

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Limites de Curvas Planas Duais via Séries de Puiseux

Rony Héron Silva Custódio

João Pessoa – PB
Outubro de 2025

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós – Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Limites de Curvas Planas Duais via Séries de Puiseux

por

Rony Héron Silva Custódio

sob a orientação de

Prof. Dr. Wállice Mangueira de Sousa

João Pessoa – PB
Outubro de 2025

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

C9871 Custódio, Rony Héron Silva.
Limites de curvas planas duais via séries de Puiseux
/ Rony Héron Silva Custódio. - João Pessoa, 2025.
86 f. : il.

Orientação: Wállace Mangueira de Sousa.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Geometria algébrica. 2. Curvas Planas -
Matemática. 3. Dualidade - Matemática. 4.
Discriminantes - Matemática. 5. Polígono de
Newton-Puiseux. I. Sousa, Wállace Mangueira de. II.
Título.

UFPB/BC

CDU 512.7(043)



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
CAMPUS I – DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ATA DE DEFESA DE MESTRADO JUNTO AO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA, REALIZADA NO DIA 31 DE OUTUBRO DE 2025.

Ao trigésimo primeiro dia de outubro de dois mil e vinte e cinco, às 10:00 horas, no Auditório do Departamento de Matemática da Universidade Federal da Paraíba, e pelo linkmeet.google.com/sfr-totu-wiy, foi aberta a sessão pública de Defesa de Dissertação intitulada “**Limites de Curvas Planas Duais via Séries de Puiseux**”, do aluno **Rony Héron Silva Custódio**, que havia cumprido, anteriormente, todos os requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, na área de **Álgebra**, sob a orientação do Prof. Dr. Wallace Manguiera de Sousa. A Banca Examinadora, indicada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática, foi composta pelos professores: Dr. Wállice Manguiera de Sousa (Orientador), Dr^a Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia (membro interno) e Dr^a Sally Andria Vieira da Silva (membro externo/UFF). O professor Wállice Manguiera de Sousa, em virtude da sua condição de orientador, presidiu os trabalhos e, depois das formalidades de apresentação, convidou o aluno a discorrer sobre o conteúdo da dissertação. Concluída a explanação, o candidato foi arguido pela banca examinadora que, em seguida, sem a presença do aluno, finalizando os trabalhos, reuniu-se para deliberar tendo concedido ao candidato a menção: aprovado. E, para constar, foi lavrada a presente ata que será assinada pelos membros da Banca Examinadora.

João Pessoa, 31 de outubro de 2025.

Wállice Manguiera de Sousa

Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia

Sally Andria Vieira da Silva

Dedico este trabalho, em primeiro lugar, a Deus, cuja presença me guiou em todos os momentos desta jornada. Em segundo lugar, à minha família e aos amigos que sempre estiveram ao meu lado. Em especial, à minha esposa, pelo apoio incondicional, paciência e incentivo ao longo de todo o percurso.

Agradecimentos

Gostaria de expressar minha sincera gratidão a todas as pessoas que estiveram ao meu lado ao longo desta caminhada, contribuindo de maneira significativa para a realização desta etapa tão importante da minha vida acadêmica.

Em especial, agradeço à minha esposa, cuja presença constante, apoio incondicional e incentivo diário foram fundamentais para que eu chegasse até aqui. Sua paciência, compreensão e amor tornaram mais leve cada desafio enfrentado, e por isso, esta conquista é também sua.

Aos meus pais, agradeço pelo exemplo, pelos valores que me ensinaram e por sempre apoiarem minhas escolhas com confiança e carinho. Aos demais familiares, meu reconhecimento e gratidão por estarem sempre na torcida e por acreditarem no meu potencial.

Aos amigos que caminharam comigo neste percurso, meu muito obrigado pelo companheirismo e apoio. De maneira especial, agradeço a Aryadne, Gabriel, Wilamara e Aldicélia, por ouvirem minhas angústias, compartilharem conselhos valiosos e por se fazerem presentes nos momentos mais difíceis e importantes desta jornada.

Agradeço ainda ao meu orientador, Professor Wallace, pelos ensinamentos, pela orientação dedicada e por toda a contribuição acadêmica e humana que me proporcionou ao longo do mestrado.

Resumo

Este trabalho trata do limite de curvas duais planas, um tema da geometria algébrica que busca entender o que acontece com as curvas quando elas sofrem processos de degeneração. Em situações assim, o dual da curva limite nem sempre coincide com o limite dos duais, e por isso é necessário um olhar mais cuidadoso.

Primeiramente, são introduzidos alguns conceitos fundamentais, como séries de Puiseux, discriminantes de polinômios em uma variável e interseções no plano projetivo. Em seguida, aborda-se a dualidade entre pontos e retas nesse contexto e aplica-se esse conceito ao estudo da curva dual de uma curva projetiva plana lisa. Posteriormente, analisa-se o comportamento dessa dualidade em famílias planas de curvas. O resultado principal estabelece uma fórmula precisa para descrever o limite das curvas duais, relacionando suas componentes às duais de cada componente da fibra especial da família e a determinados discriminantes.

Por fim, exemplos ilustram o teorema e mostram a utilidade prática da teoria desenvolvida. A pesquisa busca, assim, aproximar o leitor de uma compreensão mais intuitiva sobre como curvas e suas duais interagem em situações-limite.

Palavras-chave: Geometria Algébrica; Curvas Planas; Dualidade; Discriminantes; Polígono de Newton-Puiseux.

Abstract

This work addresses the limit of plane dual curves, a topic in algebraic geometry that seeks to understand what happens to curves when they undergo degeneracy processes. In such situations, the dual of the limiting curve does not always coincide with the limit of the duals, and therefore a more careful examination is required.

First, we introduce some fundamental concepts, such as Puiseux series, discriminants of univariate polynomials, and intersections in the projective plane. Next, we address the duality between points and lines in this setting and apply this concept to the study of the dual curve of a smooth projective plane curve. We then examine how this duality behaves within flat families of curves. The main result provides a precise formula for describing the limit of such dual curves, relating its components to the duals of each component of the special fiber of the family, as well as to certain discriminants.

Finally, examples illustrate the theorem and demonstrate the practical utility of the theory developed. The research thus seeks to bring the reader closer to a more intuitive understanding of how curves and their duals interact in limiting situations.

Keywords: Algebraic Geometry; Plane Curves; Duality; Discriminants; Newton-Puiseux Polygon

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	3
1.1 Séries de Puiseux	3
1.1.1 Expansão de Puiseux	9
1.1.2 Polígono de Newton	10
1.2 Discriminantes formais	17
1.3 Intersecção no plano projetivo	25
1.3.1 Intersecção de curvas projetivas planas	30
2 Limite de curvas duais planas	34
2.1 Dualidade	34
2.1.1 Dual de uma curva plana	37
2.2 Limite de curvas duais planas	46
3 Resultado principal e aplicações	61
3.1 Resultado principal	61
3.2 Aplicações	66
Referências Bibliográficas	77

Notações

A seguir, listamos algumas notações utilizadas neste trabalho.

- $\mathcal{V}(F)$ denota o conjunto dos zeros de um polinômio F .
- C^* denota o dual de uma curva plana C .
- $I(P, F \cap G)$ é o número de interseção de F e G em P .

Introdução

Desde muito cedo, os matemáticos se interessaram pelas curvas, tanto pela beleza de suas formas quanto pela riqueza de suas propriedades. No início, elas eram vistas apenas como objetos geométricos, mas, com o tempo, passaram a ser descritas e estudadas por meio da álgebra. Foi assim que Descartes abriu o caminho para a geometria analítica e que, logo depois, cientistas como Newton e Leibniz exploraram ferramentas capazes de descrever de forma mais precisa o comportamento das curvas. Mais tarde, no século *XIX*, Victor Puiseux trouxe uma contribuição essencial ao mostrar que certas curvas podiam ser descritas localmente por séries com expoentes fracionários, permitindo enxergar de perto regiões onde o comportamento das curvas eram mais delicadas, como nos pontos singulares. Ao longo da história, a ideia de dualidade também ganhou força, mostrando que há uma relação profunda entre pontos, retas e curvas, revelando uma outra camada de simetria e beleza na geometria.

É nesse cenário que este trabalho se insere. O objetivo é estudar os limites de curvas duais planas, ou seja, compreender o que acontece com essas curvas quando passam por pequenas deformações ou degenerações. Esse tipo de questão é bastante sutil: em muitos casos, o dual da curva limite não é o mesmo que o limite dos duais, e isso exige uma escolha cuidadosa das ferramentas para ser entendido. Esse estudo nos ajuda a perceber melhor conceitos como continuidade, suavidade e singularidades, mostrando como, em momentos de transição, surgem propriedades inesperadas, tais como: mudança no grau da curva dual, aparição de componentes extras na curva dual, mudança na multiplicidade dos pontos duais, dentre outras.

No primeiro capítulo, apresentamos os conceitos básicos que servirão de alicerce. Falamos sobre as séries de Puiseux e o polígono de Newton, que são técnicas clássicas para analisar o comportamento local de curvas. Em seguida, tratamos dos discriminantes e da resultante de polinômios, que ajudam a identificar quando duas curvas compartilham raízes ou pontos em comum. Por fim, discutimos a noção de interseção no espaço projetivo, que organiza de maneira elegante as situações em que curvas se encontram.

O segundo capítulo é o coração da dissertação. Nele, mergulhamos no estudo da

dualidade entre pontos e retas e em como essa relação se manifesta quando trabalhamos com famílias de curvas que se aproximam de situações-limite. Analisamos casos especiais de polinômios, exploramos como surgem as degenerações e mostramos como descrever o limite das curvas duais em termos de seus discriminantes e componentes. Esse capítulo conecta toda a base teórica com o resultado central do trabalho.

Já o terceiro capítulo busca aproximar a teoria da prática. Apresentamos exemplos detalhados, que ilustram o teorema principal e mostram como os conceitos ganham vida em casos concretos. Essa parte não apenas confirma os resultados obtidos, mas também ajuda o leitor a criar uma intuição mais clara sobre o que está acontecendo.

É importante destacar que todo este estudo será desenvolvido sobre o corpo dos números complexos, \mathbb{C} . Trabalhar nesse ambiente é natural em geometria algébrica, pois garante a riqueza necessária para que os resultados sejam aplicados de maneira completa e consistente.

A principal referência para este trabalho é artigo de S. Katz, [\[K\]](#).

Capítulo 1

Preliminares

Vamos dar início ao trabalho discorrendo sobre conceitos preliminares, que serão cruciais para o bom entendimento do leitor sobre o tema. As principais referências para este capítulo, são: as dissertações de Lourenço, M. O. [L], Cavalheiro, R [C] e Mendes, G. T. [GM] além do livro Plane Algebraic Curves dos autores Brieskorn, E. e Knorrer, H [BK].

1.1 Séries de Puiseux

Nesta primeira seção daremos a definição das séries de Puiseux e sua ligação com o polígono de Newton.

Definição 1.1.1. Considere R um anel comutativo com unidade. Uma *série de potências formal* nas variáveis x_1, \dots, x_n com coeficientes em R é um objeto da forma

$$F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} A_\alpha x^\alpha$$

onde $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ e $A_\alpha \in R$ para cada índice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n \cup (0, \dots, 0)$. O coeficiente A_α recebe o nome de *coeficiente de índice α* , e o monômio $A_\alpha x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ é chamado *termo de multi-grau α* e *grau total* $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. O conjunto de todas as séries de potências formais é denotado por $R[[x_1, \dots, x_n]]$.

Dadas duas séries de potências formais

$$F = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} A_\alpha x^\alpha \quad \text{e} \quad G = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} B_\alpha x^\alpha,$$

definimos as operações de soma e multiplicação da seguinte forma:

$$F + G = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} (A_\alpha + B_\alpha) x^\alpha,$$

$$FG = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} C_\alpha x^\alpha, \quad \text{onde} \quad C_\alpha = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} A_\beta B_\gamma.$$

Aqui, a soma $\beta + \gamma = \alpha$ é entendida componente a componente em cada índice.

Assim, o conjunto $R[[x_1, \dots, x_n]]$, munido dessas operações, forma um anel comutativo com unidade.

Com esta definição sobre o que são séries de potências formais enunciamos o Lema de Hensel (Cavalheiro, R [\[C\]](#))

Teorema 1.1.2 (Lema de Hensel). Sejam R um anel comutativo com unidade e

$$F(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i x^i \in R[[x]]$$

uma série de potência com coeficientes em R . Suponha que existam elementos $g_0, h_0 \in R[[x]]$ tais que:

- (a) $f_0 = g_0 h_0$;
- (b) $g_0 R + h_0 R = R$ (isto é, g_0 e h_0 são coprimos em R).

Então, existe uma fatoração

$$F(x) = G(x) H(x)$$

com $G(x), H(x) \in R[[x]]$, satisfazendo:

$$G(0) = g_0, \quad H(0) = h_0.$$

Além disso, se g_0 não for divisor de zero em R e $E \subseteq R$ for um conjunto que contém exatamente um representante para cada classe residual de $R/(g_0)$, então essa fatoração é única se exigirmos que todos os coeficientes g_i de $G(x)$ para $i \geq 1$ pertençam a E .

O **Lema de Hensel** trata da fatoração de séries de potências formais. O próximo resultado garante que podemos estender esta fatoração para anéis de séries de potências de várias variáveis.

Corolário 1.1.3. Sejam R um anel comutativo com unidade e seja

$$F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i_1, \dots, i_n \geq 0} f_{i_1, \dots, i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} \in R[[x_1, \dots, x_n]]$$

uma série de potências em n variáveis com coeficientes em R . Se

$$f_{0, \dots, 0} = gh \quad \text{e} \quad gR + hR = R$$

então existe uma fatoração

$$F(x_1, \dots, x_n) = G(x_1, \dots, x_n)H(x_1, \dots, x_n) \quad (\text{I})$$

com

$$G(0, \dots, 0) = g \quad \text{e} \quad H(0, \dots, 0) = h.$$

Além disso, se g não for divisor de zero e $E \subseteq R$ é um conjunto com exatamente um representante para cada classe residual de $R/(g)$, então a fatoração (I) é única se exigirmos $g_{i_1, \dots, i_n} \in E$ sempre que $(i_1, \dots, i_n) \neq (0, \dots, 0)$.

Exemplo 1.1.4. Considere $F(x, y) \in \mathbb{Z}[[x, y]]$ a série de potências em duas variáveis com coeficientes inteiros dada por

$$F(x, y) = 6 + 5x + 3y + x^2 + xy.$$

O termo constante de $F(x, y)$ é $f_{0,0} = 6$, e podemos escrevê-lo como o produto gh , onde:

$$g = 3, \quad h = 2$$

Como $\text{mdc}(2, 3) = 1$, temos que $g\mathbb{Z} + h\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$, ou seja, a soma dos ideais gerados por g e h é o conjunto \mathbb{Z} . Assim, as hipóteses do Corolário [1.1.3](#) estão satisfeitas. Portanto, existe uma fatoração da forma:

$$F(x, y) = G(x, y)H(x, y)$$

com:

$$G(0, 0) = g = 3, \quad H(0, 0) = h = 2$$

Construindo explicitamente $G(x, y)$ e $H(x, y)$ até a ordem 1 (isto é, considerando apenas os termos constantes e lineares), suponha que

$$G(x, y) = 3 + ax + by \quad \text{e} \quad H(x, y) = 2 + cx + dy.$$

Notemos que

$$\begin{aligned} G(x, y)H(x, y) &= (3 + ax + by)(2 + cx + dy) \\ &= 6 + (3c + 2a)x + (3d + 2b)y + (ac)x^2 + (ad + bc)xy + (db)y^2 \end{aligned}$$

Comparando com $F(x, y) = 6 + 5x + 3y + x^2 + xy$, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} 3c + 2a = 5 & (E_1) \\ 3d + 2b = 3 & (E_2) \\ ac = 1 & (E_3) \\ ad + bc = 1 & (E_4) \\ db = 0 & (E_5) \end{cases}$$

Notemos que (E_5) garante que $d = 0$ ou $b = 0$. Como $d = b = 0$ não poder ocorrer por (E_4) e $d = 0$ não pode ocorrer por (E_2) (as soluções são inteiras), temos que $b = 0$ é a única possibilidade. Assim,

$$b = 0 \xrightarrow{(E_2)} d = 1 \xrightarrow{(E_4)} a = 1 \xrightarrow{(E_1)} c = 1.$$

Assim, temos:

$$G(x, y) = 3 + x \quad \text{e} \quad H(x, y) = 2 + x + y$$

Além disso, considerando $E = \{0, 1, 2\}$ a fatoração $F(x, y) = G(x, y)H(x, y)$ encontrada é única exigindo que $g_{i_1, i_2} \in \{0, 1, 2\}$ para $(i_1, i_2) \neq (0, 0)$.

Dando continuidade, o corolário abaixo trata de uma versão específica do Lema de Hensel no contexto de anéis de séries de potências com coeficientes em um corpo K . Aqui, a função $F(x_1, \dots, x_n, y)$ é um polinômio na variável y , cujos coeficientes pertencem ao anel de séries formais $K[[x_1, \dots, x_n]]$.

Corolário 1.1.5. Seja K um corpo e seja

$$F(x_1, \dots, x_n, y) \in K[[x_1, \dots, x_n]][y] = K[y][[x_1, \dots, x_n]]$$

um polinômio em y , cujos coeficientes são séries de potências formais nas variáveis x_1, \dots, x_n . Suponhamos que

$$F(0, \dots, 0, y) = g(y)h(y)$$

com $g(y), h(y) \in K[y]$ relativamente primos. Então, existe uma fatoração

$$F(\mathbf{X}, y) = G(\mathbf{X}, y)H(\mathbf{X}, y)$$

com

$$G(\mathbf{0}, y) = g(y), \quad H(\mathbf{0}, y) = h(y).$$

Além disso, se exigirmos que

$$\deg_y (G(\mathbf{X}, y) - g(y)) < \deg_y (g(y)),$$

então a fatoração é única.

A ideia central do Corolário 1.1.5 é de que, se conhecemos uma fatoração do polinômio F na ausência das variáveis x_i (ou seja, ao avaliarmos $x_i = 0$), e se os fatores $g(y)$ e $h(y)$ dessa fatoração são coprimos em $K[y]$, então podemos "levantar" essa fatoração para obter uma fatoração do polinômio $F(\mathbf{X}, y)$ com coeficientes em $K[[x_1, \dots, x_n]]$.

Outro corolário bastante importante do Lema de Hensel é dado por:

Corolário 1.1.6. (Teorema de Preparação de Weierstrass). *Seja K um corpo e seja*

$$F(x_1, \dots, x_n, y) \in K[[x_1, \dots, x_n, y]]$$

uma série de potência, tal que $F(0, \dots, 0, 0) = 0$. Suponhamos que y^m aparece em F com coeficiente não nulo e que m é o menor inteiro para o qual isso acontece. Então F pode ser escrito de maneira única como

$$F(\mathbf{X}, y) = [y^m + u_{m-1}(\mathbf{X})y^{m-1} + \dots + u_0(\mathbf{X})] \cdot U(\mathbf{X}, y)$$

com $u_i(\mathbf{X}) \in K[[x_1, \dots, x_n]]$ e $U(\mathbf{X}, y) \in K[[x_1, \dots, x_n, y]]$ invertível.

Exemplo 1.1.7. Considere a série formal

$$F(x, y) = y^2 + xy + x^2 + y^3,$$

onde x e y são variáveis, e $F(x, y) \in K[[x, y]]$. Observamos que

$$F(0, y) = y^2,$$

que é um polinômio mônico de grau 2 em y . Portanto, o menor inteiro m para o qual y^m aparece com coeficiente não nulo é quando $m = 2$. Pelo Teorema de Preparação de Weierstrass, podemos fatorar F de maneira única, como

$$F(x, y) = G(x, y) \cdot U(x, y),$$

onde $G(x, y) = y^2 + u_1(x)y + u_0(x)$ é um polinômio mônico de grau 2 em y , com coeficientes $u_0(x), u_1(x) \in K[[x]]$ e $U(x, y) \in K[[x, y]]$ é uma série invertível, isto é,

possui termo constante diferente de zero. Nosso objetivo é determinar explicitamente $G(x, y)$ e $U(x, y)$. Como F é um polinômio de grau 3 em y , podemos tentar expressar $U(x, y)$ na forma

$$U(x, y) = 1 + b_1(x)y + b_2(x),$$

onde $b_1(x)$ e $b_2(x)$ são séries em x que começam com termos de ordem maior que zero. Multiplicando, temos

$$\begin{aligned} F(x, y) &= G(x, y) \cdot U(x, y) \\ &= (y^2 + u_1(x)y + u_0(x))(1 + b_1(x)y + b_2(x)) \\ &= b_1(x) \cdot y^3 + (1 + b_1(x)u_1(x) + b_2(x))y^2 + (u_1(x) + u_0(x)b_1(x) + u_1(x)b_2(x))y \\ &\quad + (u_0(x) + u_0(x)b_2(x)). \end{aligned}$$

Igualando os termos de grau até 2 em y de F e G , obtemos:

$$\begin{cases} b_1(x) = 1 \\ 1 + b_1(x)u_1(x) + b_2(x) = 1 \\ u_1(x) + u_0(x)b_1(x) + u_1(x)b_2(x) = x \\ u_0(x)(1 + b_2(x)) = x^2 \end{cases}$$

Neste caso, observamos que

$$\begin{cases} b_1(x) = 1 \\ u_1(x) = -b_2(x) \\ u_0(x) = x + b_2(x)(1 + b_2(x)) \\ (x + b_2(x)(1 + b_2(x)))(1 + b_2(x)) = x^2, \end{cases}$$

onde (usando um algoritmo) obtemos que

$$b_2(x) = -x + x^3 + 3x^4 + O(x^5).$$

Desta forma,

$$u_1(x) = -b_2(x) = x - x^3 - 3x^4 + O(x^5)$$

e

$$u_0(x) = x^2 + x^3 + x^4 + O(x^5).$$

Assim, neste exemplo, a fatoração do Teorema de Preparação de Weierstrass é

$$F(x, y) = G(x, y) \cdot U(x, y)$$

com

$$G(x, y) = y^2 + (x - x^3 - 3x^4 + \dots)y + (x^2 + x^3 + x^4 + \dots),$$

e

$$U(x, y) = 1 + y + (-x + x^3 + 3x^4 + O(x^5)).$$

1.1.1 Expansão de Puiseux

Iremos agora definir o conceito de *série formal de Laurent* sobre um corpo K , que é uma generalização da série formal de potências, onde se permite que os expoentes possam ser negativos, mas apenas em número finito. A forma geral é dada por:

$$\sum_{i=r}^{\infty} a_i t^i, \quad a_i \in K, \quad r \in \mathbb{Z}.$$

Quando $r \geq 0$, recuperamos o caso usual das séries formais de potências. Mais ainda, considerando o caso específico dos complexos, temos o seguinte lema:

Lema 1.1.8. O corpo de frações de $\mathbb{C}[[x]]$ é o conjunto das séries formais de Laurent sobre \mathbb{C} .

Para a construção que utilizaremos, seja $\mathbb{C}((t))$ o corpo de frações na variável t , e fixemos um número natural m . A cada série $f = \sum a_i x^i$ pertencente a $\mathbb{C}((x))$, podemos associar a série $f' = \sum a_i t^{mi}$ em $\mathbb{C}((t))$. Essa associação faz com que tenhamos a relação $x = t^m$, ou equivalentemente, $t = x^{1/m}$. Dessa forma, podemos identificar $\mathbb{C}((t))$ como $\mathbb{C}((x^{1/m}))$.

A partir dessa identificação, é possível definir operações entre os elementos de $\mathbb{C}((x^{1/m}))$, denominado *corpo das séries de potências fracionárias (ou corpo das séries de Puiseux) na variável x* .

Tal ideia decorre do Teorema 1.1.9 abaixo, cuja demonstração pode ser conferida na dissertação [\[C\]](#):

Teorema 1.1.9 (Expansão de Puiseux). Seja $F(x, y) \in \mathbb{C}[[x, y]]$ uma série de potência irreduzível sobre um corpo \mathbb{C} e suponha que $F(0, 0) = 0$. Admita que o termo y^m ocorra em $F(x, y)$ com coeficiente não nulo e que m seja o menor inteiro positivo para o qual isso acontece. Nessas condições, a equação $F(x, y) = 0$ admite uma solução da

forma

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^{i/m} \quad \text{com } a_i \in \mathbb{C},$$

isto é, $y \in \mathbb{C}[[x^{1/m}]]$.

O teorema acima afirma que toda função algébrica sobre \mathbb{C} admite uma representação local por uma série com expoentes racionais. Essa representação captura o comportamento local da função próxima a um ponto (geralmente a origem), mesmo que esse ponto seja uma ramificação ou singularidade, isto é, continua válida nas situações em que a função algébrica deixa de ser regular.

Definição 1.1.10. Seja $f = \sum a_i x^{i/m} \in \mathbb{C}((x^{1/m}))$. Definimos a *ordem* de f como a menor potência i/m cujo coeficiente a_i de f é não nulo. Se $f = 0$, dizemos que a ordem de f é infinita. Denotamos a ordem de f por $o(f)$.

Definição 1.1.11. Se $f \in \mathbb{C}((x^{1/m}))$, dizemos que f é uma *série de Puiseux* se f possui ordem não negativa, isto é, $o(f) \geq 0$. O conjunto $\mathbb{C}[[x^{1/m}]]$ é chamado *conjunto das séries de Puiseux*.

A série de Puiseux é então, uma ferramenta poderosa da análise e da álgebra que permite representar funções algébricas como séries de potências formais com expoentes racionais, em vez de inteiros, estendendo assim o conceito clássico de séries de Taylor ou Laurent. Introduzida por Victor Puiseux no século XIX, essa técnica desempenha um papel fundamental no estudo local de curvas algébricas próximas a pontos singulares. Ao permitir que a variável seja elevada a potências fracionárias, a expansão de Puiseux oferece uma descrição precisa do comportamento das funções em vizinhanças onde a análise tradicional falha ou se torna limitada.

1.1.2 Polígono de Newton

Agora, iremos falar sobre o Polígono de Newton, utilizado para desenvolvermos uma função qualquer em uma série de potências racionais, ou seja, em uma série de Puiseux. O polígono de Newton é uma ferramenta geométrica que auxilia na construção explícita das séries de Puiseux associadas a uma equação algébrica implícita $F(x, y) = 0$. Tal método foi desenvolvido por Newton, em correspondência com Leibniz e Oldenburg.

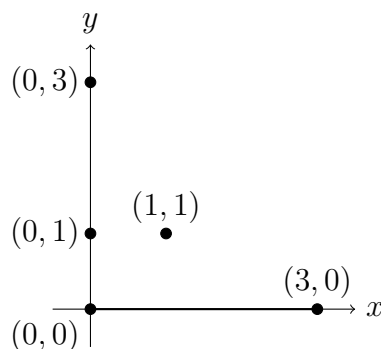
No dia 13 de junho de 1676, Newton envia uma carta a Oldenburg, onde o mesmo desenvolve a função $F(x, y) = y^3 + axy + a^2y - x^3 - 2a^3 = 0$ em termos de uma série infinita com expoentes racionais, com isso, Newton afirma ter descoberto um método para lidar com as "affected roots"(raízes afetadas), termo utilizado para se referir

a equações algébricas em que os coeficientes ou incógnitas dependem de parâmetros literais.

A construção do **polígono de Newton**, de início pode ser vista da seguinte forma: começa-se traçando um plano cartesiano convencional com dois eixos, onde cada ponto é determinado pelos expoentes das variáveis em cada monômio da função. No eixo das ordenadas (vertical), representam-se os expoentes da variável que ficará em função da outra, ou seja, a variável dependente, e no eixo das abscissas (horizontal), os expoentes da variável independente.

Tomando como base o exemplo mencionado anteriormente, os pontos marcados por Newton no plano foram:

- $(0, 3)$, correspondente ao monômio y^3 ;
- $(1, 1)$, $(0, 1)$, $(3, 0)$ e $(0, 0)$, referentes aos demais monômios da função.



Após marcarmos todos os pontos no gráfico, identifica-se o ponto mais próximo da origem situado sobre o eixo vertical (isto é, o ponto de menor ordenada entre os que têm abscissa zero). A reta inicial é então traçada na vertical, passando por esse ponto.

Em seguida, fixa-se uma reta nesse ponto e ela é rotacionada no sentido anti-horário até que toque dois ou mais dos pontos marcados no plano, formando uma aresta inferior do fecho convexo. Os pontos assim encontrados determinam os lados do chamado *polígono de Newton*, que corresponde à parte inferior do envoltório convexo dos pontos associados aos termos do polinômio.

A *inclinação negativa* dessas arestas possui um papel central: ela determina o *expoente inicial* das soluções em séries de Puiseux da equação $F(x, y) = 0$. Mais precisamente, se uma aresta do polígono possui inclinação $-1/\lambda$, então há uma solução formal $y(x)$ da forma

$$y(x) = cx^\lambda + \text{termos de ordem superior},$$

com $c \in \mathbb{C}$.

1. Preliminares

Assim, o polígono de Newton fornece uma maneira geométrica de prever os possíveis expoentes racionais que aparecem nas expansões de Puiseux das raízes da equação.

Seguindo o exemplo, considere agora a função equivalente aos pontos colineares da nossa reta, que foram $(0, 0)$, $(0, 1)$ e $(0, 3)$, ou seja, $F(x, y)$ passa a ser $-2a^3 + a^2y + y^3 = 0$, note que $y = a$ satisfaz a equação, logo o ponto $(0, a)$ pertence a curva.

Considere agora $y = a + P$ (aproximação de ordem 0) e substitua na função inicial:

$$F(x, y) = y^3 + a^2y - 2a^3 + axy - x^3$$

Substituindo $y = a + P$, temos:

$$(a + P)^3 + a^2(a + P) - 2a^3 + ax(a + P) - x^3 = 0.$$

$$P^3 + 3aP^2 + 3a^2P + a^3 + a^2P - 2a^3 + a^2x + axP - x^3 = 0$$

Desenvolvendo os termos:

$$4a^2P + 3aP^2 + P^3 + a^2x + axP - x^3 = 0.$$

Utilizando novamente o polígono de Newton, considerando as variáveis (x, P) , obtemos os seguintes pontos:

$$4a^2P \Rightarrow P^1x^0 \Rightarrow (0, 1)$$

$$3aP^2 \Rightarrow P^2x^0 \Rightarrow (0, 2)$$

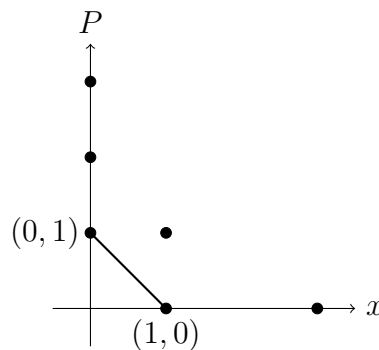
$$P^3 \Rightarrow P^3x^0 \Rightarrow (0, 3)$$

$$a^2x \Rightarrow P^0x^1 \Rightarrow (1, 0)$$

$$axP \Rightarrow P^1x^1 \Rightarrow (1, 1)$$

$$x^3 \Rightarrow P^0x^3 \Rightarrow (3, 0)$$

Traçando o gráfico:



A partir do gráfico, selecionamos os pontos $(0, 1)$ e $(1, 0)$, que determinam a aresta

1. Preliminares

inferior (*aresta líder*) do polígono de Newton. Assim, a equação reduzida considerando apenas os termos correspondentes é:

$$F(x, P) = 4a^2P + a^2x = 0 \quad \Rightarrow \quad 4a^2P = -a^2x \quad \Rightarrow \quad P = -\frac{x}{4}$$

Dando continuidade, seja

$$P = -\frac{x}{4} + Q$$

(aproximação de ordem 1), ao substituir na função

$$F(x, P) = 4a^2P + 3aP^2 + P^3 + a^2x + axP - x^3 = 0$$

Obtemos:

$$F(x, Q) = 4a^2 \left(-\frac{x}{4} + Q\right) + 3a \left(-\frac{x}{4} + Q\right)^2 + \left(-\frac{x}{4} + Q\right)^3 + a^2x + ax \left(-\frac{x}{4} + Q\right) - x^3 = 0$$

Expandindo os termos:

$$4a^2Q + 3aQ^2 - \frac{axQ}{2} - \frac{ax^2}{16} + Q^3 - \frac{3xQ^2}{4} + \frac{3x^2Q}{16} - \frac{65x^3}{64} = 0$$

A seguir, construímos o polígono de Newton considerando agora as variáveis (x, Q) . Atribuímos os pares ordenados aos monômios acima com base nos expoentes de (x, Q) .

$$4a^2Q \Rightarrow Q^1x^0 \Rightarrow (0, 1)$$

$$3aQ^2 \Rightarrow Q^2x^0 \Rightarrow (0, 2)$$

$$\frac{axQ}{2} \Rightarrow Q^1x^1 \Rightarrow (1, 1)$$

$$\frac{ax^2}{16} \Rightarrow Q^0x^2 \Rightarrow (2, 0)$$

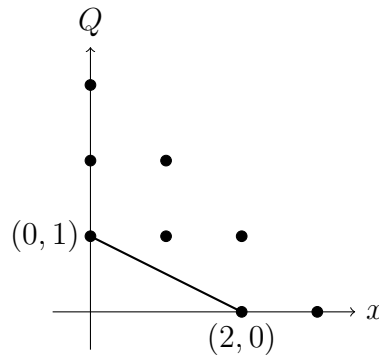
$$Q^3 \Rightarrow Q^3x^0 \Rightarrow (0, 3)$$

$$\frac{3xQ^2}{4} \Rightarrow Q^2x^1 \Rightarrow (1, 2)$$

$$\frac{3x^2Q}{16} \Rightarrow Q^1x^2 \Rightarrow (2, 1)$$

$$\frac{65x^3}{64} \Rightarrow Q^0x^3 \Rightarrow (3, 0)$$

Gráfico dos pontos (esboço do novo polígono de Newton):



A parte inferior do polígono de Newton determina os termos dominantes da expansão. Os pontos colineares da borda inferior $(2, 0)$ e $(0, 1)$ levam a uma nova equação reduzida, dada por

$$F(x, Q) = \frac{-ax^2}{16} + 4a^2Q = 0 \Rightarrow Q = \frac{x^2}{64a}.$$

Seguindo a mesma linha de raciocínio, fazendo novas aproximações iremos obter uma série infinita de potências, dada por:

$$y \approx 1 - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{64a} + \frac{131x^3}{512a^2} + \dots$$

descrita por Newton em sua carta. E utilizando a **expansão de Puiseux** em torno da origem, obtemos uma solução da forma:

$$y \approx 1 - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{64} + \frac{131x^3}{512} + \dots$$

para a equação

$$y^3 + a^2y - 2a^3 + axy - x^3 = 0.$$

Por exemplo, para $x = 0, 1$ temos que

$$y \approx 1 - \frac{0,1}{4} + \frac{(0,1)^2}{64} + \frac{131 \cdot (0,1)^3}{512} + \dots$$

Visto este exemplo feito por Newton, vamos abordar o método geral, para transformarmos as raízes de uma função em série de potência, utilizando o método do polígono de Newton.

Seja

$$f(x, y) = \sum a_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta$$

uma série de potências. Sem perda de generalidade, seja f y -geral¹ de ordem $m > 0$,

¹Dizer que uma série $f(x, y)$ é y -geral significa que ela pode ser escrita como uma série em x cujos coeficientes são séries em y , e que o termo de menor ordem em x realmente depende de y .

ou seja, $a_{0i} = 0$ para $i < m$.

Definimos o *suporte* de f como

$$\text{supp}(f) = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2 \mid a_{\alpha\beta} \neq 0\}.$$

Agora, queremos encontrar a reta mais íngreme possível a partir do ponto mais baixo do eixo β . Antes disso, introduziremos alguns conceitos fundamentais.

Para cada ponto p em $\text{supp}(f)$, consideramos o quadrado positivo $p + (\mathbb{R}^+)^2$ movido para p . De acordo com o plano cartesiano abaixo,

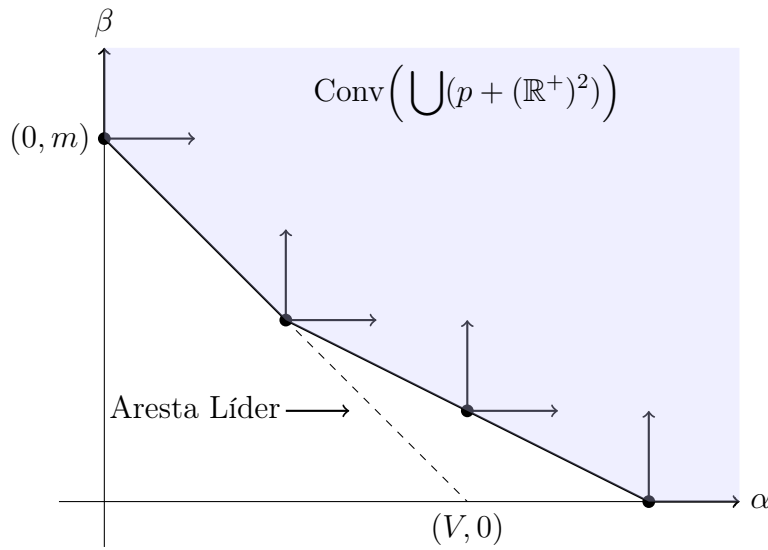


Figura 01 - Polígono de Newton

A fronteira deste polígono consiste em um caminho poligonal compacto (onde todos os segmentos têm inclinação negativa) e duas semirretas. O caminho poligonal compacto é chamado de **polígono de Newton** de f .

Se o polígono de Newton de f tem um único ponto de apoio com o eixo β , então $f(0, y) \neq 0$. Neste caso, $y = 0$ é uma solução de $f(x, y) = 0$.

Caso contrário, o segmento mais íngreme do polígono de Newton chamado de *aresta líder* é o primeiro termo que desejamos. Seja $-1/\mu_0$ a inclinação do segmento mais íngreme (passando pelo ponto $(0, m)$ e interceptando o eixo α no ponto $(V, 0)$).

Então podemos escrever:

$$f(x, y) = \sum_{\alpha + \mu_0 \beta = V} a_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta + \sum_{\alpha + \mu_0 \beta > V} a_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta, \quad (I)$$

onde V é a intersecção do eixo α que passa pelo ponto $(0, m)$ com inclinação $\frac{-1}{\mu_0}$ ($V = m\mu_0$), e por construção deve existir pelo menos dois pares de números $(\alpha_i, \beta_i) \in \text{supp}(f)$ com $i = 1, 2$ tais que $\alpha_i + \mu_0 \beta_i = V$, para todo $i = 1, 2$.

1. Preliminares

Logo, a primeira solução aproximada de $f(x, y) = 0$ é uma solução da equação quase homogênea

$$\bar{f}(x, y) = \sum_{\alpha+\mu_0\beta=V} a_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta = 0$$

Substituímos $y = tx^{\mu_0}$ e obtemos

$$\bar{f}(x, y) = x^V \left(\sum_{\alpha+\mu_0\beta=\mu_0 m} a_{\alpha\beta}t^\beta \right) = x^V g(t)$$

Aqui, $g(t)$ é um polinômio de grau m . Desde que, dois valores $a_{\alpha\beta}$ sejam diferentes de zero, logo

$$g(t) = \sum_{\alpha+\mu_0\beta=\mu_0 m} a_{\alpha\beta}t^\beta$$

e possui uma raiz diferente de zero t_0 . Então:

$$y = t_0 x^{\mu_0}$$

é a primeira solução implícita de $f(x, y) = 0$. O expoente μ_0 é racional, tome $\mu_0 = \frac{p_0}{q_0}$, onde p_0, q_0 são números naturais primos entre si.

Feito isto, consideramos agora $x = x_1^{q_0}$ e $y = x_1^{p_0}(t_0 + y_1)$ como a nova aproximação. Substituindo tudo isso em $f(x, y) = 0$. Isto nos dá uma nova série de potências em x_1 e y_1 :

$$f(x_1^{q_0}, x_1^{p_0}(t_0 + y_1)).$$

Por (I), $x_1^{q_0 V}$ divide a série de potências, isto é,

$$f(x_1^{q_0}, x_1^{p_0}(t_0 + y_1)) = x_1^{V q_0} \cdot f_1(x_1, y_1)$$

e f_1 é novamente y -geral de ordem $m_1 \leq m$.

Agora iteramos o processo apenas descrito: construímos o polígono de Newton de f_1 , seja $-1/\mu_1$ a inclinação da reta mais íngreme e escreva $\mu_1 = p_1/q_1$ com p_1 e q_1 primos entre si. Assim, obtemos uma solução aproximada da forma,

$$y_1 = t_1 x_1^{\mu_1}$$

e de forma análoga, usamos a nova aproximação dada por:

$$x_1 = x_2^{q_1}, \quad y_1 = x_2^{p_1}(t_1 + y_2)$$

em

$$f_1(x_1, y_1) = 0$$

Repetindo o processo, obtemos:

$$f_1(x_2^{q_1}, x_2^{p_1}(t_1 + y_2)) = x_2^{V_1 q_1} f_2(x_2, y_2),$$

sendo f_2 y_2 -geral de grau $m_2 \leq m_1$.

Desta forma, obtemos uma sequência de séries de potências $f_i(x_i, y_i)$ (com $x_{i+1} = x_i^{1/q_i}$), cada y_i -geral de ordem m_i , onde

$$m = m_0 \geq m_1 \geq m_2 \geq \dots$$

e uma sequência de soluções aproximadas:

$$y_0 = x_1^{\mu_0}(t_0 + y_1), \quad y_1 = x_2^{\mu_1}(t_1 + y_2), \quad y_2 = x_3^{\mu_2}(t_2 + y_3), \dots$$

Portanto, a fórmula final será dada por:

$$\begin{aligned} Y &= x^{\mu_0} \left(t_0 + x_1^{\mu_1} \left(t_1 + x_2^{\mu_2} (t_2 + \dots) \right) \right) \\ &= t_0 x^{\mu_0} + t_1 x^{\mu_0 + \mu_1/q_0} + t_2 x^{\mu_0 + \mu_1/q_0 + \mu_2/q_0 q_1} + \dots \end{aligned}$$

Mais a frente no capítulo dois, abordaremos alguns exemplos práticos deste método. Sendo assim, ao utilizarmos a **Expansão de Puiseux**, podemos lidar com expressões muito complicadas utilizando a técnica de séries de potências. Ao aplicar uma série infinita, escolhemos uma das variáveis dependentes (por exemplo, y) e a representamos como uma expansão em série de potências da variável independente (neste caso, x).

Essa abordagem nos permite encontrar soluções aproximadas (ou formais) para equações algébricas que seriam muito difíceis de resolver diretamente.

1.2 Discriminantes formais

Nesta seção iremos abordar os conceitos básicos sobre discriminantes formais e a fórmula da resultante entre dois polinômios em uma variável com coeficientes em R um anel comutativo e com unidade.

Definição 1.2.1. Considere $f(x), g(x) \in R[x]$ dois polinômios de modo que o grau de $f(x)$ é n e o grau de $g(x)$ é m . Logo, existem $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m \in R$ com a_n e b_m

nenhuma raiz.

Essa propriedade confere à resultante um papel central em diversas áreas da matemática, como na eliminação de variáveis em sistemas polinomiais e na geometria algébrica, onde aparece naturalmente no estudo das interseções de curvas, o que abordaremos mais a frente. Em essência, a resultante traduz uma questão sobre soluções de equações em uma única expressão, tornando mais simples e direto o tratamento de problemas que, de outra forma, exigiriam análises mais longas e complexas.

Exemplo 1.2.3. Vamos ilustrar o uso da resultante com um caso simples. Considere $R = \mathbb{C}[y]$ e os polinômios $f(x), g(x) \in R[x]$, onde

$$f(x) = x^3 - x^2y + xy - y^2 \quad \text{e} \quad g(x) = x^2 + x - y^2 - y.$$

Queremos saber se eles possuem alguma componente em comum. Em vez de tentar fatorá-los diretamente, vamos utilizar a resultante.

Primeiro, identificamos os coeficientes:

$$f: \quad a_3 = 1, \quad a_2 = -y, \quad a_1 = y, \quad a_0 = -y^2,$$

$$g: \quad b_2 = 1, \quad b_1 = 1, \quad b_0 = -(y^2 + y)$$

Como $\deg_x f = m = 3$ e $\deg_x g = n = 2$, a matriz de Sylvester terá ordem 5 e sua resultante será expressa da seguinte forma:

$$\text{Res}(f, g) = \det \begin{pmatrix} 1 & -y & y & -y^2 & 0 \\ 0 & 1 & -y & y & -y^2 \\ 1 & 1 & -(y^2 + y) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -(y^2 + y) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -(y^2 + y) \end{pmatrix} = 0.$$

Considere as colunas da matriz indicadas por v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 . Observa-se que essas colunas satisfazem a seguinte relação linear:

$$y^4 v_1 + y^3 v_2 + y^2 v_3 + y v_4 + v_5 = 0.$$

De fato, verificando linha a linha, obtemos:

$$(1^{\text{a}} \text{ linha}) : y^4(1) + y^3(-y) + y^2(y) + y(-y^2) + 0 = y^4 - y^4 + y^3 - y^3 = 0,$$

$$(2^{\text{a}} \text{ linha}) : y^4(0) + y^3(1) + y^2(-y) + y(y) + (-y^2) = y^3 - y^3 + y^2 - y^2 = 0,$$

$$(3^{\text{a}} \text{ linha}) : y^4(1) + y^3(1) + y^2(-(y^2 + y)) + y(0) + 0 = y^4 + y^3 - y^4 - y^3 = 0,$$

$$(4^{\text{a}} \text{ linha}) : y^4(0) + y^3(1) + y^2(1) + y(-(y^2 + y)) + 0 = y^3 + y^2 - y^3 - y^2 = 0,$$

$$(5^{\text{a}} \text{ linha}) : y^4(0) + y^3(0) + y^2(1) + y(1) + (-(y^2 + y)) = y^2 + y - y^2 - y = 0.$$

Como todas as componentes dessa combinação linear se anulam, temos que

$$y^4v_1 + y^3v_2 + y^2v_3 + yv_4 + v_5 = 0,$$

com coeficientes não todos nulos. Logo, as colunas são linearmente dependentes e, portanto, o determinante será zero. O valor nulo da resultante nos diz que f e g possuem uma componente em comum.

Este exemplo mostra como a resultante traduz a seguinte pergunta "os polinômios têm raiz em comum?" em um simples cálculo de determinante, evitando, muitas vezes, a necessidade de fatorações diretas.

A primeira definição que iremos abordar sobre discriminantes é dada na definição abaixo.

Definição 1.2.4. Considere $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ um polinômio em $\mathbb{C}[x]$, tal que $a_n \neq 0$. Logo, o discriminante de f será definido por

$$\Delta(f(x)) := \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \text{Res}(f(x), f'(x))}{a_n},$$

onde $f'(x) := na_nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \dots + 2a_2x + a_1 \in \mathbb{C}[x]$.

Levando em consideração a definição acima, podemos demonstrar um dos discriminantes mais conhecidos, o discriminante das equações polinomiais de segundo grau em uma variável, observe o exemplo abaixo:

Exemplo 1.2.5 (Discriminante de um polinômio quadrático via resultante). Considere

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0.$$

Então

$$f'(x) = 2ax + b, \quad \deg_x(f) = 2, \quad \deg_x(f') = 1.$$

1. Preliminares

A matriz de Sylvester de f e f' (de ordem $2 + 1 = 3$) é

$$\text{Syl}(f, f') = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2a & b & 0 \\ 0 & 2a & b \end{pmatrix}.$$

A resultante é o determinante dessa matriz:

$$\text{Res}(f, f') = \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2a & b & 0 \\ 0 & 2a & b \end{pmatrix}.$$

Pela regra de Sarrus (ou expansão direta do determinante 3×3), temos

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, f') &= a \cdot b \cdot b + b \cdot 0 \cdot 0 + c \cdot 2a \cdot 2a \\ &\quad - c \cdot b \cdot 0 - a \cdot 0 \cdot 2a - b \cdot 2a \cdot b \\ &= ab^2 + 0 + 4a^2c - 0 - 0 - 2ab^2 \\ &= 4a^2c - ab^2 = a(4ac - b^2). \end{aligned}$$

A relação geral entre discriminante e resultante para um polinômio de grau n é

$$\Delta(f) = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{a_n} \text{Res}(f, f'),$$

onde a_n é o coeficiente líder de f . No nosso caso, $n = 2$ e $a_2 = a$, logo

$$\Delta(f) = \frac{(-1)^{\frac{2(2-1)}{2}}}{a} \text{Res}(f, f') = \frac{(-1)^1}{a} a(4ac - b^2) = b^2 - 4ac.$$

Portanto,

$$\Delta(f) = b^2 - 4ac.$$

Consideremos agora, um caso mais geral, seja \mathbb{K} um corpo algebricamente fechado de característica 0, A uma \mathbb{K} -álgebra e domínio integral e $f \in A[x]$ um polinômio de grau n , descrito da seguinte forma:

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0, \quad a_n \neq 0.$$

Considere $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ como as raízes formais de f (possivelmente numa extensão do corpo de frações de A). Neste caso, temos a seguinte decomposição de $f(x)$ em fatores

lineares:

$$f(x) = a_n \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i). \quad (1.1)$$

Definição 1.2.6. Com a notação anterior, o discriminante formal de f é dado por:

$$\Delta_A(f) = a_n^{2n-2} \prod_{i < j} (\alpha_i - \alpha_j)^2 \in A. \quad (1.2)$$

onde $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ são as raízes formais de f .

Escrevendo a expressão acima em termos das funções simétricas elementares dos α_i ; essas funções simétricas são dadas por

$$\sigma_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (-1)^i \frac{a_{n-i}}{a_n} \text{ para } i = 1, 2, \dots, n.$$

Assim, $\Delta_A(f)$ é um polinômio homogêneo de grau $2n - 2$ nos coeficientes a_i , com coeficientes inteiros; ele possui peso

$$2 \binom{n}{2} = n(n-1)$$

se atribuímos peso $n - i$ a a_i .

Exemplo 1.2.7. Consideremos o polinômio

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \in \mathbb{C}[x].$$

Sabemos que \mathbb{C} é algebricamente fechado e, portanto, f admite três raízes (contadas com multiplicidade) em \mathbb{C} . Ao fatorarmos $f(x)$, obtemos:

$$f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3),$$

de modo que as raízes são

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 2, \quad \alpha_3 = 3.$$

Utilizando a fórmula do discriminante dada na definição acima:

$$\Delta(f) = a_n^{2n-2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_i - \alpha_j)^2,$$

temos:

$$a_n = 1, \quad n = 3.$$

Assim:

$$\begin{aligned}
 \Delta(f) &= 1^{2 \cdot 3 - 2} \cdot (\alpha_1 - \alpha_2)^2 \cdot (\alpha_1 - \alpha_3)^2 \cdot (\alpha_2 - \alpha_3)^2 \\
 &= (1 - 2)^2 \cdot (1 - 3)^2 \cdot (2 - 3)^2 \\
 &= (-1)^2 \cdot (-2)^2 \cdot (-1)^2 \\
 &= 1 \cdot 4 \cdot 1 \\
 &= 4.
 \end{aligned}$$

Logo, como $\Delta(f) = 4 \neq 0$, concluímos que o polinômio possui três raízes distintas em \mathbb{C} . O fato de o discriminante ser positivo, neste caso real, indica que todas as raízes são reais — mas, como estamos em \mathbb{C} , o sinal não carrega a mesma informação que no caso real: a conclusão principal aqui é a inexistência de raízes múltiplas.

Outra maneira de abordarmos o exemplo, seria utilizando a fórmula de discriminantes para polinômios cúbicos

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Neste caso, o discriminante pode ser expresso unicamente pelos coeficientes:

$$\Delta(f) = b^2c^2 - 4ac^3 - 4b^3d - 27a^2d^2 + 18abcd.$$

Aplicando esta fórmula a $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, temos:

$$a = 1, \quad b = -6, \quad c = 11, \quad d = -6,$$

e, portanto:

$$\begin{aligned}
 \Delta(f) &= (-6)^2 \cdot 11^2 - 4(1)(11^3) - 4(-6)^3(-6) - 27(1)^2(-6)^2 \\
 &\quad + 18(1)(-6)(11)(-6) \\
 &= 36 \cdot 121 - 4 \cdot 1331 - 4(-216)(-6) - 27 \cdot 36 + 18 \cdot (-6) \cdot 11 \cdot (-6) \\
 &= 4356 - 5324 - 5184 - 972 + 7128 \\
 &= 4.
 \end{aligned}$$

O valor obtido coincide com o cálculo anterior, confirmando a coerência entre a definição via raízes e a expressão via funções simétricas dos coeficientes.

Fazendo uma ligação com o contexto de resultante e a ideia de discriminantes formais e considerando a Equação (1.1), tomemos $g(x) = b_m \prod_{i=1}^m (x - \beta_i)$, então a resultante também pode ser calculada da seguinte forma.

Proposição 1.2.8 (Veja [EH]). Sejam \mathbb{K} um corpo algebricamente fechado de carac-

1. Preliminares

terística 0, A uma \mathbb{K} -álgebra e domínio de integridade, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ e β_1, \dots, β_m as raízes formais, respectivamente, de $f(x)$ e $g(x)$ dois elementos em $A[x]$. Então a resultante de $f(x)$ e $g(x)$ é dado por

$$\text{Res}(f, g) = a_n^m \prod_{i=1}^n g(\alpha_i) = (-1)^{mn} b_m^n \prod_{j=1}^m f(\beta_j) = a_n^m b_m^n \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (\alpha_i - \beta_j),$$

onde a_n e b_m denotam os coeficientes líderes de f e g , respectivamente.

Exemplo 1.2.9. Considere os polinômios

$$f(x) = x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3), \quad g(x) = x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1).$$

Suas raízes são: $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 3$ (de f); $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = -1$ (de g) e seus coeficientes líderes $a_2 = b_2 = 1$. Assim,

$$\text{Res}(f, g) = a_2^2 \prod_{i=1}^2 g(\alpha_i) = g(2)g(3).$$

Calcula-se

$$g(2) = 2^2 - 1 = 3, \quad g(3) = 3^2 - 1 = 8,$$

e, portanto,

$$\boxed{\text{Res}(f, g) = 3 \cdot 8 = 24.}$$

Ou ainda,

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, g) &= a_2^2 b_2^2 \prod_{i=1}^2 \prod_{j=1}^2 (\alpha_i - \beta_j) = \prod_{i=1}^2 \prod_{j=1}^2 (\alpha_i - \beta_j) \\ &= (2 - 1)(2 - (-1))(3 - 1)(3 - (-1)) = 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 = 24. \end{aligned}$$

Mais ainda, comparando com o outro método, para $f(x) = x^2 - 5x + 6$ e $g(x) = x^2 - 1$ a matriz de Sylvester $Syl(f, g)$ (ordem $n + m = 4$) é

$$Syl(f, g) = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 6 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

A resultante é dada por

$$\text{Res}(f, g) = \det(\text{Syl}(f, g)) = 24.$$

Portanto, todos os métodos coincidem.

1.3 Intersecção no plano projetivo

Nesta seção, abordaremos o conceito de intersecção entre curvas no espaço projetivo, tem como principal referência a dissertação do Mendes, G. T. [\[GM\]](#).

Considere $F(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ e $\mathcal{V}(F)$ a curva plana afim determinada por F , ou seja,

$$\mathcal{V}(F) := \{(a, b) \in \mathbb{C}^2 \mid F(a, b) = 0\}.$$

Se F for irredutível, então $\mathcal{V}(F)$ é uma variedade afim. Onde o grau da curva é o grau do polinômio que a define.

Definição 1.3.1. Suponhamos que $F = \prod C_i^{n_i}$, onde C_i são componentes irredutíveis de F e n_i é a multiplicidade da componente C_i . Dizemos que C_i é uma *componente simples* se $n_i = 1$ ou *componente múltipla*, caso contrário.

Definição 1.3.2. Sejam $\mathcal{V}(F)$ uma curva plana afim e $P = (a, b) \in \mathcal{V}(F)$. O ponto P é chamado de *ponto simples* de $\mathcal{V}(F)$ se ao menos uma das derivadas parciais de $F(x, y)$ é diferente de zero no ponto P , ou seja, se $F_x(P) \neq 0$ ou $F_y(P) \neq 0$. Nesse caso, chamamos de *reta tangente a F em P* a equação

$$F_x(P)(x - a) + F_y(P)(y - b) = 0.$$

Um ponto que não for simples é denominado *ponto múltiplo* (ou ponto singular).

Definição 1.3.3. Sejam $\mathcal{V}(F)$ uma curva plana qualquer e $P = (0, 0) \in \mathbb{C}^2$. Escreva

$$F = F_m + F_{m+1} + \cdots + F_n,$$

onde F_i é uma forma em $\mathbb{C}[x, y]$ de grau i , com $F_m \neq 0$. Definimos m como a multiplicidade de F no ponto P e denotamos isso por $m_P(F) = m$.

Observação 1. A forma de grau m pode ser decomposta como um produto de fatores lineares da seguinte maneira:

$$F_m := \prod L_i^{r_i},$$

onde L_i são as retas tangentes a $\mathcal{V}(F)$ em $P = (0, 0)$ e r_i representa a multiplicidade da reta tangente. Uma reta L_i é dita tangente simples se $r_i = 1$, tangente dupla se $r_i = 2$, e assim por diante.

Observação 2. $P = (0, 0) \in \mathcal{V}(F)$ se, e somente se, $m_P(F) > 0$. Esse fato pode ser utilizado para verificar se P é um ponto simples. Com efeito, se, e somente se, $m_P(F) = 1$, então F_1 é exatamente a equação da reta tangente a F em P . Quando $m = 2$, dizemos que P é um ponto duplo; para $m = 3$, um ponto triplo, e assim por diante.

Observação 3. Se $F = \prod F_i^{e_i}$ é a fatoração de F em componentes irredutíveis, então

$$m_P(F) = \sum e_i m_P(F_i).$$

Ademais, sendo L uma reta tangente a $\mathcal{V}(F_i)$ no ponto P com multiplicidade r_i , então L é tangente a F em P com multiplicidade $\sum e_i r_i$. Isso decorre do fato de que o termo de menor grau de F é obtido ao multiplicar os termos de menor grau de seus fatores.

Para estender as definições acima a um ponto $P = (a, b) \neq (0, 0)$, considere uma translação que leva $(0, 0)$ em P , isto é, $T(x, y) = (x + a, y + b)$. Quando aplicamos essa translação às variáveis de F , obtemos uma **nova função**, chamada de **função transladada** F^T , definida por:

$$F^T(x, y) = F(T(x, y)) = F(x + a, y + b).$$

Defina $m_P(F) = m_{(0,0)}(F^T)$. Escrevendo $F^T = G_m + G_{m+1} + \dots$, onde G_i são formas homogêneas de grau i e $G_m \neq 0$, define-se $m_P(F) = m$. Se $G_m = \prod L_i^{r_i}$, com $L_i = \alpha_i x + \beta_i y$, então as retas $\alpha_i(x - a) + \beta_i(y - b)$ são as tangentes a F em P , e r_i é a multiplicidade da reta L_i como tangente. Observe que T leva os pontos de F^T aos pontos de F , e as tangentes de F^T em $(0, 0)$ às tangentes de F em P . Como $F_x^T(0, 0) = F_x(a, b)$ e $F_y^T(0, 0) = F_y(a, b)$, P é um ponto simples em F se, e somente se, $m_P(F) = 1$. Portanto, as duas definições de reta tangente coincidem quando P é simples.

Dada uma curva plana afim $\mathcal{V}(F) \subseteq \mathbb{C}^2$, tal que $F(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ é irredutível (ou $F(x, y) = 0$). Define-se o anel de coordenadas da curva $\mathcal{V}(F)$ como

$$\Gamma(F) = \mathbb{C}[x, y]/I(F),$$

onde $I(F) \subseteq \mathbb{C}[x, y]$ é o ideal de todos os polinômios que se anulam em $\mathcal{V}(F)$. Este anel codifica toda a informação algébrica da curva. Por exemplo, se $\mathcal{V}(F)$ onde $F(x, y) =$

$y - x^2$ (a parábola), então

$$\Gamma(F) \cong \mathbb{C}[t], \quad x \mapsto t, \quad y \mapsto t^2.$$

Assim, o anel de coordenadas da parábola é isomorfo a um anel de polinômios em uma variável.

Seja agora $P \in \mathcal{V}(F)$ um ponto. O anel local de $\mathcal{V}(F)$ em P é definido como

$$\mathcal{O}_P(F) = \{f/g \mid f, g \in k[X], g(P) \neq 0\} \subset \text{Frac}(\Gamma(F)),$$

ou seja, a localização do anel de coordenadas em relação ao ideal maximal correspondente a P . O ideal maximal associado a P é

$$\mathfrak{m}_P(F) = \{\bar{f} \in \Gamma(F) \mid f(P) = 0\},$$

e, portanto,

$$\mathcal{O}_P(F) = \Gamma(F)_{\mathfrak{m}_P(F)}.$$

Esse anel contém informações locais de $\mathcal{V}(F)$ em torno de P , como regularidade ou presença de singularidades: se $\mathcal{O}_P(F)$ é um anel local regular², o ponto é não singular; caso contrário, é singular.

No exemplo da parábola $\mathcal{V}(F)$ com $F(x, y) = y - x^2$, temos $\Gamma(F) \cong \mathbb{C}[t]$. Para o ponto $P = (a, a^2)$, o ideal maximal é $\mathfrak{m}_P(F) = (t - a)$. O anel local em P é

$$\mathcal{O}_P(F) = \mathbb{C}[t]_{(t-a)},$$

ou seja, a localização de $\mathbb{C}[t]$ no ideal $(t - a)$. Esse anel descreve todas as funções racionais da curva que são regulares em torno do ponto P .

Denote $\mathcal{V}(F)$ apenas por F , para simplificarmos a notação e considere F como uma curva plana irredutível tal que $P \in F$. O resultado a seguir expressa a multiplicidade de P em termos do anel local $\mathcal{O}_P(F)$ e do ideal maximal associado ao ponto $P \in \mathcal{V}(F)$.

Teorema 1.3.4. Seja P um ponto de uma curva irredutível F . Então, para todo n suficientemente grande,

$$m_P(F) = \dim_k \frac{\mathfrak{m}_P(F)^n}{\mathfrak{m}_P(F)^{n+1}}.$$

Em particular, a multiplicidade de F em P depende apenas do anel local $\mathcal{O}_P(F)$.

²Um anel local (A, \mathfrak{m}) é dito *regular* se o ideal maximal \mathfrak{m} puder ser gerado por exatamente $\dim A$ elementos, isto é, se $\dim_{A/\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = \dim A$.

Demonstração 1. Ver Theorem 2 (Fulton, 2008), página 35.

O Teorema 1.3.4 diz que a multiplicidade de uma curva F em um ponto P pode ser lida diretamente do anel local: para n grande, basta olhar o quociente entre potências sucessivas do ideal maximal, e sua dimensão já nos dá $m_P(F)$. Isso mostra que a multiplicidade depende apenas da estrutura local da curva, não da forma como escrevemos sua equação.

Por exemplo, na parábola $y - x^2 = 0$ em $(0, 0)$, o quociente sempre tem dimensão 1, logo a multiplicidade é 1, como esperado para um ponto liso. Já na cúspide $y^2 - x^3 = 0$, o quociente tem dimensão 2, e a multiplicidade em $(0, 0)$ é 2, refletindo a singularidade do ponto.

Definição 1.3.5. Dizemos que duas curvas F e G se intersectam transversalmente em P se P é um ponto simples tanto em F quanto em G , e se as retas tangentes a F e G em P são distintas. Dizemos que F e G se intersectam propriamente em P se não têm componentes em comum passando por P .

Observação 4 (Número de Interseção). Sejam F e G curvas planas afins e $P \in \mathbb{C}^2$. O número de interseção de F e G em P será denotado por $I(P, F \cap G)$. Antes de tomarmos uma definição rigorosa sobre a quantidade de interseções, vamos listar algumas propriedades desejadas para este número.

(P.1) $I(P, F \cap G)$ é um inteiro não negativo para qualquer F, G, P tais que F e G se intersectam *propriamente* em P . Além disso, $I(P, F \cap G) = \infty$ se F e G não se intersectam propriamente em P (isto é, compartilham uma mesma componente passando por P).

Ou seja, se a interseção é própria, o número de interseção conta “quantas vezes” as curvas se cruzam em P (com multiplicidade). Se compartilham uma componente comum, o número de interseção é infinito.

Exemplo:

- $F : y = 0, G : y = x^2, P = (0, 0)$: interseção própria, $I = 2$ (tangência de ordem 2).
- $F : y = 0, G : y = 0, P = (0, 0)$: mesma reta, $I = \infty$.

(P.2) $I(P, F \cap G) = 0$ se, e somente se, $P \notin F \cap G$. O valor de $I(P, F \cap G)$ depende apenas das componentes de F e G que passam por P .

Exemplo: $F : y = 0, G : x = 1, P = (0, 0)$: $P \notin G$, logo $I = 0$.

(P.3) O número de interseção é invariante por transformações afins (translações, rotações, escalas). Isto é, se T é uma mudança de coordenadas afim³ de \mathbb{C}^2 e $T(Q) = P$, então

$$I(P, F^T \cap G^T) = I(Q, F \cap G).$$

Exemplo: $F : y = 0$, $G : y = x^2$, $P = (0, 0)$ tem $I = 2$. Após transladar $(0, 0)$ para $(1, 1)$ e mover ambas as curvas, o número de interseção continua 2.

(P.4) $I(P, F \cap G) = I(P, G \cap F)$.

(P.5) A multiplicidade mínima do encontro é o produto das multiplicidades individuais, e isso acontece quando não há tangência compartilhada.

$$I(P, F \cap G) \geq m_P(F) m_P(G),$$

(P.6) O número de interseção se distribui sobre os fatores, multiplicando pelos expoentes. Se $F = \prod_i F_i^{r_i}$ e $G = \prod_j G_j^{s_j}$, então

$$I(P, F \cap G) = \sum_{i,j} r_i s_j I(P, F_i \cap G_j).$$

(P.7)

$$I(P, F \cap G) = I(P, F \cap (G + HF)), \quad \forall H \in \mathbb{C}[x, y].$$

Isto é, no anel quociente $\mathbb{C}[x, y]/I(F)$, somar múltiplos de F a G não altera o número de interseção.

Teorema 1.3.6 (Veja **[E]**). Existe um único número de interseção $I(P, F \cap G)$ definido para todas as curvas planas F e G , e todos os pontos $P \in \mathbb{C}^2$, que satisfaz as propriedades acima, dado por:

$$I(P, F \cap G) = \dim_{\mathbb{C}} \left(\frac{\mathcal{O}_P(\mathbb{C}^2)}{\langle F, G \rangle} \right).$$

Onde a notação $\mathcal{O}_P(\mathbb{C}^2)$ representa o anel local de funções regulares no ponto P ⁴ do plano afim complexo \mathbb{C}^2 . O ideal $\langle F, G \rangle$ é formado por todas as combinações lineares (com coeficientes em $\mathcal{O}_P(\mathbb{C}^2)$) dos polinômios F e G . O quociente $\mathcal{O}_P(\mathbb{C}^2)/\langle F, G \rangle$ mede, de certa forma, “o tamanho” do conjunto de funções que ainda não foram “anuladas”

³Uma função $T : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ é mudança de coordenadas afim se for uma composição de um isomorfismo \mathbb{C} -linear com uma translação.

⁴O anel local de funções regulares no ponto $P \in \mathbb{C}^2$, denotado por $\mathcal{O}_P(\mathbb{C}^2)$, é o conjunto das frações racionais f/g , onde f e g são funções regulares em uma vizinhança de P e $g(P) \neq 0$.

por F e G no ponto P . A dimensão deste quociente como espaço vetorial sobre \mathbb{C} é justamente o número de interseção.

Exemplo 1.3.7 (Parábola versus eixo da abscissa). Considere

$$F(x, y) = y - x^2, \quad G(x, y) = y,$$

e o ponto $P = (0, 0)$. Trabalhando no anel local $\mathcal{O}_P = \mathcal{O}_{(0,0)}(\mathbb{C}^2)$ temos, no quociente,

$$\mathcal{O}_P/(F, G) \simeq \mathcal{O}_P/(y, y - x^2) \simeq \mathbb{C}[x]_{(x)}/(x^2) \simeq \mathbb{C}[x]/(x^2),$$

pois y fica anulado e então $x^2 = 0$ no quociente. Assim

$$I((0, 0), F \cap G) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_P/(F, G)) = 2,$$

o que coincide com a interpretação geométrica.

1.3.1 Interseção de curvas projetivas planas

O plano projetivo complexo é definido como

$$\mathbb{P}^2 := (\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}) / \sim,$$

onde $(x_0, x_1, x_2) \sim (\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2)$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Um ponto de \mathbb{P}^2 é denotado por coordenadas homogêneas $[x_0 : x_1 : x_2]$.

Uma curva projetiva plana é o lugar dos zeros de um polinômio homogêneo não constante $F(x, y, z) \in \mathbb{C}[x, y, z]$, isto é,

$$\mathcal{V}(F) = \{[a : b : c] \in \mathbb{P}^2 : F(a, b, c) = 0\}.$$

O anel de coordenadas de $\mathcal{V}(F)$ é definido como

$$\Gamma(F) = \mathbb{C}[x, y, z]/I(F),$$

levando em conta que estamos trabalhando com polinômios homogêneos e relações de proporcionalidade em coordenadas projetivas. De forma mais precisa, considera-se a álgebra graduada $\mathbb{C}[x, y, z]/I(F)$ e sua estrutura como anel coordenado projetivo da curva.

Suponhamos que $F(x, y, z) \in \mathbb{C}[x, y, z]$ é um polinômio homogêneo e irredutível

e que $P \in \mathcal{V}(F)$. O anel local de $\mathcal{V}(F)$ em P é

$$\mathcal{O}_P(F) = \{\bar{f}/\bar{g} \mid f, g \in \mathbb{C}[x, y, z] \text{ são homogêneos e têm mesmo grau com } g(P) \neq 0\}$$

cujo ideal maximal é dado por

$$\mathfrak{m}_P(F) = \{\bar{f}/\bar{g} \in \mathcal{O}_P(F) \mid f(P) = 0\}.$$

Esse anel local contém as funções racionais da curva que são regulares na vizinhança de P . Assim como no caso afim, a regularidade ou singularidade de P pode ser analisada a partir da estrutura de $\mathcal{O}_P(F)$: se o anel local é regular, o ponto é não singular; caso contrário, é singular.

Sejam F e G curvas projetivas planas no espaço projetivo \mathbb{P}^2 . Consideremos um ponto projetivo

$$P = [x : y : 1] \in F \cap G.$$

Queremos atribuir a esse ponto um número que meça o “quanto” as curvas se intersectam em P , levando em conta possíveis contatos tangenciais ou coincidências de ramos.

Observação 5 (Veja [F]). Se $F(x, y, z) = 0$, então definimos $\mathcal{O}_P(\mathbb{P}^2) := \mathcal{O}_P(F)$ ⁵ para qualquer ponto $P \in \mathbb{P}^2$. Neste caso, prova-se que, a menos de mudança de coordenadas projetiva⁶, podemos supor que $P = [0 : 0 : 1]$ e, portanto, $\mathcal{O}_P(\mathbb{P}^2)$ é isomorfo a $\mathbb{C}[x, y]$.

Com a notação anterior, a multiplicidade de interseção de F em P é definida por $m_P(F) := m_P(F_*)$ e o número de interseção de F e G no ponto P é dado por

$$I(P, F \cap G) = \dim_{\mathbb{C}} \left(\frac{\mathcal{O}_P(\mathbb{P}^2)}{(F_*, G_*)} \right),$$

onde F_* e G_* são as desomogeneizações de F e G em relação à variável z .

As demonstrações dos próximos resultados podem ser encontradas em [F].

Proposição 1.3.8 (Finitude da Interseção de Curvas Projetivas). Sejam F e G duas curvas projetivas planas sem componentes em comum, então a interseção $F \cap G$ é finita.

Assim como no caso afim, o grau de uma curva projetiva plana é o mesmo grau do polinômio que a define.

⁵O símbolo $\mathcal{O}_P(F)$ denota o anel local da curva projetiva $F(x, y, z) = 0$ no ponto P , isto é, $\mathcal{O}_P(F) = (\mathbb{C}[x, y, z]/(F))_{\mathfrak{m}_P}$, onde \mathfrak{m}_P é o ideal maximal associado a P . Geometricamente, esse anel descreve as funções racionais que são regulares em uma vizinhança de P na curva $F = 0$.

⁶Uma função $T : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ dada por $T(P) = [u_0(P) : u_1(P) : u_2(P)]$ é uma mudança de coordenadas projetiva se $u_i = a_{i,1}x + a_{i,2}y + a_{i,3}z$ é uma forma linear para todo $0 \leq i \leq 2$ e a matriz (a_{ij}) é invertível.

Teorema 1.3.9 (Teorema de Bézout para Curvas Projetivas). Sejam F e G duas curvas projetivas planas de grau m e n , respectivamente. Assuma que F e G não têm componentes em comum. Então:

$$\sum_P I(P, F \cap G) = mn.$$

Corolário 1.3.10. Se F e G não têm componentes em comum, então:

$$\sum_P m_P(F) m_P(G) \leq \deg(F) \cdot \deg(G),$$

onde $m_P(F)$ é a multiplicidade de F em P .

Corolário 1.3.11. Se F e G encontrarem-se em mn pontos distintos, onde $m = \deg F$ e $n = \deg G$, então todos esses pontos são simples.

Corolário 1.3.12. Se duas curvas planas de graus m e n têm mais de mn pontos em comum, então essas duas curvas têm uma componente em comum.

Exemplo 1.3.13. Considere a cônica definida pela equação homogênea

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0,$$

e a reta dada por

$$G(x, y, z) = x - z = 0.$$

No plano afim $z = 1$, a curva F representa a circunferência $x^2 + y^2 = 1$, e a reta G corresponde a $x = 1$. Queremos determinar os pontos de interseção entre essas duas curvas. Substituindo $x = 1$ na equação da cônica, temos:

$$F(1, y, 1) = 1^2 + y^2 - 1^2 = y^2 = 0,$$

que implica

$$y = 0.$$

Portanto, o ponto de interseção é

$$P_1 = [1 : 0 : 1].$$

De acordo com o Teorema de Bézout, as curvas devem se intersectar em

$$\deg(F) \cdot \deg(G) = 2 \cdot 1 = 2$$

pontos contando multiplicidades.

Para verificar a existência do segundo ponto de interseção, analisamos os pontos no infinito, isto é, os pontos do plano projetivo que estão na reta $z = 0$.

Os pontos $P = [x : y : 0]$ que estão sobre a reta G devem satisfazer

$$G(x, y, 0) = 0 \implies x = 0.$$

Logo, os pontos no infinito da reta são da forma $P = [0 : y : 0] = [0 : 1 : 0]$.

Verificamos se esses pontos pertencem à cônica no infinito, ou seja, se satisfazem

$$F(0, y, 0) = 0^2 + y^2 - 0^2 = y^2 = 0,$$

que implica $y = 0$, portanto o ponto seria a classe de $(0, 0, 0) \in \mathbb{C}^3$, o qual não existe no espaço projetivo. Assim, não há ponto de interseção distinto no infinito.

Para determinar a multiplicidade da interseção no ponto P_1 , restringimos a curva F à reta G através da substituição $x = 1$:

$$F(1, y, 1) = y^2.$$

A função restrita é y^2 , que tem uma raiz de ordem 2 em $y = 0$, indicando que o ponto P_1 é uma interseção tangente de multiplicidade 2. Logo,

$$I(P_1, F \cap G) = 2,$$

e a soma das multiplicidades das interseções é

$$\sum_P I(P, F \cap G) = 2,$$

conforme prevê o Teorema de Bézout.

Capítulo 2

Limite de curvas duais planas

Neste capítulo, abordaremos o conceito de dualidade e falaremos sobre o limite de curvas duais planas, assuntos fundamentais para a boa compreensão do teorema principal. Denotaremos por \mathbb{P}^2 o plano projetivo complexo.

2.1 Dualidade

O primeiro objetivo desta seção é notar que existe uma dualidade entre os pontos e as retas no plano projetivo e logo em seguida usar a dualidade para mapear qualquer curva suave em \mathbb{P}^2 para outra curva chamada curva dual em $(\mathbb{P}^2)^*$, o *plano projetivo dual* é o espaço cujos pontos correspondem às retas do plano projetivo \mathbb{P}^2 . Cada reta em \mathbb{P}^2 é dada por uma equação da forma $ax + by + cz = 0$, e o ponto $[a : b : c] \in (\mathbb{P}^2)^*$ representa essa reta. Assim, há uma correspondência natural entre pontos de $(\mathbb{P}^2)^*$ e as retas de \mathbb{P}^2 .

Para cada ponto $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{C}^3$ não nulo considere a reta $L_{(x_0, y_0, z_0)}$ dada por

$$L_{(x_0, y_0, z_0)} = \{[a : b : c] \in \mathbb{P}^2 \mid ax_0 + by_0 + cz_0 = 0\}.$$

Note que a reta associada a $a_1 = 1, b_1 = 2, c_1 = 3$ é a mesma reta associada a $a_2 = -2, b_2 = -4, c_2 = -6$, pois

$$\begin{aligned} P = [a : b : c] \in L_{(1,2,3)} &\iff a + 2b + 3c = 0 \iff -2a - 4b - 6c = 0 \\ &\iff P = [a : b : c] \in L_{(-2,-4,-6)}. \end{aligned}$$

De maneira geral, se $[a : b : c] = [a' : b' : c']$ é um ponto em \mathbb{P}^2 , então a reta $L_{(a,b,c)} = L_{(a',b',c')}$. A recíproca também é verdadeira (pois, se $L_{(a,b,c)} = L_{(a',b',c')}$, então seus vetores normais são múltiplos escalares, logo $[a : b : c] = [a' : b' : c']$), ou seja, se $L_{(a,b,c)} = L_{(a',b',c')}$, então $[a : b : c] = [a' : b' : c']$.

2. Limite de curvas duais planas

Portanto, todos os representantes da classe de equivalência de $[a : b : c] \in \mathbb{P}^2$ definem a mesma reta e cada reta em \mathbb{P}^2 é dada por uma equação $ax + by + cz = 0$. Logo, o conjunto de retas em \mathbb{P}^2 também é parametrizado por \mathbb{P}^2 , isto é, há uma bijeção natural entre eles. Embora o conjunto de retas em \mathbb{P}^2 possa ser pensado como outro \mathbb{P}^2 , vamos utilizar as seguintes notações: \mathbb{P}^2 como o conjunto de pontos e $(\mathbb{P}^2)^*$ como o conjunto de retas em \mathbb{P}^2 .

Para facilitar nossa notação, dado $[a : b : c] \in \mathbb{P}^2$, definimos:

$$L_{[a:b:c]} = \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2 \mid ax + by + cz = 0\}$$

como sendo a reta projetiva associada ao ponto $[a : b : c]$. Desta forma, o mapa

$$\mathcal{D} : (\mathbb{P}^2)^* \longrightarrow \mathbb{P}^2 \quad \text{dado por} \quad \mathcal{D}(L_{[a:b:c]}) = [a : b : c]$$

é uma bijeção natural. O mapa \mathcal{D} é chamado de **dualidade**. A partir daqui identificaremos $L_{[a:b:c]}$ com $[a : b : c]$ (via \mathcal{D}).

Observe a equação de uma reta,

$$ax + by + cz = 0.$$

Embora seja tradicional pensarmos em a, b, c como constantes e x, y, z como variáveis, isso é apenas uma convenção. Pense brevemente em x, y, z como fixos e considere o conjunto

$$M_{[x:y:z]} := \{[a : b : c] \in (\mathbb{P}^2)^* : ax + by + cz = 0\}.$$

Ou seja, $M_{[x:y:z]}$ é o conjunto de todas as retas que contêm o ponto $[x : y : z]$.

Para começarmos a entender a dualidade entre retas e pontos, considere

$$\Sigma = \{([a : b : c], [x : y : z]) \in (\mathbb{P}^2)^* \times \mathbb{P}^2 : ax + by + cz = 0\}.$$

Daí, existem duas projeções naturais:

$$\pi_1 : \Sigma \rightarrow (\mathbb{P}^2)^*$$

dada por

$$\pi_1([a : b : c], [x : y : z]) = [a : b : c],$$

e

$$\pi_2 : \Sigma \rightarrow \mathbb{P}^2$$

dada por

$$\pi_2\left(\left([a : b : c], [x : y : z]\right)\right) = [x : y : z].$$

onde ambas as aplicações π_1 e π_2 são sobrejetoras. Além disso, temos que

$$\pi_1^{-1}([a : b : c]) = \{[a : b : c]\} \times L_{[a:b:c]} \quad \text{e} \quad \pi_2^{-1}([x : y : z]) = M_{[x:y:z]} \times \{[x : y : z]\}.$$

Logo,

$$\pi_2(\pi_1^{-1}([a : b : c])) = L_{[a:b:c]} \quad \text{e} \quad \pi_1(\pi_2^{-1}([x : y : z])) = M_{[x:y:z]}.$$

Exemplo 2.1.1. Sejam $[1 : 2 : 3], [2 : 5 : 1] \in (\mathbb{P}^2)^*$ duas retas. Determine

$$\pi_2(\pi_1^{-1}([1 : 2 : 3])) \cap \pi_2(\pi_1^{-1}([2 : 5 : 1])).$$

Perceba que isso nada mais é do que encontrar o ponto de interseção das duas retas dadas. O conjunto $\pi_2(\pi_1^{-1}[1 : 2 : 3])$ é a reta dada pela equação $x + 2y + 3z = 0$ e o conjunto $\pi_2(\pi_1^{-1}([2 : 5 : 1]))$ é a reta dada pela equação $2x + 5y + z = 0$. Resolvendo o sistema formado por estas equações, encontramos $P = [-13 : 5 : 1]$ como resposta.

Exemplo 2.1.2. Sejam $[1 : 2 : 3], [2 : 5 : 1] \in \mathbb{P}^2$ dois pontos. Encontre

$$\pi_1(\pi_2^{-1}([1 : 2 : 3])) \cap \pi_1(\pi_2^{-1}([2 : 5 : 1])).$$

Note que, $\pi_1(\pi_2^{-1}([1 : 2 : 3]))$ é o conjunto de todas as retas que passam pelo ponto $[1 : 2 : 3]$, enquanto $\pi_1(\pi_2^{-1}([2 : 5 : 1]))$ é o conjunto de todas as retas que passam pelo ponto $[2 : 5 : 1]$. Logo, a interseção desses conjuntos corresponde à única reta que contém ambos os pontos.

Podemos determinar explicitamente essa reta calculando resolvendo a seguinte equação:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Portanto, a reta que passa por aqueles pontos é dada pela equação $-13x + 5y + z = 0$.

Observação 6. O princípio da dualidade para pontos e retas no plano projetivo complexo afirma que, para qualquer teorema sobre pontos e retas, existe um teorema correspondente obtido ao trocar as palavras “pontos” e “retas”. Ou seja, dado um afirmação que diz:

Dois pontos distintos em \mathbb{P}^2 determinam uma única reta.

Então, aplicando o princípio da dualidade, a afirmação dual é:

Duas retas distintas em \mathbb{P}^2 se interceptam em um único ponto.

Este princípio da dualidade se estende a espaços projetivos de dimensões superiores, fornecendo uma ferramenta poderosa para generalizações e provas elegantes.

Sejam $(x_0, y_0, z_0, w_0), (x_1, y_1, z_1, w_1) \in \mathbb{C}^4 - \{(0, 0, 0, 0)\}$. Definimos a relação de equivalência

$$(x_0, y_0, z_0, w_0) \sim (x_1, y_1, z_1, w_1)$$

se existir $\lambda \neq 0$ tal que

$$x_0 = \lambda x_1, \quad y_0 = \lambda y_1, \quad z_0 = \lambda z_1, \quad w_0 = \lambda w_1.$$

Define-se

$$\mathbb{P}^3 = \mathbb{C}^4 - \{(0, 0, 0, 0)\} / \sim .$$

Note que o conjunto de todos os planos em \mathbb{P}^3 pode ser identificado como outro espaço projetivo \mathbb{P}^3 . Além disso, utilizando o princípio da dualidade podemos relacionar o fato de que três pontos não colineares definem unicamente um plano, com o fato de que três planos linearmente independentes se interceptam em um único ponto.

No espaço projetivo \mathbb{P}^3 , cada plano pode ser descrito por uma equação linear homogênea

$$ax + by + cz + dw = 0,$$

onde $[a : b : c : d] \in \mathbb{P}^3$. Denotando por $(\mathbb{P}^3)^*$ o conjunto de todos os planos de \mathbb{P}^3 , temos que $(\mathbb{P}^3)^*$ pode ser identificado com \mathbb{P}^3 .

2.1.1 Dual de uma curva plana

Seja $f(x, y, z) \in \mathbb{C}[x, y, z]$ um polinômio homogêneo não constante e considere

$$C := \mathcal{V}(F) = \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2 \mid f(x, y, z) = 0\}$$

uma curva do \mathbb{P}^2 . No caso em que $F(x, y, z)$ tenha grau n , vale a seguinte igualdade (Identidade de Euler):

$$nF(x, y, z) = xF_x + yF_y + zF_z.$$

Um ponto $P \in C$ é não singular se alguma das derivadas de $f(x, y, z)$ aplicada no ponto P é diferente de zero, ou seja, se $F_x(P) \neq 0$ ou $F_y(P) \neq 0$ ou $F_z(P) \neq 0$. Neste

2. Limite de curvas duais planas

caso, a reta tangente a C no ponto P é definida como:

$$T_P(C) = \{[a : b : c] \in \mathbb{P}^2 \mid aF_x(P) + bF_y(P) + cF_z(P) = 0\},$$

ou seja,

$$T_P(C) := L_{[F_x(P):F_y(P):F_z(P)]}.$$

Se todo ponto em C é não singular, então dizemos que C é não singular (ou suave). Caso contrário, ou seja, se existe $P \in C$ tal que $F_x(P) = F_y(P) = F_z(P) = 0$, então dizemos que P é um ponto singular de C e C é uma curva singular.

Definição 2.1.3. Seja C uma curva plana projetiva suave. Considere C^* a imagem da seguinte composição (o segundo mapa é \mathcal{D} , o mapa dualidade)

$$C \longrightarrow (\mathbb{P}^2)^* \longrightarrow \mathbb{P}^2$$

$$P \mapsto T_P(C) \mapsto [F_x(P) : F_y(P) : F_z(P)]$$

O conjunto C^* é chamado de *dual da curva* C . A composição será chamada de mapa dual e será denotada (também) por \mathcal{D} . Assim, o dual da curva projetiva lisa C é $C^* = \mathcal{D}(C)$.

Notemos que C^* parametriza todas as retas tangentes a C . Para entendermos melhor, observemos os exemplos abaixo:

Exemplo 2.1.4. Considere $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ e $C = \mathcal{V}(F(x, y, z))$. Nesse caso, a curva dual C^* é a mesma que a curva original C . De fato, notemos que para qualquer $P = [x_0 : y_0 : z_0] \in C$ temos

$$\mathcal{D}(P) = [2x_0 : 2y_0 : -2z_0] = [x_0 : y_0 : -z_0].$$

Para verificarmos que $C^* = C$, basta notar que

$$\begin{aligned} [a_0 : b_0 : c_0] \in C^* &\iff [a_0 : b_0 : c_0] = [2x : 2y : -2z], \text{ com } [x : y : z] \in C \\ &\iff [a_0 : b_0 : c_0] = [x : y : -z], \text{ com } [x : y : z] \in C \\ &\iff [a_0 : b_0 : c_0] \in C, \text{ visto que } [x : y : -z] \in C. \end{aligned}$$

Logo, $C^* = C$.

Exemplo 2.1.5. Considere $F(x, y, z) = x^2 - yz$, e $C = \mathcal{V}(F)$. Para cada ponto $P = [x_0 : y_0 : z_0] \in C$, temos que

$$\mathcal{D}(P) = [2x_0 : -z_0 : -y_0].$$

2. Limite de curvas duais planas

Para obtermos a equação de C^* nas variáveis a, b, c , basta notar que se $[a_0 : b_0 : c_0] \in C^*$, então $[a_0 : b_0 : c_0] = [2x_0 : -z_0 : -y_0]$ para algum $P = [x_0 : y_0 : z_0] \in C$. Assim,

$$x_0 = (\lambda a_0)/2, \quad z_0 = -\lambda b_0, \quad y_0 = -\lambda c_0, \quad \text{para algum } \lambda \in \mathbb{C} - \{0\}.$$

Como $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, segue que:

$$((\lambda a_0)/2)^2 - (-\lambda c_0)(-\lambda b_0) = 0,$$

ou seja,

$$a_0^2 - 4b_0c_0.$$

Portanto, a curva dual é

$$C^* = \mathcal{V}(a^2 - 4bc).$$

Observação 7 (Veja [\[E\]](#), [\[Ha\]](#)). De maneira geral, temos que se C é uma curva suave de grau d , então C^* será uma curva (não necessariamente suave) de grau $d(d-1)$.

Exemplo 2.1.6. Considere a curva cúbica suave dada por

$$C = V(x^3 + y^3 + z^3) \subset \mathbb{P}^2.$$

Primeiro, verificamos que C é suave. De fato, temos

$$F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3,$$

e portanto

$$F_x = 3x^2, \quad F_y = 3y^2, \quad F_z = 3z^2.$$

O gradiente $\nabla F = (3x^2, 3y^2, 3z^2)$ nunca se anula simultaneamente em \mathbb{P}^2 , logo C é uma curva suave de grau $d = 3$.

A reta tangente a C em um ponto $P = [x_0 : y_0 : z_0]$ é dada por

$$F_x(x_0, y_0, z_0)x + F_y(x_0, y_0, z_0)y + F_z(x_0, y_0, z_0)z = 0.$$

Substituindo as derivadas, obtemos:

$$3x_0^2x + 3y_0^2y + 3z_0^2z = 0,$$

ou, de forma equivalente (dividindo por 3):

$$x_0^2x + y_0^2y + z_0^2z = 0.$$

2. Limite de curvas duais planas

Assim, a reta tangente pode ser representada no espaço dual $(\mathbb{P}^2)^*$ pelo ponto

$$[a : b : c] = [x_0^2 : y_0^2 : z_0^2].$$

Logo, a **curva dual** C^* é a imagem do mapa

$$[x : y : z] \mapsto [x^2 : y^2 : z^2].$$

Eliminando os parâmetros x, y, z , obtemos implicitamente a equação de C^* :

$$a^{2/3} + b^{2/3} + c^{2/3} = 0.$$

Essa curva C^* tem **grau** $d(d-1) = 3 \times 2 = 6$, mas **não é suave**, pois apresenta pontos onde as derivadas parciais se anulam simultaneamente. Esses pontos singulares correspondem, geometricamente, às retas tangentes nos pontos de inflexão da cúbica original C .

Por outro lado, se a curva projetiva $C = \mathcal{V}(F)$ for singular, então o mapa dual \mathcal{D} não está definido nas singularidades de C (pois o gradiente de F em P é um vetor nulo). Se $F(x, y, z)$ for irredutível, então as singularidades de $F(x, y, z)$ são isoladas (são finitas) e o dual da curva $C = \mathcal{V}(F)$ fica definida como o fecho no plano projetivo dual da imagem dos pontos não singulares de C (embora para cada singularidade não esteja bem definida explicitamente a reta tangente). Este conjunto também determina uma curva no plano projetivo dual cujo grau será calculado em termos do grau de F e das singulares de C (Fórmulas de Plücker).

Exemplo 2.1.7. Considere $F(x, y, z) = x^3 - y^2z$ e $C = \mathcal{V}(F)$. Notemos que C tem apenas um ponto singular, a saber $Q = [0 : 0 : 1] \in C$. Além disso, o mapa dual para $P = [x_0 : y_0 : z_0] \in C - \{Q\}$ é dado por

$$\mathcal{D}(P) = [3x_0^2 : -2y_0z_0 : -y_0^2].$$

Analogamente aos casos anteriores, $[a_0 : b_0 : c_0] \in C^*$ se, e somente se, $[a_0 : b_0 : c_0] = [3x_0^2 : -2y_0z_0 : -y_0^2]$ para algum $[x_0 : y_0 : z_0] \in C$. Desta forma, concluímos que existe $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ tal que

$$\lambda a_0 = 3x_0^2, \quad \lambda b_0 = -2y_0z_0 \quad \text{e} \quad \lambda c_0 = -y_0^2.$$

2. Limite de curvas duais planas

Sabendo que $[x_0 : y_0 : z_0] \in C$, temos a relação

$$x_0^3 - y_0^2 z_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_0^2 z_0 = x_0^3.$$

Além disso, pelas igualdades anteriores,

$$\lambda a_0 = 3x_0^2, \quad \lambda b_0 = -2y_0 z_0, \quad \lambda c_0 = -y_0^2.$$

De $\lambda a_0 = 3x_0^2$ obtemos $x_0^2 = \frac{\lambda a_0}{3}$, e de $\lambda c_0 = -y_0^2$ obtemos $y_0^2 = -\lambda c_0$. Substituindo na equação da curva, segue que

$$(-\lambda c_0) z_0 = \left(\frac{\lambda a_0}{3} \right)^{3/2}.$$

Por outro lado, da relação $\lambda b_0 = -2y_0 z_0$ temos

$$y_0 z_0 = -\frac{\lambda b_0}{2}.$$

Elevando ao quadrado, resulta em

$$y_0^2 z_0^2 = \frac{\lambda^2 b_0^2}{4}.$$

Sabemos também que $y_0^2 z_0 = x_0^3$; multiplicando ambos os lados por z_0 , obtemos

$$x_0^3 z_0 = y_0^2 z_0^2.$$

Substituindo as expressões de x_0, y_0 e z_0 nas variáveis de a_0, b_0, c_0 , resulta em

$$\left(\frac{\lambda a_0}{3} \right)^3 z_0 = (-\lambda c_0) \left(\frac{\lambda^2 b_0^2}{4} \right),$$

que simplifica para

$$\frac{\lambda^3 a_0^3}{27} z_0 = -\frac{\lambda^3 b_0^2 c_0}{4}.$$

Cancelando λ^3 e isolando z_0 , obtemos

$$z_0 = -\frac{27 b_0^2 c_0}{4 a_0^3}.$$

Eliminando z_0 e obtendo a relação entre a_0, b_0, c_0 .

2. Limite de curvas duais planas

Usando novamente $\lambda b_0 = -2y_0 z_0$ e $y_0^2 = -\lambda c_0$, temos

$$(\lambda b_0)^2 = 4y_0^2 z_0^2 = 4(-\lambda c_0)z_0^2,$$

ou seja,

$$\lambda b_0^2 = -4c_0 z_0^2.$$

Substituindo a expressão de z_0 encontrada acima,

$$\lambda b_0^2 = -4c_0 \left(\frac{27b_0^2 c_0}{4a_0^3} \right)^2 = -\frac{729b_0^4 c_0^3}{4a_0^6}.$$

Eliminando λ e simplificando a relação (até equivalência projetiva), obtemos:

$$4a_0^3 + 27b_0^2 c_0 = 0.$$

Assim, a curva dual é dada por

$$C^* = V(4a^3 + 27b^2c),$$

que é uma cúbica não suave.

Notemos que o grau de C^* é $3(3 - 1) - 3 \cdot 1 = 3$.

Para determinarmos a dual de qualquer curva plana projetiva, considere a seguinte definição ("Plane Algebraic Curves" [\[BK\]](#)).

Definição 2.1.8. Sejam C uma curva projetiva plana e L uma reta projetiva. Dizemos que L é tangente a C em P se $I(P, C \cap P) > m_P(F)$. O conjunto C^* , chamado de dual da curva C , é o conjunto de todos os pontos do plano projetivo dual que representam as retas tangentes a C .

A seguir, vamos descrever uma maneira bastante intuitiva de determinar o dual de uma curva projetiva plana por meio do estudo de um *discriminante*.

Consideremos $C = \mathcal{V}(F) \subset \mathbb{P}^2$ uma curva definida por um polinômio homogêneo $F(x, y, z)$ de grau d . Toda reta projetiva pode ser escrita como

$$L = \mathcal{V}(ax + by + cz) \text{ com } [a : b : c] \in \mathbb{P}^2.$$

Localmente (por exemplo, no aberto $z = 1$ em \mathbb{P}^2) quando restringimos a curva C a essa reta L , obtemos um polinômio em uma variável, que representa os pontos de interseção $C \cap L$ naquela vizinhança. O discriminante desse polinômio, denotado por $\Delta(F|_L)$, nos diz quando a reta toca a curva de forma especial: ele se anula exatamente

nos casos em que a reta encontra a curva em um ponto com multiplicidade maior que um. Em outras palavras, quando a reta é *tangente* à curva.

Isso nos leva a uma descrição elegante da curva dual:

$$C^* = \{L = [a : b : c] \in (\mathbb{P}^2)^* \mid \Delta(F|_L) = 0\}.$$

Ou seja, a curva dual é justamente o lugar geométrico, no plano projetivo dual, formado pelas retas tangentes à curva original. O discriminante entra como a ferramenta algébrica que traduz essa condição de tangência em uma equação.

Essa interpretação pode ser encontrada em referências clássicas, como no livro *Plane Algebraic Curves*, de Gerd Fischer (Capítulo 5, “The Dual Curve and the Plücker Formulas”).

A seguir veremos três exemplos que ilustram, de maneira concreta, como se obtém a curva dual a partir da definição pelo discriminante.

Exemplo 2.1.9. Considere a curva

$$C = \mathcal{V}(F), \quad F(x, y) = y^2 - xz.$$

Uma reta no plano afim ($z = 1$) pode ser escrita como

$$L : ax + by + c = 0.$$

Se $a \neq 0$, escrevemos $x = -\frac{by+c}{a}$ e substituímos em F :

$$F|_L(y) = y^2 - \left(-\frac{by+c}{a}\right) = y^2 + \frac{b}{a}y + \frac{c}{a}.$$

Trata-se de um polinômio quadrático em y . Seu discriminante é

$$\Delta(F|_L) = \left(\frac{b}{a}\right)^2 - 4 \cdot \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{a^2}.$$

A condição de tangência é justamente $\Delta(F|_L) = 0$, ou seja,

$$b^2 - 4ac = 0.$$

Portanto, a dual da parábola é a curva no plano dual dada por

$$C^* = \{[a : b : c] \in (\mathbb{P}^2)^* \mid b^2 - 4ac = 0\}.$$

Exemplo 2.1.10. Agora consideremos a curva projetiva

$$C = \mathcal{V}(F), \quad F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2.$$

No afim $z = 1$, temos $x^2 + y^2 = 1$. Se tomamos a reta

$$L : ax + by + c = 0,$$

então, para $b \neq 0$, podemos escrever $y = -\frac{ax+c}{b}$. Substituindo na equação da circunferência:

$$\begin{aligned} x^2 + \left(\frac{ax+c}{b}\right)^2 = 1 &\implies x^2 + \frac{a^2x^2 + 2acx + c^2}{b^2} = 1 \\ &\implies (a^2 + b^2)x^2 + 2acx + (c^2 - b^2) = 0 \end{aligned}$$

O discriminante deste polinômio quadrático em x é

$$\Delta(F|_L) = (2ac)^2 - 4(a^2 + b^2)(c^2 - b^2) \implies \Delta(F|_L) = 4b^2(a^2 + c^2 - b^2)$$

Portanto, a tangência ocorre quando

$$a^2 + c^2 - b^2 = 0.$$

Assim, o dual da curva C é

$$C^* = \{[a : b : c] \in (\mathbb{P}^2)^* \mid a^2 + c^2 - b^2 = 0\}.$$

Exemplo 2.1.11. Consideremos agora a cúbica

$$C = \mathcal{V}(F), \quad F(x, y, z) = x^3 - y^2z.$$

e uma reta geral

$$L : ax + by + cz = 0.$$

Se $c = 0$, então a reta L passa pelo ponto $[0 : 0 : 1]$ (único ponto singular de C) e, portanto, L é tangente a C (ao calcularmos $F|_L$ encontramos um polinômio com raiz dupla). Desta forma, temos que todas as retas da forma $L : ax + by = 0$ com $[a : b] \in \mathbb{P}^1$ são tangentes a C . Segue que

$$\{[a : b : 0] \in (\mathbb{P}^2)^* \mid [a : b] \in \mathbb{P}^1\} \subset C^*.$$

O conjunto acima é chamado de *pencil de retas* que passa pelo ponto $[0 : 0 : 1]$. Por

2. Limite de curvas duais planas

outro lado, considerando $c \neq 0$, então no aberto afim ($z = 1$), temos que a curva é dada por $x^3 - y^2 = 0$ e a reta L é dada por

$$L : a'x + b'y + 1 = 0, \quad \text{onde } a' = a/c \text{ e } b' = b/c.$$

Se $b' \neq 0$, então

$$y = -\frac{a'x + 1}{b'}$$

e substituindo em F , obtemos

$$\begin{aligned} F|_L(x) &= x^3 - \left(-\frac{ax + c}{b}\right)^2 = x^3 - \left(\frac{a^2x^2 + 2axc + c^2}{b^2}\right) \implies \\ &\implies F|_L(x) = x^3 - \frac{a^2}{b^2}x^2 - \frac{2ac}{b^2}x - \frac{c^2}{b^2} \end{aligned}$$

Portanto, o discriminante de $F|_L$ é

$$\begin{aligned} \Delta(F|_L) &= \left(-\frac{a^2}{b^2}\right)^2 \left(-\frac{2ac}{b^2}\right)^2 - 4 \left(-\frac{2ac}{b^2}\right)^3 - 4 \left(-\frac{a^2}{b^2}\right)^3 \left(-\frac{c^2}{b^2}\right) \\ &\quad - 27 \left(-\frac{c^2}{b^2}\right)^2 + 18 \left(-\frac{a^2}{b^2}\right) \left(-\frac{2ac}{b^2}\right) \left(-\frac{c^2}{b^2}\right) \implies \\ &\implies \Delta(F|_L) = -4\frac{a^3c^3}{b^6} - 27\frac{c^4}{b^4} \implies \Delta(F|_L) = -\frac{c^3}{b^4} \left(\frac{4a^3}{b^2} + 27c\right) \end{aligned}$$

de modo que

$$\Delta(F|_L) = 0 \iff -\frac{c^3}{b^4} \left(\frac{4a^3}{b^2} + 27c\right) = 0 \iff \frac{4a^3}{b^2} + 27c = 0 \iff 4a^3 + 27b^2c = 0.$$

Portanto, a curva dual da cúbica é

$$C^* = \{[a : b : c] \in (\mathbb{P}^2)^* \mid 4a^3 + 27b^2c = 0\} \cup \{[a : b : c] \in (\mathbb{P}^2)^* \mid c = 0\},$$

ou seja,

$$C^* = \{[a : b : c] \in (\mathbb{P}^2)^* \mid c(4a^3 + 27b^2c) = 0\}$$

Notemos que a variável c é uma componente linear da equação que determina C^* associada ao ponto singular $[0 : 0 : 1]$.

Estes exemplos ilustram como o *discriminante* traduz a condição de tangência no plano projetivo dual.

2.2 Limite de curvas duais planas

Iremos abordar nesta seção o limite de curvas duais planas, assunto fundamental para a boa compreensão do Teorema final. Seja A uma \mathbb{C} -álgebra e domínio de integridade.

Definição 2.2.1. Uma *família de polinômios de grau n com coeficientes em A* é uma expressão da forma

$$F_t(x) = \sum_{i \geq 0} F_i(x)t^i = \sum a_{ij}t^i x^j$$

com $F_i \in A[x]$, $\deg(F_0) = n$, $\deg(F_i) \leq n$ para $i > 0$.

Com esta definição, podemos falar sobre as curvas planas projetivas $\{C_t\}_{t \in T}$ ^[1], onde cada curva lisa $C_t \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}(t)}^2$ definida como o conjunto dos zeros de F_t admite uma curva dual C_t^* , formada pelo conjunto de suas tangentes. À medida que o parâmetro t varia, obtemos também uma família de curvas duais.

Definição 2.2.2. Considere a notação anterior. O *limite de curvas duais* é o fecho no plano projetivo dual, do conjunto de todas as curvas C_t^* quando t tende a 0. Em outras palavras, é o objeto geométrico que descreve o comportamento das tangentes no processo de degeneração da família de curvas.

Esse conceito é importante porque, em geral, o dual do limite não coincide com o limite dos duais, ou seja, em geral

$$\lim_{t \rightarrow 0} C_t^* \neq (C_0)^*.$$

Isso nos diz que, quando a curva C_0 obtiver singularidades, o conjunto de suas tangentes pode se comportar de maneira mais complexa, adicionando componentes na curva dual como no último exemplo da seção anterior.

Assim, o estudo dos limites duais é uma forma de entendermos como degenerações da curva original influenciam a geometria do seu dual.

Abordaremos agora dois exemplos que demonstram na prática, como devemos proceder para encontrarmos a dual de uma curva que possui singularidades.

Exemplo 2.2.3. Considere a curva no plano projetivo definida por $F = (x - y)(x - z)$. Assim,

$$C = \mathcal{V}(F) = \mathcal{V}(x - y) \cup \mathcal{V}(x - z).$$

¹O parâmetro t varia em $T \simeq \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1$, de modo que cada C_t é uma curva definida sobre $\mathbb{C}(t)$, formando assim uma família algébrica de curvas projetivas.

2. Limite de curvas duais planas

Essa curva é a união de duas retas, e sua interseção é o ponto $\{[1 : 1 : 1]\}$. Logo, $[1 : 1 : 1]$ é (o único) ponto singular da curva C . Considere $L : ax + by + cz = 0$ uma reta que passa por $[1 : 1 : 1]$. Como antes, teremos que no aberto afim ($z = 1$) o discriminante

$$\Delta(F|_L) = 0$$

e, portanto,

$$\{[a : b : c] \in (\mathbb{P}^2)^* \mid a + b + c = 0\} \subset C^*.$$

Por outro lado, seja $L : ax + by + cz$ uma reta que não passa pelo ponto $[1 : 1 : 1]$. Logo, temos que $a + b + c \neq 0$. Agora, considerando a restrição $F|_L$ no aberto afim ($z = 1$) e supondo $b \neq 0$, temos que

$$F|_L = (x + a'x + c')(x - 1), \quad \text{onde } a' = -a/b \text{ e } c' = -c/b.$$

O discriminante de $F|_L$ é

$$\Delta(F|_L) = (-c' + a' - 1)^2 - 4(1 - a')(c').$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} \Delta(F|_L) = 0 &\iff \frac{c^2}{b^2} - \frac{ac}{b^2} - \frac{c}{b} - \frac{ac}{b^2} + \frac{a^2}{b^2} + \frac{a}{b} - \frac{c}{b} + \frac{a}{b} + 1 + \frac{4c}{b} + \frac{4ac}{b^2} = 0 \\ &\iff \frac{c^2}{b^2} + \frac{a^2}{b^2} + \frac{2ac}{b^2} + \frac{2c}{b} + \frac{2a}{b} + 1 = 0 \\ &\iff a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = 0 \\ &\iff (a + b + c)^2 = 0 \end{aligned}$$

o que é absurdo (visto que $a + b + c \neq 0$). Logo,

$$C^* = \{[a : b : c] \in (\mathbb{P}^2)^* \mid a + b + c = 0\}.$$

Queremos entender o que acontece com o limite dos duais de C_t uma família (plana) de curvas projetivas tais que para t "genérico" a curva C_t é suave e C_0 a "fibra especial" daquela família coincide com C .

Caso 01: Consideremos primeiro a família de curvas suaves C_t , dada por:

$$F_t(x, y, z) = x^2 - xy - xz + yz + tz^2 \in \mathbb{C}[[t]][x, y, z].$$

2. Limite de curvas duais planas

Para $t = 0$, temos que

$$F_0 = x^2 - xy - xz + yz = (x - y)(x - z)$$

determina a curva C . Primeiro, notemos que para $t \neq 0$, temos que a curva $C_t \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}(t)}^2$ dada como conjunto de F_t é não singular. Pois não existe um ponto $P = [a : b : c] \in C_t$ tal que $(F_t)_x(P) = (F_t)_y(P) = (F_t)_z(P) = 0$, onde

$$(F_t)_x = 2x - y - z, \quad (F_t)_y = -x + z, \quad (F_t)_z = y - x + 2tz.$$

Agora, vamos analisar o dual de C_t para t genérico ($t \neq 0$) e depois tomar o limite quando $t \rightarrow 0$. Considerando novamente a seção afim $z = 1$, temos que C_t será

$$\mathcal{V}(x^2 - xy - x + y + t).$$

Considere a reta $L : ax + by + c = 0$. Se $b \neq 0$, então escrevendo $y = -a'x - c'$ com $a' = a/b$ e $c' = c/b$ e substituindo em F_t , temos que

$$\begin{aligned} F_t|_L &= x^2 - x(-a'x - c') - x + (-a'x - c') + t \\ &= (1 + a')x^2 + (-1 - a' + c')x + (-c' + t). \end{aligned}$$

Calculando o discriminante:

$$\begin{aligned} \Delta(F_t|_L) &= (-a' + c' - 1)^2 - 4(a' + 1)(-c' + t) \\ &= (a' + c' + 1)^2 - 4t(a' + 1) \end{aligned}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} \Delta(F_t|_L) = 0 &\iff (-a' + c' + 1)^2 - 4t(a' + 1) = 0 \\ &\iff (a + c + b)^2 - 4tb(a + b) = 0 \end{aligned}$$

Se a reta L passa por $[1 : 1 : 1]$, então $a + b + c = 0$ e, neste caso, temos que

$$\Delta(F_t|_L) = 0 \iff 4tb(a + b) = 0$$

Neste caso, temos a seguinte inclusão

$$\{[a : b : c] \in (\mathbb{P}^2)^* \mid b(a + b) = 0\} \subset \lim_{t \rightarrow 0} C_t^*.$$

Caso contrário, temos que $a + b + c \neq 0$ e vale que

$$\{[a : b : c] \in (\mathbb{P}^2)^* \mid a + b + c = 0\} \subset \lim_{t \rightarrow 0} C_t^*.$$

Desta forma, temos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} C_t^* = C_0^* \cup \{[a : b : c] \in (\mathbb{P}^2)^* \mid b(a + b) = 0\}.$$

Caso 02: Consideremos agora C_t uma outra família de curvas dada por

$$F_t(x, y, z) = x^2 - xy - xz + yz + ty^2 \in \mathbb{C}[[t]][x, y, z].$$

Como antes, $t = 0$ determina a curva C . Usando um raciocínio análogo ao anterior, concluímos que:

- (a) C_t é suave para qualquer $t \neq 0$;
- (b) No aberto afim $z = 1$, temos que

$$\Delta(F_t|_L) = 0 \iff (a + c + b)^2 - 4tc(a + c) = 0,$$

onde $L : ax + by + c = 0$ e $b \neq 0$;

- (c) O limite desta família de curvas é

$$\lim_{t \rightarrow 0} C_t^* = C_0^* \cup \{[a : b : c] \in (\mathbb{P}^2)^* \mid c(a + c) = 0\}.$$

Observação 8. Considere F_t uma família de polinômios, tal que n é o grau de F_t em x e $F_t \in \mathbb{C}[[t]][x]$, ou seja, F_t é um polinômio em x cujos coeficientes são séries formais em t . Deseja-se dar sentido ao termo "limite do discriminante quando $t \rightarrow 0$ ", ou seja, o que acontece com as raízes de F_t quando os coeficientes variam com t e t se aproxima de zero. O discriminante $\Delta(F_t) = \Delta_{\mathbb{C}[[t]]}(F_t) \in \mathbb{C}[[t]]$ define o fecho dos pontos onde o polinômio F tem raízes múltiplas (ou seja, onde o discriminante se anula). Além disso, temos que $\mathcal{V}(\Delta(F_t)) \subset \text{Spec}(\mathbb{C}[[t]])$ é plano sobre o $\text{Spec}(\mathbb{C}[[t]])$ se, e somente se $\Delta(F_t)$ não for divisível por t (veja Proposição 9.2, pg. 254 em [Ha]). Escreva $\Delta(F_t) = t^\alpha \Delta'$, onde $\Delta' \in \mathbb{C}[[t]]$ não é divisível por t . Assim, temos que $\mathcal{V}(\Delta') \subset \text{Spec}(\mathbb{C}[[t]])$ é plano sobre $\text{Spec}(\mathbb{C}[[t]])$, que concorda com $\mathcal{V}(\Delta(F_t))$ sobre o ponto genérico ($t \neq 0$) de $\text{Spec}(\mathbb{C}[[t]])$. A fibra especial de $\mathcal{V}(\Delta')$ é claramente determinada por $\Delta'(0)$ o coeficiente líder de Δ' .

Definição 2.2.4. O limite de F_t quando $t \rightarrow 0$, denotado por F_0 , é o **coeficiente**

líder da minha família de polinômios.

Com essa notação, temos $\Delta(F_t)_0 = \Delta'(0)$. É esse elemento de \mathbb{C} que é de interesse principal neste capítulo.

Agora, suponha que $x^2 \mid F_0$, enquanto $x^2 \nmid F_t$. Generalizamos a construção da expansão de Puiseux de F_t permitindo coeficientes em \mathbb{C} . Vamos abordar o conceito visto sobre polígono de Newton, nesta seção, da seguinte forma: considere o polígono de Newton P de F_t , ou seja, o fecho convexo do conjunto

$$\bigcup_{a_{ij} \neq 0} ((i, j) + \mathbb{R}_{\geq 0}^2).$$

Seja d o maior inteiro tal que $x^d \mid F_0$. Denote a inclinação da aresta de P passando em $(0, d)$ por $-1/m$ (inclinação esta, dada pela aresta do polígono de Newton). Trunque F_t incluindo apenas os termos de F_t cujos pontos de rede correspondentes estão nessa aresta para obter

$$\overline{F}_t = \sum_j a_{m(d-j),j} t^{m(d-j)} x^j.$$

Note que \overline{F}_t é quase homogêneo de peso md se atribuirmos peso 1 para t e peso m para x . Finalmente, defina

$$P_{\overline{F}_t}(s) = \sum_j a_{m(d-j),j} s^j.$$

Onde, s_0, s_1, \dots, s_d serão as raízes de $P_{\overline{F}_t}$. Logo, o resultado são expansões formais de Puiseux, da forma

$$x = \alpha_i t^m + \dots \quad (1 \leq i \leq d)$$

as quais serão vistas como uma solução em série de polinômios de F_t para x .

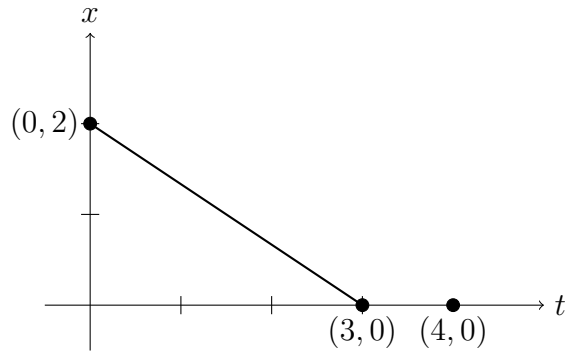
Vamos construir um exemplo simples, utilizando o método exposto no Capítulo 1 e este abordado acima,

Exemplo 2.2.5. Considere o seguinte polinômio

$$F(t, x) = x^2 - t^3 - t^4.$$

Analisando cada monômio, temos que os pontos a serem marcados no plano cartesiano são: $(0, 2)$; $(3, 0)$ e $(4, 0)$. Traçando o polígono de Newton, temos:

2. Limite de curvas duais planas



Calculando a inclinação da aresta líder

$$\frac{-1}{\mu_0} = \frac{-2}{3} \Rightarrow \mu_0 = \frac{3}{2} = \frac{p_0}{q_0}$$

Daí, consideramos o \bar{F} , como:

$$\bar{F}(t, x) = x^2 - t^3$$

e, portanto,

$$P_{\bar{F}}(s) = s^2 - 1$$

cujas raízes são ± 1 . Assim, a primeira aproximação da raiz deste polinômio é dada por:

$$x = t^{\frac{3}{2}} \quad \text{ou} \quad x = -t^{\frac{3}{2}}$$

Vamos considerar a primeira substituição, para continuarmos o processo do polígono de Newton. Notemos que

$$t_1 = t^{q_0} \implies t = t_1^{p_0}, \quad \text{e} \quad x = t_1^{p_0}(s_0 + x_1) \implies x = t_1^{p_0}(1 + x_1).$$

Portanto,

$$t = t_1^2 \quad \text{e} \quad x = t_1^3(1 + x_1).$$

Substituindo em F , concluímos que

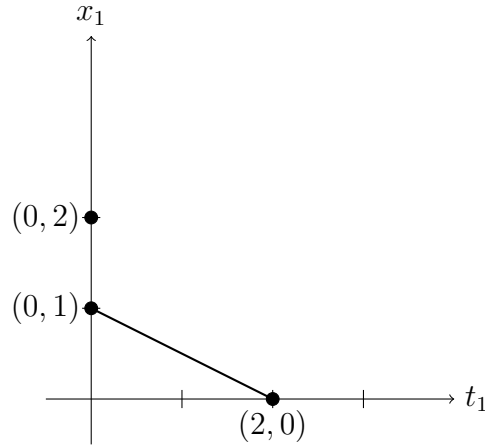
$$\begin{aligned} F(t_1^2, t_1^3(1 + x_1)) &= (t_1^3(1 + x_1))^2 - (t_1^2)^3 - (t_1^2)^4 \\ &= t_1^6 + 2t_1^6x_1 + x_1^2t_1^6 - t_1^6 - t_1^8 \\ &= t_1^6(2x_1 + x_1^2 - t_1^2). \end{aligned}$$

Logo, por definição, temos que:

$$F_1(t_1, x_1) = x_1^2 + 2x_1 - t_1^2.$$

2. Limite de curvas duais planas

Traçando novamente o polígono de Newton, temos que



Calculando a inclinação da aresta líder:

$$\frac{-1}{\mu_1} = \frac{-1}{2} \Rightarrow \mu_1 = \frac{2}{1} = \frac{p_1}{q_1}.$$

Além disso, temos que

$$\overline{F}_1(t_1, x_1) = 2x_1 - t_1^2$$

onde

$$P_{\overline{F}_1}(s) = 2s - 1$$

cuja única raiz é $s = 1/2$. Dando continuidade, temos que

$$t_2 = t_1^{1/q_1} \Rightarrow t_1 = t_2^{q_1}, \quad \text{e} \quad t_1 = t_2^{p_1} \left(\frac{1}{2} + x_2 \right).$$

Para $q_1 = 1$ e $p_1 = 2$, temos:

$$t_1 = t_2, \quad x_1 = t_2^2 \left(\frac{1}{2} + x_2 \right).$$

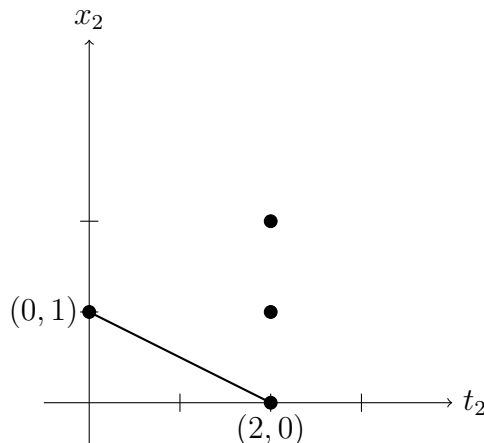
Substituindo em F_1 , obtemos

$$\begin{aligned} F_1 \left(t_2, t_2^2 \left(\frac{1}{2} + x_2 \right) \right) &= \left(\frac{t_2^2}{2} + t_2^2 x_2 \right)^2 + 2 \left(\frac{t_2^2}{2} + t_2^2 x_2 \right) - t_2^2 \\ &= \frac{t_2^4}{4} + t_2^4 x_2 + t_2^4 x_2^2 + 2t_2^2 x_2 + t_2^2 - t_2^2 \\ &= t_2^2 \left(\frac{t_2^2}{4} + t_2^2 x_2 + t_2^2 x_2^2 + 2x_2 \right). \end{aligned}$$

Daí,

$$F_2(t_2, x_2) = t_2^2 + 4t_2^2 x_2^2 + 4t_2^2 x_2 + 8x_2$$

Traçando o polígono de Newton



Calculando a inclinação da aresta líder:

$$\frac{-1}{\mu_2} = \frac{-1}{2} \Rightarrow \mu_2 = \frac{2}{1} = \frac{p_2}{q_2}.$$

Assim,

$$\overline{F}_2(t_2, x_2) = 4(t_2^2 + 2x_2)$$

e, portanto,

$$P_{\overline{F}_2}(s) = 4 + 8s$$

cuja única raiz é $s_2 = -1/2$. Seguindo o raciocínio, concluímos que uma das raízes é da seguinte forma

$$\begin{aligned} X &= t^{\mu_0} \left(s_0 + t_1^{\mu_1} (s_1 + t_2^{\mu_2} (s_2 + \dots)) \right) \\ &= s_0 t^{\mu_0} + s_1 t^{\mu_0 + \mu_1/q_0} + s_2 t^{\mu_0 + \mu_1/q_0 + \mu_2/q_0 q_1} + \dots \\ x &= t^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} t^{\frac{3}{2} + \frac{2}{2}} - \frac{1}{2} t^{\frac{3}{2} + \frac{2}{2} + \frac{2}{2 \cdot 1}} + \dots = t^{\frac{3}{2}} + \frac{t^{\frac{5}{2}}}{2} - \frac{t^{\frac{7}{2}}}{2} + \dots \end{aligned}$$

Iremos agora introduzir os conceitos de x -regularidade de um polinômio.

Definição 2.2.6. Dizemos que F é x -regular se $\Delta(P_{\overline{F}}) \neq 0$, ou seja, se as raízes s_i (encontradas no primeiro truncamento) são todas distintas.

Observação 2.2.7. É possível que algum dos coeficientes s_i seja nulo, isto é, $s_i = 0$ para certo índice i . Nessa situação, a expansão correspondente não começa exatamente com um termo de ordem t^n , mas com um termo de ordem mais alta, digamos t^{n+k} , para algum $k > 0$. Em outras palavras, embora o expoente n indique o menor valor esperado na expansão, o coeficiente do termo t^n pode se anular, fazendo com que o primeiro termo não nulo ocorra em ordem superior. Assim, a expansão efetiva de uma das ramificações pode iniciar em uma potência mais alta de t do que aquela prevista inicialmente.

Proposição 2.2.8. Suponha que F é x -regular, $F_0 = x^d f(x)$, $x \nmid f$ e $\Delta(f) \neq 0$. Então

$$\Delta(F)_0 = \Delta(P_F)\Delta(f)f(0)^2.$$

Demonstração 2. Escreva

$$f(x) = a \prod_{i=1}^n (x - a_i), \quad a_i \neq 0.$$

Seja α_i como acima, os “ramos” de F são:

$$x = r_i = \alpha_i t^m + \dots \quad (1 \leq i \leq d)$$

$$x = r_{i+d} = a_i + \dots \quad (d+1 \leq i \leq n)$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} \Delta(F) &= a^{2n-2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (r_i - r_j)^2 \\ &= a^{2n-2} \prod_{1 \leq i < j \leq d} (r_i - r_j)^2 \prod_{d+1 \leq i < j \leq n} (r_i - r_j)^2 \prod_{1 \leq i \leq d; d+1 \leq j \leq n} (r_i - r_j)^2 \\ &= a^{2n-2} \prod_{1 \leq i < j \leq d} (\alpha_i t^m + \dots - (\alpha_j t^m + \dots))^2 \prod_{d+1 \leq i < j \leq n} (a_i + \dots - (a_j + \dots))^2 \\ &\quad \cdot \prod_{\substack{1 \leq i \leq d \\ d+1 \leq j \leq n}} (\alpha_i t^m + \dots - (a_j + \dots))^2 \end{aligned} \quad (*)$$

Notemos que

$$\prod_{1 \leq i \leq d} (\alpha_i t^m + \dots - (a_j + \dots))^2 = \prod_{1 \leq i \leq d} (-a_j + \alpha_i t^m + \dots)^2$$

e, portanto, o termo dominante é $-a_j$, pois $a_j \neq 0$. Daí,

$$\prod_{1 \leq i \leq d} (-a_j + \alpha_i t^m + \dots)^2 = (a_j^d + \dots)^2$$

Isto garante que

$$\prod_{\substack{1 \leq i \leq d \\ d+1 \leq j \leq n}} (\alpha_i t^m + \dots - (a_j + \dots))^2 = \prod_{1 \leq j \leq n-d} (a_j^d + \dots)^2$$

2. Limite de curvas duais planas

Retomando os cálculos,

$$\Delta(F) = a^{2n-2} \prod_{1 \leq i < j \leq d} [(\alpha_i - \alpha_j)^2 t^{2m} + \dots] \prod_{1 \leq i < j \leq n-d} [(a_i - a_j)^2 + \dots] \\ \cdot \prod_{1 \leq j \leq n-d} (a_j^d + \dots)^2$$

Vamos analisar os produtórios na última equação, para que possamos chegar a igualdade final. Como

$$F_0 = x^d f(x) = ax^d \prod_{i=1}^{n-d} (x - a_i) = a \prod_{i=1}^{n-d} (-a_i) \cdot x^d + \text{t.m.g.}$$

segue que

$$P_{\bar{F}}(x) = -a \prod_{i=1}^{n-d} (-a_i) \prod_{i=1}^d (x - \alpha_i)$$

uma vez que $a \prod_{i=1}^{n-d} (-a_i)$ é o coeficiente principal de $P_{\bar{F}}(x)$ que é construído para ter exatamente as raízes α_i , que são os coeficientes dominantes dos ramos não constantes $r_i = \alpha_i t^m + \dots$. Com isso, obtemos a seguinte igualdade

$$\Delta(P_{\bar{F}}(x)) = \left[a \prod_{i=1}^{n-d} (-a_i) \right]^{2d-2} \prod_{1 \leq i < j \leq d} (\alpha_i - \alpha_j)^2,$$

ou seja,

$$\prod_{1 \leq i < j \leq d} (\alpha_i - \alpha_j)^2 = \frac{\Delta(P_F)}{\left[-a \prod_{i=1}^{n-d} (-a_i) \right]^{2d-2}} \quad (1)$$

Além disso, temos que

$$\Delta(f) = a^{2(n-d)-2} \prod_{d+1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j)^2$$

e, portanto,

$$\prod_{d+1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j)^2 = \frac{\Delta(f)}{a^{2(n-d)-2}} \quad (2)$$

Mais ainda,

$$\prod_{1 \leq i < j \leq d} t^{2m} = t^{2m \cdot \frac{d(d-1)}{2}} = t^{md(d-1)} \quad (3)$$

Substituindo, (1), (2) e (3) em (*), ficamos com a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
\Delta(F) &= a^{2n-2} \cdot \frac{\Delta(P_{\bar{F}})}{\left[a \prod_{i=1}^{n-d} (-a_i) \right]^{2d-2}} \cdot \frac{\Delta(f)}{a^{2(n-d)-2}} \cdot \prod_{1 \leq i \leq n-d} a_i^{2d} \cdot t^{\text{md}(d-1)} + \dots \\
&= \frac{a^{2n-2}}{a^{2d-2} \cdot a^{2n-2d-2}} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{n-d} a_i^{2d}}{\prod_{i=1}^{n-d} a_i^{2d-2}} \cdot \Delta(P_{\bar{F}}) \cdot \Delta(f) \cdot t^{\text{md}(d-1)} + \dots \\
&= a^2 \cdot \prod_{i=1}^{n-d} a_i^2 \cdot \Delta(P_{\bar{F}}) \cdot \Delta(f) \cdot t^{\text{md}(d-1)} + \dots \\
&= f(0)^2 \cdot \Delta(P_{\bar{F}}) \cdot \Delta(f) \cdot t^{\text{md}(d-1)} + \dots,
\end{aligned}$$

como afirmado. □

De maneira geral, suponha $F_0 = \prod f_k(x)^{d_k}$, com os f_k irredutíveis e distintos, ou seja, estamos considerando que F_0 é um polinômio fatorado em potências de polinômios irredutíveis $f_k(x)$, cada um elevado a uma certa multiplicidade d_k . Fixe um índice k e escreva $F_i = f_k^{d_{ki}}(x)g_{ki}(x)$, com $f_k \nmid g_{ki}$. Forme o polígono de Newton a partir do conjunto $\{(i, d_{ki}) \mid g_{ki} \neq 0\}$. Trunque F para obter $\bar{F}' = \sum g_{ki} f_k^{d_{ki}} t^i$, ou seja, significa reter apenas os termos correspondentes à aresta principal do polígono de Newton (aquela com inclinação mais baixa). Assim, \bar{F}' é uma versão simplificada de F , com apenas os termos mais "dominantes" (os que estão sobre a aresta principal). Define-se um polinômio auxiliar $P_{\bar{F}'}(s)$, dado por:

$$P_{\bar{F}'}(s) = \sum g_{ki}(x) \cdot s^{d_{ki}},$$

onde cada $g_{ki}(x)$ é o coeficiente que resta ao fatorarmos a maior potência possível de $f_k(x)$ em F_i , ou seja,

$$F_i = f_k^{d_{ki}}(x) \cdot g_{ki}(x), \quad \text{com } f_k \nmid g_{ki}.$$

Esse polinômio $P_{\bar{F}'}(s)$ codifica os expoentes d_{ki} (relacionados à multiplicidade de f_k) como potências de uma variável auxiliar s , e os coeficientes $g_{ki}(x)$ permanecem os mesmos.

O objetivo é separar a contribuição de f_k do restante do polinômio, permitindo uma análise mais direta das raízes associadas à aresta principal do polígono de Newton.

Definição 2.2.9. O discriminante formal de F com respeito a f_k é definido por

$$\Delta_{f_k}(F)(x) = \Delta_{A[x]}(P_{\bar{F}'}(s)).$$

Definição 2.2.10. Dizemos que F é f_k -regular se $f_k \nmid \Delta_{f_k}(F)$.

Isto generaliza a noção anterior de x -regularidade.

Definição 2.2.11. Dizemos que F é regular se for f_k -regular para todo k .

Observemos um exemplo prático envolvendo as definições acima.

Exemplo 2.2.12. Considere o polinômio em duas variáveis

$$F(x, t) = F_0(x) + F_1(x)t + F_2(x)t^2 \in \mathbb{C}[[t]][x]$$

com coeficientes dados por

$$F_0(x) = x^2(1 + x), \quad F_1(x) = x(2 + x) \quad \text{e} \quad F_2(x) = (3 + x).$$

Fixemos o fator irredutível $f_k(x) = x$. Para cada coeficiente F_i , escrevemos

$$F_i(x) = f_k(x)^{d_{ki}} g_{ki}(x), \quad \text{com } f_k \nmid g_{ki}.$$

Assim obtemos:

$$d_{k0} = 2, \quad g_{k0}(x) = 1 + x; \quad d_{k1} = 1, \quad g_{k1}(x) = 2 + x; \quad d_{k2} = 0, \quad g_{k2}(x) = 3 + x.$$

Os pontos do polígono de Newton associados são

$$(0, 2), \quad (1, 1), \quad (2, 0).$$

Estes pontos estão alinhados em uma reta de inclinação -1 , portanto, em concordância com os exemplos vistos acima, temos que $\mu_0 = 1$, de modo que a *aresta líder* do polígono é o segmento de $(0, 2)$ a $(2, 0)$, contendo todos os pontos.

O truncamento \bar{F}' de F sobre a aresta líder é

$$\bar{F}'(x, t) = g_{k0}(x)f_k(x)^2 + g_{k1}(x)f_k(x)t + g_{k2}(x)t^2,$$

isto é,

$$\bar{F}'(x, t) = (1 + x)x^2 + (2 + x)xt + (3 + x)t^2.$$

Definimos então o polinômio

$$P_{\bar{F}'}(s) = \sum_i g_{ki}(x) s^{d_{ki}} = (1 + x)s^2 + (2 + x)s + (3 + x).$$

Desta forma,

$$\Delta(P_{\tilde{F}'}(s)) = -3x^2 - 12x - 8 \in \mathbb{C}[x].$$

Como $x \nmid \Delta(P_{\tilde{F}'}(s))$, segue que F é x -regular.

Em seguida iremos demonstrar um resultado técnico que é fundamental para o desenvolvimento das etapas seguintes desta dissertação. O próximo lema fornece uma expressão explícita para o discriminante do termo inicial F_0 , no caso em que este se decompõe em fatores lineares elevados a potências, sob a suposição de regularidade

Lema 2.2.13. Suponha que $F_0 = \prod (x - a_k)^{d_k}$, e que F seja regular. Então

$$\Delta(F)_0 = \prod_k \Delta_{(x-a_k)}(F)(a_k) \prod_{k \neq k'} (a_k - a_{k'})^{2(d_k + d_{k'} - d_k d_{k'})}.$$

Demonstração. Fixe k e substitua $x = y + a_k$. Dessa forma, F pode ser visto como $F = F_k(t, y)$ (note a mudança temporária de notação para F_k aqui). Isso leva a um polinômio quasi-homogêneo $\bar{F}_k(y)$, e $P_{\bar{F}_k}(S)$ como antes. Seja $\alpha_{k1}, \dots, \alpha_{kd_k}$ as raízes de $P_{\bar{F}_k}$. A hipótese de regularidade implica que os α_{kl} são distintos. As raízes de F são

$$x = r_{kl} = a_k + \alpha_{kl} t^{m_k} + \dots.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \Delta(F) &= \prod_{(k,l) \neq (k',l')} (r_{kl} - r_{k'l'})^2 \\ &= \prod_k \prod_{l \neq l'} (r_{kl} - r_{k'l'})^2 \cdot \prod_{k \neq k'} \prod_{l,l'} (r_{kl} - r_{k'l'})^2 \\ &= \prod_k \prod_{l \neq l'} \left(a_k + \alpha_{kl} t^{m_k} - (a_k + \alpha_{k'l'} t^{m_{k'}} + \dots) + \dots \right)^2 \cdot \prod_{k \neq k'} \prod_{l,l'} (r_{kl} - r_{k'l'})^2. \end{aligned}$$

Vamos analisar a segunda parte da igualdade. Notemos que

$$\begin{aligned} \prod_{k \neq k'} \prod_{l,l'} (r_{kl} - r_{k'l'})^2 &= \prod_{k \neq k'} \prod_{l,l'} \left((a_k + \alpha_{kl} t^{m_k} + \dots) - (a_{k'} + \alpha_{k'l'} t^{m_{k'}} + \dots) \right)^2 \\ &= \prod_{k \neq k'} \prod_{l,l'} \left((a_k - a_{k'}) + \alpha_{kl} t^{m_k} - \alpha_{k'l'} t^{m_{k'}} + \dots \right)^2 \\ &= \prod_{k \neq k'} \prod_{l,l'} \left((a_k - a_{k'}) + \dots \right)^2. \end{aligned}$$

2. Limite de curvas duais planas

Quando $k \neq k'$, o termo dominante do produtório acima é

$$\prod_{k \neq k'} (a_k - a_{k'})^{2d_k d_{k'}},$$

pois cada raiz com termo constante de a_k (são d_k delas) se combina com cada raiz com termo constante $a_{k'}$ (são $d_{k'}$ delas). Portanto,

$$\prod_{k \neq k'} \prod_{l, l'} (r_{kl} - r_{k'l'})^2 = \prod_{k \neq k'} \left[(a_k - a_{k'})^{2d_k d_{k'}} + \dots \right].$$

Com isso, obtemos:

$$\Delta(F) = \prod_k \prod_{l \neq l'} \left((\alpha_{kl} - \alpha_{k'l'})^2 t^{2m_k} + \dots \right) \prod_{k \neq k'} \left[(a_k - a_{k'})^{2d_k d_{k'}} + \dots \right]$$

Consideremos agora as seguintes relações:

1) Do primeiro produtório da igualdade acima,

$$f_k = (x - a_k)$$

$$F_0 = \prod_k f_k(x)^{d_k} = \prod_k (x - a_k)^{d_k}$$

$$F_i = f_k^{d_{ki}} g_{ki}(x)$$

$$F = \prod_k (x - a_k)^{d_k} + (x - a_k)^{d_{ki}} g_{ki} t + \dots + (x - a_k)^{d_{ki}} g_{ki} t^i + \dots$$

$$\begin{aligned} \Delta_{f_k}(F)(a_k) &= \Delta_{(x-a_k)}(F)(a_k) \\ &= \prod_{k \neq k'} (a_k - a_{k'})^{d_k(2d_k-2)} \prod_{l \neq l'} (\alpha_{kl} - \alpha_{k'l'})^2 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\prod_{l \neq l'} (\alpha_{kl} - \alpha_{k'l'})^2 = \frac{\Delta_{(x-a_k)}(F)(a_k)}{\prod_{k \neq k'} (a_k - a_{k'})^{d_k(2d_k-2)}}$$

Observe ainda, que no denominador do produto acima, para cada k fixo

$$\text{Variando } k_1, \text{ vale que } \prod_{k \neq k_1} (a_k - a_{k_1})^{d_{k_1}(2d_k-2)}$$

$$\text{Variando } k_2, \text{ vale que } \prod_{k \neq k_2} (a_k - a_{k_2})^{d_{k_2}(2d_k-2)}$$

2. Limite de curvas duais planas

Daí, notemos que os expoentes

$$d_{k_1}(2d_{k_2} - 2) \quad \text{e} \quad d_{k_2}(2d_{k_1} - 2)$$

podem ser diferentes. Portanto, devemos considerar para o par (k_1, k_2) , o expoente total como sendo a contribuição de a_{k_1} sobre a_{k_2} mais a contribuição de a_{k_2} sobre a_{k_1} .

Assim,

$$\prod_{k \neq k'} \prod_{k'} (a_k - a_{k'})^{d_{k'}(2d_k - 2)} = \prod_{k \neq k'} (a_k - a_{k'})^{d_k(2d_{k'} - 2) + d_{k'}(2d_k - 2)}$$

Ajustando os índices:

$$(2d_k d_{k'} - 2d_k + 2d_k d_{k'} - 2d_{k'}) = 4d_k d_{k'} - 2d_k - 2d_{k'}.$$

2) Além disso, podemos reescrever o produtório abaixo, como sendo:

$$\prod_k \prod_{l \neq k} t^{2m_k} = t^{\sum_k 2m_k d_k (d_k - 1)}$$

Deste modo, obtemos a seguinte igualdade

$$\begin{aligned} \Delta(F) &= \prod_k \left(\frac{\Delta_{(x-a_k)}(F)(a_k)}{\prod_{k' \neq k} (a_k - a_{k'})^{d_{k'}(2d_k - 2)}} \right) \prod_{k' \neq k} (a_k - a_{k'})^{2d_k d_{k'}} t^{\sum_k 2m_k d_k (d_k - 1)} + \dots \\ &= \prod_k \Delta_{(x-a_k)}(F)(a_k) \frac{\prod_{k' \neq k} (a_k - a_{k'})^{2d_k d_{k'}}}{\prod_{k' \neq k} (a_k - a_{k'})^{4d_k d_{k'} - 2d_k - 2d_{k'}}} t^{\sum_k 2m_k d_k (d_k - 1)} + \dots \\ &= \prod_k \Delta_{(x-a_k)}(F)(a_k) \prod_{k' \neq k} (a_k - a_{k'})^{2(d_k + d_{k'} - d_k d_{k'})} \cdot t^{\sum_k 2m_k d_k (d_k - 1)} + \dots \end{aligned}$$

Portanto,

$$\Delta(F)_0 = \prod_k \Delta_{(x-a_k)}(F)(a_k) \prod_{k' \neq k} (a_k - a_{k'})^{2(d_k + d_{k'} - d_k d_{k'})},$$

como gostaríamos. □

Capítulo 3

Resultado principal e aplicações

Este capítulo tem como objetivo principal, apresentar e demonstrar o teorema principal desta dissertação, além disso, expor alguns exemplos e observações complementares sobre os temas vistos aqui, fomentando o conhecimento teórico com a prática.

3.1 Resultado principal

Considere $F = F_0 + F_1t + \dots \in \mathbb{C}[[t]][x, y, z]_n$ uma família de curvas planas de grau n (isto é, cada $F_i \in \mathbb{C}[x, y, z]$ é um polinômio homogêneo de grau n) com $F_0 \neq 0$. Suponhamos que

$$F_0 = \prod_i F_{0,i}^{n_i},$$

onde $F_{0,i}$ são fatores irredutíveis e distintos. Fixe uma componente $F_{0,k}$. Escreva $F_i = F_{0,k}^{j_k} G_i$ onde $F_{0,k} \nmid G_i$. Se necessário, escolha um sistema de coordenadas tal que

(i) $F_0(1, 0, 0) \neq 0$;

(ii) A reta $z = 0$ não é tangente a curva $C_0 := \mathcal{V}(F_0)$.

Defina $C_i := \mathcal{V}(F_{0,i})$ para todo i e, a partir daqui, não faremos distinção entre C_i e $F_{0,i}$. Se o grau de C_k é d_k , então C_k tem uma equação como $x^{d_k} +$ outros termos, por hipótese. No aberto afim ($z = 1$), podemos ver F como uma família de polinômios de grau n com coeficientes em $A = \mathbb{C}[y]$. Desta forma, temos o discriminante formal $\Delta_{C_k}(F)(x) \in A[x] = \mathbb{C}[x, y]$ e a noção de C_k -regularidade e, portanto, de regularidade.

Notação 1. Seja $C = \mathcal{V}(F)$, onde F é irredutível. Vimos que se C for singular, então C^* é redutível pois contém todas as componentes lineares correspondendo aos pontos singulares de C com alguma multiplicidade (veja Exemplo 2.1.10). Se C e $D = \mathcal{V}(G)$ são duas curvas tais que F e G não têm componentes em comum, considere $(C \cdot D)^*$ a

união de todos os *pencil*'s de retas que passam pelos pontos de $C \cap D$, cada um contado com a mesma multiplicidade que o correspondente ponto tem no ciclo

$$C \cdot D = \sum_P I(P, C \cap D)P.$$

O seguinte lema será necessário para a demonstração do Teorema.

Lema 3.1.1. F é $(x - a_{k\ell})$ -regular se, e somente se, F é C_k -regular. Mais ainda, vale que

$$\Delta_{(x-a_{k\ell})}(F) = \prod_{l' \neq \ell} (a_{kl} - a_{kl'})^{d_k(d_k-1)} \Delta_{C_k}(F).$$

Demonstração. Por definição, temos que

$$F_0 = \prod_k C_k^{n_k}, \quad \deg(C_k) = d_k, \quad C_k \text{ é irredutível.}$$

e

$$F = \sum_{i \geq 0} F_i t^i, \quad F_i = C_k^{d_{ki}} G_{ki}, \quad \text{mdc}(C_k, G_{ki}) = 1.$$

De cada F_i , escreve-se o par (i, d_{ki}) com $G_{ki} \neq 0$, formando as arestas do polígono de Newton. Assim,

$$P_{\bar{F}', C_k}(s) = \sum_i G_{ki} s^{d_k},$$

e por definição,

$$\Delta(P_{\bar{F}', C_k}(s)) = \Delta_{C_k}(F)(x).$$

Como C_k é irredutível, temos

$$C_k = (x - a_{k\ell})^{d_{ki}} \cdot \prod_{l' \neq \ell} (x - a_{kl'})^{d_{ki}},$$

de modo que

$$F_i = C_k^{d_{ki}} G_{ki} \iff x - a_{k\ell} \nmid G_{ki}.$$

Assim,

$$F_i = (x - a_{k\ell})^{d_{ki}} \cdot \prod_{l' \neq \ell} (x - a_{kl'})^{d_{ki}} G_{ki}.$$

Por outro lado, observe que

$$\bar{F}'_{C_k} \neq \bar{F}'_{(x-a_{k\ell})}.$$

visto que

$$F = C_k^{n_k} \prod_{k' \neq k} C_{k'}^{n_{k'}} + \sum_{i > 0} C_k^{d_{ki}} G_{ki} t^i$$

e

$$F = (x - a_{k\ell})^{n_k} \prod_{l' \neq \ell} (x - a_{kl'})^{n_k} \prod_{k' \neq k} C_{k'}^{n_{k'}} + \sum_{i>0} (x - a_{k\ell})^{d_{ki}} \prod_{l' \neq \ell} (x - a_{kl'})^{d_{ki}} G_{ki} t^i.$$

Desta forma,

$$P_{\bar{F}'_{C_k}}(S) = S^{n_k} \prod_{k' \neq k} C_{k'}^{n_{k'}} + \dots \neq P_{F'(x-a_{k\ell})}(S) = S^{n_k} \prod_{l' \neq \ell} (x - a_{kl'})^{n_k} \prod_{k' \neq k} C_{k'}^{n_{k'}} + \dots$$

Seus discriminantes

$$\Delta(P_{\bar{F}'_{C_k}}(S)) = \Delta_{C_k}(F) \quad \text{e} \quad \Delta(P_{\bar{F}'_{(x-a_{k\ell})}}(S)) = \Delta_{(x-a_{k\ell})}(F).$$

também diferem pelo fator

$$\prod_{l' \neq \ell} (a_{k\ell} - a_{kl'})^{d_k(d_k-1)}.$$

De fato, ao comparar os discriminantes relativos a C_k e a $(x - a_{k\ell})$, estamos refinando a fatoração em raízes lineares. Recordemos que, para um polinômio de raízes $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, vale

$$\Delta(F) = a_n^{2n-2} \prod_{i<j} (\alpha_i - \alpha_j)^2.$$

Assim, quando trocamos a regularidade em C_k pela regularidade em $(x - a_{k\ell})$, cada diferença $(a_{k\ell} - a_{kl'})$ aparece repetidamente: uma vez para cada par de raízes de C_k em que $a_{k\ell}$ participa. Como C_k tem grau d_k , o número de tais pares é exatamente $d_k(d_k - 1)$. Assim, concluímos que

$$\Delta_{(x-a_{k\ell})}(F) = \prod_{l' \neq \ell} (a_{k\ell} - a_{kl'})^{d_k(d_k-1)} \cdot \Delta_{C_k}(F),$$

como afirmado. □

Teorema 3.1.2. Considere a notação acima e suponha que F seja regular. Então

$$\lim_{t \rightarrow 0} F^* = \sum_k n_k C_k^* + \sum_k (\Delta_{C_k}(F) \cdot C_k)^* + 2 \sum_{k,l} (n_k + n_l - n_k n_l) (C_k \cdot C_l)^*.$$

Demonstração. Temos $F = \sum F_i(x, y, z) t^i$ e seja C_k a componente redutível de F_0 . Escreva

$$C_k = \prod_{l=1}^{d_k} (x - a_{kl}).$$

Pelo Lema 2.2.13, temos que

$$\begin{aligned} \Delta(F)_0 &= \prod_{k,l} \Delta_{(x-a_{kl})}(F)(a_{kl}) \prod_k \prod_{l \neq l'} (a_{kl} - a_{kl'})^{2(2d_k - d_k^2)} \\ &\quad \cdot \prod_{k \neq k', l, l'} (a_{kl} - a_{k'l'})^{2(d_k + d_{k'} - d_k d_{k'})} \end{aligned}$$

Pelo Lema 3.1.1, temos que

$$\Delta_{(x-a_{kl})}(F)(a_{kl}) = \prod_{l' \neq l} (a_{kl} - a_{kl'})^{d_k(d_k-1)} \Delta_{C_k}(F)(a_{kl}).$$

Para k fixo e variando l_1 e l_2 , segue que

$$\Delta_{(x-a_{kl_1})}(F)(a_{kl_1}) = \prod_{l \neq l_1} (a_{kl_1} - a_{kl})^{d_k(d_k-1)} \Delta_{C_k}(F)(a_{kl_1}),$$

e

$$\Delta_{(x-a_{kl_2})}(F)(a_{kl_2}) = \prod_{l \neq l_2} (a_{kl_2} - a_{kl})^{d_k(d_k-1)} \Delta_{C_k}(F)(a_{kl_2}).$$

Multiplicando os dois discriminantes acima, obtemos:

$$\begin{aligned} \Delta_{(x-a_{kl_1})}(F)(a_{kl_1}) \cdot \Delta_{(x-a_{kl_2})}(F)(a_{kl_2}) &= \Delta_{C_k}(F)(a_{kl_1}) \Delta_{C_k}(F)(a_{kl_2}) \\ &\quad \cdot \prod_{l \neq l_1} (a_{kl_1} - a_{kl})^{d_k(d_k-1)} \prod_{l \neq l_2} (a_{kl_2} - a_{kl})^{d_k(d_k-1)} \end{aligned}$$

No segundo membro da última igualdade existem dois produtórios. Separando $l = l_2$ no primeiro e $l = l_1$ no segundo, temos que

$$\begin{aligned} \prod_{l \neq l_1} (a_{kl_1} - a_{kl})^{d_k(d_k-1)} \prod_{l \neq l_2} (a_{kl_2} - a_{kl})^{d_k(d_k-1)} &= (a_{kl_1} - a_{kl_2})^{2d_k(d_k-1)} \\ &\quad \cdot \prod_{l \neq l_1, l_2} (a_{kl_1} - a_{kl})^{d_k(d_k-1)} \\ &\quad \cdot \prod_{l \neq l_1, l_2} (a_{kl_2} - a_{kl})^{d_k(d_k-1)}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\prod_l \Delta_{(x-a_{kl})}(F)(a_{kl}) = \prod_{k, l \neq l'} (a_{kl} - a_{kl'})^{2d_k(d_k-1)} \prod_l \Delta_{C_k}(F)(a_{kl})$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 \Delta(F)_0 &= \prod_{k,l} \Delta_{C_k}(F)(a_{kl}) \prod_{k,l \neq l'} (a_{kl} - a_{kl'})^{2d_k(d_k-1)} \prod_{k,l \neq l'} (a_{kl} - a_{kl'})^{2(2d_k-d_k^2)} \\
 &\quad \cdot \prod_{k \neq k',l,l'} (a_{kl} - a_{k'l'})^{2(d_k+d_{k'}-d_k d_{k'})} \\
 &= \prod_{k,l} \Delta_{C_k}(F)(a_{kl}) \prod_{k,l \neq l'} (a_{kl} - a_{kl'})^{2d_k} \prod_{k \neq k',l,l'} (a_{kl} - a_{k'l'})^{2(d_k+d_{k'}-d_k d_{k'})} \\
 &= \prod_{k,l} \Delta_{C_k}(F)(a_{kl}) \prod_{k,l \neq l'} \Delta(C_k)^{d_k} \prod_{k \neq k',l,l'} \text{Res}(C_k, C_{k'})^{2(d_k+d_{k'}-d_k d_{k'})} \quad (**).
 \end{aligned}$$

Resta interpretarmos este resultado. Seja $L^* \subset (\mathbb{P}^2)^*$ o pencil de retas que passa pelo ponto $P = [1 : 0 : 0] \in \mathbb{P}^2$. Ou seja,

$$L : ax + by + cz = 0 \quad \text{e} \quad P \in L \quad \implies \quad a = 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 L^* &= \{[a : b : c] \in (\mathbb{P}^2)^* \mid a = 0\} \\
 &= \{[0 : b : c] \in (\mathbb{P}^2)^*; [b : c] \in \mathbb{P}^1\}.
 \end{aligned}$$

No aberto afim $b \neq 0$ em $(\mathbb{P}^2)^*$ veja y como coordenada afim em L^* , com $y = y_0$ correspondendo à reta

$$l_{y_0} : y = y_0 z \in L^*.$$

A equação $\Delta(F) = 0$ fornece os valores de y_0 de y para os quais a reta l_{y_0} é tangente a $F(t)$. Uma vez que,

$$\Delta(F) = \Delta_{A[[t]]}(F) \in A[[t]].$$

Portanto, $\Delta(F)_0$ determina $L \cap (\lim_{t \rightarrow 0} F^*)$.

A equação $\Delta_{C_k}(F)(a_{kl}) = 0$ fornece as coordenadas y da interseção de $\Delta_{C_k}(F) = 0$ com o ramo $x = a_{kl}$ de C_k . Pois,

$$\prod_l \Delta_{C_k}(F)(a_{kl}) = \text{Res}(\Delta_{C_k}(F), C_k), \quad \text{para } k \text{ fixo.}$$

já que $C_k = \prod_l (x - a_{kl})$ e pela Proposição 1.2.8 segue que

$$\text{Res}(G, C_k) = \prod_l G(a_{kl}).$$

Logo,

$$\prod_l \Delta_{C_k}(F)(a_{kl}) = 0$$

fornece as coordenadas y da interseção do $\Delta_{C_k}(F)$ com C_k . Podendo ser identificado por

$$L \cap (\Delta_{C_k}(F) \cdot C_k)^*.$$

De maneira análoga, temos que $\Delta(C_k) = 0$ é a equação de $L \cap C_k^*$, e $\text{Res}(C_k, C_{k'}) = 0$ é a equação de $L \cap (C_k \cdot C_{k'})^*$.

Portanto, a equação (***) determina a igualdade afirmada no Teorema intersectado por L^* . Como $L^* \subset (\mathbb{P}^2)^*$ é uma reta geral por escolha de coordenadas, e os lados da igualdade no Teorema possuem o mesmo grau, por um cálculo direto, então o resultado desejado segue. \square

3.2 Aplicações

Nesta seção calcularemos explicitamente alguns limites do dual de curvas planas de algumas famílias regulares e, ao final, também mostramos como usar este método para calcular esse limite quando a família de curvas planas não é regular.

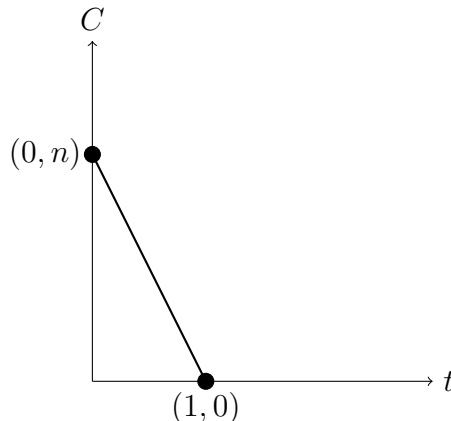
Exemplo 3.2.1 ([K1], [VG]). Considere $F_t = C^n + tD + \dots \in \mathbb{C}[[t]][x, y]$, onde C é irreduzível e suave, e D não contém C como componente. Então

$$\lim_{t \rightarrow 0} (C^n + tD + \dots)^* = nC^* + (n-1)(C \cdot D)^*.$$

De fato, como

$$F_t = C^n + tD + \dots,$$

traçando o polígono de Newton, obtemos:



Truncado F na aresta líder, obtemos

$$\bar{F} = C^n + D$$

e, conseqüentemente,

$$P_{\bar{F}}(s) = s^n + D =: f(s),$$

Assim,

$$f(s) = s^n + D \quad \text{e} \quad f'(s) = ns^{n-1}.$$

Vamos analisar os casos:

Para $n = 2$:

$$f = s^2 + D, \quad f' = 2s.$$

A resultante de $f(s)$ e $f'(s)$ é dada por

$$\text{Res}(f, f') = \begin{vmatrix} 1 & 0 & D \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4D.$$

Portanto,

$$(\Delta_C(F) \cdot C) = (-4D \cdot C) = (D \cdot C).$$

Para $n = 3$:

$$f(s) = s^3 + D, \quad f'(s) = 3s^2,$$

e a resultante é

$$\text{Res}(f, f') = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & D & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & D \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 27D^2.$$

Logo,

$$(\Delta_C(F) \cdot C) = (27D^2 \cdot C) = 2(D \cdot C).$$

Caso geral n :

$$f(s) = s^n + D, \quad f'(s) = ns^{n-1}.$$

Por indução, obtemos a resultante

$$\text{Res}(f, f') = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & D & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & D & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & D \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = n^n D^{n-1}.$$

Logo,

$$(\Delta_C(F) \cdot C) = (n^n D^{n-1} \cdot C) = (D^{n-1} \cdot C) = (n-1)(D \cdot C).$$

Pelo Teorema 3.1.1, temos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} (F)^* = nC^* + (n-1)(C \cdot D)^*.$$

Exemplo 3.2.2. A seguir, apresentamos as famílias de cúbicas planas que aparecem em [\[A1\]](#) e calculamos os seus respectivos limites.

a) Considere $F_t = x^3 + tH + \cdots$, onde $x \nmid H$. Assim,

$$\lim_{t \rightarrow 0} (F)^* = 3x^* + 2(H \cdot x)^*.$$

De fato,

$$F_t(x, y) = x^3 + tH + \cdots, \quad \text{com } x \nmid H$$

A fibra especial desta família ($t = 0$) é:

$$F_0 = x^3 \quad \Rightarrow \quad C_k : x = 0 \quad \text{e} \quad n_k = 3$$

Vamos calcular o discriminante:

$$\Delta_{C_k}(F) = \Delta(P_{\bar{F}_t})$$

Utilizando o polígono de Newton, temos que:

$$\bar{F} = x^3 + tH.$$

3. Resultado principal e aplicações

Daí,

$$P_{\bar{F}}(s) = s^3 + H$$

e, portanto,

$$\Delta(P_{\bar{F}}(s)) = -27H^2.$$

Logo, como só temos uma componente C_k em F_0 , concluímos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} (F)^* = 3x^* + (-27H^2 \cdot x)^* = 3x^* + 2(H \cdot x)^*.$$

b) Considere $F = x^3 + txH + \dots$, onde $x \nmid H$. Assim,

$$\lim_{t \rightarrow 0} (F)^* = 3x^* + 3(H \cdot x)^*.$$

Utilizando o método do polígono de Newton, obtemos:

$$\bar{F} = x^3 + txH \quad \Rightarrow \quad P_{\bar{F}}(s) = s^3 + Hs = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta(P_{\bar{F}}) = 4H^3$$

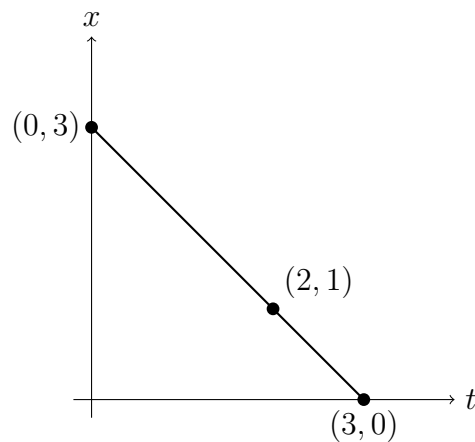
Portanto,

$$\lim_{t \rightarrow 0} (F)^* = 3x^* + (4H^3 \cdot x)^* = 3x^* + 3(H \cdot x)^*.$$

c) Considere $F = x^3 + t^2xH + t^3G + \dots$ e $\Delta := 4H^3 + 27G^2$. Se $x \nmid \Delta$, então

$$\lim_{t \rightarrow 0} (F)^* = 3x^* + (\Delta \cdot x)^*.$$

Traçando o gráfico



temos,

$$F = x^3 + t^2xH + t^3G + \dots \quad \Rightarrow \quad \bar{F} = x^3 + t^2xH + t^3G.$$

Assim,

$$P_{\bar{F}}(s) = s^3 + Hs + G \quad \text{e} \quad \Delta(P_{\bar{F}}) = -4H^3 - 27G^2 = -\Delta.$$

Logo,

$$\lim_{t \rightarrow 0} (F)^* = 3x^* + (\Delta \cdot x)^*.$$

d) Considere $F = x^2y + tH + \dots$, onde $x \nmid H$. Então

$$\lim_{t \rightarrow 0} (F)^* = 2x^* + y^* + (H \cdot x)^* + 3(x \cdot y)^*.$$

Notemos que as componentes de $F_0 = x^2y$ e seus respectivos expoentes são:

$$C_1 : x = 0, n_1 = 2 \quad \text{e} \quad C_2 : y = 0, n_2 = 1.$$

Primeiro, observe que como o expoente da componente C_2 é 1, então $\Delta_{C_2}(F) = 1$.

Agora, vamos calcular $\Delta_{C_1}(F)$. Usando o polígono de Newton, obtemos

$$\bar{F} = x^2y + tH \Rightarrow P_{\bar{F}}(s) = s^2y + H \Rightarrow \Delta_{C_1}(F) = 4yH.$$

Logo, segue do Teorema 3.1.1

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} (F)^* &= 2x^* + y^* + (\Delta_{C_1}(F) \cdot x)^* + (\Delta_{C_2}(F) \cdot y)^* + 2(2 + 1 - 2)(x \cdot y)^* \\ &= 2x^* + y^* + (-4yH \cdot x)^* + 2(x \cdot y)^* \\ &= 2x^* + y^* + (yH \cdot x)^* + 2(x \cdot y)^* \\ &= 2x^* + y^* + (H \cdot x)^* + (x \cdot y)^* + 2(x \cdot y)^* \\ &= 2x^* + y^* + (H \cdot x)^* + 3(x \cdot y)^* \end{aligned}$$

e) Considere $F = x^2y + txH + t^2G + \dots$ e $\Delta = H^2 - 4Gy$. Se $x \nmid \Delta$, então

$$\lim_{t \rightarrow 0} (F)^* = 2x^* + y^* + (\Delta \cdot x)^* + 2(x \cdot y)^*.$$

As componentes de $F_0 = x^2y$ (e seus respectivos expoentes) são:

$$C_1 : x = 0, n_1 = 2 \quad \text{e} \quad C_2 : y = 0, n_2 = 1.$$

Daí,

$$\bar{F} = x^2y + txH + t^2G \Rightarrow P_{\bar{F}}(s) = s^2y + sH + G$$

3. Resultado principal e aplicações

e, portanto,

$$\Delta_{C_1}(F) = G^2 - 4Hy = \Delta.$$

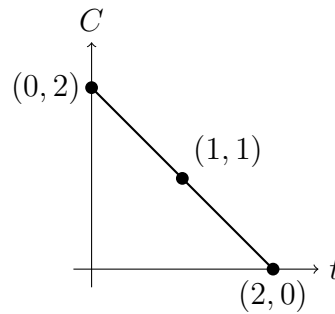
Assim, segue do Teorema

$$\lim_{t \rightarrow 0} (F)^* = 2x^* + y^* + (\Delta \cdot x)^* + 2(x \cdot y)^*.$$

Exemplo 3.2.3. Considere $F = C^2D^3 + tCDG + t^2H + \dots$. Se C e D são suaves e $\text{mdc}(CD, G) = 1$, então

$$\lim_{t \rightarrow 0} (F)^* = 2C^* + 3D^* + ((D^2G^2 - 4HD^3) \cdot C)^* + (C^2(CG)^3 \cdot D)^* - 2(C \cdot D)^*.$$

Traçando o gráfico do polígono de Newton em relação a C , obtemos



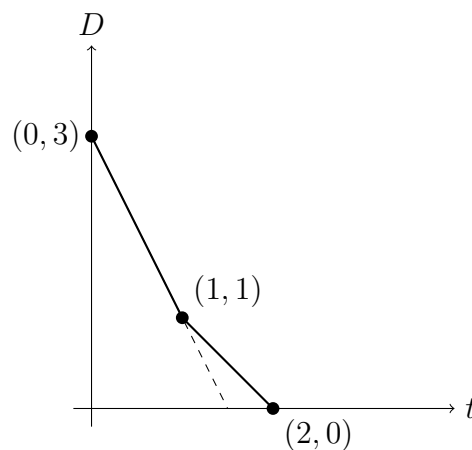
Truncando F nos termos que estão na aresta líder acima, obtemos

$$\bar{F} = C^2D^3 + tCDG + t^2H.$$

Assim,

$$P_{\bar{F}}(s) = s^2D^3 + sDG + H \quad \Rightarrow \quad \Delta(P_{\bar{F}}(s)) = D^2G^2 - 4D^3H = \Delta_C(F).$$

Vamos calcular agora $\Delta_D(F)$. O gráfico do polígono de Newton (em relação a D)



Truncando F nos termos que estão na aresta líder acima, obtemos

$$\bar{F} = C^2 D^3 + tCDG \quad \Rightarrow \quad P_{\bar{F}_t}(s) = C^2 s^3 + CGs$$

verificamos que

$$\Delta(P_{\bar{F}}) = -4C^2(CG)^3 = \Delta_D(F).$$

Desta forma, temos que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} (F)^* &= 2C^* + 3D^* + ((DG)^2 - 4D^3H) \cdot C)^* + (-4C^2(CG)^3 \cdot D)^* \\ &\quad + 2(2 + 3 - 2 \cdot 3)(C \cdot D)^* \\ &= 2C^* + 3D^* + ((DG)^2 - 4D^3H) \cdot C)^* + (C^2(CG)^3 \cdot D)^* - 2(C \cdot D)^*. \end{aligned}$$

Os exemplos a seguir são clássicos e, por essa razão, adotaremos a mesma notação utilizada por Zeuthen em 1873 [Z]. No entanto, os cálculos aqui foram realizados em um enquadramento mais moderno.

Exemplo 3.2.4 (Famílias de Zeuthen de “primeiro tipo”). Considere

$$F = x^2 A_{n-2} + B_n t + \dots,$$

onde os subscritos denotam o grau de uma expressão, $x \nmid A_{n-2}$, $x \nmid B_n$, A_{n-2} é suave (em particular, A_{n-2} é irredutível). Defina $A_{n-2}|_{x=0} = a_{n-2}$ e $B_n|_{x=0} = b_n$. O polígono de Newton possui aresta inferior ligando $(0, 2)$ e $(1, 0)$. Desta forma, $m = \frac{1}{2}$ e $\bar{F} = x^2 a_{n-2} + b_n t$. Logo, $P_{\bar{F}}(s) = s^2 a_{n-2} + b_n$ e, portanto, F é regular, com $\Delta_x(F) = -4a_{n-2}b_n$. Segue que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} (F)^* &= 2x^* + A_{n-2}^* + ((a_{n-2}b_n \cdot x)^* + 2(2 + 1 - 2)(A_{n-2} \cdot x))^* \\ &= 2x^* + A_{n-2}^* + 3(a_{n-2} \cdot x)^* + (b_n \cdot x)^*. \end{aligned}$$

Exemplo 3.2.5 (Famílias de Zeuthen do “segundo tipo”). Considere

$$F = x^2 A_{n-2} + 2B_{n-2}xt + C_n t^2 + O(t^3).$$

Como no caso anterior, as letras minúsculas continuam denotando a restrição para $x = 0$. Suponha também que A_{n-2} suave, $a_{n-2} \neq 0$ e $b_{n-1}^2 - a_{n-2}c_n \neq 0$. Então F é regular, $\Delta_x(F) = b_{n-1}^2 - a_{n-2}c_n$ e, portanto,

$$\lim_{t \rightarrow 0} (F)^* = 2x^* + A_{n-2}^* + ((b_{n-1}^2 - a_{n-2}c_n) \cdot x)^* + 2(a_{n-2} \cdot x)^*.$$

Basta notar que este limite pode ser calculado de maneira semelhante ao caso do Exemplo 3.2.2, item (e).

Observação 9. As técnicas descritas aqui podem ser usadas para encontrar limites de curvas duais de degenerações não regulares. Basta calcular mais termos nas expansões formais de Puiseux, refazendo os cálculos ocorridos nas provas do Lema 3.1.2 e Teorema 3.1.1.

A seguir, exibiremos uma família de curvas planas que não é regular, a família de Zeuthen de "terceiro tipo". Porém, calculamos mais termos das expansões formais de Puiseux e, ao final, conseguimos obter uma fórmula para o limite dos duais para esta família.

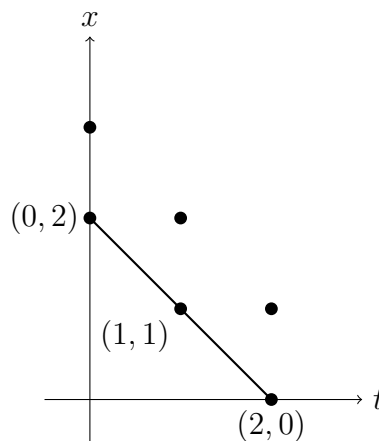
Exemplo 3.2.6 (Famílias de Zeuthen do “terceiro tipo”). Considere

$$F = x^2 a_0 + x^3 a_1 + 2xb_0 t + x^2 b_1 t + c_0 t^2 + x c_1 t^2 + d_1 t^3 + \dots ,$$

onde $b_0^2 - a_0 c_0 = 0$ e $a_0(-a_1 b_0^3 + b_1 b_0^2 a_0 - c_1 b_0 a_0^2 + d_1 a_0^3) \neq 0$ e $a_0 + x a_1$ suave (lembrando que as letras minúsculas continuam denotando a restrição para $x = 0$). As componentes (e seus respectivos expoentes) de $F_0 = x^2(a_0 + x a_1)$ são

$$C_1 : x = 0, n_1 = 2 \quad \text{e} \quad C_2 : a_0 + x a_1 = 0, n_2 = 1.$$

Como $a_0 + x a_1$ é suave, segue que $\Delta_{C_2}(F) = 1$. Agora, traçando o polígono de Newton com relação a $C_1 : x = 0$, obtemos:



Se $-1/\mu_0$ é a inclinação da aresta líder, então

$$-\frac{1}{\mu_0} = -1 \Rightarrow \mu_0 = 1 = \frac{p_0}{q_0}.$$

3. Resultado principal e aplicações

Truncando F sobre a aresta líder, temos que

$$\overline{F} = a_0x^2 + 2b_0xt + c_0t^2 \implies P_{\overline{F}}(s) = a_0s^2 + 2b_0s + c_0$$

e, portanto,

$$\Delta(P_{\overline{F}}(s)) = 4b_0^2 - 4a_0c_0 = 4(b_0^2 - a_0c_0) = 0.$$

Concluimos que F não é x -regular. Além disso, $P_{\overline{F}}(s)$ tem raiz dupla, a saber

$$s_0 = \frac{-2b_0}{2a_0} = -\frac{b_0}{a_0}.$$

Desta forma, precisamos calcular mais termos dos ramos $x = s_0$. Dando continuidade, vamos considerar as seguintes igualdades:

$$t_1 = t^{1/q_0} \implies t_1 = t, \quad x = t_1^{p_0}(s_0 + x_1) \implies x = t_1 \left(-\frac{b_0}{a_0} + x_1 \right).$$

Substituindo em F , obtemos

$$\begin{aligned} F \left(t_1, t_1 \left(-\frac{b_0}{a_0} + x_1 \right) \right) &= a_0 \left(x_1^2 t_1^2 - \frac{2b_0}{a_0} x_1 t_1^2 + \frac{b_0^2}{a_0^2} t_1^2 \right) \\ &\quad + a_1 \left(x_1^3 t_1^3 - \frac{3b_0}{a_0} x_1^2 t_1^3 + \frac{3b_0^2}{a_0^2} x_1 t_1^3 - \frac{b_0^3}{a_0^3} t_1^3 \right) \\ &\quad + 2b_0 t_1 \left(x_1 t_1 - \frac{b_0}{a_0} t_1 \right) + b_1 t_1 \left(x_1^2 t_1^2 - \frac{2b_0}{a_0} x_1 t_1^2 + \frac{b_0^2}{a_0^2} t_1^2 \right) \\ &\quad + c_0 t_1^2 + c_1 t_1^2 \left(x_1 t_1 - \frac{b_0}{a_0} t_1 \right) + d_1 t_1^3 + \dots \end{aligned}$$

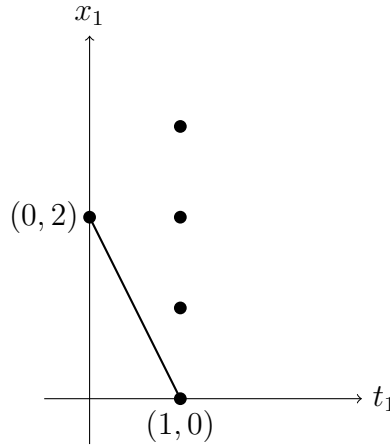
Agrupando os termos:

$$\begin{aligned} F \left(t_1, t_1 \left(-\frac{b_0}{a_0} + x_1 \right) \right) &= t_1^2 \left(a_0 x_1^2 + a_1 t_1 x_1^3 - \frac{3a_1 b_0}{a_0} t_1 x_1^2 + \frac{3a_1 b_0^2}{a_0^2} t_1 x_1 - \frac{a_1 b_0^3}{a_0^3} t_1 - \frac{b_0^2}{a_0} \right. \\ &\quad \left. + b_1 t_1 x_1^2 - \frac{2b_0 b_1}{a_0} t_1 x_1 + \frac{b_1 b_0^2}{a_0^2} t_1 + c_0 + c_1 x_1 t_1 - \frac{b_0 c_1}{a_0} t_1 + d_1 t_1 \right). \end{aligned}$$

Defina agora,

$$\begin{aligned} F_1(t_1, x_1) &= a_0 x_1^2 + a_1 t_1 x_1^3 - \frac{3a_1 b_0}{a_0} t_1 x_1^2 + \frac{3a_1 b_0^2}{a_0^2} t_1 x_1 - \frac{a_1 b_0^3}{a_0^3} t_1 - \frac{b_0^2}{a_0} \\ &\quad + b_1 t_1 x_1^2 - \frac{2b_0 b_1}{a_0} t_1 x_1 + \frac{b_1 b_0^2}{a_0^2} t_1 + c_0 + c_1 x_1 t_1 - \frac{b_0 c_1}{a_0} t_1 + d_1 t_1. \end{aligned}$$

Dando continuidade ao processo, vamos traçar o polígono de Newton para F_1 :



Desta forma, se $-1/\mu_1$ é a inclinação da aresta líder, então

$$-\frac{1}{\mu_1} = -\frac{2}{1} \Rightarrow \mu_1 = \frac{1}{2} = \frac{p_0}{q_0}.$$

O truncamento de F_1 sobre esta aresta líder é

$$\bar{F}_1(t_1, x_1) = a_0 x_1^2 + \left(-\frac{a_1 b_0^3}{a_0^3} + \frac{b_1 b_0^2}{a_0^2} - \frac{b_0 c_1}{a_0} + d_1 \right) t_1$$

e, portanto,

$$P_{\bar{F}_1}(s) = a_0 s^2 - \frac{a_1 b_0^3}{a_0^3} + \frac{b_1 b_0^2}{a_0^2} - \frac{b_0 c_1}{a_0} + d_1 \implies \Delta(P_{\bar{F}_1}) = 4 \left[\frac{a_1 b_0^3}{a_0^3} - \frac{b_1 b_0^2}{a_0^2} + b_0 c_1 - a_0 d_1 \right].$$

Segue que $\Delta(P_{\bar{F}_1}) \neq 0$ (por hipótese) e, portanto, tem duas raízes distintas, a saber

$$s'_1 = -\sqrt{\frac{a_1 b_0^3}{a_0^3} - \frac{b_1 b_0^2}{a_0^2} + \frac{b_0 c_1}{a_0} - \frac{d_1}{a_0}} \quad \text{e} \quad s''_1 = \sqrt{\frac{a_1 b_0^3}{a_0^3} - \frac{b_1 b_0^2}{a_0^2} + \frac{b_0 c_1}{a_0} - \frac{d_1}{a_0}}.$$

Logo, os ramos $x = s_0$ até segunda ordem são

$$x' = -\frac{b_0}{a_0} + s_1 t^{3/2} + \dots, \quad x'' = -\frac{b_0}{a_0} - s_1 t^{3/2} + \dots.$$

Calculando o discriminante de F com relação a x :

$$\begin{aligned} \Delta_x(F)(0) &= (s'_1 - s''_1)^2 = [2\Delta(P_{\bar{F}_1})^{1/2}]^2 \\ &= 4\Delta(P_{\bar{F}_1}). \end{aligned}$$

Desta forma, temos que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} (F)^* &= 2x^* + (a_0 + a_1 x)^* + \left(\left[\frac{a_1 b_0^3}{a_0^3} - \frac{b_1 b_0^2}{a_0^2} + b_0 c_1 - a_0 d_1 \right] \cdot x \right)^* \\ &\quad + 2[(2 + 1 - 2 \cdot 1)(x \cdot (a_0 + a_1 x))^*], \end{aligned}$$

3. Resultado principal e aplicações

ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow 0} F^* = 2x^* + (a_0 + a_1x)^* + [(a_1b_0^3 - b_1b_0^2a_0 + b_0c_1a_0^2 - d_1a_0^3) \cdot x]^*.$$

Referências Bibliográficas

- [A1] ALUFFI, P. (1986). *The characteristic numbers of smooth plane cubics*. In: Algebraic Geometry, Sundance LNM 1311, Springer-Verlag, NY.
- [A2] ALUFFI, P. (s.d.). *Two characteristic numbers for smooth plane curves of any degree*. Preprint, University of Chicago (atual endereço: Oklahoma State University).
- [BK] BRIESKORN, E.; KNÖRRER, H. (1986). *Plane Algebraic Curves*. Birkhäuser Verlag, Basel.
- [C] CAVALHEIRO, R. (2009) *Expansão de Puiseux e normalização de domínios noetherianos semi-locais de dimensão 1*. Dissertação de Mestrado, UFRGS.
- [EH] EISENBUD, D.; HARRIS, J (2000), *The Geometry of Schemes*. Graduate Texts in Mathematics, Springer, **197** p. 294.
- [F] FULTON, W. (1974). Algebraic Curves. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA.
- [FI] FISCHER, G. (2001). Plane algebraic curves. Providence: American Mathematical Society (AMS). Student Mathematical Library, v. 15.
- [Ha] HARTSHORNE, R. (1977). *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, **52** p. 496.
- [K] KATZ, S. (1991). *Discriminants and limits of duals of plane curves*. Contemp. Math. **123**, 99–106.
- [K1] KATZ, S. (1986). *Tangents to a multiple plane curve*. Pacific Journal of Mathematics, **124**, 321–331.
- [Ke] KERR, M. (s.d.). *Lines, conics, and duality*. Capítulo 4 do material “Lecture Notes Algebraic Geometry III/IV”. Disponível em PDF na página do autor.

- [KS] KLEIMAN, S.; SPEISER, R. (s.d.). *Enumerative geometry of nonsingular plane cubics*. Preprint, MIT and BYU.
- [L] LOURÊNÇO, M. de O. (2021). *O algoritmo de Newton-Puiseux para formas Pfaffianas*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais. Orientador: Prof. Dr. Rogério Santos Mol.
- [MT] MATHIAGO. (2024). *Álgebra Comutativa: iniciação aos módulos*. [Vídeo]. YouTube. Disponível em: https://youtube.com/playlist?list=PL2xox8ncv81V_1WKARm2ZJyDGPbxU2G2_&si=iApYoEmo5bxLB2IX. Acesso em: 17 dez. 2024.
- [GM] MENDES, G. T. (2024). *O problema de Steiner e variações do tipo ponto reta cônica*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa. Orientador: Prof. Dr. Wállice Mangueira de Sousa.
- [SS] SOUZA, A. L.; SOUSA, W. M. (2022). *Discriminantes de polinômios com uma variável*. PMO, v.10, n.2. DOI: <https://doi.org/10.21711/2319023x2020/pmo1019>.
- [S] SPEISER, R. (s.d.). *Limits of conormal schemes*. Preprint, BYU.
- [T] TURA, F. C. (2006). *Resultantes, Equações Polinomiais e Teorema de Bezout*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre. Orientador: Prof. Dr. Vilmar Trevisan.
- [Va] VAINSENER, I. (2014) *Introdução às Curvas Algébricas Planas* 1 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 23 cm (Coleção matemática universitária), 151 p.
- [VG] VAN GASTEL, L. (s.d.). *Degenerations of conormal varieties*. Preprint, Utrecht.
- [Z] ZEUTHEN, H. G. (1873). *Almindelige Egenskaber ved Systemer af plane Kurver*. Publ. Royal Academy of Sciences, Copenhagen, Nat. and Math. Sci., **10**, 287–393.