  $m_{x,t}$  depende diretamente do denominador populacional, parte da descontinuidade observada pode refletir uma mudança metodológica na base de exposição, e não necessariamente uma alteração abrupta do risco de morte.

Esse ponto merece atenção porque o período de teste do trabalho coincide justamente com essa fase de maior instabilidade. Em especial, os anos mais recentes mostram uma inflexão que rompe, ainda que parcialmente, a tendência histórica de queda. A literatura dos últimos cinco anos associa esse tipo de descontinuidade ao impacto da pandemia de COVID-19 sobre a mortalidade, que introduziu um choque exógeno difícil de capturar por modelos baseados na extrapolação de padrões passados (Bergeron-Boucher; Kjærgaard, 2022).

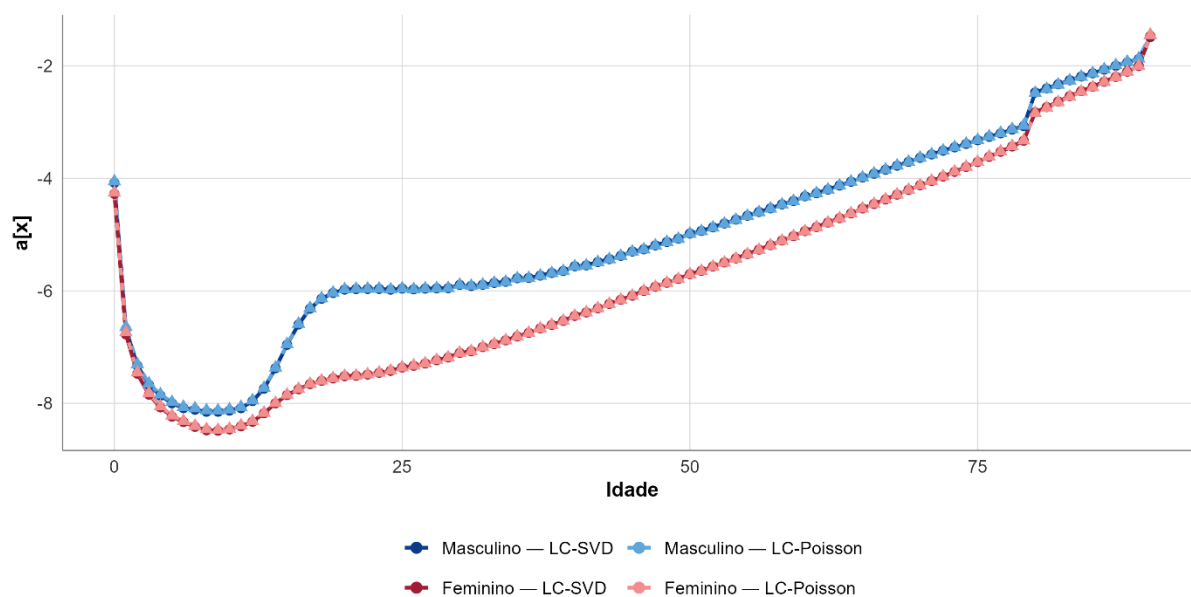
Essa leitura inicial é importante porque antecipa uma dificuldade que reaparece ao longo da seção: os modelos conseguem reproduzir razoavelmente bem a tendência estrutural da mortalidade, mas respondem com menos precisão quando a série se afasta bruscamente do seu comportamento histórico.

## 4.2 PARÂMETROS ESTIMADOS DO MODELO

A etapa seguinte consiste em examinar os componentes do modelo de Lee-Carter, pois eles mostram como cada estratégia de estimação organiza a estrutura etária e temporal da mortalidade antes mesmo da projeção. As Figuras 2, 3 e 4 sintetizam essa decomposição por meio dos parâmetros  $a_x$ ,  $b_x$  e  $k_t$ .

A Figura 2 reúne as estimativas de  $a_x$  de 1994 a 2022, isto é, o nível médio da mortalidade por idade dentro do período.

**Figura 2 - Parâmetro  $a_x$  por idade**

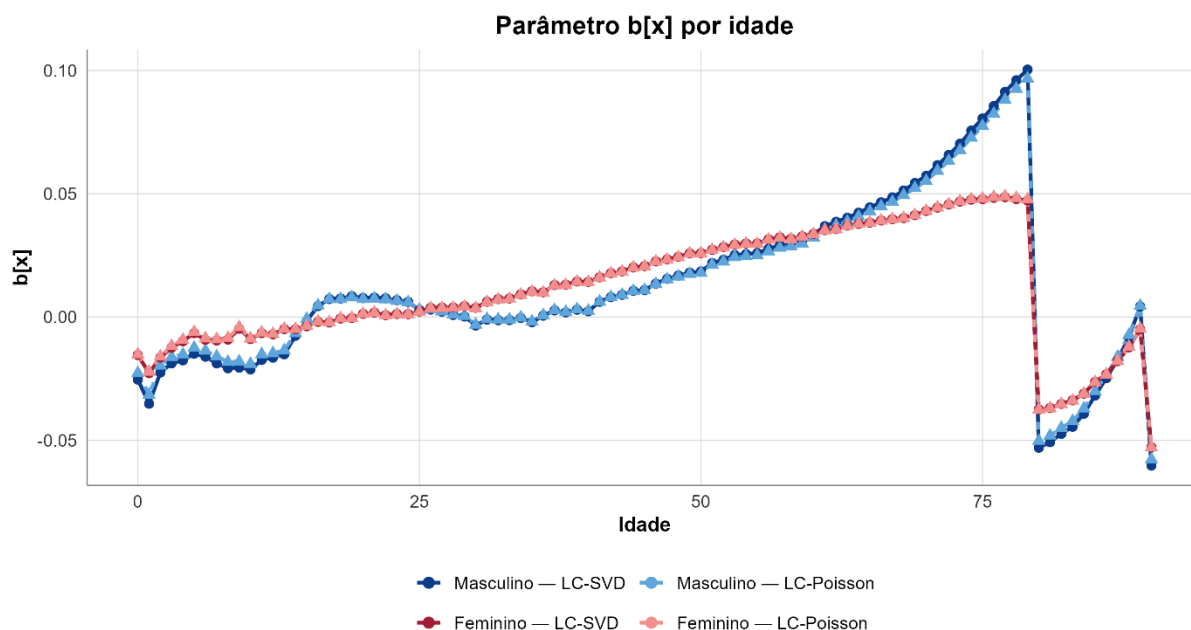


**Fonte:** Elaboração Própria (2026).

O desenho da curva segue o padrão clássico da mortalidade: nível mais elevado na infância, mínimo nas idades jovens-adultas e crescimento progressivo a partir das idades adultas. Esse resultado era esperado e confirma que ambas as abordagens preservam adequadamente a estrutura média por idade (Lee; Carter, 1992). O grupo masculino mantém níveis sistematicamente superiores ao feminino ao longo de toda a distribuição etária, o que reforça um diferencial já bem documentado na literatura.

A Figura 3 mostra o comportamento de  $b_x$ , parâmetro que expressa a sensibilidade de cada idade às variações temporais.

**Figura 3 -  $b_x$  por idade**

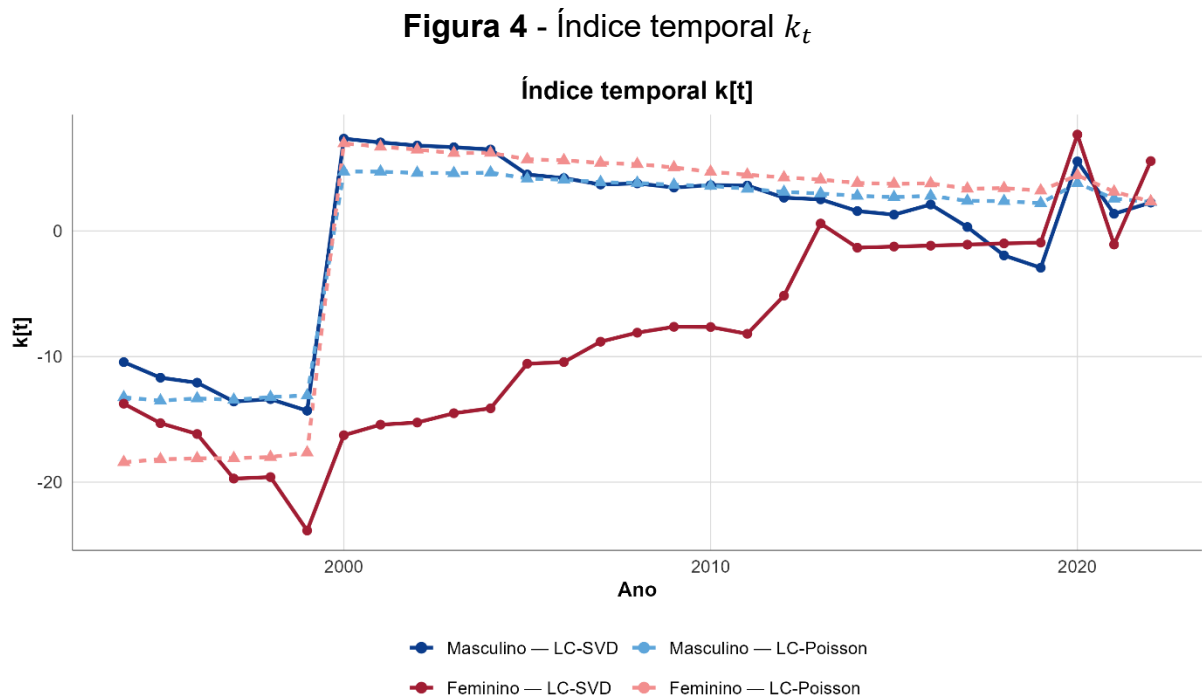


**Fonte:** Elaboração Própria (2026).

Aqui a diferença entre os métodos se torna um pouco mais nítida. Embora ambos indiquem maior sensibilidade nas idades adultas e avançadas, o LC-Poisson produz perfis mais suaves, sobretudo nas faixas etárias mais elevadas, enquanto o LC-SVD apresenta oscilações locais mais visíveis. Essa diferença é coerente com a lógica estatística das duas abordagens: ao incorporar explicitamente a exposição e a natureza de contagem dos óbitos, o modelo Poisson tende a reduzir a influência de flutuações mais irregulares em células com menor informação (Brouhns; Denuit; Vermunt, 2002).

O pico negativo observado entre 80 e 90 anos deve ser lido com cautela, pois ocorre justamente no limite superior da faixa etária modelada. Nessa região, a menor exposição ao risco e a maior variabilidade relativa das contagens tornam o ajuste mais instável, de modo que oscilações locais dos parâmetros não devem ser interpretadas automaticamente como padrão substantivo da mortalidade, mas como possível efeito da baixa informação estatística nas idades avançadas (Bergeron-Boucher; Kjærgaard, 2022).

Já a Figura 4 apresenta a trajetória do índice temporal  $k_t$ , que resume a evolução da mortalidade ao longo dos anos.



**Fonte:** Elaboração Própria (2026).

A leitura desse componente confirma a tendência geral de queda da mortalidade no período de treinamento, mas também deixa evidente a perda de regularidade nos anos finais da série. Em outras palavras, o próprio componente temporal já sinaliza que o ambiente preditivo enfrentado pelos modelos no período de teste não é de continuidade simples, mas de inflexão. Esse ponto ajuda a explicar por que, mais adiante, a previsão se torna mais difícil justamente nos anos recentes.

A diferença de nível entre as séries masculina e feminina reflete as restrições de identificabilidade impostas separadamente a cada grupo, de modo que os valores absolutos de  $k_t$  não são diretamente comparáveis entre sexos. O aspecto relevante para a comparação entre modelos é a trajetória e a volatilidade relativa dentro de cada grupo (Li; Lee, 2005)

### 4.3 AVALIAÇÃO PREDITIVA FORA DA AMOSTRA

Tendo em vista a estrutura estimada pelos modelos, o passo seguinte é verificar como essas diferenças se traduzem em desempenho preditivo efetivo. Essa comparação aparece de forma consolidada na Tabela 1, que reúne as métricas de erro por sexo, horizonte e estratégia de estimação.

**Tabela 1** - Desempenho preditivo dos modelos (RMSE e MAE) por sexo e horizonte (2018-2022).

Sexo	h	Modelo (LC)	Sem Ponderamento				Com Ponderamento			
			RMSE (mx)	MAE (mx)	RMSE log(mx)	MAE log(mx)	RMSE (mx)	MAE (mx)	RMSE log(mx)	MAE log(mx)
Ambos	1	Poisson	0,00232	<b>0,00122</b>	0,13436	0,11409	0,00120	1	0,14790	0,12897
		SVD	0,00863	0,00368	0,17682	0,14483	0,00415	0,00108	0,15988	0,12798
	3	Poisson	0,00330	0,00151	0,15116	0,13801	0,00184	0,90400	0,16488	0,15539
		SVD	0,00814	0,00356	0,17740	0,14852	0,00394	<u>0,00109</u>	0,16285	0,13476
	5	Poisson	0,00591	0,00166	0,16502	0,09924	0,00301	1	0,18122	0,11128
		SVD	0,00671	0,00365	0,25220	0,19625	0,00369	0,00143	0,24180	0,17627
Feminino	1	Poisson	0,00679	0,00238	0,15089	0,13985	0,00370	0,00102	0,15542	0,14569
		SVD	0,00669	0,00324	0,18004	0,14236	0,00339	0,00110	0,16277	0,12282
	3	Poisson	0,01075	0,00367	0,16502	0,15078	0,00573	0,00139	0,15815	0,14374
		SVD	0,00566	0,00269	0,16639	0,12800	0,00296	1	0,14585	0,10910
	5	Poisson	0,00192	<b>0,00100</b>	0,12224	0,10737	<u>0,00102</u>	1	0,13148	0,11801
		SVD	0,00815	0,00314	0,15342	0,12317	0,00436	1	0,13545	0,10448
Masculino	1	Poisson	0,00279	0,00121	0,13520	0,11938	0,00170	1	0,14245	0,12782
		SVD	0,00765	0,00301	0,15411	0,11941	0,00409	1	0,13720	0,10028
	3	Poisson	0,00454	0,00120	0,15824	0,09259	0,00272	1	0,17075	0,10049
		SVD	0,00636	0,00307	0,23766	0,19706	0,00364	<u>0,00126</u>	0,23269	0,18489
	5	Poisson	0,00606	<b>0,00199</b>	0,13658	0,12004	0,00375	1	0,13326	0,11630
		SVD	0,00613	0,00273	0,15178	0,11923	0,00334	1	0,13399	0,09790

**Fonte:** Elaboração Própria (2026).

O primeiro resultado que se destaca é a vantagem do LC-Poisson nos horizontes de previsão mais curtos. Para  $h = 1$ , por exemplo, o modelo Poisson apresentou os menores valores de RMSE ponderado para os três grupos: 0,00157 no masculino, 0,00102 no feminino e 0,00120 em ambos, contra 0,00280, 0,00127 e 0,00415 no LC-SVD, respectivamente. A diferença é particularmente expressiva no grupo agregado, em que o erro do LC-SVD supera de forma ampla o do LC-Poisson.

Esse padrão se repete em  $h = 2$ , quando o LC-Poisson continua à frente em todos os grupos, com RMSE ponderado de 0,00221 no masculino, 0,00170 no feminino e 0,00184 em ambos. Embora o LC-SVD se aproxime em alguns casos, ele permanece atrás nessas previsões de curto prazo. Isso sugere que a estimação via

Poisson responde melhor à estrutura recente da mortalidade, o que é coerente com a literatura que associa essa formulação a maior sensibilidade às diferenças de exposição e à heterogeneidade das contagens (Brouhns; Denuit; Vermunt, 2002).

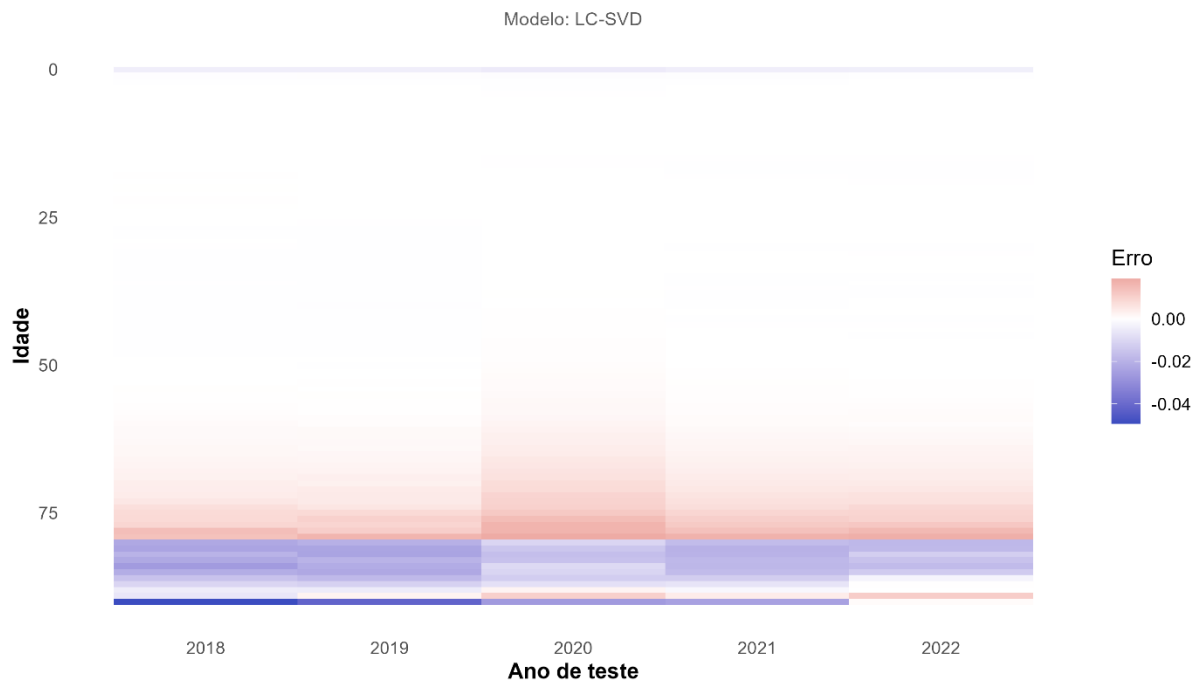
Quando o horizonte se alonga, o contraste entre os modelos diminui. Em  $h = 5$ , por exemplo, o LC-SVD supera o LC-Poisson no grupo feminino e também no grupo agregado quando se observa o RMSE ponderado. Esse resultado indica que a maior suavidade do SVD, que representa uma desvantagem no curto prazo, pode se converter em ganho relativo em previsões mais longas. Em vez de apontar um vencedor absoluto, os resultados sugerem uma distinção mais interessante: o LC-Poisson tende a ser superior quando a previsão depende de aderência ao comportamento recente, enquanto o LC-SVD se mostra mais competitivo quando a estabilidade da tendência passa a pesar mais do que a adaptação local.

#### 4.4 DIAGNÓSTICO DO ERRO POR IDADE E PERÍODO

As métricas da Tabela 1 resumem o erro de forma agregada, mas não mostram onde ele se concentra. Para responder a essa questão, vale observar a distribuição dos desvios no plano idade-tempo, sintetizada nos mapas de calor das Figuras 5 e 6.

É importante destacar que as escalas de cor das duas figuras diferem entre si, pois foram ajustadas automaticamente ao intervalo de cada modelo. A Figura 5 apresenta erros predominantemente negativos, indicando superestimação da mortalidade pelo LC-SVD, enquanto a Figura 6 apresenta erros predominantemente positivos, indicando subestimação pelo LC-Poisson. A comparação entre os mapas deve, portanto, considerar essa diferença de escala.

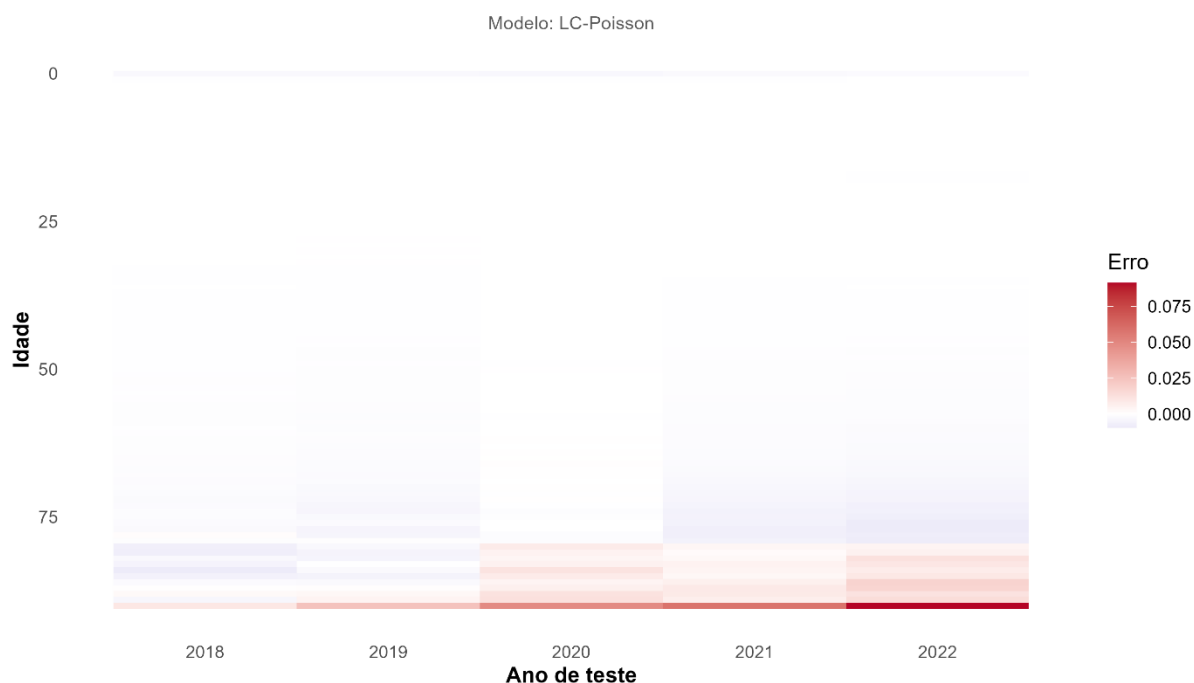
A Figura 5 apresenta o padrão de erro do LC-SVD.

**Figura 5 - Erro por idade e ano - LC-SVD - Ambos**

**Fonte:** Elaboração Própria (2026).

O primeiro aspecto que chama atenção é a maior dispersão dos erros ao longo das idades. Embora os desvios mais intensos se concentrem nas faixas etárias avançadas, o mapa também revela áreas de erro relevante em idades intermediárias. Isso sugere que o LC-SVD distribui de forma mais ampla suas discrepâncias, em vez de concentrá-las apenas nas regiões estruturalmente mais instáveis da base.

A Figura 6 mostra o mesmo diagnóstico para o LC-Poisson.

**Figura 6 - Erro por idade e ano - LC-Poisson - Ambos**

**Fonte:** Elaboração Própria (2026).

Nesse caso, o padrão é mais contido nas idades centrais e mais concentrado nas idades elevadas. Em termos comparativos, isso é importante: o LC-Poisson parece errar menos onde há maior volume de informação e concentrar suas maiores dificuldades justamente onde a mortalidade é mais volátil e a exposição tende a ser menor. Esse comportamento ajuda a explicar por que o modelo obteve melhores resultados agregados em vários cenários, sem que isso signifique desempenho uniforme em toda a matriz idade-ano.

Outro ponto comum aos dois mapas é a intensificação dos erros nos anos mais recentes do período de teste. Esse resultado reforça a leitura já sugerida pela Figura 1 e pela trajetória de  $k_t$ : a quebra do padrão histórico recente afeta a capacidade de previsão independentemente do método de estimação. A diferença é que cada modelo absorve esse choque de forma distinta — o LC-Poisson de modo mais localizado e o LC-SVD de forma mais espalhada.

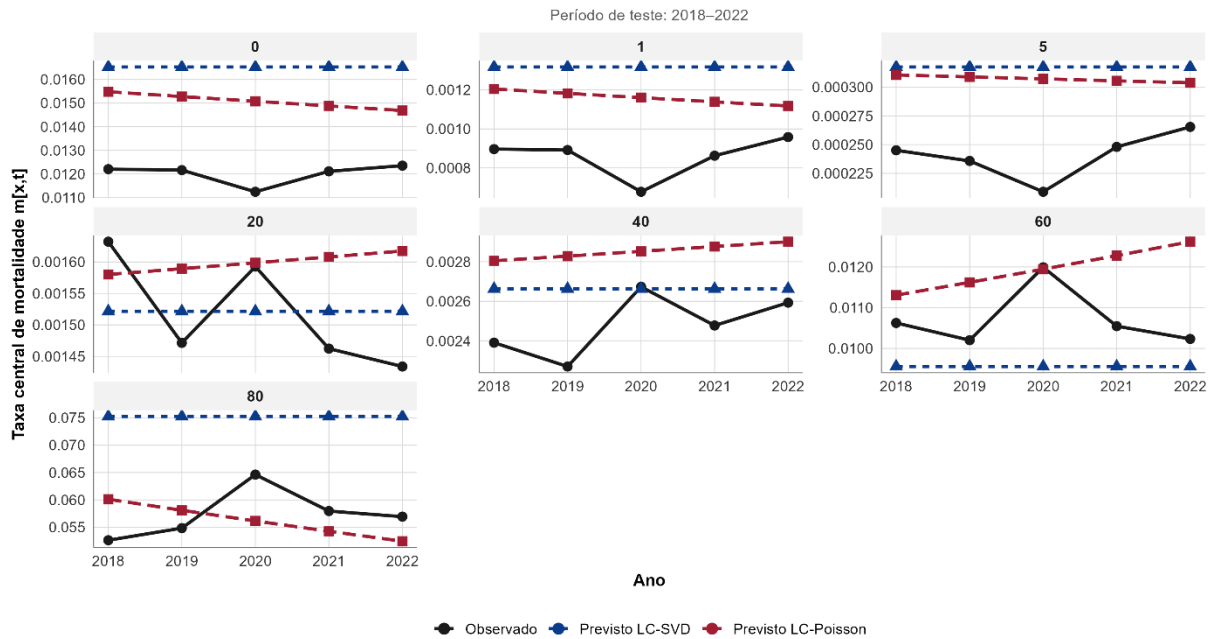
#### 4.5 VALIDAÇÃO VISUAL DAS PREVISÕES

Além das métricas e dos mapas de calor, a comparação direta entre valores observados e previstos ajuda a avaliar como cada modelo acompanha a trajetória

temporal da mortalidade em idades representativas. Essa leitura aparece na Figura 7, que reúne as séries para idades selecionadas, e na Figura 8, que sintetiza o comportamento médio das taxas no período de teste.

A Figura 7 permite observar o ajuste por idade.

**Figura 7 - Ajuste por idade - observado vs previsto (Ambos)**

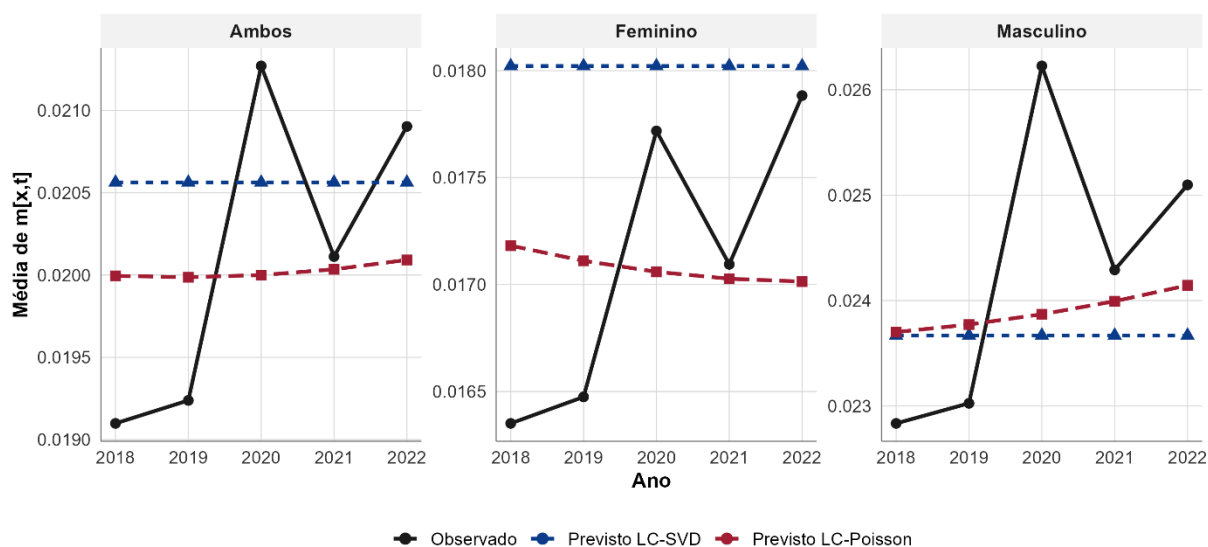


**Fonte:** Elaboração Própria (2026).

O padrão geral é claro: ambos os modelos reproduzem a direção de longo prazo da série, mas com diferenças importantes de responsividade. O comportamento varia por idade. Nas idades mais jovens e adultas, como 20, 40 e 60 anos, o observado tende a oscilar entre os dois modelos, sem vantagem clara de nenhum. Já na idade 80, onde a mortalidade é mais elevada e volátil, ambos os modelos perdem aderência ao observado, com o LC-SVD produzindo previsões mais estáveis e o LC-Poisson reagindo com maior sensibilidade às variações recentes.

A Figura 8 resume esse comportamento no nível médio das taxas.

**Figura 8 - Nível médio observado e previsto de  $m[x,t]$**



**Fonte:** Elaboração Própria (2026).

O comportamento varia por grupo. No agregado e no masculino, ambos os modelos subestimam o pico de mortalidade em 2020, sem vantagem clara entre eles. No feminino, o LC-SVD tende a ficar mais próximo do observado em parte do intervalo. Em todos os grupos, o desvio mais acentuado ocorre em 2020, confirmando que o choque da pandemia representa o principal fator de erro no período de teste, independentemente do método de estimação.

#### 4.6 SÍNTESE DOS RESULTADOS

A leitura conjunta das métricas e dos diagnósticos gráficos aponta para um padrão consistente: o LC-Poisson apresenta menor erro nos horizontes curtos, enquanto o LC-SVD torna-se mais competitivo à medida que o horizonte se amplia. Esse resultado não depende de um único critério, ele aparece tanto no RMSE quanto no MAE, tanto na escala original quanto na logarítmica, e é reforçado pela análise visual das trajetórias e dos mapas de erro por idade.

Do ponto de vista atuarial, essa conclusão tem implicações práticas diretas. Em aplicações que dependem de projeções de curto prazo, como revisões anuais de tábuas biométricas, precificação de seguros de vida ou avaliação de passivos previdenciários em regimes de capitalização, o LC-Poisson tende a oferecer maior precisão por responder melhor às variações recentes da mortalidade. Já em contextos

que demandam estabilidade de longo prazo, como projeções estruturais para regimes de repartição ou estudos de sustentabilidade previdenciária em horizontes de décadas, o LC-SVD permanece como alternativa robusta, justamente por suavizar flutuações transitórias e preservar a tendência secular da mortalidade.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho comparou o desempenho preditivo de duas estratégias de estimação do modelo de Lee-Carter: a abordagem clássica via decomposição em valores singulares (LC-SVD) e a formulação via GLM Poisson com offset de exposição (LC-Poisson), aplicadas à mortalidade brasileira por sexo no período de 1994 a 2022. A avaliação foi conduzida por backtesting com split fixo, utilizando 1994-2017 para estimação e 2018-2022 para teste, em horizontes de 1 a 5 anos. Esse protocolo é especialmente relevante porque o bom ajuste histórico não garante, por si só, bom desempenho preditivo, como observam Booth *et al.* (2006).

Os resultados indicaram vantagem do LC-Poisson nos horizontes mais curtos, com menores erros em  $h = 1$  e  $h = 2$  para todos os grupos analisados. À medida que o horizonte se amplia, as diferenças diminuem e o LC-SVD tornando-se relativamente mais competitivo nos horizontes mais longos, inclusive em alguns cenários de  $h = 5$ , especialmente no grupo feminino e no agregado. Além disso, os resultados devem ser interpretados à luz do recorte etário de 0 a 90 anos e da janela de teste 2018–2022, fortemente influenciada pelo choque da COVID-19.

O resultado central do trabalho não é, portanto, a superioridade irrestrita de uma abordagem, mas a evidência de que o método de estimação afeta de forma substantiva o desempenho do Lee-Carter dependendo do horizonte e da estrutura da série analisada. Adicionalmente, os maiores erros se concentraram nas idades avançadas e nos anos mais recentes do período de teste, reflexo do choque exógeno introduzido pela pandemia de COVID-19, que modelos baseados na extrapolação de tendências históricas têm dificuldade para capturar (Bergeron-Boucher; Kjærsgaard, 2022).

Do ponto de vista atuarial, essa conclusão tem implicações práticas diretas. Em aplicações que dependem de projeções de curto prazo, como revisões anuais de tábuas biométricas, precificação de seguros de vida ou avaliação de passivos previdenciários em regimes de capitalização, o LC-Poisson tende a oferecer maior precisão por responder melhor às variações recentes da mortalidade. Já em contextos que demandam estabilidade de longo prazo, como projeções estruturais para regimes de repartição ou estudos de sustentabilidade previdenciária em horizontes de décadas, o LC-SVD permanece como alternativa robusta, justamente por suavizar flutuações transitórias e preservar a tendência secular da mortalidade.

Este estudo apresenta algumas limitações. A análise se concentrou em duas estratégias de estimação do Lee-Carter, sem incorporar extensões com efeitos de coorte, múltiplos fatores ou estruturas alternativas de variância. Também não foram construídos intervalos de previsão, de modo que a comparação ficou restrita ao desempenho pontual. A projeção do índice temporal foi realizada por passeio aleatório com deriva, estratégia amplamente utilizada na literatura, mas que não esgota as possibilidades de extrapolação (Lee; Carter, 1992; Booth *et al.*, 2006).

Como agenda para pesquisas futuras, destacam-se a incorporação de efeitos de coorte, a comparação com modelos multifatoriais, o uso de distribuições que tratem explicitamente a sobredispersão e a construção de intervalos de previsão. Em síntese, os resultados mostram que a forma de estimação do Lee-Carter afeta de maneira substantiva o desempenho preditivo da mortalidade brasileira por sexo, contribuindo para uma escolha mais informada entre duas abordagens amplamente utilizadas em atuária e demografia.

## REFERÊNCIAS

- AZMAN, S.; PATHMANATHAN, D. **The GLM framework of the Lee-Carter model: a multi-country study.** *Journal of Applied Statistics*, v. 49, n. 3, p. 752-763, 2022. DOI: 10.1080/02664763.2020.1833183. Disponível em: <https://www.tandfonline.com/doi/pdf/10.1080/02664763.2020.1833183>. Acesso em: 10 ago. 2025.
- AWAD, Y.; BAR-LEV, S. K.; MAKOV, U. **A new class of counting distributions embedded in the Lee-Carter model for mortality projections: a Bayesian approach.** *Risks*, v. 10, n. 6, 111, 2022. DOI: 10.3390/risks10060111. Disponível em: <https://www.mdpi.com/2227-9091/10/6/111>. Acesso em: 10 ago. 2025.
- BASELLINI, U.; CAMARDA, C. G.; BOOTH, H. **Thirty years on: a review of the Lee-Carter method for forecasting mortality.** *International Journal of Forecasting*, v. 39, n. 3, p. 1033-1049, 2023. DOI: 10.1016/j.ijforecast.2022.11.002. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0169207022001455>. Acesso em: 10 ago. 2025.
- BERGERON-BOUCHER, M.-P.; KJÆRGAARD, S. **Mortality forecasting at age 65 and above: an age-specific evaluation of the Lee-Carter model.** *Scandinavian Actuarial Journal*, 2022, p. 64-79. DOI: 10.1080/03461238.2021.1928542. Disponível em: <https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/03461238.2021.1928542>. Acesso em: 10 ago. 2025.
- BOOTH, H.; HYNDMAN, R. J.; TICKLE, L.; DE JONG, P. **Lee-Carter mortality forecasting: a multi-country comparison of variants and extensions.** *Demographic Research*, v. 15, art. 9, p. 289-310, 2006. DOI: 10.4054/DemRes.2006.15.9. Disponível em: <https://www.demographic-research.org/articles/volume/15/9>. Acesso em: 10 ago. 2025.
- BOSSE, Nikos I.; ABBOTT, Sam; CORI, Anne; van LEEUWEN, Edwin; BRACHER, Johannes; FUNK, Sebastian. **Scoring epidemiological forecasts on transformed scales.** *PLOS Computational Biology*, v. 19, n. 8, e1011393, 2023. DOI: 10.1371/journal.pcbi.1011393. Disponível em: <https://pmc.ncbi.nlm.nih.gov/articles/PMC10495027/>. Acesso em: 10 ago. 2025.
- BROUHNS, N.; DENUIT, M.; VERMUNT, J. K. **A Poisson log-bilinear regression approach to the construction of projected lifetables.** *Insurance: Mathematics and Economics*, v. 31, n. 3, p. 373-393, 2002. DOI: 10.1016/S0167-6687(02)00185-3. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167668702001853>. Acesso em: 10 ago. 2025.
- CAIRNS, A. J. G.; BLAKE, D.; DOWD, K. **A two-factor model for stochastic mortality with parameter uncertainty: theory and calibration.** *Journal of Risk and Insurance*, v. 73, n. 4, p. 687-718, 2006. DOI: 10.1111/j.1539-6975.2006.00195.x. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1111/j.1539-6975.2006.00195.x>. Acesso em: 10 ago. 2025.

CAMARDA, C. G.; BASELLINI, U. **Smoothing, decomposing and forecasting mortality rates**. European Journal of Population, v. 37, n. 3, p. 569-602, 2021. DOI: 10.1007/s10680-021-09582-4. Disponível em: <https://pmc.ncbi.nlm.nih.gov/articles/PMC8333270/>. Acesso em: 10 ago. 2025.

EIOPA. **2018 EIOPA Insurance Stress Test report**. Luxembourg: Publications Office of the European Union, 2018. DOI: 10.2854/613482.

GARCIA, J. A.; SIMÕES, O. A. **Matemática actuarial - Vida e pensões**. 2. ed. Coimbra: Almedina, 2010.

GOMES, I.; LOSCHI, M. **Em 2023, óbitos caem 7,9% entre idosos com 80 anos ou mais**. Agência IBGE Notícias, 16 maio 2025. Disponível em: <https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-noticias/2012-agencia-de-noticias/noticias/42644-em-2023-obitos-caem-7-9-entre-idosos-com-80-anos-ou-mais>. Acesso em: 10 ago. 2025.

GONZAGA, Marcos R.; QUEIROZ, Bernardo L.; FREIRE, Flávio H.M.A.; MONTEIRO-DA-SILVA, José H.C.; LIMA, Everton E.C.; SILVA-JÚNIOR, Walter P.; DIÓGENES, Victor H. D.; FLORES-ORTIZ, Renzo; DA COSTA, Lília C. C.; PINTO-JUNIOR, Elzo P.; ICHIHARA, Maria Yury; TEIXEIRA, Camila S. S.; ALVES, Flávia J. O.; ROCHA, Aline S.; FERREIRA, Andréa J. F.; BARRETO, Maurício L.; KATIKIREDDI, Srinivasa Vittal; DUNDAS, Ruth; LEYLAND, Alastair H. **Estimation and probabilistic projection of age- and sex-specific mortality rates across Brazilian municipalities between 2010 and 2030**. Population Health Metrics, v. 22, n. 1, p. 9, 2024. DOI: 10.1186/s12963-024-00329-x. Disponível em: <https://pophealthmetrics.biomedcentral.com/articles/10.1186/s12963-024-00329-x>. Acesso em: 10 ago. 2025.

HUMAN MORTALITY DATABASE (HMD). **Methods Protocol**. Version 6. Berkeley/Rostock: UC Berkeley; MPIDR, 2025. Disponível em: <https://www.mortality.org/File/GetDocument/Public/Docs/MethodsProtocolV6.pdf>. Acesso em: 10 ago. 2025.

IBGE. **Tábuas completas de mortalidade 2023**. Rio de Janeiro: IBGE, 2023.

IBGE. **Projeções da população**: Brasil e Unidades da Federação. Rio de Janeiro: IBGE, 2013. (Série Relatórios Metodológicos). Disponível em: [https://ftp.ibge.gov.br/Projecao\\_da\\_Populacao/Projecao\\_da\\_Populacao\\_2013/srm40\\_projecao\\_da\\_populacao.pdf](https://ftp.ibge.gov.br/Projecao_da_Populacao/Projecao_da_Populacao_2013/srm40_projecao_da_populacao.pdf). Acesso em: 2 abr. 2026.

IBGE. **Projeções da população**: Brasil e unidades da federação: estimativas e projeções: revisão 2024. 3. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2025. Disponível em: [https://ftp.ibge.gov.br/Projecao\\_da\\_Populacao/Projecao\\_da\\_Populacao\\_2024/Serie\\_Relatorios\\_Metotodologicos\\_v40\\_Projecoes\\_da\\_Populacao\\_Brasil\\_e\\_Unidades\\_da\\_Federacao\\_Revisao\\_2024\\_3a\\_Edicao.pdf](https://ftp.ibge.gov.br/Projecao_da_Populacao/Projecao_da_Populacao_2024/Serie_Relatorios_Metotodologicos_v40_Projecoes_da_Populacao_Brasil_e_Unidades_da_Federacao_Revisao_2024_3a_Edicao.pdf). Acesso em: 2 abr. 2026.

JORDAN, A.; KRÜGER, F.; LERCH, S. **scoringRules**: Scoring Rules for Parametric and Simulated Distribution Forecasts (vignette). 2024. Disponível em: <https://cran.r-project.org/web/packages/scoringRules/scoringRules.pdf>. Acesso em: 10 ago. 2025.

KALLESTRUP-LAMB, M.; LAURSEN, N. S. **Longevity hedge effectiveness using socioeconomic indices**. Insurance: Mathematics and Economics, v. 114, p. 242-251, 2024.

LEE, R. D.; CARTER, L. R. **Modeling and forecasting U.S. mortality**. Journal of the American Statistical Association, v. 87, n. 419, p. 659-671, 1992. DOI: 10.1080/01621459.1992.10475265. Disponível em: [https://pages.stern.nyu.edu/~dbackus/BCH/demography/LeeCarter\\_JASA\\_92.pdf](https://pages.stern.nyu.edu/~dbackus/BCH/demography/LeeCarter_JASA_92.pdf). Acesso em: 10 ago. 2025.

LI, N.; LEE, R. **Coherent mortality forecasts for a group of populations: an extension of the Lee-Carter method**. Demography, v. 42, n. 3, p. 575-594, 2005. DOI: 10.1353/dem.2005.0021. Disponível em: <https://www.demographic-research.org/volumes/vol50/28/50-28.pdf>; <https://www.muse.jhu.edu/article/187103>. Acesso em: 10 ago. 2025.

LIMA, Everton; QUEIROZ, Bernardo Lanza; FREIRE, Flavio; GONZAGA, Marcos. **Analyzing regional patterns of mortality data quality and adult mortality for small areas in Brazil, 1980-2010**. Demographic Research, v. 51, art. 44, p. 1411-1428, 2024. DOI: 10.4054/DemRes.2024.51.44. Disponível em: <https://www.demographic-research.org/volumes/vol51/44/51-44.pdf>. Acesso em: 10 ago. 2025.

MIRANDA, M. L.; TURRA, C. M.; BASELLINI, U. **Forecasting life expectancy in São Paulo City, Brazil, amidst the COVID-19 pandemic**. Population Health Metrics, v. 23, 36, 2025. DOI: 10.1186/s12963-025-00397-7.

MOK, K. K. K.; TAN, C. I.; ZHANG, J.; SHI, Y. **Mortality modelling with arrival of additional year of mortality data: calibration and forecasting**. Demographic Research, v. 50, art. 28, p. 797-829, 2024. DOI: 10.4054/DemRes.2024.50.28. Disponível em: <https://www.demographic-research.org/volumes/vol50/28/50-28.pdf>. Acesso em: 10 ago. 2025.

ÓLAFSDÓTTIR, E. H.; ROOTZÉN, H.; BOLIN, D. **Locally tail-scale invariant scoring rules**. International Journal of Forecasting, v. 40, n. 4, p. 1701-1720, 2024. DOI: 10.1016/j.ijforecast.2024.02.007. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0169207024000186>. Acesso em: 10 ago. 2025.

RAKHMAWAN, Suryo Adi; MAHMOOD, Tahir; ABBAS, Nasir; RIAZ, Muhammad. **Unifying mortality forecasting model: an investigation of the COM-Poisson distribution in the GAS model for improved projections**. Lifetime Data Analysis, 2024. DOI: 10.1007/s10985-024-09634-x. Disponível em: <https://pmc.ncbi.nlm.nih.gov/articles/PMC11502572/>. Acesso em: 10 ago. 2025.

SCOGNAMIGLIO, S.; MARINO, M. **Backtesting stochastic mortality models by prediction interval-based metrics**. Quality & Quantity, v. 57, n. 4, p. 3825-3847, 2023. DOI: 10.1007/s11135-022-01537-z. Disponível em:

<https://link.springer.com/article/10.1007/s11135-022-01537-z>. Acesso em: 10 ago. 2025.

WONG, Jackie ST; FORSTER, Jonathan J.; SMITH, Peter WF. **Bayesian model comparison for mortality forecasting**. Journal of the Royal Statistical Society Series C: Applied Statistics, v. 72, n. 3, p. 566-586, 2023. Disponível em: <https://academic.oup.com/jrsssc/article/72/3/566/7083938?login=false>. Acesso em: 10 ago. 2025.