



**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARAÍBA - UFPB
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA MECÂNICA – PPGEM**



**ESTUDO TEÓRICO E EXPERIMENTAL DA PRODUÇÃO DE BIOGÁS E DO
SUBSTRATO BOVINO E HUMANO EM BIODIGESTOR: CARACTERIZAÇÃO DO
ESCOAMENTO EM MODELAGEM CILÍNDRICA.**

IGOR ANTONIO DE OLIVEIRA CARVALHO

JOÃO PESSOA – PB

2025

IGOR ANTONIO DE OLIVEIRA CARVALHO

**ESTUDO TEÓRICO E EXPERIMENTAL DA PRODUÇÃO DE BIOGÁS E DO
SUBSTRATO BOVINO E HUMANO EM BIODIGESTOR: CARACTERIZAÇÃO DO
ESCOAMENTO EM MODELAGEM CILÍNDRICA.**

Tese apresentada ao programa de Pós-Graduação em
Engenharia Mecânica da Universidade Federal da
Paraíba em cumprimento às exigências para a obtenção
do Grau de Doutor

Área de concentração: Termofluidos

Orientador: Prof. Dr. Carlos Antônio Cabral dos Santos

JOÃO PESSOA - PB

2025

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

C331e Carvalho, Igor Antonio de Oliveira.

Estudo teórico e experimental da produção de biogás e do substrato bovino e humano em biodigestor: caracterização do escoamento em modelagem cilíndrica. / Igor Antonio de Oliveira Carvalho. - João Pessoa, 2025. 157 f. : il.

Orientação: Carlos Antônio Cabral Dos Santos.
Tese (Doutorado) - UFPB/CT.

1. Biogás. 2. Biodigestores. 3. Substrato. 4. Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT).
I. Santos, Carlos Antônio Cabral dos. II. Título.

UFPB/BC

CDU 662.767.2(043)

ESTUDO TEÓRICO E EXPERIMENTAL DA PRODUÇÃO DE BIOGÁS E DO SUBSTRATO BOVINO E HUMANO EM BIODIGESTOR: CARACTERIZAÇÃO DO ESCOAMENTO EM MODELAGEM CILÍNDRICA.

por

IGOR ANTONIO DE OLIVEIRA CARVALHO

Tese aprovada em 28 de outubro de 2025

Prof. Dr. Carlos Antônio Cabral dos Santos:
Orientador – UFPB



Documento assinado digitalmente
CARLOS ANTONIO CABRAL DOS SANTOS
Data: 18/11/2025 11:55:07-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Adriano da Silva Marques
Examinador Interno – UFPB



Documento assinado digitalmente
ADRIANO DA SILVA MARQUES
Data: 15/11/2025 08:54:38-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Abel Cavalcante Lima Filho
Examinador Interno – UFPB



Documento assinado digitalmente
ABEL CAVALCANTE LIMA FILHO
Data: 17/11/2025 18:44:45-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Jean Pierre Veronese
Examinador Externo – UFPB



Documento assinado digitalmente
JEAN PIERRE VERONESE
Data: 15/11/2025 13:19:00-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Álvaro Antônio Ochoa Villa
Examinador Externo – IFPE



Documento assinado digitalmente
ALVARO ANTONIO OCHOA VILLA
Data: 14/11/2025 09:07:51-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. José Carlos Charamba Dutra
Examinador Externo – UFPE



Documento assinado digitalmente
JOSE CARLOS CHARAMBA DUTRA
Data: 24/11/2025 20:36:50-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Marinaldo José de Medeiros
Examinador Externo – IFPB



Documento assinado digitalmente
MARINALDO JOSE DE MEDEIROS
Data: 17/11/2025 15:57:38-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Sejam capazes de sonhar. Pois quem sonha, o que faz com isso ? Não se deixa absorver pela noite, mas acende uma chama, uma luz de esperança que anuncia o amanhã. Sonhem, sejam ágeis, e olhem para o futuro com coragem. Não tenham medo.

(Papa Francisco)

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar a Deus, meu guia ininterrupto nessa jornada da vida.

Ao meu orientador, Professor Dr. Carlos Antonio Cabral dos Santos minha sincera gratidão. As conversas e a orientação sábia foram os pilares que sustentaram este projeto para o meu crescimento acadêmico e pessoal. Não foi apenas orientador, foi um pai acadêmico.

Aos membros da banca examinadora, Professor Dr. Jean Pierre Veronese, Professor Dr. Adriano Marques, Professor Dr. Marinado Medeiros, Professor e Dr. Abel Cavalcante, Professor Dr. José Charamba e Professor Dr. Álvaro Ochoa pela disponibilidade em avaliar este trabalho e pelas contribuições que, certamente, enriquecerão a versão final desta tese.

Um Agradecimento especial ao Professor Dr. Marinado Medeiros, suas críticas aguçadas e valiosas sugestões foram fundamentais para aprimorar o rigor científico deste trabalho.

Aos meus colegas de laboratório e de doutorado, em especial a Merques Freitas, Luciano Moreira, Davi Brito, Paulo Franklin e Ana Caroline, pelo companheirismo, pelas trocas de ideias (tantas vezes salvadoras) e pelos momentos de descontração que tornaram a caminhada mais leve e agradável. Foi uma honra compartilhar esta etapa com vocês.

À minha querida mãe, Eliane Rosa, pelo amor incondicional, pelos sacrifícios incontáveis e por ser meu exemplo de resiliência e dedicação.

Ao meu pai, Antonio Mendes, e meus irmãos Matheus e Pedro, sempre torceram pelo meu sucesso.

Aos meus avós, Ademar e Terezinha, in memoriam, sempre tiveram preocupação com seus netos.

Às minhas irmãs, Naína Jessica, Láina Jennifer e Julie Carvalho, pelo amor, apoio constante e por toda a alegria que trazem para a minha vida.

À Adelta Clarice, cujo companheirismo, paciência e compreensão foram meu porto seguro nos dias mais difíceis, e as minhas filhas de quatro patas Nala e Lana, vocês foram fundamentais para eu manter o equilíbrio nesse período.

A todos que, de alguma forma, fizeram parte desta jornada, o meu mais sincero obrigado.

RESUMO

Esta tese investiga experimental e teoricamente a produção de biogás a partir de substratos bovino e humano em biodigestores, e a modelagem do escoamento desses substratos. A metodologia dupla combinou a construção e operação de protótipos em batelada e contínuo com a caracterização reológica dos substratos, quantificação do biogás e análise de sua composição via cromatografia gasosa. Paralelamente, desenvolveu-se um modelo matemático fundamentado nas equações de conservação, solucionado pela Técnica da Transformada Integral Generalizada para caracterizar os perfis de velocidade, temperatura e concentração.

Os resultados demonstraram a nítida superioridade do substrato humano, que gerou 636,2 litros de biogás com 63,9% de metano a partir de 5 kg, superando os 506,9 litros e 51,5% de metano do substrato bovino. A padronização do teor de sólidos totais em 10,85% permitiu uma comparação equitativa e a geração de um conjunto abrangente de números adimensionais a partir de dados experimentais, incluindo Reynolds, Prandtl, Schmidt, Sherwood, Biot e Péclet. Estes parâmetros servem como ferramenta para análise de sistemas reais. A modelagem via GITT, validada com a literatura, identificou gradientes radiais de temperatura e concentração, revelando zonas de baixa conversão que limitam a eficiência global. Criticamente, o estudo estabeleceu parâmetros para dimensionamento e operação em regime de pico, definindo que uma alimentação contínua, após o período de transformação do substrato, permite a operação máxima do biodigestor, com a capacidade mínima do reator.

Conclui-se que o substrato humano é mais eficiente para produção de biogás. A metodologia GITT mostrou-se precisa na caracterização dos fenômenos de transporte no reator. Como principal contribuição, a tese fornece um arcabouço metodológico integrado e um conjunto de parâmetros operacionais e adimensionais críticos que permitem projetar, prever o desempenho e otimizar sistemas de biodigestão, com impactos diretos na geração de energia renovável e na sustentabilidade.

Palavras-chave: Biogás, Biodigestores, GITT, Adimensionais, Substrato humano.

ABSTRACT

This thesis investigates experimentally and theoretically the production of biogas from bovine and human substrates in biodigesters, as well as the modeling of the flow of these substrates. The dual methodology combined the construction and operation of batch and continuous prototypes with the rheological characterization of the substrates, the quantification of biogas, and the analysis of its composition by gas chromatography. In parallel, a mathematical model based on conservation equations was developed and solved using the Generalized Integral Transform Technique to characterize the velocity, temperature, and concentration profiles.

The results revealed the clear superiority of the human substrate, which generated 636.2 liters of biogas with 63.9% methane from 5 kg, surpassing the 506.9 liters and 51.5% methane of the bovine substrate. Standardizing the total solids content at 10.85% allowed for a fair comparison and the generation of a comprehensive set of dimensionless numbers from experimental data, including Reynolds, Prandtl, Schmidt, Sherwood, Biot, and Péclet. These parameters serve as a tool for analyzing real systems. Modeling via GITT, validated with the literature, predicts radial temperature and concentration gradients, revealing low-conversion zones that limit overall efficiency. Crucially, the distributed study for sizing and maximum rate operation defined that a continuous feed, after the substrate transformation period, allows for maximum operation of the biodigester, with the minimum reactor capacity.

It is concluded that human substrate is more efficient for biogas production. The GITT methodology proved to be accurate in characterizing the transport specifications in the reactor. As its main contribution, the thesis provides an integrated methodological framework and a set of critical operational and dimensional parameters that enable the design, performance prediction, and improvement of biodigestion systems, with direct impacts on renewable energy generation and sustainability.

Keywords: Biogas, Biodigesters, GITT, dimensionless, human substrate

LISTA DE FIGURAS

Figura 1-Diagrama de blocos de aquisição dos dados da base da Scopus	7
Figura 2-Evolução dos artigos por ano e acumulado (em barras) a cada cinco anos	7
Figura 3-Fluxograma das etapas do processo de revisão sistemática	9
Figura 4- fluxograma de diferenciação de resíduos.	22
Figura 5-Utilização de resíduos na produção de biogás e uso planta de poligeração	25
Figura 6-Vista bidimensional de um modelo de biodigestor indiano	29
Figura 7- Vista tridimensional de um biodigestor indiano	29
Figura 8- vista em secção de um modelo de biodigestor chinês	30
Figura 9- Modelo de biodigestor chinês instalado	30
Figura 10- Vista em secção de um modelo de biodigestor canadense	31
Figura 11- modelo de biodigestor canadense instalado	31
Figura 12-Desenho tridimensional de um protótipo de biodigestor	32
Figura 13- protótipo instalado	32
Figura 14- Biodigestor módulo único	47
Figura 15- biodigestor contínuo	48
Figura 16- Ensaio de estanqueidade	50
Figura 17- Local selecionado para fixação do protótipo	50
Figura 18- Instalação e conexões de desvio para a fossa.	51
Figura 19- Biodigestor instalado	51
Figura 20- Pesagem do substrato bovino	53
Figura 21- Pesagem do substrato humano.....	54
Figura 22- forno mufla utilizado nas análises	55
Figura 23-cinzas após saída dos sólidos voláteis.....	55
Figura 24- Câmara de ar cheia de biogás com medidor de pressão.....	57
Figura 25- Medição de temperatura com o termômetro infravermelho MT-350	57
Figura 26- Cromatógrafo gasoso - laboratório de engenharia química da UFPB	59
Figura 27- Pontos para interpolação do modelo Herschel-Bulkley	84
Figura 28-Queima acentuada do biogás.....	91
Figura 29- Curva de tendencia produtiva de biogás do ensaio 1	92
Figura 30- Curva de tendencia produtiva de biogás do ensaio 2.....	95
Figura 31- produção diária do ensaio 2.....	96
Figura 32- Curva de tendencia produtiva de biogás do ensaio 3.....	98

Figura 33- Produção diária do ensaio 3.....	99
Figura 34-composição em diferentes tempos de alimentação de 250 g/dia de substrato humano	101
Figura 35- Perfil cromatográfico do biogás produzido por substrato bovino	102
Figura 36-Cromatograma representativo do biogás produzido a partir de substrato humano.	103
Figura 37- Comparação gráfica da velocidade longitudinal média	106
Figura 38- Comparação gráfica da Temperatura longitudinal média	108

LISTA DE TABELA

Tabela 1-Agrupamento dos estudos sistematizados	17
Tabela 2- Comparação do Biogás com Gás Natural e Gás de Síntese.....	26
Tabela 3- materiais utilizados na confecção do biodigestor módulo único	48
Tabela 4- materiais utilizados na confecção do biodigestor módulo único	52
Tabela 5- Valores de referência para o cálculo de volume	56
Tabela 6- Densidade das amostras de dejetos bovinos	80
Tabela 7- Densidade das amostras fezes humanas	80
Tabela 8-Teor de sólidos totais e sólidos voláteis em amostras de bovinas	81
Tabela 9 - Teor de sólidos totais e sólidos voláteis em amostras humanas	82
Tabela 10 – Principais resultados gravimétricos	83
Tabela 11 - Propriedades do digestato com TS = 10,85% obtidas por interpolação	84
Tabela 12 -Resumo de adimensionais e parâmetros de base.....	89
Tabela 13 – Produção do biogás via substrato bovino em biodigestor de módulo único	91
Tabela 14 – Produção adaptada do ensaio 1 em intervalos de 10 dias	92
Tabela 15 – Produção do biogás via substrato humano em biodigestor de módulo único	94
Tabela 16 - Produção adaptada do ensaio 2 em intervalos de 10 dias	95
Tabela 17 - Produção de biogás com substrato humano em biodigestor de módulos em serie	97
Tabela 18 - Produção adaptada do ensaio 3 em intervalos de 10 dias	98
Tabela 19- Composição do biogás produzido por substratos bovinos.....	102
Tabela 20- Composição do biogás produzido por substrato humano	104
Tabela 21- Convergência da velocidade longitudinal no centro do duto.....	105
Tabela 22- convergência da velocidade longitudinal média para dutos circulares	106
Tabela 23 -velocidade no centro e velocidade média ao longo do biodigestor.....	107
Tabela 24 -convergência do perfil de temperatura longitudinal.....	108
Tabela 25- Distribuição de temperatura considerando a medida no centro de 32°C.....	109
Tabela 26- Campo de concentração ao longo do comprimento adimensional do biodigestor	110

LISTA DE SÍMBOLOS E NOMECLATURAS

Símbolo	Descrição
Letras Latinas	
$A(t)$	Coeficiente de expansão em série (função do tempo)
$An(t)$	Coeficiente de expansão para a n-ésima autofunção
B	Operador linear das condições de contorno
Bi	Número de Biot (térmico)
Bim	Número de Biot mássico
C	Concentração (genérica)
c	Escalar, constante
cp	Calor específico a pressão constante
D	Coeficiente de difusão mássica
$Def f$	Coeficiente de difusão mássica efetivo
h	Coeficiente de transferência de calor por convecção
I	Taxa de geração de substância por unidade de volume
j	Vetor de fluxo de substância
K	Coeficiente de consistência (modelo Herschel-Bulkley)
k	Condutividade térmica
kc	Coeficiente de transferência de massa por convecção

Símbolo	Descrição
L	Operador diferencial linear
L^{-1}	Operador inverso da transformada integral
Lc	Comprimento característico
M	Massa
m	Massa
Nk	Norma da autofunção $\psi_k \psi_k$
Nu	Número de Nusselt
n	Índice de comportamento de fluxo (Herschel-Bulkley)
$\vec{n}_a$	Fluxo mássico da espécie A
$P(r, t)$	Termo fonte
Pr	Número de Prandtl
Pe	Número de Péclet
Pem	Número de Péclet mássico
p	Pressão
Q	Quantidade de substância
q	Taxa de fluxo de calor
$R(r)$	Função da posição radial
Re	Número de Reynolds

Símbolo	Descrição
r	Coordenada radial, Posição
r_A''	Taxa de produção de massa da espécie A
Sc	Número de Schmidt
Sh	Número de Sherwood
u	Velocidade característica do fluido
V	Volume de controle
Z^+	Coordenada longitudinal adimensional

Letras Gregas

α	Difusividade térmica
β	Coeficiente de condição de contorno
γ	Taxa de deformação por cisalhamento
ϵ	Densidade de uma substância
λn	Autovalor
μ	Viscosidade dinâmica
μ_{ap}	Viscosidade aparente
μn	Autovalor
ν	Viscosidade cinemática
ρ	Massa específica

Símbolo	Descrição
ρA	Densidade da espécie A
τ	Tensão de cisalhamento
τ_y	Tensão de escoamento
$\phi(r, t)$	Condição de contorno
$\psi(r)$	Autofunção
$\psi_n(r)$	Autofunção associada ao autovalor μ_n
Ω	Domínio
∇	Operador Nabla (gradiente)
$\nabla \cdot$	Operador Divergente

LISTA DE SÍGLAS E ABREVIATURAS

Sigla	Significado
ADM1	<i>Anaerobic Digestion Model No. 1</i>
ANFIS	<i>Adaptive Network-Based Fuzzy Inference System</i>
CFD	<i>Computational Fluid Dynamics</i>
CNSM	<i>Comprehensive Numerical Simulation Model</i>
DIET	<i>Direct Interspecies Electron Transfer</i>
ETE	Estação de Tratamento de Esgoto
GAC	<i>Granular Activated Carbon</i>
GITT	<i>Generalized Integral Transform Technique</i>
HCWS	<i>Highly Concentrated Wastewater Sludge</i>
IES	Laboratório de Energia Sustentável
LSSVM	<i>Least Squares Support Vector Machine</i>
OLR	<i>Organic Loading Rate</i>
PNRS	Política Nacional de Resíduos Sólidos
RSU	Resíduos Sólidos Urbanos
TS	<i>Total Solids</i>
VS	<i>Volatile Solids</i>

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	CONTEXTUALIZAÇÃO.....	1
1.2	MOTIVAÇÃO	3
1.3	OBJETIVOS DO TRABALHO	3
1.3.1	Objetivo Geral	3
1.3.2	Objetivos Específicos	4
1.4	ESTRUTURA DA TESE.....	4
2	ESTADO DA ARTE E REVISÃO DE LITERATURA	6
2.1	REVISÃO BIBLIOMÉTRICA	6
2.1.1	Evolução das publicações	7
2.2	REVISÃO SISTEMÁTICA.....	8
2.2.1	Síntese da literatura recente.....	9
2.2.2	Categorização dos estudos sistematizados	17
2.3	TRABALHOS E PESQUISAS NA RECOGÁS.....	18
2.4	CONSIDERAÇÕES A CERCA DO TEMA	20
3	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	22
3.1	RESÍDUOS SÓLIDOS	22
3.2	RESÍDUOS SÓLIDOS ORGÂNICOS: ESTERCOS E FESES HUMANAS	23
3.3	BIOGÁS E BIOCOMBUSTÍVEL	25
3.4	BIODIGESTORES.....	26
3.4.1	Principais modelos de biodigestores	28
3.4.2	Protótipos de estudo com biodigestores	31
3.5	DIGESTÃO ANAERÓBIA	33
3.5.1	Similaridade do comportamento reológicos em matrizes orgânicas.....	33
3.6	MODELAGEM MATEMÁTICA DO ESCOAMENTO DO SUBSTRATOS	34
3.6.1	Equação da continuidade.	35
3.6.2	Equação da quantidade de movimento na direção axial x.....	35
3.6.3	Equação da energia	36
3.6.4	Equação do transporte de espécies.....	36
3.6.5	Adimensionais relevantes no processo de escoamento	36
3.6.6	Resolução computacional das EDP's governantes	42

3.7	TRANSFORMADAS INTEGRAIS.....	42
3.7.1	Transformada integral generalizada e sua inversa	44
4	METODOLOGIA EXPERIMENTAL	46
4.1	UNIDADE BIODIGESTORA	46
4.1.1	Confecção e operação dos biodigestores	46
4.2	SUBSTRATO E ANÁLISE EXPERIMENTAIS	53
4.2.1	substratos	53
4.2.2	Análise gravimétrica - sólidos totais e sólidos voláteis	54
4.2.3	Determinação da produção de biogás e metano	55
4.2.4	Análise produtiva.....	58
4.2.5	Análise cromatográfica.....	58
5	METODOLOGIA TEÓRICA.....	60
5.1.1	Hipóteses Simplificadoras das Equações Governantes	60
5.1.2	Técnica da Transformada Integral Generalizada - GITT	61
5.1.3	Modelagem do campo de velocidade.....	63
5.1.4	Modelagem do campo de temperatura	68
5.1.5	Modelagem do campo de concentração	75
5.1.6	Metodologia estimativa dos números adimensionais.....	77
5.1.7	Tratamento computacional dos campos de escoamento.....	78
6	RESULTADOS E DISCUSSÃO	80
6.1	ANALISE EXPERIMENTAL DO SUBSTRATO	80
6.1.1	Análise de densidade média.....	80
6.1.2	Sólidos totais e voláteis	81
6.1.3	Números adimensionais para o perfil real de escoamento	84
6.2	PRODUÇÃO DE BIOGÁS	90
6.2.1	Produção de biogás via ensaio 1.....	90
6.2.2	Produção de biogás via ensaio 2.....	93
6.2.3	Produção de biogás via ensaio 3.....	97
6.2.4	Discussão comparativa dos processos de produção.....	100
6.2.5	Qualidade do biogás produzido por dejetos animais.....	102
6.2.6	Qualidade do biogás produzido por dejetos humanos	103
6.2.7	Comparação qualitativa do biogás dos dois substratos.....	104
6.3	ANÁLISE DO CAMPO DE VELOCIDADE	105
6.4	ANÁLISE DO CAMPO DE TEMPERATURA.....	107

6.5	ANÁLISE DO CAMPO DE CONCENTRAÇÃO.....	110
7	CONCLUSÃO	112
	REFERÊNCIAS	115

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO

O aumento contínuo da demanda por energia elétrica, em decorrência do crescimento populacional e expansão industrial (MALIUTINA; TAHMASEBI; YU, 2018; VIALETTTO et al., 2019), tem levado pesquisadores a buscar alternativas energéticas mais sustentáveis que consigam minimizar o impacto do esgotamento progressivo das reservas de combustíveis fósseis (LIANG; 2023). Nesse cenário, o desenvolvimento desses sistemas tem sido amplamente investigado, considerando não apenas aspectos técnicos, mas também implicações políticas, socioeconômicas e ambientais.

Nesses empreendimentos, a depender do seu tamanho, a demanda de eletricidade necessária para garantir o funcionamento de equipamentos eletrônicos, da iluminação e sistema de refrigeração, dentre outros, em todo o seu domínio físico, pode se tornar elevada, e com isso, como forma de superar esse problema, a cogeração ou seus derivados (trigeração e poligeração) podem ser uma alternativa viável para a economia de energia (INEE, 2021).

Convencionalmente, os sistemas de geração de energia baseados em diesel ou gás natural consistem em um grupo gerador composto de motor de combustão interna acoplado a um gerador elétrico. Porém esses combustíveis não são renováveis e pode-se então utilizar o biogás, que é uma fonte de energia alternativa a eles e de queima limpa (Alves, 2020).

Dentre as soluções em estudo, os sistemas poligeradores movidos a biogás emergem como uma tecnologia promissora, capaz de atender a demandas energéticas em diferentes escalas, desde conjuntos residenciais até escolas, fazendas e pequenas indústrias. Esses sistemas são particularmente interessantes porque, além de gerar energia, permitem o aproveitamento de resíduos orgânicos transformando-os em biofertilizantes que auxiliam na redução do impacto ambiental associado ao descarte inadequado desses resíduos (SEVINCHAN; DINCER; LANG, 2019).

Um dos gargalos nessa aplicação em larga escala é manter uma produção eficiente e para isso compreender a produção de biogás é essencial. A digestão anaeróbia é um processo biológico intrincado, conduzido por uma diversidade de microrganismos. Sua eficiência é influenciada por uma série de fatores, incluindo a composição do material orgânico utilizado (substrato), pH, temperatura, presença de nutrientes e de substâncias inibitórias (Kunz et al., 2022).

Nesta área, a criação de modelos computacionais tem sido utilizada para estimar a geração de biogás sob diversas condições, visando compreender as variáveis mais favoráveis para o maior rendimento possível de metano (Mo et al., 2023).

Dentre os modelos mais detalhados existentes, destacam-se o Modelo de Digestão Anaeróbia No. 1 (ADM1), de Batstone e colaboradores (2002), e o BioModel, desenvolvido por Angelidaki e equipe (1993; 1999). O ADM1 tem sua aplicação mais voltada para o tratamento de efluentes, enquanto o BioModel é mais focado em sistemas que utilizam dejetos animais. Apesar disso, o ADM1 é o modelo mais amplamente adotado na literatura científica, sendo aplicado até mesmo em contextos que vão além do tratamento de águas residuais (Mo et al., 2023; Weinrich e Nelles, 2021a).

A questão térmica é outro fator crítico para avaliar a eficácia de um reator de biogás. Isso porque a parcela do biogás consumida para aquecimento do próprio reator pode chegar a aproximadamente 10%, variando conforme o projeto do digestor (Avila-Lopez et al., 2022). Dessa forma, modelar a transferência de calor é relevante para quando se quer minimizar as perdas de calor e o consequente aumento a produtividade desses sistemas.

A modelagem mostra-se muito útil nesse sentido, pois permite mapear os fluxos de energia dentro do reator, ajudando a identificar os pontos de maior perda térmica e a planejar formas de reduzi-las (Avila-Lopez et al., 2022; Hreiz et al., 2017).

Uma das técnicas empregadas envolve calcular as diferentes modalidades de transferência de calor que ocorrem dentro e ao redor do digestor, considerando as condições ambientais externas (; Hreiz et al., 2017; Vilms Pedersen et al., 2020; Zhang et al., 2021).

O calor liberado pelas próprias reações bioquímicas tem sido frequentemente desconsiderado (Liu et al., 2017; Teleszewski e Zukowski, 2018), uma vez que se acredita que sua contribuição seja pequena perante outros fluxos de calor (Lübken et al., 2007). Entretanto alguns estudos ressaltam que esse calor pode ser considerável dependendo do tipo de substrato (Lindorfer et al., 2006). Portanto, o avanço no desenvolvimento de ferramentas de simulação para digestão anaeróbia, que integrem tanto os aspectos cinéticos e térmicos, pode contribuir significativamente para uma melhor compreensão e eficiência do processo.

A resolução dos desafios interligados ao consumo energético e à gestão ambiental requer a implementação de estratégias que fortaleçam a relação entre desenvolvimento econômico, sustentabilidade e diversificação da matriz energética. Neste contexto, a investigação sobre a produção de biogás e do digestato associado apresenta-se como contribuição relevante, uma vez que estes subprodutos representam alternativas viáveis para

geração de energia renovável e fertilizantes, fomentando a transição para um paradigma de maior eficiência energética e ambiental.

1.2 MOTIVAÇÃO

Apesar disso a maioria dos estudos referentes aos dejetos orgânicos e produção de biogás ainda são realizados de forma qualitativa (ESTEVES et al., 2019). A demanda por soluções estimula a investigação científica por pesquisadores em centros de pesquisa, como o laboratório de energia sustentável IES/Recogás, nos domínios da universidade federal da Paraíba, cujos estudos visam promover a sustentabilidade para as gerações contemporâneas e futuras. O desenvolvimento de novas tecnologias nessa área frequentemente apresenta uma relação de convergência com benefícios econômicos e ambientais mutuamente complementares.

O Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal da Paraíba junto a laboratório de energia sustentável IES/Recogás, tem desenvolvido, ao longo dos anos, pesquisas voltadas à concepção e aprimoramento de sistemas sustentáveis, abrangendo tanto modelos teóricos quanto experimentais. Os estudos conduzidos empregam abordagens metodológicas diversificadas, incluindo técnicas como transformadas integrais generalizadas (GITT) para modelagem de campos, além de análises diagnósticas baseadas em critérios exergoeconômicos e exergoambientais.

A ênfase atribuída, neste estudo, aos dejetos orgânicos bovinos e humanos justifica-se pelo fato de que esses materiais geram gases com relevância tanto energética e econômica quanto ambiental, devido ao seu potencial como causadores do efeito estufa. Dentre esses gases, destaca-se o biogás, composto principalmente por metano e dióxido de carbono.

1.3 OBJETIVOS DO TRABALHO

1.3.1 Objetivo Geral

Realizar um estudo teórico e experimental comparativo da produção de biogás em protótipos de biodigestores cilíndricos, utilizando substratos bovino e humano, com caracterização dos campos de velocidade, temperatura e concentração por meio de modelagem matemática e análise experimental.

1.3.2 Objetivos Específicos

- Construir e operar protótipos de biodigestores de módulo único e em série para produção de biogás a partir de esterco bovino e fezes humanas.
- Estimar parâmetros reológicos e adimensionais para compreensão dos fenômenos de transferência de massa.
- Quantificar e comparar a produção volumétrica e a composição do biogás gerado por cada substrato e a influência de parâmetros operacionais
- Modelar matematicamente os campos de velocidade, temperatura e concentração no interior do biodigestor utilizando a técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT).

1.4 ESTRUTURA DA TESE

Esta tese está organizada em cinco capítulos, nos quais são abordados, de forma sequencial, os fundamentos teóricos, a metodologia experimental e matemática, os resultados obtidos e as conclusões do estudo.

O Capítulo 1 – Introdução, são apresentados a contextualização do tema, a motivação para a realização da pesquisa, os objetivos gerais e específicos, bem como uma breve exposição sobre a estrutura do trabalho.

O Capítulo 2 – Estado da Arte e Revisão de Literatura, contém uma análise bibliométrica e sistemática da produção científica recente sobre biogás, biodigestores e modelagem matemática aplicada, identificando lacunas e tendências na área.

O Capítulo 3 – Fundamentação Teórica, expõe os conceitos essenciais sobre resíduos sólidos orgânicos, biogás, biodigestores, digestão anaeróbia e modelagem de transporte de massa e calor. Inclui ainda a descrição detalhada da Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT), base para a modelagem matemática realizada.

O Capítulo 4 – Metodologia Experimental descreve os procedimentos experimentais adotados, incluindo a construção e operação dos biodigestores de módulo único e em série, a caracterização física e reológica dos substratos bovino e humano, as análises gravimétricas para determinação de sólidos totais e voláteis, e os métodos de quantificação e análise da produção de biogás.

O Capítulo 5 – Metodologia Teórica apresenta o desenvolvimento dos modelos matemáticos para os campos de velocidade, temperatura e concentração utilizando a técnica GITT, incluindo as formulações adimensionais, a escolha dos problemas auxiliares e a implementação computacional para resolução do sistema de equações.

Capítulo 6 – Resultados e Discussões apresenta e discute os dados experimentais e numéricos obtidos, abrangendo a análise comparativa dos substratos, a produção e composição do biogás nos diferentes arranjos experimentais, identificação e análise do regime de produção de pico, a caracterização dos campos de escoamento, térmico e de concentração via GITT, e o cálculo dos números adimensionais para caracterização do sistema.

Por fim, capítulo 7 - Conclusões sintetizam as principais contribuições do trabalho, destacando a superioridade do substrato humano na produção e qualidade do biogás, a eficácia da solução via GITT na modelagem em coordenadas cilíndricas utilizadas. O estudo fornece um conjunto validado de dados experimentais, parâmetros reológicos, números adimensionais e perfis de escoamento que constituem uma base fundamental para o projeto, a previsão de desempenho e a ampliação de escala de biodigestores.

2 ESTADO DA ARTE E REVISÃO DE LITERATURA

Neste capítulo é realizada uma análise bibliométrica e sistemática da produção científica recente sobre biogás, biodigestores e métodos computacionais de modelagem. A revisão bibliográfica deste trabalho foi consolidada através do estado da arte e de uma revisão de literatura sobre trabalhos desenvolvidos no âmbito da Recogás.

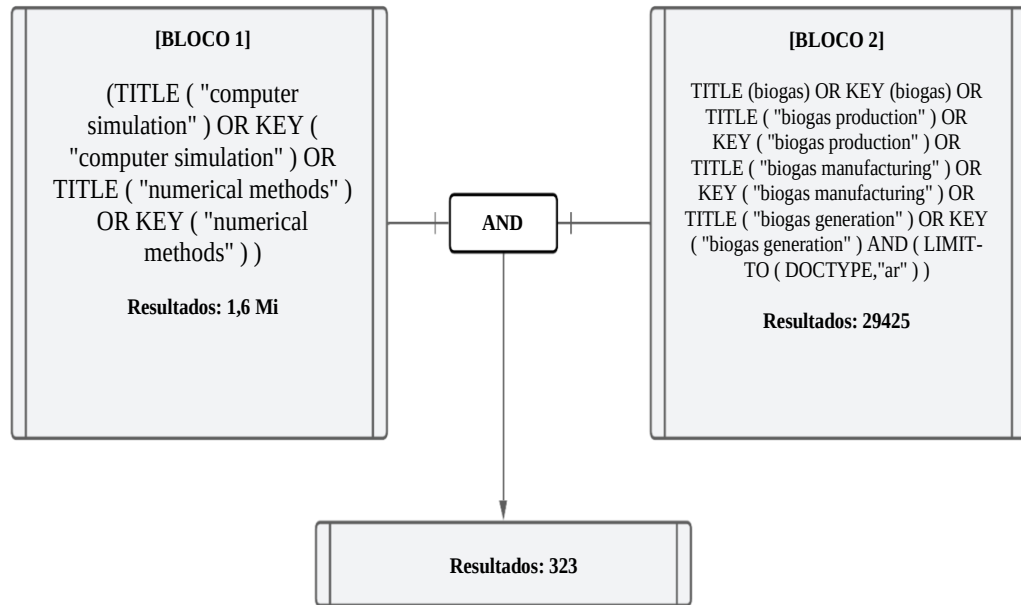
O estado da arte foi constituído através de uma análise bibliométrica e sistemática sobre a produção de biogás e métodos computacionais que auxiliem no entendimento dessa produção. A revisão bibliométrica tem o objetivo de obter uma visão geral sobre o tema, permitindo verificar lacunas e também tendências de pesquisa. A revisão sistemática se aprofunda em trabalhos desenvolvidos ao longo dos últimos 5 anos apontando os estudos que estão contribuindo para o campo.

A revisão bibliográfica de trabalhos desenvolvidos na Recogás visa apontar as contribuições científicas que as linhas pesquisadas tem realizado tanto em pesquisas de metodologia analítica e computacional de forma híbrida como em pesquisa com enfoque sustentável, visto que este trabalho acopla os dois enfoques, estudando de forma experimental o substrato com a produção de biogás associada e de forma teórica se munindo da GITT para avaliar o campo de escoamento do substrato. Dessa forma o estado da arte encaminha o trabalho para a contribuição na esfera da sustentabilidade energética oferecendo ferramentas para o dimensionamento e otimização de sistemas de produção de biogás em reatores anaeróbios.

2.1 REVISÃO BIBLIOMÉTRICA

O bloco B1 foi realizada com objetivo de obter dados sobre modelos de simulação computacional, métodos numéricos, e de forma ainda generalizada cerca de 1,6 milhões de trabalhos e o Bloco B2 teve como objetivo a produção de biogás obtendo 29425 trabalhos. Dessa forma, a interseção realizada procura refletir trabalhos em produção de biogás que de alguma forma se apoiem em algum método computacional, numérico em geral, filtrando 323 artigos. A figura 1 esse diagrama.

Figura 1-Diagrama de blocos de aquisição dos dados da base da Scopus

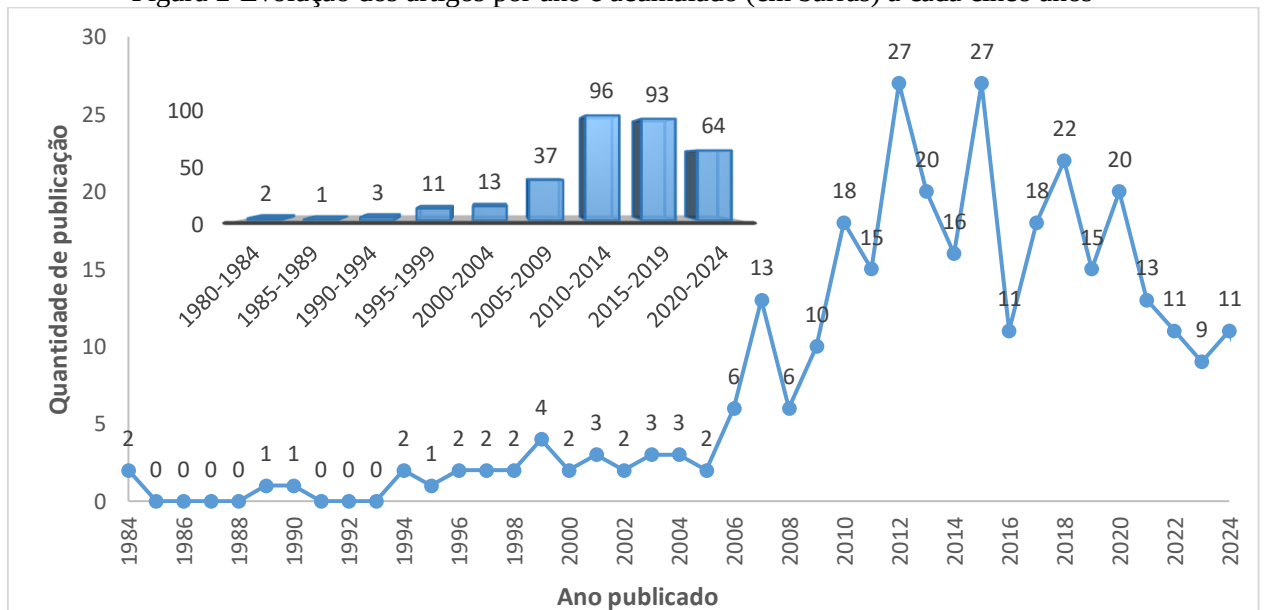


Fonte: Autoria Própria (2025)

2.1.1 Evolução das publicações

O avanço das publicações ao longo dos anos permite compreender a evolução da produção científica sobre o tema. A Figura 2 ilustra a distribuição temporal de estudos que abordam sistemas poligeradores baseados em biogás, apresentando tanto a quantidade anual de publicações quanto sua agregação por quinquênios.

Figura 2-Evolução dos artigos por ano e acumulado (em barras) a cada cinco anos



Fonte: Autoria Própria (2025)

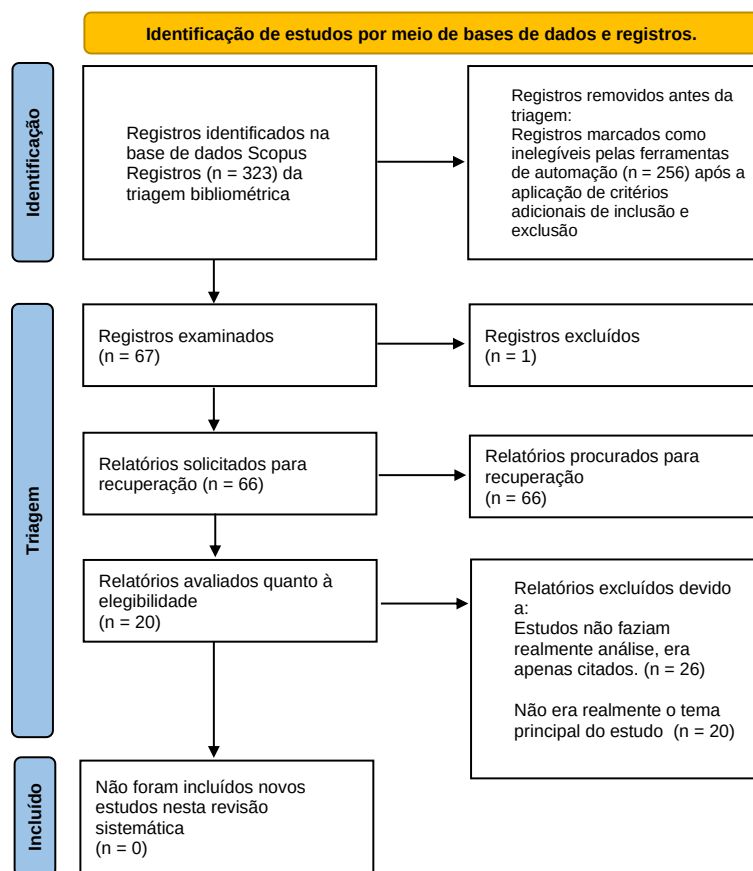
A produção iniciou em 1984 e, até o final da década, permaneceu limitada, mantendo apenas 3 publicações do total de publicações. Na década de 90 as pesquisas mantinham um aspecto tímido, cerca de 4% das publicações totais.

Os sinais de crescimento chegaram no ano de 2006, porém apresenta picos de subida e queda com frequência, não mantendo um padrão de crescimento acentuado. As últimas duas décadas passadas referentes a 2010 a 2019 tivemos a maior produção acumulada, foram quase 60% dos trabalhos já publicados, porém as produções veem caindo desde 2020 com uma leve subida no ano de 2024. O que se observa de maneira geral que existe motivação pelo tema, porém não da forma acentuada como deveria, visto que um caminho plausível para a sustentabilidade.

2.2 REVISÃO SISTEMÁTICA

A partir da quantidade inicial de 323 estudos identificados na etapa bibliométrica selecionados mediante critérios de inclusão baseados em termos com conectivos específicos, aplicaram-se novos filtros de elegibilidade mediante critérios adicionais de inclusão e exclusão. Esse refinamento metodológico resultou em um conjunto de 67 estudos, dos quais, nenhum foi identificado como duplicado, 1 como revisão e apenas 46 foram excluídos após avaliação criteriosa de elegibilidade. Consequentemente, 20 estudos atenderam integralmente aos critérios estabelecidos e compuseram a amostra final para análise sistemática, a figura 3 representa esse processo de revisão.

Figura 3-Fluxograma das etapas do processo de revisão sistemática



Fonte: Autoria Própria (2025)

2.2.1 Síntese da literatura recente

Um estudo de Duong e Lim (2025) investigou a relação entre a taxa de carga orgânica e a temperatura na produção de biogás a partir da codigestão de esterco suíno e óleo de cozinha residual. Os resultados demonstraram que a temperatura de 40 °C foi a mais eficiente. Nas temperaturas mais baixas, como 30 °C, o sistema apresentou acidificação e uma queda significativa no rendimento, especialmente com altas cargas de óleo. A análise microbiana indicou que a adição de óleo favoreceu os microrganismos produtores de metano. Os pesquisadores concluíram que a operação é ideal em temperaturas mais altas com uma carga orgânica moderada. Para operar em temperaturas mais baixas, é necessário reduzir a proporção de óleo para manter a estabilidade do processo.

Um estudo de Şahin e Öztürk (2025) empregou simulações computacionais para analisar um trocador de calor de casco e tubo, utilizando biogás e nanofluidos. A pesquisa avaliou fluidos com partículas de Al_2O_3 e SiO_2 em diferentes concentrações.

Os resultados mostraram que a adição de nanopartículas incrementa significativamente a transferência de calor. A maior eficiência foi alcançada com o nanofluido de Al_2O_3 a 7%, que elevou a taxa de transferência de calor em 68% se comparado à água pura. O estudo também identificou que um maior número de Reynolds e a proximidade com os feixes de tubos são fatores cruciais para otimizar o desempenho. A metodologia utilizou um modelo validado com mais de 14 milhões de elementos, assegurando a precisão dos resultados. A conclusão reforça que os nanofluidos são uma alternativa eficaz para intensificar a transferência de calor neste tipo de equipamento.

Yuki Junior et al. (2024) desenvolveram um modelo dinâmico que integra a cinética de digestão anaeróbia com um modelo térmico avançado para simular o comportamento de digestores. A principal inovação foi calcular o calor das reações diretamente a partir das taxas cinéticas, evitando uma superestimativa de cerca de 20% na demanda de calor do trocador térmico. As simulações em diferentes climas mostraram que as condições externas influenciam fortemente a eficiência térmica. No Noroeste do Reino Unido, o autoconsumo de biogás para aquecimento foi 23% maior do que no Sudoeste da França para o mesmo reator. Estratégias como aumentar a espessura do isolamento e usar uma cobertura de baixa emissividade reduziram as perdas térmicas em 37% em climas frios. Concluiu-se que o modelo acoplado é uma ferramenta valiosa para otimizar o projeto e a operação de plantas de biogás, adaptando-se a diferentes substratos e condições climáticas.

O estudo de Xia et al. (2024) desenvolveu um modelo numérico abrangente para prever a geração, adsorção e emissão de dioxinas durante a incineração de resíduos sólidos urbanos. O método simula todo o processo, desde a combustão até a emissão final, dividindo a evolução das dioxinas em seis estágios principais. Os resultados demonstraram que o modelo representa com eficácia a dinâmica das concentrações de dioxinas. Verificou-se que a pirólise acima de 850 °C decompõe quase completamente esses compostos, mas a ressíntese ocorre em temperaturas mais baixas, entre 200 °C e 500 °C. A adsorção em carvão ativado removeu 95% das dioxinas, resultando em emissões dentro dos limites legais. A pesquisa conclui que o modelo oferece uma base teórica robusta para o controle de emissões, mostrando que parâmetros como capacidade de alimentação e velocidade da grelha influenciam significativamente a formação de dioxinas. Além disso, a composição dos resíduos, particularmente o teor de cloro, mostrou-se um fator crucial. O estudo destaca o valor desta ferramenta para otimização operacional e desenvolvimento de estratégias de controle inteligente.

Yousuf et al. (2024) desenvolveram um método inovador para prever o escoamento turbulento de lodos de esgoto concentrados em tubulações, um desafio crucial para estações de tratamento. A metodologia caracterizou o comportamento reológico dos lodos a partir de dados obtidos em uma instalação piloto. Os parâmetros do modelo Herschel-Bulkley foram ajustados com base nesses dados, descrevendo adequadamente o comportamento dos lodos. Esses parâmetros foram então aplicados em simulações computacionais avançadas que resolvem todas as escalas turbulentas. As simulações abrangeram diversas concentrações de sólidos e diâmetros de tubulação. Os resultados demonstraram que as previsões de velocidade média apresentaram erros entre 2% e 15% em comparação com dados experimentais, sendo significativamente mais precisas que correlações empíricas convencionais, que exibiram erros de até 75%. Concluiu-se que a abordagem oferece uma base sólida para a intensificação sustentável de estações de tratamento, com potencial aplicação em outros equipamentos como trocadores de calor e digestores.

Shi et al. (2024) desenvolveram um modelo matemático para descrever a melhoria da digestão anaeróbia de ácidos graxos de cadeia longa pela adição de carvão ativado granular. O método incorporou três aspectos principais: a cinética de adsorção, a via de β -oxidação dos ácidos graxos e a melhoria da biomassa aderida ao carvão através da transferência direta de elétrons entre espécies. O modelo foi calibrado com dados experimentais da degradação de ácidos esteárico, palmítico, mirístico e láurico, com e sem a adição de carvão ativado. Os resultados mostraram que o carvão ativado adsorve rapidamente os ácidos graxos, reduzindo sua concentração na fase líquida e, conseqüentemente, a inibição microbiana. Parâmetros cinéticos como as taxas máximas de consumo específico foram significativamente maiores para a biomassa aderida ao carvão, indicando que a transferência direta de elétrons melhora a eficiência metabólica. A maior concentração de carvão ativado, de $2,00 \text{ g L}^{-1}$, resultou em menor acúmulo de acetato e maior taxa de degradação, mas também levou a uma adsorção de biogás, reduzindo ligeiramente a produção total medida. Concluiu-se que o modelo desenvolvido representa com precisão a dinâmica de adsorção e degradação, destacando o papel crucial do carvão ativado em mitigar a inibição e promover a transferência direta de elétrons. Ele serve como uma ferramenta matemática valiosa para o projeto e otimização de reatores anaeróbios no tratamento de efluentes ricos em lipídios.

Gallego et al. (2024) desenvolveram uma metodologia alternativa para determinar fatores de emissão em aterros sanitários, superando as limitações dos métodos convencionais. O estudo mediu compostos orgânicos voláteis, sulfeto de hidrogênio e amônia em três áreas principais: zona de descarga, área pré-fechada e reservatório de lixiviado. Os resultados

revelaram que a área de descarga apresentou as maiores concentrações de compostos orgânicos voláteis, enquanto o reservatório de lixiviado registrou os níveis mais elevados de sulfeto de hidrogênio e amônia. A análise de odor mostrou que o sulfeto de hidrogênio foi o principal responsável pelos odores no reservatório, enquanto os compostos orgânicos predominaram na área de descarga. Através de um modelo de dispersão, os pesquisadores calcularam os fatores de emissão, confirmando que a metodologia inversa produz dados mais precisos e completos ao capturar fontes de emissão não detectadas por métodos convencionais. Estes resultados são fundamentais para desenvolver mapas de dispersão realistas, auxiliando no gerenciamento ambiental e na avaliação de riscos à saúde pública e ocupacional do aterro sanitário.

Dapelo et al. (2024) aplicaram pioneiramente o método Lattice-Boltzmann para modelar um digestor anaeróbio em escala real misturado por injeção de biogás. A abordagem incorporou a reologia não newtoniana do lodo e utilizou um modelo avançado de simulação de turbulência. A análise hidrodinâmica focou nos padrões de fluxo e viscosidade, quantificando a mistura através do Índice de Uniformidade. Os resultados demonstraram que, embora os padrões de fluxo dependam moderadamente do tamanho das bolhas, o grau final de mistura permanece estável. Comparado com métodos numéricos convencionais, o método Lattice-Boltzmann mostrou eficiência computacional mil vezes maior, além de permitir paralelização massiva e resolução espacial superior. O estudo revela que, contrariando perspectivas anteriores que consideravam inviável a simulação detalhada de digestores em escala real, esta nova abordagem torna factível a aplicação industrial de modelos avançados para otimização de digestão anaeróbia, oferecendo simulações detalhadas com viabilidade econômica.

Nurgaliev, Koshelev e Müller (2023) desenvolveram um modelo dinâmico para avaliar a viabilidade econômica de um projeto de biogás na Rússia, considerando a variação temporal de parâmetros como taxas de juros, inflação e preços de commodities. Foram analisados quatro cenários que combinavam diferentes misturas de substratos e condições de comercialização de energia. Os resultados mostraram que o valor presente líquido do projeto variou significativamente conforme o cenário, sendo mais elevado nas configurações que utilizavam silagem de milho e grãos junto com os resíduos e com acesso irrestrito ao mercado de energia. A análise de sensibilidade revelou que parâmetros individuais possuem influência limitada no resultado, com os fatores mais relevantes sendo a taxa de juros, a inflação e o coeficiente de ajuste de risco. A simulação de Monte Carlo demonstrou probabilidade positiva de retorno em todos os cenários. O estudo conclui que a escala do projeto, determinada pela diversificação de substratos e condições de mercado, é fundamental para sua atratividade econômica e resiliência frente a variações do mercado.

García-Ramírez et al. (2023) desenvolveram uma metodologia acessível para simular a produção de biogás em sistemas de tratamento de águas residuais pecuárias utilizando o software Scilab. O estudo implementou o modelo matemático AM2, que representa a digestão anaeróbia através de duas reações principais com diferentes tipos de crescimento microbiano. A proposta tem como principal objetivo servir como ferramenta educativa para estudantes de graduação e mestrado, permitindo o entendimento da dinâmica de biodigestores sem os custos elevados de implementação prática. As simulações demonstraram que o modelo é eficaz para prever tanto a redução da carga orgânica quanto a produção de biogás, capturando adequadamente o comportamento transitório do sistema. Os pesquisadores observaram oscilações nas concentrações de biomassa e substrato em resposta às cargas introduzidas, com picos de substrato seguidos por consumo rápido. O modelo mostrou versatilidade ao permitir ajustes rápidos nos parâmetros de projeto. Concluiu-se que esta abordagem, combinando modelagem matemática com simulação numérica, representa uma ferramenta valiosa para o aprendizado em tecnologia ambiental, facilitando a visualização de variáveis críticas e a exploração de diferentes condições operacionais.

Li et al. (2023) investigaram as características de difusão de massa em digestatos anaeróbios de alto teor de sólidos, provenientes da codigestão de resíduos alimentares e lodo de esgoto. O estudo determinou experimentalmente o coeficiente de difusão efetiva em diferentes teores de sólidos totais, variando de 10,14% a 18,12%. Os resultados mostraram que o aumento no teor de sólidos levou a uma redução significativa na difusividade, com os valores do coeficiente de difusão efetiva variando de $8,40 \times 10^{-10}$ a $5,99 \times 10^{-11}$ m²/s. Paralelamente, as análises reológicas revelaram que amostras com maior teor de sólidos apresentaram aumento na tensão de escoamento, índice de consistência e energia de coesão. Entre os modelos testados, o de Herschel-Bulkley demonstrou o melhor ajuste aos dados reológicos. A investigação da microestrutura mostrou que digestatos mais concentrados possuem maior proporção de água superficial e menor porosidade, explicando tanto a redução na difusão de massa quanto a alteração nas propriedades reológicas. Foram estabelecidas correlações significativas entre parâmetros reológicos e coeficientes de difusão, modeláveis por funções de potência. As conclusões destacam a importância de incorporar simultaneamente parâmetros reológicos e de transferência de massa em modelos computacionais para otimizar o projeto e a operação de reatores anaeróbios. Esta abordagem integrada permite melhorar a previsão da homogeneidade do meio e da eficiência de transferência de massa, elementos cruciais para maximizar a produção de metano em sistemas de alto teor de sólidos.

Dabiri, Kumar e Rauch (2023) desenvolveram uma plataforma integrada no OpenFOAM que combina dinâmica de fluidos computacional com o modelo de digestão anaeróbia. A ferramenta permitiu analisar simultaneamente o desempenho energético e a qualidade de mistura em digestores de escala real, considerando a natureza não newtoniana do lodo e os complexos processos biológicos. Os resultados demonstraram que a plataforma pode prever a produção de metano com boa precisão. A análise energética revelou que aumentar excessivamente a vazão de recirculação elevou a produção de metano em 163%, mas com um custo energético 66 vezes maior, indicando que intensidades de mistura mais altas se tornam energeticamente inviáveis. A qualidade de mistura mostrou-se satisfatória, com homogeneização superior a 95% nas condições operacionais padrão. O estudo conclui que esta integração representa uma ferramenta valiosa para otimizar digestores anaeróbios, permitindo avaliar simultaneamente aspectos hidrodinâmicos, biocinéticos e de eficiência energética. A plataforma possibilita identificar zonas problemáticas e analisar a relação custo-benefício de diferentes estratégias operacionais, contribuindo para a sustentabilidade de estações de tratamento.

O estudo de Wong et al. (2023) otimizou a coleta de biogás em aterros e reduziu emissões através de modelagem numérica. Os pesquisadores desenvolveram um modelo bidimensional para simular o fluxo de gás no Aterro de Vancouver, utilizando um método inovador de medição aérea para calibrar as taxas de emissão de metano. A eficiência de coleta inicial foi de aproximadamente 37%. A calibração do modelo permitiu simular diferentes cenários de melhoria. Os resultados indicaram que aumentar o vácuo do sistema em 0,75 kPa elevaria a eficiência para 49%. Estratégias alternativas, como duplicar os coletores horizontais ou adicionar uma camada permeável, produziram melhorias similares. A combinação de nova infraestrutura com aumento de vácuo poderia alcançar até 74% de eficiência. As conclusões destacam que a modelagem calibrada com medições precisas é essencial para projetar sistemas eficientes. O estudo demonstra que melhorias significativas na captura de metano são viáveis, porém a intrusão de ar limita aumentos excessivos de vácuo, exigindo soluções específicas para cada local.

Li et al. (2023) empregaram simulações computacionais para investigar o campo de fluxo em um reator de tanque agitado utilizado na fermentação anaeróbia de resíduos de cogumelo para produção de biogás. A pesquisa comparou três modelos de turbulência para identificar o mais adequado na previsão do comportamento do fluxo. Os resultados demonstraram que o modelo $k-\epsilon$, combinado com métodos numéricos específicos, apresentou o melhor desempenho preditivo. A análise do campo de velocidade revelou a formação de zonas

de circulação e uma área inativa abaixo do impulsor inferior, o que pode comprometer a eficiência da mistura. A validação experimental confirmou que as previsões do modelo apresentaram concordância satisfatória com os dados reais. O estudo conclui que esta abordagem de simulação oferece uma ferramenta valiosa para otimizar o projeto e a operação de reatores anaeróbios, contribuindo para melhorar a eficiência na produção de biogás.

O estudo de Fathinezhad et al. (2022) utilizou um modelo numérico para simular os efeitos da intrusão de ar em aterros de resíduos sólidos urbanos, baseando-se em um aterro real dos Estados Unidos. Foram avaliados dois cenários de intrusão: através de fissuras na cobertura de argila e por rompimento de linha de ar pressurizada. Os resultados demonstraram que a entrada de ar provoca uma rápida transição de condições anaeróbias para aeróbias, elevando as temperaturas em até 30°C devido à aceleração das reações de biodegradação. A composição do biogás também foi significativamente alterada, com redução na razão metano-dióxido de carbono. Concluiu-se que a intrusão por fissuras tem impacto localizado e temporário, enquanto vazamentos em linhas pressurizadas podem causar aquecimento prolongado por até um ano, afetando a geração de metano e a integridade de geossintéticos. O estudo ressalta a importância do monitoramento contínuo de oxigênio e da manutenção preventiva nos sistemas de coleta.

Ganeshan e Rajendran (2022) desenvolveram um modelo dinâmico para prever a produção de biometano em processos de digestão anaeróbia. Utilizando o MATLAB, os pesquisadores criaram um sistema baseado na equação de Hill modificada, incorporando parâmetros como taxa de carga orgânica, concentração de sólidos totais e tempo de retenção hidráulica. O modelo foi validado através da comparação com seis cenários experimentais distintos, demonstrando alta precisão com diferença média de $\pm 7,6\%$ entre valores simulados e experimentais. A análise estatística confirmou a robustez do modelo, enquanto a análise de sensibilidade revelou forte correlação entre a concentração de sólidos totais e a produção de metano. Os resultados mostraram que a ferramenta é capaz de prever com confiabilidade o comportamento dinâmico da digestão anaeróbia, inclusive sob condições transitórias. A otimização da taxa de carga orgânica permitiu identificar pontos operacionais ideais para maximizar a produção de metano. O estudo demonstra o potencial da modelagem para auxiliar no dimensionamento e operação de reatores anaeróbios em escala industrial, reduzindo a dependência de testes experimentais extensivos.

Yang et al. (2021) investigaram a aplicação de modelos de aprendizado de máquina para prever a produção de biogás a partir de resíduos alimentares. O estudo comparou dois sistemas computacionais: o Sistema de Inferência Fuzzy Adaptativo e a Máquina de Vetores de Suporte por Mínimos Quadrados. Ambos os modelos utilizaram um conjunto abrangente de dados

experimentais, considerando parâmetros como sólidos totais, sólidos voláteis e tempo de retenção hidráulica. Os resultados demonstraram que as duas abordagens são capazes de prever a produção de biogás com boa precisão, porém a Máquina de Vetores de Suporte por Mínimos Quadrados apresentou desempenho significativamente superior. Este modelo mais eficiente alcançou um coeficiente de determinação de 0,998, indicando uma correlação excepcional entre os valores previstos e os dados reais. O estudo conclui que técnicas de aprendizado de máquina, particularmente a Máquina de Vetores de Suporte por Mínimos Quadrados, oferecem ferramentas promissoras para a previsão precisa da produção de biogás, podendo auxiliar na otimização de processos de digestão anaeróbia.

Choudhary et al. (2020) avaliaram a sustentabilidade de um reator anaeróbio de grande escala para produção de biogás a partir de resíduos alimentares. O estudo monitorou o desempenho do reator durante 324 dias, abrangendo condições de temperatura desde a faixa psicrófila até a mesófila. Os resultados mostraram que a produção de metano variou significativamente entre as estações, com redução média de 54,8% no inverno em comparação ao verão. A análise microbiana revelou uma comunidade diversificada de microrganismos produtores de metano, indicando uma via sintrófica estável. A modelagem matemática dos dados demonstrou excelente ajuste ao modelo cinético de primeira ordem. O estudo concluiu que a digestão anaeróbia de resíduos alimentares é viável mesmo em baixas temperaturas, com implicações positivas para o projeto de reatores em regiões frias. Esta constatação representa um avanço importante para a gestão sustentável de resíduos em climas temperados e frios.

Rodrigo-Illarri e Rodrigo-Clavero (2020) utilizaram o modelo matemático BIOLEACH para simular a produção de biogás em um aterro real na Espanha, analisando diferentes cenários de composição de resíduos. O estudo integrou parâmetros climáticos, características dos resíduos e condições de umidade para prever a geração de biogás e lixiviado de forma conjunta. Os resultados mostraram que a produção máxima de biogás alcançou 110 milhões de metros cúbicos no cenário com maior teor de resíduos alimentares, com reduções significativas nos cenários que simularam a diminuição desses materiais. A produção real foi substancialmente menor devido às condições de baixa umidade características do clima mediterrâneo. A pesquisa concluiu que a produção efetiva de biogás depende criticamente da quantidade de resíduos, sua composição química e, principalmente, da disponibilidade de água no aterro.

Pedersen et al. (2020) desenvolveram um modelo matemático baseado em redes de resistência térmica para prever a temperatura em biodigestores anaeróbios. A abordagem considerou parâmetros de projeto, condições climáticas e características operacionais sem necessidade de calibração prévia. O estudo analisou dois cenários extremos: um biodigestor

doméstico não aquecido no Vietnã e um reator industrial na Dinamarca. Os resultados demonstraram alta precisão preditiva em ambos os casos, com erros médios inferiores a 1,5°C. O modelo mostrou-se robusto para diferentes escalas e condições climáticas. A análise revelou que em biodigestores enterrados, a troca de calor com o solo é dominante, enquanto em reatores industriais o aquecimento externo e o fluxo do substrato são mais significativos. A abordagem mostrou-se eficaz como ferramenta computacionalmente leve para auxiliar no projeto e gestão de biodigestores, permitindo avaliar necessidades de isolamento e aquecimento de forma acessível.

2.2.2 Categorização dos estudos sistematizados

Com base nos estudos analisados, é possível comparar os trabalhos de acordo com tecnologias, aplicações, eficiências e limitações, conforme resumido na Tabela 1. Essa análise permite mapear o avanço das pesquisas na área, destacando tendências e lacunas existentes.

Tabela 1-Agrupamento dos estudos sistematizados

Artigos correspondentes	Foco do estudo	Características Principais	Resultados Principais
Duong e Lim (2025); Choudhary et al. (2020)	Otimização de Parâmetros Operacionais	Variação de temperatura, carga orgânica e substrato.	Produção 54.8% menor no inverno; Melhor desempenho a 40°C.
Yuki Junior et al. (2024); Pedersen et al. (2020)	Modelagem Térmica e Energética	Modelos térmicos acoplados; Redes de resistência térmica.	-20% erro demanda térmica; Previsão precisa (<1.5°C).
Dapelo et al. (2024); Li et al. (2023) - Reator; Şahin e Öztürk (2025)	Simulação CFD Avançada	Métodos Lattice-Boltzmann; Simulação de Grandes Vórtices; Nanofluidos.	Eficiência computacional 1000x; +68% transferência de calor.
Shi et al. (2024); García-Ramírez et al. (2023); Ganeshan e Rajendran (2022); Dabiri, Kumar e Rauch (2023)	Modelagem de Processos Bioquímicos	Modelos cinéticos (ADM1, Monod); Mecanismos de transferência de elétrons.	Aumento taxas metabólicas; 92% de acurácia em previsões.
Gallego et al. (2024); Wong et al. (2023); Fathinezhad et al. (2022); Rodrigo-Ilarri e Rodrigo-Clavero (2020); Xia et al. (2024)	Gestão de Aterros e Emissões	Modelos de fluxo de gás; Fatores de emissão; Controle de poluentes.	Eficiência de coleta até 74%; -14% biogás com menos orgânicos.
Yousuf et al. (2024); Li et al. (2023)	Caracterização Reológica e Transferência	Simulação Numérica Direta; Modelos reológicos (Herschel-Bulkley).	Erro de 2-15% (vs. 75% empírico); Difusão reduz com sólidos.
Yang et al. (2021); Nurgaliev, Koshelev e Müller (2023)	Inteligência Artificial e Análise Econômica	Machine Learning (LSSVM); Simulação de Monte Carlo.	Previsão com 99.8% de precisão; Valor Presente Líquido positivo.

Fonte: Carvalho et al. (2025).

Estudos com foco em otimização de parâmetros operacionais investigou como temperatura, carga orgânica e composição do substrato afetam a produção de biogás. Seus resultados demonstram que condições mesofílicas mais altas (como 40°C) maximizam a eficiência, enquanto temperaturas mais baixas podem levar à acidificação e falha do sistema, fornecendo diretrizes práticas para a operação de reatores.

Estudos com foco em modelagem térmica e energética desenvolveram modelos físicos para prever a temperatura interna de biodigestores. Esses modelos, que não necessitam de calibração prévia, provaram ser altamente precisos e são ferramentas valiosas para projetar sistemas energeticamente eficientes e prever demandas de aquecimento em diferentes climas.

Estudos com foco em simulação CFD avançada aplicaram métodos computacionais de alta fidelidade para simular o escoamento de fluidos complexos e a transferência de calor em reatores e trocadores. Sua principal contribuição foi demonstrar ganhos drásticos de eficiência, tanto em termos de desempenho térmico (com o uso de nanofluidos) quanto de custo computacional, tornando simulações complexas factíveis para a indústria.

Estudos com foco em modelagem de processos bioquímicos em representaram matematicamente as reações microbianas da digestão anaeróbia. Ao incorporar mecanismos modernos, como a transferência direta de elétrons entre espécies, esses modelos conseguem prever com alta precisão a produção de biogás e a degradação de substratos complexos, como os ácidos graxos.

Estudos com foco em gestão de aterros e emissões dedicaram-se a modelar a geração e a captura de biogás em aterros sanitários, além da emissão de poluentes odoríferos. Os estudos mostraram que a eficiência de coleta de metano pode ser significativamente melhorada com a otimização do sistema de vácuo e que a composição dos resíduos é um fator crítico para a produção total de biogás.

Estudos com foco em caracterização reológica e transferência exploraram a relação entre as propriedades de escoamento de lodos e a eficiência da transferência de massa em reatores. Eles estabeleceram que o aumento na concentração de sólidos dificulta a mistura e a difusão, informação crucial para o projeto de reatores de alto teor de sólidos.

Por fim, Estudos com foco em inteligência artificial e análise econômica empregaram técnicas de aprendizado de máquina para prever a produção de biogás e modelos de risco para avaliar a viabilidade financeira de projetos.

2.3 TRABALHOS E PESQUISAS NA RECOGÁS

Alguns trabalhos de pesquisa desenvolvidos na Recogás já trabalham com modelos matemáticos, precisamente com uma técnica híbrida denominada de transformada integral generalizada – GITT e outros trabalhos se propuseram a analisar biogás. Podemos elencar os trabalhos de:

Medeiros (1998) fez uma análise teórica da convecção forçada laminar transiente em desenvolvimento simultâneo em dutos usando GITT e foi resolvido tanto em função corrente como em variáveis primitivas tanto o campo térmico quanto o de velocidade e foi constatado que à medida que o número de Biot crescia o decaimento exponencial da temperatura se acentuava e que o número de Nusselt ocorria uma variação inversamente proporcional, os dados foram validados com literatura consolidada.

Diniz (2005) estudou as tensões térmicas no acoplamento condução-radiação em materiais semitransparentes utilizando GITT, fazendo um balanço integral nas superfícies de contorno e permitiu concluir que a técnica permite uma abordagem analítica e sistemática a problemas inerentemente complexos, permitindo, com baixo custo computacional a obtenção de resultados precisos para a temperatura e tensões térmicas

Veronese (2008) analisou o escoamento bidimensional de fluidos não newtonianos com formulação em variáveis primitivas através e obteve a solução para o problema de convecção forçada em canais de placas planas e em duto circular via transformada integral generalizada e os resultados obtidos com a formulação da camada limite, através da GITT foram considerados satisfatórios e com boa concordância com dados disponíveis na literatura.

Medeiros (2023) estudou o problema de transferência de calor e massa com fronteira móvel e caracterizou as camadas limites hidrodinâmica, térmica e de concentração usando transformada integral generalizada, os resultados foram validados considerando variações no número de Biot e comparação com literatura consolidada

Alves (2020) realizou análise exergoeconômica e exergoambiental de um sistema de trigeração usando gás natural e extensão para o uso do biogás de aterro sanitário, onde o gás natural seria comparado experimentalmente ao biogás, porém o motor do grupo gerador Leon Heimer não conseguiu dar partida com biogás devido ao mesmo ter uma quantidade muito baixa de combustível na sua composição com 50,8% de metano e o restante de impureza,

Neto (2024) fez estudos exergoeconômicos e ambientais de dois chillers de refrigeração por absorção de vapor de duplo efeito sendo um protótipo em desenvolvimento e outro um chiller comercial, e considerou o abastecimento real do grupo gerador através do gás natural e teórico através de biogás purificado (biometano) e concluiu que quando comparado ao gás natural, que somou 942.100 pontos em 20 anos de operação do chiller, o biometano registrou

223.100 pontos. A principal vantagem da mudança para o biometano foi uma queda de 76,32% nos impactos ambientais durante todo o ciclo de vida do equipamento.

Os estudos com transformada integral generalizada vem se mostrando satisfatórios quando em comparação à alguns métodos de análise, já os estudos com o combustível biogás vem sofrendo dificuldades devido tanto a sua disponibilidade e também a sua atualização para biometano, dessa forma, a Recogás mantém um programa de pesquisa dedicado a essas duas frentes, com o intuito de contribuir para a superação dessas lacunas

Dessa forma, este trabalho pode contribuir com a comunidade científica, realizando um estudo sobre a produção de biogás a partir de dejetos bovinos e humanos, adicionalmente comparando-os e utilizando um modelo híbrido, analítico numérico da técnica da transformada integral generalizada para caracterizar os campos de velocidade, temperatura e concentração para servirem de base para avaliação de projetos futuros.

2.4 CONSIDERAÇÕES A CERCA DO TEMA

A análise bibliométrica expõe o crescimento das publicações nos anos recentes refletindo a necessidade de entender e manipular a produção de biogás a partir de diversos substratos e propriedades físicas para poder garantir a urgência global em descarbonizar matrizes energéticas. Experimentos e modelos podem ajudar a melhorar o entendimento da produção e dados podem ser utilizados pela comunidade.

A análise sistemática demonstra um avanço significativo na modelagem de sistemas de biogás, com metade deles dedicando-se à simulação de biodigestores anaeróbios. Contudo, observa-se que esses estudos estão concentrados em substratos como lodo de esgoto, resíduos alimentares e misturas industriais. Uma análise minuciosa confirma que, dentro dos 20 estudos revisados, nenhum tem como foco principal a modelagem da digestão de dejetos humanos. Da mesma forma, no caso dos dejetos bovinos, o estudo de García-Ramírez et al. (2023) aborda águas residuais pecuárias de forma genérica, sem torná-lo o substrato explícito e central da modelagem.

A relevância de se investigar substratos específicos é destacada por trabalhos como o de Li et al. (2023), que demonstram como as propriedades reológicas e de transferência de massa, críticas para a eficiência do processo, variam drasticamente com a composição e o teor de sólidos do substrato. Este estudo evidencia que modelos genéricos podem ser insuficientes, pois a natureza complexa e variável de cada material exige uma caracterização e uma abordagem de modelagem específicas. Neste contexto, uma comparação sistemática será estratégica,

permitindo identificar similaridades e disparidades cruciais. Tal comparação será particularmente válida na esfera dos fenômenos de transporte, como a difusão de massa e o comportamento reológico em função do teor de sólidos, estabelecendo uma referência física para os dejetos humanos e bovinos.

Paralelamente, a análise revela uma predominância de abordagens de modelagem puramente numéricas como CFD ou puramente ou biocinéticas como ADM1. Embora poderosas para seus fins específicos, estas abordagens frequentemente envolvem alta complexidade computacional ou dependem de um grande número de parâmetros de difícil obtenção, o que pode limitar sua aplicabilidade para projetos rápidos e otimização operacional em contextos de menor escala, justamente aqueles associados aos dejetos humanos e bovinos.

É precisamente nestas duas frentes, a temática e a metodológica, que este trabalho se insere. A presente pesquisa preenche uma lacuna dupla ao: primeiro ao realizar um estudo comparativo sistemático da produção de biogás a partir de dejetos humanos e bovinos, fazendo um levantamento estimado de suas propriedades reológicas, segundo ao introduzir e validar a aplicação da técnica híbrida analítico-computacional chamada Generalized Integral Transform Technique -GITT ou, em português, técnica da transformada integral generalizada.

A escolha do GITT é estrategicamente motivada pela necessidade de um modelo que combine o rigor analítico com a eficiência computacional, superando as limitações dos métodos puramente numéricos. Esta abordagem permite uma descrição física e matemática mais fundamentada e parametricamente eficiente dos processos de transferência e reação, se oferecendo como uma ferramenta de análise, projeto e otimização de sistemas de produção de biogás.

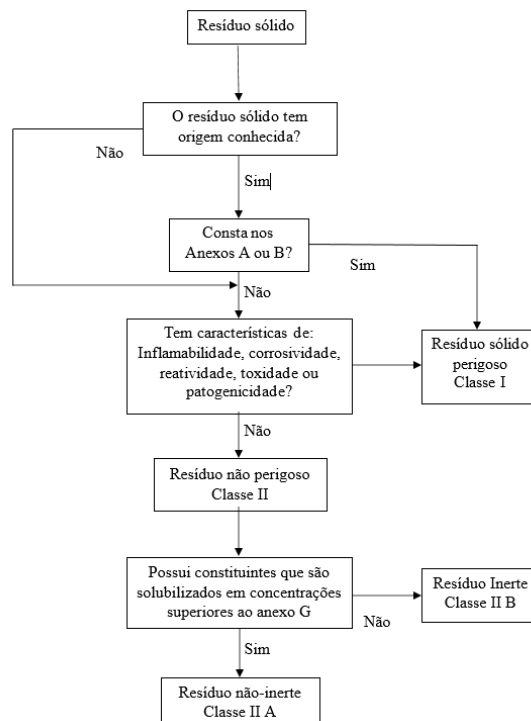
3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo são expostos os conceitos fundamentais sobre resíduos sólidos orgânicos, biogás, biodigestores e o processo de digestão anaeróbia. Apresenta-se ainda a base teórica da modelagem matemática de fenômenos de transporte, transformadas integrais e um subtipo conhecido como transformada integral generalizada.

3.1 RESÍDUOS SÓLIDOS

Resíduos nos estados sólido e semissólido, são resultados de atividades de origem doméstica, comercial, hospitalar, industrial ou agrícola. Os lodos provenientes de sistemas de tratamento de água gerados em equipamentos e instalações de controle de poluição e líquidos que não possam ser lançados na rede pública de esgotos também são considerados resíduos sólidos. (ABNT NBR 10004, 2004). A Figura 4 pode mostra o fluxograma usado para identificar os diferentes tipos de resíduos sólidos.

Figura 4- fluxograma de diferenciação de resíduos.



Fonte: ABNT NBR 10004, 2004

Ainda por ABNT NBR 10004 (2004), podemos classificar os resíduos sólidos urbanos em critérios de meio ambiente e de saúde pública, isso depende do conhecimento do processo

gerador e dos insumos usados. Os considerados perigosos são chamados de resíduos de classe I e sua periculosidade se deve às suas propriedades físicas, químicas ou infectocontagiosas apresentarem risco à saúde pública e ao meio ambiente podendo ainda ter características tóxicas, patogênicas, corrosivas, inflamáveis ou reativas.

Os resíduos não perigosos e não inertes são classificados como Classe II A, onde se caracterizam por serem resíduos não perigosos onde seus constituintes se solubilizam água e podem ter ainda propriedades como combustibilidade e biodegradabilidade (ABNT NBR 10004, 2004). Esterco, fezes humanas, podas de árvores, sobras alimentares, farelos vegetais, papelões são exemplos desses resíduos de classe II (ANTONIASSI, 2017)

Os resíduos não perigosos e inertes são classificados como Classe II B, e se caracterizam por serem resíduos não perigosos onde seus constituintes não se solubilizam em água a um nível de concentração superior ao de potabilidade da água (ABNT NBR 10004, 2004). Areia, vidros, tijolos, restos de construções, alguns tipos de plásticos são exemplos desses resíduos de classe II B (GARCILASSO et al., 2018).

A sociedade vem buscando formas para diminuir os impactos ambientais. Para garantir um desenvolvimento sustentável, deve-se gerenciar melhor o descarte de resíduos, independentemente do tipo de resíduo e dar uma utilidade para os resíduos sólidos urbanos.

3.2 RESÍDUOS SÓLIDOS ORGÂNICOS: ESTERCOS E FESES HUMANAS

Resíduos sólidos orgânicos, também chamados de resíduos úmidos ou biodegradáveis, são um tipo específico de lixo originado a partir de matéria de origem animal ou vegetal. Em essência, são todos os restos de seres vivos que descartamos em nossas atividades diárias. Os exemplos mais comuns incluem cascas e bagaços de frutas, restos de legumes e verduras, sobras de alimentos cozidos, cascas de ovos, borra de café, filtros de papel usados com café, folhas secas, grama cortada e pequenos galhos provenientes da poda de jardins.

A característica fundamental desses resíduos é a sua capacidade de se decompor de forma relativamente rápida pela ação de microorganismos, como bactérias e fungos, em um processo natural de biodegradação. Quando geridos de maneira adequada, por meio da compostagem, que transforma o resíduo em adubo de alta qualidade, ou da digestão anaeróbia que pode gerar biogás, uma fonte valiosa de energia renovável, os resíduos orgânicos deixam de ser um problema ambiental e se tornam um recurso valioso, fechando o ciclo natural da matéria e reduzindo significativamente a quantidade de lixo enviada para aterros sanitários.

O esterco é definido como os excrementos de animais, como bovinos, suínos e aves, frequentemente misturados com materiais como palha, que são coletados dos criadouros. Trata-se de um resíduo orgânico de alto valor com valor com densidade média entre 500kg/m^3 a 800kg/m^3 (Fao, 2023), tradicionalmente empregado como fertilizante natural na agricultura devido à sua riqueza em nutrientes essenciais para o solo e para as plantas.

O uso do esterco para gerar biogás é um processo que ocorre por meio de uma tecnologia conhecida como digestão anaeróbia, que é realizada em um equipamento fechado chamado biodigestor. Nesse ambiente, na total ausência de oxigênio, microorganismos específicos decompõem a matéria orgânica presente no esterco. Essa ação bacteriana quebra as moléculas complexas do resíduo, libertando como produto principal uma mistura de gases inflamável, o biogás. O componente energético mais importante do biogás é o metano, que pode ser utilizado para gerar energia elétrica em motogeradores, para produzir calor em fogões e caldeiras, ou, após ser purificado, transformar-se em biometano para uso como combustível veicular.

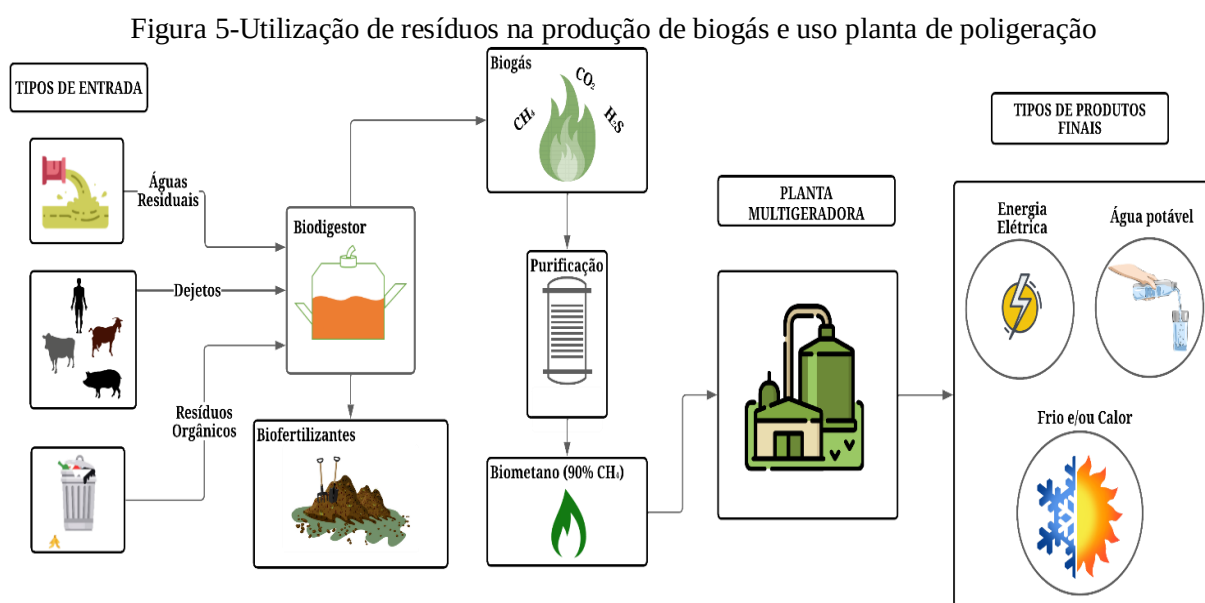
Para além da produção de energia, este processo gera um subproduto igualmente valioso, o digestato. Este material residual, que sobra após a digestão, é um fertilizante líquido de excelente qualidade, com os nutrientes mais disponíveis para as plantas e com uma redução significativa de odores e de agentes patogênicos em comparação com o esterco fresco. Desta forma, a biodigestão do esterco apresenta-se como uma solução integrada e sustentável, transformando um resíduo numa fonte de energia renovável e num fertilizante natural, ao mesmo tempo que previne a emissão de metano para a atmosfera e melhora a gestão sanitária nas propriedades rurais.

As fezes humanas são os resíduos sólidos resultantes do processo digestivo humano, formadas pelos materiais não absorvidos pelo intestino, como fibras, bactérias intestinais, água e sais e tem densidade média acima da água, com valores médios entre 1000 kg/m^3 a 1200 kg/m^3 a Tilley (2014). No contexto do saneamento básico e da gestão de resíduos, o termo mais abrangente e adequado é dejetos humanos ou lodo de esgoto, que frequentemente inclui não apenas as fezes, mas também a urina e o papel higiênico, constituindo o principal componente dos esgotos sanitários.

O uso dos dejetos humanos para a produção de biogás segue o mesmo princípio científico aplicado ao esterco animal, um processo denominado digestão anaeróbia. Esta tecnologia é uma solução sustentável para transformar um passivo ambiental e sanitário em um recurso energético. O processo inicia-se com a coleta dos dejetos, que são conduzidos para tanques de sedimentação nas estações de tratamento de esgoto (ETEs), onde se forma o lodo primário. Este lodo, rico em matéria orgânica, é então encaminhado para um reator fechado, o

biodigestor. Dentro deste equipamento, na completa ausência de oxigênio, uma comunidade complexa de bactérias anaeróbias decompõe a matéria orgânica presente nos dejetos. Ao metabolizarem esse material, essas bactérias libertam uma mistura de gases, o biogás, cujo principal componente combustível é o metano.

O biogás produzido a partir de dejetos humanos pode ser aproveitado de várias formas. Nas próprias estações de tratamento, é comum que ele seja queimado para gerar calor e vapor, utilizados no aquecimento dos digestores para manter a temperatura ideal do processo ou, em instalações mais avançadas, pode alimentar motogeradores para a produção de energia elétrica ou ainda em sistemas mais complexos de poligeração como mostra a figura 5. Esta energia pode abastecer a estação, reduzindo drasticamente os seus custos operacionais com eletricidade, ou pode ser injetada na rede elétrica pública. Após a conclusão do processo de digestão, o material remanescente, conhecido como bio sólido ou lodo digerido, é um subproduto de grande utilidade. Devidamente tratado e estabilizado, este material perde a maioria dos seus agentes patogênicos e pode ser utilizado como um condicionador de solo ou fertilizante na agricultura, fechando o ciclo dos nutrientes.



Fonte: Carvalho et al. (2025).

3.3 BIOGÁS E BIOCOMBUSTÍVEL

O biogás é uma mistura de gases com propriedade combustível composta especialmente de gás metano e gás carbônico e em menor quantidade por vapor de água, ácido sulfídrico, amônia e outros. É concebido por atividade bacteriana em ambientes que impossibilitem a troca

de ar, ou ambientes alagados que submersa o resíduo a ponto de não ter contato com o ar caracterizando-se por uma reação anaeróbia (KUNZ, STEINMETZ, AMARAL, 2022).

Essa condição é necessária para o desenvolvimento dessas bactérias anaeróbias que produzem o gás ao consumir os resíduos. A tabela 2 mostra o intervalo médio de composição do biogás em comparação com Gás Natural e Gás de Síntese (SynGas), feito através de gaseificação de biomassa. A tabela abaixo mostra o intervalo médio de composição do biogás em comparação com Gás Natural e Gás de Síntese

Tabela 2- Comparação do Biogás com Gás Natural e Gás de Síntese

Compostos	Composição Volumétrica (%)		
	Biogás	Gás Natural	SynGas
Metano (CH ₄)	55-70	91	0-15
Etano (C ₂ H ₆)	0	5,1	0
Propano (C ₃ H ₈)	0	1,8	0
Butano (C ₄ H ₁₀)	0	0,9	0
Pentano (C ₅ H ₁₂)	0	0,3	0
Gás Carbônico (CO ₂)	25-40	0,61	25-35
Hidrogênio (H ₂)	0	0	20-40
Gás Sulfídrico (H ₂ S)	0,5-1	< 0,001	0
Nitrogênio (N ₂)	< 0,001	0,32	2-5
Amônia (NH ₃)	< 0,01	< 0,001	< 0,001
Monóxido de Carbono (CO)	< 0,01	0	35
Vapor d'água	2-4	0	0

Fonte: Adaptado de Kunz, Steinmetz, Amaral, 2022

Como pode ser observado na tabela acima, os dois maiores componentes do biogás, metano e gás carbônico, somam juntos cerca de 95% da composição volumétrica do mesmo. Esses gases são os dois causadores do efeito estufa sendo que o CH₄ tem o poder de poluir 21 vezes mais do que o CO₂ de acordo com GARCILASSO et al, o que acaba impactando no aquecimento global.

Para diminuir esse impacto o metano deve ser queimado e não ser lançado diretamente na atmosfera. A maneira mais ineficiente é simplesmente queimar a céu aberto, em flare, é a forma eficiente é garantir um aproveitamento energético desse biogás como biocombustível.

3.4 BIODIGESTORES

A Política Nacional de Resíduos Sólidos (PNRS), ao determinar que apenas rejeitos podem ser destinados a aterros sanitários, criou a obrigação de expandir a reutilização e a reciclagem de diversos materiais. Isso exigiu o aprimoramento de técnicas e tecnologias para que essa prática se tornasse comum em todo o território nacional. Especificamente, os resíduos orgânicos, que não podem mais ser descartados em aterros, tornaram-se alvo de mais pesquisas para aumentar seu potencial de reaproveitamento e de produção de subprodutos com utilidade.

O biodigestor é uma das ferramentas existentes para o tratamento e aproveitamento de resíduos orgânicos. De acordo com Silva e Trevisan (2019) O biodigestor anaeróbio consiste numa câmara de fermentação onde é processada a matéria orgânica por biodigestão anaeróbia e armazenado o biogás produzido. Essa tecnologia desperta grande interesse de uso, pois possibilita recuperar o potencial energético do resíduo na forma de biogás e ainda consegue tratar o material residual apenas mantendo as propriedades fermentativas da biomassa gerando assim biofertilizantes. O biogás é gerado por decomposição anaeróbia de matéria orgânica formando na realidade uma mistura de gases composta por metano, gás carbônico, gás sulfídrico, nitrogênio, hidrogênio, oxigênio, entre outros, sendo o metano que se apresenta em maior quantidade o combustível de queima do gás segundo Alves (2020).

A utilização de biodigestores não é uma novidade, tendo sido historicamente empregada para decompor sobras vegetais, esterco animal e esgoto, com o principal objetivo de utilizar os gases gerados para produção de energia. No entanto, a tecnologia de biodigestão e a geração de biogás ficaram estagnadas devido à grande oferta e ao preço baixo do petróleo. Esse cenário mudou com as crises energéticas recentes e uma maior conscientização sobre problemas ambientais e a gestão adequada de resíduos (GASPAR, 2003).

Quanto à operação, os biodigestores são classificados em dois tipos: descontínuos (ou em batelada) e contínuos. O modelo descontínuo é aquele que recebe o material uma única vez, permanecendo fechado durante todo o tempo necessário para a biodegradação. Já o modelo contínuo é alimentado regularmente, geralmente de forma diária, sendo que a cada nova adição de material, uma quantidade equivalente de produto já fermentado é removida. Dentro do biodigestor, a biomassa se move devido à diferença de pressão hidráulica entre a entrada do substrato fresco e a saída do biofertilizante durante o carregamento.

O período de processamento (tempo de retenção) varia de 30 a 50 dias, dependendo da temperatura externa, razão pela qual esses equipamentos são frequentemente instalados subterraneamente. No Brasil, os modelos mais usuais são o chinês e o indiano. Em qualquer um dos tipos (contínuo ou descontínuo), o tempo de retenção pode ser encurtado mediante a

utilização de agitação, aquecimento ou adição de culturas de microrganismos para acelerar a decomposição (BENINCASSA et al., 1991 apud QUEIROZ, 2003)."

O biodigestor de batelada opera de maneira intermitente, com funcionamento em períodos específicos, não sendo contínuo. Seu carregamento consiste na introdução de uma grande quantidade de matéria orgânica de uma só vez, seguida pelo fechamento hermético do sistema. Isso é crucial para impedir a entrada de oxigênio e assegurar a produção de metano no biogás. Uma nova carga de material só é adicionada após a decomposição da matéria orgânica existente reduzir seu volume a aproximadamente 20% da capacidade total do biodigestor.

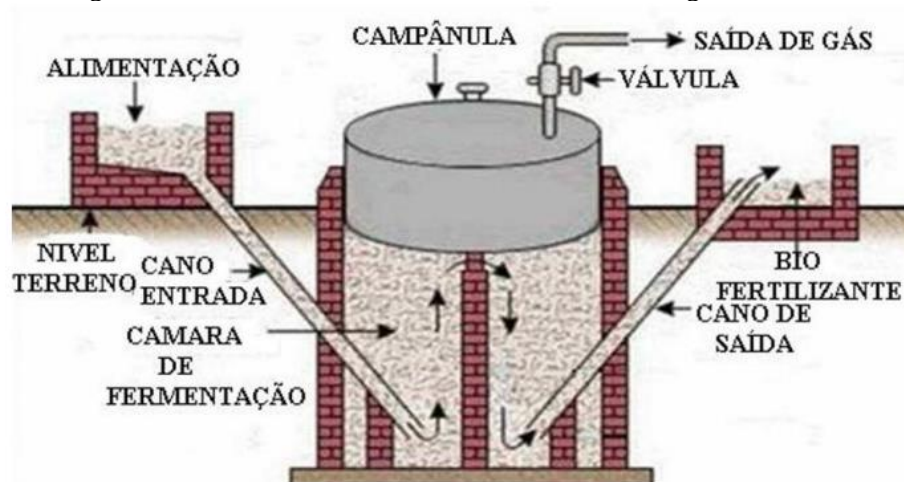
A construção desse modelo é simples, composta basicamente por uma câmara de digestão de alvenaria e um medidor de gás. Consequentemente, é um sistema de manutenção fácil, ideal para locais onde a geração de biomassa é periódica, como em granjas de frango de corte (EMAS Jr., 2021).

Já o biodigestor contínuo é alimentado constantemente por meio de tubos de entrada, como os modelos indiano, chinês e canadense. Sua configuração pode ser vertical, com a alimentação pela base e a saída do biogás no topo, ou horizontal, com a entrada e saída realizadas pelas laterais. Recomenda-se sua instalação em áreas com lençóis freáticos para prevenir contaminação, e é essencial que a matéria orgânica inserida esteja triturada e dissolvida para evitar obstruções na tubulação, que prejudicariam a geração de biogás.

3.4.1 Principais modelos de biodigestores

O modelo indiano se caracteriza por ter uma parede divisória no centro, que promove uma melhor circulação do substrato dentro do sistema. Isso facilita a renovação da matéria orgânica e aumenta o potencial de produção de gás. Outra característica é a utilização de uma campânula móvel de metal, que eleva o custo do equipamento e tem a função de regular a pressão interna do biodigestor, como ilustrado na figura 6 mostra um modelo bidimensional de biodigestor chinês e a figura 7 traz uma vista tridimensional."

Figura 6-Vista bidimensional de um modelo de biodigestor indiano



Fonte: Fonseca et al. (2009)

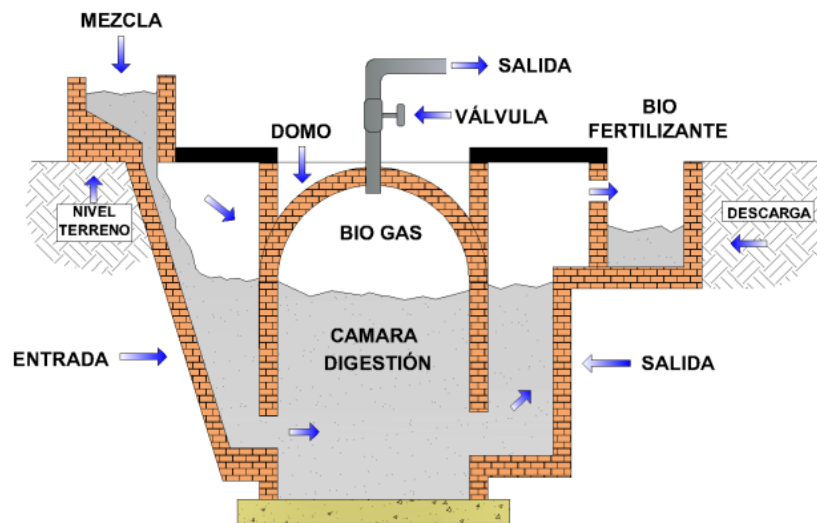
Figura 7- Vista tridimensional de um biodigestor indiano



Fonte: Tabatabaei, Ghanavati, (2018)

Em contrapartida, o biodigestor de modelo chinês dispensa o uso de uma campânula metálica, possuindo um teto impermeável que impede o escape do gás. Outra distinção em relação ao modelo indiano reside no fato de que, no sistema chinês, a pressão interna flutua conforme a quantidade de biogás produzida. Essa variação de pressão é o mecanismo que impulsiona o deslocamento da matéria orgânica da câmara de fermentação para a caixa de saída, conforme ilustrado na figura 8. A principal desvantagem deste modelo é a sua inadequação para operações em grande escala, uma vez que uma parcela do biogás formado na caixa de saída é perdida, na figura 9 podemos ver um modelo instalado.

Figura 8- vista em secção de um modelo de biodigestor chinês



Fonte: Fonseca et al. (2009)

Figura 9- Modelo de biodigestor chinês instalado

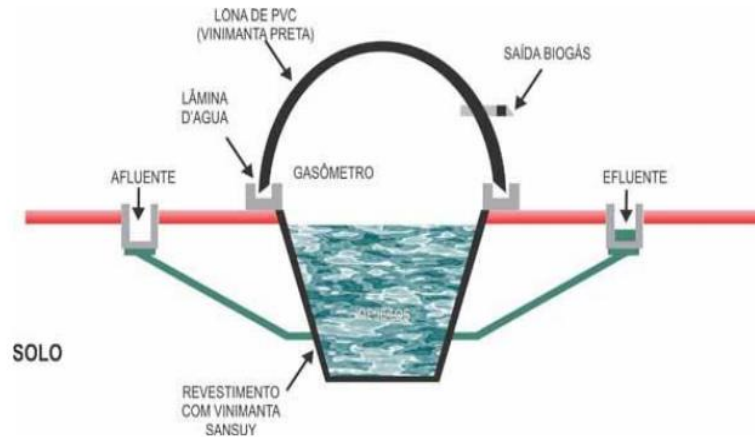


Fonte: Tabatabaei, Ghanavati, (2018)

O biodigestor de modelo canadense se baseia no princípio de que uma maior exposição da matéria orgânica à luz solar resulta em uma produção elevada de biogás e em um risco reduzido de obstrução dos dutos como pode ser visto na figura 10. Por essa razão, sua construção consiste em uma caixa de alvenaria com grande área superficial e pouca profundidade, recoberta por uma cúpula flexível de lona de PVC, onde podemos ver um modelo

instalado na figura 11. Trata-se do modelo com custo mais baixo e de emprego mais frequente no Brasil, especialmente em propriedades rurais (TABATABAEI, GHANAVATI, 2018)

Figura 10- Vista em secção de um modelo de biodigestor canadense



Fonte: Tabatabaei, Ghanavati, 2018

Figura 11- modelo de biodigestor canadense instalado



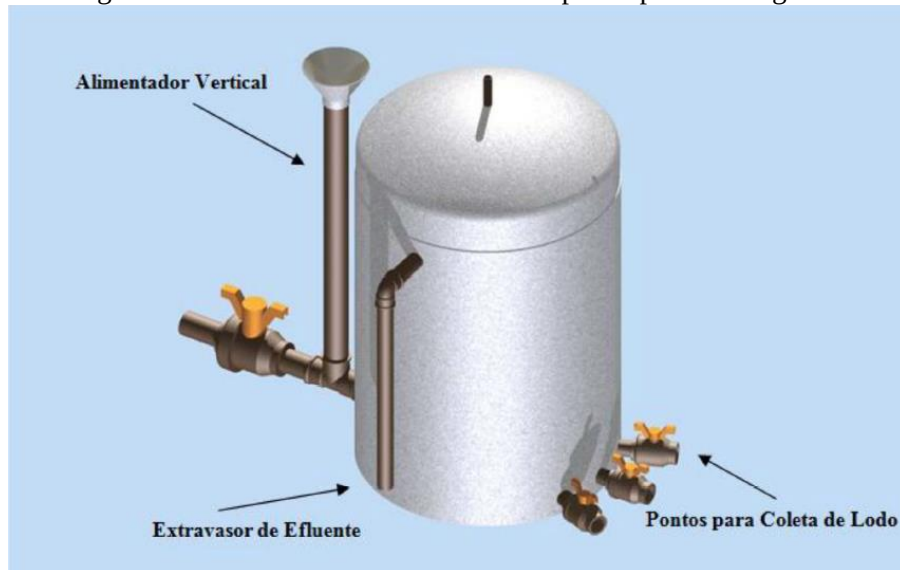
Fonte: Emas Jr. (2021)

3.4.2 Protótipos de estudo com biodigestores

Na pesquisa sobre produção de biogás, a criação de protótipos em escala reduzida é uma prática comum, motivada pelo custo elevado, pela complexidade de construção no ambiente acadêmico e pela disponibilidade de matéria-prima. A figura 12 a seguir exibe o protótipo

desenvolvido por Reis (2009), utilizado em experimentos no Laboratório de Engenharia Ambiental da UFPE, em Caruaru (PE). Essa unidade pode ser vista instalada na figura 13, servindo como ferramenta de análise para estudar o tratamento da parte orgânica dos resíduos sólidos urbanos, especificamente os originários da cozinha do restaurante universitário do campus

Figura 12-Desenho tridimensional de um protótipo de biodigestor



Fonte: Reis (2009)

Figura 13- protótipo instalado



Fonte: Reis (2009)

3.5 DIGESTÃO ANAERÓBIA

A digestão anaeróbia é um processo metabólico complexo e depende da atividade conjunta de uma associação de microrganismos para transformar material orgânico em dióxido de carbono e metano. O processo pode ser dividido em quatro fases, sendo: hidrólise, acidogênese, acetogênese e metanogênese. Cada etapa é realizada por diferentes grupos de microrganismos, em sintrofia, e podem requerer diferentes condições ambientais.

A fase de hidrólise degrada compostos de alta massa molecular como os lipídios, polissacarídeos e proteínas em substâncias orgânicas mais simples (monômeros) e solúveis. Esse processo ocorre pela ação de enzimas extracelulares excretadas pelas bactérias hidrolíticas. É a etapa mais importante na velocidade de degradação que varia de acordo com o substrato orgânico em questão. (KUNZ, STEINMETZ, AMARAL, 2022).

Na fase acidogênica, os monômeros formados são degradados em ácidos orgânicos de cadeia curta, moléculas com 1 a 5 carbonos, álcoois, óxidos de nitrogênio, sulfeto de hidrogênio, hidrogênio e dióxido de carbono. A fase acetogênica as reações são endotérmicas e crítica ao processo, transformados os ácidos de cadeia longa em ácidos com apenas um ou dois átomos de carbono, simultaneamente produzindo gás carbônico e hidrogênio.

Ainda por Kunz, Steinmetz, Amaral (2022), A etapa final, metanogênese as reações são exotérmicas ocorrendo em condições estritamente anaeróbias. Deste modo, o carbono contido na biomassa é convertido a dióxido de carbono e metano através da ação das arqueas metanogênicas que convertem acetato, hidrogênio e dióxido de carbono em metano.

3.5.1 Similaridade do comportamento reológicos em matrizes orgânicas

Para entender algumas propriedades reológicas do matrizes orgânicas como exemplo dejetos bovinos ou humanos é muito importante estabelecer os valores de sólidos totais (ST) da matriz. Matriz orgânicas de dejetos bovinos costumam ter entre 15% a 20% (Fao, 2023), para matriz de dejetos humanos Donacho (2023) encontrou 24,8% de ST.

A fundamentação para a aplicação de modelos reológicos desenvolvidos para um substrato de lodo de esgoto em outros substratos orgânicos, a exemplo de fezes humanas e bovinas reside no princípio de que, em elevados teores de sólidos, o comportamento reológico é majoritariamente governado pelas interações físico-estruturais da matriz de partículas, e não pela sua composição bioquímica específica.

Estudos estabelecem que o Teor de sólidos totais é o parâmetro dominante na definição das propriedades reológicas de suspensões orgânicas complexas. Jiang et al. (2014), ao estudarem lodo digerido altamente concentrado, demonstraram que parâmetros críticos como a tensão de escoamento (τ_y) e o índice de consistência (K) seguem relações de lei de potência com o TS, independentemente de variações composicionais mais sutis. Este fenômeno é atribuído ao fortalecimento da rede estrutural e ao aumento das interações partícula-partícula à medida que a concentração de sólidos aumenta.

Mais significativamente, o trabalho de Cao et al. (2016) fornece evidências empíricas diretas da similaridade qualitativa do comportamento reológico em matrizes de lodo de origens distintas. Os autores compararam sistematicamente lodos de esgoto não digerido e digerido anaerobicamente, dois materiais com composição bioquímica e histórico de processo consideravelmente diferentes. Seus resultados são conclusivos: ambos os materiais exibiram o mesmo comportamento reológico fundamental pseudoplasticidade e tixotropia, sendo as diferenças meramente quantitativas associadas a seu teor de ST. Isto indica que a natureza genérica das interações que governam a reologia, formação de redes, forças de van der Waals, ligações de hidrogênio, é compartilhada entre matrizes orgânicas complexas.

Portanto, conclui-se que substratos como lodo de esgoto, fezes humanas e fezes bovinas, quando ajustados para um mesmo ST, possuem arquiteturas de microestrutura análogas que resultam em comportamentos reológicos qualitativamente equivalentes e quantitativamente comparáveis. Esta premissa é a base que valida a transferência de modelos reológicos entre estes substratos.

3.6 MODELAGEM MATEMÁTICA DO ESCOAMENTO DO SUBSTRATOS

A modelagem matemática do escoamento de substratos representa uma ferramenta analítica para a otimização de processos produtivos em reatores anaeróbios. Através de um conjunto de equações diferenciais que descrevem os princípios de conservação, é possível prever com precisão o comportamento hidrodinâmico, térmico e de transferência de massa desses sistemas complexos.

Esta abordagem matemática permite não apenas compreender os fenômenos físicos envolvidos, mas também simular cenários operacionais, projetar equipamentos mais eficientes e controlar parâmetros críticos que afetam diretamente o desempenho desses processos. As equações de conservação aqui apresentadas formam a base teórica para descrever a dinâmica

do substrato em geometrias cilíndricas, considerando os acoplamentos entre os campos de velocidade, temperatura e concentração.

A formulação em coordenadas cilíndricas é particularmente cada vez mais relevante quanto maior a característica axial for em relação a radial, ou seja, um escoamento com características tubulares, sendo ideal para biodigestores de grande porte como de lagoa, porém mesmo quando essas características não forem tão distintas, contanto que a velocidade média na direção longitudinal seja pequena o modelo pode ser utilizado. As informações sobre o conjunto de equações governante abaixo podem ser encontradas em literatura vasta a contar dos autores Cengel; (2015); Incropera (2014) e Cremasco (2021).

3.6.1 Equação da continuidade.

A conservação de massa para o escoamento do substrato é descrita pela equação da continuidade em coordenadas cilíndricas:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(ru)}{\partial x} = 0 \quad (3.1)$$

Esta equação representa o balanço de massa em um volume de controle. Para fluido incompressível, estabelece que o fluxo líquido de massa através de todas as direções é nulo, garantindo a conservação local da massa do substrato no domínio de escoamento.

3.6.2 Equação da quantidade de movimento na direção axial x

O balanço de momentum na direção axial é governado pela componente x da equação de Navier-Stokes:

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_x}{\partial \theta} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_x}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right] \quad (3.2)$$

Esta equação descreve o balanço dinâmico entre as forças que atuam no substrato na direção axial. O termo do lado esquerdo representa a aceleração total do fluido, incluindo os efeitos convectivos, enquanto o lado direito contabiliza as forças de pressão, viscosas e gravitacionais. Para escoamentos de substratos em reatores biológicos, esta equação é fundamental para prever padrões de escoamento e distribuição de velocidades.

3.6.3 Equação da energia

A transferência de energia térmica no substrato é modelada pela equação 3.2 que trata da conservação de energia

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) = k \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + \dot{q} \quad (3.3)$$

Esta equação governa a distribuição de temperatura no substrato, considerando os mecanismos de transporte de calor por convecção (termos com velocidades) e condução (termos com derivadas espaciais de segunda ordem). O termo $\dot{q}$ representa fontes ou sumidouros de calor, particularmente relevante em processos fermentativos onde reações bioquímicas exotérmicas ocorrem.

3.6.4 Equação do transporte de espécies

A distribuição de concentração de componentes do substrato é descrita pela equação de transporte de espécies:

$$\rho c_p \left(\frac{\partial C_A}{\partial t} + v_r \frac{\partial C_A}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial C_A}{\partial \theta} + v_x \frac{\partial C_A}{\partial x} \right) = D_{AB} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial C_A}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 C_A}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 C_A}{\partial z^2} \right] + r_A \quad (3.4)$$

Esta equação descreve o balanço de massa para espécies químicas presentes no substrato, considerando transporte convectivo, difusão molecular, governada pela Lei de Fick e reações químicas ou bioquímicas homogêneas R_A . É fundamental para modelagem de reatores químicos e processos de transferência de massa, onde no caso do substrato em um reator, a distribuição da carga orgânica, é um fator relevante para o desempenho do processo.

3.6.5 Adimensionais relevantes no processo de escoamento

Os números adimensionais aparecem naturalmente das equações governantes de conservação através do processo de adimensionalização, representando relações fundamentais entre os diferentes fenômenos de transporte presentes no escoamento de substratos. Estes parâmetros sintetizam a complexa interação entre forças inerciais, viscosas, difusivas e convectivas, proporcionando critérios essenciais para a análise de similaridade e escala de biodigestores.

Entre os adimensionais mais relevantes destacam-se o Número de Reynolds (Re), que caracteriza o regime de escoamento; o Número de Péclet (Pe), que relaciona transporte convectivo e difusivo; o Número de Nusselt (Nu), que quantifica a eficiência da transferência de calor e o Número de Schmidt (Sc), que compara a difusividade momentum e mássica. Seus valores críticos determinam transições entre diferentes regimes operacionais, permitindo otimizar a eficiência de mistura, transferência de calor e taxas de reação nos processos de produção de biogás.

A correta interpretação desses adimensionais possibilita a previsão do comportamento do sistema sob diferentes condições operacionais, servindo como ferramenta fundamental para o projeto e operação de biodigestores com máxima eficiência energética e conversão de substratos. As informações sobre os adimensionais abaixo podem ser encontradas em literatura vasta a contar dos autores Fox, Pritchard e McDonald; (2000); e Incropera (2014).

O Número de Reynolds (Re) constitui um parâmetro adimensional em mecânica dos fluidos que quantifica a razão entre forças inerciais e forças viscosas atuantes em um escoamento. Essa relação permite a previsão do regime de fluxo, classificando-o como laminar, caracterizado por camadas ordenadas, ou turbulento, marcado por mistura e desordem. Sua definição matemática é dada por

$$Re = \frac{\rho v L}{\mu} \quad (3-5)$$

Ou ainda

$$Re = \frac{v L}{\nu} \quad (3-6)$$

Onde Re é o número de Reynolds; ρ é a densidade do fluido; v é a velocidade do fluido L é a comprimento característico (como o diâmetro de um tubo ou o comprimento de um aerofólio); μ é a viscosidade dinâmica; e ν é a viscosidade cinemática do fluido.

O Número de Prandtl (Pr) é uma grandeza adimensional que estabelece a relação entre a difusividade de quantidade de movimento, viscosidade cinemática, ν , e a difusividade térmica α de um fluido. Definido pela razão

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad (3-7)$$

ou, de modo equivalente,

$$P_r = \frac{\mu c_p}{k} \quad (3-8)$$

Onde c_p é o calor específico do fluido e k é a condutividade térmica, este parâmetro indica a efetividade relativa da difusão de momento frente à difusão de calor no meio fluido. Ele é fundamental para a análise de convecção térmica e para a determinação das espessuras relativas das camadas limite hidrodinâmica e térmica. Para $P_r \ll 1$ temos que a difusão de calor é mais rápida que a difusão de momento. Isso resulta em uma camada limite térmica mais espessa que a camada limite hidrodinâmica, já para $P_r \gg 1$ a difusão de momento é mais rápida que a difusão de calor. A camada limite hidrodinâmica é mais espessa que a camada limite térmica.

O Número de Nusselt (Nu) é uma grandeza adimensional fundamental que quantifica a razão entre as taxas de transferência de calor por convecção e por condução em um escoamento fluido. Esta grandeza constitui uma métrica crucial para a determinação do coeficiente de transferência de calor por convecção, sendo expressa por

$$Nu = \frac{hL}{k_f} \quad (3-9)$$

Onde h é coeficiente de transferência de calor convectivo, L é o comprimento característico do sistema e k_f a condutividade térmica do fluido. O número de Nusselt é frequentemente expresso sob a forma de uma correlação funcional dependente de outros números adimensionais fundamentais. Entre estes, destacam-se o número de Reynolds, que caracteriza a natureza do regime de escoamento e o número de Prandtl, o qual estabelece uma relação entre as camadas limites de difusão de quantidade de movimento e de calor, sendo, portanto, uma medida que correlaciona as propriedades de transferência de momento e de energia térmica do fluido. A correlação funcional de Ranz-Marshall dada, quando $0 < Re < 200$ e $0 < Pr < 250$, por:

$$S_h = 2 + 0,6 \cdot R_e^{\frac{1}{2}} \cdot P_r^{\frac{1}{3}} \quad (3-10)$$

A magnitude do número de Nusselt (Nu) permite inferir a natureza e a eficácia do mecanismo de transferência de calor predominante. Quando $Nu = 1$, a taxa de transferência de calor por convecção é equivalente àquela que ocorreria por condução pura através de uma camada de fluido estagnado, indicando que o movimento do fluido não confere qualquer melhoria ao processo. Para valores no intervalo $1 < Nu < 10$, observa-se tipicamente a atuação da convecção natural, na qual o escoamento, embora ainda organizado, promove um incremento mensurável na taxa de transferência de calor quando comparada à condução isolada. Valores de $Nu > 10$ denotam um regime de convecção ativa e significativamente mais eficiente. Finalmente, a faixa de $Nu = 100$ a 1000 está comumente associada à presença de escoamento turbulento, um regime no qual a intensa mistura do fluido resulta em uma drástica potencialização do transporte de calor.

O Número de Schmidt (Sc) é um adimensional que expressa a razão entre a difusividade de momento e a difusividade mássica. Caracteriza escoamentos de fluidos nos quais ocorrem simultaneamente os processos de difusão de quantidade de movimento e de massa, sendo calculado por

$$S_c = \frac{\nu}{D} \quad (3-11)$$

Onde ν é a viscosidade cinemática e D representa o coeficiente de difusão mássica. O número de Schmidt caracteriza a relação entre as taxas de difusão de quantidade de movimento e de massa em um fluido. Valores elevados deste parâmetro indicam a predominância da difusividade de momento sobre a difusividade mássica, refletindo uma transferência mais eficiente de quantidade de movimento em comparação com a de massa. Por outro lado, valores reduzidos demonstram o comportamento oposto, onde a difusão de massa ocorre mais significativamente que a difusão de momento.

O Número de Sherwood (Sh) é um parâmetro adimensional que mensura a taxa de transferência de massa em um fluido, estabelecendo uma comparação entre os mecanismos de transporte convectivo e difusivo de um soluto dado por

$$S_h = \frac{KL}{D} \quad (3-12)$$

Onde K é o coeficiente de transderencia de massa. Este número representa a razão entre a transferência de massa por convecção e por difusão, atuando como o análogo para transferência de massa do Número de Nusselt (Nu), utilizado em transferência de calor. Valores reduzidos de Sh denotam a dominância do transporte difusivo, enquanto valores elevados indicam a preponderância da convecção. O número de Sherwood ainda pode ser escrito em função do número de Reynolds e Schmidt considerando um formato próximo ao esférico através da relação de correlação de Ranz-Marshall dada por

$$S_h = 2 + 0,6 \cdot R_e^{\frac{1}{2}} \cdot S_c^{\frac{1}{3}} \quad (3-13)$$

O Número de Peclet (Pe) é uma grandeza adimensional que descreve a razão entre as taxas de transporte advectivo (devido ao movimento global do fluido) e difusivo (por mecanismos moleculares) de uma dada propriedade, como calor ou massa, em um sistema. Quando a propriedade é o calor temos o número de Peclet térmico e é dado por

$$Pe_t = \frac{Lv}{\alpha} = R_e \cdot P_r \quad (3-14)$$

Onde L é o comprimento característico, v é a velocidade característica do fluido e α é a difusividade térmica do substrato e pode ser entendido como o produto dos números adimensionais de Reynolds e Prandtl. Quando $Pe_t \ll 1$ (por exemplo, inferior a 0,1), estabelece-se um regime de condução dominante. Neste cenário, a difusão de calor ocorre predominantemente por condução através da matriz do material. Para valores de Pe_t próximos à unidade, por exemplo, na faixa de 0,1 a 10, vigora um regime misto de transferência de calor. Neste intervalo, os mecanismos de convecção e condução apresentam magnitudes comparáveis, sendo ambos relevantes para a distribuição da energia térmica no sistema. Por fim, quando $Pe_t \gg 1$ (por exemplo, superior a 10), prevalece um regime de convecção dominante. Nesta condição, o movimento do fluido é suficientemente intenso para promover o transporte eficiente de calor por toda a massa.

Quando a propriedade é a massa temos o número de Peclet mássico e é dado por

$$Pe_m = \frac{Lv}{D} = R_e \cdot S_c \quad (3-15)$$

Onde D é a difusividade mássica do soluto e pode ser entendido como o produto dos números adimensionais de Reynolds e Schmidt. As faixas de valores são as mesmas do Peclet térmico, para valores em que $Pe_m \ll 1$, estabelece-se um regime de difusão dominante. Nesta condição, a mistura atribuída ao movimento global do fluido é insignificante. Quando Pe_m é próximo de 1, vigora um regime misto de transporte de massa. Nesta situação, os mecanismos de convecção e difusão molecular apresentam importâncias comparáveis. Por fim, quando $Pe_m \gg 1$, tem-se um regime de convecção dominante. Neste caso, a mistura induzida pelo movimento do fluido é altamente eficiente, promovendo a rápida homogeneização.

O Número de Biot (Bi) é um adimensional definido pela razão entre a resistência térmica à condução no interior de um corpo sólido e a resistência térmica à convecção em sua superfície. Sua aplicação principal reside na avaliação da uniformidade da distribuição de temperatura no interior de um corpo.

$$Bi = \frac{hL_c}{k} \quad (3-16)$$

Onde h o coeficiente de transferência de calor por convecção na superfície; L_c é o comprimento característico do corpo, que geralmente é o volume dividido pela área da superfície e k é a condutividade térmica do material.

De forma análoga, o Número de Biot mássico é empregado na análise de transferência de massa, comparando a resistência à difusão de massa no interior de um corpo com a resistência à transferência de massa convectiva em sua superfície para um fluido adjacente e é dada por

$$Bi_m = \frac{k_c \cdot L_c}{D_{ef}} \quad (3-17)$$

Onde k_c é o coeficiente de transferência de massa por convecção externa; L_c é o comprimento característico da partícula de substrato e D_{ef} é a difusividade efetiva do soluto dentro da partícula.

Quando $Bi_i < 0,1$, a resistência à condução (ou difusão mássica) interna é desprezível perante a resistência à convecção superficial, resultando em um perfil de temperatura ou

concentração praticamente uniforme ao longo do corpo. Sob esta condição, a análise simplificada pelo método da capacitância global é aplicável. Por outro lado, quando $B_i > 1$, a resistência à condução (ou difusão mássica) interna é significativa quando comparada à resistência convectiva na superfície, acarretando gradientes pronunciados de temperatura ou concentração no interior do corpo. Neste cenário, faz-se necessária a utilização de métodos analíticos ou numéricos mais sofisticados para uma modelagem adequada

3.6.6 Resolução computacional das EDP's governantes

A integração das equações de continuidade, quantidade de movimento, energia e transporte de espécies constitui um sistema matemático completo que captura a essência dos fenômenos de transporte. Esta formulação teórica fornece a base fundamental para o desenvolvimento de simulações computacionais, ambientes de modelagem numérica avançadas como Fortran ou Wolfram Mathematica, permitindo a resolução eficiente dessas equações diferenciais parciais. Tais simulações tornam-se ferramentas poderosas para otimizar a produção de biogás, possibilitando a análise detalhada de parâmetros operacionais em biodigestores, como padrões de escoamento, distribuição de temperatura, transferência de massa e taxas de reação.

Através da modelagem computacional, é possível projetar biodigestores com maior eficiência, prever o comportamento do sistema sob diferentes condições e implementar estratégias de controle avançado que maximizam o rendimento na produção de biogás, reduzindo custos operacionais e melhorando a viabilidade técnica e econômica desses sistemas.

3.7 TRANSFORMADAS INTEGRAIS

Por um tempo considerável foi reconhecido que o cálculo de operadores desenvolvido por Oliver Heaviside para a solução de problemas transitórios em física e engenharia elétrica era formalmente equivalente a um uso sistemático da transformada de Laplace (Butkov, 1973). Este é o método de apresentação adotado na maioria dos livros modernos de cálculo de operadores. Se, por exemplo, a função $f(x)$ é definida por uma equação diferencial e certas condições de contorno, é mais simples em certas circunstâncias traduzir o problema de valor de contorno para $f(x)$ em um para a função

$$\int_0^{\infty} f(x)e^{-px}dx \quad (3-18)$$

obtido de $f(x)$ multiplicando por e^{-px} integrando no que diz respeito x de 0 a ∞ . A função $F(p)$ definida desta forma é obviamente uma função da variável p . É chamado de Transformada de Laplace da função $f(x)$.

Este conceito pode ser estendido de forma óbvia. Quando a função $N(\alpha, x)$ é uma função conhecida das duas variáveis α e x a integral

$$F(\alpha) = \int_0^{\infty} f(x)N(\alpha, x)dx \quad (3-19)$$

é convergente, então a equação (3-19) define uma função da variável α . Essa função é chamada de transformada integral da função $f(x)$ pelo núcleo $N(\alpha, x)$. O exemplo mais simples de tal núcleo é

$$N(\alpha, x) = e^{\alpha x} \quad (3-20)$$

levando à transformada de Laplace. Outro núcleo que é comumente usado desta forma é o núcleo

$$N(\alpha, x) = x^{\alpha-1} \quad (3-21)$$

Levando à transformada

$$F(\alpha) = \int_0^{\infty} f(x)x^{\alpha-1}dx \quad (3-22)$$

Transformadas integrais deste tipo foram investigadas sistematicamente pela primeira vez por Mellin e por essa razão a função $F(\alpha)$ definida pela equação (3-22) é chamada de Transformação de Mellin da função $f(x)$. Outras transformações especiais surgem quando o núcleo $N(\alpha, x)$ é um seno ou um cosseno e quando é uma solução da equação diferencial de Bessel.

O principal problema é a determinação de operadores inversos pois comumente so encontramos em alguns casos especiais, dado exemplo

$$F(\alpha) = \int_0^{\infty} f(x)N(\alpha, x)dx \quad (3-23)$$

$$f(x) = \int_0^{\infty} F(\alpha)H(\alpha, x)d\alpha \quad (3-24)$$

Uma fórmula do tipo (3-24) que expressa a função $f(x)$ em termos de sua transformada integral (3-23) chamaremos de teorema da inversão.

3.7.1 Transformada integral generalizada e sua inversa

A Transformada Integral Generalizada, é uma transformada utilizada na resolução de problemas de transporte, estabelecida por Mikhailov e Özisik em 1984. Esta abordagem representa a evolução natural dos estudos inaugurados por Özisik e Murray (1974) e Mikhailov (1975), que expandiram os limites da Transformada Integral Clássica, que teve como base inicial a teoria de Sturm- Liouville, ao transcender as restrições do método de separação de variáveis.

Sua estrutura híbrida possibilita soluções analítico-numéricas que preservam rigor matemático sem abdicar da viabilidade computacional, característica particularmente valiosa na abordagem de problemas convectivo-difusivos não lineares, tão frequentes em fenômenos físicos reais. A transformação do problema original em sistemas de equações diferenciais ordinárias acopladas mantém o formalismo das soluções analíticas enquanto incorpora a flexibilidade dos métodos numéricos.

A versatilidade dessa transformada manifesta-se especialmente na capacidade de tratar configurações geometricamente complexas e problemas parametricamente dependentes, onde métodos puramente analíticos encontram limitações intransponíveis. A contribuição basilar de Cotta (1993) sistematizou e ampliou essas potencialidades, estabelecendo bases sólidas para aplicações em múltiplos domínios da engenharia. Esta fluência entre rigor analítico e praticidade computacional explica o êxito da técnica como ferramenta na modelagem avançada de fenômenos de transporte.

A transformada integral generalizada é usada para obter soluções analíticas formais. Considerando os problemas de difusão de calor e massa, para uma formalização mais costumeira considera-se o potencial $\Psi(\mathbf{r}, t) = T(\mathbf{r}, t)$. A formulação matemática de tais problemas é então dada como

$$w(\mathbf{r})\frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - \nabla \cdot (k(\mathbf{r})\nabla T(\mathbf{r}, t)) + d(\mathbf{r})T(\mathbf{r}, t) = P(\mathbf{r}, t) \quad (3-25)$$

$$w(\mathbf{r}) \frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mathcal{L}[T(\mathbf{r}, t)] = P(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{r} \in V \quad (3-26a)$$

sujeito à condição inicial

$$T(\mathbf{r}, 0) = f(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in V \quad (3-26b)$$

e as condições de contorno

$$B[T(\mathbf{r}, t)] = \phi(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{r} \in S \quad (3-26c)$$

onde os operadores lineares $\mathcal{L}$ e B são definidos como

$$\mathcal{L} \equiv -\nabla \cdot (k(\mathbf{r}) \nabla) + d(\mathbf{r}) \quad (3-26d)$$

$$B = \alpha(\mathbf{r}) + \beta(\mathbf{r})k(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial n} \quad (3-26e)$$

O par transformado integral e a fórmula de inversão necessária para a solução do problema de valor de contorno é dado por

Transformada integral finita:

$$\bar{T}_n(t) = \int_V w(\mathbf{r}) \psi_n(\mathbf{r}) T(\mathbf{r}, t) dv \equiv (\psi_n, T) \quad (3-27)$$

E sua inversa:

$$T(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{N_n} \psi_n(\mathbf{r}) \bar{T}_n(t) \quad (3-28)$$

4 METODOLOGIA EXPERIMENTAL

Neste capítulo são descritos os procedimentos metodológicos adotados, abrangendo a construção e operação dos protótipos de biodigestores sendo que essa construção foi necessária para a captação do biogás e a compra de biodigestores do mercado foi inviável devido a situações de financiamento do projeto.

Também foi descrito a caracterização física e reológica dos substratos bovino e humano, caracterização esta necessária para garantir as diluições necessárias para comparar os substratos de forma padronizada e para obter os números adimensionais que aparecem em forma de constantes dentro das equações de escoamento na sua forma desenvolvida.

Por fim descreve os métodos de quantificação e análise da produção de biogás obtido pelos dois substratos que servem para comparar, de forma quantitativa, qual substrato tem produção mais eficiente em torno de sua massa total, sólido total e volátil

4.1 UNIDADE BIODIGESTORA

Para a produção de biogás, este trabalho empregou dois protótipos de biodigestores com configurações distintas: um sistema de módulo único e um sistema modular composto por três unidades produtivas conectadas em série. Esta abordagem comparativa permitiu investigações complementares: o biodigestor único possibilitou o controle preciso das relações entre a massa de substrato inserida e o volume de biogás produzido, enquanto o sistema em série, acoplado ao vaso sanitário do banheiro masculino da Recogás, esse reator funcionou também como uma fossa séptica, simulando condições reais de utilização contínua.

4.1.1 Confecção e operação dos biodigestores

O protótipo do biodigestor de módulo único utilizado neste trabalho foi confeccionado a partir de uma bombona plástica com capacidade volumétrica total de 80 litros, a qual funciona como reator com alimentação realizada pelo topo através de um tubo que alcança o fundo do equipamento, A figura 14 demonstra o biodigestor.

Figura 14- Biodigestor módulo único



Fonte: Autoria Própria (2025)

Originalmente a bombona plástica é dotada de uma tampa a qual utiliza uma presilha metálica para melhor vedação. Conexões foram instaladas de modo a permitir o fluxo de substrato e de biogás no protótipo, durante o processo. Foi necessário furar o conjunto em três locais: para entrada de substrato, para saída de gás e para saída de digestato. Na entrada de substrato foi necessário um furo de 100 mm para abrigar o cano de abastecimento também de 100 mm. Neste caso, a vedação foi realizada com câmara de pneu de caminhonete, por interferência.

Na saída de digestato foi utilizado um adaptador flangeado de 50 mm, com vedação própria, e conectado a ele um cano de 50 mm com um registro de esfera na ponta. Este registro é utilizado para retirada de digestato do reator. Já na saída de gás também foi utilizado um adaptador flangeado, com vedação própria. Um registro de gás foi conectado ao adaptador flangeado a partir de um outro adaptador de latão. O registro tem a função de abrir ou fechar o fluxo de gás durante as trocas da câmara. A tabela 3 traz os materiais utilizados na confecção do biodigestor e seus valores.

Tabela 3- materiais utilizados na confecção do biodigestor módulo único

Material	Quantidade	Valor
Bombona plástica de 100 L	01	84,00
Cola para cano	01	19,00
Camara de ar de caminhonete	01	81,00
Tubo de esgoto 100 mm x 1 m	01	23,00
Tubo de água 50 mm x 1m	01	18,00
Cap de 100 mm	01	11,90
Registro de esfera soldável 50 mm	01	26,80
Curva 90° soldável 50 mm	01	10,90
Adaptador flangeado soldável 50 mm	01	29,90
Adaptador flangeado soldável 25 mm	01	8,00
Adaptador de latão 25 mm x ½"	01	19,90
Registro de gás	01	20,00
Mangueira cristal 3m x ½"	01	8,00
Total		360,40

Fonte: Autoria Própria (2025)

O biodigestor de operação contínua foi construído com quatro bombonas plásticas de 50 L, interligadas em série, a qual três delas funcionam como reatores. Ligações em serie conectando cada uma delas foram instaladas também de modo a permitir o fluxo de substrato e de biogás durante o processo. Podemos ver o protótipo continuo montado na figura 15 abaixo.

Figura 15- biodigestor continuo



Fonte: Autoria Própria (2025)

Neste biodigestor, as bombonas são herméticas, exigindo uma vedação específica nas interfaces entre os recipientes e as tubulações. Diferente dos modelos comerciais, que tipicamente empregam vedações com perfil em cantoneira fabricadas sob medida, o presente protótipo recorreu a uma adaptação utilizando material de câmara de ar de motocicleta, aplicado por interferência.

Cada reator foi perfurado em três pontos, conforme a configuração do reator único: uma abertura para a alimentação do substrato, uma para a saída do biogás e uma terceira para a descarga do digestato, a qual estabelece comunicação hidráulica com o reator subsequente. Na entrada do biodigestor, foi instalada uma redução de 100 mm para 50 mm.

Para a saída de digestato, foi utilizado um adaptador flangeado de 50 mm, dotado de seu próprio sistema de vedação, ao qual foi acoplada uma tubulação de 50 mm terminando em um registro de esfera, análogo ao do reator único. Este registro permite a coleta controlada do digestato. Na saída de biogás de cada reator, um orifício foi realizado na tampa, permitindo a conexão de tubos e luvas com o sistema de vedação previamente mencionado, conduzindo até um registro de esfera de 25 mm. Este registro de gás foi conectado ao adaptador flangeado por meio de um adaptador de latão, tendo a função de permitir ou interromper o fluxo de gás durante as operações de troca da câmara, conforme ilustrado na figura abaixo

O ensaio de estanqueidade constitui um procedimento técnico destinado à verificação da existência de vazamentos em sistemas de tubulação, vasos de pressão e demais instalações afins, assegurando sua integridade, segurança. A metodologia envolveu a pressurização do sistema como mostra na figura 16, utilizando-se ar e o subsequente monitoramento da variação de pressão por meio de um manômetro, com o objetivo de detectar eventuais falhas ou perdas que indiquem a presença de vazamentos. O biodigestor foi colocado por 2 horas a uma pressão acima da esperada e não foi observado vazamento.

Figura 16- Ensaio de estanqueidade



Fonte: Autoria Própria (2025)

O Local selecionado para a instalação do protótipo foi logo ao fundo do prédio da Recogás, em proximidade à fossa, como pode ser vista na figura 17, logo abaixo.

Figura 17- Local selecionado para fixação do protótipo



Fonte: Autoria Própria (2025)

O protótipo foi instalado em interface direta com o vaso sanitário do banheiro masculino da Recogás, permitindo o controle operacional dos fluxos de efluentes. Um sistema de registro foi implementado para direcionamento seletivo dos dejetos, possibilitando o envio alternado para o biodigestor ou para a caixa de inspeção prévia à fossa séptica convencional. A configuração deste arranjo experimental está ilustrada na figura 18.

Figura 18- Instalação e conexões de desvio para a fossa.



Fonte: Autoria Própria (2025)

O terreno ao qual a propriedade da Recogás faz parte é pertencente à UFPB e situa-se em local aberto, dessa forma foi construída uma proteção em tijolos para evitar que transeuntes caminhassem por cima do eventual protótipo. Adicionalmente grama foi adicionada no canteiro garantindo assim um visual mais harmônico como pode ser visto na figura 19.

Figura 19- Biodigestor instalado



Fonte: Autoria Própria (2025)

A tabela 4 traz os materiais utilizados na confecção do biodigestor em serie e seus valores.

Tabela 4- materiais utilizados na confecção do biodigestor módulo único

Material	Quantidade	Valor
Bombona plástica de 50 L	04	160,00
Cola para cano	01	19,00
Camara de ar de caminhonete	01	81,00
Tubo de esgoto 100 mm x 1 m	01	23,00
Tubo de água 50 mm x 1m	01	18,00
Cano de 20 mm x 3m	01	21,00
Cap de 100 mm	01	11,90
Cap 50 mm	01	7,90
Registro de esfera soldável 50 mm	01	26,80
Curva 90° soldável 50 mm	01	10,90
Adaptador flangeado soldável 50 mm	01	29,90
Adaptador flangeado soldável 25 mm	01	8,00
Luvas de união	06	9,00
Adaptador de latão 25 mm x ½"	01	19,90
Registro de gás	01	20,00
Mangueira cristal 3m x ½"	01	8,00
Total		474,30

Fonte: Autoria Própria (2025)

O protótipo único foi operado inicialmente em batelada, por 4 meses, com substrato bovino, utilizando-se de 5 kg de material na proporção mássica de 1:2,5 para substrato bovino, posteriormente foi operado em serie com substrato humano na proporção mássica de 1:1,5 adicionando diariamente cerca 200 g (entre 180 a 220 g) de substrato humano até completar a quantidade de 5kg de substrato.

O protótipo em serie foi operado somente de forma continua, anexado ao banheiro masculino da Recogás, sendo utilizado registro para uso apenas no horário dos ensaios. A quantidade de água média foi considerada de 4 litros por descarga dada, de acordo com teste feito na tubulação de saída do banheiro e para efeitos foi considerado cerca de 200 gramas por descarga.

O biodigestor 2 foi operado somente de forma continua, um registro antes da entrada do primeiro reator, que pode ser visualizado na figura 18, era aberto no momento da realização dos testes e o substrato humano advindo com a água de descarga da privada, que se conectava apenas a um vaso sanitário, era guiado pela tubulação até o biodigestor. Para garantir que não

adentrasse resíduos urinários e de produtos de limpeza o registro que conecta a entrada do biodigestor era fechado, assim que finalizava a coleta.

4.2 SUBSTRATO E ANÁLISE EXPERIMENTAIS

4.2.1 substratos

O substrato de esterco bovino foi fornecido por uma fazenda localizada na região de Guarabira. As coletas foram realizadas diretamente no curral, em temperatura ambiente, sempre no mesmo horário. O volume de 10 litros foi marcado em um balde plástico que serviu como volume padrão e em seguida o esterco era armazenado, pesado e verificado a sua densidade média de substrato recebido e também de substrato diluído em água na proporção de 1:2, em volume, para melhor homogeneização. O abastecimento foi realizado com 5 kg de substrato recebido. A figura 20 ilustra os processos citados.

Figura 20- Pesagem do substrato bovino



Fonte: Autoria Própria (2025)

O substrato advindo de fezes humanas foi fornecido para o protótipo, de forma controlada com coleta manual e de forma indireta através do banheiro masculino da recogás. Em um recipiente cerâmico com volume definido eram colocados amostras e pesadas em uma balança de precisão como podemos ver na figura 21. Foi verificado a quantidade mássica média por evacuação e também a densidade média de substrato recebido e também de substrato

diluído. Essa proporção foi estimada devido à quantidade média de litros de água por descarga, levando em consideração os sólidos totais.

Figura 21- Pesagem do substrato humano



Fonte: Autoria Própria (2025)

4.2.2 Análise gravimétrica - sólidos totais e sólidos voláteis

O procedimento de análise de sólidos totais para cada substrato foi realizado conforme metodologia padrão. Inicialmente, a cápsula de porcelana foi lavada e pré-aquecida em forno mufla a $105 \pm 5^\circ\text{C}$ por 30 minutos para eliminação de interferentes. Após o aquecimento, o recipiente foi resfriado em dessecador até atingir temperatura ambiente e subsequentemente pesado em balança analítica.

Em seguida, a amostra foi introduzida na cápsula e submetida a nova pesagem para determinação da massa inicial. O conjunto foi então levado à mufla sob as mesmas condições de temperatura ($550 \pm 50^\circ\text{C}$) por 24 horas para secagem completa. Após este período, a cápsula foi transferida para o dessecador por 15 minutos para resfriamento controlado e por fim, pesada novamente para determinação da massa seca final. A figura 22a mostra o forno mufla utilizados nas análises, a figura 22b mostra o controle da temperatura inclusive com multímetro e a figura 23 os sólidos fixos após finalizar análise de sólidos voláteis.

Figura 22- forno mufla utilizado nas análises



Fonte: Autoria Própria (2025)

Figura 23-cinzas após saída dos sólidos voláteis



Fonte: Autoria Própria (2025)

4.2.3 Determinação da produção de biogás e metano

O gás produzido é inicialmente armazenado em câmaras de ar, as mesmas cheias adquirem formato toroidal, sendo que a pressão de 1018 milibar medida no medidor de pressão a vácuo, Leybold Piezovac PV 20, de alta precisão é suficiente para contrapor a resistência da câmara e garantir o formato pretendido da mesma. A câmara é retirada da conexão do biodigestor e medida sua pressão interna, também é medido a temperatura média através do termopar tanto no biodigestor como da sala. Sem nenhuma perda relevante, devido a baixas temperaturas e pressão na qual o gás está submetido podemos considerar o mesmo como um gás ideal para efeito de cálculo de volume livre.

A captação do biogás foi efetuada por meio de uma mangueira, interligando o biodigestor a uma câmara de coleta. Cabe ressaltar que ambos os equipamentos foram previamente adaptados com a instalação de registros de gás, substituindo-se a válvula original da câmara para permitir o controle do fluxo durante as conexões

O volume das câmaras de ar, que assumem a forma de um toro quando infladas, foi determinado geometricamente, considerando o raio da seção transversal (a) e o raio até o eixo de rotação (b), conforme a equação

$$V_{toro} = 2\pi^2 a^2 b \quad (4.1)$$

Foi calculado o volume das câmaras numa pressão de referência de 1040 milibar e temperatura ambiente, tanto de forma direta como indireta calculando as médias do perímetro lateral com fita métrica, e também de forma indireta por inferência através do raio da seção transversal. Com isso encontrado um valor de referência volumétrica das mesmas para realizar a conversão do volume confinado à volume livre. Os valores de referência podem ser observados na tabela 5.

Tabela 5- Valores de referência para o cálculo de volume

Variação	a (m)	b (m)	V_{toro} (m ³)
Menor	0,0705	0,2725	0,026735
Maior	0,0724	0,2744	0,028392

Fonte: Autoria Própria (2025)

O procedimento de captação do biogás consistiu na conexão direta de uma mangueira entre a saída do biodigestor e a entrada da câmara de coleta. Com o sistema conectado, ambos os registros – localizados na saída do biodigestor e na entrada da câmara – foram abertos para permitir o fluxo do gás. O ponto final de preenchimento foi determinado visualmente pela observação do completo erguimento da câmara e estabelecimento de seu formato toroidal característico. Uma vez atingido esse estágio, os registros foram imediatamente fechados para contenção do gás. A figura 24 mostra as capturas de pressão da câmara de ar.

Figura 24- Câmara de ar cheia de biogás com medidor de pressão



Fonte: Autoria Própria (2025)

Posteriormente ao preenchimento de ar como mostra na figura 25, a pressão interna da câmara é aferida e fazendo as considerando que o biogás, nas condições de baixa pressão e temperatura ambiente em que se encontra, apresenta comportamento próximo ao de um gás ideal, adotou-se esta aproximação para os cálculos volumétricos sem perdas significativas de precisão. A leitura da temperatura é feita considerando a temperatura do gás igual a temperatura média do eixo central em que se encontra o substrato que foi medida através do termômetro digital infravermelho MT-350 da Minipa, que mede a temperatura sem contato físico e possui mira a laser para direcionar o ponto de medição, como pode ser visto na figura 26

Figura 25- Medição de temperatura com o termômetro infravermelho MT-350



Fonte: Autoria Própria (2025)

A partir da leitura de pressão e temperatura, calculou-se o volume de gás que seria liberado em condições atmosféricas, permitindo a quantificação da produção diária e, conseqüentemente, a determinação da capacidade total de produção por unidade de massa de substrato

4.2.4 Análise produtiva

Para análise comparativa do desempenho de biodigestores sob diferentes condições operacionais e substratos, os dados experimentais foram processados considerando três ensaios distintos:

Ensaio 1: Alimentação em batelada com Substrato bovino em biodigestor único

Ensaio 2: Alimentação contínua de substrato humano em biodigestor único

Ensaio 3: Alimentação contínua de substrato humano em biodigestor em série.

Os dados de produção de biogás foram capturados em sua forma original, representando uma operação descontínua pois os prazos dependiam do enchimento da câmara. implementou-se uma metodologia de projeção em intervalos de 10 dias. Para os experimentos com substrato humano em operação contínua (tanto no biodigestor único quanto no sistema em série), implementou-se também uma metodologia de projeção diária. Os volumes totais de biogás medidos em intervalos irregulares foram distribuídos proporcionalmente ao longo dos dias correspondentes a cada período de medição.

Por exemplo, para um intervalo de três dias entre medições, o volume total produzido foi dividido igualmente em três valores diários sequenciais. Esta abordagem permitiu a construção de séries temporais contínuas para ambos os sistemas com substrato humano, facilitando a comparação de desempenho entre o biodigestor único e o sistema em série sob condições operacionais equivalentes.

A modelagem em intervalos de 10 dias permite olhar para períodos de maior acúmulo e a projeção em base diária permite verificar picos e períodos de maior constância produtiva.

4.2.5 Análise cromatográfica

A análise composicional do biogás foi realizada por Cromatografia Gasosa (GC), técnica empregada para a separação e identificação de componentes voláteis. O método consiste na vaporização da amostra e sua introdução em um fluxo de gás de arraste (fase móvel), que é conduzido através de uma coluna cromatográfica contendo a fase estacionária. Os componentes

da mistura são separados ao longo da coluna e subsequentemente direcionados a um detector, que gera um sinal elétrico proporcional à massa de cada analito. Os sinais são registrados na forma de um cromatograma, no qual os constituintes são representados como picos com áreas proporcionais às suas respectivas concentrações, permitindo assim a análise quantitativa.

Para este estudo, foi utilizado o cromatógrafo Bruker 450-GC do Laboratório de Engenharia Química da UFPB, equipado com forno de coluna (operando de temperatura ambiente até 450°C), múltiplos injetores e detectores. Ressalta-se que a configuração analítica empregada permite a detecção e quantificação de metano (CH_4), dióxido de carbono (CO_2), nitrogênio (N_2) e oxigênio (O_2). Contudo, a determinação de amônia (NH_3) e ácido sulfídrico (H_2S) não é viável com a instrumentação disponível, constituindo uma limitação do método para a caracterização completa do biogás. A figura 26 mostra o cromatógrafo gasoso localizado no laboratório de engenharia química da UFPB

Figura 26- Cromatógrafo gasoso - laboratório de engenharia química da UFPB



Fonte: Autoria Própria (2025)

5 METODOLOGIA TEÓRICA

Este capítulo apresenta a estrutura conceitual e matemática desenvolvida para a modelagem do escoamento de substratos em reatores anaeróbios. A abordagem adotada integra formulação teórica em coordenadas cilíndricas, considerando as particularidades do escoamento de fluidos complexos em geometrias em torno de um eixo, com a aplicação da Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) como ferramenta de solução. O arcabouço teórico aqui descrito permitirá a caracterização dos campos de velocidade, temperatura e concentração ao longo do domínio do reator, fundamentando a análise de eficiência do processo de digestão anaeróbia.

A metodologia compreende três etapas principais: A formulação das equações governantes sob hipóteses simplificadoras adequadas ao fenômeno físico; a aplicação da GITT para conversão do sistema de equações diferenciais parciais em equações diferenciais ordinárias; e a incorporação de correlações reológicas baseadas em dados experimentais para estimativa de parâmetros adimensionais que aparecem naturalmente nas equações de campo adimensionalizada. Esta integração entre teoria e experimentação possibilitará a obtenção de soluções reais com precisão controlada para os perfis de interesse.

5.1.1 Hipóteses Simplificadoras das Equações Governantes

As equações apresentadas neste capítulo resultam da aplicação de hipóteses simplificadoras adequadas ao escoamento de substratos em simetria rotacional em torno de um eixo central e de baixas velocidades, como biodigestores tubulares. As principais aproximações incluem:

- **Regime Permanente:** Todas as equações consideram condições estacionárias, desprezando variações temporais ($\partial/\partial t = 0$), o que representa adequadamente operação contínua em regime em tempo longamente estacionário.
- **Simetria Axial:** A independência angular ($\partial/\partial \theta = 0$) é assumida, caracterizando escoamento axisimétrico típico de reatores cilíndricos operando sem assimetrias significativas.
- **Escoamento Hidrodinâmico Desenvolvido:** O perfil de velocidade axial é considerado completamente desenvolvido, com velocidade radial desprezível ($v \approx 0$), válido para trechos suficientemente afastados da entrada do reator.

- **Propriedades Constantes:** O modelo assume densidade ρ , viscosidade μ , condutividade térmica k e coeficiente de difusão D_{AB} constantes, aproximação razoável para pequenas variações de temperatura e composição.
- **Condução Axial Desprezível:** A difusão térmica e mássica na direção axial é considerada insignificante frente aos mecanismos convectivos ($\partial^2/\partial x^2 \ll \partial^2/\partial r^2$).
- **Geração de Calor e Massa Uniforme:** Os termos de fonte de calor $\dot{q}$ e produção/consumo de espécies $\dot{r}_A$ são considerados uniformemente distribuídos, representando reações homogêneas no substrato.

Estas hipóteses permitem a redução das equações gerais de transporte 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4 a formas matematicamente tratáveis, mantendo a essência física dos fenômenos predominantes enquanto possibilitam soluções analíticas ou numéricas eficientes para projeto e otimização de sistemas.

5.1.2 Técnica da Transformada Integral Generalizada - GITT

Um desafio central computacional é a seleção da ferramenta numérica mais adequada para resolver as equações que modelam o fenômeno físico. A literatura especializada apresenta uma variedade de métodos e implementações numéricas para esse fim. Neste contexto, opta-se pela Técnica da Transformada Integral Generalizada, que é reconhecida internacionalmente por sua capacidade de produzir resultados de referência. Sua aptidão para validar códigos numéricos deve-se ao seu controle automático de erro, uma característica que preserva as qualidades de uma solução inteiramente analítica, especialmente em problemas de transferência de calor e mecânica dos fluidos.

Uma vantagem distintiva desta metodologia, em comparação com outras técnicas numéricas, é a convergência confiável da solução à medida que se aumenta o número de termos considerados na expansão em série. Esse comportamento permite obter resultados com uma quantidade previsível de algarismos significativos válidos para uma dada ordem de truncamento. Por sua natureza híbrida, a GITT apresenta benefícios em relação a métodos puramente numéricos, pois mantém a base conceitual de uma solução analítica, dispensando processos de discretização do domínio ou geração de malha, conforme destacado por LIMA (2000).

A aplicação da GITT para resolver um problema específico requer a adoção de uma sequência de passos:

- Selecionar um problema auxiliar adequado, que incorpore o máximo de informações possível sobre o problema inicial;
- Resolver este problema auxiliar para obter as suas autofunções, autovalores, normas e a respectiva propriedade de ortogonalidade;
- Representar o potencial de interesse original como uma série expandida com base nas autofunções provenientes do problema auxiliar e na sua ortogonalidade, procedimento do qual se derivam as fórmulas que definem o par Transformada/Transformada Inversa;
- Aplicar um operador integral que inclua a autofunção do problema auxiliar para converter o sistema de equações diferenciais parciais em um sistema de equações diferenciais ordinárias acopladas, permitindo assim a redução de uma ou mais variáveis espaciais;
- Obter uma solução numérica para o sistema de equações diferenciais ordinárias acopladas truncando a série em uma ordem elevada o suficiente para garantir a precisão requerida, utilizando rotinas numéricas padrão, como as sub-rotinas DIVPAG (para problemas de valor inicial/parabólicos) e BVPFD (para problemas de valor de contorno/elípticos) disponíveis na biblioteca comercial IMSL (1989), o que resulta nos potenciais transformados.
- Por fim, aplica-se a fórmula da transformada inversa, já estabelecida, para reconstituir a solução do potencial original."

Dessa forma, diante do sistema de equações diferenciais parciais acopladas que rege o fenômeno contemplando conservação de massa, quantidade de movimento, energia e espécies químicas adota-se a Técnica da Transformada Integral Generalizada como ferramenta de solução.

Este método híbrido analítico-numérico, tem se mostrado eficaz na literatura para problemas de transporte não linear, é particularmente adequado para a investigação proposta: o escoamento laminar permanente de um fluido newtoniano em regime reativo, com conversão química e geração interna de energia.

A aplicação da transformação integral a este sistema resultará em um conjunto de equações diferenciais ordinárias acopladas, cuja solução descreve os perfis de velocidade, temperatura e concentração, essenciais para a análise de eficiência do processo. Os resultados da simulação serão comparados com os dados obtidos de experimento em regime permanente ($\Delta T \rightarrow \infty$)

5.1.3 Modelagem do campo de velocidade

O princípio de conservação de massa, ou equação da continuidade, estabelece que a taxa de acumulação de massa em um volume de controle equivalente ao ao fluxo líquido de massa através de suas fronteiras. Para um escoamento incompressível em coordenadas cilíndricas, considerando as hipóteses de regime permanente e simetria axial, este balanço reduz a equação 3.1 à equação 4.2 que é expressa pela equação 4.2, onde r_0 representa o raio interno da tubulação e x a dimensão axial.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{1}{r}\right) \frac{\partial(ru)}{\partial r} = 0, \quad 0 < r < r_0; x > 0 \quad (5.2)$$

A dinâmica do fluido na direção axial é regida pela equação da quantidade de movimento. Considerando escoamento laminar, completamente desenvolvido e desprezando os efeitos gravitacionais na direção axial, os termos convectivos e difusivos se equilibram com o gradiente de pressão impulsor. A formulação resultante é dada por:

$$\rho \left(\frac{u \partial u}{\partial x} + \frac{v \partial u}{\partial r} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left[\left(\frac{1}{r} \right) \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right] \quad (5.3)$$

Usando a condição e consideração de que a difusão radial é muito maior do que a difusão axial, ou seja, os termos se comportam conforme a equação abaixo

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \gg \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\text{Direção de } r \rightarrow \frac{\partial p}{\partial r} = 0$$

1) Adimensionalização:

Variáveis adimensionais:

$$U(R, X) = \frac{u(r, x)}{u^0} \quad (5.5a)$$

$$V(R, X) = \frac{v(r, x)}{v^0} \quad (5.5b)$$

$$R = \frac{r}{r^0} \quad (5.5c)$$

$$X = \frac{x}{r^0} \quad (5.5d)$$

2) Decomposição para aceleração de convergência

$$U(R, X) = U^*(R, X) + U_\infty(R) \quad (5.6)$$

$$\text{onde } U_\infty(R) = 2(1 - R^2)$$

$$\mathcal{U}(R, X) = \mathcal{U}^*(R, X) + U_\infty(R) \quad (5.7)$$

3) Equação adimensional resultante

Quantidade de movimento e equação da continuidade adimensionalizadas.

$$\frac{\partial U(R, X)}{\partial X} = \frac{\partial U^*(R, X)}{\partial X}$$

Então

$$\frac{\partial U^*(R, X)}{\partial X} + \frac{1}{R} \frac{\partial(RV)}{\partial R} = 0, \quad 0 < R < 1; \quad X > 0 \quad (5.8)$$

$$U(R, X) \frac{\partial U}{\partial X} = -\frac{\partial p^*}{\partial X} + \frac{1}{R_{e0}} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial U}{\partial R} \right) \right] \quad (5.9)$$

Considere

$$U(R, X) = U^*(R, X) + U_\infty(R)$$

Onde $U_\infty(R) = 2(1 - R^2)$, logo:

$$\begin{aligned}
& (U^*(R, X) + 2(1 - R^2)) \frac{\partial}{\partial X} (U^*(R, X) + 2(1 - R^2)) \\
& = -\frac{\partial p^*}{\partial X} + \frac{1}{R_{e0}} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial}{\partial R} (U^*(R, X) + 2(1 - R^2)) \right) \right]
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Temos

$$\begin{aligned}
U^*(R, X) \frac{\partial U^*}{\partial X} + U_\infty \frac{\partial U^*}{\partial X} &= -\frac{\partial p^*}{\partial X} + \frac{1}{R_{e0}} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial U^*(R, X)}{\partial R} + \frac{1}{R} (R(-2R)) \right) \right] \\
U^*(R, X) \frac{\partial U}{\partial X} + 2(1 - R^2) \frac{\partial U^*}{\partial X} &= -\frac{\partial p^*}{\partial X} + \frac{1}{R_{e0}} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial U^*(R, X)}{\partial R} - 2R \right) \right]
\end{aligned} \tag{5.11}$$

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + 2(1 - R^2) \frac{\partial U}{\partial X} = -\frac{\partial p}{\partial X} + \left(\frac{1}{R_{e0}} \right) \left[\left(\frac{1}{R} \right) \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial U^*}{\partial R} - 2R \right) \right]$$

Ou ainda:

$$U^* \frac{\partial U^*}{\partial X} + 2(1 - R^2) \frac{\partial U^*}{\partial X} = -\frac{\partial p^*}{\partial X} + \frac{1}{R_{e0}} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial U^*}{\partial R} - 2R \right) \right] \tag{5.12}$$

$$U^* \frac{\partial U^*}{\partial X} + 2(1 - R^2) \frac{\partial U^*}{\partial X} = -\frac{\partial p^*}{\partial X} + \frac{1}{R_{e0}} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial U^*}{\partial R} - 2R \right) \right]$$

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + 2(1 - R^2) \frac{\partial U}{\partial X} = -\frac{\partial p}{\partial X} + \left(\frac{1}{R_{e0}} \right) \left[\left(\frac{1}{R} \right) \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial U^*}{\partial R} - 2R \right) \right] \tag{5.13}$$

Considere as seguintes condições de contorno:

$$U^*(R, 0) = 1 - 2(1 - R^2) \tag{5.14a}$$

$$R = 0, \quad \frac{\partial U^*}{\partial R} = 0 \tag{5.14b}$$

$$R = 1, \quad U^*(1, X) = 0 \tag{5.14c}$$

4) Escolha do problema auxiliar de autovalor

Para o problema de velocidade adotamos o problema auxiliar na forma da equação 4.15, com condições de contorno dadas pela equação 4.16^a e 4.16b.

$$\left(\frac{1}{R}\right) \frac{d}{dR} \left(R \frac{d\psi_i(R)}{dR}\right) + \mu_i^2 \psi_i(R) = 0; 0 < R < 1 \quad (4.15)$$

$$R = 0, \quad \frac{d\psi_i}{dR} = 0 \quad (5.16a)$$

$$R = 1, \quad \psi_i(1) = 0 \quad (5.16b)$$

5) Par transformada-inversa

Com o problema de autovalor estabelecido podemos definir o par transformada como:

Transformada:

$$\bar{U}_i(X) = \int_0^1 R \psi_i(R) U(R, X) dR \quad (5.17)$$

Inversa:

$$U(R, X) = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{\psi_i(R)}{n_i^{1/2}} \right] \bar{U}_i(X) \quad (5.18)$$

$$\text{onde } N_i = \int_0^1 R \psi_i^2(R) dR \quad (5.19)$$

6) Aplicando o operador na equação principal temos a forma final na equação 5-22:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial X} &= U^* \frac{\partial U^*}{\partial X} + U_{\infty} \frac{\partial U^*}{\partial X} - \frac{1}{R_e} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial U^*}{\partial R} \right) \right] + \frac{8}{R_e} \\ -\frac{\partial p}{\partial X} &= 2 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^1 R \bar{\Psi}_i \bar{\Psi}_j dR \bar{U}_i \frac{d\bar{U}_j}{dX} + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^1 R U_{\infty} \bar{\Psi}_i(R) dR \frac{d\bar{U}_i}{dX} \\ -\frac{\partial p}{\partial X} &= 2 \sum_{i=1}^{\infty} C_i^*(X) \frac{d\bar{U}_i^*}{dX} + 2 \sum_{i=1}^{\infty} H_D \frac{d\bar{U}_i^*}{dX} - \frac{2}{R_e} \sum_{i=1}^{\infty} \Psi_i'(1) \bar{U}_i^* \end{aligned}$$

$$\int_0^1 R \bar{\Psi}_i(R) \mathcal{U}^* \frac{\partial \mathcal{U}^*}{\partial X} dR = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^1 R \bar{\Psi}_i(R) \bar{\Psi}_j(R) \bar{\Psi}_k(R) dR \bar{U}_i^* \frac{d\bar{U}_k^*}{dX} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} A D_{ijk} \bar{U}_j(X) \frac{d\bar{U}_j(X)}{dX}$$

$$\int_0^1 R \bar{\Psi}_i(R) \mathcal{U}_{\infty}(X) \frac{\delta \mathcal{U}^*}{\delta X} dR = \sum_{k=i}^{\infty} \int_0^1 R \bar{\Psi}_i(R) \mathcal{U}_{\infty}(X) \bar{\Psi}_k(R) dR \frac{d\bar{U}_k^*}{dX}$$

Com

$$Q_{Dik} = \int_0^1 R \bar{\Psi}_i(R) \mathcal{U}_{\infty}(X) \bar{\Psi}_k(R) dR \quad (5.20)$$

Assim

$$\int_0^1 R \bar{\Psi}_i(R) \mathcal{U}_{\infty}(X) \frac{\partial \mathcal{U}^*}{\partial X} dR = \sum_{k=1}^{\infty} Q_{Dik} \frac{d\bar{U}_k^*}{dX} \quad (5.21)$$

$$2 \int_0^1 R \bar{\Psi}_i(R) \sum_{k=i}^{\infty} \bar{U}_k^* \frac{d\bar{U}_k^*}{dX} = 2 \sum_{k=i}^{\infty} \int_0^1 R \bar{\Psi}_i(R) dR \bar{U}_k^* \frac{d\bar{U}_k^*}{dX} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \delta_{jk} F_{Di}(0) \bar{U}_j^* \frac{d\bar{U}_k^*}{dX}$$

$$2 \int_0^1 R \bar{\Psi}_i(R) \sum_{k=i}^{\infty} H_D \frac{d\bar{U}_k^*}{dX} dR = 2 \sum_{k=i}^{\infty} H_D F_{Di}(0) \frac{d\bar{U}_k^*}{dX} = 2 \sum_{k=i}^{\infty} F_{Di}(0) H_{Dk} \frac{d\bar{U}_k^*}{dX}$$

$$\frac{2}{R_e} \int_0^1 R \bar{\Psi}_i(R) \sum_{k=i}^{\infty} \Psi'_i(1) \bar{U}_k(X) dR = \frac{2}{R_e} \sum_{k=i}^{\infty} F_{Di}(0) \Psi'_i(1) \bar{U}_k^*$$

$$\frac{8}{R_e} \int_0^1 R \bar{\Psi}_i(R) dR = \frac{8}{R_e} F_{Di}(0)$$

$$\frac{1}{R_e} \int_0^1 R \bar{\Psi}_i(R) \left[\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left(R \frac{d\mathcal{U}_{\infty}}{dR} \right) \right] dR$$

$$\frac{1}{R_e} \int_0^1 R \bar{\Psi}_i(R) \left[\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \mathcal{U}^*}{\partial R} \right) \right] dR$$

$$\left[\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left(R \frac{d\bar{\Psi}_i(R)}{dR} \right) + \mu_i^2 \bar{\Psi}_i(R) \right] \frac{1}{R_e} \int_0^1 R \mathcal{U}^* dR$$

Reagrupando todos os termos temos

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} AD_{ijk} \bar{U}_j(X) \frac{d\bar{U}_j(X)}{dX} + \sum_{k=1}^{\infty} Q_{Dik} \frac{d\bar{U}_k^*}{dX} \\
 = -4 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \delta_{jk} F_{Di}(0) \bar{U}_j^* \frac{d\bar{U}_k^*}{dX} - 4 \sum_{k=i}^{\infty} F_{Di}(0) H_{Dk} \frac{d\bar{U}_k^*}{dX} \\
 - \frac{2}{Re} \sum_{k=i}^{\infty} F_{Di}(0) \Psi'_i(1) \bar{U}_k^* - \frac{\mu_i^2}{Re} \bar{U}_i^*(x) + U'' \bar{\Psi}'_i(1)
 \end{aligned} \tag{5.22}$$

Este sistema transformado, agora composto por N equações diferenciais ordinárias acopladas, permite a solução numérica eficiente via método de integração DIVPAG, tornando viável a análise do desenvolvimento hidrodinâmico do escoamento em regime laminar permanente

5.1.4 Modelagem do campo de temperatura

A distribuição de temperatura no domínio é obtida a partir da equação de conservação de energia, a qual incorpora os mecanismos de transporte de calor por convecção e condução, além de fontes internas de energia. Admitindo regime permanente, simetria axial, propriedades constantes e desprezando a dissipação viscosa e a condução axial perante a condução radial, o balanço energético para o problema em questão é descrito pela seguinte equação:

$$\rho c_p(u(r)) \frac{\delta T}{\delta x} + \dot{q} = k \left[\frac{1}{r} \frac{\delta}{\delta r} \left(r \frac{\delta T}{\delta r} \right) \right] \tag{5.23}$$

Com $0 < r < r_0$

Condições de contorno e inicial:

$$T = T_i, \quad T_i = T_{\infty}, \quad x = 0 \tag{5.24a}$$

$$r = 0, \quad \frac{\delta T}{\delta r} = 0 \tag{5.24b}$$

$$r = r_0; \quad \dot{q}'' = \dot{m}_q(x) c_p \Delta T = h(T_b - T_{\infty}) \tag{5.24c}$$

$$\Delta T = T_p - T_{\infty} \rightarrow \dot{m}_q c_p (T_p - T_{\infty}) = h(T_b - T_{\infty}) \tag{5.24d}$$

$$\theta = \frac{T - T_{\infty}}{\Delta T_{ref}}, \quad \text{onde } \Delta T_{ref} = T_f - T_e \tag{5.24e}$$

Adimensionalização:

$$R = \frac{r}{r_0} ; \quad X = \frac{x}{r_0} ; \quad \alpha = k/\rho c_p \quad (5.25a)$$

$$U(r) = u(r)/u_0 \quad (5.25b)$$

$$U(R) = U_\infty(R) + U^*(R, X) \quad (5.25c)$$

$$\begin{aligned} \frac{(U_\infty + U^*)}{r_0} \frac{\delta}{\delta X} \left(\frac{T - T_\infty}{\Delta T_{ref}} \right) + \dot{q}'' \frac{r_0}{\rho c_p \Delta T_{ref}} &= \frac{k}{\rho c_p} \left[\frac{1}{R} \frac{\delta}{\delta R} \left(R \frac{\delta}{\delta r} \left(\frac{T - T_\infty}{\Delta T_{ref}} \right) \right) \right] \\ (U_\infty + U^*) \frac{\delta \theta}{\delta X} + \dot{Q} &= \frac{\alpha r_0}{\mu_0} \frac{1}{r_0^2} \left[\frac{1}{R} \frac{\delta}{\delta R} \left(R \frac{\delta \theta}{\delta r} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.26)$$

De tal forma que

$$\frac{\alpha}{\mu_0 r_0} \cdot \frac{v}{v} = \frac{\alpha}{v} \cdot \frac{v}{\mu_0 r_0} = \frac{1}{\mathcal{R}_e} \cdot \frac{1}{P_r} = \frac{1}{P_{ec}}$$

Assim

$$U^* \frac{\delta \theta}{\delta X} + U_\infty \frac{\delta \theta}{\delta X} + \dot{Q} = \frac{1}{P_{ec}} \left[\frac{1}{R} \frac{\delta}{\delta R} \left(R \frac{\delta \theta}{\delta r} \right) \right]$$

Para este problema pode-se seleccionar um problema auxiliar do tipo:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left(R \frac{d\phi_i}{dR} \right) + \beta_i^2 \phi_i = 0 \quad (5.28)$$

para $0 < R < 1, \quad X > 0$

$$R = 0 \rightarrow \frac{d\phi_i}{dR} = 0$$

$$R = 1 \rightarrow$$

$$B_i^* = \frac{\hbar_f \cdot r_0}{k_g}$$

Com o problema auxiliar estabelecido podemos definir o par de transformada como:

$$\dot{m}_g'' c_{pg}(T_p - T_\infty) = \hbar(T_B - T_p)$$

$$\dot{m}_g'' c_{pg}(T_p - T_\infty) = \hbar(T_B - T_\infty) - \hbar(T_p - T_\infty)$$

Multiplicando tudo por $1/\Delta T_{rel}$

$$\dot{m}_g'' c_{pg} \Delta T_g = -k_g \left. \frac{\delta T}{\delta r} \right|_{r=r_0} = \hbar (T_b - T_p)$$

$$-k_g \left. \frac{\delta T}{\delta r} \right|_{r=r_0} = -\frac{k_g}{r_0} \frac{\delta (T_p - T_\infty)}{\delta R} = \hbar [(T_b - T_\infty) - (T_p - T_\infty)]$$

$$-\frac{k_g}{r_0} \frac{\delta}{\delta R} \frac{(T_p - T_\infty)}{\Delta T_{rel}} = \frac{\hbar (T_b - T_\infty)}{\Delta T_{rel}} - \frac{\hbar (T_p - T_\infty)}{\Delta T_{rel}}$$

$$\left. \frac{\delta \theta}{\delta R} \right|_{R=1} + \frac{\hbar_f \cdot r_0}{k_g} [\theta_B - \theta_p] = 0$$

$$B_i^* = \frac{\hbar_f \cdot r_0}{k_g}$$

$$\left. \frac{\delta \theta}{\delta R} \right|_{R=1} + B_i^* [\theta_B - \theta_p] = 0$$

Transformada integral

$$\bar{\theta}_i(x) = \frac{1}{M_i^{1/2}} \cdot \int_0^1 R \phi_i(R) \cdot \theta(R, X) dR \quad (5.28)$$

Formula da inversa

$$\theta(R, X) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\phi_i(R)}{M_i^{1/2}} \cdot \bar{\theta}_i(x) \quad (5.29)$$

A transformação integral do problema acontece com o uso do operador

$$\frac{1}{M_i^{1/2}} \cdot \int_0^1 R \phi_i(R) dR \quad (5.30)$$

Na equação do problema principal ou

$$\frac{1}{M_i^{1/2}} \cdot \int_0^1 U^*(R, X) \frac{\delta \theta}{\delta X} R \phi_i(R) dR$$

$$= \frac{1}{M_i^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 \sum_{i=0}^{\infty} \bar{\Psi}_j(R) \cdot \bar{u}^*_j(x) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \bar{\phi}_k(R) \cdot \bar{\theta}_k(x) \right) R \phi_i(R) dR =$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 R \phi_i(R) \bar{\Psi}_j(R) dR \bar{u}^*_j(x) \frac{d\bar{\theta}_k(x)}{dX}$$

Onde

$$A^*_{ijk}(R) = \int_0^1 R \phi_i(R) \bar{\Psi}_j(R) \phi_k(R) dR \quad (5.31)$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A^*_{ijk} \bar{u}^*_j(x) \frac{d\bar{\theta}_k(x)}{dX}$$

O segundo termo do lado esquerdo tem a forma

$$= \frac{1}{M_i^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 R \phi_i(R) U_{\infty}(R) \frac{\delta u^*}{\delta X} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \bar{\phi}_k(R) \cdot \bar{\theta}_k(x) \right) dR$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \int_0^1 R \phi_i(R) \phi_k(R) U_{\infty}(R) dR \frac{d\bar{\theta}_k(x)}{dX}$$

Onde definimos

$$B^*_{ik}(R) = \int_0^1 R \phi_i(R) \phi_k(R) U_{\infty}(R) dR \quad (5.32)$$

Assim temos:

$$\sum_{i=0}^{\infty} B^*_{ik}(R) \frac{d\bar{\theta}_k(x)}{dX}$$

O terceiro termo do lado esquerdo tem a forma

$$\frac{1}{M_i^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 R \phi_i(R) \dot{Q} dR = \frac{\dot{Q}}{M_i^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 R \phi_i(R) dR$$

Onde definimos

$$FNNT(R) = \bar{f}_i(0) = \frac{1}{M_i^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 R \phi_i(R) dR \quad (5.33)$$

Assim

$$\frac{1}{M_i^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 R \phi_i(R) \dot{Q} dR = \dot{Q} FNNT(R) = \dot{Q} \bar{f}_i(0) \quad (5.34)$$

Agrupando os termos do lado esquerdo temos:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_{ijk}^* \bar{u}_j^*(x) \frac{d\bar{\theta}_k(x)}{dX} + \sum_{i=0}^{\infty} B_{ik}^*(R) \frac{d\bar{\theta}_k(x)}{dX} + \dot{Q} \bar{f}_i(0)$$

Devemos agora operar do lado direito da equação principal com o mesmo operador para obtermos

$$\frac{1}{P_{ec}} \frac{1}{M_i^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 R \phi_i(R) \left[\frac{1}{R} \frac{\delta}{\delta R} \left(R \frac{\delta \theta}{\delta r} \right) \right] dR$$

Por artifício matemático operamos agora no problema auxiliar com operador que tem a forma

$$\begin{aligned} & \frac{1}{P_{ec}} \frac{1}{M_i^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 R \theta(R, X) dR \\ & \frac{1}{P_{ec}} \frac{1}{M_i^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 R \theta(R, X) \frac{d}{dR} \left(R \frac{d\phi_i}{dR} \right) dR + \frac{1}{P_{ec}} \frac{1}{M_i^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 R \phi_i(R) \beta_i^2 \theta(R, X) dR = 0 \end{aligned}$$

Tal que

$$\bar{\theta}_i(X) = \frac{1}{P_{ec}} \frac{1}{M_i^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 R \phi_i(R) \theta(R, X) dR \quad (5.35)$$

Sendo assim

$$\frac{1}{P_{ec}} \frac{1}{M_i^2} \int_0^1 R \phi_i(R) \beta_i^2 \theta(R, X) dR = \beta_i^2 \bar{\theta}_i(X) \quad (5.36)$$

Substituindo a equação II em I, no lado direito temos

$$-\frac{\beta_i^2}{P_{ec}} \bar{\theta}_i(X) + \frac{1}{P_{ec}} \int_0^1 \left[\phi_i \frac{d}{dR} \left(R \frac{\partial \theta(R, X)}{\partial R} \right) - \theta(R, X) \frac{d}{dR} \left(R \frac{d\phi_i}{dR} \right) \right] dR$$

Esta integral pode ser avaliada no contorno fazendo das definições das condições estabelecidas no problema original e no problema auxiliar como

$$\begin{aligned} \frac{1}{P_{ec}} \int_0^1 \left[\phi_i \frac{d}{dR} \left(R \frac{\partial \theta(R, X)}{\partial R} \right) - \theta(R, X) \frac{d}{dR} \left(R \frac{d\phi_i}{dR} \right) \right] dR \\ = \left(\phi_i(R) \frac{\partial \theta}{\partial R} - \theta(R, X) \frac{d\phi_i}{dR} \right) \Big|_{R=1} \\ - \left(\phi_i(R) \frac{\partial \theta}{\partial R} - \theta(R, X) \frac{d\phi_i}{dR} \right) \Big|_{R=1} \end{aligned} \quad (5.37)$$

Condições de contorno

R=1

$$\frac{\partial \theta}{\partial R} + B_i^* [-\theta_p] = 0$$

R=0

$$\frac{d\phi_i}{dR} + B_i^* \phi_i$$

Multiplicando as equações e depois subtraindo temos:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_{ijk}^* \bar{u}_j^*(x) \frac{d\bar{\theta}_k(x)}{dX} + \sum_{i=0}^{\infty} B_{ik}^*(R) \frac{d\bar{\theta}_k(x)}{dX} + \dot{Q} \bar{f}_i(0) \\ = -\frac{\beta_i^2}{P_{ec}} \bar{\theta}_i(X) - B_i^* \theta_B \phi_i(1) \end{aligned} \quad (5.38)$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_{ijk}^* \bar{u}_j^*(x) \frac{d\bar{\theta}_k(x)}{dX} + \sum_{i=0}^{\infty} B_{ik}^*(R) \frac{d\bar{\theta}_k(x)}{dX} + \dot{Q} \bar{f}_i(0) = -\frac{\beta_i^2}{P_{ec}} \bar{\theta}_i(X) - B_i^* \theta_B \phi_i(1)$$

Para temperatura média temos

$$\theta_B(x) = \frac{\int_0^1 RU^*(R, X)\theta(R, X)dR}{\int_0^1 RU^*(R, X)dR} \quad (5.39)$$

Multiplicando numerador e denominador por $\int_0^1 RdR$ temos:

$$\bar{U}_B = \frac{\int_0^1 R[U_\infty(R) + U^*(R, X)]dR}{\int_0^1 RdR}$$

$$\int_0^1 RU_\infty(R)dR = \int_0^1 R2(1 - R^2)dR = 2 \int_0^1 (R - R^3)dR = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 RU^*(R, X)dR = \int_0^1 R \sum_{i=0}^{\infty} \bar{\Psi}_i(R) \cdot \bar{u}^*_i(x)dR =$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \int_0^1 R \bar{\Psi}_i(R) \cdot \bar{u}^*_i dR = \sum_{i=0}^{\infty} FNNV(I) \cdot \bar{u}^*_i$$

Tal que $FNNV(I) = \int_0^1 R \bar{\Psi}_i(R)dR$

$$\bar{U}_B = \frac{1}{2} + 2 \sum_{i=0}^{\infty} FNNV(I) \cdot \bar{u}^*_i \quad (5.40)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^1 R[U_\infty(R) + U^*(R, X)]\theta(R, X)dR = \\ & \int_0^1 RU_\infty(R)\theta(R, X)dR + \int_0^1 RU^*(R, X)\theta(R, X)dR = \end{aligned}$$

$$2 \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^1 R(1 - R^2)\bar{\phi}_i(R)\bar{\theta}_i(R)dR + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \bar{\Psi}_i(R)\bar{\phi}_k(R)\bar{u}^*_i\bar{\theta}_j dR \quad (5.41)$$

5.1.5 Modelagem do campo de concentração

A concentração do substrato ou produto envolvido na reação química é modelada pela equação de conservação de espécies. Esta equação balanceia o transporte convectivo e difusivo da espécie com sua taxa de consumo ou geração devido à reação química homogênea. Assumindo regime permanente, simetria axial, coeficiente de difusão constante e desprezando a difusão axial, a forma final da equação de transporte de massa é:

Continuidade

$$\frac{\partial U(R, X)}{\partial X} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[\frac{R \partial V}{\partial R} \right] = 0 \quad (5.42)$$

Conservação de espécie

$$U \frac{\partial C^*}{\partial X} + \dot{R}_A = D_{AB}''' \left(\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[\frac{R \partial C^*}{\partial R} \right] \right) \quad (5.43)$$

$$0 < R < 1; X > 0$$

Para acelerar a convergência vamos tomar

$$U(R, X) = U^*(R, X) + U_\infty(R), \quad 0 < R < 1; X > 0$$

Então

$$U_\infty \frac{\partial C^*}{\partial X} + U^* \frac{\partial C^*}{\partial X} + \dot{R}_A = D_{AB}''' \left(\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[\frac{R \partial C^*}{\partial R} \right] \right) \quad (5.44)$$

Ainda

$$U_\infty \frac{\partial C^*}{\partial X} + U^*(R, X) + \dot{R}_A = \frac{1}{Pec_m} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[\frac{R \partial C^*}{\partial R} \right] \right) \quad (5.45)$$

$$0 < R < 1; X > 0$$

Onde M é o termo de geração/consumo de massa por reação química. Então propomos o operador

$$\frac{1}{P_i^{1/2}} \int_0^1 R \psi_i(R) dR \quad (5.46)$$

e escolhemos o problema auxiliar de autovalor de concentração

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{d\psi_i}{dr} \right] + \gamma_i^2 \psi_i(r) = 0 \quad (5.47)$$

Com as condições

$$\frac{d\psi_i}{dr} = 0 \text{ em } r = 0 \quad (5.48)$$

$$\frac{d\psi_i}{dr} + Bi_m \psi_i = 0 \text{ em } r = 1 \quad (5.49)$$

Dessa forma temos:

Transformada integral

$$\bar{C}_i(x) = \frac{1}{M_i^{1/2}} \cdot \int_0^1 R \psi_i(R) \cdot C(R, X) dR \quad (5.50)$$

Formula da inversa

$$C(R, X) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\psi_i(R)}{M_i^{1/2}} \cdot \bar{\psi}_i(x) \quad (5.51)$$

Sistema final de EDO para concentrações:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{A C_{ijk} U_j}{dx} + B C_{ik} \right) \frac{dc_k(x)}{dx} \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{D_{ki} dc_i}{dx} + \dot{R}_{gk} \\ = \frac{\gamma_k^2}{Pe_m} c_k(x) - \frac{Bi_m}{Pe_m} C_B \psi_k(1) \end{aligned} \quad (5.52)$$

Onde

$$D_{ki} = \frac{1}{M_k^{1/2}} \frac{1}{M_i^{1/2}} \int_0^1 R \psi_k(R) U(R) \psi_i(R) dR \quad (5.53)$$

5.1.6 Metodologia estimativa dos números adimensionais.

Com base no referencial teórico que estabelece a similaridade de que o comportamento reológico de matrizes orgânicas complexas é governado predominantemente pelo teor de sólidos totais e pelas interações físico-estruturais da matriz, e não pela sua composição bioquímica específica (Jiang et al., 2014; Cao et al., 2016), o presente trabalho adotará a utilização dos parâmetros reológicos do modelo de Herschel-Bulkley via interpolação do teor de sólidos totais (TS) no modelo empírico desenvolvido por Li et al. (2023).

Esta decisão metodológica considera que a diluição dos substratos para valores que se situem dentro da faixa experimental validada no estudo assegura que os parâmetros interpolados são representativos. Ademais, o estudo de referência foi conduzido com rigor em laboratório de alta qualidade, tendo identificado o modelo Herschel-Bulkley como o de melhor ajuste para os dados.

Por fim, uma replicação experimental completa da caracterização reológica demandaria recursos significativos para uma expectativa de variação ínfima nos resultados, a qual seria irrelevante para os cálculos de números adimensionais e perfis de escoamento almejados. Diante desse contexto, a estratégia de interpolação é considerada plenamente adequada e confiável para fornecer parâmetros reológicos representativos para a modelagem, assegurando ainda a comparabilidade direta entre os substratos bovino e humano sob uma condição operacional padronizada

O procedimento será o seguinte: as amostras de fezes humana e bovina foram mecanicamente homogeneizadas e diluídas com água para atingir um Teor de Sólidos Totais de 10,85%. Esta concentração foi selecionada por situar-se dentro da faixa central (10.14% - 18.12%) validada pelo modelo, assegurando que as interações partícula-partícula estejam em um regime comparável e que possamos relacionar o teor de sólidos totais com o modelo teórico-experimental dado por:

$$\log(De_{ff}) = -15,07(ST) - 7,58 \quad (5.54)$$

As propriedades reológicas das amostras padronizadas (TS = 10,85%) serão determinadas seguindo o mesmo protocolo de Li et al. (2023), incluindo a caracterização do comportamento de escoamento e a obtenção dos parâmetros do modelo de Herschel-Bulkley, tais como tensão de escoamento e o índice de consistência e o índice comportamento de fluxo dado pela equação:

$$\mu_{ap} = \frac{\tau_y}{\dot{\gamma}} + K\dot{\gamma}^{n-1} \quad (5.55)$$

Uma vez que a literatura demonstra que matrizes orgânicas com TS equivalentes exibem comportamentos reológicos análogos (Cao et al., 2016), assume-se que as relações funcionais de potência entre os parâmetros reológicos e estabelecidas por Li et al. (2023) para o digestato, são igualmente aplicáveis aos substratos aqui investigados. Os cálculos assumem as seguintes considerações:

- A velocidade característica do fluido (u): pertence a uma faixa 0,01 m/s e 0,05 m/s o que compreende a biodigestores de escoamentos lentos e de baixa agitação mecânica e
- O comprimento característico (L) Adotou-se o diâmetro hidráulico médio de partículas de digestato como $30,1 \mu m$ ($3,01 \times 10^{-5} m$), conforme valor de D_{50} reportado por Li et al. (2023)
- A taxa de cisalhamento ($\dot{\gamma}$), baixa de $1 s^{-1}$, representativa de condições de repouso ou agitação muito suave (Mezger, 2020).

Dessa forma, os parâmetros reológicos medidos experimentalmente para as fezes humana e bovina serão inseridos nas equações por interpolação para o cálculo indireto em cada substrato e a partir deles podemos estimar os números adimensionais.

5.1.7 Tratamento computacional dos campos de escoamento

Para realizar a simulação híbrida do escoamento do substrato no do biodigestor anaeróbio foi construído um programa em linguagem FORTRAN. A implementação e execução foram realizadas em uma plataforma composta por um microcomputador equipado com processador Intel Core i7 de 2.70 GHz, 8 GB de memória RAM, sob o sistema operacional WINDOWS 10.

Para a resolução do sistema de equações diferenciais acopladas, foi utilizada a subrotina DIVPAG da biblioteca IMSL, com as subrotinas auxiliares FCN que calcula as derivadas dos termos transformados. Além disso, foram empregadas rotinas de álgebra linear como DLINRG de inversão de matriz e DMRRRR de multiplicação de matrizes, da mesma biblioteca. Foi estabelecido uma tolerância de 10^{-4} visando assegurar um controle de erro automático com precisão até a quarta casa decimal.

Na estrutura do código, temos os dados de entrada, as propriedades físicas e os parâmetros operacionais; que enviam os dados para os módulos responsáveis pelos cálculos numéricos. O Programa principal, *Escoamento do Substrato em Biodigestor Anaeróbio -ESBA*,

foi desenvolvido com o objetivo de obter os perfis de velocidade, temperatura e concentração em um biodigestor anaeróbio, considerando escoamento unidimensional em coordenadas cilíndricas, regime permanente, geração de calor e reação química. O programa *ESBA* compila e executa os dados para obtenção dos perfis através dos módulos:

- *Dados de entrada* - Fornece as informações iniciais para a entrada de dados, como números de Reynolds, Prandtl e Schmidt, e condições de contorno.
- *Contagem de sinais (velocidade), Contagem de sinais (temperatura) e Contagem de sinais (concentração)* - Determinam os autovalores, autofunções e normas para os campos de velocidade, temperatura e concentração, respectivamente, via método de Sturm-Liouville.
- *Coefficientes* - Calcula os coeficientes do sistema de equações integrais resultantes da aplicação da Transformada Integral Generalizada (GITT).

Ao final, temos a obtenção dos perfis de velocidade, temperatura e concentração, os quais podem ser analisados com parâmetros estabelecidos na literatura para verificação de convergência, e em seguida com dados experimentais e estimados que garantam o interesse prático. Os resultados foram importados para a construção de tabelas em Excel e gráficos no software Grapher.

Em virtude de um interesse estratégico na proteção intelectual e no potencial desenvolvimento tecnológico o programa *ESBA* do software FORTRAN específico, optou-se por não divulgar integralmente esse código no presente trabalho, imagens da tela de trabalho do mesmo estará disponibilizada no apêndice B.

Visando assegurar a total transparência, reprodutibilidade e verificação dos resultados numéricos obtidos pela técnica GITT, uma versão completa e funcional foi desenvolvida no software Wolfram Mathematica 13, versão estudante. Este modelo foi utilizado para computar os coeficientes das integrais que foram resolvidas analiticamente, estabelecer as condições iniciais da questão e fazer uso da rotina NDSolve para solucionar o problema de valor inicial. A etapa final consistiu na aplicação da transformada inversa para a aquisição dos campos.

Embora apresente um desempenho computacional inferior em comparação à implementação em FORTRAN, pois converge em um tempo bem maior para o mesmo número de autovalores, o código em Mathematica oferece notável legibilidade, permitindo que a comunidade, reproduza e estenda os procedimentos de cálculo aqui descritos. Dessa forma, o Apêndice C deste documento disponibiliza o script desenvolvido no Wolfram Mathematica.

6 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Neste capítulo são apresentados e discutidos os resultados experimentais e numéricos obtidos, incluindo a análise comparativa dos substratos, a produção e qualidade do biogás, e a caracterização dos campos de escoamento e transferência no interior do biodigestor. A discussão dos achados é realizada após cada subtópico, avaliando a eficiência dos processos.

6.1 ANÁLISE EXPERIMENTAL DO SUBSTRATO

6.1.1 Análise de densidade média

Os resultados das medições de densidade para as amostras de fezes humanas e bovinas são apresentados de forma discriminada nas Tabelas 6 e 7, respectivamente. Para cada grupo, foram realizadas seis determinações (n=6), e os resultados são expressos pelos valores individuais, acompanhados da média aritmética e do desvio padrão do conjunto de amostras.

Tabela 6- Densidade das amostras de dejetos bovinos

Recipiente	Massa do recipiente (Kg)	Volume do Recipiente (L)	Massa (recipiente + amostra) (kg)	Densidade da Amostra (kg/m³)	Densidade Média ± Desvio padrão (kg/m³)
A1	0,504	10,35	3,226	262,995	261,2 ± 10,8 [250,5; 272]
A2	0,428	10,00	3,176	274,800	
A3	0,504	10,35	3,274	267,633	
A4	0,428	10,00	2,958	253,000	
A5	0,504	10,35	3,036	244,638	
A6	0,428	10,00	3,072	264,400	

Fonte: Autoria Própria (2025)

Tabela 7- Densidade das amostras fezes humanas

Recipiente	Massa do recipiente (g)	Volume do Recipiente (mL)	Massa (recipiente + amostra) (g)	Densidade da Amostra (kg/m³)	Densidade Média ± Desvio padrão (kg/m³)
B1	35,15	63,5	101,30	1041,732	1046,5 ± 5,0 [1041,5; 1051,4]
B2	35,15	63,5	101,63	1046,929	
B3	35,15	63,5	102,07	1053,858	
B4	35,15	63,5	101,22	1040,472	
B5	35,15	63,5	101,81	1049,764	
B6	35,15	63,5	101,57	1045,984	

Fonte: Autoria Própria (2025)

Os dados consolidados demonstram que o conjunto de amostras de fezes bovinas apresentou uma densidade média de 261,2 kg/m³ com desvio padrão de 10,8 g/cm³. Por sua

vez, as amostras de fezes bovinas exibiram uma densidade média de 1046,5 kg/m³ com desvio padrão de 5,0 g/cm³)

Os resultados de densidade obtidos revelam uma nítida diferença entre as amostras de fezes bovinas e humanas. O valor médio de 261,2 kg/m³ para as fezes bovinas é consideravelmente inferior à densidade reportada para fezes bovinas frescas, que se aproxima de 600 kg/m³ em literatura. Essa discrepância reflete um estado mais seco das amostras analisadas, uma vez que a perda de água, componente majoritário e de baixa densidade, resulta em uma diminuição significativa da massa por unidade de volume. Este fenômeno de redução da densidade aparente devido à perda de umidade é consistente com observações encontradas na literatura.

Já densidade média das fezes humanas, de 1046,5 kg/m³, encontra-se próxima de valores de referência sacramentados na literatura, porém abaixo, alinhada que é próximo de 1060 kg/m³. Este resultado indica que as amostras humanas apresentavam uma composição e um estado de compactação típicos, refletindo um equilíbrio esperado entre sólidos, líquidos e a porosidade do material. A proximidade com o valor de literatura corrobora a metodologia empregada na análise dessas amostras e está de acordo com os parâmetros fisiológicos.

6.1.2 Sólidos totais e voláteis

Os teores de sólidos totais determinados para as amostras de fezes humanas e bovinas encontram-se sumarizados na Tabela 8 e 9.

Tabela 8-Teor de sólidos totais e sólidos voláteis em amostras de bovinas					
Massa do recipiente (g)	Massa (recipiente+ amostra) (g)	Massa (g) Forno (115°C)	Massa (g) Forno (550°C)	Sólido Total	Sólido volátil
35,15	49,61	40,92	36,01	39,89%	80,94%
35,15	50,26	40,87	35,90	37,85%	81,47%
35,15	49,87	40,83	35,96	38,59%	81,87%
35,15	49,07	40,39	35,83	37,66%	81,49%
35,15	48,62	40,18	35,81	37,36%	81,51%
35,15	49,69	40,59	35,87	37,41%	80,70%
Sólido total médio ± Desvio padrão			Sólido volátil médio ± Desvio padrão		
38,12% ± 0,97%			81,33% ± 0,43%		
[37,15%; 39,10%]			[80,90%; 81,76%]		

Fonte: Autoria Própria (2025)

Tabela 9 - Teor de sólidos totais e sólidos voláteis em amostras humanas

Massa do recipiente (g)	Massa (recipiente+ amostra) (g)	Massa (g) Forno (115°C)	Massa (g) Forno (550°C)	Sólido Total	Sólido volátil
35,15	70,43	44,81	36,51	27,38%	85,92%
35,15	83,12	48,03	36,72	26,85%	87,81%
35,15	75,38	46,19	36,68	27,44%	86,14%
35,15	90,25	49,92	36,97	26,81%	87,68%
35,15	78,16	46,98	36,58	27,51%	87,91%
35,15	81,63	47,68	36,87	26,96%	86,27%
Sólido total médio ± Desvio padrão			Sólido volátil médio ± Desvio padrão		
27,16% ± 0,32%			86,96% ± 0,93%		
[26,84%; 27,48%]			[86,02%; 87,89%]		

Fonte: Autoria Própria (2025)

Para cada grupo, foram realizadas seis réplicas (n=6), e os resultados são expressos como a média aritmética acompanhada do desvio padrão. A análise revelou que as amostras de fezes bovinas apresentaram um teor médio de sólidos totais de 38,12 % com desvio padrão de $\pm 0,97\%$ e sólidos voláteis de $81,33\% \pm 0,43\%$. Em contrapartida, as amostras de fezes humanas exibiram um valor médio de 27,16% com desvio padrão de $\pm 0,32\%$ e sólidos voláteis de $86,96\% \pm 0,93\%$.

Os resultados dos teores de sólidos totais, apresentados nas Tabelas 4 e 5, revelam uma diferença significativa entre as amostras de fezes bovinas e humanas. O teor médio de sólidos totais nas fezes bovinas foi de 38,12% ($\pm 0,97\%$), um valor notavelmente superior aos 27,16% ($\pm 0,32\%$) verificados nas amostras humanas. Esta disparidade, à primeira vista, poderia sugerir uma composição intrinsecamente mais sólida das fezes bovinas; no entanto, uma análise integrada com o dado de densidade anteriormente obtido (261,2 kg/m³ para bovinas) indica que o elevado percentual de sólidos é, na realidade, um artefato do estado de dessecação avançada das amostras.

O baixo valor de densidade das fezes bovinas já apontava para uma massa leve e porosa, característica de um material do qual uma grande parte da água foi removida. A análise de sólidos totais corrobora essa hipótese. O processo de secagem em forno, que visa remover a água livre, teve um impacto menor na massa final dessas amostras porque uma fração considerável da umidade já havia sido perdida previamente por evaporação natural. Consequentemente, a razão entre a massa seca residual e a massa inicial já se encontrava elevada, resultando em um alto percentual de sólidos totais. Esse fenômeno, em que a perda de umidade leva à concentração da fração sólida e a um aumento artificial no percentual de sólidos

totais, é consistente com os princípios de análise de resíduos orgânicos e está de acordo com observações reportadas na literatura.

Em contrapartida, o menor teor de sólidos totais nas fezes humanas (27,16%) é consistente com sua densidade mais elevada (1046,5 kg/m³), refletindo um material com maior conteúdo de umidade e, portanto, uma proporção menor de massa seca em relação à massa total úmida. Este valor encontra-se dentro da faixa esperada para fezes humanas em condições normais, como documentado por Tilley (2014), o que sugere normalidade nas amostras frescas.

A análise de sólidos voláteis revela um perfil distinto, com teor médio superior nas fezes humanas de 86,96% $\pm$ 0,93% em comparação às bovinas de 81,33% $\pm$ 0,43%. Este parâmetro é fundamental para a produção de biogás, pois representa a fração orgânica e biodegradável do substrato - a porção efetivamente conversível em energia. O percentual mais elevado nas fezes humanas indica maior concentração de matéria orgânica lábil, de mais fácil decomposição, o que se traduz em maior potencial para digestão anaeróbia, concordando com a composição reportada por Donacho (2023) para efluentes humanos.

A proporção mássica diluída em água do material bovino de 1:2,5 e do substrato humano sendo de 1:1,5 permite igualar a concentração mássica de sólidos totais para o valor de 10,8%, para cada substrato considerando seus respectivos desvios padrão. A tabela 10 resume com maior clareza os principais resultados gravimétricos

Tabela 10 – Principais resultados gravimétricos

Propriedade gravimétrica	Substrato Bovino	Substrato Humano
Densidade média (kg/m ³)	261,2 $\pm$ 10,8	1046,5 $\pm$ 5,0
Densidade média diluída (kg/m ³)	1001 $\pm$ 10,8	1035 $\pm$ 5,0
Sólidos totais em massa bruta	38,12% $\pm$ 0,97%	27,16% $\pm$ 0,32%
Sólidos totais diluídos	10,85 % $\pm$ 0,97% Proporção de 1: 2,51 kg $\pm$ 0,09 kg	10,85 % $\pm$ 0,32% Proporção de 1: 1,50 kg $\pm$ 0,03 kg
Sólidos voláteis	81,33% $\pm$ 0,43%	86,96% $\pm$ 0,93%

Fonte: Autoria Própria (2025)

6.1.3 Números adimensionais para o perfil real de escoamento

Com o intuito de caracterizar o comportamento do digestato utilizado neste estudo e quantificar os fenômenos de transferência de massa no sistema, foram estimadas as suas propriedades reológicas e parâmetros adimensionais chave. Partindo da densidade das misturas de cada substrato de um teor de sólidos totais (TS) de 10,85%, os parâmetros reológicos foram determinados por interpolação linear dos dados reportados por Li et al. (2023) para o modelo Herschel-Bulkley, que demonstrou o melhor ajuste ao comportamento do fluido. As interpolações para a tensão de escoamento (τ_y), índice de consistência (K) e índice de comportamento de fluxo (n), respectivamente foram avaliadas a partir da figura 27.

Figura 27- Pontos para interpolação do modelo Herschel-Bulkley

Fitting parameters of power law, Bingham and Herschel-Bulkley models for various TS concentrations.							
Equations	Parameter	Total solids content					
		10.14 ± 0.03%	12.31 ± 0.04%	14.24 ± 0.04%	15.10 ± 0.04%	16.35 ± 0.03%	18.12 ± 0.03%
Power- Law	K	15.190 ± 0.332	48.196 ± 1.603	127.954 ± 3.153	214.640 ± 14.542	316.132 ± 8.659	435.046 ± 14.778
	n	0.253 ± 0.007	0.254 ± 0.010	0.196 ± 0.007	0.195 ± 0.020	0.153 ± 0.008	0.149 ± 0.010
	R^2	0.9994	0.9997	0.9999	0.9998	1.0000	1.0000
Bingham	τ_y	17.748 ± 0.925	54.503 ± 4.659	130.576 ± 10.656	195.017 ± 25.898	243.054 ± 33.244	382.815 ± 37.440
	μ_B	0.602 ± 0.047	1.979 ± 0.238	3.971 ± 0.545	7.413 ± 1.325	9.859 ± 1.700	11.456 ± 1.915
	R^2	0.9044	0.8000	0.7539	0.6407	0.6574	0.6718
Herschel-Bulkley	τ_y	10.116 ± 0.137	18.880 ± 2.072	62.078 ± 4.893	79.988 ± 40.914	104.826 ± 31.075	180.280 ± 43.345
	K	6.770 ± 0.105	32.854 ± 1.642	74.671 ± 4.007	146.665 ± 33.708	221.710 ± 27.454	273.042 ± 37.927
	n	0.394 ± 0.003	0.313 ± 0.008	0.270 ± 0.008	0.244 ± 0.032	0.193 ± 0.015	0.201 ± 0.017
	R^2	0.9997	0.9997	0.9999	0.9998	1.0000	1.0000

Fonte: Li et al. (2023)

Uma vez que este valor se encontra dentro da faixa experimental do estudo de Li et al. (2023), os parâmetros reológicos do modelo Herschel-Bulkley foram determinados por interpolação linear dos dados daquele trabalho. A Tabela 11 consolida os valores interpolados, que servem como base para o cálculo da viscosidade aparente, junto com a difusividade, servem de base para o cálculo dos adimensionais

Tabela 11 - Propriedades do digestato com TS = 10,85% obtidas por interpolação			
Propriedade	Símbolo	Valor	Unidade
Tensão de escoamento	τ_y	12,99	Pa
Índice de consistência	K	24,8	Pa·s ⁿ
Índice de comportamento de fluxo	n	0,367	-

Fonte: Autoria Própria (2025)

Com base nas propriedades fundamentais determinadas, foi possível calcular um conjunto de números adimensionais críticos para caracterizar o regime de escoamento e os fenômenos de transferência no sistema.

Um parâmetro crucial para os cálculos subsequentes é a viscosidade aparente (μ_{ap}). Para um fluido que segue o modelo Herschel-Bulkley, μ_{ap} é dependente da taxa de cisalhamento ($\dot{\gamma}$). A viscosidade aparente é calculada como:

$$\mu_{ap} = \frac{\tau_y}{\dot{\gamma}} + K\dot{\gamma}^{n-1} = \frac{12,99}{1} + 24,8 \cdot \dot{\gamma}^{0,367-1} \cong 39,3$$

A difusividade efetiva De_{ff} foi analisada empiricamente e traçada uma propriedade em função (ST) para intervalos entre (10,14%-18,2%) nos trabalhos de Li et al. (2023)

$$\log(De_{ff}) = -15,07(ST) - 7,58 \rightarrow De_{ff} \cong 6,11 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$$

a) Número de Reynolds (Re):

Aplicando a equação 3.21, onde considera-se $\mu = \mu_{ap}$, temos

Para substrato bovino:

$$Re = \frac{\rho u L}{\mu_{ap}} \rightarrow u = 0,01 \text{ m/s} \rightarrow Re = \frac{1001 \cdot 0,01 \cdot 3,01 \cdot 10^{-5}}{39,3} \cong 7,67 \cdot 10^{-6}$$

$$Re = \frac{\rho u L}{\mu_{ap}} \rightarrow u = 0,05 \text{ m/s} \rightarrow Re = \frac{1001 \cdot 0,05 \cdot 3,01 \cdot 10^{-5}}{39,3} \cong 3,83 \cdot 10^{-5}$$

Para substrato humano:

$$u = 0,01 \text{ m/s} \rightarrow Re = \frac{1035,2 \cdot 0,01 \cdot 3,01 \cdot 10^{-5}}{39,3} \cong 7,93 \cdot 10^{-6}$$

$$u = 0,05 \text{ m/s} \rightarrow Re = \frac{1035,2 \cdot 0,05 \cdot 3,01 \cdot 10^{-5}}{39,3} \cong 3,96 \cdot 10^{-5}$$

Os valores de Re para o substrato humano são aproximadamente 3,4% superiores aos do substrato bovino, devido à sua maior densidade. No entanto, ambos permanecem na ordem de 10^{-5} a 10^{-6} , confirmando o regime estritamente laminar.

b) Numero de Prandtl

Para sistemas heterogêneos como digestatos e substratos orgânicos, a determinação direta de C_p e k pode ser complexa. Uma abordagem consolidada na literatura é modelar tais materiais como uma mistura de seus componentes principais, permitindo a estimativa de suas propriedades termofísicas através de modelos de mistura por fração mássica w , (SINGH; HELDMAN, 2013). Neste contexto, o substrato foi considerado uma mistura bifásica de água e sólidos orgânicos onde a fração mássica de sólidos é dada pelos sólidos totais na mistura. O calor específico e a condutividade térmica da mistura foram, portanto, calculados por uma ponderação em base mássica (MOHSENIN, 1980):

$$C_{p,mistura} = w_{\text{água}} \cdot C_{p,\text{água}} + w_{\text{sólidos}} \cdot C_{p,\text{sólidos}}$$

e

$$k_{p,mistura} = w_{\text{água}} \cdot k_{\text{água}} + w_{\text{sólidos}} \cdot k_{\text{sólidos}}$$

Os valores das propriedades da água pura são bem estabelecidos e podem ser encontrados em tabelas padrão (INCROPERA et al., 2014). Para a fração sólida orgânica, composta predominantemente por material lignocelulósico e biomassa microbiana, adotaram-se os valores típicos e consistentes com os reportados para outros materiais de origem biológica (MOHSENIN, 2020; ASAE, 2021). Dessa forma para $C_{p,\text{água}} = 4180 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$, $C_{p,\text{sólidos}} = 1500 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$, $k_{\text{água}} = 0,6 \text{ W/m} \cdot \text{K}$ e $k_{\text{sólidos}} = 0,2 \text{ W/m} \cdot \text{K}$

$$C_{p,mistura} = 0,8915 \cdot 4180 + 0,1085 \cdot 1500 = 3889,2 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$$

e

$$k_{p,mistura} = 0,8915 \cdot 0,6 + 0,1085 \cdot 0,2 = 0,5566 \text{ W/m} \cdot \text{K}$$

Esses valores são boas estimativas devido aos percentuais de sólidos totais que afeta menos o valor ponderado, a exemplo, se dobrássemos o valor do calor específico dos sólidos orgânicos para $C_{p,\text{sólidos}} = 3000 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$, um valor considerado acima de qualquer valor típico de sólido orgânico, o calor específico da mistura iria para $C_{p,mistura} = 4051,9 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$ ou seja um aumento de apenas 4 %, fazendo o mesmo para a condutividade teríamos um aumento de cerca de 3,9%. Dessa forma podemos calcular o número de Prandtl aplicando a equação 3.24

$$Pr = \frac{\mu_{ap} \cdot C_{p,mistura}}{k} = \frac{39,3 \cdot 3889,2}{0,5566} = 274605,7 \cong 2,75 \cdot 10^5$$

c) Número de Schmidt (Sc):

Com a viscosidade aparente e difusividade efetiva, através da adaptação da equação 3.27 temos:

Substrato bovino:

$$Sc = \frac{\mu_{ap}}{\rho D_m} = \frac{39,3}{1001 \cdot 2 \cdot 10^{-9}} \cong 1,96 \cdot 10^7$$

$$Sc_{eff} = \frac{\mu_{ap}}{\rho D_{eff}} = \frac{39,3}{1001 \cdot 6,11 \cdot 10^{-10}} \cong 6,42 \cdot 10^7$$

Substrato humano:

$$Sc = \frac{39,3}{1035,2 \cdot 2 \cdot 10^{-9}} \cong 1,89 \cdot 10^7$$

$$Sc_{eff} = \frac{39,3}{1035,2 \cdot 6,11 \cdot 10^{-10}} \cong 6,21 \cdot 10^7$$

Igualando a correlação de

O Sc para o substrato bovino é cerca de 3,4% maior que para o humano. Isto ocorre porque, com a mesma viscosidade aparente, um fluido menos denso (bovino) apresenta uma difusividade de momentum, $\nu = \mu_{ap}/\rho$, é ligeiramente menor, aumentando a razão Sc .

d) Número de Sherwood (Sh) e o Coeficiente Convectivo (k_c)

Igualando a equação de Ranz e Marshall e da própria definição (equações 3.28 e 3.29)

$$Sh = 2 + 0,6 \cdot Re^{\frac{1}{2}} \cdot Sc^{\frac{1}{3}} = \frac{k_c L}{D_m}$$

Para substrato bovino:

$$u = 0,01 m/s \rightarrow Sh \cong 2,44 \text{ e } k_c \cong 1,62 \cdot 10^{-4}$$

$$u = 0,05 m/s \rightarrow Sh \cong 3,01 \text{ e } k_c \cong 2 \cdot 10^{-4}$$

Para substrato humano:

$$u = 0,01 m/s \rightarrow Sh \cong 2,45 \text{ e } k_c \cong 1,62 \cdot 10^{-4}$$

$$u = 0,05 \text{ m/s} \rightarrow Sh \cong 3,005 \text{ e } k_c \cong 1,99 \cdot 10^{-4}$$

Apesar das diferenças iniciais em Re e Sc, os valores finais de Sh e k_c são praticamente idênticos para ambos os substratos. Isto ocorre porque o produto $Re^{1/2}Sc^{1/2}$, que rege o desvio de $Sh = 2$, é muito pequeno e as variações se anulam. A transferência de massa convectiva externa é, portanto, praticamente insensível ao tipo de substrato nas condições analisadas.

e) Número de Biot Mássico:

Dado que k_c e L são essencialmente os mesmos para ambos os substratos podemos então calcular o número de Biot através da equação 3.33:

Para substrato bovino:

$$Bi_m = \frac{k_c L}{De_{ff}} \rightarrow k_c \cong 1,62 \cdot 10^{-4} \rightarrow Bi_m = 7,9$$

$$k_c \cong 2,00 \cdot 10^{-4} \rightarrow Bi_m = 9,8$$

Para substrato humano:

$$k_c \cong 1,62 \cdot 10^{-4} \rightarrow Bi_m = 7,9$$

$$k_c \cong 1,99 \cdot 10^{-4} \rightarrow Bi_m = 9,8$$

o Bi_m tem praticamente a mesma variação nos dois substratos

f) Número de Péclet térmico

Tendo os números de Reynolds e de Prandalt, podemos utilizar a igualdade da equação 3.30.

Para substrato bovino:

$$u = 0,01 \text{ m/s} \rightarrow Pe_t \cong 7,67 \cdot 10^{-6} \cdot 2,75 \cdot 10^5 \cong 2,1$$

$$u = 0,05 \text{ m/s} \rightarrow Pe_t \cong 3,83 \cdot 10^{-5} \cdot 2,75 \cdot 10^5 \cong 10,5$$

Para substrato humano:

$$u = 0,01 \text{ m/s} \rightarrow Pe_t \cong 7,93 \cdot 10^{-6} \cdot 2,75 \cdot 10^5 \cong 2,1$$

$$u = 0,05 \text{ m/s} \rightarrow Pe_t \cong 3,96 \cdot 10^{-6} \cdot 2,75 \cdot 10^5 \cong 10,8$$

g) Número de Péclet Mássico

tendo os números Reynolds e Schmidt fazemos uso da equação 3-31

$$Pe_m = \frac{uL}{De_{ff}} = Re \cdot Sc \rightarrow u = 0,01 \text{ m/s} \rightarrow Pc_m \cong 4,9 \cdot 10^2$$

$$u = 0,05 \text{ m/s} \rightarrow Pc_m \cong 2,46 \cdot 10^3$$

A partir dos parâmetros reológicos interpolados e do coeficiente de difusão efetiva, foi possível calcular os de números adimensionais na transferência de massa. A tabela 12 resume os valores obtidos para a caracterização do sistema

Tabela 12 -Resumo de adimensionais e parâmetros de base

Adimensionais e outras constantes	Bovino, u=0,01 m/s	Bovino, u=0,05 m/s	Humano, u=0,01 m/s	Humano, u=0,05 m/s
Reynolds ($Re \times 10^{-6}$)	7,67	38,30	7,93	39,60
Prandlt ($Pr \times 10^5$)	2,75	2,75	2,75	2,75
Schmidt ($Sc \times 10^3$)	1,96	1,96	1,89	1,89
Sc_eff ($Sc_{eff} \times 10^7$)	6,42	6,42	6,21	6,21
Sherwood (Sh)	2,45	3,01	2,45	3,00
kc ($\times 10^{-4} \text{ m/s}$)	1,62	2	1,62	1,99
Biot Mássico	7,9	9,8	7,9	9,8
Péclet térmico	2,1	10,5	2,1	10,8
Péclet Mássico ($\times 10^2$)	4,9	24,6	4,9	24,6
Parâmetros de Base: TS = 10,85% L = $3,01 \times 10^{-5} \text{ m}$ $De_{ff} = 6,11 \times 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$ Densidade MB = 1001 kg/m^3 Densidade MB = $1035,2 \text{ kg/m}^3$				

Fonte: Autoria Própria (2025)

Os valores muito baixos do número de Reynolds confirmam o escoamento laminar na microescala das partículas. Nesse regime, as forças viscosas são dominantes, e o aumento da velocidade de agitação na faixa estudada de até 5 vezes é insuficiente para alterar a natureza do escoamento. A similaridade entre os valores para os substratos bovino e humano reforça que, uma vez padronizado o teor de sólidos totais, o comportamento hidrodinâmico é equivalente, independente da origem do substrato. O elevado número de Schmidt efetivo é o parâmetro mais crítico desta análise. Ele quantifica que a maior resistência à transferência de massa está na estrutura porosa e complexa do meio, e não no fluido base. A matriz de partículas aumenta a resistência difusiva em mais de 3 vezes comparado à difusão em água pura.

A limitação difusiva é confirmada pelo número de Sherwood, que se mantém próximo a 2, valor teórico para difusão pura em fluido estagnado. Isso indica que a contribuição da

convecção na transferência de massa superficial das partículas é mínima, sendo a lenta difusão molecular através da matriz do substrato o mecanismo predominante. O número de Biot corrobora que as resistências difusivas internas superam as externas, embora sua ordem de grandeza não permita desprezá-las completamente. Já o número de Peclet térmico é relativamente baixo, revelando a dominância da condução de calor, enquanto o elevado Peclet mássico demonstra que a difusão isolada é ineficiente. Dessa forma, a condução térmica se mostra como o mecanismo mais favorecido para a homogeneização da temperatura.

6.2 PRODUÇÃO DE BIOGÁS

6.2.1 Produção de biogás via ensaio 1

O reator foi preenchido com 5 kg de substrato diluído na proporção mássica de 1:2,5 com água, totalizando aproximadamente 17,5 litros de mistura. Dessa forma, os demais 60 litros do volume interno permaneceram preenchidos com ar.

A produção do biogás foi observada diariamente, a partir de uma válvula feita com garrafa pet e preenchida com água. A mangueira de saída de gás foi interligada a garrafa pet de modo que a produção de gás provocasse borbulhamento na água.

As primeiras bolhas surgiram no terceiro dia, mas o gás ainda não queimava ao ser exposto a uma chama. Uma combustão fraca começou apenas no oitavo dia, ainda insuficiente para sustentar o fogo. Foi a partir do 13º dia que a chama se tornou intensa e contínua, sinalizando que todo o ar havia sido expulso do biodigestor e que a produção na câmara podia, então, ser contabilizada adequadamente. Um registro dessa queima está documentado na Figura 28.

Figura 28-Queima acentuada do biogás



Fonte: Autoria Própria (2025)

O biogás produzido foi coletado em duas câmaras de volume conhecido, usadas alternadamente. Após o enchimento, a temperatura e a pressão eram medidas para calcular o volume real de gás pela lei dos gases ideais, sendo o gás então transferido para um reservatório maior. O monitoramento foi realizado por 101 dias, e os volumes capturados estão sumarizados na Tabela 13.

Tabela 13 – Produção do biogás via substrato bovino em biodigestor de módulo único

Dia de contagem	Pressão ambiente	Pressão de captura	Temp. (°C)	Volume menor (m³)	Volume maior (m³)	Volume ambiente médio (m³)
16/nov	1017	1035	27,4	0,0267	0,0284	0,0282
19/nov	1014	1020	27,4	0,0225	0,0238	0,0238
23/nov	1015	1034	27,9	0,0267	0,0284	0,0282
26/nov	1014	1025	27,6	0,0225	0,0238	0,0238
30/nov	1012	1020	28,1	0,0267	0,0284	0,0283
04/dez	1013	1027	27,7	0,0225	0,0238	0,0238
10/dez	1013	1013	27,2	0,0267	0,0284	0,0283
16/dez	1016	1031	28,3	0,0225	0,0238	0,0237
22/dez	1016	1033	27,8	0,0267	0,0284	0,0282
28/dez	1015	1028	27,5	0,0225	0,0238	0,0238
05/jan	1016	1028	27,1	0,0267	0,0284	0,0282
14/jan	1016	1029	27,6	0,0225	0,0238	0,0237
23/jan	1017	1031	27,3	0,0267	0,0284	0,0282
01/fev	1016	1027	28,2	0,0225	0,0238	0,0237
12/fev	1015	1033	27,5	0,0267	0,0284	0,0282
22/fev	1017	1031	27,3	0,0225	0,0238	0,0237

Fonte: Autoria Própria (2025)

Nesse período foi produzido 415,9 litros de biogás e os intervalos de captação aumentam. Uma tabela em um intervalo de tempo fixo de produção, de 10 em 10 dias, onde se utiliza o valor proporcional ao período produzido pode ser vista na tabela 14.

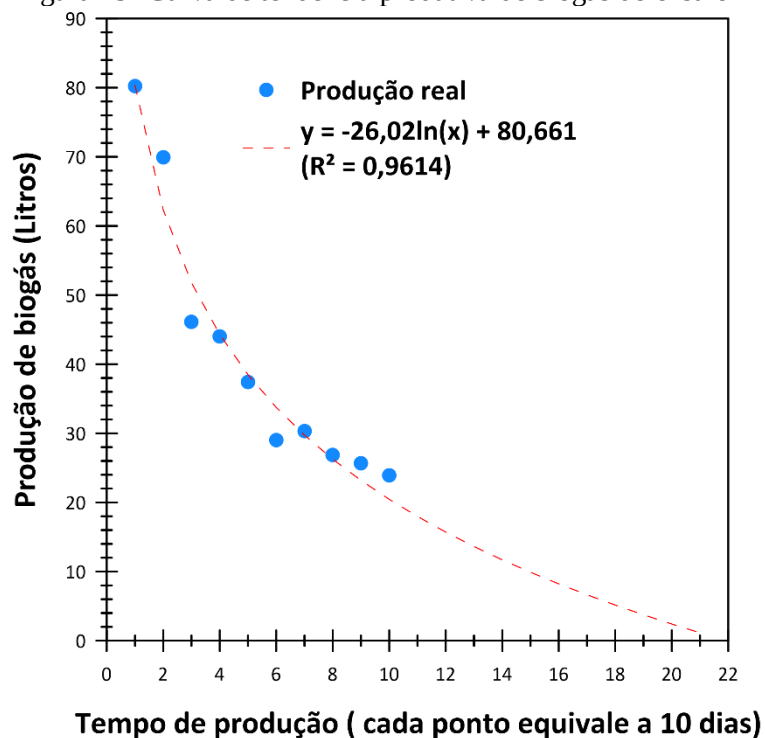
Tabela 14 – Produção adaptada do ensaio 1 em intervalos de 10 dias

Produção de 10 em 10 dias	Volume de produção (litros)
01 a 10	80,2
11 a 20	70,0
21 a 30	46,1
31 a 40	44,0
41 a 50	37,4
51 a 60	29,0
61 a 70	30,3
71 a 80	26,9
81 a 90	25,7
91 a 100	23,9

Fonte: Autoria Própria (2025)

Observa-se que no mesmo intervalo de tempo a produção vem decaindo com o tempo. Dessa forma, um gráfico de tendência foi plotado como pode ser observado na figura 29.

Figura 29- Curva de tendencia produtiva de biogás do ensaio 1



Fonte: Autoria Própria (2025)

Observa-se que os pontos de dispersão foram contabilizados nos 100 primeiros dias, a contar do primeiro dia de produção. O restante dos pontos, foram modelados a partir do gráfico logarítmico que revela a tendência produtiva do biogás. Sendo assim, o volume total projetado de biogás quando se faz a soma dos 21 pontos (cada ponto equivalente a 10 dias) é de 506,9 litros, obtidos a partir de 5kg de substrato, durante o período de eficiência produtiva, que nesse caso é de 7 meses (ou 210 dias). Já o erro $R^2 = 0,9614$ indica uma boa precisão do modelo, na medida em que quanto mais perto do numeral 1 estiver R^2 , melhor a precisão.

Pode-se ainda inferir que para cada tonelada de substrato bovino, em um intervalo de 7 meses, consegue-se extrair 101,4 m³ de biogás. Ou ainda, considerando a massa específica média do biogás de 1,20 kg/m³, para cada tonelada em média de substrato é possível transformar aproximadamente 120 kg dele em biogás.

6.2.2 Produção de biogás via ensaio 2

O monitoramento da produção de biogás foi realizado diariamente por meio de um sistema de deslocamento de água, utilizando uma válvula acoplada a uma garrafa contendo água. Nesta configuração, a mangueira de efluente gasoso foi conectada à garrafa, permitindo que o gás produzido provocasse um efeito de borbulhamento no meio líquido. No sexto dia de operação do reator em batelada, foi observada a formação de bolhas, indicando o início da atividade microbiana. Contudo, ao submeter o efluente gasoso a uma fonte de ignição, não foi detectada combustão. A primeira ocorrência de ignição, ainda que fraca e incapaz de sustentar uma chama contínua, foi registrada a partir do 11º dia. Apenas no 13º dia a chama tornou-se intensa e estável, sinalizando que o ar residual presente no interior do biodigestor havia sido completamente expulso pelo biogás e que o sistema atingiu uma produção de metano significativa. A partir desta data, deu-se início à quantificação formal da produção gasosa.

A mensuração volumétrica do biogás foi efetuada por meio de câmaras de armazenamento acopladas à saída do conjunto biodigestor-purificador. Empregaram-se duas câmaras de capacidade volumétrica previamente determinada, operando de forma alternada: enquanto uma câmara se enchia, a outra encontrava-se em seu estado de máxima capacidade. Ao atingirem a saturação, a temperatura e a pressão no interior de cada câmara eram aferidas. Esses parâmetros eram então aplicados à equação de estado dos gases ideais para o cálculo do volume real de gás produzido.

Subsequentemente à medição, o gás era transferido para uma câmara de maior capacidade. Este protocolo de medição foi mantido por um período total de 107 dias, cujos volumes diários de biogás capturados encontram-se discriminados na tabela 15.

Tabela 15 – Produção do biogás via substrato humano em biodigestor de módulo único

Dia de contagem	Pressão ambiente	Pressão de captura	Temp. (°C)	Volume menor (m³)	Volume maior (m³)	Volume amb. médio (m³)
10/julho	1017	1035	27,3	0,0267	0,0284	0,02808
14/julho	1014	1020	26,2	0,0225	0,0238	0,02428
18/julho	1015	1034	26,6	0,0267	0,0284	0,02982
21/julho	1014	1025	27,2	0,0225	0,0238	0,02552
25/julho	1016	1020	28,3	0,0267	0,0284	0,03107
29/julho	1013	1027	28	0,0225	0,0238	0,02604
03/agosto	1013	1013	27,4	0,0267	0,0284	0,02398
09/agosto	1016	1031	28,1	0,0225	0,0238	0,03034
14/agosto	1016	1033	27,6	0,0267	0,0284	0,02297
20/agosto	1015	1028	27,6	0,0225	0,0238	0,02650
26/agosto	1016	1028	27,9	0,0267	0,0284	0,02445
02/setembro	1016	1029	27,8	0,0225	0,0238	0,02782
08/setembro	1017	1031	27,3	0,0267	0,0284	0,02210
16/setembro	1016	1027	27,6	0,0225	0,0238	0,02997
01/outubro	1015	1033	28,5	0,0267	0,0284	0,02463
08/outubro	1017	1031	28,8	0,0225	0,0238	0,02249
17/outubro	1017	1030	29,4	0,0267	0,0284	0,02868

Fonte: Autoria Própria (2025)

Os dados contidos na tabela permitem determinar o volume médio diário de biogás produzido ao longo do período experimental de 107 dias, totalizando 476,3 litros. Uma análise dos dados evidencia uma tendência de aumento progressivo nos intervalos de tempo necessários para que o reator gere um volume padrão médio constante de biogás, indicativo de uma redução na taxa de produção ao longo do tempo.

Para facilitar a interpretação desta tendência e permitir uma comparação temporal mais equilibrada, os dados foram normalizados e reorganizados em intervalos de tempo fixos de 10 dias. Nesta nova configuração, os valores de produção atribuídos a cada intervalo são calculados de forma proporcional, representando a produção real ocorrida dentro de cada decêndio em relação à duração total do experimento, conforme detalhado na tabela 16.

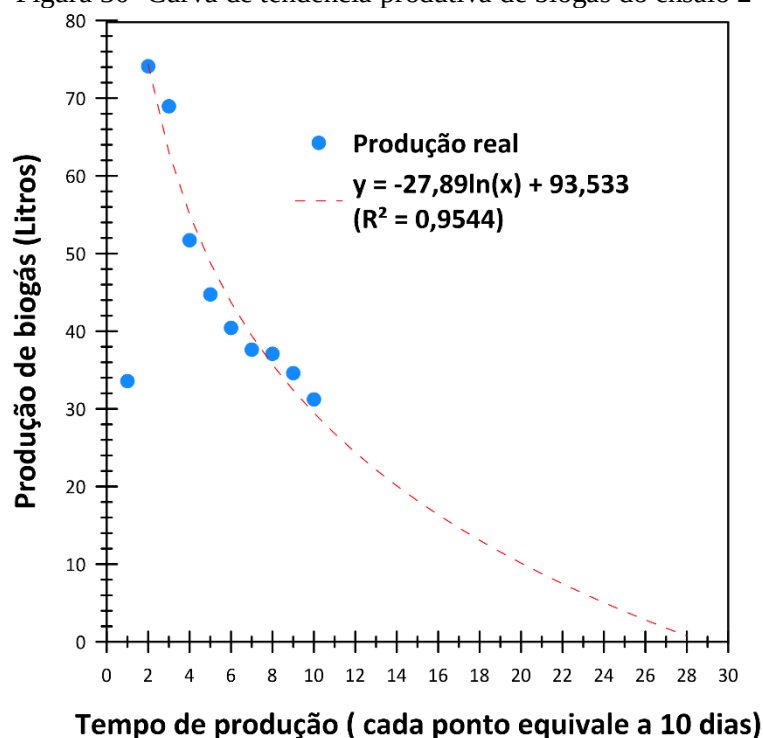
Tabela 16 - Produção adaptada do ensaio 2 em intervalos de 10 dias

Produção de 10 em 10 dias	Volume de produção (litros)
01 a 10	33,6
11 a 20	74,1
21 a 30	68,9
31 a 40	51,7
41 a 50	44,8
51 a 60	40,4
61 a 70	37,6
71 a 80	37,1
81 a 90	34,6
91 a 100	31,2

Fonte: Autoria Própria (2025)

Observa-se que no mesmo intervalo de tempo produtivo a produção vem decaindo com o tempo. Dessa forma, um gráfico de dispersão pode ser plotado e uma curva produtiva de tendência pode ser modelada e vista na figura 30.

Figura 30- Curva de tendencia produtiva de biogás do ensaio 2



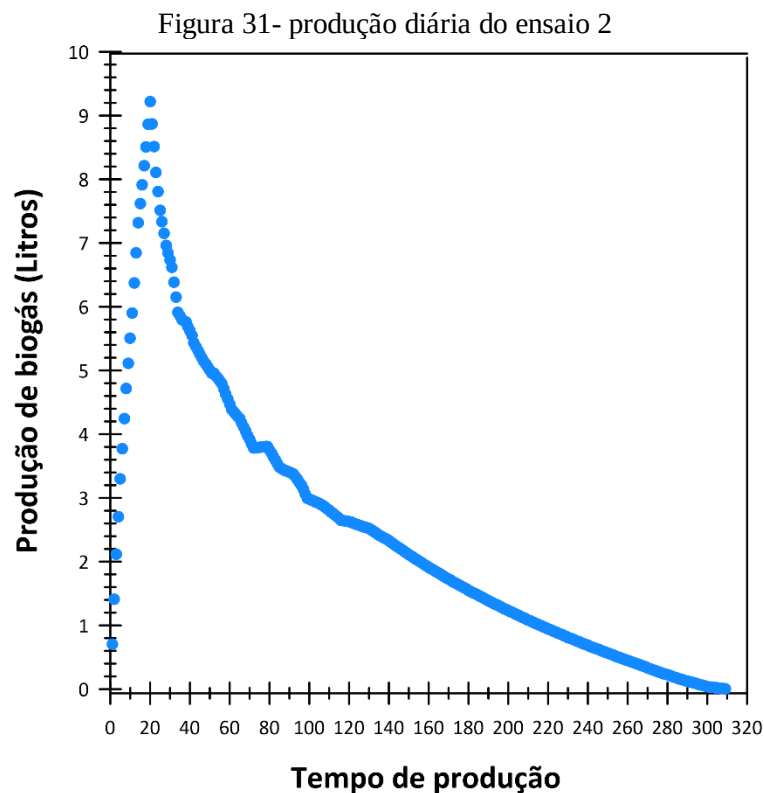
Fonte: Autoria Própria (2025)

Conforme ilustrado no gráfico de dispersão, os dados empíricos foram registrados nos primeiros 100 dias de produção. Para projeções, os valores foram modelados com base na tendência logarítmica identificada, descrita pela equação logarítmico $y = -27,89 \cdot \ln(x) +$

93,53 com $R^2 = 0,9544$ e $x > 1$, a qual apresenta um coeficiente de determinação, indicativo de um elevado grau de aderência aos dados observados.

A partir deste modelo, o volume total projetado de biogás foi calculado pela soma do ponto inicial com os 28 pontos subsequentes, onde cada ponto equivale a um intervalo de 10 dias. Dessa forma, estima-se uma produção acumulada de 636,2 litros, gerados a partir de 5 kg de substrato ao longo de um período de eficiência produtiva de aproximadamente 290 dias.

Um gráfico de produção normalizado para produção diária pode ser visto na figura 31



Fonte: Autoria Própria (2025)

por esse gráfico podemos perceber um pico produtivo no 21 dia e um período próximo ao intervalo entre o dia 30 ao dia 100 uma queda, porém não tão acentuada

Com base nesses resultados, é possível inferir a produtividade do processo em escala. Para cada tonelada de substrato humano, seria possível extrair aproximadamente 127,2 m³ de biogás no mesmo intervalo. Alternativamente, considerando uma massa específica média do biogás de 1,20 kg/m³, é possível estimar que, em média, 153,1 kg de cada tonelada de substrato são convertidos em biogás.

6.2.3 Produção de biogás via ensaio 3

Neste ensaio, uma maior taxa de diluição foi necessária devido à falta de controle preciso sobre o volume das descargas, que foi estimado em 4 litros. A produção de biogás foi monitorada com o registro do banheiro mantido fechado e aberto apenas durante as coletas diárias, realizadas por meio de uma conexão direta tipo torneira à câmara de medição. A produção significativa de biogás foi observada somente a partir do 15º dia de operação.

O biogás foi quantificado utilizando duas câmaras calibradas, operadas alternadamente. Após o enchimento, mediam-se temperatura e pressão para calcular o volume de gás pela lei dos gases ideais, transferindo-o em seguida para um reservatório maior. O monitoramento estendeu-se por 104 dias, com os volumes coletados apresentados na Tabela 17.

Tabela 17 - Produção de biogás com substrato humano em biodigestor de módulos em serie

Dia de contagem	Pressão ambiente	Pressão de captura	Temp. (°C)	Volume menor (m³)	Volume maior (m³)	Volume amb médio (m³)
25/jun	1016	1033	26,5	0,0267	0,0284	0,0282
03/jul	1017	1022	26,8	0,0225	0,0238	0,0237
08/jul	1017	1032	27,6	0,0267	0,0284	0,0282
12/jul	1016	1027	26,5	0,0225	0,0238	0,0237
15/jul	1014	1023	26,9	0,0267	0,0284	0,0283
18/jul	1015	1027	27,5	0,0225	0,0238	0,0238
21/jul	1014	1020	28,6	0,0267	0,0284	0,0282
25/jul	1016	1031	28,3	0,0225	0,0238	0,0237
29/jul	1013	1031	27,7	0,0267	0,0284	0,0282
03/ago	1013	1029	28,4	0,0225	0,0238	0,0237
08/ago	1016	1027	27,9	0,0267	0,0284	0,0282
13/ago	1018	1028	27,9	0,0225	0,0238	0,0237
19/ago	1017	1030	28,2	0,0267	0,0284	0,0282
24/ago	1018	1030	28,1	0,0225	0,0238	0,0237
31/ago	1017	1031	28,6	0,0267	0,0284	0,0282
06/set	1016	1029	29	0,0225	0,0238	0,0237
14/set	1019	1032	29,3	0,0267	0,0284	0,0281
21/set	1017	1028	29,2	0,0225	0,0238	0,0237
30/set	1015	1028	28,8	0,0267	0,0284	0,0282

Fonte: Autoria Própria (2025)

A produção média diária de biogás no período de 104 dias foi de 495,4 L. Para uma análise temporal uniforme, os dados foram normalizados e agrupados em intervalos de 10 dias.

Cada intervalo representa, proporcionalmente, a produção real daquele decêndio em relação à duração total do experimento, conforme a Tabela 18.

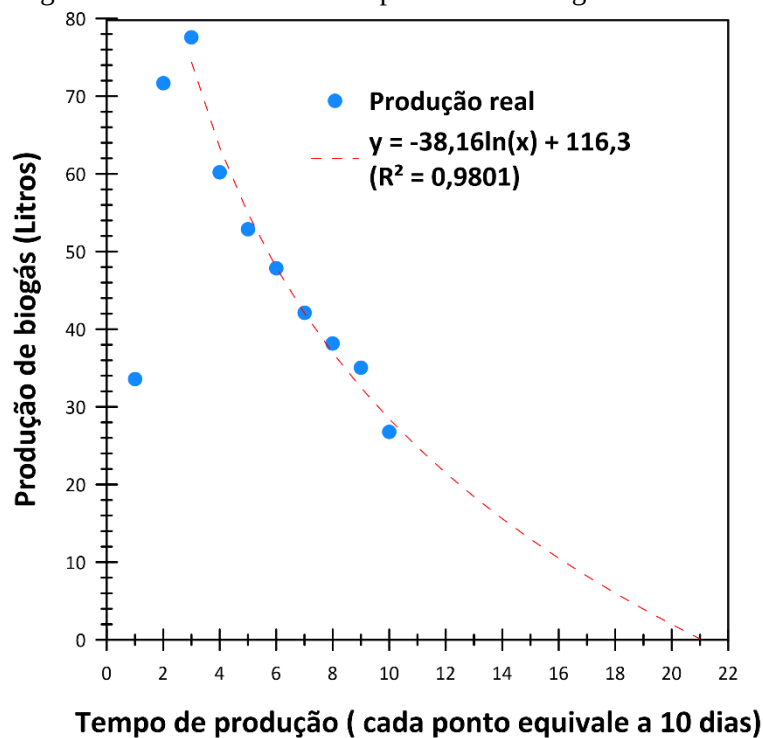
Tabela 18 - Produção adaptada do ensaio 3 em intervalos de 10 dias

Produção de 10 em 10 dias	Volume de produção (litros)
01 a 10	33,6
11 a 20	71,7
21 a 30	77,6
31 a 40	60,2
41 a 50	52,9
51 a 60	47,8
61 a 70	42,1
71 a 80	38,1
81 a 90	35,1
91 a 100	26,8

Fonte: Autoria Própria (2025)

Assim como no ensaio 2, a produção também apresenta uma tendência de queda ao longo do tempo. Essa tendência é modelada pela curva de produtividade exibida na Figura 33.

Figura 32- Curva de tendencia produtiva de biogás do ensaio 3



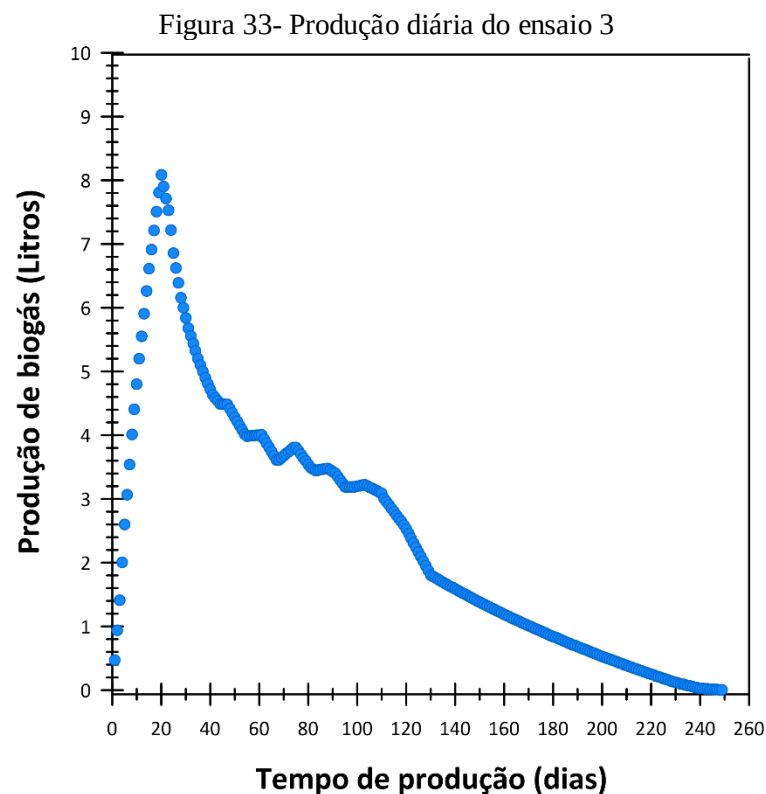
Fonte: Autoria Própria (2025)

Conforme ilustrado no gráfico de dispersão, os dados empíricos correspondem aos primeiros 100 dias de operação, contados a partir do início da produção. Para extrapolar a

tendência de produção além deste período, os pontos subsequentes foram modelados com base em uma função logarítmica, expressa pela equação $y = -38,16 \cdot \ln(x) + 116,31$ e $x > 2$, a qual demonstrou representar adequadamente o comportamento produtivo do biogás, conforme atestado por um coeficiente de determinação com $R^2 = 0,9801$.

A partir deste modelo, o volume total projetado de biogás foi calculado pela soma dos dois pontos iniciais com os 21 pontos subsequentes, em que cada unidade equivale a um intervalo de 10 dias. Dessa forma, obteve-se uma produção acumulada estimada de 609,9 litros, gerados a partir de 5 kg de substrato ao longo de um período de eficiência produtiva de aproximadamente 230 dias.

Um gráfico de produção normalizado para produção diária do ensaio 3 pode ser visto na figura 33



Fonte: Autoria Própria (2025)

por esse gráfico podemos perceber um pico produtivo no 20 dia e um período próximo, a partir disso uma queda um pouco brusca até o dia 40, e entre do dia 40 ao dia 110. uma queda igualmente não tão acentuada como no ensaio 2

Com base nessa projeção, é possível inferir o potencial de geração em escala. Para cada tonelada do substrato em questão, seria possível recuperar aproximadamente 122,0 m³ de

biogás. Alternativamente, considerando uma massa específica média do biogás de 1,20 kg/m³, estima-se que, em média, 146,85 kg de cada tonelada de substrato sejam convertidos em biogás.

6.2.4 Discussão comparativa dos processos de produção

A análise cinética dos três ensaios realizados, substrato bovino em biodigestor único, substrato humano em biodigestor único e substrato humano em biodigestor em série reafirmou um padrão comum na digestão anaeróbia, caracterizado por uma fase de latência, um pico de produção acelerada e um posterior declínio, e a modelagem da projeção é satisfatória ao ajuste excepcional aos dados experimentais pois todos os $R^2 > 0,95$, valor considerado ótimo para modelar modelos com dependência biológica.

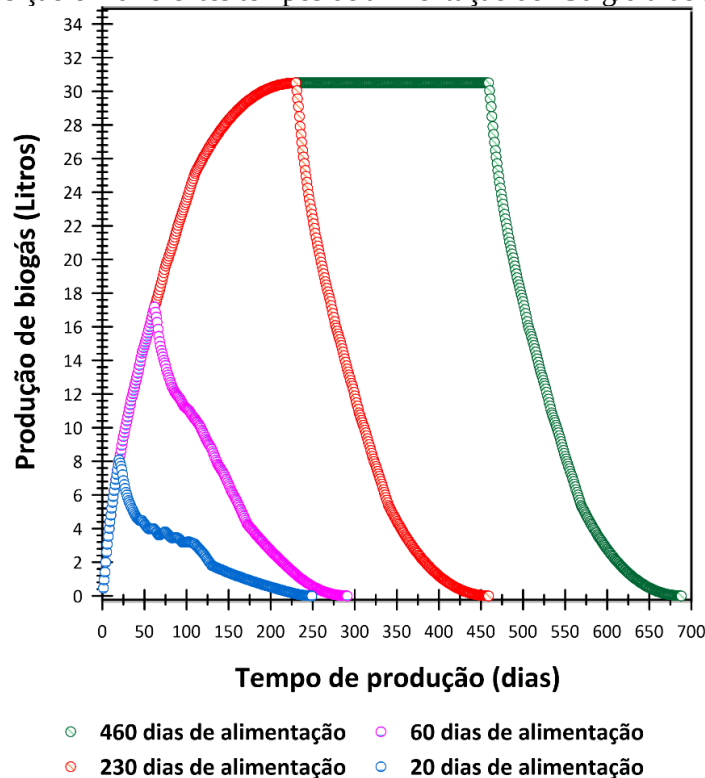
O ensaio 1, como substrato bovino, apresentou um potencial produtivo mais baixo, e poderia ser associado ao teor de sólido volátil de quase 6% menor que os obtidos de substrato humano, porém esse teor é calculado sobre o teor de sólidos totais. Convertendo esses valores para quantidade mássica total, o substrato bovino tem um teor de 31% e o substrato humano 23,6%, logo isso indica que os sólidos voláteis de fezes humanas, os sólidos voláteis das fezes humanas tiveram um potencial produtor de biogás aproximadamente 1,65 vezes maior, ou 65% superior ao dos sólidos voláteis do esterco bovino. Quando submetidos as mesmas condições de produção, no caso os ensaios 1 e 2.

A comparação entre o Ensaio 2 e o Ensaio 3 acaba por refletir a diluição excessiva no processo produtivo de biogás. As configurações dos protótipos foram aprovadas no teste de estanqueidade e isso garante que não houve perdas significativas de biogás ou entrada de ar que pudessem comprometer a comparação. No Ensaio 2, a massa de substrato foi controlada e fixada em 5 kg. No Ensaio 3, a alimentação ocorreu de forma contínua a partir do uso real da privada. A massa de substrato adicionada por descarga foi estimada em 200 gramas, valor este projetado a partir de ensaios anteriores de produção média jogando a projeção 1:20. No entanto, considerando a operação contínua ao longo do período experimental, a massa total acumulada de substrato no reator em série pode ter atingido aproximadamente 5,5 kg, dessa fora a diferença produtiva de 4,1% ainda pode ser maior

Quanto ao pico produtivo é interessante notar o seguinte, os três sistemas atingiram sua máxima taxa de produção de biogás de forma consistente entre a segunda e a terceira semana de operação (dias 11 a 20) e as figuras 32 e 34 aparentemente colocam o pico de produção em torno de 21 dias, período próximo ao do abastecimento pois as amostras não tinham peso exato por dia (porém cerca de 200 g) e foram colocadas até atingir a marca de 5 kg. Isso sugere que

o pico ocasionado no abastecimento contínuo inicialmente está atrelado ao período de abastecimento mas isso não deve crescer continuamente aumenta-se tempo de abastecimento visto a própria limitação física que no máximo seria o teor de sólidos voláteis associado ao substrato, dessa forma tendo já em mãos a capacidade produtiva em condições projetada em condições ambientes por quilograma de substrato podemos criar um gráfico de composição em cada um dos ensaios e verificar a ocorrência para crescentes Δt , que seja contínuo de fato. A figura 34 demonstra um exemplo dessa composição no ensaio 2.

Figura 34-composição em diferentes tempos de alimentação de 250 g/dia de substrato humano



Fonte: Autoria Própria (2025)

Dessa forma pode-se observar que uma alimentação contínua após o tempo projetado de transformação do substrato, faz com que o biodigestor opere em pico exatamente igual ao volume projetado, ou seja a taxa de variação mássica diária promove uma taxa de volume produzido diariamente igual ao volume total projetado a partir da massa fixa, que tenha valor numérico igual a taxa de variação mássica. Essas condições devem auxiliar em projeto de operação e dimensionamento do biodigestor, visto que o mesmo deve ter uma capacidade mínima de conter uma taxa diária pelo tempo projetado de consumo fixo para que o biodigestor opere em pico.

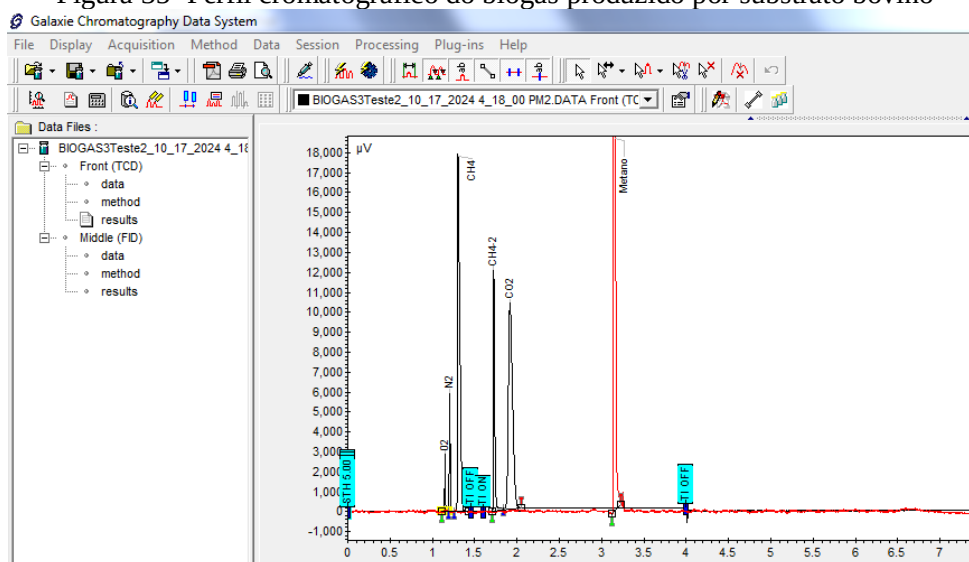
$$Cap_{min} = \dot{m} \cdot \Delta T_{proj}$$

6.1

6.2.5 Qualidade do biogás produzido por dejetos animal

A análise da composição química do biogás por cromatografia gasosa resultou no perfil cromatográfico apresentado na Figura 35.

Figura 35- Perfil cromatográfico do biogás produzido por substrato bovino



Fonte:

A imagem evidencia a presença de dois picos proeminentes, os quais foram identificados com base em seus tempos de retenção, por comparação com padrões certificados.

O pico de maior magnitude, com tempo de retenção de 1,73 min, corresponde ao metano (CH₄), enquanto o pico em 1,92 min é característico do dióxido de carbono (CO₂). ocorre na verdade dois picos de CH₄, o menor com tempo de retenção de 1,15 min conforme quantificado na Tabela 19.

Tabela 19- Composição do biogás produzido por substratos bovinos

#	Nome	Tempo (Min)	Quantidade [%]	Altura [μV]	Área [$\mu V \cdot \text{Min}$]	Área [%]
1	O ₂	1,15	0,0036	2843,4	27,0	1,875
2	N ₂	1,20	0,0305	5906,6	81,9	5,688
3	CH ₄	1,30	6,2051	17882,9	539,0	37,414
4	CH ₄ -2	1,73	0,0000	12081,1	203,0	14,089
5	CO ₂	1,92	0,0000	10317,8	589,7	40,933
Total			6,2392	49031,8	1440,6	100,000

Fonte: Autoria Própria (2025)

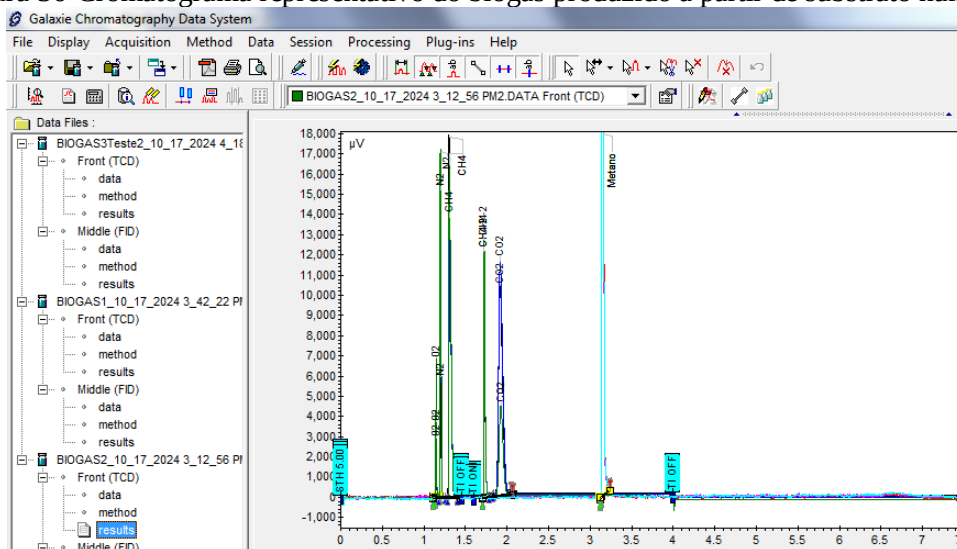
Os resultados indicam que o biogás é constituído principalmente por metano, com um teor de 51,5%, e dióxido de carbono (CO₂), que representa cerca de 41% da mistura. O

percentual de CH_4 encontra-se alinhado com as faixas reportadas na literatura para substratos similares. Adicionalmente, a análise identificou a presença de impurezas, representadas por oxigênio (O_2) de 1,9% e nitrogênio (N_2) de 5,6%, cuja provável origem reside no ar residual contido no sistema. Cabe ressaltar que a configuração analítica empregada não permite a detecção de ácido sulfídrico (H_2S), um contaminante corrosivo comumente associado ao biogás, cuja quantificação exigiria métodos cromatográficos específicos ou técnicas complementares, mas que não são de interesse desta tese.

6.2.6 Qualidade do biogás produzido por dejetos humanos

A composição percentual volumétrica do biogás proveniente do substrato humano também foi analisada mediante cromatografia gasosa. A Figura 36 apresenta uma imagem do cromatograma registrado durante a análise, exibindo os picos de eluição dos componentes.

Figura 36-Cromatograma representativo do biogás produzido a partir de substrato humano.



Fonte: Autoria Própria (2025)

Analisando os dados cromatográficos, os tempos de retenção dos principais constituintes do biogás foram assim identificados: o oxigênio apresentou tempo de retenção de 1,15 minutos, seguido pelo nitrogênio com 1,20 minutos. O metano foi detectado em dois picos distintos, o primeiro a 1,31 minutos e o segundo a 1,72 minutos, enquanto o dióxido de carbono apresentou tempo de retenção característico de 1,93 minutos. Esses e os demais resultados quantitativos derivados desse cromatograma são consolidados na Tabela 20.

Tabela 20- Composição do biogás produzido por substrato humano

#	Nome	Tempo (Min)	Quantidade [%]	Altura [μ V]	Área [μ V.Min]	Área [%]
1	O ₂	1,15	0,0089	6868,7	65,9	6,126
2	N ₂	1,20	0,1028	17243,3	62,8	5,838
3	CH ₄	1,31	5,4784	16467,5	475,9	44,237
4	Descon.	1,41	0,0000	15,7	0,3	0,028
5	CH ₄ -2	1,72	0,0000	12762,7	211,4	19,650
6	CO ₂	1,93	0,0000	4485,3	259,5	24,122
Total			5,5901	57843,2	1075,8	100,000

Fonte: Autoria Própria (2025)

Com base nos dados cromatográficos fornecidos, a composição do biogás analisado demonstra uma clara predominância de metano e dióxido de carbono como seus constituintes majoritários. O metano apresenta uma concentração total consolidada de 63,9%, enquanto o dióxido de carbono representa 24,1% da composição volumétrica.

A presença de oxigênio e nitrogênio em concentrações menores, de 6,1% e 5,8% respectivamente, sugere a ocorrência de arraste de ar atmosférico residual no sistema. Conforme observado na análise anterior, a configuração cromatográfica empregada não permite a detecção e quantificação de ácido sulfídrico (H₂S).

6.2.7 Comparação qualitativa do biogás dos dois substratos

A análise comparativa dos perfis cromatográficos revela diferenças significativas na composição do biogás gerado a partir dos dois substratos. O biogás proveniente do substrato bovino apresenta uma concentração total de metano menor o substrato humano com uma diferença de aproximadamente de 12%. representa um incremento substancial no potencial energético do biogás obtido a partir de substrato humano.

Em contrapartida, observa-se uma concentração notavelmente superior de dióxido de carbono no biogás bovino em comparação com o humano. Esta relação inversa entre CH₄ e CO₂ reflete diferenças na eficiência do processo de metanogênese, sugerindo que o substrato humano pode ter condições mais favoráveis para as arqueas metanogênicas ou apresentado uma composição química mais adequada para a produção de metano.

É crucial ressaltar, contudo, uma condição específica deste ensaio: o substrato humano foi composto exclusivamente por fezes. Esta distinção é fundamental para a interpretação dos resultados, uma vez que a urina - componente normalmente associado aos efluentes humanos em situações reais - apresenta uma composição distinta, rica em nitrogênio e sais. A introdução da urina no substrato tende a alterar o equilíbrio do processo de digestão anaeróbia, podendo

elevar a concentração de amônia, o que, por sua vez, pode exercer um efeito inibidor sobre a metanogênese.

Desta forma, existe uma grande probabilidade de que, em um cenário prático onde o substrato inclua a urina, o percentual de metano seja inferior ao elevado valor aqui registrado. A mistura completa (fezes e urina) poderia resultar em um biogás com qualidade mais próxima ou mesmo inferior à observada para o substrato bovino, destacando a sensibilidade do processo à composição do insumo e a necessidade de se considerar a matriz real de resíduos em aplicações de escala real.

6.3 ANÁLISE DO CAMPO DE VELOCIDADE

Nesta seção do capítulo, são apresentados a análise de convergência dos resultados e sua respectiva comparação com os dados obtidos por Medeiros (98). A verificação da convergência foi efetuada adotando-se como referência o número de Reynolds ($Re = 2000$). Nesta análise, a coordenada longitudinal foi adimensionalizada conforme a relação

$$Z^+ = 10^3 \frac{Z}{D}$$

A tabela 21 demonstra a convergência do perfil de velocidade longitudinal no eixo central do biodigestor para diversas posições ao longo de Z^+

Tabela 21- Convergência da velocidade longitudinal no centro do duto

Z^+	$NA = 3$	$NA = 10$	$NA = 20$	$NA = 30$	Medeiros (98)	Shah e London (78)
0.00050	1.48079	1.13171	1.13927	1.14256	1.1424	1.150
0.00125	1.4378	1.20517	1.21236	1.21374	1.2204	1.227
0.00250	1.40851	1.33862	1.34026	1.33997	1.3064	1.313
0.00375	1.44182	1.41638	1.41543	1.41437	1.3714	1.378
0.00500	1.49242	1.48109	1.47821	1.47655	1.4260	1.433
0.00750	1.59797	1.58793	1.58223	1.57961	1.5170	1.524
0.01000	1.68701	1.67339	1.66598	1.66274	1.5926	1.598
0.01750	1.84952	1.83802	1.83034	1.8269	1.7566	1.756
0.02250	1.90322	1.89757	1.89156	1.88868	1.8272	1.824
0.06250	1.98134	1.99193	1.89156	1.99486	1.9877	1.986

Fonte: Autoria Própria (2025)

A tabela 22 mostra a convergência da velocidade longitudinal média com parâmetro laminar base de $Re = 2000$

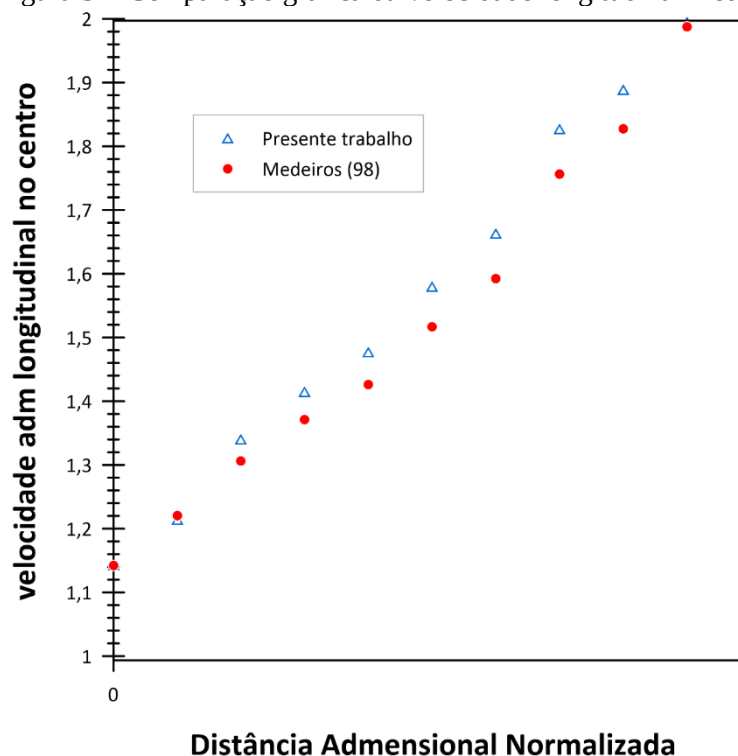
Tabela 22- convergência da velocidade longitudinal média para dutos circulares

Z^+	$NA = 10$	$NA = 20$	$NA = 30$	Medeiros (98)
0.00050	0.962027	0.980264	0.986592	0.9864
0.00125	0.960201	0.979093	0.985776	0.9867
0.00250	0.95622	0.976801	0.98418	0.9870
0.00375	0.953868	0.975434	0.983222	0.9872
0.00500	0.951958	0.974302	0.982421	0.9873
0.00750	0.94892	0.972438	0.981087	0.9875
0.01000	0.946553	0.970902	0.979963	0.9877
0.01750	0.942035	0.967465	0.977304	0.9879
0.02250	0.940728	0.96597	0.976002	0.9880
0.06250	0.95398	0.969886	0.97711	0.9882

Fonte: Autoria Própria (2025)

A figura 37 mostra essa convergência da velocidade longitudinal em comparação ao trabalho de Medeiros (98), posição adimensional normalizada

Figura 37- Comparação gráfica da velocidade longitudinal média



Fonte: Autoria Própria (2025)

Dessa forma, considerando os valores intermediários da velocidade e do número de Reynolds da tabela 10 de $v = 0,03$ m/s e $Re = 23 \cdot 10^{-6}$, simulando condições reais, a velocidade longitudinal média convergiria como mostra a tabela 23.

Tabela 23 -velocidade no centro e velocidade média ao longo do biodigestor

Z^+	Velocidade no centro	Velocidade média
0.00010	0.03428	0.02960
0.00025	0.03641	0.02957
0.00050	0.04020	0.02953
0.00075	0.04243	0.02950
0.00100	0.04430	0.02947
0.00150	0.04739	0.02943
0.00200	0.04988	0.02940
0.00350	0.05481	0.02932
0.00450	0.05666	0.02928
0.01250	0.05985	0.02931

Fonte: Autoria Própria (2025)

Os resultados demonstram a formação de um perfil de velocidades característico do escoamento laminar em tubos, com pouca variação radial, devido as condições iniciais do próprio escoamento. Para uma velocidade média de 0,03 m/s, observa-se que:

A velocidade média ao longo de toda a seção transversal converge 0,03 m/s, o fluido atinge valores significativamente superior nas regiões próximas ao centro do biodigestor, alcançando aproximadamente 0,059 m/s, o que representa quase o dobro da velocidade média.

Embora os valores absolutos de velocidade sejam aparentemente baixos, uma análise superficial poderia levar à conclusão equivocada de que o escoamento é insignificante ou pouco eficiente. No entanto, a verdadeira importância desses resultados reside não nos valores absolutos, mas no perfil de distribuição radial e nas diferenças relativas entre as regiões do biodigestor, visto que em velocidades mais elevadas o perfil hidrodinâmico pode influenciar diretamente os tempos de residência de partículas do substrato e a eficiência de mistura, sendo um fator crítico para o contato substrato-microorganismo.

6.4 ANÁLISE DO CAMPO DE TEMPERATURA

Para verificar a convergência da temperatura podemos comparar com o modelo de temperatura de Medeiros (98), para o caso em que $\dot{q}$ adimensionalizada seja constante e muito pequeno.

A tabela 24 demonstra a convergência do perfil de temperatura longitudinal no eixo central do biodigestor para diversas posições ao longo de Z^+ , considerando $Biot = 10^{30}$

$Pr = 0.7$ e $Re = 2000$

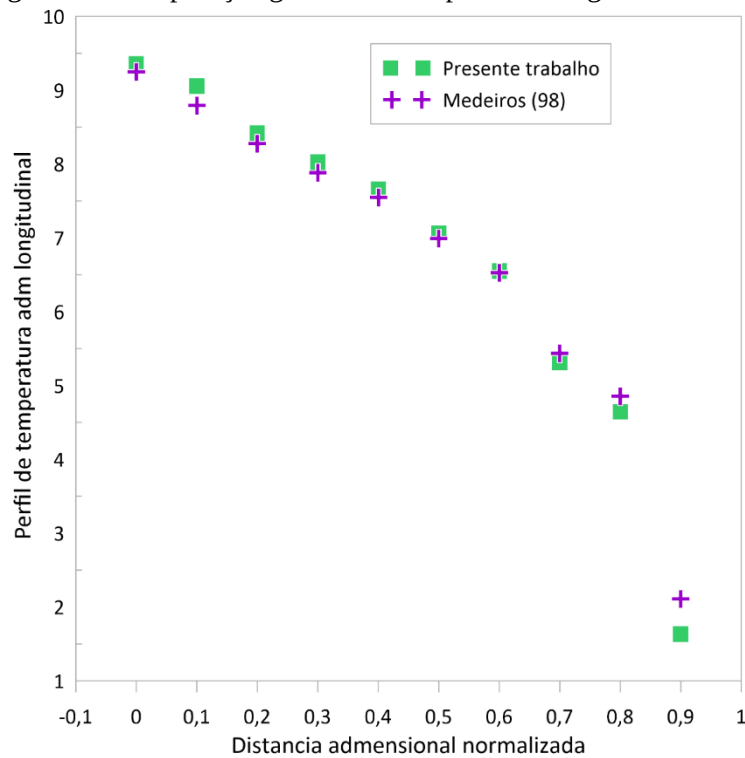
Tabela 24 -convergência do perfil de temperatura longitudinal

Z^+	$NA = 10$	$NA = 20$	$NA = 30$	Medeiros (98)
0.00050	0.937763	0.936344	0.935988	0.9247
0.00125	0.907095	0.905984	0.905772	0.8792
0.00250	0.842212	0.842066	0.842167	0.8277
0.00375	0.80223	0.802673	0.802973	0.7881
0.00500	0.764866	0.765881	0.766374	0.7548
0.00750	0.703506	0.705498	0.706322	0.6992
0.01000	0.650997	0.653852	0.654971	0.6528
0.01750	0.5242	0.52912	0.530972	0.5436
0.02250	0.456338	0.462228	0.464448	0.4858
0.06250	0.155135	0.160938	0.163308	0.2108

Fonte: Autoria Própria (2025)

A figura 38 mostra essa convergência da temperatura longitudinal em comparação ao trabalho de Medeiros (98), posição adimensional normalizada

Figura 38- Comparação gráfica da Temperatura longitudinal média



Fonte: Autoria Própria (2025)

Os valores convergem à medida que se aumentam os autovalores, porém com uma sutil diferença pontual aos valores de Medeiros (98), devido exatamente ao incremento do $\dot{Q} = 0,01$, quanto mais relevante for esse valor, maior vai ser a influência dos valores temperatura média num ponto dado.

Considerando a tabela 10, $Pr = 2,75 \cdot 10^5$, valor intermediário $Re = 23 \cdot 10^{-6}$ (Péclet térmico = 6,3), segue na tabela 25, os valores de distribuição do centro à parede do biodigestor, considerando a temperatura medida no centro de 32°C, a temperatura de entrada de 28°C sendo a mesmo ambiente e a medição na parede externa de 28,4°C.

Tabela 25- Distribuição de temperatura considerando a medida no centro de 32°C

Z^+	Adimensionalizada	Temperatura física
0.00050	0.935988	31.77°C
0.00125	0.905772	31.66°C
0.00250	0.842167	31.43°C
0.00375	0.802973	31.29°C
0.00500	0.766374	31.16°C
0.00750	0.706322	30.94°C
0.01000	0.654971	30.76°C
0.01750	0.530972	30.31°C
0.02250	0.464448	30.07°C
0.06250	0.163308	28.99°C

Fonte: Autoria Própria (2025)

Vale ressaltar que a distribuição mais correta deve ser feita na parede interna do biodigestor, porém não temos aparelhos necessários para tal medição, a medição no eixo central é feita quando colocamos as amostras, considerando a seção media, e foi realizada também ao após o estudo produtivo com novas amostras esperando o período de maior produção e abrindo o biodigestor rapidamente já realizando a medição verificando 32,7°, observando nesse momento uma diferença da parede interna para a externa de quase 1,6° (30,4°C-28,8°C).

A modelagem do campo de temperatura via GITT permitiu mapear a distribuição de calor no interior do biodigestor, revelando um perfil radial não uniforme. Os resultados indicam a formação de um gradiente térmico, com temperaturas mais elevadas no eixo central e valores progressivamente menores em direção às paredes do reator.

A existência deste gradiente, mesmo com diferenças absolutas modestas, sugere uma condição operacional não ideal. As regiões periféricas, submetidas a temperaturas mais baixas, possuem o potencial de operar com taxas metabólicas inferiores às das regiões centrais, o que poderia, em última instância, limitar a eficiência global do processo de digestão anaeróbia. A capacidade da GITT em quantificar este fenômeno é de grande valia, fornecendo uma ferramenta precisa para simular e analisar o impacto de diferentes condições de contorno e estratégias de isolamento térmico. Dessa forma, o modelo se apresenta como um instrumento essencial para orientar o projeto de melhorias que visem à homogeneização da temperatura e à maximização da produção de biogás.

6.5 ANÁLISE DO CAMPO DE CONCENTRAÇÃO

Os resultados do campo de concentração ao longo do comprimento adimensional do biodigestor são apresentados na Tabela 26 e ilustram a variação das concentrações média (CONCM) e no centro (CONCC), tanto em valores adimensionais quanto em percentuais considerando a tabela 10, $Re = 23 \cdot 10^{-6}$, e $Bi_m = 9,8$ e $Pc_m = 10,5$. Observa-se um comportamento decrescente de ambas as concentrações à medida que se avança no domínio, indicando um processo de consumo ou degradação do substrato ao longo do reator.

Tabela 26- Campo de concentração ao longo do comprimento adimensional do biodigestor

Z^+	CONCM_adim	CONCC_adim	CONCM (%)	CONCC (%)
0.00050	0.9893	1.0523	18,81	19,82
0.00125	0.9875	1.0464	18,99	19,70
0.00250	0.9840	1.0367	18,71	19,53
0.00375	0.9805	1.0263	18,64	19,49
0.00500	0.9770	1.0148	18,59	19,33
0.00750	0.9735	1.0042	18,51	19,13
0.01000	0.9700	0.9956	18,44	18,92
0.01750	0.9680	0.9704	18,40	18,49
0.02250	0.9665	0.9581	18,37	18,15
0.06250	0.9652	0.9337	18,35	17,74

Fonte: Autoria Própria (2025)

A concentração média uma redução percentual de aproximadamente 2,4%, enquanto a concentração no centro redução percentual de aproximadamente 11,3%. Essa diferença sugere um gradiente radial significativo, com maior taxa de consumo na região central do tubo. Nota-se que a concentração no centro é sistematicamente superior à média, o que pode estar associado a um perfil de velocidades que favorece a retenção de substrato na região central, ou a uma menor taxa de reação nessa região devido a condições de mistura ou transferência de massa.

A análise do campo de concentração via GITT revelou um gradiente radial significativo ao longo do comprimento do reator, caracterizado por uma concentração sistematicamente superior no eixo central em comparação com a média da seção transversal. Este perfil demonstra um consumo não homogêneo do substrato, indicando que a taxa de reação não é uniforme em todo o domínio do biodigestor.

A persistência de maiores concentrações na região central sugere a formação de um canal preferencial, onde o escoamento é mais rápido e o tempo de residência do substrato pode ser insuficiente para uma digestão completa. Em contrapartida, as regiões mais próximas às

paredes, sujeitas a menores velocidades, apresentam-se como zonas de baixa conversão, onde o substrato pode não estar sendo consumido na sua máxima potencialidade.

Embora observado em escala de laboratório, o modelo destaca que este fenômeno de estratificação do escoamento e do consumo tende a se intensificar em reatores de maior escala e vazão, podendo impactar significativamente a eficiência de conversão global. Dessa forma, a GITT, ao quantificar este comportamento, fornece uma ferramenta fundamental para o projeto de geometrias internas e sistemas de agitação que promovam a homogeneização e minimizem gradientes indesejados, assegurando uma utilização mais completa do substrato.

7 CONCLUSÃO

Com base na análise integral do trabalho desenvolvido, uma abordagem metodológica dupla, que integrou a experimentação em protótipos, quantificando a produção e a qualidade do biogás, com uma modelagem matemática em coordenadas cilíndricas onde a Técnica da transformada integral generalizada caracterizou os campos de velocidade, temperatura e concentração do substrato, permitiu a apresentação das seguintes conclusões fundamentais:

1) Superioridade do substrato humano na produção de biogás: Os resultados experimentais demonstraram que o substrato humano apresenta um potencial produtivo significativamente superior ao substrato bovino. Para uma mesma massa de substrato (5 kg), o volume total projetado de biogás foi de aproximadamente 636,2 litros para o substrato humano em batelada, contra 506,9 litros para o bovino. Essa diferença está diretamente associada ao maior teor de sólidos voláteis nas fezes humanas de 86,96% contra 81,33% no bovino, indicando uma fração orgânica mais biodegradável e, portanto, um maior potencial metanogênico.

2) Impacto crítico da diluição do substrato: A operação em regime contínuo com diluição não controlada resultou em uma produção acumulada ligeiramente inferior à observada em batelada com diluição controlada. Isto evidencia que a concentração do substrato é um parâmetro de influência, e que a diluição excessiva pode impactar negativamente a eficiência volumétrica do processo, destacando a importância do manejo da relação substrato/água para a otimização do sistema.

3) Qualidade superior do biogás a partir de substrato humano: A análise cromatográfica demonstrou que o biogás gerado a partir de fezes humanas *in natura* atingiu 63,9% de metano, superando o substrato bovino de 51,5%. Ressalta-se, porém, que a inclusão da urina no substrato, comum em aplicações reais, pode alterar o equilíbrio do processo e reduzir este percentual devido à potencial inibição da metanogênese por compostos nitrogenados.

4) Resolução da modelagem via GITT: A Técnica da Transformada Integral Generalizada mostrou-se uma ferramenta importante para solucionar os perfis de velocidade, temperatura e concentração no interior do biodigestor. A convergência dos resultados, validada com dados da literatura, comprova a precisão do método e sua utilidade para a previsão de perfis de escoamento e transferência, mesmo em condições de baixo número de Reynolds e altos números de Prandtl e Schmidt.

5) Identificação de gradientes térmicos e de concentração: A GITT permitiu identificar gradientes radiais de temperatura e concentração no interior do reator. A existência de regiões

mais frias e com menor concentração de substrato, ainda que com diferenças absolutas modestas, aponta para uma condição de operação não ideal. O modelo demonstra que o sistema como um todo pode ser limitado por estas regiões de menor atividade, fornecendo uma compreensão mais aprofundada para projeto de estratégias de homogeneização que visem à maximização da produção.

6) Caracterização Reológica e Contribuição de Adimensionais: A padronização do teor de sólidos totais em 10,85% permitiu a comparação direta entre os substratos estudados. A estimativa de parâmetros reológicos e a consequente geração de uma tabela abrangente de números adimensionais (Reynolds, Prandtl, Schmidt, Sherwood, Biot, Péclet) constituem uma contribuição significativa. Estes valores caracterizaram o regime estritamente laminar e as limitações difusivas do sistema, servindo como dados de referência para trabalhos futuros se acomodem nas mesmas faixas ou próximas delas.

7) Parâmetros para Dimensionamento e Operação em Pico: O estudo estabeleceu uma relação clara entre a taxa de alimentação, o tempo de retenção e a produção máxima, demonstrando que uma alimentação contínua, após o período de transformação do substrato, permite que o biodigestor opere em sua capacidade de pico. Isto fornece um subsídio fundamental para o cálculo da capacidade mínima do reator ($Cap_{min} = \dot{m} \cdot \Delta T_{proj}$) visando uma operação contínua e otimizada.

Em síntese, esta tese avançou no entendimento científico dos processos envolvidos na produção de biogás advindos de substratos específicos, como também forneceu ferramentas matemáticas e um conjunto de parâmetros operacionais e adimensionais críticos. Estes resultados poderão ser utilizados diretamente para o aprimoramento, dimensionamento e ampliação de sistemas de biodigestão, com reflexos positivos na geração de energia renovável e na redução de impactos ambientais, em especial no contexto da sustentabilidade.

Com base nos resultados e limitações identificadas neste trabalho, sugerem-se as seguintes direções para pesquisas futuras:

- Análise produtiva com maior diferencial térmico: teste experimentais de produção com incrementos de temperatura, e comparação com campo térmico via GITT gerado por esses dados.
- Validação de Estratégias de Homogeneização: desenvolvimento e teste experimental de sistemas de agitação ou recirculação em biodigestores de grande

porte para mitigar a formação de zonas de baixa conversão, com projetos de instalação e rotação mediante avaliação de perfil dos campos.

- Análise de Sustentabilidade Integrada: estudo de ciclo de vida e análise exergoeconômica de sistemas de biodigestão utilizando os parâmetros operacionais obtidos aqui experimentalmente.
- Monitoramento em tempo real da Produção: desenvolvimento de sistema de baixo custo para monitoramento contínuo de produção e composição do biogás, integrado com parâmetros operacionais de temperatura e concentração
- Investigação do efeito da urina na metanogênese: estudo sistemático da digestão anaeróbia de fezes humanas com diferentes proporções de urina, monitorando parâmetros como amônia livre e atividade metanogênica, para determinar condições ótimas e limites de inibição.
- Projetos em escalabilidade com produção otimizada: após a garantia da produção em pico apresentada neste trabalho, calcular sólido volátil de difícil retirada e usar perfil de temperatura e concentração solucionado via GITT para mensurar coletores solares ou agitadores que possam maximizar esse pico.

REFERÊNCIAS

- ALVES, A. F. M., **Análise exergoeconômica e exergoambiental de um sistema de trigeriação usando gás natural e extensão para o uso do biogás de aterro sanitário**. Tese de doutorado. UFPB. 2020
- ANGELIDAKI, Irini; ELLEGAARD, Lars; AHRING, Birgitte Kiær. A mathematical model for dynamic simulation of anaerobic digestion of complex substrates: focusing on ammonia inhibition. **Biotechnology and bioengineering**, v. 42, n. 2, p. 159-166, 1993.
- ASAE, Trans. Thermal properties of grain and grain products. **ASABE Standards**, 2003.
- AVILA-LOPEZ, Marco et al. Toward thermal autarky for large-scale biogas plants: Dynamic energy modeling for energy efficiency in anaerobic digesters with enhanced multimembrane gasholders. **Fuel**, v. 339, p. 126978, 2022.
- BATSTONE, Damien J. et al. The IWA anaerobic digestion model no 1 (ADM1). **Water Science and technology**, v. 45, n. 10, p. 65-73, 2002.
- BUTKOV, E. **Mathematical physics**, volume único. 1973.
- CAO, Xiuqin et al. Rheological properties of municipal sewage sludge: dependency on solid concentration and temperature. **Procedia Environmental Sciences**, v. 31, p. 113-121, 2016.
- CENGEL, Yunus A.; CIMBALA, John M. **Mecânica dos fluidos-3**. Amgh Editora, 2015.
- CHOUDHARY, A. et al. Sustainable Production of Biogas in Large Bioreactor under Psychrophilic and Mesophilic Conditions. **Journal of Environmental Engineering**, v. 146, n. 3, 2020.
- COTTA, Renato Machado. **Integral transforms in computational heat and fluid flow**. CRC Press, 2020.
- CREMASCO, Marco Aurélio. **Fundamentos de transferência de massa**. Editora Blucher, 2021.
- DABIRI, Soroush; KUMAR, Prashant; RAUCH, Wolfgang. Integrating biokinetics with computational fluid dynamics for energy performance analysis in anaerobic digestion. **Bioresource Technology**, [S. l.], v. 373, 128728, 2023.
- DAPELO, Davide; KUMMERLÄNDER, Adrian; KRAUSE, Mathias J.; BRIDGEMAN, John. Lattice-Boltzmann LES modelling of a full-scale, biogas-mixed anaerobic digester. **Engineering with Computers**, [S. l.], v. 40, p. 715–739, 2024.
- DINIZ, L. S., **Estudo das Tensões Térmicas no Acoplamento Condução-Radiação em Materiais Semitransparentes**. Tese de doutorado. UFPB. 2005

DONACHO, Dereje Oljira et al. **Experimental evaluation of fresh human feces biogas and compost potential: Evidence for circular economy from waste streams in Ethiopia.** *Heliyon*, v. 9, n. 12, 2023.

DUONG, C. M.; LIM, T.-T. Interaction between organic loading rate and mesophilic temperature on biogas production and bacterial structure in co-digestion of manure and oil. **Biomass and Bioenergy**, v. 203, n. 108310, 2025.

ESTEVEZ, Elisa Maria Mano et al. Life cycle assessment of manure biogas production: A review. **Journal of Cleaner Production**, v. 219, p. 411-423, 2019.

FAO, FAOSTAT et al. **Food and agriculture organization of the United Nations.** Rome, URL: <http://faostat.fao.org>, v. 403, 2018.

FATHINEZHAD, A.; JAFARI, N. H.; OLDENBURG, C. M.; CALDWELL, M. D. Numerical investigation of air intrusion and aerobic reactions in municipal solid waste landfills. **Waste Management**, [S. l.], v. 147, p. 60–72, 2022.

FONSECA, F. S. T, et al. **Análise de Viabilidade Econômica de Biodigestores na Atividade de Suinocultura na Cidade de Balsas - MA: um Estudo de Caso.** Congresso da sociedade brasileira de economia, administração e sociologia rural. Universidade Estadual do Maranhão. Maranhão, 2009.

FOX, Robert W.; PRITCHARD, Philip J.; MCDONALD, Alan T. **Introdução À Mecânica Dos Fluidos** . Grupo Gen-LTC, 2000.

GALLEGO, E. et al. Determination of emission factors from a landfill through an inverse methodology: Experimental determination of ambient air concentrations and use of numerical modelling. **Environmental Pollution**, v. 351, 2024.

GANESHAN, P.; RAJENDRAN, K. Dynamic simulation and optimization of anaerobic digestion processes using MATLAB. **Bioresource Technology**, v. 351, 2022

GARCÍA-RAMÍREZ, Tania P. et al. New methodology for calculating the production of biogas in livestock wastewater treatment systems. **Desalination and Water Treatment**, [S. l.], v. 309, p. 249–254, 2023.

HREIZ, Rainier et al. Modeling and simulation of heat transfer phenomena in a semi-buried anaerobic digester. **Chemical Engineering Research and Design**, v. 119, p. 101-116, 2017.

INCROPERA, Frank P.; DEWITT, David P. **Fundamentos de transferência de calor.** Pearson Educación, 2014.

JIANG, Jiankai et al. Rheological characteristics of highly concentrated anaerobic digested sludge. **Biochemical Engineering Journal**, v. 86, p. 57-61, 2014.

KUNZ, A.; STEINMETZ, R. L. R.; DO AMARAL, A. C. **Fundamentos da digestão anaeróbia, purificação do biogás, uso e tratamento do digestato.** 2. ed. Concórdia: Sbera: Embrapa Suínos e Aves, 2022.

LI, et al. Rheology-dependent mass diffusion characteristics of high-solids anaerobic co-digestate of food waste and sewage sludge. *Biochemical Engineering Journal*, [S. l.], v. 199, 109043, 2023

LI, Jiayu; ZOU, Jinping; WEI, Xuan. Modeling of CSTR flow field for *Agaricus bisporus* residue fermentation based on CFD numerical simulation. **Environmental Science and Pollution Research**, v. 30, n. 7, p. 17437-17448, 2023.

LIANG, Zhixuan et al. Pressurised anaerobic digestion for reducing the costs of biogas upgrading. **BioEnergy Research**, v. 16, n. 4, p. 2539-2548, 2023.

LINDORFER, H.; BRAUN, R.; KIRCHMAYR, R. Self-heating of anaerobic digesters using energy crops. **Water science and technology**, v. 53, n. 8, p. 159-166, 2006.

LIU, Yongdi et al. Effects of different biofilm carriers on biogas production during anaerobic digestion of corn straw. **Bioresource technology**, v. 244, p. 445-451, 2017.

LÜBKEN, Manfred et al. Modelling the energy balance of an anaerobic digester fed with cattle manure and renewable energy crops. **Water research**, v. 41, n. 18, p. 4085-4096, 2007.

MALIUTINA, Kristina; TAHMASEBI, Arash; YU, Jianglong. Pressurized entrained-flow pyrolysis of microalgae: enhanced production of hydrogen and nitrogen-containing compounds. **Bioresource technology**, v. 256, p. 160-169, 2018.

MEDEIROS J. M., Análise teórica da convecção forçada laminar transiente em desenvolvimento simultâneo em dutos. Dissertação de mestrado. UFPB. 1998

MEDEIROS J. M., **Soluções Híbridas dos problemas de transferência simultânea de calor e massa com fronteira móvel via GITT**. Tese de doutorado. UFPB. 2023

MEZGER, Thomas. **The rheology handbook: for users of rotational and oscillatory rheometers**. European Coatings, 2020.

MIKHAILOV, Mikhail Dimitrov; OZISIK, M. Necati. **Unified analysis and solutions of heat and mass diffusion**. 1984.

MILES, C. A.; VAN BEEK, G.; VEERKAMP, C. H. Calculation of thermophysical properties of foods. **Physical properties of foods**, v. 1, p. 269-312, 1983.

MO, Lidong et al. Integrated global assessment of the natural forest carbon potential. **Nature**, v. 624, n. 7990, p. 92-101, 2023.

MOHSENIN, Nuri N. **Thermal properties of food and agricultural materials**. CRC Press, 2020.

NURGALIEV, Timur; KOSHELEV, Valery; MÜLLER, Joachim. Risk Analysis of the Biogas Project. **BioEnergy Research**, [S. l.], v. 16, p. 2574–2589, 2023.

PEDERSEN, S. V.; MARTÍ-HERRERO, J.; SINGH, A. K.; SOMMER, S. G.; HAFNER, S. D. Management and design of biogas digesters: A non-calibrated heat transfer model. **Bioresource Technology**, [S. l.], v. 296, p. 122264, 2020.

PEDERSEN, S. Vilms et al. Management and design of biogas digesters: A non-calibrated heat transfer model. **Bioresource Technology**, v. 296, p. 122264, 2020.

REIS, A. S. **tratamento de resíduos sólidos orgânicos em biodigestor anaeróbio**. Dissertação de mestrado. UFPE. 2009

RODRIGO-ILARRI, J.; RODRIGO-CLAVERO, M.-E. Mathematical Modeling of the Biogas Production in MSW Landfills. Impact of the Implementation of Organic Matter and Food Waste Selective Collection Systems. **Atmosphere**, [S. l.], v. 11, n. 12, p. 1306, 2020.

ŞAHIN, M.; ÖZTÜRK, M. CFD analysis of the characteristic of a heat exchanger with counter flow shell tube under biogas-nanofluid conditions. **Journal of Thermal Analysis and Calorimetry**, 2025.

SEVINCHAN, Eren; DINCER, Ibrahim; LANG, Haoxiang. Energy and exergy analyses of a biogas driven multigenerational system. **Energy**, v. 166, p. 715-723, 2019.

SHI, E. et al. Kinetic study on anaerobic digestion of long-chain fatty acid enhanced by activated carbon adsorption and direct interspecies electron transfer. **Bioresource Technology**, v. 403, 130902, 2024.

TELESZEWSKI, Tomasz Janusz; ŻUKOWSKI, Mirosław. Analysis of heat loss of a biogas anaerobic digester in weather conditions in Poland. **Journal of Ecological Engineering**, v. 19, n. 4, p. 242-250, 2018.

TILLEY, Elizabeth et al. **Compendium of sanitation systems and technologies**. 2014.

VERONESE, J.P., **Análise do escoamento bidimensional de fluido não newtonianos com formulação em variáveis Primitivas via GITT**. Tese de doutorado. UFPB. 2008

VIALETTO, Giulio et al. Enhancement of energy generation efficiency in industrial facilities by SOFC–SOEC systems with additional hydrogen production. **International Journal of Hydrogen Energy**, v. 44, n. 19, p. 9608-9620, 2019.

WEINRICH, Sören; NELLES, Michael. **Basics of anaerobic digestion: biochemical conversion and process modelling**. Leipzig: Deutsches Biomasseforschungszentrum gemeinnützige GmbH, 2021.

WONG, Colin LY; ZAWADZKI, Willy. Emissions rate measurement with flow modelling to optimize landfill gas collection from horizontal collectors. **Waste Management**, v. 157, p. 199-209, 2023.

XIA, Heng et al. Unveiling dioxin dynamics: A whole-process simulation study of municipal solid waste incineration. **Science of the Total Environment**, v. 954, 2024.

YANG, Y. et al. On the Prediction of Biogas Production from Vegetables, Fruits, and Food Wastes by ANFIS- and LSSVM-Based Models. **BioMed Research International**, v. 2021, 2021.

YOUSUF, N. et al. An accurate and robust method for intensification of wastewater sludge pipe flow. **Science of the Total Environment**, v. 949, 175143, 2024.

YUKI JUNIOR, G. M. et al. Combining thermal model and kinetics: Implications in dynamic simulation of anaerobic digesters. **Bioresource Technology**, v. 413, n. 131343, 2024.

ZHANG, Xiaojing et al. Achieving biogas production and efficient pollutants removal from nitrogenous fertilizer wastewater using combined anaerobic digestion and autotrophic nitrogen removal process. **Bioresource Technology**, v. 339, p. 125659, 2021.

APÊNDICE A

DESENVOLVIMENTO DO PAR DE TRANSFORMADAS INTEGRAIS

Dado o problema ou sistema de Sturm-Liouville, para resolver primeiramente vamos considerar os seguintes problemas homogêneos auxiliares. Temos uma metodologia de resolução já vista no capítulo 3 a qual iremos relembra-la e aplica-la aqui. Para uma padronização com termos utilizada especificamente na análise de difusão, as equações serão desenvolvidas da mesma forma, porém com outra roupagem. Através do método de separação de variáveis diremos que a função potencial pode ser expressa por $T(\mathbf{r}, t) = A(t)\psi(\mathbf{r})$. Temos:

$$T(\mathbf{r}, t) = R(\mathbf{r})G(t) \therefore T(\mathbf{r}, t) = A(t)\psi(\mathbf{r}) \rightarrow R(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r}); G(t) = A(t) \quad (\text{A-1})$$

Agora aplicando essa definição na equação 3-49a

$$w(\mathbf{r}) \frac{\partial A(t)\psi(\mathbf{r})}{\partial t} - \nabla \cdot (k(\mathbf{r})\nabla(A(t)\psi(\mathbf{r})) + d(\mathbf{r})A(t)\psi(\mathbf{r}) = P(\mathbf{r}, t) \quad (\text{A-2})$$

$$w(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) \frac{\partial A(t)}{\partial t} - A(t)\nabla \cdot (k(\mathbf{r})\nabla(\psi(\mathbf{r})) + A(t)d(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) = P(\mathbf{r}, t) \quad (\text{A-3})$$

Considerando primeiramente homogenia então $P(\mathbf{r}, t) = 0$ reorganizando temos:

$$\frac{\nabla \cdot (k(\mathbf{r})\nabla(\psi(\mathbf{r})) - d(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})}{w(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})} = \frac{\frac{\partial A(t)}{\partial t}}{A(t)} \quad (\text{A-4})$$

Temos funções dependentes somente do espaço $\mathbf{r}$ em um membro e no outro funções dependentes somente do tempo t e como neste caso o espaço e o tempo são variáveis independentes entre si, matematicamente isso só pode ser verdade se essa igualdade for uma constante K . Fazendo a análise dessa constante assim como no capítulo 3, concluímos que podemos definir de tal forma que $K = -\lambda$ tal que $\lambda \geq 0$, onde veremos que λ serão os autovalores. Para nossa nova roupagem $\lambda = \mu^2$, assim:

$$\frac{\nabla \cdot (k(\mathbf{r})\nabla(\psi(\mathbf{r})) - d(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})}{w(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})} = \frac{\frac{\partial A(t)}{\partial t}}{A(t)} = -\mu^2 \quad (\text{A-5})$$

$$\nabla \cdot (k(\mathbf{r})\nabla(\psi(\mathbf{r})) - d(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})) = -\mu^2 w(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) \quad (\text{A-6})$$

e

$$A_t + \mu^2 A = 0 \quad (\text{A-7})$$

Olhando agora para a parte espacial é a forma da equação de Sturm e Liouville cuja teoria dão obtenção de soluções de problemas físicos tanto homogêneos como não homogêneos. As soluções ψ são bases para expansões em series e a cada solução daremos um índice n de modo análogo aos resultados que iniciamos no capítulo 1 ainda na análise de Fourier

$$\nabla \cdot (k(\mathbf{r})\nabla(\psi_n(\mathbf{r})) - d(\mathbf{r})\psi_n(\mathbf{r})) = -\mu_n^2 w(\mathbf{r})\psi_n(\mathbf{r})$$

$$\mathcal{L}[\psi_n(\mathbf{r})] \equiv -\nabla \cdot (k(\mathbf{r})\nabla\psi_n(\mathbf{r})) + d(\mathbf{r})\psi_n(\mathbf{r}) = \mu_n^2 w(\mathbf{r})\psi_n(\mathbf{r})$$

$$\mathcal{L}[\psi_n(\mathbf{r})] = \mu_n^2 w(\mathbf{r})\psi_n(\mathbf{r}) \quad (\text{A-8})$$

Em seguida observamos que:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (p\nabla R_n) - qR_n &= -\lambda_n \rho R_n \therefore \nabla \cdot (k(\mathbf{r})\nabla\psi_n(\mathbf{r})) - d(\mathbf{r})\psi_n(\mathbf{r}) \\ &= -\mu_n^2 w(\mathbf{r})\psi_n(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (\text{A-9})$$

$$\rightarrow p(\mathbf{r}) = k(\mathbf{r}); \quad q(\mathbf{r}) = d(\mathbf{r}); \quad \rho(\mathbf{r}) = w(\mathbf{r}) \quad (\text{A-10})$$

$$\mathbf{L} \equiv \nabla \cdot (p\nabla) - q \therefore \mathcal{L} \equiv -\nabla \cdot (k(\mathbf{r})\nabla) + d(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{L} = -\mathcal{L} \quad (\text{A-11})$$

o operador $\mathcal{L}$ aplicado em $\psi_n(\mathbf{r})$ em (5.1g) também poderia ser observado devido e essa conclusão de $\mathbf{L} = -\mathcal{L}$

$$\mathcal{L}[\psi_n(\mathbf{r})] = -\mathbf{L}[\psi_n] = -\mathbf{L}[R_n] = \lambda_n \rho R_n = \mu_n^2 w(\mathbf{r})\psi_n(\mathbf{r}) \quad (\text{A-12})$$

$$\mathcal{L}[\psi_n(\mathbf{r})] = \mu_n^2 w(\mathbf{r})\psi_n(\mathbf{r}) \quad (\text{A-13})$$

Verifiquemos agora as condições de contorno (3-49e),

$$B[T(\mathbf{r}, t)] = B[A(t)\psi(\mathbf{r})] = \phi(\mathbf{r}, t) = \alpha(\mathbf{r})A(t)\psi(\mathbf{r}) + \beta(\mathbf{r})k(\mathbf{r})\frac{\partial(A(t)\psi(\mathbf{r}))}{\partial n}$$

$$\alpha(\mathbf{r})A(t)\psi(\mathbf{r}) + \beta(\mathbf{r})k(\mathbf{r})A(t)\frac{\partial\psi(\mathbf{r})}{\partial n} = A(t)\left(\alpha(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) + \beta(\mathbf{r})k(\mathbf{r})\frac{\partial\psi(\mathbf{r})}{\partial n}\right) \rightarrow$$

$$A(t) \left(\alpha(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) + \beta(\mathbf{r})k(\mathbf{r}) \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial n} \right) = A(t)B[\psi(\mathbf{r})] \rightarrow$$

$$B[T(\mathbf{r}, t)] = A(t)B[\psi(\mathbf{r})] \quad (\text{A-14a})$$

como temos condição homogênea, significa que: $\phi(\mathbf{r}, t) = 0$

$$B[T(\mathbf{r}, t)] = 0 = A(t)B[\psi(\mathbf{r})]$$

como não queremos $A(t) = 0$ pois teríamos a solução nula trivial, então:

$$B[\psi(\mathbf{r})] = 0, \quad \mathbf{r} \in S \quad (\text{A-14b})$$

como já visto na equação (3.10), podemos dizer que

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n \quad (\text{A-15a})$$

e que

$$T(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \psi_n(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in V \quad (\text{A-15b})$$

onde a soma é feita sobre todos os espectros discretos de autovalores μ_n . Considere as soluções da equação (5.1f) com índice k e l

$$\nabla \cdot (k(\mathbf{r})\nabla(\psi_k(\mathbf{r})) - d(\mathbf{r})\psi_k(\mathbf{r})) = -\mu_k^2 w(\mathbf{r})\psi_k(\mathbf{r}) \quad (\text{A-16a})$$

$$\nabla \cdot (k(\mathbf{r})\nabla(\psi_l(\mathbf{r})) - d(\mathbf{r})\psi_l(\mathbf{r})) = -\mu_l^2 w(\mathbf{r})\psi_l(\mathbf{r}) \quad (\text{A-16b})$$

multiplicando a equação de solução ψ_k por ψ_l e a equação de solução ψ_l por ψ_k :

$$\psi_l \nabla \cdot (k(\mathbf{r})\nabla(\psi_k(\mathbf{r})) - d(\mathbf{r})\psi_k(\mathbf{r})) = -\psi_l \mu_k^2 w(\mathbf{r})\psi_k(\mathbf{r}) \quad (I)$$

$$\psi_k \nabla \cdot (k(\mathbf{r})\nabla(\psi_l(\mathbf{r})) - d(\mathbf{r})\psi_l(\mathbf{r})) = -\psi_k \mu_l^2 w(\mathbf{r})\psi_l(\mathbf{r}) \quad (II)$$

subtraindo $(I) - (II)$ membro a membro:

$$\psi_l \nabla \cdot (k(\mathbf{r}) \nabla(\psi_k(\mathbf{r}))) - \psi_l d(\mathbf{r}) \psi_k(\mathbf{r}) - \psi_k \nabla \cdot (k(\mathbf{r}) \nabla(\psi_l(\mathbf{r}))) + \psi_k d(\mathbf{r}) \psi_l(\mathbf{r})$$

$$= -\psi_l \mu_k^2 w(\mathbf{r}) \psi_k(\mathbf{r}) + \psi_k \mu_l^2 w(\mathbf{r}) \psi_l(\mathbf{r})$$

$$\psi_l \nabla \cdot (k(\mathbf{r}) \nabla(\psi_k(\mathbf{r}))) - \psi_k \nabla \cdot (k(\mathbf{r}) \nabla(\psi_l(\mathbf{r}))) = (\mu_l^2 - \mu_k^2) w(\mathbf{r}) \psi_k \psi_l(\mathbf{r})$$

integrando no volume V:

$$\int [\psi_l \nabla \cdot (k(\mathbf{r}) \nabla(\psi_k(\mathbf{r}))) - \psi_k \nabla \cdot (k(\mathbf{r}) \nabla(\psi_l(\mathbf{r})))] dv = \int (\mu_l^2 - \mu_k^2) w(\mathbf{r}) \psi_k \psi_l(\mathbf{r}) dv \quad (\text{A-17a})$$

$$\int \psi_l \nabla \cdot (k \nabla(\psi_k)) dv - \int \psi_k \nabla \cdot (k \nabla(\psi_l)) dv = (\mu_l^2 - \mu_k^2) \int w \psi_k \psi_l dv \quad (3-67b)$$

considere $u = \psi$ e $v = k \nabla \psi$, derivando na forma $d(uv) = \nabla \cdot (\psi k \nabla \psi)$, vimos no capítulo 3 na equação (3.17) que essa relação é análoga à regra de derivação $d(uv) = u dv + v du$, onde podemos dizer que

$$\nabla \cdot (\psi k \nabla \psi) = (\nabla \psi) \cdot (k \nabla \psi) + \psi \nabla \cdot (k \nabla \psi) \quad (\text{A-18})$$

reorganizando a expressão (5.4d) da forma conveniente e aplicando nas parcelas do primeiro membro da equação (5.5a):

$$\psi \nabla \cdot (k \nabla \psi) = \nabla \cdot (\psi k \nabla \psi) - (\nabla \psi) \cdot (k \nabla \psi)$$

$$\int \psi_l \nabla \cdot (k \nabla(\psi_k)) dv - \int \psi_k \nabla \cdot (k \nabla(\psi_l)) dv = (\mu_l^2 - \mu_k^2) \int w \psi_k \psi_l dv$$

(I)
(II)

$$\int \psi_l \nabla \cdot (k \nabla \psi_k) dv = \int \nabla \cdot (\psi_l k \nabla \psi_k) dv - \int \nabla \psi_l \cdot (k \nabla \psi_k) dv$$

$$\int \psi_k \nabla \cdot (k \nabla \psi_l) dv = \int \nabla \cdot (\psi_k k \nabla \psi_l) dv - \int \nabla \psi_k \cdot (k \nabla \psi_l) dv$$

subtraindo (I) – (II) membro a membro

$$\int \psi_l \nabla \cdot (k \nabla \psi_k) dv - \int \psi_k \nabla \cdot (k \nabla \psi_l) dv =$$

$$\int \nabla \cdot (\psi_l k \nabla \psi_k) dv - \int \nabla \psi_l \cdot (k \nabla \psi_k) dv - \int \nabla \cdot (\psi_k k \nabla \psi_l) dv + \int \nabla \psi_k \cdot (k \nabla \psi_l) dv$$

nota-se que $\nabla \psi_l \cdot (k \nabla \psi_k) = \nabla \psi_k \cdot (k \nabla \psi_l)$ pois $k(\mathbf{r})$ não é uma função vetorial, é um escalar e com isso não interfere no produto escalar, logo:

$$\int \psi_l \nabla \cdot (k \nabla \psi_k) dv - \int \psi_k \nabla \cdot (k \nabla \psi_l) dv = \int \nabla \cdot (\psi_l k \nabla \psi_k) dv - \int \nabla \cdot (\psi_k k \nabla \psi_l) dv$$

aplicando o resultado em (5.4c) obtemos (5.5a):

$$\int \psi_l \nabla \cdot (k \nabla \psi_k) dv - \int \psi_k \nabla \cdot (k \nabla \psi_l) dv = (\mu_l^2 - \mu_k^2) \int w \psi_k \psi_l dv$$

$$\int \psi_l \nabla \cdot (k \nabla \psi_k) dv - \int \psi_k \nabla \cdot (k \nabla \psi_l) dv = (\mu_l^2 - \mu_k^2) \int w \psi_k \psi_l dv$$

$$\int \nabla \cdot [\psi_l k \nabla \psi_k - \psi_k k \nabla \psi_l] dv = (\mu_l^2 - \mu_k^2) \int w \psi_k \psi_l dv \quad (\text{A-19})$$

temos em (5.5a) o divergente integrado no volume, que transformada na integral do fluxo na superfície de contorno pelo teorema da divergência de Gauss (2.20), podemos entender (5.5a) como:

$$\iiint_V (\nabla \cdot \vec{F}) dV = \oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS \rightarrow \quad (\text{A-20a})$$

$$\int \nabla \cdot [\psi_l k \nabla \psi_k - \psi_k k \nabla \psi_l] dv = \oint [\psi_l k \nabla \psi_k - \psi_k k \nabla \psi_l] \cdot \mathbf{n} dS$$

$$\oint k [\psi_l (\nabla \psi_k) \cdot \mathbf{n} - \psi_k (\nabla \psi_l) \cdot \mathbf{n}] dS = (\mu_l^2 - \mu_k^2) \int w \psi_k \psi_l dv$$

Lembrado que $(\nabla \psi_i) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot (\nabla \psi_i) = \frac{\partial \psi_i}{\partial n}$

$$\int_S k(\mathbf{r}) \left[\psi_l(\mathbf{r}) \frac{\partial \psi_k(\mathbf{r})}{\partial n} - \psi_k(\mathbf{r}) \frac{\partial \psi_l(\mathbf{r})}{\partial n} \right] dS = (\mu_l^2 - \mu_k^2) \int_V w(\mathbf{r}) \psi_l(\mathbf{r}) \psi_k(\mathbf{r}) dv \quad (\text{A.20b})$$

Analisando as condições de contorno para $\psi_l(\mathbf{r})$ e $\psi_k(\mathbf{r})$

$$B[\psi_l(\mathbf{r})] = \alpha(\mathbf{r})\psi_l(\mathbf{r}) + \beta(\mathbf{r})k(\mathbf{r})\frac{\partial\psi_l(\mathbf{r})}{\partial n} \quad (\text{A-21})$$

$$B[\psi_k(\mathbf{r})] = \alpha(\mathbf{r})\psi_k(\mathbf{r}) + \beta(\mathbf{r})k(\mathbf{r})\frac{\partial\psi_k(\mathbf{r})}{\partial n} \quad (\text{A-22})$$

Multiplicando a equação de solução ψ_k por ψ_l e a equação de solução ψ_l por ψ_k :

$$\psi_k(\mathbf{r})B[\psi_l(\mathbf{r})] = \psi_k(\mathbf{r})\alpha(\mathbf{r})\psi_l(\mathbf{r}) + \psi_k(\mathbf{r})\beta(\mathbf{r})k(\mathbf{r})\frac{\partial\psi_l(\mathbf{r})}{\partial n} \quad (I)$$

$$\psi_l(\mathbf{r})B[\psi_k(\mathbf{r})] = \psi_l(\mathbf{r})\alpha(\mathbf{r})\psi_k(\mathbf{r}) + \psi_l(\mathbf{r})\beta(\mathbf{r})k(\mathbf{r})\frac{\partial\psi_k(\mathbf{r})}{\partial n} \quad (II)$$

Subtraindo $(I) - (II)$ membro a membro:

$$\psi_k(\mathbf{r})B[\psi_l(\mathbf{r})] - \psi_l(\mathbf{r})B[\psi_k(\mathbf{r})] =$$

$$\cancel{\psi_k(\mathbf{r})\alpha(\mathbf{r})\psi_l(\mathbf{r})} + \psi_k(\mathbf{r})\beta(\mathbf{r})k(\mathbf{r})\frac{\partial\psi_l(\mathbf{r})}{\partial n} - \psi_l(\mathbf{r})\alpha(\mathbf{r})\psi_k(\mathbf{r}) - \psi_l(\mathbf{r})\beta(\mathbf{r})k(\mathbf{r})\frac{\partial\psi_k(\mathbf{r})}{\partial n}$$

$$\psi_k(\mathbf{r})B[\psi_l(\mathbf{r})] - \psi_l(\mathbf{r})B[\psi_k(\mathbf{r})] = \beta(\mathbf{r})k(\mathbf{r})\left(\psi_k(\mathbf{r})\frac{\partial\psi_l(\mathbf{r})}{\partial n} - \psi_l(\mathbf{r})\frac{\partial\psi_k(\mathbf{r})}{\partial n}\right) \quad (\text{A-23})$$

$$\text{Mas } B[\psi(\mathbf{r})] = 0 \rightarrow: \beta(\mathbf{r})k(\mathbf{r})\left(\psi_k(\mathbf{r})\frac{\partial\psi_l(\mathbf{r})}{\partial n} - \psi_l(\mathbf{r})\frac{\partial\psi_k(\mathbf{r})}{\partial n}\right) = 0 \rightarrow$$

$$\left(\psi_k(\mathbf{r})\frac{\partial\psi_l(\mathbf{r})}{\partial n} - \psi_l(\mathbf{r})\frac{\partial\psi_k(\mathbf{r})}{\partial n}\right) = 0 \rightarrow$$

$$(\mu_l^2 - \mu_k^2) \int_V w(\mathbf{r})\psi_l(\mathbf{r})\psi_k(\mathbf{r})d\mathbf{r} = 0 \quad (\text{A-24})$$

Sabemos que há infinitos autovalores $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \dots \mu_n < \dots$ o que significa que eles são todos distintos, ou seja, se $k \neq l \rightarrow \mu_k \neq \mu_l$

Logo, se $l \neq k \rightarrow \mu_l \neq \mu_k \rightarrow \mu_l - \mu_k \neq 0$, assim:

$$\int_V w(\mathbf{r})\psi_l(\mathbf{r})\psi_k(\mathbf{r})d\mathbf{v} = 0 \quad (\text{A-25a})$$

Se $l = k \rightarrow \mu_l = \mu_k \rightarrow \mu_l - \mu_k = 0$ a integral tem como resultado a norma de ψ_k

$$\int_V w(\mathbf{r})\psi_k(\mathbf{r})\psi_k(\mathbf{r})d\mathbf{v} = \|\psi_k^2(\mathbf{r})\| = N_k \quad (\text{A-25b})$$

Observe também que podemos avaliar (5.5b) quando $\mu_l = \mu_k$, fazendo $\mu_l \rightarrow \mu_k$

$$\frac{1}{(\mu_l^2 - \mu_k^2)} \int_S k(\mathbf{r}) \left[\psi_l(\mathbf{r}) \frac{\partial \psi_k(\mathbf{r})}{\partial n} - \psi_k(\mathbf{r}) \frac{\partial \psi_l(\mathbf{r})}{\partial n} \right] dS = \int_V w(\mathbf{r})\psi_l(\mathbf{r})\psi_k(\mathbf{r})d\mathbf{v} \rightarrow$$

a integral de volume $\int_V w(\mathbf{r})\psi_l(\mathbf{r})\psi_k(\mathbf{r})d\mathbf{v}$ tende para a norma N_k visto que $\psi_l \rightarrow \psi_k$, então aplicamos a regra de L'Hospital para avaliar a integral de superfície

$$N_k = \frac{1}{2\mu_k} = \int_S k(\mathbf{r}) \left[\frac{\partial \psi_k(\mathbf{r})}{\partial n} \left(\frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial \mu} \right)_{\mu=\mu_k} - \psi_k(\mathbf{r}) \left(\frac{\partial^2 \psi(\mathbf{r})}{\partial n \partial \mu} \right)_{\mu=\mu_k} \right] dS \quad (\text{A-26})$$

Ou em notação de determinante:

$$N_k = \frac{1}{2\mu_k} \int_S k(\mathbf{r}) \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial \mu} \right)_{\mu=\mu_k} & \left(\frac{\partial^2 \psi(\mathbf{r})}{\partial n \partial \mu} \right)_{\mu=\mu_k} \\ \psi_k(\mathbf{r}) & \frac{\partial \psi_i(\mathbf{r})}{\partial n} \end{vmatrix} dS \quad (\text{A-27})$$

Analisando as equações (5.6a) e (5.6b) utilizaremos a simbologia a seguir para denotar a integral do produto interno, assim como já visto, definimos que quando tal propriedade ocorre ela caracteriza uma delta de Kronecker, logo temos nessa integral, uma definição de produto interno no problema de Sturm- Liouville, ou seja, isso prova que qualquer equação que se encaixe nesse problema, no caso o problema (sistema) formado pela equação (5.2), suas soluções são autofunções e essas autofunções são ortogonais entre si, e como vimos o produto interno faz com possamos achar os coeficientes da expansão em serie que são no caso os autovalores associados a essas autofunções. Por essa integral denotar o produto interno utilizaremos a notação a seguir

$$(\psi_l, \psi_k) = \int_V w(\mathbf{r})\psi_l(\mathbf{r})\psi_k(\mathbf{r})d\mathbf{v} = \delta_{lk}N_k \quad (\text{A-28})$$

Onde

$$\delta_{ij} \equiv \text{delta de Kronecker} = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j, \\ 1, & \text{se } i = j, \end{cases}$$

podemos ainda definir a norma da autofunção $\psi_i(\mathbf{r})$ como sendo $N_i^{1/2}$. A relação de ortogonalidade anterior é agora usada para determinar os coeficientes de expansão $A_i(t)$ na Equação (5.3b) como agora descrito.

$$T(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \psi_n(\mathbf{r})$$

Operamos em ambos os lados da Equação (5.3b) pelo operador $w(\mathbf{r})\psi_k(\mathbf{r})$

$$w(\mathbf{r})\psi_k(\mathbf{r})T(\mathbf{r}, t) = w(\mathbf{r})\psi_k(\mathbf{r}) \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \psi_n(\mathbf{r})$$

$$w(\mathbf{r})\psi_k(\mathbf{r})T(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} w(\mathbf{r})\psi_k(\mathbf{r}) A_n(t) \psi_n(\mathbf{r})$$

Integrando no volume

$$\int_V w(\mathbf{r})\psi_k(\mathbf{r})T(\mathbf{r}, t)dv = \int_V \sum_{n=1}^{\infty} w(\mathbf{r})\psi_k(\mathbf{r}) A_n(t) \psi_n(\mathbf{r}) dv$$

$$\int_V w(\mathbf{r})\psi_k(\mathbf{r})T(\mathbf{r}, t)dv = \sum_{n=1}^{\infty} \int_V w(\mathbf{r})\psi_k(\mathbf{r}) A_n(t) \psi_n(\mathbf{r}) dv$$

$A_n(t)$ é o coeficiente associado a função temporal, no caso o autovalor, então ele é constante para cada n dado e pode sair da integral,

$$\int_V w(\mathbf{r})\psi_k(\mathbf{r})T(\mathbf{r}, t)dv = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \int_V w(\mathbf{r})\psi_k(\mathbf{r})\psi_n(\mathbf{r})dv$$

Zera em todos os valores $k \neq n$ e é a norma em $k = n$

$$\int_V w(\mathbf{r})\psi_k(\mathbf{r})T(\mathbf{r},t)dv = A_k(t)N_k$$

$$A_k(t) = \frac{1}{N_k} \int_V w(\mathbf{r})\psi_k(\mathbf{r})T(\mathbf{r},t)dv = \frac{(\psi_k, T)}{N_k} \quad (\text{A-29})$$

Até o momento o que temos aqui a expansão da função potencial $T(\mathbf{r},t)$ através dos seus coeficientes que estão associados com autovalores e autofunções e essa interpretação é válida em um intervalo especificado fora desse intervalo o que é observado é uma repetição da função pois a representação da função é estritamente periódica, porém quando for necessária uma representação de uma função num domínio real completo e não apenas num intervalo fechado especificado vimos que faríamos uso da transformada. O procedimento será análogo para encontrar o par de transformadas generalizadas

Esta expressão para $A_i(t)$ é introduzida na Equação (5.3b) e a expansão resultante para $T(\mathbf{r},t)$ é dividida em duas partes para definir o par de transformada integral finita desejado como

$$T(\mathbf{r},t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t)\psi_n(\mathbf{r})$$

$$A_n(t)N_n = \int_V w(\mathbf{r})\psi_n(\mathbf{r})T(\mathbf{r},t)dv$$

Quando for integrada no volume, esta se tornará apenas uma função de t , então podemos dizer que

$$A_n(t)N_n = \int_V w(\mathbf{r})\psi_n(\mathbf{r})T(\mathbf{r},t)dv = \bar{T}_n(t)$$

Para determinara inversa:

$$T(\mathbf{r},t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{N_n} \int_V w(\mathbf{r})\psi_n(\mathbf{r})T(\mathbf{r},t)dv \psi_n(\mathbf{r})$$

$$T(\mathbf{r},t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{N_n} \bar{T}_n(t)\psi_n(\mathbf{r})$$

Assim temos o par de transformada:

Transformada integral finita:

$$\bar{T}_n(t) = \int_V w(\mathbf{r}) \psi_n(\mathbf{r}) T(\mathbf{r}, t) dv \equiv (\psi_n, T) \quad (\text{A-30})$$

E sua inversa:

$$T(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{N_n} \psi_n(\mathbf{r}) \bar{T}_n(t) \quad (\text{A-31})$$

O par de transformada integral finita dado agora é usado para desenvolver os campos de velocidade, temperatura e concentração

APÊNDICE B

PROGRAMA ESBA EM LINGUAGEM FORTRAN

```

Microsoft Developer Studio - Igor_Biodigestor - [Igor_Biodigestor.f90 *]
File Edit View Insert Build Tools Window Help
SUMCAV = 0.00
Igor_Biodigestor - Win32 Debug
F8

*****
O presente código computacional ESBA- realiza uma análise híbrida A análise da Transferencia de
unidimensional de uma mistura aquosa em um biodigestor anaerobio, com configuração
cilindrica. Considera a cinetica quimica na transformação da materia organica proveniente
de residuos organicos em biofertilizante e biogas, e
unidimensional e em regime permanente
a solucao é desenvolvida utilizando a Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT).

Dominio: x > 0
R -> [0,1] Sistema em coordenadas Cilindricass.
*****
Em: 29/01/2025

Subrotinas da IMSL utilizadas no programa
1) DIVIPAG
2) LINRG: inversão de matrizes
3) MATMUL: multiplicação de matrizes
*****

PROGRAM ESBA
USE NSIMSLMD
USE Dados_de_Entrada_BD
USE Conta_sinais_Velo_BD
USE Conta_sinais_Temp_BD
USE Conta_sinais_Conc_BD
USE coeficientes_BD
!USE Espessura

IMPLICIT REAL*8 (A-H, O-Z)
PARAMETER (NN=3*NN+3*NN, N3N=3*NN)

DIMENSION PARAM(50), Z(21), AA(N3N, N3N), ucent(21), umed(21), TERM(NN, NN), XMAIS(20)
!DIMENSION CV(NN, NN), CVI(NN, NN), YPM(NN, NN)
dimension Y(N3N), YP(N3N), R(NRV), DERVI(NT), UMEDIA(NZV), UMIGOR(NZV), TETM(NN), TETC(NN)
dimension Y(N3N), YP(N3N), R(NRV), DERVI(NT), UMEDIA(NZV), UMIGOR(NZV), TETM(NN), TETC(NN)

```

```

Microsoft Developer Studio - Igor_Biodigestor - [Igor_Biodigestor.f90 *]
File Edit View Insert Build Tools Window Help
SUMCAV = 0.00
Igor_Biodigestor - Win32 Debug
F8

DIMENSION PARAM(50), Z(21), AA(N3N, N3N), ucent(21), umed(21), TERM(NN, NN), XMAIS(20)
!DIMENSION CV(NN, NN), CVI(NN, NN), YPM(NN, NN)
dimension Y(N3N), YP(N3N), R(NRV), DERVI(NT), UMEDIA(NZV), UMIGOR(NZV), TETM(NN), TETC(NN)
DIMENSION CONCH(NN), ZVEL(21), ZTEMP(21), ZCONC(21)
EXTERNAL FCN, FCNJ

!
!adimensionais
OMEGA =
BIOT =
AST=

BIM =
QLL =
SC=
PEM =

CALL Autovalores_Velo_BD
norma0: DO I=1, NV
END DO norma0

CALL Autovalores_Temp_BD

norma1: DO I=1, NT
END DO norma1

```


APÊNDICE C

PROGRAMA ESBA EM LINGUAGEM SIMBÓLICA WOLFRAM MATHEMATICA

In[1]:= **Problema de autovalor para o campo de velocidade;**

$$\mathbf{e1a} := \partial_{\eta, \eta} \psi[\mathbf{i}][\eta] + \frac{1}{\eta} \partial_{\eta} \psi[\mathbf{i}][\eta] + \mu[\mathbf{i}]^2 \psi[\mathbf{i}][\eta] = 0$$

e1a

$$\text{Out[*]} = \mu[\mathbf{i}]^2 \psi[\mathbf{i}][\eta] + \frac{\psi[\mathbf{i}]'[\eta]}{\eta} + \psi[\mathbf{i}]''[\eta] = 0$$

In[4]:= **e2a := $\partial_{\eta} \psi[\mathbf{i}][\eta] = 0 / . \eta \rightarrow 0$**

e2a

$$\text{Out[*]} = \psi[\mathbf{i}]'[0] = 0$$

In[6]:= **e3a := $\psi[\mathbf{i}][\eta] = 0 / . \eta \rightarrow 1$**

e3a

$$\text{Out[*]} = \psi[\mathbf{i}][1] = 0$$

In[8]:= **$\psi[\mathbf{i}_-][\eta_-] := \text{BesselJ}[0, \mu[\mathbf{i}]\eta]$**

[função J de Bessel]

$\psi[\mathbf{i}_-][\eta_-]$

$$\text{Out[*]} = \text{BesselJ}[0, \eta \mu[\mathbf{i}_-]]$$

In[10]:= **{e1a, e2a, e3a}**

$$\text{Out[*]} = \left\{ -\frac{\text{BesselJ}[1, \eta \mu[\mathbf{i}]] \mu[\mathbf{i}]}{\eta} + \text{BesselJ}[0, \eta \mu[\mathbf{i}]] \mu[\mathbf{i}]^2 - \frac{1}{2} (\text{BesselJ}[0, \eta \mu[\mathbf{i}]] - \text{BesselJ}[2, \eta \mu[\mathbf{i}]]) \mu[\mathbf{i}]^2 = 0, \text{True}, \text{BesselJ}[0, \mu[\mathbf{i}]] = 0 \right\}$$

In[11]:= **nauv := 30;**

mi = Table[

[tabela]

y /. FindRoot[BesselJ[0, y] == 0, {y, (i - 0.5) π}, WorkingPrecision → 30], {i, nauv}];

[encontra r...]

[função J de Bessel]

[precisão operacional]

In[13]:= **$\mu[\mathbf{i}_-] := \text{mi}[\mathbf{i}]$**

In[14]:= **Problema de autovalor para o campo de Temperatura;**

$$\mathbf{e4a} := \partial_{\eta, \eta} \phi[\mathbf{i}][\eta] + \frac{1}{\eta} \partial_{\eta} \phi[\mathbf{i}][\eta] + \beta[\mathbf{i}]^2 \phi[\mathbf{i}][\eta] = 0$$

e4a

$$\text{Out[*]} = \beta[\mathbf{i}]^2 \phi[\mathbf{i}][\eta] + \frac{\phi[\mathbf{i}]'[\eta]}{\eta} + \phi[\mathbf{i}]''[\eta] = 0$$

In[17]:= **e5a := $\partial_{\eta} \phi[\mathbf{i}][\eta] = 0 / . \eta \rightarrow 0$**

e5a

$$\text{Out[*]} = \phi[\mathbf{i}]'[0] = 0$$

In[19]:= **e6a := $\partial_{\eta} \phi[\mathbf{i}][\eta] + \text{Biot} \phi[\mathbf{i}][\eta] = 0 / . \eta \rightarrow 1$**

e6a

$$\text{Out[*]} = \text{Biot} \phi[\mathbf{i}][1] + \phi[\mathbf{i}]'[1] = 0$$

```

In[21]:=  $\phi[i\_][\eta\_]$  := BesselJ[0,  $\beta[i] \eta$ ]
          [função J de Bessel]
 $\phi[i\_][\eta\_]$ 
Out[21]:= BesselJ[0,  $\eta\_ \beta[i\_]$ ]

In[23]:= {e4a, e5a, e6a}
Out[23]:=  $\left\{ -\frac{\text{BesselJ}[1, \eta \beta[i]] \beta[i]}{\eta} + \text{BesselJ}[0, \eta \beta[i]] \beta[i]^2 - \frac{1}{2} (\text{BesselJ}[0, \eta \beta[i]] - \text{BesselJ}[2, \eta \beta[i]]) \beta[i]^2 = 0, \right.$ 
 $\left. \text{True, Biot BesselJ}[0, \beta[i]] - \text{BesselJ}[1, \beta[i]] \beta[i] = 0 \right\}$ 

In[24]:= Biot = 1030
Out[24]:= 1 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000

In[25]:= beta = Table[y /. FindRoot[Biot BesselJ[0, y] - BesselJ[1, y] y == 0,
          [tabela] [encontra raiz] [função J de Bessel] [função J de Bessel]
          {y, (i - 0.5)  $\pi$ }, WorkingPrecision -> 30], {i, nauv}];
          [precisão operacional]

In[26]:=  $\beta[i\_]$  := beta[[i]]

In[27]:=  $\beta[3]$ 
Out[27]:= 8.65372791291101221695419871265

In[28]:= Anorm = Table [ $\int_0^1 \eta \psi[i][\eta]^2 d\eta$ , {i, nauv}];
          [tabela]

In[29]:= AnormT = Table [ $\int_0^1 \eta \phi[i][\eta]^2 d\eta$ , {i, nauv}];
          [tabela]

In[30]:= UF[ $\eta\_]$  := 2 (1 -  $\eta^2$ )

In[31]:= A1 = Import[
          [importa]
          "C:\\Users\\Usuario\\OneDrive\\Banca de Doutorado\\Igor\\A30.dat"] // Flatten;
          [símbolo de constante] [achatar]

In[32]:= A2 = Partition[A1, nauv] // Partition[#, nauv] &;
          [dividir em partes] [dividir em partes]

In[33]:= A2[[1, 2, 3]]
Out[33]:= 0.585829

In[34]:= FD1 = Table[ $\frac{1}{\text{Anorm}[[i]]^{0.5}} \frac{\text{BesselJ}[1, \mu[i]]}{\mu[i]}$ , {i, nauv}];
          [tabela]

In[35]:= B1 = Import[
          [importa]
          "C:\\Users\\Usuario\\OneDrive\\Banca de Doutorado\\Igor\\B30.dat"] // Flatten;
          [símbolo de constante] [achatar]

```

```

In[ ]:= B2 = Partition[B1, nauv] // Partition[#, nauv] &;


dividir em partes
dividir em partes



In[ ]:= B2[[1, 1, 1]]

Out[ ]:= -1.19689

In[ ]:= Q1 = Import[


importa
"C:\\Users\\Usuario\\OneDrive\\Banca de Doutorado\\Igor\\Q30.dat" // Flatten;
símbolo de constante
achatar



In[ ]:= Q2 = Partition[Q1, nauv];


dividir em partes



In[ ]:= S1 = Import[


importa
"C:\\Users\\Usuario\\OneDrive\\Banca de Doutorado\\Igor\\S30.dat" // Flatten;
símbolo de constante
achatar



In[ ]:= S2 = Partition[S1, nauv];


dividir em partes



In[42]:= QT = Q2 - 4 S2;

In[ ]:= AT1 = Import[


importa
"C:\\Users\\Usuario\\OneDrive\\Banca de Doutorado\\Igor\\AT30.dat" // Flatten;
símbolo de constante
achatar



In[ ]:= AT2 = Partition[AT1, nauv] // Partition[#, nauv] &;


dividir em partes
dividir em partes



In[ ]:= CT1 = Import[


importa
"C:\\Users\\Usuario\\OneDrive\\Banca de Doutorado\\Igor\\CT30.dat" // Flatten;
símbolo de constante
achatar



In[ ]:= CT2 = Partition[CT1, nauv] // Partition[#, nauv] &;


dividir em partes
dividir em partes



In[ ]:= P1 = Import[


importa
"C:\\Users\\Usuario\\OneDrive\\Banca de Doutorado\\Igor\\P30.dat" // Flatten;
símbolo de constante
achatar



In[ ]:= P2 = Partition[P1, nauv];


dividir em partes



In[49]:= FNNV = Table[
$$\frac{1}{\text{Anorm}[[i]]^{0.5}} \partial_{\eta} \psi[i][\eta] /. \eta \rightarrow 1, \{i, \text{nauv}\}];$$


tabela



In[ ]:= FDT1 = Table[
$$\frac{1}{\text{Anorm}[[i]]^{0.5}} \frac{\text{BesselJ}[1, \beta[i]]}{\beta[i]}, \{i, \text{nauv}\}];$$


tabela



In[51]:= FNNT = Table[
$$\frac{1}{\text{AnormT}[[i]]^{0.5}} \partial_{\eta} \phi[i][\eta] /. \eta \rightarrow 1, \{i, \text{nauv}\}];$$


tabela


```

```
In[52]:= AFPT = Table[  
  
$$\frac{1}{\text{AnormT}[[i]]^{0.5}} \phi[i][\eta] /. \eta \rightarrow 1, \{i, \text{navv}\}];$$
  
  |tabela
```

```
In[*]:= H1 = Table[  
  
$$\frac{1}{\text{Anorm}[[i]]^{0.5}} \frac{4 \text{BesselJ}[2, \beta[i]]}{\beta[i]^2}, \{i, \text{navv}\}];$$
  
  |tabela
```

```
In[54]:= RE = 2000
```

```
Out[*]= 2000
```

```
In[55]:= Pr = 0.72  
PE = RE Pr
```

```
Out[*]= 0.72
```

```
Out[*]= 1440.
```

```
In[57]:= ode3 = Table[  
  
$$\sum_{k=1}^{\text{navv}} \left( \sum_{j=1}^{\text{navv}} (A2[[i, j, k]] + B2[[i, j, k]]) U[j][x] \right) \partial_x U[k][x] -$$
  
  
$$\sum_{k=1}^{\text{navv}} (4 \text{FD1}[[i]] U[k][x]) \partial_x U[k][x] +$$
  
  
$$\sum_{k=1}^{\text{navv}} (QT[[i, k]] - 4 \text{FD1}[[i]] (H1[[k]] - \text{FD1}[[k]])) \partial_x U[k][x] ==$$
  
  
$$- \frac{2}{\text{RE}} \sum_{k=1}^{\text{navv}} \text{FD1}[[i]] \text{FNNV}[k] U[k][x] - \frac{\mu[i]^2}{\text{RE}} U[i][x], \{i, \text{navv}\}];$$
  
  ode4 = Table[  
  
$$\sum_{k=1}^{\text{navv}} \left( \sum_{j=1}^{\text{navv}} \text{AT2}[[i, j, k]] U[j][x] \right) \partial_x \theta[k][x] + \sum_{k=1}^{\text{navv}} \text{P2}[[i, k]] \partial_x \theta[k][x] ==$$
  
  
$$- \frac{1}{\text{PE}} \sum_{k=1}^{\text{navv}} \sum_{j=1}^{\text{navv}} (\text{CT2}[[i, j, k]] \partial_x U[j][x]) \theta[k][x] - \frac{\beta[i]^2}{\text{PE}} \theta[i][x], \{i, \text{navv}\}];$$
  
  |tabela
```

```
In[59]:= condição inicial da velocidade;  
e5a = Table[U[i][0] == (FD1[[i]] - H1[[i]]), {i, navv}];  
  |tabela
```

```
In[61]:= condição inicial da Temperatura;  
e6a = Table[  
  
$$\theta[i][0] == \frac{1}{\beta[i] \text{AnormT}[[i]]^{0.5}} \text{BesselJ}[1, \beta[i]], \{i, \text{navv}\}];$$
  
  |tabela |função J de Bessel
```

```
In[63]:= varu = Table[U[i][x], {i, navv}];  
  |tabela
```

```
In[64]:= vardu = Table[ $\partial_x U[i][x]$ , {i, navv}];  
  |tabela
```

```
In[65]:= varT = Table[ $\theta[i][x]$ , {i, navv}];  
  |tabela
```

```
In[66]:= vardT = Table[ $\partial_x \theta[i][x]$ , {i, navv}];  
  |tabela
```

```
In[67]:= Vartotal = Join[varu, vardu, varT, vardT];
           junta
```

```
In[68]:= solution[x_] = NDSolve[{ode3, ode4, e5a, e6a}, Vartotal, {x, 0, 3000}, PrecisionGoal → 20,
           resolve numericamente equação diferencial meta de precisão
           Method → {"EquationSimplification" → "Residual"}, MaxStepSize → Automatic];
           método tamanho máxim... automático
```

```
In[69]:= Velocidade := Table[
           tabela
```

```
           Evaluate[ $\left\{1 + 2 \left( \sum_{i=1}^{n_{\text{auv}}} \frac{\text{FD1}[[i]] \text{U}[i][x]}{1} \right) /. \text{solution}[x], \text{UF}[0] + \left( \sum_{i=1}^{n_{\text{auv}}} \frac{\psi[i][0] \text{U}[i][x]}{(\text{AnormT}[[i]])^{\frac{1}{2}}} \right) /. \right.$ 
```

```
           solution[x],  $\left( \text{UF}[0] + \left( \sum_{i=1}^{n_{\text{auv}}} \frac{\psi[i][0] \text{U}[i][x]}{(\text{Anorm}[[i])^{\frac{1}{2}}} \right) /. \text{solution}[x] \right) /$ 
```

```
            $\left( 1 + 2 \left( \sum_{i=1}^{n_{\text{auv}}} \frac{\text{FD1}[[i]] \text{U}[i][x]}{1} \right) /. \text{solution}[x] \right) \} \},$ 
```

```
           {x, {5, 10, 25, 37.5, 50, 75, 100, 175, 225, 625}}]
```

```
           Velocidade // MatrixForm
```

```
           forma de matriz
```

```
Out[69]//MatrixForm=
```

```


$$\begin{pmatrix} (0.986592) & (1.12724) & (1.14256) \\ (0.985776) & (1.19647) & (1.21374) \\ (0.98418) & (1.31877) & (1.33997) \\ (0.983222) & (1.39064) & (1.41437) \\ (0.982421) & (1.45059) & (1.47655) \\ (0.981087) & (1.54973) & (1.57961) \\ (0.979963) & (1.62943) & (1.66274) \\ (0.977304) & (1.78544) & (1.8269) \\ (0.976002) & (1.84336) & (1.88868) \\ (0.97711) & (1.9492) & (1.99486) \end{pmatrix}$$

```

```
In[71]:= CoefTM1[j_, k_] :=
```

```


$$\frac{1}{\text{Anorm}[[j]]^{0.5} \text{AnormT}[[k]]^{0.5}} \left( (\mu[j] \text{BesselJ}[0, \beta[k]] \text{BesselJ}[1, \mu[j]] - \right.$$

           função J de Bessel função J de Bessel

```

```


$$\left. \beta[k] \text{BesselJ}[0, \mu[j]] \text{BesselJ}[1, \beta[k]] \right) / (\mu[j]^2 - \beta[k]^2) \text{ ; } (k \neq j)$$

           função J de Bessel função J de Bessel

```

```
In[72]:= CoefTM1[j_, k_] :=  $\frac{1}{2} (\text{BesselJ}[0, \mu[j]]^2 + \text{BesselJ}[1, \mu[j]]^2) \text{ ; } (k == j)$ 
```

```
In[73]:= CoefTM = Table[ $\left( 1 / (\text{Anorm}[[j]]^{0.5} \text{AnormT}[[k]]^{0.5}) \right) \text{CoefTM1}[j, k], \{j, \text{nauv}\}, \{k, \text{nauv}\}];$ 
           tabela
```

```
In[74]:= CoefTMinf = Table[ $\frac{1}{\text{AnormT}[[k]]^{0.5}} \int_0^1 \eta \text{UF}[\eta] \phi[k][\eta] d\eta, \{k, \text{nauv}\}] // \text{N};$ 
           tabela val
```

```
In[75]:= CoefTMinf2 = Table[ $\frac{1}{\text{AnormT}[[k]]^{0.5}} \int_0^1 \eta \eta \phi[k][\eta] d\eta, \{k, \text{nauv}\}] // \text{N};$ 
           tabela val
```

In[76]:= **Perfilt** :=

Table[**Evaluate**[$\left\{ \left(\sum_{k=1}^{\text{nauv}} \left(\left(\sum_{j=1}^{\text{nauv}} \text{CoefTM}[[j, k]] U[j][x] \right) + \text{CoefTMinf}[[k]] \right) \theta[k][x] \right) \right\} /. \text{solution}[x], 1 + 2 \left(\sum_{i=1}^{\text{nauv}} \frac{\text{FD1}[[i]] U[i][x]}{1} \right) /. \text{solution}[x], \left(2 \left(\sum_{k=1}^{\text{nauv}} \sum_{j=1}^{\text{nauv}} \text{CoefTM}[[j, k]] U[j][x] \theta[k][x] \right) + 2 \left(\sum_{k=1}^{\text{nauv}} \text{CoefTMinf}[[k]] \theta[k][x] \right) /. \text{solution}[x] \right) / \left(1 + 2 \left(\sum_{i=1}^{\text{nauv}} \frac{\text{FD1}[[i]] U[i][x]}{1} \right) /. \text{solution}[x] \right) \right\}], \{x, \{5, 10, 25, 37, 50, 75, 100, 175, 225, 625\}\}]$

Perfilt // **MatrixForm**

forma de matriz

Out[76]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} (0.461719) & (0.986592) & (0.935988) \\ (0.446444) & (0.985776) & (0.905772) \\ (0.414422) & (0.98418) & (0.842167) \\ (0.394764) & (0.983256) & (0.802973) \\ (0.376451) & (0.982421) & (0.766374) \\ (0.346481) & (0.981087) & (0.706322) \\ (0.320924) & (0.979963) & (0.654971) \\ (0.25946) & (0.977304) & (0.530972) \\ (0.226651) & (0.976002) & (0.464448) \\ (0.079785) & (0.97711) & (0.163308) \end{pmatrix}$$

In[78]:= **Derivada** := **Table**[**Evaluate**[$\left(\sum_{k=1}^{\text{nauv}} \frac{\partial_{\eta} \phi[k][\eta] /. \eta \rightarrow 1}{\text{AnormT}[[k]]^{0.5}} \theta[k][x] \right) /. \text{solution}[x]$], \{x, \{5, 10, 25, 37, 50, 75, 100, 175, 225, 625\}\}]

Derivada // **MatrixForm**

forma de matriz

Out[78]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -7.49191 \\ -5.26109 \\ -3.27877 \\ -2.66529 \\ -2.26556 \\ -1.80806 \\ -1.5304 \\ -1.07744 \\ -0.90249 \\ -0.299081 \end{pmatrix}$$

```
In[80]:= TWALL := Table[Evaluate[  

  
$$\left( \sum_{k=1}^{n_{\text{auv}}} \frac{\phi[k][\eta] /. \eta \rightarrow 1}{\text{AnormT}[[k]]^{0.5}} \theta[k][x] \right) /. \text{solution}[x]],$$
  

  {x, {5, 10, 25, 37, 50, 75, 100, 175, 225, 625}}]
```

```
TWALL // MatrixForm  

  
$$\left( \begin{array}{c} 3.76517 \times 10^{-30} \\ 1.7661 \times 10^{-30} \\ 3.27653 \times 10^{-31} \\ 4.26965 \times 10^{-32} \\ -7.21269 \times 10^{-32} \\ -1.21297 \times 10^{-31} \\ -1.0989 \times 10^{-31} \\ -5.40664 \times 10^{-32} \\ -3.36872 \times 10^{-32} \\ -5.04501 \times 10^{-33} \end{array} \right)$$

```

Out[80]//MatrixForm=

$$\left(\begin{array}{c} 3.76517 \times 10^{-30} \\ 1.7661 \times 10^{-30} \\ 3.27653 \times 10^{-31} \\ 4.26965 \times 10^{-32} \\ -7.21269 \times 10^{-32} \\ -1.21297 \times 10^{-31} \\ -1.0989 \times 10^{-31} \\ -5.40664 \times 10^{-32} \\ -3.36872 \times 10^{-32} \\ -5.04501 \times 10^{-33} \end{array} \right)$$

```
In[82]:= TBULK := Table[  

  Evaluate[  


$$2 \left( \sum_{k=1}^{n_{\text{auv}}} \sum_{j=1}^{n_{\text{auv}}} \text{CoefTM}[[j, k]] U[j][x] \theta[k][x] \right) + 2 \left( \sum_{k=1}^{n_{\text{auv}}} \text{CoefTMinf}[[k]] \theta[k][x] \right) /. \text{solution}[x]$$
  


$$\left/ \left( 1 + 2 \left( \sum_{i=1}^{n_{\text{auv}}} \frac{\text{FD1}[[i]] U[i][x]}{1} \right) /. \text{solution}[x] \right) \right],$$
  

  {x, {5, 10, 25, 37, 50, 75, 100, 175, 225, 625}}]
```

```
TBULK // MatrixForm  

  
$$\left( \begin{array}{c} 0.935988 \\ 0.905772 \\ 0.842167 \\ 0.802973 \\ 0.766374 \\ 0.706322 \\ 0.654971 \\ 0.530972 \\ 0.464448 \\ 0.163308 \end{array} \right)$$

```

Out[82]//MatrixForm=

$$\left(\begin{array}{c} 0.935988 \\ 0.905772 \\ 0.842167 \\ 0.802973 \\ 0.766374 \\ 0.706322 \\ 0.654971 \\ 0.530972 \\ 0.464448 \\ 0.163308 \end{array} \right)$$

```
In[84]:= DERIVADA1 := Table[
  tabela
  PE  $\left( \sum_{k=1}^{nauv} \sum_{j=1}^{nauv} \text{CoefTM}[[j, k]] U[j][x] \text{vardT}[[k]] \right) + \text{PE} \left( \sum_{k=1}^{nauv} \text{CoefTMinf}[[k]] \text{vardT}[[k]] \right) /. \text{solution}[x], \{x, \{5, 10, 25, 37, 50, 75, 100, 175, 225, 625\}\}$ 
```

```
DERIVADA1 // MatrixForm
  forma de matriz
```

```
Out[84]//MatrixForm=
```

```

$$\begin{pmatrix} -7.4802 \\ -5.2561 \\ -3.27666 \\ -2.66375 \\ -2.26434 \\ -1.8072 \\ -1.52976 \\ -1.07718 \\ -0.902347 \\ -0.299077 \end{pmatrix}$$

```

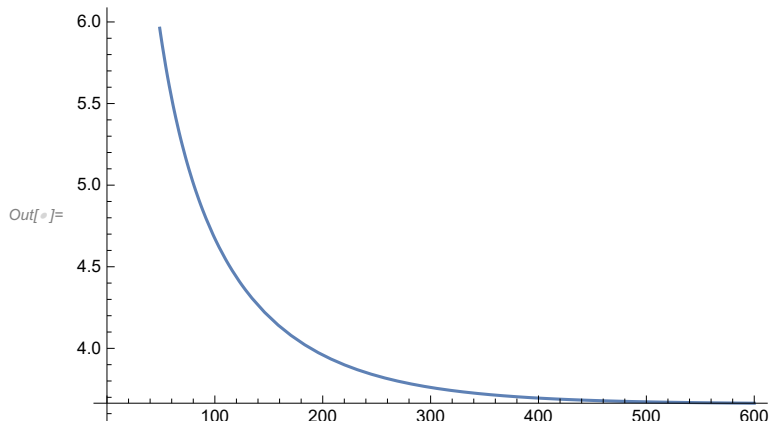
```
In[86]:= Nusselt =  $\frac{2 \text{ Derivada}}{(\text{TWALL} - \text{TBULK})}$ 
```

```
Out[86]= {{16.0086}, {11.6168}, {7.78651}, {6.63855}, {5.91241},
  {5.11965}, {4.67318}, {4.05836}, {3.88629}, {3.66278}}
```

```
In[87]:= Nusselt =  $\frac{2 \text{ DERIVADA1}}{(\text{TWALL} - \text{TBULK})}$ 
```

```
Out[87]= {{15.9835}, {11.6058}, {7.78149}, {6.63472},
  {5.90924}, {5.1172}, {4.67123}, {4.0574}, {3.88567}, {3.66273}}
```

```
In[88]:= Plot[ $2 \left( \sum_{k=1}^{nauv} \frac{\partial_{\eta} \phi[k][\eta] /. \eta \rightarrow 1}{\text{AnormT}[[k]]^{0.5}} \theta[k][x] \right) / \left( \sum_{k=1}^{nauv} \frac{\phi[k][\eta] /. \eta \rightarrow 1}{\text{AnormT}[[k]]^{0.5}} \theta[k][x] \right) -$ 
   $\left( 2 \left( \sum_{k=1}^{nauv} \sum_{j=1}^{nauv} \text{CoefTM}[[j, k]] U[j][x] \theta[k][x] \right) + 2 \left( \sum_{k=1}^{nauv} \text{CoefTMinf}[[k]] \theta[k][x] \right) /. \text{solution}[x] \right) / \left( 1 + 2 \left( \sum_{i=1}^{nauv} \frac{\text{FD1}[[i]] U[i][x]}{1} \right) \right) /. \text{solution}[x],$ 
  {x, 0, 600}, AspectRatio → 1/GoldenRatio, Axes → True, PlotRange → Automatic]
  gráfico quociente de aspecto proporção áurea eixos verd... intervalo do g... automático
```



In[8]:= **Plot**[
[gráfico](#)

$$2 \left(\text{PE} \left(\sum_{k=1}^{\text{nauy}} \sum_{j=1}^{\text{nauy}} \text{CoefTM}[[j, k]] U[j][x] \text{vardT}[[k]] \right) + \text{PE} \left(\sum_{k=1}^{\text{nauy}} \text{CoefTMinf}[[k]] \text{vardT}[[k]] \right) \right) /$$

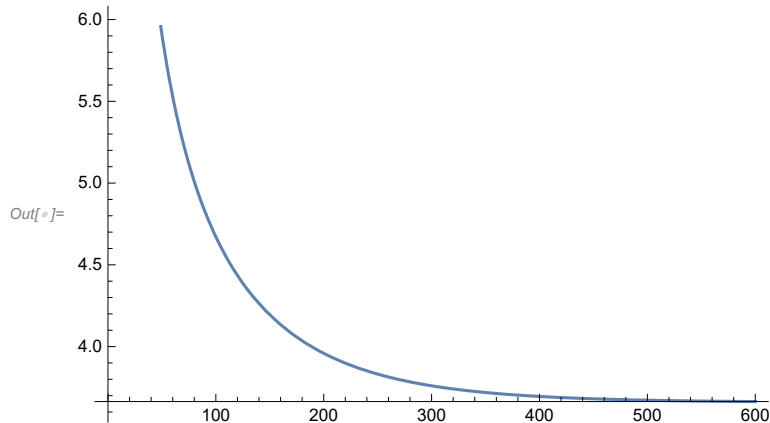
$$\left(\left(\sum_{k=1}^{\text{nauy}} \frac{\phi[k][\eta] /. \eta \rightarrow 1}{\text{AnormT}[[k]]^{0.5}} \theta[k][x] \right) - \right.$$

$$\left. \left(2 \left(\sum_{k=1}^{\text{nauy}} \sum_{j=1}^{\text{nauy}} \text{CoefTM}[[j, k]] U[j][x] \theta[k][x] \right) + 2 \left(\sum_{k=1}^{\text{nauy}} \text{CoefTMinf}[[k]] \theta[k][x] \right) /. \right.$$

$$\left. \left. \text{solution}[x] \right) / \left(1 + 2 \left(\sum_{i=1}^{\text{nauy}} \frac{\text{FD1}[[i]] U[i][x]}{1} \right) \right) \right) /. \text{solution}[x],$$

{x, 0, 600}, AspectRatio → 1/GoldenRatio, Axes → True, PlotRange →
[quociente de aspecto](#) [proporção áurea](#) [eixos](#) [verd...](#) [intervalo do gráfico](#)

Automatic]
[automático](#)



In[90]:= **Plot3D**[**Evaluate**[($\sum_{i=1}^{\text{nauy}} \frac{\psi[i][y] U[i][x]}{(\text{Anorm}[[i]])^{\frac{1}{2}}}$)] /. solution[x]], {x, 0, 200}, {y, 0, 1},
[gráfico...](#) [calcula](#)

AxesLabel → **Automatic**, **ColorFunction** → "Rainbow", **PlotLegends** → **Automatic**, **PlotLabels** →
[legenda dos ...](#) [automático](#) [função de cores](#) [legenda do gráfico](#) [automático](#) [etiquetas de repres](#)

"

Velocidade Adimensional - U(x,y) "]"

