



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Tecnologia
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL E
AMBIENTAL**
– MESTRADO/DOCTORADO –

**ANÁLISE DINÂMICA DE PLACAS DUPLAS E DELGADAS PELO
MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO**

por

Moab Bezerra Rodrigues

*Dissertação de Mestrado apresentada à Universidade Federal da
Paraíba para obtenção do grau de Mestre*



Universidade Federal da Paraíba

Centro de Tecnologia

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL E

AMBIENTAL

– MESTRADO/DOCTORADO –

**ANÁLISE DINÂMICA DE PLACAS DUPLAS E DELGADAS PELO
MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil e Ambiental da Universidade Federal da Paraíba, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em estruturas.

Moab Bezerra Rodrigues

Orientador: Prof. Dr. Ângelo Viera Mendonça

João Pessoa – Paraíba

Março de 2026

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

R696a Rodrigues, Moab Bezerra.

Análise dinâmica de placas duplas e delgadas pelo método dos elementos de contorno / Moab Bezerra Rodrigues. - João Pessoa, 2026.

154 f. : il.

Orientação: Ângelo Vieira Mendonça.

Dissertação (Mestrado) - UFPB/CT.

1. Placas elasticamente conectadas. 2. MEC. 3. Soluções fundamentais. 4. Kirchhoff. 5. Winkler. 6. Vibração. I. Mendonça, Ângelo Vieira. II. Título.

UFPB/BC

CDU 624(043)

**ANÁLISE DINÂMICA DE PLACAS DUPLAS E DELGADAS PELO MÉTODO
DOS ELEMENTOS DE CONTORNO**

Moab bezerra Rodrigues

Dissertação aprovada em 27 de março de 2026

Período Letivo: 2025.2

Documento assinado digitalmente



ANGELO VIEIRA MENDONÇA

Data: 06/04/2026 09:20:34-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

**Prof(a). Dr(a). Ângelo Vieira Mendonça – UFPB
Orientador(a)**

Documento assinado digitalmente



LEONARDO MEDEIROS DA COSTA

Data: 06/04/2026 09:05:05-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

**Prof(a). Dr(a). Leonardo Medeiros da Costa – UFPB
Examinador(a) Interno(a)**

Documento assinado digitalmente



LUTTGARDES DE OLIVEIRA NETO

Data: 05/04/2026 21:08:19-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

**Prof(a). Dr(a). Luttgardes de Oliveira Neto – UNESP
Examinador(a) Externo(a)**

**Prof(a). Dr(a). Arthur Coutinho de Araújo– UNIFIP
Examinador(a) Externo(a)**

Documento assinado digitalmente



ARTHUR COUTINHO DE ARAUJO PEREIRA

Data: 01/04/2026 18:40:57-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

**João Pessoa/PB
2026**

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus pela oportunidade de concluir mais uma etapa da minha formação acadêmica, concedendo força, perseverança e sabedoria ao longo de toda essa jornada.

Agradeço à CAPES pela concessão de bolsa de Mestrado, essencial para a execução desta pesquisa.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Ângelo Vieira Mendonça, expresso minha profunda gratidão pela orientação, dedicação e pelos valiosos ensinamentos compartilhados durante o desenvolvimento deste trabalho. Sua experiência, paciência e incentivo foram fundamentais para a realização desta pesquisa.

Aos meus avós, Eduardo e Severina, pelo carinho, pelos ensinamentos de vida e pelo constante apoio ao longo da minha trajetória. Suas palavras e exemplos sempre foram fonte de inspiração.

À minha mãe, Rubia, pelo amor incondicional, pelo incentivo constante e por todos os esforços realizados para que eu pudesse chegar até aqui. Seu apoio foi essencial em todos os momentos desta caminhada.

À minha irmã, Ruth, pelo companheirismo, apoio e incentivo ao longo desta jornada acadêmica. Ademais, a Lavínia pelo amor e carinho e aos meus colegas e amigos: Gesiel, Helisson e Ronald pelo companheirismo.

Por fim, agradeço a todos que, de alguma forma, contribuíram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho.

RESUMO

As placas são elementos estruturais amplamente utilizados em aplicações da engenharia, aparecendo em áreas como a Engenharia Civil, Engenharia Mecânica e Engenharia Aeroespacial. Os sistemas de placas duplas, em particular, estão presentes em estruturas sanduíche, estruturas nanométricas e pavimentos rodoviários e ferroviários, sendo os dois últimos submetidos ao regime dinâmico. A análise precisa desses sistemas é essencial, especialmente quando considerada sua interação com fundações elásticas. As soluções analíticas, embora importantes, são frequentemente restritas a geometrias e condições de contorno simples, o que limita sua aplicabilidade. Nesse contexto, neste trabalho tem-se o objetivo prioritário de soluções numéricas, via Método dos Elementos de Contorno (MEC), para o sistema de placas duplas delgadas conectadas por base elástica de Winkler no regime dinâmico permanente. Além disso, em segundo plano, algumas discussões também são estendidas para placas simples isoladas ou apoiadas em fundação elástica de Winkler. As discussões da construção e validação das soluções numéricas neste trabalho seguem as etapas a seguir: inicialmente, as equações diferenciais de movimento definidas no meio contínuo (placa) são transformadas em equações integrais equivalentes válidas no domínio e/ou contorno da placa pela aplicação do método dos resíduos ponderados (onde as equações de movimento são ponderadas por soluções fundamentais). Destaca-se que tanto as equações integrais, quanto as soluções fundamentais do problema dinâmico de placas duplas, até então indisponíveis na literatura, são originalmente deduzidas neste trabalho. A solução discreta do problema dinâmico de placa é construída pela discretização do contorno do problema em elementos de contorno isoparamétricos lineares, que após o cálculo das integrais envolvidas, um sistema algébrico é obtido. Finalmente, após a imposição das condições de contorno, as respostas dinâmicas podem ser obtidas. Alguns exemplos com a solução do MEC são apresentados e validados com soluções analíticas e/ou numéricas, obtendo erros relativos inferiores a 1% para discretização em 32 elementos retos nas placas retangulares e para discretização em 8 elementos em arco nas placas circulares, implicando que as soluções propostas na filosofia do MEC estão coerentes.

Palavras-chave: placas elasticamente conectadas; MEC; soluções fundamentais; Kirchhoff; Winkler; vibração.

ABSTRACT

Plates are structural elements widely used in engineering applications, appearing in fields such as Civil Engineering, Mechanical Engineering, and Aerospace Engineering. Double-plate systems, in particular, are found in sandwich structures, nanometric structures, and highway and railway pavements, the latter two often being subjected to dynamic loading conditions. Accurate analysis of these systems is essential, especially when their interaction with elastic foundations is considered. Although analytical solutions are important, they are frequently restricted to simple geometries and boundary conditions, which limits their applicability. In this context, the primary objective of this work is to develop numerical solutions, using the Boundary Element Method (BEM), for thin double-plate systems connected by a Winkler elastic foundation under steady-state dynamic conditions. In addition, secondary discussions are extended to isolated single plates or single plates supported by a Winkler elastic foundation. The construction and validation of the numerical solutions presented in this study follow these steps: initially, the differential equations of motion defined in the continuous medium (plate) are transformed into equivalent integral equations valid over the domain and/or boundary of the plate through the application of the weighted residual method (where the equations of motion are weighted by fundamental solutions). A key contribution of this work is the original derivation of the fundamental solutions for the dynamic problem of double plates, which were previously unavailable in the literature. The discrete solution of the dynamic plate problem is obtained by discretizing the boundary into linear isoparametric boundary elements. After evaluating the corresponding integrals, an algebraic system is assembled. Finally, once the boundary conditions are imposed, the dynamic responses can be determined. Several examples using the BEM solution are presented and validated against analytical and/or numerical solutions, yielding relative errors lower than 1% for a discretization with 32 straight elements in rectangular plates and 8 curved (arc) elements in circular plates, implying on consistence of BEM solution showed.

Keywords: elastically connected plates; BEM; fundamental solution; Kirchhoff's plate; Winkler's foundation; vibrations.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 - a) Conjunto de placas simples (domínios não interconectados) b) Associação de placas (domínios conectados).....	16
Figura 1.2 - Placas duplas flutuantes	18
Figura 1.3 – Galeria de drenagem em rodovias.....	19
Figura 1.4 – Ferrovia em trilhos flutuantes	19
Figura 2.1 - Deformação da seção transversal na teoria de: a) Kirchhoff, b) Mindlin c) Reddy.	26
Figura 2.2 - Variação de tensões no sólido carregado.....	27
Figura 2.3 - Placa simples apoiada em na base de Winkler	28
Figura 2.4 - Rotação normal e tangencial.....	36
Figura 2.5 - Problema fundamental e problema real	42
Figura 2.6 – Coordenada ξ	50
Figura 3.1 - Placa dupla interconectada por camada elástica de Winkler	53
Figura 3.2 - Placas duplas e placas simples.....	55
Figura 3.3 - Problema fundamental	59
Figura 3.4 - Contorno circular acrescido a um canto da placa	84
Figura 3.5 - Deslocamentos verticais do ponto do domínio (p) e do ponto do contorno circular (q)	95
Figura 3.6 - sistemas de coordenadas do ponto p no subdomínio do contorno.....	98
Figura 3.7 - Ponto q no contorno da placa e os respectivos vetores n e s.	99
Figura 3.8 – a) Contorno contínuo b) Contorno discretizado.....	104
Figura 3.9 - Elementos de contorno	107
Figura 3.10 - Elemento circular.....	111
Figura 3.11 - Representação das partições das matrizes de influência.....	113
Figura 3.12 - Gráfico norma do determinante da matriz [A] pela frequência.....	115
Figura 4.1 - Discretização dos elementos utilizados	117
Figura 4.2 - Representação da placa retangular simples isolada (SSSS).....	118
Figura 4.3 - Representação da placa retangular simples isolada (CCCC).....	119
Figura 4.4 - Representação da placa retangular simples isolada (CSCS).....	120
Figura 4.5 - Representação da placa circular simples isolada (S)	121
Figura 4.6 - Representação da placa circular simples isolada (C).....	122
Figura 4.7 - Representação da placa retangular simples sobre base elástica de Winkler (SSSS)	124

Figura 4.8 – Gráfico utilizando aproximação linear do comportamento da frequência natural parametrizada ω da placa simples com o aumento dos valores de K	126
Figura 4.9 - Representação da placa circular simples sobre base elástica de Winkler (S).....	127
Figura 4.10 - Representação da placa circular simples sobre base elástica de Winkler (C) ..	128
Figura 4.11 - Representação do sistema de placas duplas retangulares ambas (SSSS).....	130
Figura 4.12 - Representação do sistema de placas duplas circulares ambas (S)	131
Figura 4.13 - Representação do sistema de placas duplas circulares ambas (C).....	132
Figura 4.14 - Representação do sistema de placas duplas circulares sendo a superior (C) e a inferior (S)	133

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 - Frequências parametrizadas ω para placa retangular simples isolada (SSSS) ...	118
Tabela 4.2-Frequências parametrizadas ω para placa simples isolada (CCCC).....	119
Tabela 4.3 - Relação entre a razão de aspecto e as Frequências naturais parametrizadas ω ..	120
Tabela 4.4 – Frequências naturais parametrizadas ω para placa circular simples (S).....	121
Tabela 4.5 - Frequências naturais parametrizadas ω para placa circular simples (C).....	122
Tabela 4.6 - Comparação entre as Frequências naturais parametrizadas ω nas placas (S) com as placas (C).....	123
Tabela 4.7 – Frequências naturais parametrizadas ω para placa retangular simples sobre base elástica de Winkler (SSSS).....	125
Tabela 4.8 – Frequência natural parametrizada ω para diferentes valores de K em placas simples	125
Tabela 4.9 - Frequências naturais parametrizadas ω para placa circular simples sobre base elástica de Winkler (S)	127
Tabela 4.10 - Frequências naturais parametrizadas ω para placa circular simples sobre base elástica de Winkler (C).....	129
Tabela 4.11 - Frequências naturais parametrizadas ω do sistema de placas duplas retangulares ambas (SSSS)	130
Tabela 4.12 - Frequência natural parametrizada ω do sistema de placas duplas circulares ambas (S)	132
Tabela 4.13 - Frequência natural parametrizada ω do sistema de placas duplas circulares ambas (C).....	133
Tabela 4.14 - Frequência natural parametrizada ω do sistema de placas duplas circulares sendo a superior (C) e a inferior (S).....	134

LISTA DE SÍMBOLOS

E	– Módulo de elasticidade longitudinal
ν_i	– Coeficiente de Poisson referente à placa i
$\delta(p, q)$	– Distribuição Delta de Dirac
δ_{ij}	– Delta de Kronecker
σ_i	– Tensão normal à direção i
ε_i	– Deformação linear na direção do eixo i
τ	– Tensão tangencial
a	– Dimensão da placa retangular paralela ao eixo x ou raio para placa circular
b	– Dimensão da placa retangular paralela ao eixo y
L	– Dimensão do vão
K_w	– Constante elástica da mola da camada elástica
h_i	– Espessura referente à placa i
D_i	– Módulo de rigidez à flexão da placa i
r	– Distância entre ponto-fonte e o ponto-campo
θ	– Rotação da seção transversal da placa
ψ	– Função Digama
Φ	– Função escalar
Π	– Ação
\mathcal{L}	– Lagrangiano
$\delta\mathcal{L}$	– Variação do Lagrangiano
π_P	– Funcional de energia potencial da placa
π_D	– Funcional de energia de deformação da placa
π_{Delast}	– Funcional de energia de deformação da camada elástica
π_C	– Funcional de energia cinética
π_{CT}	– Funcional de energia cinética de translação
π_{CR}	– Funcional de energia cinética de rotação
ω	– Frequência de excitação
c	– Coeficiente de amortecimento
Z	– Trabalho das forças dissipativas
$\delta\pi_P$	– Variação da energia potencial de deformação
$\delta\pi_D$	– Variação da energia de deformação da placa

$\delta\pi_{Delast}$	– Variação da energia de deformação da camada elástica
$\delta\pi_C$	– Variação da energia cinética
$\delta\pi_{CT}$	– Variação da energia cinética de translação
$\delta\pi_{CR}$	– Variação da energia cinética de rotação
δZ	– Variação das energias dissipativas
δZ_c	– Variação das energias dissipativas de amortecimento
g	– Módulo da carga transversal distribuída
g_i	– Carregamento externo transversal distribuído na placa i
mn	– Ângulo formado entre o elemento que contém o ponto-fonte e o elemento que contém o ponto-campo
W	– Deslocamento vertical do plano médio da placa superior no domínio do tempo
\dot{W}	– Velocidade de translação do plano médio da placa superior no domínio do tempo
\ddot{W}	– Aceleração de translação do plano médio da placa superior no domínio do tempo
V	– Deslocamento vertical do plano médio da placa inferior no domínio do tempo
\dot{V}	– Velocidade de translação do plano médio da placa inferior no domínio do tempo
\ddot{V}	– Aceleração de translação do plano médio da placa inferior no domínio do tempo
t	– Tempo
w	– Deslocamento vertical do plano médio da placa superior no domínio da frequência
v	– Deslocamento vertical do plano médio da placa inferior no domínio da frequência
M_n, M_{ns}	– Momentos fletor e volvente, atuantes na placa superior no sistema local de coordenadas
T_n, T_{ns}	– Momentos fletor e volvente, atuantes na placa inferior no sistema local de Coordenadas
V_n	– Cortante equivalente de Kirchhoff atuante na placa superior
Q_n	– Cortante equivalente de Kirchhoff atuante na placa inferior
w^{i*}	– Deslocamento fundamental da placa superior devido ao carregamento da placa i

v^{i*}	– Deslocamento fundamental da placa inferior devido ao carregamento da placa i
M_n^{i*}	– Momento fletor fundamental da placa superior devido ao carregamento da placa i
T_n^{i*}	– Momento fletor fundamental da placa inferior devido ao carregamento da placa i
M_{ns}^{i*}	– Momento volvente fundamental da placa superior devido ao carregamento da placa i
T_{ns}^{i*}	– Momento volvente fundamental da placa inferior devido ao carregamento da placa i
V_n^{i*}	– Cortante equivalente de Kirchhoff fundamental da placa superior devido ao carregamento da placa i
Q_n^{i*}	– Cortante equivalente de Kirchhoff fundamental da placa inferior devido ao carregamento da placa i
A	– Área
Vol	– Volume
M	– Massa
Ω	– Domínio dos corpos
Γ_j	– Contorno de um corpo genérico
ρ	– Massa específica da placa
G	– Matriz influência dos esforços
H	– Matriz influência dos deslocamentos
n, s	– Sistema de coordenadas local
ξ	– Coordenada adimensional da função interpoladora e raio do subdomínio no contorno.
p	– Ponto-fonte
q	– Ponto-campo
∇^2	– Operador laplaciano
∇^4	– Operador biharmônico
$K_n(x)$	– Funções de Bessel Modificada de segunda espécie de ordem n .
$I_n(x)$	– Funções de Bessel Modificada de primeira espécie de ordem n .
$Y_n(x)$	– Funções de Bessel de segunda espécie de ordem n .
$J_n(x)$	– Funções de Bessel de primeira espécie de ordem n .

- $H_n^1(x)$ – Funções de Hankel de primeira espécie de ordem n.
 $H_n^2(x)$ – Funções de Hankel de segunda espécie de ordem n.
 $Ber_n(x), Bei_n(x), Ker_n(x), Kei_n(x)$ – Funções de Kelvin de ordem n.
 $Ber_n(x),$ – Parte real das Funções de Kelvin de ordem n.
 $Bei_n(x)$ – Parte imaginária das Funções de Kelvin de ordem n.
 $Ker_n(x)$ – Parte real do argumento complexo $e^{-n\pi i/2}K_n(xe^{\pi i/4})$.
 $Kei_n(x)$ – Parte imaginária do argumento complexo $e^{-n\pi i/2}K_n(xe^{\pi i/4})$.
 ϖ – Frequência Natural Parametrizada

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	16
1.1 Contextualização	16
1.2 Revisão bibliográfica.....	20
1.3 Objetivos.....	23
1.3.1 Objetivo Geral:	23
1.3.2 Objetivos Específicos:	23
1.4 Estruturação do texto	24
2. PLACAS SIMPLES APOIADAS EM BASE ELÁSTICA DE WINKLER.....	25
2.1 Introdução.....	25
2.2 Placas simples em regime estático	28
2.3 Placas simples em regime dinâmico	33
2.3.1 Equação de movimento das placas simples.....	33
2.3.2 Solução fundamental das placas simples.....	41
2.3.3 Equação integral de domínio das placas simples dinâmicas	44
2.3.4 Discretização em elementos de contorno das placas simples.....	47
3. PLACAS DUPLAS ELASTICAMENTE CONECTADAS.....	53
3.1 Introdução.....	53
3.2 Placas duplas em regime estático	53
3.3 Placas duplas em regime dinâmico.....	54
3.3.1 Equação de movimento	55
3.3.2 Solução fundamental das placas duplas.....	59
3.3.3 Equações integrais para placas duplas em regime dinâmico.....	69
3.3.4 Discretização das placas duplas em elementos de contorno.....	103
3.3.5 Equações integrais discretizadas	104
3.3.6 Tipos de elementos de contorno	107

3.3.7	Equações algébricas.....	112
3.3.8	Aplicação das condições de contorno e resolução do sistema.....	114
4.	VALIDAÇÃO NUMÉRICA.....	116
4.1	Parâmetros da análise	116
4.2	Placa simples retangular isolada.....	117
4.3	Placa simples circular isolada.....	121
4.4	Placa simples retangular sobre base elástica de Winkler	123
4.5	Placa simples circular sobre base elástica de Winkler	126
4.6	Sistema de placas duplas retangulares.....	129
4.7	Sistema de placas duplas circulares.....	131
	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	135
	BIBLIOGRAFIA	136
	APÊNDICE A.....	139
	APÊNDICE B.....	143

1. INTRODUÇÃO

1.1 Contextualização

No processo de concepção e desenvolvimento de um projeto estrutural, as placas — seja constituída por um domínio único (placas simples, vide Figura 1.1a)) ou composta por múltiplos domínios interconectados (placas associadas, vide Figura 1.1b)) — constituem elementos recorrentes e de grande relevância. Esses componentes estão presentes em pavimentos de edifícios, fundações, tabuleiros de pontes, galerias de drenagem e diversas outras aplicações, desempenhando função essencial na transmissão e distribuição de esforços.

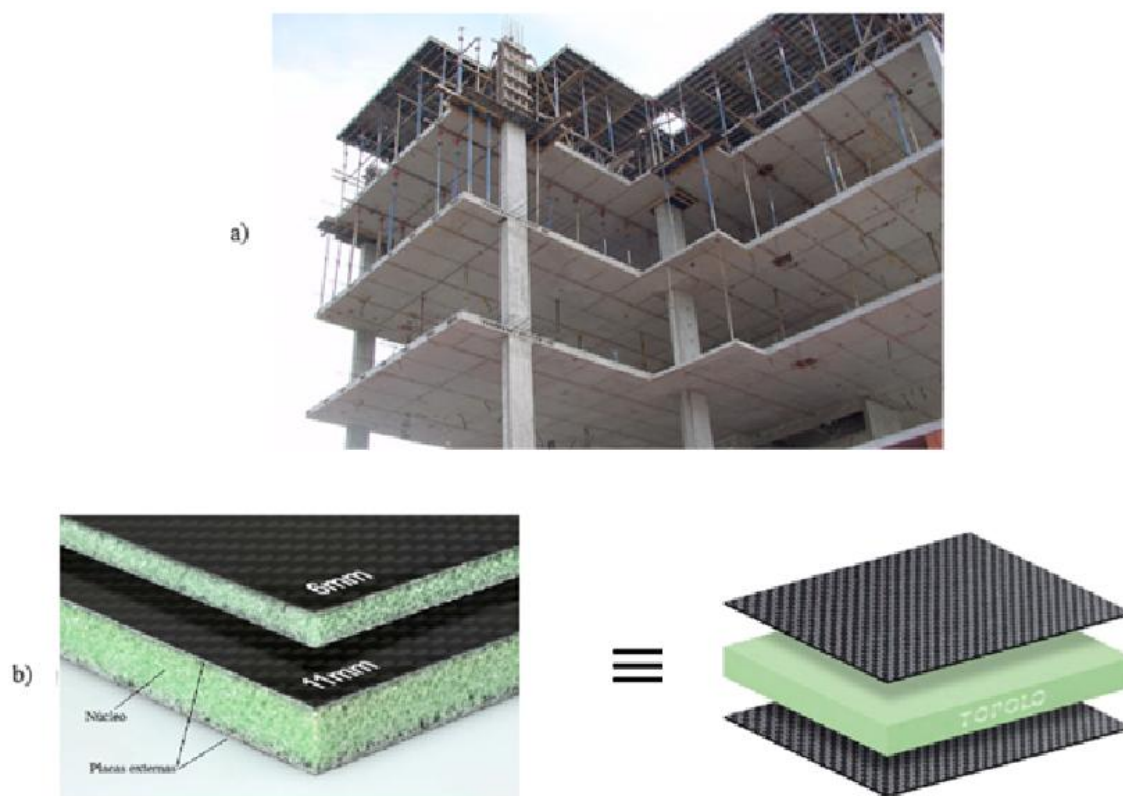


Figura 1.1 - a) Conjunto de placas simples (domínios não interconectados) b) Associação de placas (domínios conectados)

Fonte: adaptado de Civilização Engenharia (2016), Easycomposites (2026) e Topologroup (2026)

Dessa forma, a formulação adequada da solução consistente dos problemas estruturais envolvendo placas tornam-se fundamentais para garantir segurança, desempenho e racionalidade construtiva. A compreensão do seu comportamento mecânico, das condições de

contorno e dos efeitos das ações aplicadas representa, portanto, um tema de elevada importância no campo da Engenharia de Estruturas, tanto sob o ponto de vista teórico quanto prático.

No que se refere às placas associadas — entendidas como sistemas compostos por duas ou mais placas que interagem estruturalmente ao longo de seus domínios — sua aplicação estende-se por diversas áreas da engenharia, abrangendo desde problemas de alta complexidade tecnológica até soluções estruturais convencionais de grande escala.

Na engenharia aeroespacial, por exemplo, esses sistemas desempenham papel fundamental na proteção estrutural no espaço sideral e no desempenho funcional de componentes críticos em problemas aeronáuticos, como descrito nos trabalhos de Medina e Maethner (1993) e Han *et al.* (2025). Além do setor aeroespacial, as placas associadas também têm sido amplamente investigadas em estruturas na escala nanométrica. Nesse contexto, destacam-se os estudos de Pouresmaeeli *et al.* (2012) e Al-Furjan *et al.* (2021) que abordaram o comportamento mecânico de nanoplacas de grafeno.

Adicionalmente, os sistemas de placas duplas apresentam aplicações relevantes tanto no isolamento acústico quanto no isolamento térmico como descrito nos trabalhos de Takahashi (1983) e Chen *et al.* (2023).

Na engenharia naval, também podem ser observadas importantes aplicações envolvendo placas associadas. Nesse contexto, Luong e Do (2024) investigaram o comportamento dinâmico de placas duplas flutuantes em águas rasas, conforme mostrado na Figura 1.2. Tais sistemas estruturais são empregados em diferentes soluções da engenharia naval, incluindo plataformas flutuantes, pontes flutuantes e estruturas portuárias, nas quais a interação fluido–estrutura exerce papel determinante na resposta global do conjunto.

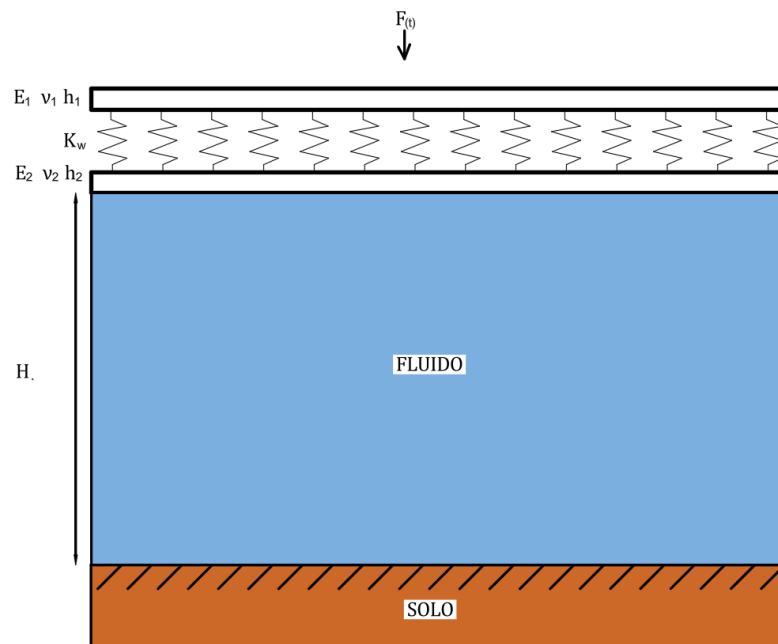


Figura 1.2 - Placas duplas flutuantes
Fonte: Autor

No campo da construção civil, sistemas de placas associadas são amplamente empregados em construções ferroviárias e rodoviárias. O modelo de ferrovia sobre laje, Figura 1.4, analisado por Jang *et al.* (2008) exemplifica a utilização de placas acopladas na distribuição de cargas dinâmicas provenientes do tráfego ferroviário, contribuindo para maior rigidez, durabilidade e desempenho das vias, reduzindo também a poluição sonora devido a absorção das vibrações pela camada elástica. Não obstante, o sistema de placas associadas também está presente em reforços estruturais, Zhang *et al.* (2011) apresentou um estudo de caso de reforço estrutural para tabuleiros de pontes metálicas utilizando placas duplas.

Adicionalmente, Bleotu e Preda (2023) investigaram a utilização de painéis sanduíche na concepção de tetos de cabines de equipamentos da construção civil, evidenciando as vantagens estruturais associadas a sistemas de múltiplas camadas, especialmente no que tange à relação rigidez – peso e a capacidade de absorção de energia sob carregamento estático e dinâmico.

Dessa maneira, observa-se que as placas associadas constituem sistemas estruturais versáteis, cuja importância transcende diferentes escalas físicas e campos de aplicação, abrangendo desde a nanotecnologia até sistemas macroscópicos de infraestrutura (Figura 1.3), sempre com papel central na mitigação de esforços, no controle dinâmico e na proteção estrutural.

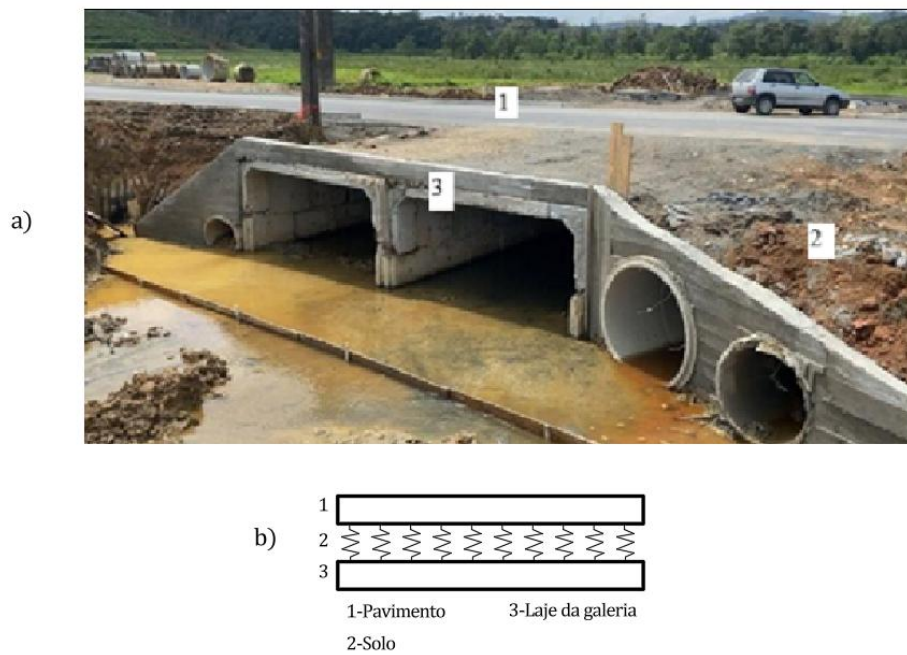


Figura 1.3 – Galeria de drenagem em rodovias
Fontes: a) ND Mais (2023) b) Autor.

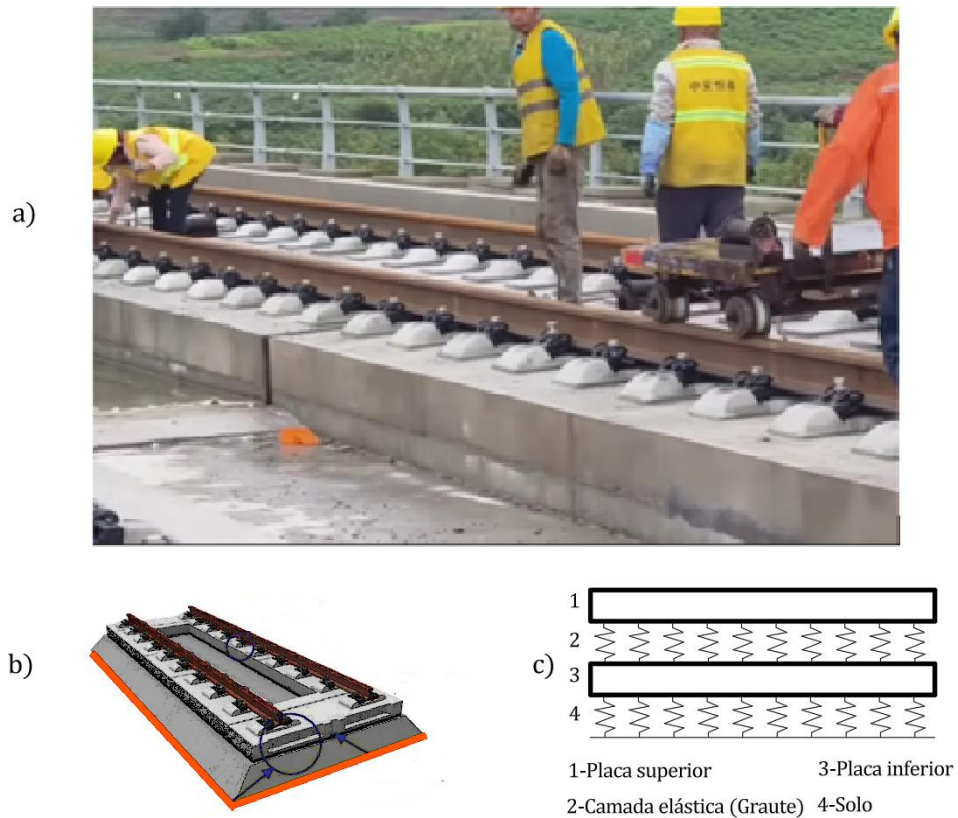


Figura 1.4 – Ferrovia em trilhos flutuantes
Fontes: a) Youtube (2024) b) adaptado Jang et al (2008) c) Autor.

1.2 Revisão bibliográfica

Atualmente, a obtenção de soluções para as Equações Diferenciais Parciais (EDPs), que descrevem o comportamento mecânico de placas, configura-se como uma tarefa de elevada complexidade matemática. Tais equações, em geral de quarta ordem no caso da teoria clássica de placas, envolvem múltiplas variáveis espaciais e estão fortemente condicionadas às hipóteses adotadas no modelo constitutivo, geométrico e nas condições de contorno. Embora existam soluções analíticas clássicas — como aquelas obtidas pelos métodos de Navier e de Levy — sua aplicabilidade encontra-se restrita a situações bastante específicas, como placas retangulares submetidas a determinadas combinações de condições de apoio (por exemplo, simplesmente apoiadas). Essas limitações geométricas e de contorno reduzem significativamente o espectro de problemas que podem ser resolvidos por meio dessas abordagens, tornando-as insuficientes para a maioria das aplicações de engenharia prática, conforme observado por Xing *et al.* (2022).

Pereira *et al.* (2023) desenvolveram uma formulação analítica capaz de considerar placas com diferentes propriedades materiais, dimensões geométricas e condições de apoio, ampliando significativamente o campo de aplicação. A solução foi estruturada a partir dos métodos clássicos de Navier e Levy. Entretanto, tais métodos preservam restrições inerentes às suas formulações: o método de Navier exige que todas as bordas da placa sejam simplesmente apoiadas, enquanto o método de Levy impõe que pelo menos duas bordas opostas estejam simplesmente apoiadas. Convém notar que outras condições de contorno, sob carregamentos específicos, podem ser obtidas pela superposição de duas ou mais soluções de Levy. Assim, embora mais abrangente que abordagens anteriores, a solução de Levy ainda permanece condicionada a geometrias e vínculos específicos.

Com o objetivo de superar essas limitações e contemplar um conjunto mais amplo de configurações geométricas, condições de contorno e combinações de propriedades materiais, destacam-se as soluções numéricas.

Heidari e Ariaei (2022) propuseram uma solução baseada no método da quadratura diferencial para a análise dinâmica de placas retangulares e circulares apoiadas sobre base elástica de Winkler. A abordagem mostrou-se eficiente do ponto de vista computacional, especialmente para problemas de vibração. Contudo, o modelo apresenta uma restrição importante: as placas que compõem o sistema devem possuir os mesmos parâmetros de

material, propriedades geométricas e condições de contorno, o que limita sua aplicação em sistemas heterogêneos frequentemente encontrados na prática de engenharia.

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é amplamente reconhecido como o método mais difundido entre engenheiros e desenvolvedores de softwares de análise estrutural, conforme apontado por Laquini (2016). O MEF é classificado como um método de domínio, pois a discretização é realizada em todo o domínio da estrutura, dividindo-o em elementos finitos interconectados, nos quais as variáveis de interesse são aproximadas por funções de interpolação definidas no domínio do problema, retendo a dimensionalidade original do problema na solução numérica.

Em contraposição ao MEF, destaca-se o Método dos Elementos de Contorno (MEC), cuja principal característica é a discretização apenas do contorno do problema, a partir da formulação de equações integrais apropriadas, não sendo necessária a discretização do domínio da região analisada, conforme descrito por Paiva (1987). Como consequência, a solução numérica fica definida em um espaço dimensional reduzido de um do problema físico original. Por exemplo, se o corpo original é tridimensional, a solução do MEC é construída por elementos de contorno bidimensionais, e assim por diante.

Embora o número de aplicações do MEC ainda seja inferior ao do MEF, o método tem sido empregado como uma alternativa altamente competitiva em diversas áreas da engenharia, especialmente em problemas que envolvem domínios infinitos ou semi-infinitos, descontinuidades e elevada precisão na representação das condições de contorno, conforme discutido por Aliabadi (1996).

No âmbito da análise estática de placas simples delgadas apoiadas ou não em fundações elásticas pelo MEC, observa-se um conjunto expressivo de contribuições. Destacam-se os trabalhos de Stern (1979), Balaš (1984), Costa e Brebbia (1985), Paiva (1987), Katsikadelis e Kallivokas (1988), Chueiri (1994), Guminiak e Jankowiak (2007), Damanpack *et al.*, (2013). Um número consideravelmente menor de trabalhos do MEC tem sido voltados para análise estática de placas duplas tais como as formulações descritas em Pereira (2020), Pereira *et al.*, (2022) e Pereira (2023), que abordam formulações integrais, estratégias de discretização e diferentes condições de contorno aplicadas a placas duplas contendo núcleo formadas por base elástica de Winkler e Pasternak.

Para o regime dinâmico, também há contribuições relevantes nas soluções numéricas do MEC em problemas de placas simples, tais como as de Costa (1987), Providakis e Beskos (1989), Katsikadelis e Sapountzakis (1991), Beskos (1990), que exploraram vibrações livres e

forçadas, formulações no domínio da frequência e no domínio do tempo. Recentemente, Zhou *et al.* (2024) apresentaram a solução fundamental para placas delgadas apoiadas sobre base elástica de Pasternak com inclusão de amortecimento, contemplando tanto o caso de carregamento concentrado quanto o de carregamento do tipo dipolo.

Quando se trata especificamente de placas associadas, observa-se inicialmente um número significativo de estudos analíticos no regime dinâmico, como os desenvolvidos por Oniszczyk (2000), Oniszczyk (2004), De rosa e Lippiello (2009), Zhang *et al.* (2021), Kunukkasseril e Swamidas (1973), Stojanović *et al.* (2015), Mirian e Ariaei (2023) bem como Ma *et al.* (2024). Além das formulações analíticas, existem diversas contribuições baseadas em métodos numéricos, sobretudo para problemas dinâmicos envolvendo placas múltiplas, como nos estudos de Chasen e Makinen (1994), Jeong e Kang (2013), Heidari e Ariaei (2022), e Kim *et al.* (2021).

Entretanto, ao investigar a análise do MEC para sistemas de placas associadas, observa-se relativa escassez de trabalhos. Há algumas contribuições direcionadas a placas sanduíche, como as de Qin (1993) e Ventsel (2003), porém essas abordagens são usualmente limitadas a configurações com características materiais e geométricas semelhantes entre as camadas. Há uma clara lacuna na literatura de trabalhos que tratem explicitamente da aplicação do MEC ao problema dinâmico de placas associadas no contexto de vibrações livres, conforme observado no Quadro 1.1. Essa lacuna justifica o direcionamento do presente estudo, voltado para o desenvolvimento de formulação do MEC para obtenção das vibrações livres das placas duplas delgadas interconectadas elasticamente.

Quadro 1.1 - Revisão bibliográfica placas associadas

Autor(es)	Ano	Método Empregado	Observação
Kunukkasseril e Swamidas	1973	Solução analítica	Vibrações livres de placas acopladas
Qin	1993	MEC	Análise não-linear estática de Placas sanduiches*
Chate e Makinen	1994	MEF	Análise estática e dinâmica de Placas sanduiches*
Oniszczyk	2000	Solução analítica	Sistema de placas duplas
Oniszczyk	2004	Solução analítica	Extensão para regime dinâmico
De Rosa e Lippiello	2009	Solução analítica	Modelagem dinâmica de placas duplas

Autor(es)	Ano	Método Empregado	Observação
Jeong e Kang	2013	Solução analítica	Análise dinâmica de placas idênticas interconectadas por um líquido
Stojanović et al.	2015	Solução analítica	Sistemas multicamadas
Pereira	2020	MEC	Placas duplas interconectadas por camada elástica de Winkler
Kim et al.	2021	Meshfree Method	Análise dinâmica de Placas laminadas interconectadas.
Zhang et al.	2021	Solução analítica	Análise dinâmica de placas laminadas interconectadas.
Heidari e Ariaei	2022	Quadratura diferencial	Análise dinâmica de sistemas de placas idênticas interconectadas elasticamente
Mirian e Ariaei	2023	Solução analítica	Análise dinâmica de placas anulares elasticamente conectadas
Pereira	2023	MEC	Placas duplas interconectadas por camada elástica de Pasternak
Pereira	2023	Solução analítica	Placas duplas interconectadas por camada elástica de Pasternak
Ma et al.	2024	Solução analítica	Vibração e resposta dinâmica

* Referentes a placas sanduíches (as duas placas são iguais e é considerada a espessura da camada interconectante)

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo Geral:

O objetivo deste trabalho é desenvolver uma formulação direta no Método dos Elementos de Contorno para dinâmica de placas duplas delgadas com núcleo formado por fundação elástica de Winkler.

1.3.2 Objetivos Específicos:

- Encontrar a equação de movimento das placas;
- Desenvolver as equações integrais do problema;

- Deduzir as soluções fundamentais;
- Montar o sistema algébrico e determinar as incógnitas;
- Desenvolver um código computacional e realizar estudo de convergência;
- Comparação com soluções numéricas e/ou analíticas;
- Discussões adicionais sobre aplicação do MEC na análise vibratória de placas apoiadas em fundação elástica de Winkler.

1.4 Estruturação do texto

O texto foi dividido em quatro capítulos:

O primeiro capítulo aborda placas simples sobre base elástica Winkler, sendo a primeira parte uma apresentação para o problema em regime estático, onde são apresentadas a equação governante e a solução fundamental. Já a segunda parte é apresentado o problema em regime dinâmico, onde é desenvolvida a equação de movimento no item 2.3.1, a solução fundamental no item 2.3.2, as equações integrais no item 2.3.3 e as equações algébricas discretizadas no item 2.3.4.

O segundo capítulo aborda as placas duplas interconectadas por camada elástica de Winkler, a primeira parte mostra o problema estático estudado por Pereira (2020) sendo apresentada a equação governante do problema e a solução fundamental. A segunda parte compõe o objetivo principal deste trabalho no qual é apresentado o problema das placas duplas em regime dinâmico, sendo as variações das energias potenciais e dissipativas as mesmas apresentadas na segunda parte do primeiro capítulo, porém definidas para as placas superior e inferior.

O terceiro capítulo aborda alguns resultados alcançados com a solução proposta, sendo apresentados seis exemplos para verificação da convergência do MEC na obtenção das frequências naturais, sendo que cada exemplo contém resultados para diferentes condições de apoio. Os dois primeiros exemplos abordam placas simples isoladas, o terceiro e o quarto exemplo abordam placas simples apoiadas em camada elástica de Winkler e os dois últimos exemplos são de placas duplas interconectadas por camada elástica de Winkler.

O quarto e último capítulo apresenta as considerações finais do trabalho e as sugestões para trabalhos futuros.

2. PLACAS SIMPLES APOIADAS EM BASE ELÁSTICA DE WINKLER

Neste capítulo são descritos os fundamentos de placas simples apoiadas em fundação elástica de Winkler, desde as equações diferenciais governantes, passando pela transformação em equações integrais e, finalmente, a solução no MEC. Ambos regimes estáticos e dinâmicos permanentes são abordados de forma sucinta.

2.1 Introdução

No âmbito das estruturas, a placa, na definição de Reddy (1984), é um elemento estrutural laminar plano, visto que uma dimensão é muito menor que as demais e submetido a carregamentos transversais. Além disso, o plano equidistante às duas superfícies é conhecido como superfície média ou plano médio, sendo o deslocamento da placa representado pelo deslocamento do plano médio.

Algumas teorias de placas difundidas no âmbito acadêmico baseadas no modelo de deformações assumidas, cujas cinemáticas das seções transversais estão indicadas na Figura 2.1, tiveram como marco inicial a Teoria Clássica de Placas proposta por Kirchhoff (1850). Nessa abordagem, as principais premissas adotadas à cinemática da seção transversal são que a planicidade da seção e sua ortogonalidade à superfície média na fase indeformada são conservados durante a flexão da placa. Como resultado, a teoria clássica fica incapacitada de capturar os efeitos de deformação por cortante, restringindo sua aplicabilidade às placas delgadas. Como aprimoramento da teoria de Kirchhoff (1850) tem-se um conjunto de teorias refinadas de placas, tais como as de Reissner (1945) que é formulada em tensões assumidas, já Mindlin (1951) foi desenvolvida em deformações assumidas. Ambas teorias refinadas levam em consideração os efeitos do cisalhamento transversal, implicando que não necessariamente a seção transversal permanecerá ortogonal ao plano médio durante a flexão, conforme a Figura 2.1b). Todavia, na teoria de Mindlin (1951) a adoção da seção plana implica em uma distribuição constante das tensões tangenciais transversas. Tendo em vista que a distribuição das tensões tangenciais esperadas é na forma quadrática, Mindlin (1951) inseriu um coeficiente de correção para adequar as parcelas de cisalhamento na energia potencial do sistema.

Reddy (1984) introduziu uma teoria de placas de ordem superior (Teoria de Placas de Terceira ordem) que leva em consideração que a seção transversal não fica plana e sim cúbica, vide Figura 2.1c), tendo como consequência a distribuição cúbica das tensões normais e distribuição quadrática para as tensões tangenciais ao longo da espessura da placa, o que atende automaticamente a variações esperadas para essas tensões, excluindo a necessidade de um fator

de correção. Essa maior robustez dessa teoria traz consigo um tratamento matemático mais complexo que a de Mindlin (1951), por exemplo equações diferenciais parciais acopladas e esforços de alta ordem.

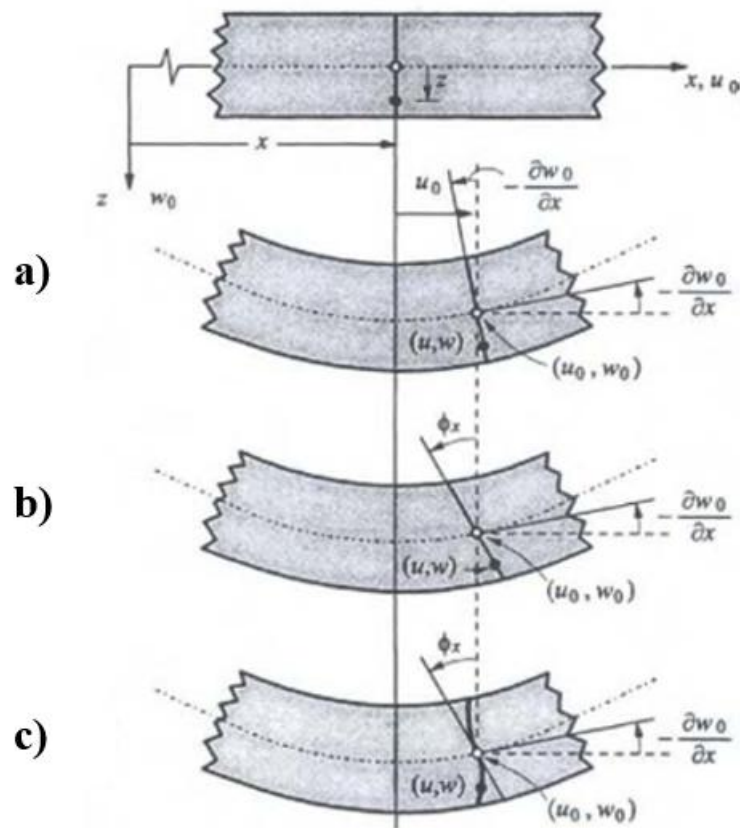


Figura 2.1 - Deformação da seção transversal na teoria de: a) Kirchhoff, b) Mindlin c) Reddy.
Fonte: Reddy, (1984), adaptado.

Antes da descrição matemática de placas, alguns fundamentos da teoria da elasticidade linear são discutidos. Algumas das principais hipóteses da elasticidade linear são que: o sólido esteja sob regime de pequenos deslocamentos e pequenas deformações; o material constituinte esteja no regime elástico-linear.

Sejam os deslocamentos representados por $u_i(x_1, x_2, x_3)$. As deformações infinitesimais ε_{ij} podem ser escritas em função dos deslocamentos como:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.1)$$

As componentes de tensões em coordenadas cartesianas são definidas como o limite da razão da resultante de forças ΔF_i (orientada na direção i) e da área ΔA_j (orientada na direção j), quando esta última é admitida tender a zero:

$$\sigma_{ij} = \lim_{\Delta A_j \rightarrow 0} \frac{\Delta F_i}{\Delta A_j}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.2)$$

Se o corpo estiver submetido a forças volumétricas b_i , variações de tensões podem ocorrer no domínio do corpo, conforme mostrada na Figura 2.2.

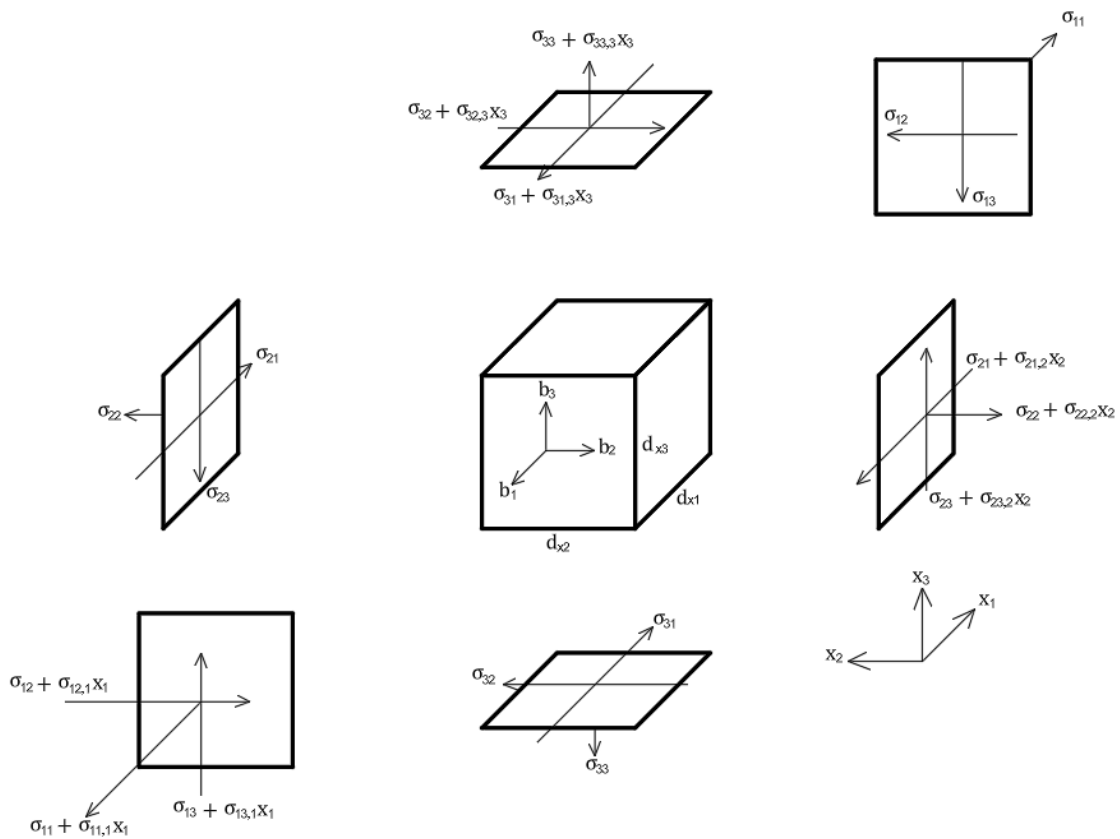


Figura 2.2 - Variação de tensões no sólido carregado

Fazendo-se o equilíbrio em forças advindos do estado tensões indicado na Figura 2.2, tem-se que:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.3)$$

Se o material elástico-linear for homogêneo e isotrópico, a lei constitutiva pode ser escrita como:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk}, \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (2.4)$$

Onde μ, λ são as constantes de Lamé dadas por $\mu = G = E/[2(1 + \nu)]$ e $\lambda = 2G\nu/(1 - 2\nu)$. Sendo o módulo de elasticidade longitudinal E, coeficiente de Poisson ν . Além disso, δ_{ij} é o Delta de Kroenecker é uma distribuição que atende a seguinte relação:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

2.2 Placas simples em regime estático

Seja uma placa simples apoiada em uma base elástica de Winkler, conforme indicado na Figura 2.3. O carregamento externo é representado por g e a reação elástica da base é denotada por p .

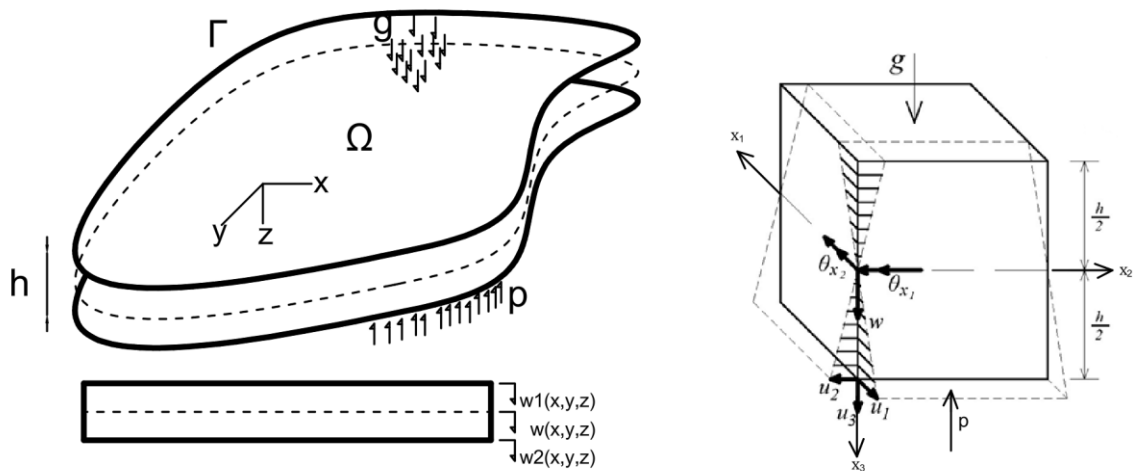


Figura 2.3 - Placa simples apoiada em na base de Winkler
Fonte: Adaptado de Pereira (2023)

Nesse trabalho o enfoque são as relações advindas da Teoria Clássica de Placas proposta por Kirchhoff (1850) cujas hipóteses são dadas por:

- Material é homogêneo, isotrópico e elástico-linear.
- As seções transversais da placa são planas e ortogonais ao plano médio no estado indeformado permanecem planas e ortogonais ao plano médio na configuração deformada.

c) Assume-se que os deslocamentos e deformações são pequenos, permitindo a linearização das equações.

d) Deformação normal transversa nula.

Além disso, a placa assumida apoiada em uma base elástica de Winkler.

Convém observar que em decorrência da hipótese d) os deslocamentos da direção transversal $u_3(x_1, x_2, x_3)$ são representados apenas pelo deslocamento transversal do plano médio $w(x_1, x_2)$, implicando que:

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = w(x_1, x_2) \quad (2.5)$$

Da hipótese b, os deslocamentos axiais $u_i(x_1, x_2, x_3)$ resultantes da rotação $w_{,i}$ da seção podem ser descritos como:

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = -x_3 w_{,i}(x_1, x_2) \quad (2.6)$$

Convém notar que ao longo do texto que z representa x_3 .

Substituindo as equações (2.6) na equação (2.1), tem-se:

$$\varepsilon_{ij} = -z w_{,ij} \quad i, j = 1, 2 \quad (2.7)$$

A análise da placa ocorre no estado plano de tensão de forma que a relação (2.1) das deformações (ε) com seus respectivos deslocamentos (u) continua válida, no entanto a variação do índice fica reduzida a $i, j = 1, 2$.

A correlação entre as deformações e tensões de um material é regida pelas relações constitutivas (2.4), no estado plano de tensão fica:

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + 2\frac{E}{1-\nu}\delta_{ij}\varepsilon_{kk} \quad i, j, k = 1, 2 \quad (2.8)$$

Substituindo-se (2.7) em (2.8), as tensões ficam escritas em função das curvaturas:

$$\sigma_{ij} = -z\frac{E}{1-\nu^2}[\delta_{ij}\nu w_{,kk} + (1-\nu)w_{,ij}] \quad i, j, k = 1, 2 \quad (2.9)$$

Os momentos fletores podem ser obtidos por:

$$M_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{ij} z dz \quad (2.10)$$

Substituindo a equação (2.9) na equação (2.10):

$$M_{ij} = -D [\delta_{ij} w_{,kk} \nu + (1 - \nu) w_{,ij}] \quad (2.11)$$

Os esforços no sistema de coordenadas cartesiano (x_1, x_2) podem ser obtidos em um sistema de coordenadas (n,s) que seria relativo as direções normal e tangencial do contorno da placa.

$$M_n = M_{ij} n_i n_j \quad (2.12)$$

$$M_{ns} = M_{ij} n_i s_j \quad (2.13)$$

A equação governante da teoria de placas de Kirchhoff é dada por uma equação diferencial parcial de quarta ordem desacoplada e pode ser obtida através de equilíbrio das forças e através do variacional de energia. Neste capítulo as equações de equilíbrio são obtidas diretamente da integração da equação de equilíbrio das tensões do problema tridimensional. Para ficar coerente com as hipóteses de placa admite-se que o sólido esteja submetido apenas a forças volumétricas aplicadas na direção transversal.

Multiplicando as duas primeiras equações de equilíbrio das tensões (2.3) seguido da integração ao longo da espessura da placa, fica:

$$\int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{\alpha\beta,\beta} dz + \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{\alpha 3,3} dz = 0, \quad \alpha e \beta = 1,2 \quad (2.14)$$

Fazendo-se a integração por partes da segunda parcela da equação (2.14), resulta em:

$$\int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{\alpha 3,3} dz = [z \sigma_{\alpha 3}]_{-h/2}^{h/2} - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha 3} dz, \quad \alpha = 1,2 \quad (2.15)$$

Convém notar que a primeira parcela do lado direito da equação (2.15) é nula e da segunda parcela tem-se o cortante Q_α :

$$Q_\alpha = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha 3} dz, \quad \alpha = 1,2 \quad (2.16)$$

Fazendo-se a integração da primeira parcela da equação (2.14) tem-se que os momentos são dados por:

$$\int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{\alpha\beta,\beta} dz = M_{\alpha\beta,\beta}, \quad \alpha \text{ e } \beta = 1,2 \quad (2.17)$$

Inserindo as equações (2.16) e (2.17) na (2.14), tem-se o equilíbrio em momento.

$$M_{\alpha\beta,\beta} - Q_\alpha = 0, \quad \alpha \text{ e } \beta = 1,2 \quad (2.18)$$

Fazendo-se a integração da terceira equação de (2.3) ao longo da espessura da placa tem-se:

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{3\beta,\beta} dz + \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{33,3} dz + \int_{-h/2}^{h/2} b_3 dz = 0, \quad \alpha \text{ e } \beta = 1,2 \quad (2.19)$$

O resultado de (2.14) é

$$Q_{\alpha,\alpha} + [\sigma_{33}]_{-h/2}^{h/2} + q = 0, \quad \alpha \text{ e } \beta = 1,2 \quad (2.20)$$

Convém notar que a segunda parcela de (2.20) é nula porque não se admite tensão axial transversal na placa. Já a carga q é uma ação de uma força genérica em superfície porque é

o resultado do produto entre a força volumétrica b_3 e a espessura h . Assim, essa carga genérica pode ser representada pela diferença entre a carga externa aplicada e a reação da base elástica $q = g - p$. Dessa forma, o resultante de forças na vertical (2.20) fica:

$$Q_{\alpha,\alpha} + g - p = 0, \quad \alpha = 1,2 \quad (2.21)$$

Derivando a (2.18) em relação a x_α e substituindo na (2.21) resulta na equação de equilíbrio em momentos:

$$M_{\alpha\beta,\beta\alpha} + g - p = 0, \quad \alpha e \beta = 1,2 \quad (2.22)$$

Substituindo (2.11) e a força elástica ($p = K_w w$) em (2.22)

$$D \nabla^4 w + K_w w - g = 0 \quad (2.23)$$

Sendo (K_w) o coeficiente de Winkler. Já $\nabla^4 f(x_1, x_2) = \nabla^2 \nabla^2 f(x_1, x_2)$ é definido como biarmônico da função $f(x_1, x_2)$, onde $\nabla^2 f(x_1, x_2) = f_{,ii}$ o laplaciano da função. Ademais, D é definido o a rigidez a flexão da placa e é dado pela relação:

$$D = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (2.24)$$

Sendo E o Módulo de Elasticidade e ν o coeficiente de Poisson.

O problema fundamental de placas é definido como uma placa circular de raio infinito e submetida a uma fonte concentrada no ponto p , preservando relações análogas ao problema real.

A equação do problema fundamental correspondente (2.23) pode ser escrita como:

$$D \nabla^4 w^*(p, q) + K_w w^*(p, q) = \delta(p, q) \quad (2.25)$$

No qual $\delta(p, q)$ é a distribuição delta de Dirac cuja valor é nulo para todo $q \neq p$ e vale ∞ para todo $q = p$.

Sendo a solução fundamental de (2.24) encontrada em Costa e Brebbia (1985) como:

$$w^*(p, q) = -\frac{Kei(\lambda r)}{2\pi D \lambda^2} \quad (2.26)$$

Onde $\lambda^4 = K_w/D$ e $Kei(x)$ é uma das funções de Kelvin de ordem zero. Já r é a distância entre o ponto-campo q (leitura dos efeitos) e o ponto-fonte p (aplicação da fonte).

No caso de placas sem base elástica ($K_w = 0$) a equação governante do problema fundamental fica escrita como:

$$\nabla^4 w^*(p, q) = w^*_{,ijij} = \frac{\delta(p, q)}{D} \quad (2.27)$$

Uma solução fundamental proposta para a equação (2.26) foi a de Bézine (1978) dada por:

$$w^*(p, q) = \frac{r^2}{8\pi D} \ln(r) \quad (2.28)$$

2.3 Placas simples em regime dinâmico

Nesta seção inicialmente são abordadas as equações governantes de placas simples apoiadas em fundações viscoelásticas submetidas a efeitos dinâmicos translacionais e rotatórios.

2.3.1 Equação de movimento das placas simples

Conforme comentado na seção anterior as equações de equilíbrio podem ser encontradas por equilíbrio direto ou via princípios variacionais. Nessa seção será feita pelo segundo procedimento. O Princípio de Hamilton afirma que o movimento real de um sistema mecânico entre dois instantes t_1 e t_2 é aquele que torna a primeira variação da ação nula, sendo a ação (Π) definida como a integral do Lagrangeano (\mathcal{L}) no tempo (Aguiar, 2010).

$$\Pi = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \quad (2.29)$$

Para a trajetória real entre os instantes t_1 e t_2 tem-se que:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \mathcal{L} dt = 0 \quad (2.30)$$

O Lagrangeano depende das energias presentes no sistema, sendo a energia potencial (π_P), energia cinética (π_C) e o trabalho das forças dissipativas (Z).

Para o caso da placa simples ele é dado por:

$$\mathcal{L} = \pi_C - \pi_P + Z \quad (2.31)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \pi_C - \delta \pi_P + \delta Z dt = 0 \quad (2.32)$$

A energia cinética total é fornecida pela contribuição do funcional de energia cinética da translação e da rotação:

$$\pi_C = \pi_{CT} + \pi_{CR} \quad (2.33)$$

A energia cinética de translação π_{CT} é dada por:

$$\pi_{CT} = \frac{1}{2} \int_M \dot{W}^2 dM \quad (2.34)$$

Onde $\dot{W} = \frac{dW(x_1, x_2, t)}{dt}$ é a velocidade vertical da placa e (M) é a massa.

E a energia cinética de rotação da placa é dada por, sendo u_i os deslocamentos nas direções x_1 e x_2 na placa:

$$\pi_{CR} = \frac{1}{2} \int_M \dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2 dM \quad (2.35)$$

Sendo $\dot{u}_i = \frac{du(x_1, x_2, x_3, t)}{dt}$ é a velocidade axial na direção i de um ponto na espessura da placa.

A energia potencial da placa apoiada na base elástica é dada por:

$$\pi_P = \pi_D + \pi_{Delast} \quad (2.36)$$

Onde π_D é a energia de deformação da placa dada por:

$$\pi_D = \frac{1}{2} \int_{Vol} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dVol \quad (2.37)$$

Já π_{Delast} é a energia de deformação da camada elástica, dada por:

$$\pi_{Delast} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} K_w W^2 d\Omega \quad (2.38)$$

Onde Vol é o volume da placa e $W = W(x_1, x_2, t)$ é o deslocamento transversal no domínio do tempo.

Substituindo a equação (2.7) na equação (2.36) e aplicando a variação δ , chega-se em:

$$\delta\pi_P = - \int_{\Omega} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{ij} z \delta W_{,ij} dz d\Omega + \int_{\Omega} K_w W \delta W d\Omega \quad (2.39)$$

Onde h é a espessura da placa.

Substituindo a equação (2.31) na equação (2.39), chega-se na variação da energia potencial de deformação no domínio Ω .

$$\delta\pi_P = - \int_{\Omega} M_{ij} \delta W_{,ij} d\Omega + \int_{\Omega} K_w W \delta W d\Omega \quad (2.40)$$

Aplicando integral por partes na equação (2.40) até chegar na variação dos deslocamentos verticais, fica:

$$\delta\pi_P = - \int_{\Gamma} M_{ij} n_j \delta W_{,i} d\Gamma + \int_{\Omega} M_{ij,j} \delta W_{,i} d\Omega + \int_{\Omega} K_w W \delta W d\Omega \quad (2.41)$$

Onde n_j são as componentes do versor normal ao contorno.

Integrando por partes a segunda parcela da equação (2.41), fica:

$$\delta\pi_P = - \int_{\Gamma} M_{ij} n_j \delta W_{,i} d\Gamma + \int_{\Gamma} M_{ij,j} n_i \delta W d\Gamma - \int_{\Omega} M_{ij,i,j} \delta W d\Omega + \int_{\Omega} K_w W \delta W d\Omega \quad (2.42)$$

A rotação indicial pode ser substituída pelas rotações normal e tangencial do contorno conforme a Figura 2.4.

$$\begin{aligned} \delta W_{,i} &= n_i \frac{\partial}{\partial n} \delta W + s_i \frac{\partial}{\partial s} \delta W \\ s_i &= -n_j \\ s_j &= n_i \end{aligned} \quad (2.43)$$

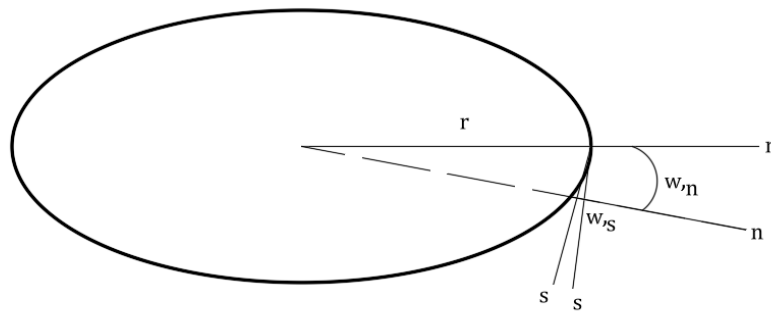


Figura 2.4 - Rotação normal e tangencial
Fonte: Autor

A cortante no contorno é dada por:

$$q_n = M_{ij,j} n_i \quad (2.44)$$

Além disso, nos cantos com a mudança de contorno, pode-se utilizar a relação (2.45).

$$\int_{\Gamma} M_{ns} \delta \frac{\partial W}{\partial s} d\Gamma = [M_{ns_k} \delta W_k]_{\Gamma_{i-}}^{\Gamma_{i+}} - \int_{\Gamma} \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} \delta W d\Gamma \quad (2.45)$$

Para os contornos contínuos a primeira parcela da equação (2.45) é nula, já quando há presença de cantos, devido a alteração de contorno, existe um volvente residual, tal qual é conhecido como reação de canto.

$$Rc_k \delta W_k = [M_{ns_k} \delta W_k]_{\Gamma_{i-}}^{\Gamma_{i+}} \quad (2.46)$$

Substituindo a relação (2.43), (2.44), e (2.46) na equação (2.42) chega-se em:

$$\begin{aligned} \delta \pi_P = & - \int_{\Gamma} M_n \frac{\partial}{\partial n} \delta W d\Gamma - Rc_k \delta W_k + \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial s} M_{ns} + q_n \delta W d\Gamma - \\ & \int_{\Omega} M_{ij,ij} \delta W d\Omega + \int_{\Omega} K_w W \delta W d\Omega \end{aligned} \quad (2.47)$$

A energia cinética de translação da placa é dada por:

$$\pi_{CT} = \frac{1}{2} \int_M \dot{W}^2 dM \quad (2.48)$$

Considerando uma distribuição uniforme de massa a variação da energia cinética fica:

$$\delta \pi_{CT} = \int_{Vol} \rho \dot{W} \delta \dot{W} dVol \quad (2.49)$$

Sendo ρ a densidade da placa e Vol o volume da placa.

Separando a integral no volume em integral do domínio e em linha na direção z, fica:

$$\delta \pi_{CT} = \int_{\Omega} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho \dot{W} \delta \dot{W} dz d\Omega \quad (2.50)$$

Resolvendo a integral em linha, encontra-se a energia cinética de translação para placas delgadas.

$$\delta \pi_{CT} = \int_{\Omega} \rho h \dot{W} \delta \dot{W} d\Omega \quad (2.51)$$

A integral no domínio do tempo da energia cinética de translação é dada pela equação (2.52).

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta\pi_{CT} dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \rho h \dot{W} \delta\dot{W} d\Omega dt \quad (2.52)$$

Aplicando integral por partes na equação (2.52) chega-se na integral da energia cinética de translação no domínio do tempo.

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta\pi_{CT} = \int_{\Omega} [\rho h \dot{W} \delta W]_{t_1}^{t_2} d\Omega - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \rho h \ddot{W} \delta W d\Omega dt \quad (2.53)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta\pi_{CT} = - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \rho h \ddot{W} \delta W d\Omega dt \quad (2.54)$$

Considerando que a massa é distribuída uniformemente nas placas e aplicando a variação na energia, fica:

$$\delta\pi_{CR} = \int_{\Omega} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho \dot{u}_i \delta \dot{u}_i dz d\Omega \quad (2.55)$$

Aplicando as equações (2.6) na equação (2.55), fica:

$$\delta\pi_{CR} = \int_{\Omega} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho (-z)^2 \dot{W}_{,i} \delta \dot{W}_{,i} dz d\Omega \quad (2.56)$$

Integrando em z, chega-se na energia cinética de rotação da placa delgada (2.57)

$$\delta\pi_{CR} = \frac{1}{12} \int_{\Omega} \rho h^3 \dot{W}_{,i} \delta \dot{W}_{,i} d\Omega \quad (2.57)$$

A integral no domínio do tempo da energia cinética de rotação é dada por:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta\pi_{CR} dt = \frac{1}{12} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \rho h^3 \dot{W}_{,i} \delta \dot{W}_{,i} d\Omega dt \quad (2.58)$$

Aplicando integral por partes na equação (2.58), fica:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta\pi_{CR} dt = \frac{1}{12} \int_{\Omega} [\rho h^3 \dot{W}_{,i} \delta W_{,i}]_{t_1}^{t_2} d\Omega - \frac{1}{12} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \rho h^3 \ddot{W}_{,i} \delta W_{,i} d\Omega dt \quad (2.59)$$

Vale salientar que a primeira parcela do resultado das integrais por partes presentes no item (2.59) é nula, visto que a variação do deslocamento no tempo inicial e final é zero. Após anulação da primeira parcela e integrando por partes novamente no domínio do espaço chega-se nas expressões do item (2.60).

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \delta\pi_{CR} dt = & -\frac{1}{12} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma} \rho h^3 \ddot{W}_{,i} n_{,i} \delta W d\Gamma dt + \\ & \frac{1}{12} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \rho h^3 \ddot{W}_{,ii} \delta W d\Omega dt \end{aligned} \quad (2.60)$$

A energia cinética total pode ser dada como a contribuição da energia cinética translação e da energia cinética de rotação.

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \delta\pi_c dt = & -\int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \rho h^3 \dot{W} \delta W d\Omega dt - \frac{1}{12} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma} \rho h^3 \ddot{W}_{,i} n_{,i} \delta W d\Gamma dt + \\ & \frac{1}{12} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \rho h^3 \ddot{W}_{,ii} \delta W d\Omega dt \end{aligned} \quad (2.61)$$

Supondo a atuação de um carregamento g_1 distribuído uniformemente na placa, a presença de amortecimento (c) e que os esforços estão prescritos na parcela Γ_1 do contorno, o variacional do trabalho das forças dissipativas (δZ) é dado por:

$$\delta Z = \int_{\Omega} g_1 \delta W + c \dot{W} \delta W d\Omega + \int_{\Gamma_2} \bar{V}_n \delta W - \bar{M}_n \delta \frac{\partial W}{\partial s} d\Gamma + (\overline{RC_k} - \overline{RC_k}) \delta W_k \quad (2.62)$$

No qual \bar{V}_n é o cortante equivalente de Kirchhoff prescrito, \bar{M}_n é o momento fletor prescrito no contorno Γ_2 e $\overline{RC_k}$ é a reação de canto prescrita, com k sendo o número de cantos. Convém notar que os deslocamentos no contorno Γ_1 são prescritos, portanto, gerando variação nula no funcional por isso são removidos da variação.

Isolando todas as variações e utilizando o Princípio de Hamilton, chega-se na equação de movimento no domínio do tempo, em termos de momento e nas condições de contorno.

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \pi c - \delta \pi p + \delta Z dt = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_{\Omega} \left(-\rho h \ddot{W} + \frac{1}{12} \rho h^3 \ddot{W}_{,ii} + M_{ij,ij} - K_w W + g_1 + c \dot{W} \right) \delta W d\Omega + \int_{\Gamma} -V_n \delta W d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \bar{V}_n \delta W d\Gamma + \int_{\Gamma} M_n \frac{\partial}{\partial n} \delta W d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \bar{M}_n \frac{\partial}{\partial n} \delta W d\Gamma + R c_k \delta W_k - R c_k \delta W_k \right\} dt \quad (2.63)$$

Sendo V_n o cortante equivalente de Kirchhoff no contorno dado por:

$$V_n = \frac{1}{12} \rho h^3 \dot{W}_{,i} n_{,i} + \left(\frac{\partial}{\partial s} M_{ns} + q_n \right) \quad (2.64)$$

Conforme disposto na equação (2.32) o lado esquerdo da equação (2.63) deve ser nulo. No entanto, as variações do deslocamento e da rotação são arbitrárias, logo as seguintes imposições devem ser feitas no domínio da placa em (2.63).

$$M_{ij,ij} - K_w W - \rho h \ddot{W} + \frac{1}{12} \rho h^3 \ddot{W}_{,ii} + c \dot{W} + g_1 = 0 \quad (2.65)$$

Convém notar que (2.65) é conhecida como equação de movimento.

Simultaneamente a validade de (2.63) também depende das seguintes imposições no contorno Γ_1 e nos cantos da placa.

$$\begin{aligned} \bar{V}_n - V_n &= 0 \\ M_n - \bar{M}_n &= 0 \end{aligned} \quad (2.66)$$

Sendo (2.66) as condições do contorno Γ_1

Já para o contorno Γ_2 a prescrição do contorno é imposta diretamente com:

$$\begin{aligned} \bar{W} - W &= 0 \\ \bar{W}_{,n} - W_{,n} &= 0 \end{aligned} \quad (2.67)$$

Derivando a equação (2.11)

$$M_{ij,ij} = -D[\nu W_{,tt} \delta_{ij} + (1 - \nu)W_{,ij}] \quad (2.68)$$

Substituindo (2.68) na equação (2.65), chega na equação de movimento em termos de deslocamento.

$$-D\nabla^4 W - K_w W - \rho h \ddot{W} + \frac{1}{12} \rho h^3 \nabla^2 \ddot{W} + c \dot{W} + g = 0 \quad (2.69)$$

Assumindo a placa submetida a um campo harmônico e periódico de excitação, a descrição do sistema (2.69) pode ser transformada do domínio do tempo para o domínio da frequência, no qual os deslocamentos no campo harmônico e periódico, são dados por:

$$\begin{aligned} W(x_1, x_2, t) &= w(x_1, x_2) e^{i\omega t} \\ \dot{W}(x_1, x_2, t) &= i \omega w(x_1, x_2) e^{i\omega t} \\ \ddot{W}(x_1, x_2, t) &= -\omega^2 w(x_1, x_2) e^{i\omega t} \\ g(x_1, x_2, t) &= g(x_1, x_2) e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (2.70)$$

Tomando um caso particular no qual a placa está apoiada em fundação elástica (sem amortecimento) e caso for desprezada a energia cinética de rotação, a descrição do sistema (2.69) pode ser transformada para:

$$-D\nabla^4 w - K_w w + S w = -g \quad (2.71)$$

$$\text{Sendo } S = \rho h \omega^2$$

Multiplicando por -1 em ambos os lados da equação, chega-se em:

$$D\nabla^4 w + K_w w - s w = g \quad (2.72)$$

2.3.2 Solução fundamental das placas simples

Como o domínio do problema fundamental pode ser representado por uma placa de raio infinito, é conveniente a utilização das coordenadas polares. Desta forma, o bi harmônico em coordenadas polares é definido por:

$$\nabla^4 w^*(p, q) = \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) w^*(p, q) \quad (2.73)$$

Sendo r é o raio vetor, em função das coordenadas do ponto fonte (x_p, y_p) e do ponto campo (x_q, y_q) .

$$r^2 = (x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2 \quad (2.74)$$

Convém notar que o problema real é um subconjunto do problema fundamental, cujo domínio é infinito, vide Figura 2.5. Dessa forma, o problema fundamental é regido por relações semelhantes às do problema real. Sendo que no problema fundamental, além do domínio infinito, a carga considerada é a distribuição delta de Dirac.

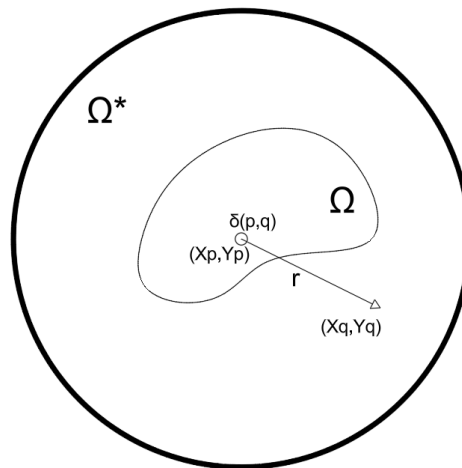


Figura 2.5 - Problema fundamental e problema real
Fonte: Autor

Assumindo que a placa simples está livre de fundação elástica em (2.71), a equação do problema fundamental é dada por:

$$\nabla^2 \nabla^2 w^*(p, q) - \frac{S}{D} w^* = \frac{\delta(p, q)}{D} \quad (2.75)$$

Convém notar que a distribuição delta de Dirac possui as seguintes propriedades:

$$\delta(p, q) = \begin{cases} \infty & \forall q = p \\ 0 & \forall q \neq p \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(p, q) dx = 1 \quad (2.76)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(p, q) f(p) dx = f(q)$$

Outra forma de escrever a equação (2.75) é:

$$(\nabla^4 - \lambda^4)w^*(p, q) = \frac{\delta(p, q)}{D} \quad (2.77)$$

Com $\lambda^4 = \frac{S}{D}$.

Para a equação (2.77) é possível chegar nas equações fundamentais apresentadas no quadro 2.1, sendo para esse trabalho utilizada a apresentada por Wong e Hutchinson (1981):

$$w^* = \frac{1}{8\lambda^2 D} [iJ_0(\lambda r) + Y_0(\lambda r)] + \frac{1}{4\lambda^2 \pi D} K_0(\lambda r) \quad (2.78)$$

As soluções fundamentais adicionais para a equação (2.74) encontram-se no Quadro 2.1.

Quadro 2.1 – Algumas soluções fundamentais alternativas para placas delgadas dinâmicas

Vivoli (1973)	Wen <i>et al.</i> (2000)
$\frac{i}{8\lambda^2 D} [H_0^1(\lambda r) - H_0^1(i\lambda r)]$	$\frac{i}{4\pi\lambda^2 D} [K_0(\lambda r\sqrt{i}) - K_0(\lambda r\sqrt{-i})]$

Sendo $H_0^1(\lambda r)$ a função de Hankel de primeira espécie de ordem zero, $J_0(\lambda r)$ a função de Bessel de primeira espécie e ordem zero, $Y_0(\lambda r)$ a função de Bessel de segunda espécie e

ordem zero, $K_0(\lambda r)$ função modificada de Bessel de segunda espécie e ordem zero e $i = \sqrt{-1}$ o número imaginário.

Quando a fundação elástica está presente a equação governante do problema fundamental é:

$$\nabla^2 \nabla^2 w^*(p, q) + \frac{K_w - S}{D} w^*(p, q) = \frac{\delta(p, q)}{D} \quad (2.79)$$

Neste caso a equação (2.76) pode ser escrita de forma análoga a (2.74) bastando que o λ^4 seja substituído por $\bar{\lambda}^4 = \frac{S - K_w}{D}$. No entanto, o comportamento da solução fundamental fica dependente de uma inequação: se $\frac{S - K_w}{D} > 0$ então a solução será dada por aquelas informadas no Quadro 2.1 pela substituição de λ por $\bar{\lambda}$. Caso $\frac{S - K_w}{D} < 0$ então a solução fundamental será dada por:

$$w^*(p, q) = -\frac{Kei(\sqrt[4]{-\bar{\lambda}^4} r)}{2\pi D (\bar{\lambda})^2} \quad (2.80)$$

Conforme pode ser visto na equação (2.76) quando ocorrer $S = K_w$ a placa não desenvolve vibração.

2.3.3 Equação integral de domínio das placas simples dinâmicas

Para a aplicação do Método dos Elementos de Contorno torna-se necessária a obtenção das equações integrais, tais quais dependem das soluções fundamentais. Como afirmou (Paiva, 1987) essas equações podem ser encontradas através do Método dos Resíduos Ponderados ou a partir do teorema da Reciprocidade de Betti, sendo o primeiro o método utilizado nesse trabalho.

$$\int_{\Omega} w^* [D\nabla^4 w - (K_w - S)w - g] d\Omega = \int_{\Gamma_1} V_n^*(p, q) [w(q) - \bar{w}(q)] d\Gamma - \int_{\Gamma_2} M^*(p, q) [w_{,n}(q) - \bar{w}_{,n}(q)] d\Gamma \quad (2.81)$$

A equação diferencial (2.81) pode ser transformada em uma equação integral equivalente, aplicando-se sucessivas integrações por partes convenientes, conforme feito por Stern (1979) para placas estáticas sem base elástica.

$$w(p) + \int_{\Gamma} V_n^{1*}(p, q)w(q) - M_n^{*1}(p, q)w_{,n}(q)d\Gamma + R_{ck}^*w_k = \int_{\Gamma} V_n(q)w^{1*}(p, q) - M_n(q)w_{,n}^{1*}(p, q)d\Gamma + R_{ck}^*w_{ck} + \int_{\Omega} g_1w^{1*}(p, q)d\Omega \quad (2.82)$$

Convém notar que no contorno têm-se duas incógnitas e até o momento apenas uma equação integral foi definida (2.82). Assim, para tornar o problema com solução possível é necessário gerar uma segunda equação integral. Uma equação integral possível é a derivada da equação (2.82) em relação a direção (m) no ponto fonte (p), resultando em:

$$w_{,m}(p) + \int_{\Gamma} V_{n,m}^*(p, q)w(q) - M_{n,m}^*(p, q)w_{,n}(q)d\Gamma + R_{ck}^*w_{k,m} = \int_{\Gamma} V_n(q)w_{,m}^*(p, q) - M_n(q)w_{,nm}^*(q)d\Gamma + R_{ck}^*w_{k,m} + \int_{\Omega} g_1w_{,m}^*(p, q)d\Omega \quad (2.83)$$

Aplicando limite na equação (2.82), chega-se na equação integral no contorno que é dada por:

$$C_1w(p) + \int_{\Gamma} V_n^*(p, q)w(q)d\Gamma - \int_{\Gamma} M_n^*(p, q)\varphi(q)d\Gamma - \sum_{c=1}^{Nc} R_c^*w_c = \sum_{c=1}^{Nc} R_c w_c^* + \int_{\Gamma} V_n(q)w^*(p, q) - \int_{\Gamma} M_n(q)\varphi^*(p, q)d\Gamma - \int_{\Omega} g_1w^*(p, q)d\Omega \quad (2.84)$$

$$\text{Onde } C_1 = \begin{cases} 0, & \text{if } p \notin \Omega \cup \Gamma \\ \frac{\beta_c}{2\pi}, & \text{if } p \in \Gamma \\ 1, & \text{if } p \in \Omega \end{cases}$$

De semelhante modo, é aplicado o limite na equação (2.83), chega-se na equação integral no contorno para a derivada direcional:

$$\begin{aligned}
& C_2 w_{,m}(p) + C_3 w_{,t}(p) + \int_{\Gamma} V_{n,m}^*(p,q) w(q) - M_{n,m}^*(p,q) w_{,n}(q) d\Gamma + \\
& \sum_{c=1}^{N_c} R_{c,m}^* w_c = \int_{\Gamma} V_n(q) w_{,m}^*(p,q) - M_n(q) w_{,nm}^*(q) d\Gamma + \sum_{c=1}^{N_c} R_c w_{c,m}^* + \quad (2.85) \\
& \int_{\Omega} g_1 w_{,m}^*(p,q) d\Omega
\end{aligned}$$

Onde;

$$C_2 = \begin{cases} 0, & \text{if } p \notin \Omega \cup \Gamma \\ \frac{\beta_c}{2\pi} + \frac{\nu}{4\pi} [\sin(2\gamma) + \sin(2\gamma + \beta_c)], & \text{if } p \in \Gamma, \\ 1, & \text{if } p \in \Omega \end{cases}$$

$$C_3 = \begin{cases} 0, & \text{if } p \notin \Omega \cup \Gamma \\ \frac{\nu}{4\pi} [\sin(2\gamma) + \sin(2\gamma + \beta_c)], & \text{if } p \in \Gamma \\ 1, & \text{if } p \in \Omega \end{cases}$$

Para os pontos posterior e anterior aos cantos, a equação integral é dada por:

$$\begin{aligned}
& C_4 w_{,n1}(p) + C_5 w_{,n2}(p) + \int_{\Gamma} V_{n,n1}^*(p,q) w(q) - M_{n,n1}^*(p,q) w_{,n}(q) d\Gamma + \\
& \sum_{c=1}^{N_c} R_{c,n1}^* w_c = \int_{\Gamma} V_n(q) w_{,n1}^*(p,q) - M_n(q) w_{,nn1}^*(q) d\Gamma + \sum_{c=1}^{N_c} R_c w_{c,n1}^* + \quad (2.86) \\
& \int_{\Omega} g w_{,n1}^*(p,q) d\Omega
\end{aligned}$$

E também:

$$\begin{aligned}
& C_5 w_{,n1}(p) + C_4 w_{,n2}(p) + \int_{\Gamma} V_{n,n1}^*(p,q) w(q) - M_{n,n1}^*(p,q) w_{,n}(q) d\Gamma + \\
& \sum_{c=1}^{N_c} R_{c,n1}^* w_c = \int_{\Gamma} V_n(q) w_{,n1}^*(p,q) - M_n(q) w_{,nn1}^*(q) d\Gamma + \sum_{c=1}^{N_c} R_c w_{c,n1}^* + \quad (2.87) \\
& \int_{\Omega} g w_{,n1}^*(p,q) d\Omega
\end{aligned}$$

Onde;

$$C_4 = \frac{\beta_c}{2\pi}$$

$$C_5 = \frac{\nu}{2\pi} \sin(\beta_c)$$

Para o caso particular de pontos do contorno com uma única tangente, isto é, com uma única normal, o valor β_c é igual a π e, portanto, as equações (2.86) e (2.87), se reduzem a uma única expressão dada por:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} w_{,n1}(p) + \int_{\Gamma} V_{n,n1}^*(p,q) w(q) - M_{n,n1}^*(p,q) w_{,n}(q) d\Gamma + \sum_{c=1}^{Nc} R_{c,n1}^* w_c = \\ \int_{\Gamma} V_n(q) w_{,n1}^*(p,q) - M_n(q) w_{,nn1}^*(q) d\Gamma + \sum_{c=1}^{Nc} R_c w_{c,n1}^* + \\ \int_{\Omega} g w_{,n1}^*(p,q) d\Omega \end{aligned} \quad (2.88)$$

O sistema de equação integral dos deslocamentos e rotações pode ser expresso da seguinte forma:

$$\begin{aligned} U(p) + \int_{\Gamma} P^*(p,q) U(q) d\Gamma + \sum_{c=1}^{Nc} R_c^* w_c = \int_{\Omega} g w^*(p,q) d\Omega + \\ \int_{\Gamma} P(q) U^*(p,q) d\Gamma + \sum_{c=1}^{Nc} R_c w_c^* \end{aligned} \quad (2.89)$$

Onde:

$$U(q) = \begin{pmatrix} w(q) \\ w_{,m}(q) \end{pmatrix} \quad (2.90)$$

$$P(q) = \begin{pmatrix} V_n(q) \\ M_n(q) \end{pmatrix} \quad (2.91)$$

$$U^*(p,q) = [w^*(p,q) \quad -w_{,n}^*(p,q)] \quad (2.92)$$

$$P^*(p,q) = [V_n^*(p,q) \quad -M_n^*(p,q)] \quad (2.93)$$

2.3.4 Discretização em elementos de contorno das placas simples

A solução analítica das equações integrais é restrita a poucos problemas. Sendo assim, tem-se a necessidade de transformar o problema contínuo em discreto e resolver o problema numericamente. Dessa forma, as equações integrais de contorno serão transformadas em um sistema de equações algébricas. No qual o processo se dá pela discretização do contorno em elementos menores, sendo os deslocamentos e esforços fora dos pontos nodais aproximados por funções interpoladoras previamente escolhidas, conforme mais detalhado nos trabalhos de Paiva (1987) e Chueiri (1994).

Geralmente as funções utilizadas são a constante, a linear e a quadrática, implicando em elementos com um, dois e três pontos nodais, respectivamente.

No que diz respeito ao elemento constante, como é necessário apenas um parâmetro para definir a função aproximadora, o ponto nodal é, geralmente, escolhido no meio do elemento. Já no elemento linear é necessário a definição de dois parâmetros, sendo assim, os pontos nodais são fixados nas extremidades do elemento, caracterizando um elemento linear contínuo. No caso da presença de outro ponto nodal intermediário, fica caracterizado como elemento linear descontínuo. Ademais, os pontos são definidos nas extremidades e no meio para o elemento quadrático contínuo e quando o ponto intermediário não estiver locado exatamente no meio, será tratado como elemento quadrático descontínuo.

Conforme exposto por Chueiri (1994) em seu trabalho, os deslocamentos e esforços sobre um elemento de contorno k , podem ter sua aproximação dada pelas seguintes expressões:

$$w = [\phi_i] \{w_i\}_{\Gamma_k} \quad (2.94)$$

$$\frac{dw}{dn} = [\phi_i] \left\{ \frac{dw}{dn_i} \right\}_{\Gamma_k} \quad (2.95)$$

$$M_n = [\phi_i] \{M_{n_i}\}_{\Gamma_k} \quad (2.96)$$

$$V_n = [\phi_i] \{V_{n_i}\}_{\Gamma_k} \quad (2.97)$$

O vetor que contém as funções aproximadoras é dado por (2.98)

$$\Phi = \begin{cases} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{cases} \quad (2.98)$$

Assim, conforme abordado por Paiva (1987), as expressões das funções aproximadoras são dadas por:

Para função linear contínua;

$$\Phi_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad (2.99)$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (2.100)$$

Para função linear descontínuo;

$$\Phi_1 = \frac{1}{2} - \xi \quad (2.101)$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{2} + \xi \quad (2.102)$$

Para função quadrática;

$$\Phi_1 = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1) \quad (2.103)$$

$$\Phi_2 = (1 - \xi)(1 + \xi) \quad (2.104)$$

$$\Phi_3 = \frac{1}{2}\xi(\xi + 1) \quad (2.105)$$

Onde Φ_i está em função de coordenadas ξ , cuja origem é no centro, conforme pode ser visto na Figura 2.6.

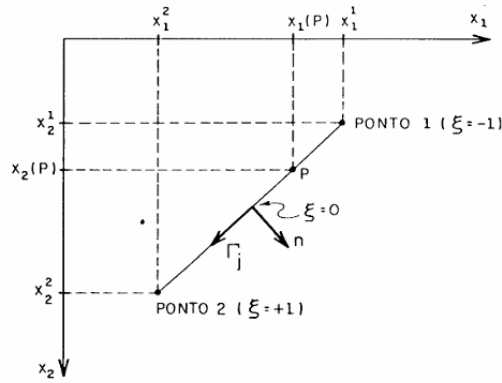


Figura 2.6 – Coordenada ξ
 Fonte: Chueiri (1994)

Os vetores de deslocamento e esforços podem ser expressos pelas equações (2.106) e (2.107) em função das funções aproximadoras (2.99) e (2.100) e dos deslocamentos e esforços nodais U^N e P^N .

$$U(q) = \Phi^T(q)U^N \quad (2.106)$$

$$P(q) = \Phi^T(q)P^N \quad (2.107)$$

Chega-se na equação (2.108) após a discretização das equações (2.82) (2.83) em Ne elementos de contorno e a substituição das variáveis por suas aproximações em cada elemento, dadas por (2.106) e (2.107).

$$C U(p) + \sum_{j=1}^{Ne} \int_{\Gamma_j} P^*(p, q) \Phi^T(q) U_j^N d\Gamma_j + \sum_{c=1}^{Nc} R_c^* w_c = \int_{\Omega} g w^*(p, q) d\Omega + \sum_{j=1}^{Ne} \int_{\Gamma_j} U^*(p, q) \Phi^T(q) P_j^N d\Gamma_j + \sum_{i=1}^{Nc} R_i w_i^* \quad (2.108)$$

Em que Ne é o número de elementos.

Sendo assim, as integrais de contorno podem ser encontradas para cada elemento Γ_j de contorno.

$$H^j(p) = \int_{\Gamma_j} P^*(p, q) \Phi^T(q) d\Gamma_j \quad (2.109)$$

$$G^j(p) = \int_{\Gamma_j} U^*(p, q) \Phi^T(q) d\Gamma_j \quad (2.110)$$

$$T(p) = \int_{\Omega} g w^*(p, q) d\Omega \quad (2.111)$$

Logo, a equação (2.108) pode ser reescrita na forma:

$$C(p)U(p) + \sum_{j=1}^{Ne} H^j(p) U_j^N + \sum_{c=1}^{Nc} R_c^* w_c = T(p) + \sum_{j=1}^{Ne} G^j(p) P_j^N + \sum_{i=1}^{Nc} R_i w_i^* \quad (2.112)$$

Após a somatória em cada elemento e o agrupamento dos coeficientes multiplicativos de um mesmo valor nodal, para todos os nós de contorno, tem-se:

$$C(p)U(p) + H(p)U + H_c(p)w_c = T(p) + G_c(p)P_c + G_c R_c \quad (2.113)$$

No qual H e G, representam, respectivamente, as matrizes que contêm os coeficientes de deslocamentos e esforços nodais, eles dependem apenas da geometria e das constantes físicas do problema. Outrora, H_c e G_c representam os coeficientes de deslocamentos e reações dos cantos. Ademais, T é o valor da integral resultante da integração do carregamento em seu domínio.

Os valores relacionados aos cantos da placa podem ser expressos em função dos valores dos nós vizinhos ao canto, sendo assim os coeficientes H_c e G_c podem ser incluídos nos coeficientes H e G da equação (2.113), resultando na equação (2.114).

$$\begin{bmatrix} H_{\Gamma\Gamma} & H_{\Gamma C} \\ H_{C\Gamma} & H_{CC} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{\Gamma} \\ u_C \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{\Gamma\Gamma} & G_{\Gamma C} \\ G_{C\Gamma} & G_{CC} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_{\Gamma} \\ p_C \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_{\Gamma} \\ f_C \end{Bmatrix} \quad (2.114)$$

Para encontrar as incógnitas, deve-se aplicar as condições de contorno.

Quadro 2.2 – Condições de contorno

Tipo de vinculação	Prescrições	Incógnitas
Engastada (C)	$w = w_{,n} = 0$	V_n, M_n
Simplesmente apoiada (S)	$w = M_n = 0$	$w_{,n}, V_n$
Livre (F)	$V_n = M_n = 0$	$w, w_{,n}$

Após a aplicação das condições de contorno citadas no Quadro 2.2, torna-se necessário realizar a separação de variáveis.

$$[A]\{X\} = 0 \quad (2.115)$$

A matriz é $[A]$ é a matriz de influência de incógnitas após a separação das variáveis e aplicação das condições de contorno e $\{X\}$ é o vetor das incógnitas do problema.

A solução não-trivial da equação (2.115) é através do determinante da matriz $[A]$, as frequências naturais são as que gerarem a extremização mínima dos determinantes, conforme apresentado no trabalho de Providaskis e Beskos (1988).

3. PLACAS DUPLAS ELASTICAMENTE CONECTADAS

3.1 Introdução

Neste capítulo são apresentadas as formulações matemáticas que descrevem o comportamento de placas duplas delgadas elasticamente conectadas por base elástica de Winkler. Inicialmente, são expostas as relações desenvolvidas por Pereira (2020) para o regime estático. Em seguida, apresenta-se a formulação correspondente ao problema dinâmico, considerando o sistema submetido a vibração simples.

3.2 Placas duplas em regime estático

Nesta seção será discutida apenas a placa dupla com núcleo elástico de Winkler.

As placas duplas interconectadas por base elástica de Winkler, conforme descrito por Pereira (2020), são compostas por uma placa superior, cujas propriedades mecânicas são usualmente identificadas pelo índice “1”, e por uma placa inferior, cujas propriedades são diferenciadas pelo índice “2”. Entre ambas se encontra a camada elástica de Winkler, responsável pelo acoplamento mecânico do sistema, conforme ilustrado na Figura 3.1.

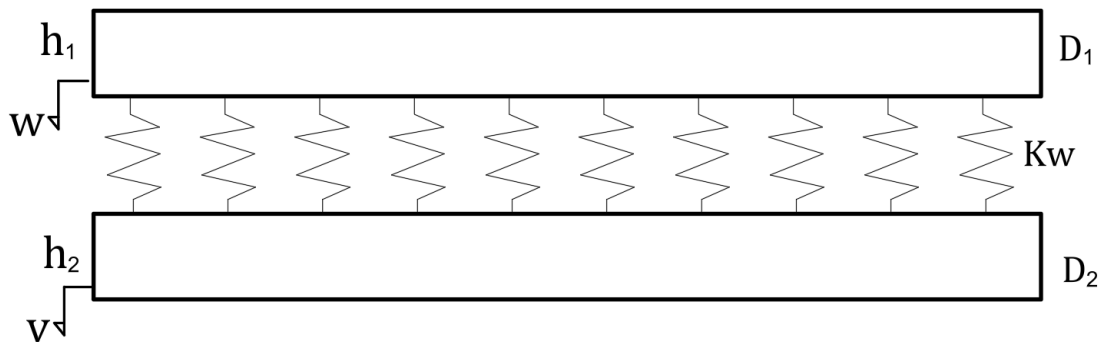


Figura 3.1 - Placa dupla interconectada por camada elástica de Winkler

Fonte: Autor

A equação governante do problema, apresentada no trabalho de Pereira (2020) é dada por:

$$D_1 \nabla^4 w + K_w (w - v) = g_1 \quad (3.1)$$

$$D_2 \nabla^4 v - K_w (w - v) = g_2 \quad (3.2)$$

As soluções fundamentais deduzidas por Pereira (2020), são:

$$\begin{bmatrix} w^{1*} & w^{2*} \\ v^{1*} & v^{2*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_2 \nabla^4 \phi + K_w \phi & K_w \phi \\ K_w \phi & D_1 \nabla^4 \phi + K_w \phi \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Onde a função escalar ϕ dada por:

$$\phi(r) = \frac{1}{2\pi z_1 z_2 D_1 D_2} \left\{ \frac{r^2 \ln(r)}{4} + \frac{kei_0(r\sqrt{z_1})}{\beta} \right\} \quad (3.4)$$

A função $kei_n(z)$ faz parte das funções de Kelvin de ordem n, o qual pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} kei_n(z) &= -\ln\left(\frac{z}{2}\right) bei_n(z) - \frac{\pi}{4} ber_n(z) \\ &- \frac{1}{2} \left(\frac{z}{2}\right)^{-n} \sum_{k=0}^{n-1} \text{sen} \left[\left(\frac{3n}{4} + \frac{k}{4} \right) \pi \right] \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{z^2}{4}\right)^k \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{k \geq 0} \text{sen} \left[\left(\frac{3n}{4} + \frac{k}{4} \right) \pi \right] \frac{\psi(k+1) + \psi(n+k+1)}{k! (n+k)!} \left(\frac{z^2}{4}\right)^k \end{aligned} \quad (3.5)$$

Onde as funções $bei_n(z)$ e $ber_n(z)$ são dadas por:

$$bei_n(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{k \geq 0} \frac{\text{sen} \left[\left(\frac{3n}{4} + \frac{k}{4} \right) \pi \right]}{k! \Gamma(k+n+1)} \left(\frac{z^2}{4}\right)^k \quad (3.6)$$

$$ber_n(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{k \geq 0} \frac{\text{cos} \left[\left(\frac{3n}{4} + \frac{k}{4} \right) \pi \right]}{k! \Gamma(k+n+1)} \left(\frac{z^2}{4}\right)^k \quad (3.7)$$

3.3 Placas duplas em regime dinâmico

Destaca-se que as soluções fundamentais para o problema de placas duplas interconectadas por base elástica de Winkler em regime dinâmico são aqui deduzidas pela primeira vez, contribuindo para o avanço teórico da modelagem desse tipo de sistema estrutural.

O processo de desenvolvimento desta seção foi separado em cinco etapas sendo elas distribuídas na seguinte forma:

Na primeira etapa, item 3.3.1, será obtida a equação de movimento do sistema de placas duplas em regime dinâmico, que será obtida através do princípio de Hamilton.

Na segunda etapa, item 3.3.2, serão apresentadas as soluções fundamentais deduzidas que serão utilizadas nas equações algébricas para a resolução do problema. Já na terceira etapa, item 3.3.3, a equação diferencial parcial de movimento será transformada em equações integrais equivalentes utilizando o Método dos Resíduos Ponderados, requisito essencial para o desenvolvimento do MEC.

Na quarta etapa, item 3.3.4, item 3.3.5 e item 3.3.6 o contorno será discretizado, e os campos de interesse interpolados transformando as equações integrais do contínuo em equações integrais discretizadas. Para a quinta etapa, item 3.3.7 e item 3.3.8, as equações integrais serão calculadas em cada elemento de contorno, gerando as matrizes de influência locais que, em seguida, serão alocadas globalmente para, a partir das condições de contorno e separação das variáveis, encontrar as incógnitas.

3.3.1 Equação de movimento

A análise da placa dupla pode ser decomposta na análise da placa superior, da placa inferior e a interação entre elas é feita pela camada elástica, conforme pode ser observado na Figura 3.2.

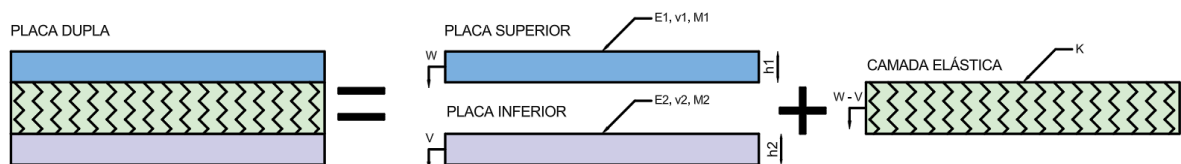


Figura 3.2 - Placas duplas e placas simples
Fonte: Autor

O Princípio de Hamilton para as placas duplas é dado por:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta\pi_{c_1} + \delta\pi_{c_2} - (\delta\pi_{p_1} + \delta\pi_{p_2} + \delta\pi_{p_{elast}}) + \delta Z_1 + \delta Z_2 + \delta Z_{visc} dt = 0 \quad (3.8)$$

Onde $\delta\pi_{c_1}$ e $\delta\pi_{c_2}$ são as variações das energias cinéticas das placas superior e inferior, $\delta\pi_{p_1}$ e $\delta\pi_{p_2}$ são as variações das energias potenciais das placas superior e inferior, $\delta\pi_{Delast}$ é a variação da energia de deformação da camada elástica e $\delta Z_1, \delta Z_2$ e δZ são as variações dos trabalhos externos das cargas aplicadas nas placas superior e inferior e variação do efeito dissipativo da camada elástica.

A contribuição de energia das placas superior e inferior, podem ser obtidas como a de duas placas simples, porém distintas. Sendo o índice 2 relativo à placa inferior e o índice 1 a placa superior.

A variação da energia de deformação produzida pela força interativa ($\delta\pi_{Delast}$) integrada no tempo causada pela diferença dos deslocamentos superiores (W) e inferiores (V), é dada por:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta\pi_{Delast} dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} K_w(W - V)\delta(W - V) d\Omega dt \quad (3.9)$$

A integral no tempo da variação do efeito dissipativo devido ao amortecimento viscoelástico (δZ_c) é dada por:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta Z_c dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} c(\dot{W} - \dot{V})\delta(W - V) d\Omega dt \quad (3.10)$$

Inserindo (3.9), (3.10), as energias cinéticas e a energia de deformação das placas superior e inferior no princípio de Hamilton (3.8), fica:

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_{\Omega} \left[-\rho_1 h_1 \ddot{W} + \frac{1}{12} \rho_1 h_1^3 \ddot{W}_{,uu} + M_{ij,ij} - K_w(W - V) + c(\dot{W} - \right. \right. \\ & \left. \left. \dot{V}) \right] \delta W d\Omega + \int_{\Omega} \left[-\rho_2 h_2 \ddot{V} + \frac{1}{12} \rho_2 h_2^3 \ddot{V}_{,uu} + T_{ij,ij} + K_w(W - V) - \right. \right. \\ & \left. \left. c(\dot{W} - \dot{V}) \right] \delta V d\Omega + \int_{\Gamma_2} (V_n - \bar{V}_n) \delta W d\Gamma + \int_{\Gamma_2} (Q_n - \bar{Q}_n) \delta V d\Gamma - \right. \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\int_{\Gamma_2} (M_n - \overline{M}_n) \delta \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma_2} (T_n - \overline{T}_n) \delta \frac{\partial V}{\partial n} d\Gamma + (Rc_{1k} - \overline{Rc}_{1k}) \delta W_k + (Rc_{2k} - \overline{Rc}_{2k}) \delta V_k \} dt = 0$$

Sabendo que os valores das variações dos deslocamentos δW e δV e das rotações $\delta \frac{\partial w}{\partial n}$ e $\delta \frac{\partial V}{\partial n}$ são arbitrários, as seguintes imposições para o domínio são feitas.

$$-M_{ij,ij} - \rho_1 h_1 \ddot{W} + \frac{1}{12} \rho_1 h_1^3 \nabla^2 \ddot{W} + c(\dot{W} - \dot{V}) - K_w(W - V) = 0 \quad (3.12)$$

$$-T_{ij,ij} - \rho_2 h_2 \ddot{V} + \frac{1}{12} \rho_2 h_2^3 \nabla^2 \ddot{V} - c(\dot{W} - \dot{V}) + K_w(W - V) = 0 \quad (3.13)$$

Para o contorno são feitas as seguintes imposições

$$\overline{V}_n - V_n = 0 \quad (3.14)$$

$$\overline{M}_n - M_n = 0 \quad (3.15)$$

$$\overline{Q}_n - Q_n = 0 \quad (3.16)$$

$$\overline{T}_n - T_n = 0 \quad (3.17)$$

$$\overline{W} - W = 0 \quad (3.18)$$

$$\overline{W}_{,n} - W_{,n} = 0 \quad (3.19)$$

$$\overline{V} - V = 0 \quad (3.20)$$

$$\overline{V}_n - V_{,n} = 0 \quad (3.21)$$

$$Rc_k - \overline{Rc_k} = 0 \quad (3.22)$$

Para um carregamento periódico as equações de movimento (3.12) e (3.13) podem migrar do domínio do tempo para o domínio da frequência, conforme (2.70).

$$-M_{ij,ij} - \rho_1 h_1 \omega^2 w + \frac{\rho_1 h_1^3 \omega^2 \nabla^2 w}{12} - i\omega c(w - v) + Kw(w - v) = 0 \quad (3.23)$$

$$-T_{ij,ij} - \rho_2 h_2 \omega^2 v + \frac{\rho_2 h_2^3 \omega^2 \nabla^2 v}{12} + i\omega c(w - v) - Kw(w - v) = 0 \quad (3.24)$$

As equações de movimento (3.23) e (3.24) para um problema harmônico e periódico, como trata-se de placas delgadas a influência da energia cinética rotativa torna-se ínfima, desprezando-a tem-se:

$$-M_{ij,ij} + K_w(w - v) - S_1 w = 0 \quad (3.25)$$

$$-T_{ij,ij} - K_w(w - v) - S_2 v = 0 \quad (3.26)$$

Sendo $S_1 = \rho_1 h_1 \omega^2$ e $S_2 = \rho_2 h_2 \omega^2$

Da relação entre o momento fletor e a curvatura, tira-se que:

$$M_{ij,ij} = -D_1 \nabla^4 W \quad (3.27)$$

$$T_{ij,ij} = -D_2 \nabla^4 V \quad (3.28)$$

Substituindo (3.27) e (3.28) em (3.25) e (3.26), respectivamente, tem-se:

$$D_1 \nabla^4 W + K_w(w - v) - S_1 w = 0 \quad (3.29)$$

$$D_2 \nabla^4 V - K_w(w - v) - S_2 v = 0 \quad (3.30)$$

O sistema matricial das equações (2.112) e (2.113) é dado por:

$$\begin{bmatrix} D_1 \nabla^4 + K_w - S_1 & -K_w \\ -K_w & D_2 \nabla^4 + K_w - S_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

3.3.2 Solução fundamental das placas duplas

Diferente da solução fundamental para placas simples delgadas em vibração, no caso das placas duplas é necessário realizar o desacoplamento das equações primeiro. O desacoplamento pode ser feito por três caminhos: o Método de Galerkin, a Transformada de Laplace e o Método de Hörmander (1963), sendo o último utilizado nesse trabalho.

O processo de desacoplamento adotado neste trabalho fundamenta-se na metodologia apresentada por Pereira (2020) para análise estática de placas duplas elasticamente conectadas, mantendo-se a mesma simbologia empregada pelo autor. A principal modificação reside na equação governante considerada, que, nesta pesquisa, é formulada no regime dinâmico.

Seja um sistema de placas duplas, no domínio infinito, submetido a uma carga pontual g^{1*} na placa superior, conforme pode ser visto na Figura 3.3, naturalmente serão gerados, relativo a placa superior, os deslocamentos (w^{1*}, v^{1*}, n_k) , translação e rotação, respectivamente, e esforços (M^{1*}_n, V^{1*}_n) , momento e esforço cortante, respectivamente. Na placa inferior serão gerados os deslocamentos (v^{1*}, v^{1*}, n_k) , translação e rotação, respectivamente, e esforços (T^{1*}_n, Q^{1*}_n) , momento e esforço cortante, respectivamente. De forma similar, para um carregamento g^{2*} , serão gerados os deslocamentos (w^{2*}, w^{2*}, n_k) e (v^{2*}, v^{2*}, n_k) e esforços (M^{2*}_n, V^{2*}_n) e (T^{2*}_n, Q^{2*}_n) .

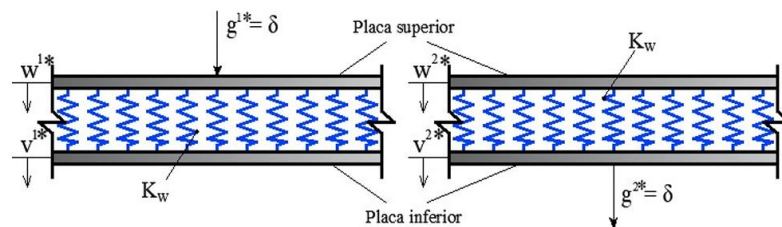


Figura 3.3 - Problema fundamental

Fonte: (Pereira, 2020)

Adaptando a equação (3.31) para o problema fundamental e colocando na forma matricial, fica (3.32), no qual $[B]$ é a matriz dos operadores, $[W^*]$ é a matriz de influência dos

deslocamentos e rotações, $[I]$ representa a matriz identidade e $\delta(p, q)$ a distribuição delta de Dirac.

$$\begin{bmatrix} D_1 \nabla^4 + K_w - S_1 & -K_w \\ -K_w & D_2 \nabla^4 + K_w - S_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^{1*} & w^{2*} \\ v^{1*} & v^{2*} \end{bmatrix} = \delta(p, q) \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix} \quad (3.32)$$

$$[B][W^*] = \delta(p, q)[I] \quad (3.33)$$

Para realizar o desacoplamento da equação (3.32), adota-se o método de Hörmander, o qual consiste em resolver o sistema por meio da introdução de uma função escalar auxiliar, denotada por $\phi(p, q)$. Nesse procedimento, a solução vetorial é expressa em termos da adjunta da matriz de operadores, permitindo converter o sistema matricial original em uma equação escalar equivalente.

$$[W^*] = [B^{cof}]^T \phi(p, q) \quad (3.34)$$

$$[B^{cof}]^T = [B]^{-1} \det[B] \quad (3.35)$$

Sendo $[B^{cof}]^T$ a adjunta da matriz $[B]$.

Após substituir a expressão na relação matricial da equação (3.34) na equação (3.33), é formada a equação:

$$\begin{aligned} [B][B]^{-1} \det[B] \phi(p, q) &= \delta(p, q)[I] \\ \det[B] \phi(p, q) &= \delta(p, q) \end{aligned} \quad (3.36)$$

Destarte, calculado o determinante da matriz de operadores $[B]$, e substituindo em (3.36), obtém-se:

$$\left\{ z^2 + \left[\left(\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2} \right) K_w - \left(\frac{S_1}{D_1} + \frac{S_2}{D_2} \right) \right] z + \frac{S_1 S_2 - (S_2 + S_1) K_w}{D_1 D_2} \right\} \phi = \frac{\delta(p, q)}{D_1 D_2} \quad (3.37)$$

Sumariamente, a forma fatorada do polinômio (3.37), é dada por:

$$(\nabla^4 - z_1)(\nabla^4 - z_2)\phi = \frac{\delta(p, q)}{D_1 D_2} \quad (3.38)$$

As raízes da equação (3.38) são dadas por:

$$\begin{cases} z_1 = -\frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2} \right) K_w - \left(\frac{S_1}{D_1} + \frac{S_2}{D_2} \right) \right) + \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \\ z_2 = -\frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2} \right) K_w - \left(\frac{S_1}{D_1} + \frac{S_2}{D_2} \right) \right) - \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \end{cases} \quad (3.39)$$

$$\Delta = \left(\left(\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2} \right) K_w - \left(\frac{S_1}{D_1} + \frac{S_2}{D_2} \right) \right)^2 - 4 \frac{S_1 S_2 - (S_2 + S_1) K_w}{D_1 D_2}$$

Observando-se a equação (3.35) pode-se notar que z_1 será sempre maior que zero. Entretanto, z_2 pode assumir valores negativos, nulo e positivos. Assim, para um estudo da natureza de z_2 será estudado em que condições tem-se o valor nulo.

$$-\frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2} \right) K_w - \left(\frac{S_1}{D_1} + \frac{S_2}{D_2} \right) \right) - \frac{\sqrt{\Delta}}{2} = 0 \quad (3.40)$$

A solução de (3.37) define o valor em que z_2 é nulo implicando que $K_w \lim = \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2}$.

Com isso é possível definir os intervalos de validade dos sinais da raiz z_2 . Se $K_w > K_w \lim$ implica que $z_2 < 0$, quando $K_w < K_w \lim$ implica que $z_2 > 0$.

$$\phi = \frac{1}{(\beta_1 - \beta_2) D_1 D_2} [\phi_1 - \phi_2] \quad (3.41)$$

- Caso I

Para $z_2 > 0$, tem-se a função escalar fundamental dada por:

$$\phi_1 = i \frac{1}{8\beta_1^2} J_0(\beta_1 r) + \frac{1}{8\beta_1^2} Y_0(\beta_1 r) + \frac{1}{4\pi\beta_1^2} K_0(\beta_1 r) \quad (3.42)$$

$$\phi_2 = i \frac{1}{8\beta_2^2} J_0(\beta_2 r) + \frac{1}{8\beta_2^2} Y_0(\beta_2 r) + \frac{1}{4\pi\beta_2^2} K_0(\beta_2 r) \quad (3.43)$$

Onde $\beta_1 = \sqrt[4]{z_1}$ e $\beta_2 = \sqrt[4]{z_2}$.

Sendo a função de Bessel de primeira espécie $J_n(z)$:

$$J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+n+1)} \left(\frac{z}{4}\right)^{2k+n} \quad (3.44)$$

Com n sendo a ordem da função, z a variável e $\Gamma(n)$ a função Gamma, dada por:

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad (3.45)$$

A função de Bessel de segunda espécie $Y_n(z)$ pode ser descrita da seguinte forma:

$$Y_n(z) = -\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{-n}}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{z^2}{4}\right)^k + \frac{2}{\pi} J_n(z) \ln \frac{z}{2} - \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^n}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (\psi(k+1) + \psi(n+k+1)) \frac{\left(-\frac{z^2}{4}\right)^k}{k!(n+k)!} \quad (3.46)$$

Onde $\psi(n)$ é a função Digamma que é dada por:

$$\psi(n) \sim \ln n - \frac{1}{2n} \quad (3.47)$$

A função de Bessel modificada de segunda espécie pode ser escrita como:

$$K_n(z) = (-1)^{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}}{k!(n+k)!} \left\{ \ln \left(\frac{z}{2}\right) - \frac{1}{2} [\varphi(r+1) + \varphi(n+r+1)] \right\} \quad (3.48)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k (n-k-1)!}{k!} \left(\frac{2}{z}\right)^{n-2k}$$

Onde:

$$\begin{cases} \varphi(r+1) = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{r}\right) - \gamma \\ \varphi(1) = -\gamma \\ \varphi(n+r+1) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n+r} - \gamma \end{cases} \quad (3.49)$$

Para o qual γ é conhecida como a constante de Euler-Mascheroni denotada aqui como:

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \right) \quad (3.50)$$

Cujo valor aproximado adotado para o trabalho será $\gamma = 0,5772156649$.

- Caso II

Para $z_2 < 0$ ϕ_1 é o mesmo da equação (3.42), já ϕ_2 é dado por:

$$\phi_2 = \frac{1}{2\pi\beta_2^2} kei_0(\beta_2 r) \quad (3.51)$$

Onde $\beta_2 = \sqrt[4]{-z_2}$

- Caso III

Para $z_2 = 0$ ϕ_1 é o mesmo da equação (3.42), já ϕ_2 é dado por:

$$\phi_2 = \frac{r^2}{8\pi} \ln(r) \quad (3.52)$$

Através das soluções apresentadas na equação (3.41) e da relação da equação (3.34) é possível encontrar as expressões finais para as soluções fundamentais de deslocamentos, como mostrado na equação.

$$\begin{bmatrix} w^{1*} & w^{2*} \\ v^{1*} & v^{2*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_2 \nabla^4 \phi + K_w \phi - S_2 \phi & K_w \phi \\ K_w \phi & D_1 \nabla^4 \phi + K_w \phi - S_1 \phi \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

Conforme a equação matricial (3.53) tem-se:

$$w^{1*} = D_2 \nabla^4 \phi + K_w \phi - S_2 \phi \quad (3.54)$$

$$w^{2*} = K_w \phi \quad (3.55)$$

$$v^{1*} = K_w \phi \quad (3.56)$$

$$v^{2*} = D_1 \nabla^4 \phi + K_w \phi - S_1 \phi \quad (3.57)$$

O laplaciano das funções de Bessel, vide Abramowitz e Stegun (1972), e das funções de Kelvin, vide Whyte (2021), utilizadas, são dados por:

$$\nabla^2 K_0(\beta r) = \beta^2 K_0(\beta r) \quad (3.58)$$

$$\nabla^2 J_0(\beta r) = -\beta^2 J_0(\beta r) \quad (3.59)$$

$$\nabla^2 Y_0(\beta r) = -\beta^2 Y_0(\beta r) \quad (3.60)$$

$$\nabla^2 Kei_0(\beta r) = \beta^2 Ker_0(\beta r) \quad (3.61)$$

$$\nabla^2 Ker_0(\beta r) = -\beta^2 Kei_0(\beta r) \quad (3.62)$$

Sendo assim, os bi-harmonicos dessas funções de Bessel e de Kelvin, são dados por:

$$\nabla^4 K_0(\beta r) = \beta^4 K_0(\beta r) \quad (3.63)$$

$$\nabla^4 J_0(\beta r) = \beta^4 J_0(\beta r) \quad (3.64)$$

$$\nabla^4 Y_0(\beta r) = \beta^4 Y_0(\beta r) \quad (3.65)$$

$$\nabla^4 Kei_0(\beta r) = -\beta^4 Kei_0(\beta r) \quad (3.66)$$

$$\nabla^4 Ker_0(\beta r) = -\beta^4 Ker_0(\beta r) \quad (3.67)$$

Aplicando as relações (3.63), (3.64) e (3.65) no bi-harmonico da solução fundamental, tem-se:

$$\nabla^4 \phi = \frac{1}{(z_1 - z_2)D_1 D_2} [\beta_1^4 \phi_1 - \beta_2^4 \phi_2] \quad (3.68)$$

Substituindo as equações (3.41) e (3.68) nas equações (3.54), (3.55), (3.56) e (3.57), chega-se nos deslocamentos fundamentais

$$w^{1*} = \frac{1}{(z_1 - z_2)D_1 D_2} \{D_2 [\beta_1^4 \phi_1 - \beta_2^4 \phi_2] + K_w [\phi_1 - \phi_2] - S_2 [\phi_1 - \phi_2]\} \quad (3.69)$$

$$w^{2*} = K_w [\phi_1 - \phi_2] \quad (3.70)$$

$$v^{1*} = K_w [\phi_1 - \phi_2] \quad (3.71)$$

$$v^{2*} = \frac{1}{(z_1 - z_2)D_1 D_2} \{D_1 [\beta_1^4 \phi_1 - \beta_2^4 \phi_2] + K_w [\phi_1 - \phi_2] - S_1 [\phi_1 - \phi_2]\} \quad (3.72)$$

Sendo as rotações fundamentais em relação a direção normal, dadas por:

$$w_{,n}^{1*} = \frac{d}{dr} w^{1*} r_{,n} \quad (3.73)$$

$$w_{,n}^{2*} = \frac{d}{dr} w^{2*} r_{,n} \quad (3.74)$$

$$v_{,n}^{1*} = \frac{d}{dr} v^{1*} r_{,n} \quad (3.75)$$

$$v_{,n}^{2*} = \frac{d}{dr} v^{2*} r_{,n} \quad (3.76)$$

As derivadas dos deslocamentos verticais fundamentais em relação ao raio diretor, são dadas por:

$$\frac{d}{dr} w^{1*} = \frac{1}{(z_1 - z_2)D_1 D_2} \left\{ D_2 \left[\beta_1^4 \frac{d}{dr} \phi_1 - \beta_2^4 \frac{d}{dr} \phi_2 \right] + K_w \left[\frac{d}{dr} \phi_1 - \frac{d}{dr} \phi_2 \right] - S_2 \left[\frac{d}{dr} \phi_1 - \frac{d}{dr} \phi_2 \right] \right\} \quad (3.77)$$

$$\frac{d}{dr} w^{2*} = K_w \left[\frac{d}{dr} \phi_1 - \frac{d}{dr} \phi_2 \right] \quad (3.78)$$

$$\frac{d}{dr} v^{1*} = K_w \left[\frac{d}{dr} \phi_1 - \frac{d}{dr} \phi_2 \right] \quad (3.79)$$

$$\frac{d}{dr} v^{2*} = \frac{1}{(z_1 - z_2)D_1 D_2} \left\{ D_1 \left[\beta_1^4 \frac{d}{dr} \phi_1 - \beta_2^4 \frac{d}{dr} \phi_2 \right] + K_w \left[\frac{d}{dr} \phi_1 - \frac{d}{dr} \phi_2 \right] - S_1 \left[\frac{d}{dr} \phi_1 - \frac{d}{dr} \phi_2 \right] \right\} \quad (3.80)$$

Com as derivadas $\frac{d}{dr} \phi_1$ e $\frac{d}{dr} \phi_2$ dadas para o caso I, por:

$$\frac{d}{dr} \phi_1 = -\beta_1 [i c_1 J_1(\beta_1 r) + c_1 Y_1(\beta_1 r) + c_2 K_1(\beta_1 r)] \quad (3.81)$$

$$\frac{d}{dr} \phi_2 = -\beta_2 [i c_1 J_1(\beta_2 r) + c_1 Y_1(\beta_2 r) + c_2 K_1(\beta_2 r)] \quad (3.82)$$

Para o caso II a derivada $\frac{d}{dr} \phi_2$ é dada por:

$$\frac{d}{dr}\phi_2 = \beta_2 \frac{1}{2\pi\beta_2^2} Kei_0(\beta_2 r) \quad (3.83)$$

A partir das soluções fundamentais para os deslocamentos transversais das placas, obtêm-se as expressões correspondentes aos momentos fletores fundamentais por meio das relações constitutivas da teoria clássica de placas delgadas. Essas expressões são determinadas em função das derivadas dos deslocamentos fundamentais e das propriedades mecânicas de cada placa, representadas pelas rigidezes à flexão D_1 e D_2 , bem como pelos coeficientes de Poisson ν_1 e ν_2 .

$$M_n^{1*} = -D_1 \left\{ \frac{d^2 w^{1*}}{dr^2} [\nu_1 + (1 - \nu_1)r_n^2] + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} w^{1*} [\nu_1 + (1 - \nu_1)r_s^2] \right\} \quad (3.84)$$

$$M_n^{2*} = -D_1 \left\{ \frac{d^2 v^{1*}}{dr^2} [\nu_1 + (1 - \nu_1)r_n^2] + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} v^{1*} [\nu_1 + (1 - \nu_1)r_s^2] \right\} \quad (3.85)$$

$$T_n^{1*} = -D_2 \left\{ \frac{d^2 w^{2*}}{dr^2} [\nu_2 + (1 - \nu_2)r_n^2] + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} w^{2*} [\nu_2 + (1 - \nu_2)r_s^2] \right\} \quad (3.86)$$

$$T_n^{2*} = -D_2 \left\{ \frac{d^2 v^{2*}}{dr^2} [\nu_2 + (1 - \nu_2)r_n^2] + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} v^{2*} [\nu_2 + (1 - \nu_2)r_s^2] \right\} \quad (3.87)$$

Com M_n sendo o momento fletor na placa superior e T_n o momento fletor na placa inferior.

De semelhante modo, é aplicada a mesma notação dos momentos fletores para os momentos volventes.

$$M_{ns}^{1*} = -D_1 (1 - \nu_1) r_n r_s \left(\frac{d^2 w^{1*}}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dw^{1*}}{dr} \right) \quad (3.88)$$

$$M_{ns}^{2*} = -D_1 (1 - \nu_1) r_n r_s \left(\frac{d^2 v^{1*}}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dv^{1*}}{dr} \right) \quad (3.89)$$

$$T_{ns}^{1*} = -D_2(1 - \nu_2) r_{,n} r_{,s} \left(\frac{d^2 w^{2*}}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dw^{2*}}{dr} \right) \quad (3.90)$$

$$T_{ns}^{2*} = -D_2(1 - \nu_2) r_{,n} r_{,s} \left(\frac{d^2 v^{2*}}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dv^{2*}}{dr} \right) \quad (3.91)$$

As soluções fundamentais dos esforços cortantes de Kirchhoff na placa superior e inferior ficam:

$$\begin{aligned} V_n^{1*} = -D_1(1 - \nu_1) \left\{ [(1 - \nu_1)^{-1} + r_{,s}^2] \left(\frac{d^3 w^{1*}}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w^{1*}}{dr^2} - \right. \right. \\ \left. \left. \frac{1}{r^2} \frac{d w^{1*}}{dr} \right) r_{,n} + (1 - 4 r_{,s}^2) \left(\frac{1}{r} \frac{d^2 w^{1*}}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{d w^{1*}}{dr} \right) r_{,n} - \frac{1}{R} \left(\frac{d^2 w^{1*}}{dr^2} - \right. \right. \\ \left. \left. \frac{1}{r} \frac{d w^{1*}}{dr} \right) [1 - 2 r_{,s}^2] \right\} \end{aligned} \quad (3.92)$$

$$\begin{aligned} Q_n^{1*} = -D_2(1 - \nu_2) \left\{ [(1 - \nu_2)^{-1} + r_{,s}^2] \left(\frac{d^3 v^{1*}}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 v^{1*}}{dr^2} - \right. \right. \\ \left. \left. \frac{1}{r^2} \frac{d v^{1*}}{dr} \right) r_{,n} + [1 - 4 r_{,s}^2] \left(\frac{1}{r} \frac{d^2 v^{1*}}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{d v^{1*}}{dr} \right) r_{,n} - \frac{1}{R} \left(\frac{d^2 v^{1*}}{dr^2} - \right. \right. \\ \left. \left. \frac{1}{r} \frac{d v^{1*}}{dr} \right) [1 - 2 r_{,s}^2] \right\} \end{aligned} \quad (3.93)$$

$$\begin{aligned} V_n^{2*} = -D_1(1 - \nu_1) \left\{ [(1 - \nu_1)^{-1} + r_{,s}^2] \left(\frac{d^3 w^{2*}}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w^{2*}}{dr^2} - \right. \right. \\ \left. \left. \frac{1}{r^2} \frac{d w^{2*}}{dr} \right) r_{,n} + (1 - 4 r_{,s}^2) \left(\frac{1}{r} \frac{d^2 w^{2*}}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{d w^{2*}}{dr} \right) r_{,n} - \frac{1}{R} \left(\frac{d^2 w^{2*}}{dr^2} - \right. \right. \\ \left. \left. \frac{1}{r} \frac{d w^{2*}}{dr} \right) [1 - 2 r_{,s}^2] \right\} \end{aligned} \quad (3.94)$$

$$\begin{aligned}
Q_n^{2*} = & -D_2(1 - \nu_2) \left\{ [(1 - \nu_2)^{-1} + r_{,s}^2] \left(\frac{d^3}{dr^3} v^{2*} + \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} v^{2*} - \right. \right. \\
& \left. \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} v^{2*} \right) r_{,n} + [1 - 4 r_{,s}^2] \left(\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} v^{2*} - \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} v^{2*} \right) r_{,n} - \frac{1}{R} \left(\frac{d^2}{dr^2} v^{2*} - \right. \\
& \left. \frac{1}{r} \frac{d}{dr} v^{2*} \right) [1 - 2 r_{,s}^2] \left. \right\}
\end{aligned} \tag{3.95}$$

Sendo V_n e Q_n os esforços cortantes equivalentes de Kirchhoff da placa superior e inferior. As soluções fundamentais tanto de deslocamento quanto de esforços possuem diferentes níveis de singularidade desde as fracas até as hipersingularidades. O desenvolvimento deste assunto é descrito na seção 3.3.3.

Com as derivadas do raio diretor em relação a direção normal (n) e tangente (s) dadas por:

$$r_{,n} = r_{,i} n_i \tag{3.96}$$

$$r_{,s} = r_{,j} s_j \tag{3.97}$$

3.3.3 Equações integrais para placas duplas em regime dinâmico

Neste tópico, são estabelecidas as formulações integrais e algébricas empregadas na análise dinâmica das placas duplas interconectadas por camada elástica de Winkler. Primeiramente, serão desenvolvidas as equações integrais em pontos no domínio e depois serão desenvolvidas as equações integrais em pontos no contorno.

- Equações integrais em um ponto no domínio

Há duas formas de transformar as equações diferenciais parciais do problema em equações integrais equivalentes: uma alternativa é aplicando o Teorema da Reciprocidade de Betti, que foi usado na análise estática de placas por Paiva (1987) para placas simples e por Pereira (2020) para placas duplas elasticamente conectadas. Já a segunda opção de

transformação é aplicando o Método dos Resíduos Ponderados, como realizado por Karam (1986). Para esse trabalho, optou-se por utilizar o Método dos Resíduos Ponderados.

O procedimento realizado a seguir será de forma análoga ao que foi feito por Souza (2019) para placas simples delgadas apoiadas em base elástica de Kerr, acrescentando a ponderação no contorno. Para o Método dos Resíduos Ponderados serão utilizadas as equações de movimentos (2.108) e (2.109) e as contribuições de contorno, ponderadas pelos deslocamentos fundamentais w^{*1} e v^{*1} , respectivamente.

A princípio serão desenvolvidas as equações para a carga fundamental atuando na placa superior, gerando os deslocamentos w^{*1} e v^{*1} . Em seguida, como o processo de obtenção das equações integrais é o mesmo para a carga fundamental atuando na placa inferior, onde serão gerados os deslocamentos w^{*2} e v^{*2} .

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \{ [-M_{ij,ij} - K_w(w - v) + S_1 w] w^{*1} + [-T_{ij,ij} + K_w(w - v) + \\
& S_2 v] v^{*1} \} d\Omega + \int_{\Gamma_1} [w(q) - \bar{w}(q)] V_n^{*1}(p, q) d\Gamma - \int_{\Gamma_1} [w_{,n}(q) - \\
& \bar{w}_{,n}(q)] M_n^{*1}(p, q) d\Gamma - \int_{\Gamma_2} [V_n(q) - \bar{V}_n(q)] w^{*1}(p, q) d\Gamma + \int_{\Gamma_2} [M_n(q) - \\
& \bar{M}_n(q)] w_n^{*1}(p, q) d\Gamma + \int_{\Gamma_1} [v(q) - \bar{v}(q)] Q_n^{*1}(p, q) d\Gamma - \int_{\Gamma_1} [v_{,n}(q) - \\
& \bar{v}_{,n}(q)] T_n^{*1}(p, q) d\Gamma - \int_{\Gamma_2} [Q_n(q) - \bar{Q}_n(q)] v^{*1}(p, q) d\Gamma + \int_{\Gamma_2} [T_n(q) - \\
& \bar{T}_n(q)] v_n^{*1}(p, q) d\Gamma = 0
\end{aligned} \tag{3.98}$$

No qual \bar{w} , $\bar{w}_{,n}$, $\bar{V}_n(q)$ e $\bar{M}_n(q)$ referem-se, respectivamente, aos deslocamentos e esforços da placa superior prescritos e \bar{v} , $\bar{v}_{,n}$, $\bar{Q}_n(q)$ e $\bar{T}_n(q)$ referem-se, respectivamente, aos deslocamentos e esforços da placa inferior prescritos.

Outra forma de escrever a equação:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} -M_{ij,ij} w^{*1} d\Omega + \int_{\Omega} -T_{ij,ij} v^{*1} d\Omega + \int_{\Omega} \{ [(-K_w(w - v) + S_1 w - \\
& g_1)] w^{*1} + [K_w(w - v) + S_2 v] v^{*1} \} d\Omega + \int_{\Gamma_1} [w(q) - \bar{w}(q)] V_n^{*1}(p, q) d\Gamma -
\end{aligned} \tag{3.99}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma_1} [w_{,n}(q) - \bar{w}_{,n}(q)] M_n^{*1}(p, q) d\Gamma - \int_{\Gamma_2} [V_n(q) - \bar{V}_n(q)] w^{*1}(p, q) d\Gamma + \\
& \int_{\Gamma_2} [M_n(q) - \bar{M}_n(q)] w_{,n}^{*1}(p, q) d\Gamma + \int_{\Gamma_1} [v(q) - \bar{v}(q)] Q_n^{*1}(p, q) d\Gamma - \\
& \int_{\Gamma_1} [v_{,n}(q) - \bar{v}_{,n}(q)] T_n^{*1}(p, q) d\Gamma - \int_{\Gamma_2} [Q_n(q) - \bar{Q}_n(q)] v^{*1}(p, q) d\Gamma + \\
& \int_{\Gamma_2} [T_n(q) - \bar{T}_n(q)] v_{,n}^{*1}(p, q) d\Gamma = 0
\end{aligned}$$

Integrando por partes as integrais da equação (3.99) que compõem os termos $M_{ij,ij}$ e $T_{ij,ij}$, obtém-se:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} -M_{ij,ij}(q) w^{1*}(p, q) d\Omega + \int_{\Omega} -T_{ij,ij}(q) v^{1*}(p, q) d\Omega = \\
& - \int_{\Gamma} M_{ij,i}(q) w^{1*}(p, q) n_j d\Gamma - \int_{\Gamma} T_{ij,i}(q) v^{1*}(p, q) n_j d\Gamma + \\
& \int_{\Omega} M_{ij,i}(q) w_{,j}^{1*}(p, q) d\Omega + \int_{\Omega} T_{ij,i}(q) v_{,j}^{1*}(p, q) d\Omega
\end{aligned} \tag{3.100}$$

Integrando por partes as integrais no domínio que estão à direita na equação (3.100):

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} -M_{ij,ij}(q) w^{1*}(p, q) d\Omega + \int_{\Omega} -T_{ij,ij}(q) v^{1*}(p, q) d\Omega = \\
& \int_{\Gamma} -M_{ij,i}(q) w^{1*}(p, q) n_j d\Gamma + \int_{\Gamma} M_{ij}(q) w_{,j}^{1*}(p, q) n_i d\Gamma + \\
& \int_{\Gamma} -T_{ij,i}(q) v^{1*}(p, q) n_j d\Gamma + \int_{\Gamma} T_{ij}(q) v_{,j}^{1*}(p, q) n_i d\Gamma - \\
& \int_{\Omega} M_{ij}(q) w_{,ji}^{1*}(p, q) d\Omega - \int_{\Omega} T_{ij}(q) v_{,ji}^{1*}(p, q) d\Omega
\end{aligned} \tag{3.101}$$

Da relação entre momento e curvatura, têm-se as seguintes relações de reciprocidade:

$$M_{ij}(q) w_{,ji}^{1*}(p, q) = M_{ij}^{1*}(p, q) w_{,ji}(q) \tag{3.102}$$

$$T_{ij}(q) v_{,ji}^{1*}(p, q) = T_{ij}^{1*}(p, q) v_{,ji}(q) \tag{3.103}$$

Substituindo (3.102) e (3.103) em (3.101), chega-se em:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} -M_{ij,ij}(q) w^{1*}(p, q) d\Omega + \int_{\Omega} -T_{ij,ij}(q) v^{1*}(p, q) d\Omega = \\
& \int_{\Gamma} -M_{ij,i}(q) w^{1*}(p, q) n_j + M_{ij}(q) w_{,j}^{1*}(p, q) n_i d\Gamma + \\
& \int_{\Gamma} -T_{ij,i}(q) v^{1*}(p, q) n_j + T_{ij}(q) v_{,j}^{1*}(p, q) n_i d\Gamma - \\
& \int_{\Omega} w_{,ji}(q) M_{ij}^{1*}(p, q) d\Omega - \int_{\Omega} v_{,ji}(q) T_{ij}^{1*}(p, q) d\Omega
\end{aligned} \tag{3.104}$$

Integrando por partes as integrais no domínio que estão à direita na equação (3.104):

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} -M_{ij,ij}(q) w^{1*}(p, q) d\Omega + \int_{\Omega} -T_{ij,ij}(q) v^{1*}(p, q) d\Omega = \\
& \int_{\Gamma} -M_{ij,i}(q) w^{1*}(p, q) n_j + M_{ij}(q) w_{,j}^{1*}(p, q) n_i - w_{,j}(q) M_{ij}^{1*}(p, q) n_i d\Gamma + \\
& \int_{\Gamma} -T_{ij,i}(q) v^{1*}(p, q) n_j + T_{ij}(q) v_{,j}^{1*}(p, q) n_i - v_{,j}(q) T_{ij}^{1*}(p, q) n_i d\Gamma + \\
& \int_{\Omega} w_{,j}(q) M_{ij,i}^{1*}(p, q) d\Omega + \int_{\Omega} v_{,j}(q) T_{ij,i}^{1*}(p, q) d\Omega
\end{aligned} \tag{3.105}$$

Integrando por partes as integrais no domínio que estão à direita na equação (3.105):

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} -M_{ij,ij}(q) w^{1*}(p, q) d\Omega + \int_{\Omega} -T_{ij,ij}(q) v^{1*}(p, q) d\Omega = \\
& \int_{\Gamma} -M_{ij,i}(q) w^{1*}(p, q) n_j + M_{ij}(q) w_{,j}^{1*}(p, q) n_i - w_{,j}(q) M_{ij}^{1*}(p, q) n_i + \\
& w(q) M_{ij,i}^{1*}(p, q) n_j d\Gamma + \int_{\Gamma} -T_{ij,i}(q) v^{1*}(p, q) n_j + T_{ij}(q) v_{,j}^{1*}(p, q) n_i - \\
& v_{,j}(q) T_{ij}^{1*}(p, q) n_i + v(q) T_{ij,i}^{1*}(p, q) n_j d\Gamma - \int_{\Omega} w(q) M_{ij,ij}^{1*}(p, q) d\Omega - \\
& \int_{\Omega} v(q) T_{ij,ij}^{1*}(p, q) d\Omega
\end{aligned} \tag{3.106}$$

Substituindo a equação (3.106) na equação (3.99), obtém-se:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} w(q) M_{ij,ij}^{1*}(p, q) d\Omega - \int_{\Omega} v(q) T_{ij,ij}^{1*}(p, q) d\Omega + \int_{\Omega} \{[-K_w(w - v) + \\
& S_1 w]w^{*1} + [K_w(w - v) + S_2 v]v^{*1}\} d\Omega + \int_{\Gamma} [-M_{ij,i}(q)w^{1*}(p, q)n_j + \\
& M_{ij}(q)w_j^{1*}(p, q)n_i - w_j(q)M_{ij}^{1*}(p, q)n_i + w(q)M_{ij,i}^{1*}(p, q)n_j] d\Gamma + \\
& \int_{\Gamma} [-T_{ij,i}(q)v^{1*}(p, q)n_j + T_{ij}(q)v_j^{1*}(p, q)n_i - v_j(q)T_{ij}^{1*}(p, q)n_i + \\
& v(q)T_{ij,i}^{1*}(p, q)n_j] d\Gamma + \int_{\Gamma_1} [w(q) - \bar{w}(q)]V_n^{*1}(p, q) d\Gamma - \int_{\Gamma_1} [w_n(q) - \\
& \bar{w}_n(q)]M_n^{*1}(p, q) d\Gamma - \int_{\Gamma_2} [V_n(q) - \bar{V}_n(q)]w^{*1}(p, q) d\Gamma + \int_{\Gamma_2} [M_n(q) - \\
& \bar{M}_n(q)]w_n^{*1}(p, q) d\Gamma + \int_{\Gamma_1} [v(q) - \bar{v}(q)]Q_n^{*1}(p, q) d\Gamma - \int_{\Gamma_1} [v_n(q) - \\
& \bar{v}_n(q)]T_n^{*1}(p, q) d\Gamma - \int_{\Gamma_2} [Q_n(q) - \bar{Q}_n(q)]v^{*1}(p, q) d\Gamma + \int_{\Gamma_2} [T_n(q) - \\
& \bar{T}_n(q)]v_n^{*1}(p, q) d\Gamma = 0
\end{aligned} \tag{3.107}$$

Sabendo que:

$$\begin{aligned}
& -K_w[w(q) - v(q)]w^{*1}(p, q) + K_w[\bar{w}(q) - v(q)]v^{*1}(p, q) = \\
& -K_w[w^{*1}(p, q) - v^{*1}(p, q)]w(q) + K_w[w^{*1}(p, q) - v^{*1}(p, q)]v(q)
\end{aligned} \tag{3.108}$$

A equação (3.107) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma} [-M_{ij,i}(q)w^{1*}(p, q)n_j + M_{ij}(q)w_j^{1*}(p, q)n_i - w_j(p, q)M_{ij}^{1*}(q)n_i + \\
& w(p, q)M_{ij,i}^{1*}(q)n_j] d\Gamma + \int_{\Gamma} [-T_{ij,i}(q)v^{1*}(p, q)n_j + T_{ij}(q)v_j^{1*}(p, q)n_i - \\
& v_j(p, q)T_{ij}^{1*}(q)n_i + v(p, q)T_{ij,i}^{1*}(q)n_j] d\Gamma + \int_{\Omega} w(q)\{M_{ij,ij}^{1*}(p, q) - \\
& K_w[w^{*1}(p, q) - v^{*1}(p, q)] + S_1w^{*1}(p, q)\} d\Omega + \int_{\Omega} v(q)\{T_{ij,ij}^{1*}(p, q) +
\end{aligned} \tag{3.109}$$

$$\begin{aligned}
& K_w[w^{*1}(p, q) - v^{*1}(p, q)] + S_2 v^{*1}(p, q) \} d\Omega + \int_{\Gamma_1} [w(q) - \\
& \bar{w}(q)] V_n^{*1}(p, q) d\Gamma - \int_{\Gamma_1} [w_{,n}(q) - \bar{w}_{,n}(q)] M_n^{*1}(p, q) d\Gamma - \int_{\Gamma_2} [V_n(q) - \\
& \bar{V}_n(q)] w^{*1}(p, q) d\Gamma + \int_{\Gamma_2} [M_n(q) - \bar{M}_n(q)] w_{,n}^{*1}(p, q) d\Gamma + \int_{\Gamma_1} [v(q) - \\
& \bar{v}(q)] Q_n^{*1}(p, q) d\Gamma - \int_{\Gamma_1} [v_{,n}(q) - \bar{v}_{,n}(q)] T_n^{*1}(p, q) d\Gamma - \int_{\Gamma_2} [Q_n(q) - \\
& \bar{Q}_n(q)] v^{*1}(p, q) d\Gamma + \int_{\Gamma_2} [T_n(q) - \bar{T}_n(q)] v_{,n}^{*1}(p, q) d\Gamma = 0
\end{aligned}$$

Das soluções fundamentais, sabe-se que:

$$M_{ij,ij}^{1*}(p, q) - K_w(w^{*1}(p, q) - v^{*1}(p, q)) + S_1 w^{*1}(p, q) = \delta(p, q) \quad (3.110)$$

$$T_{ij,ij}^{1*}(p, q) + K_w(w^{*1}(p, q) - v^{*1}(p, q)) + S_2 v^{*1}(p, q) = 0 \quad (3.111)$$

Substituindo as equações (3.110) e (3.111) na (3.109) e colocando as expressões com os esforços fundamentais à esquerda e com os deslocamentos fundamentais à direita, tem-se:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} w(q) \delta(p, q) d\Omega + \int_{\Gamma} -w_{,j}(q) M_{ij}^{1*}(p, q) n_i + w(q) M_{ij,i}^{1*}(p, q) n_j d\Gamma + \\
& \int_{\Gamma} -v_{,j}(q) T_{ij}^{1*}(p, q) n_i + v(q) T_{ij,i}^{1*}(p, q) n_j d\Gamma + \int_{\Gamma_1} [w(q) - \\
& \bar{w}(q)] V_n^{*1}(p, q) d\Gamma - \int_{\Gamma_1} [w_{,n}(q) - \bar{w}_{,n}(q)] M_n^{*1}(p, q) d\Gamma - \int_{\Gamma_2} [V_n(q) - \\
& \bar{V}_n(q)] w^{*1}(p, q) d\Gamma + \int_{\Gamma_2} [M_n(q) - \bar{M}_n(q)] w_{,n}^{*1}(p, q) d\Gamma + \int_{\Gamma_1} [v(q) - \\
& \bar{v}(q)] Q_n^{*1}(p, q) d\Gamma - \int_{\Gamma_1} [v_{,n}(q) - \bar{v}_{,n}(q)] T_n^{*1}(p, q) d\Gamma - \int_{\Gamma_2} [Q_n(q) - \\
& \bar{Q}_n(q)] v^{*1}(p, q) d\Gamma + \int_{\Gamma_2} [T_n(q) - \bar{T}_n(q)] v_{,n}^{*1}(p, q) d\Gamma =
\end{aligned} \quad (3.112)$$

$$\int_{\Gamma} -M_{ij,i}(q)w^{1*}(p,q)n_j + M_{ij}(q)w_{,j}^{1*}(p,q)n_i d\Gamma +$$

$$\int_{\Gamma} -T_{ij,i}(q)v^{1*}(p,q)n_j + T_{ij}(q)v_{,j}^{1*}(p,q)n_i d\Gamma$$

Aplicando a propriedade de filtragem do delta de Dirac, tem-se:

$$w(p) + \int_{\Gamma} -w_{,j}(q)M_{ij}^{1*}(p,q)n_i + w(q)M_{ij,i}^{1*}(p,q)n_j d\Gamma +$$

$$\int_{\Gamma} -v_{,j}(q)T_{ij}^{1*}(p,q)n_i + v(q)T_{ij,i}^{1*}(p,q)n_j d\Gamma + \int_{\Gamma_1} [w(q) -$$

$$\bar{w}(q)]V_n^{*1}(p,q) d\Gamma - \int_{\Gamma_1} [w_{,n}(q) - \bar{w}_{,n}(q)]M_n^{*1}(p,q) d\Gamma - \int_{\Gamma_2} [V_n(q) -$$

$$\bar{V}_n(q)]w^{*1}(p,q) d\Gamma + \int_{\Gamma_2} [M_n(q) - \bar{M}_n(q)]w_{,n}^{*1}(p,q) d\Gamma_2 + \int_{\Gamma_1} [v(q) -$$

$$\bar{v}(q)]Q_n^{*1}(p,q) d\Gamma - \int_{\Gamma_1} [v_{,n}(q) - \bar{v}_{,n}(q)]T_n^{*1}(p,q) d\Gamma - \int_{\Gamma_2} [Q_n(q) -$$

$$\bar{Q}_n(q)]v^{*1}(p,q) d\Gamma + \int_{\Gamma_2} [T_n(q) - \bar{T}_n(q)]v_{,n}^{*1}(p,q) d\Gamma =$$

$$\int_{\Gamma} -M_{ij,i}(q)w^{1*}(p,q)n_j + M_{ij}(q)w_{,j}^{1*}(p,q)n_i d\Gamma +$$

$$\int_{\Gamma} -T_{ij,i}(q)v^{1*}(p,q)n_j + T_{ij}(q)v_{,j}^{1*}(p,q)n_i d\Gamma$$
(3.113)

Dos momentos fletores e volventes no contorno, tira-se a relação:

$$M_n^{1*}(p,q) = M_{ij}^{1*}(p,q)n_i n_j \quad (3.114)$$

$$M_{ns}^{1*}(p,q) = M_{ij}^{1*}(p,q)n_i s_j \quad (3.115)$$

$$T_n^{1*}(p,q) = T_{ij}^{1*}(p,q)n_i n_j \quad (3.116)$$

$$T_{ns}^{1*}(p,q) = T_{ij}^{1*}(p,q)n_i s_j \quad (3.117)$$

Multiplicando-se $M_n^{1*}(p, q)$ por $n_k w_{,k}(q)$ e $M_{ns}^{1*}(p, q)$ por $s_k w_{,k}(q)$, seguida da soma desses resultados,

obtem:

$$M_n^{1*}(p, q) n_k w_{,k}(q) + M_{ns}^{1*}(p, q) s_k w_{,k}(q) = M_{ij}^{1*}(p, q) n_i w_{,j}(q) [n_j n_k + s_j s_k] \quad (3.118)$$

Sendo válida a identidade:

$$\delta_{jk} = n_j n_k + s_j s_k \quad (3.119)$$

Substituindo (3.119) em (3.118) fica:

$$M_n^{1*}(p, q) n_k w_{,k}(q) + M_{ns}^{1*}(p, q) s_k w_{,k}(q) = M_{ij}^{1*}(p, q) n_i w_{,j}(q) \quad (3.120)$$

Realizando o mesmo processo para $T_n^{1*}(p, q)$ e $T_{ns}^{1*}(p, q)$, obtém-se:

$$T_n^{1*}(p, q) n_k v_{,k}(q) + T_{ns}^{1*}(p, q) s_k v_{,k}(q) = T_{ij}^{1*}(p, q) n_i v_{,j}(q) \quad (3.121)$$

Substituindo as relações das equações (3.120) e (3.121) na equação (3.113), fica:

$$\begin{aligned} & w(p) + \int_{\Gamma} -M_n^{1*}(p, q) n_k w_{,k}(q) - M_{ns}^{1*}(p, q) s_k w_{,k}(q) + \\ & w(q) M_{ij,i}^{1*}(p, q) n_j d\Gamma + \int_{\Gamma} -T_n^{1*}(p, q) n_k v_{,k}(q) - T_{ns}^{1*}(p, q) s_k v_{,k}(q) + \\ & v(q) T_{ij,i}^{1*}(p, q) n_j d\Gamma + \int_{\Gamma_1} [w(q) - \bar{w}(q)] V_n^{*1}(p, q) d\Gamma - \int_{\Gamma_1} [w_m(q) - \\ & \bar{w}_m(q)] M_n^{*1}(p, q) d\Gamma - \int_{\Gamma_2} [V_n(q) - \bar{V}_n(q)] w^{*1}(p, q) d\Gamma + \int_{\Gamma_2} [M_n(q) - \\ & \bar{M}_n(q)] w_m^{*1}(p, q) d\Gamma + \int_{\Gamma_1} [v(q) - \bar{v}(q)] Q_n^{*1}(p, q) d\Gamma - \int_{\Gamma_1} [v_m(q) - \\ & \bar{v}_m(q)] T_n^{*1}(p, q) d\Gamma - \int_{\Gamma_2} [Q_n(q) - \bar{Q}_n(q)] v^{*1}(p, q) d\Gamma + \int_{\Gamma_2} [T_n(q) - \end{aligned} \quad (3.122)$$

$$\begin{aligned} \bar{T}_n(q)]v_n^{*1}(p, q) d\Gamma = \int_{\Gamma} M_{ij,i}(q)w_j^{*1}(p, q)n_j - M_{ij}(q)w_j^{*1}(p, q)n_i d\Gamma + \\ \int_{\Gamma} T_{ij,i}(q)v_j^{*1}(p, q)n_j - T_{ij}(q)v_j^{*1}(p, q)n_i d\Gamma \end{aligned}$$

Integrando por partes as integrais que contém os volventes $M_{ns}^{1*}(p, q)$ e $T_{ns}^{1*}(p, q)$, temos:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} -M_{ns}^{1*}(p, q) s_k w_{,k}(q) - T_{ns}^{1*}(p, q) s_k v_{,k}(q) d\Gamma = -[M_{ns}^{1*}(p, q) w(q) s_k n_k + \\ T_{ns}^{1*}(p, q) v(q) s_k n_k]_{\Gamma_1}^{\Gamma_2} + \int_{\Gamma} M_{ns,S}^{1*}(p, q) w(q) d\Gamma + \int_{\Gamma} T_{ns,S}^{1*}(p, q) v(q) d\Gamma \end{aligned} \quad (3.123)$$

Sabendo que $R_c^{sup} = -[M_{ns}]_{\Gamma_1}^{\Gamma_2}$ e $R_c^{inf} = -[T_{ns}]_{\Gamma_1}^{\Gamma_2}$ então a equação (3.123) fica:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} -M_{ns}^{1*}(p, q) s_k w_{,k}(q) - T_{ns}^{1*}(p, q) s_k v_{,k}(q) d\Gamma = \sum^{ncanto} R_c^{sup 1*} w_c(q) + \\ \sum^{ncanto} R_c^{inf 1*} v_c(q) + \int_{\Gamma} M_{ns,S}^{1*}(p, q) w(q) d\Gamma + \int_{\Gamma} T_{ns,S}^{1*}(p, q) v(q) d\Gamma \end{aligned} \quad (3.124)$$

Substituindo a equação (3.124) na equação (3.122):

$$\begin{aligned} w(p) + \int_{\Gamma} [-M_n^{1*}(p, q) w_{,k}(q) n_k + w(q) M_{ij,i}^{1*}(p, q) n_j + \\ M_{ns,S}^{1*}(p, q) w(q)] d\Gamma + \int_{\Gamma} -T_n^{1*}(p, q) n_k v_{,k}(q) + v(q) T_{ij,i}^{1*}(p, q) n_j + \\ T_{ns,S}^{1*}(p, q) v(q) d\Gamma + \sum^{ncanto} R_c^{sup 1*} w_c(q) + \sum^{ncanto} R_c^{inf 1*} v_c(q) + \\ \int_{\Gamma_1} [w(q) - \bar{w}(q)] V_n^{*1}(p, q) d\Gamma - \int_{\Gamma_1} [w_{,n}(q) - \bar{w}_{,n}(q)] M_n^{*1}(p, q) d\Gamma - \\ \int_{\Gamma_2} [V_n(q) - \bar{V}_n(q)] w^{*1}(p, q) d\Gamma + \int_{\Gamma_2} [M_n(q) - \bar{M}_n(q)] w_n^{*1}(p, q) d\Gamma + \\ \int_{\Gamma_1} [v(q) - \bar{v}(q)] Q_n^{*1}(p, q) d\Gamma - \int_{\Gamma_1} [v_{,n}(q) - \bar{v}_{,n}(q)] T_n^{*1}(p, q) d\Gamma - \\ \int_{\Gamma_2} [Q_n(q) - \bar{Q}_n(q)] v^{*1}(p, q) d\Gamma + \int_{\Gamma_2} [T_n(q) - \bar{T}_n(q)] v_n^{*1}(p, q) d\Gamma = \end{aligned} \quad (3.125)$$

$$\int_{\Gamma} M_{ij,i}(q)w^{1*}(p,q)n_j - M_{ij}(q)w_j^{1*}(p,q)n_i d\Gamma +$$

$$\int_{\Gamma} T_{ij,i}(q)v^{1*}(p,q)n_j - T_{ij}(q)v_j^{1*}(p,q)n_i d\Gamma +$$

Fazendo o mesmo processo para o lado direito da equação com os momentos reais $M_{ij}(q)$ e $T_{ij}(q)$ e levando em consideração que $w_{,k}n_k = w_{,n}$ e $v_{,k}n_k = v_{,n}$, chega-se em:

$$\begin{aligned} & w(p) + \int_{\Gamma} [-M_n^{1*}(p,q)w_{,n}(q) + w(q)M_{ij,i}^{1*}(p,q)n_j + \\ & M_{ns,s}^{1*}(p,q)w(q)] d\Gamma + \int_{\Gamma} [-T_n^{1*}(p,q)v_{,n}(q) + v(q)T_{ij,i}^{1*}(p,q)n_j + \\ & T_{ns,s}^{1*}(p,q)v(q)] d\Gamma + \sum^{ncanto} R_c^{\sup 1*} w_c(q) + \sum^{ncanto} R_c^{\inf 1*} v_c(q) + \\ & \int_{\Gamma_1} [w(q) - \bar{w}(q)]V_n^{*1}(p,q) d\Gamma - \int_{\Gamma_1} [w_{,n}(q) - \bar{w}_{,n}(q)]M_n^{*1}(p,q) d\Gamma - \\ & \int_{\Gamma_2} [V_n(q) - \bar{V}_n(q)]w^{*1}(p,q) d\Gamma + \int_{\Gamma_2} [M_n(q) - \bar{M}_n(q)]w_{,n}^{*1}(p,q) d\Gamma + \\ & \int_{\Gamma_1} [v(q) - \bar{v}(q)]Q_n^{*1}(p,q) d\Gamma - \int_{\Gamma_1} [v_{,n}(q) - \bar{v}_{,n}(q)]T_n^{*1}(p,q) d\Gamma - \\ & \int_{\Gamma_2} [Q_n(q) - \bar{Q}_n(q)]v^{*1}(p,q) d\Gamma + \int_{\Gamma_2} [T_n(q) - \bar{T}_n(q)]v_{,n}^{*1}(p,q) d\Gamma = \\ & \int_{\Gamma} [-M_n(q)w_{,n}^{1*}(p,q) + M_{ij,i}(q)w_j^{1*}(p,q)n_j + M_{ns,s}(q)w^{1*}(p,q)] d\Gamma + \\ & \int_{\Gamma} [-T_n(q)v_{,n}^{1*}(p,q) + T_{ij,i}(q)n_jv_j^{1*}(p,q) + T_{ns,s}(q)v^{1*}(p,q)] d\Gamma + \\ & \sum^{ncanto} R_c^{\sup} w_c^{1*}(p,q) + \sum^{ncanto} R_c^{\inf} v_c^{1*}(p,q) \end{aligned} \tag{3.126}$$

O cortante equivalente de Kirchhoff real e fundamental para a placa superior é dado por:

$$V_n(q) = M_{ij,i}(q)n_j + M_{ns,s}(q) \tag{3.127}$$

$$V_n^{1*}(p,q) = M_{ij,i}^{1*}(p,q)n_j + M_{ns,s}^{1*}(p,q) \tag{3.128}$$

O cortante equivalente de Kirchhoff real e fundamental para a placa inferior é dado por:

$$Q_n(q) = T_{ij,i}(q)n_j + T_{ns,s}(q) \quad (3.129)$$

$$Q_n^{1*}(p, q) = T_{ij,i}^{1*}(p, q)n_j + T_{ns,s}^{1*}(p, q) \quad (3.130)$$

Substituindo os cortantes e equivalentes das equações (3.127), (3.128), (3.129) e (3.130) na equação (3.126) e reorganizando a equação fica:

$$\begin{aligned} & w(p) + \int_{\Gamma} V_n^{1*}(p, q) w(q) - M_n^{1*}(p, q) w_{,n}(q) d\Gamma + \int_{\Gamma_1} [w(q) - \\ & \bar{w}(q)] V_n^{*1}(p, q) d\Gamma_1 - \int_{\Gamma_1} [w_{,n}(q) - \bar{w}_{,n}(q)] M_n^{*1}(p, q) d\Gamma_1 + \\ & \int_{\Gamma} Q_n^{1*}(p, q) v(q) - T_n^{1*}(p, q) v_{,n}(q) d\Gamma + \int_{\Gamma_1} [v(q) - \bar{v}(q)] Q_n^{*1}(p, q) d\Gamma_1 - \\ & \int_{\Gamma_1} [v_{,n}(q) - \bar{v}_{,n}(q)] T_n^{*1}(p, q) d\Gamma_1 + \sum^{ncanto} R_c^{\text{sup}1*} w_c(q) + \\ & \sum^{ncanto} R_c^{\text{inf}1*} v_c(q) = \int_{\Gamma} V_n(q) w^{1*}(p, q) - M_n(q) w_{,n}^{1*}(p, q) d\Gamma + \quad (3.131) \\ & \int_{\Gamma_2} [V_n(q) - \bar{V}_n(q)] w^{*1}(p, q) d\Gamma - \int_{\Gamma_2} [M_n(q) - \bar{M}_n(q)] w_{,n}^{*1}(p, q) d\Gamma + \\ & \int_{\Gamma} Q_n(q) v^{1*}(p, q) - T_n(q) v_{,n}^{1*}(p, q) d\Gamma + \int_{\Gamma_2} [Q_n(q) - \\ & \bar{Q}_n(q)] v^{*1}(p, q) d\Gamma - \int_{\Gamma_2} [T_n(q) - \bar{T}_n(q)] v_{,n}^{*1}(p, q) d\Gamma + \\ & \sum^{ncanto} R_c^{\text{sup}} w_c^{1*}(p, q) + \sum^{ncanto} R_c^{\text{inf}} v_c^{1*}(p, q) \end{aligned}$$

A equação (3.131) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} & w(p) + C_D^{\text{sup}} + C_D^{\text{inf}} + \sum^{ncanto} R_c^{\text{sup}1*} w_c(q) + \sum^{ncanto} R_c^{\text{inf}1*} v_c(q) = \\ & C_E^{\text{sup}} + C_E^{\text{inf}} + \sum^{ncanto} R_c^{\text{sup}} w_c^{1*}(p, q) + \sum^{ncanto} R_c^{\text{inf}} v_c^{1*}(p, q) \quad (3.132) \end{aligned}$$

Sendo C_D^{sup} e C_E^{sup} as parcelas referentes ao contorno da placa superior com deslocamento real e esforço real, respectivamente e C_D^{inf} e C_E^{inf} as equações de contorno da placa inferior com deslocamento real e esforço real, conforme descrito a seguir:

$$C_D^{sup} = \int_{\Gamma} V_n^{1*}(p, q) w(q) d\Gamma - \int_{\Gamma} M_n^{1*}(p, q) w_{,n}(q) d\Gamma + \int_{\Gamma_1} [\bar{w}(q) - w(q)] V_n^{*1}(p, q) d\Gamma - \int_{\Gamma_1} [\bar{w}_{,n}(q) - w_{,n}(q)] M_n^{*1}(p, q) d\Gamma \quad (3.133)$$

$$C_D^{inf} = \int_{\Gamma} Q_n^{1*}(p, q) v(q) d\Gamma - \int_{\Gamma} T_n^{1*}(p, q) v_{,n}(q) d\Gamma + \int_{\Gamma_1} [\bar{v}(q) - v(q)] Q_n^{*1}(p, q) d\Gamma - \int_{\Gamma_1} [\bar{v}_{,n}(q) - v_{,n}(q)] T_n^{*1}(p, q) d\Gamma \quad (3.134)$$

$$C_E^{sup} = \int_{\Gamma} V_n(q) w^{1*}(p, q) d\Gamma - \int_{\Gamma} M_n(q) w_{,n}^{1*}(p, q) d\Gamma + \int_{\Gamma_2} [\bar{V}_n(q) - V_n(q)] w^{*1}(p, q) d\Gamma - \int_{\Gamma_2} [\bar{M}_n(q) - M_n(q)] w_{,n}^{*1}(p, q) d\Gamma \quad (3.135)$$

$$C_E^{inf} = \int_{\Gamma} Q_n(q) v^{1*}(p, q) d\Gamma - \int_{\Gamma} T_n(q) v_{,n}^{1*}(p, q) d\Gamma + \int_{\Gamma_2} [\bar{Q}_n(q) - Q_n(q)] v^{*1}(p, q) d\Gamma - \int_{\Gamma_2} [\bar{T}_n(q) - T_n(q)] v_{,n}^{*1}(p, q) d\Gamma \quad (3.136)$$

Trabalhando apenas com as integrais de contorno da placa superior, após a separação do contorno total Γ em duas partes Γ_1 e Γ_2 , chega-se na equação a seguir:

$$C_D^{sup} + C_D^{inf} = \int_{\Gamma_1} V_n^{1*}(p, q) w(q) d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_2} V_n^{1*}(p, q) w(q) d\Gamma_2 - \int_{\Gamma_1} M_n^{1*}(p, q) w_{,n}(q) d\Gamma_1 - \int_{\Gamma_2} M_n^{1*}(p, q) w_{,n}(q) d\Gamma_2 + \int_{\Gamma_1} [\bar{w}(q) - w(q)] V_n^{*1}(p, q) d\Gamma - \int_{\Gamma_1} [\bar{w}_{,n}(q) - w_{,n}(q)] M_n^{*1}(p, q) d\Gamma + \int_{\Gamma_2} Q_n^{1*}(p, q) v(q) d\Gamma_2 + \int_{\Gamma_2} Q_n^{1*}(p, q) v(q) d\Gamma_2 - \int_{\Gamma_1} T_n^{1*}(p, q) v_{,n}(q) d\Gamma - \int_{\Gamma_1} T_n^{1*}(p, q) v_{,n}(q) d\Gamma \quad (3.137)$$

$$\int_{\Gamma_2} T_n^{1*}(p, q) v_{,n}(q) d\Gamma + \int_{\Gamma_1} [\bar{v}(q) - v(q)] Q_n^{*1}(p, q) d\Gamma - \int_{\Gamma_1} [\bar{v}_{,n}(q) - v_{,n}(q)] T_n^{*1}(p, q) d\Gamma$$

Desenvolvendo a equação, chega-se em:

$$\begin{aligned} C_D^{sup} + C_D^{inf} &= \int_{\Gamma_2} V_n^{1*}(p, q) w(q) d\Gamma_2 - \int_{\Gamma_2} M_n^{1*}(p, q) w_{,n}(q) d\Gamma_2 + \\ &\int_{\Gamma_1} \bar{w}(q) V_n^{*1}(p, q) d\Gamma - \int_{\Gamma_1} \bar{w}_{,n}(q) M_n^{*1}(p, q) d\Gamma + \int_{\Gamma_2} Q_n^{1*}(p, q) v(q) d\Gamma - \\ &\int_{\Gamma_2} T_n^{1*}(p, q) v_{,n}(q) d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{v}(q) Q_n^{*1}(p, q) d\Gamma - \int_{\Gamma_1} \bar{v}_{,n}(q) T_n^{*1}(p, q) d\Gamma \end{aligned} \quad (3.138)$$

Somando Γ_1 e Γ_2 , conclui-se que:

$$\begin{aligned} C_D^{sup} + C_D^{inf} &= \int_{\Gamma} V_n^{1*}(p, q) w(q) d\Gamma - \int_{\Gamma} M_n^{1*}(p, q) w_{,n}(q) d\Gamma + \\ &\int_{\Gamma} Q_n^{1*}(p, q) v(q) d\Gamma - \int_{\Gamma} T_n^{1*}(p, q) v_{,n}(q) d\Gamma \end{aligned} \quad (3.139)$$

De semelhante modo, para as integrais de contorno com esforços reais, obtém-se:

$$\begin{aligned} C_E^{sup} + C_E^{inf} &= \int_{\Gamma} V_n(q) w^{1*}(p, q) d\Gamma - \int_{\Gamma} M_n(q) w_{,n}^{1*}(p, q) d\Gamma + \\ &\int_{\Gamma} Q_n(q) v^{1*}(p, q) d\Gamma - \int_{\Gamma} T_n(q) v_{,n}^{1*}(p, q) d\Gamma \end{aligned} \quad (3.140)$$

Substituindo as equações (3.140) e (3.139) na (3.132), fica:

$$\begin{aligned} w(p) &+ \int_{\Gamma} V_n^{1*}(p, q) w(q) d\Gamma - \int_{\Gamma} M_n^{1*}(p, q) w_{,n}(q) d\Gamma + \\ &\int_{\Gamma} Q_n^{1*}(p, q) v(q) d\Gamma - \int_{\Gamma} T_n^{1*}(p, q) v_{,n}(q) d\Gamma + \sum^{ncanto} R_c^{sup1*} w_c(q) + \\ &\sum^{ncanto} R_c^{inf1*} v_c(q) = \int_{\Gamma} V_n(q) w^{1*}(p, q) d\Gamma - \int_{\Gamma} M_n(q) w_{,n}^{1*}(p, q) d\Gamma + \end{aligned} \quad (3.141)$$

$$\int_{\Gamma} Q_n(q) v^{1*}(p, q) d\Gamma - \int_{\Gamma} T_n(q) v_{,n}^{1*}(p, q) d\Gamma + \sum^{ncanto} R_c^{\text{sup}} w_c^{1*}(p, q) + \sum^{ncanto} R_c^{\text{inf}} v_c^{1*}(p, q)$$

Tomando o caso de o carregamento fundamental estar atuando sobre a placa inferior, tem-se que:

$$M_{ij,ij}^{1*}(p, q) - K_w[w^{*1}(p, q) - v^{*1}(p, q)] + S_1 w^{*1}(p, q) = 0 \quad (3.142)$$

$$T_{ij,ij}^{1*}(p, q) + K_w[w^{*1}(p, q) - v^{*1}(p, q)] + S_2 v^{*1}(p, q) = \delta(p, q) \quad (3.143)$$

Partindo dessa consideração e realizando o mesmo processo que foi feito para o carregamento fundamental na placa superior, obtém-se:

$$v(p) + \int_{\Gamma} V_n^{2*}(p, q) w(q) - M_n^{2*}(p, q) w_{,n}(q) d\Gamma + \int_{\Gamma} Q_n^{2*}(p, q) v(q) - T_n^{2*}(p, q) v_{,n}(q) d\Gamma + \sum^{ncanto} R_c^{\text{sup } 2*} w_c^{2*}(q) + \sum^{ncanto} R_c^{\text{inf } 2*} v_c^{2*}(q) = \quad (3.144)$$

$$\int_{\Gamma} V_n(q) w^{2*}(p, q) - M_n(q) w_{,n}^{2*}(p, q) d\Gamma + \int_{\Gamma} Q_n(q) v^{2*}(p, q) - T_n(q) v_{,n}^{2*}(p, q) d\Gamma + \sum^{ncanto} R_c^{\text{sup}} w_c^{2*}(p, q) + \sum^{ncanto} R_c^{\text{inf}} v_c^{2*}(p, q)$$

Sabendo que o sistema das placas duplas tem quatro incógnitas em deslocamento ou esforços, ainda faltam duas equações integrais. As duas equações integrais serão obtidas para as derivadas direcionais em relação ao ponto fonte dos deslocamentos transversais das placas superior e inferior (3.131) e (3.144).

As equações integrais para a derivada direcional em relação ao ponto fonte dos deslocamentos da placa superior são dadas por:

$$w(p)_{,m} + \int_{\Gamma} V_{n,m}^{1*}(p, q) w(q) - M_{n,m}^{1*}(p, q) w_{,n}(q) d\Gamma + \int_{\Gamma} Q_{n,m}^{1*}(p, q) v(q) - T_{n,m}^{1*}(p, q) v_{,n}(q) d\Gamma + \sum^{ncanto} R_{c,m}^{\text{sup } 1*} w_c^{1*}(q) + \quad (3.145)$$

$$\begin{aligned} \sum^{ncanto} R_{c,m}^{\text{inf}1*} v_c (q) &= \int_{\Gamma} V_n(q) w_{,m}^{1*} (p, q) - M_n (q) w_{,nm}^{1*} (p, q) d\Gamma + \\ \int_{\Gamma} Q_n(q) v_{,m}^{1*} (p, q) - T_n (q) v_{,nm}^{1*} (p, q) d\Gamma &+ \sum^{ncanto} R_c^{\text{sup}} w_{c,m}^{1*} (p, q) + \\ \sum^{ncanto} R_c^{\text{inf}} v_{c,m}^{1*} (p, q) \end{aligned}$$

As equações integrais para a derivada direcional em relação ao ponto fonte dos deslocamentos da placa inferior são dadas por:

$$\begin{aligned} v(p)_{,m} + \int_{\Gamma} V_{n,m}^{2*} (p, q) w(q) - M_{n,m}^{2*} (p, q) w_{,n}(q) d\Gamma + \\ \int_{\Gamma} Q_{n,m}^{2*} (p, q) v(q) - T_{n,m}^{2*} (p, q) v_{,n}(q) d\Gamma + \sum^{ncanto} R_{c,m}^{\text{sup}2*} w_c (q) + \\ \sum^{ncanto} R_{c,m}^{\text{inf}2*} v_c (q) = \int_{\Gamma} V_n(q) w_{,m}^{2*} (p, q) - M_n (q) w_{,nm}^{2*} (p, q) d\Gamma + \quad (3.146) \\ \int_{\Gamma} Q_n(q) v_{,m}^{2*} (p, q) - T_n (q) v_{,nm}^{2*} (p, q) d\Gamma \sum^{ncanto} R_c^{\text{sup}} w_{c,m}^{2*} (p, q) + \\ \sum^{ncanto} R_c^{\text{inf}} v_{c,m}^{2*} (p, q) \end{aligned}$$

- **Equações integrais em um ponto no contorno**

Nesta seção, será descrita a dedução correspondente ao tratamento das singularidades específicas oriundas das soluções fundamentais de placas duplas dinâmicas. Convém notar que o sequenciamento do procedimento é análogo ao estudo de singularidades em regime estático apresentado por Paiva (1987) para placas simples e por Pereira (2020) para placas duplas elasticamente conectadas.

Quando se opta pela utilização da forma singular da solução na formulação de flexão de placas pelo Método dos Elementos de Contorno, torna-se necessário, além das equações (3.131), (3.144), (3.145) e (3.146) válidas para pontos internos ao domínio, estabelecer também equações integrais associadas aos pontos localizados no contorno. Nessa situação, o ponto fonte passa a ser posicionado sobre o contorno do problema, fazendo com que as equações resultantes deixem de apresentar apenas integrais regulares. Essa mudança acarreta o surgimento de singularidades nas soluções fundamentais, uma vez que, no limite em que a distância radial

$$\begin{aligned}
& Q_n(q) v^{1*}(p, q) - T_n(q) v_{,k}^{1*}(p, q) n_k d\Gamma + \int_{\Gamma_\xi} V_n(q) w^{1*}(p, q) - \\
& M_n(q) w_{,k}^{1*}(p, q) n_k + Q_n(q) v^{1*}(p, q) - T_n(q) v_{,k}^{1*}(p, q) n_k d\Gamma_\xi + \\
& \sum^{ncanto} R_c^{\text{sup}} w_c^{1*}(p, q) + \sum^{ncanto} R_c^{\text{inf}} v_c^{1*}(p, q)
\end{aligned}$$

Onde ξ é o raio do semicírculo de centro no ponto fonte, que complementa o contorno Γ . Tal procedimento se aplica também, de forma semelhante, nas equações integrais de rotação.

Fazendo-se a aproximação do ponto fonte no contorno, ou seja, tendendo $\xi \rightarrow 0$, tem-se que:

$$\begin{aligned}
& w(p) + \lim_{\bar{r} \rightarrow 0} \int_{\Gamma-\bar{r}} [V_n^{1*}(p, q) w(q) - M_n^{1*}(p, q) w_{,k}(q) n_k + Q_n^{1*}(p, q) v(q) - \\
& T_n^{1*}(p, q) n_k v_{,k}(q)] d\Gamma + \lim_{\Gamma_\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} [V_n^{1*}(p, q) w(q) - M_n^{1*}(p, q) w_{,k}(q) n_k + \\
& Q_n^{1*}(p, q) v(q) - T_n^{1*}(p, q) n_k v_{,k}(q)] d\Gamma + \sum^{ncanto} R_c^{\text{sup} 1*} w_c(q) + \\
& \sum^{ncanto} R_c^{\text{inf} 1*} v_c(q) = \lim_{\bar{r} \rightarrow 0} \int_{\Gamma-\bar{r}} [V_n(q) w^{1*}(p, q) - M_n(q) w_{,k}^{1*}(p, q) n_k + \\
& Q_n(q) v^{1*}(p, q) - T_n(q) v_{,k}^{1*}(p, q) n_k] d\Gamma + \lim_{\Gamma_\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} [V_n(q) w^{1*}(p, q) - \\
& M_n(q) w_{,k}^{1*}(p, q) n_k + Q_n(q) v^{1*}(p, q) - T_n(q) v_{,k}^{1*}(p, q) n_k] d\Gamma_\xi + \\
& \sum^{ncanto} R_c^{\text{sup}} w_c^{1*}(p, q) + \sum^{ncanto} R_c^{\text{inf}} v_c^{1*}(p, q)
\end{aligned} \tag{3.148}$$

Devido à presença de singularidades na segunda integral em ambos os lados da equação (3.148), bem como na primeira e terceira integrais de cada lado da mesma, essas devem ser tomadas no conceito do valor principal de Cauchy, resultando em:

$$\begin{aligned} & \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} [V_n^{1*}(p, q) w(q) - M_n^{1*}(p, q) w_{,k}(q) n_k + Q_n^{1*}(p, q) v(q) - \\ & T_n^{1*}(p, q) n_k v_{,k}(q)] d\Gamma = \int_{\Gamma} [V_n^{1*}(p, q) w(q) - M_n^{1*}(p, q) w_{,k}(q) n_k + \\ & Q_n^{1*}(p, q) v(q) - T_n^{1*}(p, q) n_k v_{,k}(q)] d\Gamma \end{aligned} \quad (3.149)$$

$$\begin{aligned} & \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} [V_n(q) w^{1*}(p, q) - M_n(q) w_{,k}^{1*}(p, q) n_k + Q_n(q) v^{1*}(p, q) - \\ & T_n(q) v_{,k}^{1*}(p, q) n_k] d\Gamma = \int_{\Gamma} [V_n(q) w^{1*}(p, q) - M_n(q) w_{,k}^{1*}(p, q) n_k + \\ & Q_n(q) v^{1*}(p, q) - T_n(q) v_{,k}^{1*}(p, q) n_k] d\Gamma \end{aligned} \quad (3.150)$$

Substituindo as relações (3.149) e (3.150) em (3.148), fica:

$$\begin{aligned} & w(p) + \int_{\Gamma} [V_n^{1*}(p, q) w(q) - M_n^{1*}(p, q) w_{,k}(q) n_k + Q_n^{1*}(p, q) v(q) - \\ & T_n^{1*}(p, q) n_k v_{,k}(q)] d\Gamma + \lim_{\Gamma_{\xi} \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\xi}} [V_n^{1*}(p, q) w(q) - M_n^{1*}(p, q) w_{,k}(q) n_k + \\ & Q_n^{1*}(p, q) v(q) - T_n^{1*}(p, q) n_k v_{,k}(q)] d\Gamma + \sum^{ncanto} R_c^{\text{sup } 1*} w_c(q) + \\ & \sum^{ncanto} R_c^{\text{inf } 1*} v_c(q) = \int_{\Gamma} [V_n(q) w^{1*}(p, q) - M_n(q) w_{,k}^{1*}(p, q) n_k + \\ & Q_n(q) v^{1*}(p, q) - T_n(q) v_{,k}^{1*}(p, q) n_k] d\Gamma + \lim_{\Gamma_{\xi} \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\xi}} [V_n(q) w^{1*}(p, q) - \\ & M_n(q) w_{,k}^{1*}(p, q) n_k + Q_n(q) v^{1*}(p, q) - T_n(q) v_{,k}^{1*}(p, q) n_k] d\Gamma_{\xi} + \\ & \sum^{ncanto} R_c^{\text{sup}} w_c^{1*}(p, q) + \sum^{ncanto} R_c^{\text{inf}} v_c^{1*}(p, q) \end{aligned} \quad (3.151)$$

Para o estudo das parcelas definidas no contorno Γ_{ξ} foram adotadas as funções $F(\xi)$ e $E(\xi)$.

$$\begin{aligned}
& w(p) + \int_{\Gamma} [V_n^{1*}(p, q) w(q) - M_n^{1*}(p, q) w_{,k}(q) n_k + Q_n^{1*}(p, q) v(q) - \\
& T_n^{1*}(p, q) n_k v_{,k}(q)] d\Gamma + \lim_{\Gamma_{\xi} \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\xi}} F(\xi) d\Gamma + \sum^{ncanto} R_c^{\text{sup } 1*} w_c(q) + \\
& \sum^{ncanto} R_c^{\text{inf } 1*} v_c(q) = \int_{\Gamma} [V_n(q) w^{1*}(p, q) - M_n(q) w_{,k}^{1*}(p, q) n_k + \\
& Q_n(q) v^{1*}(p, q) - T_n(q) v_{,k}^{1*}(p, q) n_k] d\Gamma + \lim_{\Gamma_{\xi} \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\xi}} E(\xi) d\Gamma + \\
& \sum^{ncanto} R_c^{\text{sup}} w_c^{1*}(p, q) + \sum^{ncanto} R_c^{\text{inf}} v_c^{1*}(p, q)
\end{aligned} \tag{3.152}$$

$$\begin{aligned}
& \lim_{\Gamma_{\xi} \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\xi}} F(\xi) d\Gamma = \lim_{\Gamma_{\xi} \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\xi}} [V_n^{1*}(p, q) w(q) - M_n^{1*}(p, q) w_{,k}(q) n_k + \\
& Q_n^{1*}(p, q) v(q) - T_n^{1*}(p, q) v_{,k}(q) n_k] d\Gamma
\end{aligned} \tag{3.153}$$

$$\begin{aligned}
& \lim_{\Gamma_{\xi} \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\xi}} E(\xi) d\Gamma = \lim_{\Gamma_{\xi} \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\xi}} [V_n(q) w^{1*}(p, q) - M_n(q) w_{,k}^{1*}(p, q) n_k + \\
& Q_n(q) v^{1*}(p, q) - T_n(q) v_{,k}^{1*}(p, q) n_k] d\Gamma_{\xi}
\end{aligned} \tag{3.154}$$

Para o problema é realizado um deslocamento de corpo rígido $w(p)$ e para manter o equilíbrio é aplicada a propriedade referente à integração de uma soma de funções e a equação (3.153) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}
& \lim_{\Gamma_{\xi} \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\xi}} F(\xi) d\Gamma = \lim_{\Gamma_{\xi} \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\xi}} \{V_n^{1*}(p, q) [w(q) - w(p)] - M_n^{1*}(p, q) [w_{,k}(q) - \\
& w_{,k}(p)] n_k + Q_n^{1*}(p, q) [v(q) - v(p)] - T_n^{1*}(p, q) [v_{,k}(q) - v_{,k}(p)] n_k\} d\Gamma + \\
& \lim_{\Gamma_{\xi} \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\xi}} [V_n^{1*}(p, q) w(p) - M_n^{1*}(p, q) w_{,k}(p) n_k + Q_n^{1*}(p, q) v(p) - \\
& T_n^{1*}(p, q) v_{,k}(p) n_k] d\Gamma
\end{aligned} \tag{3.155}$$

Tomando uso da condição de Hölder, tanto para os deslocamentos quanto para as rotações das placas, consideram-se as seguintes relações:

$$|w(q) - w(p)| \leq C_1 r^{\alpha_1(q,p)} \quad (3.156)$$

$$|w_{,k}(q) n_k - w_{,k}(p) n_k| \leq C_2 r^{\alpha_2(q,p)} \quad (3.157)$$

$$|v(q) - v(p)| \leq C_3 r^{\alpha_3(q,p)} \quad (3.158)$$

$$|v_{,k}(q) n_k - v_{,k}(p) n_k| \leq C_4 r^{\alpha_4(q,p)} \quad (3.159)$$

Sendo C_1, C_2, C_3 e C_4 constantes e $0 < \alpha_i \leq 1$, com $i=1,2,3,4$.

Ao aplicar o limite a condição irá tender a zero. Sendo assim, os primeiros termos da equação (3.155) são anulados e como $w(p), w_{,k}(p)n_k, v(p)$ e $v_{,k}(p)n_k$ são valores de domínio.

Prossegue-se com:

$$\begin{aligned} \lim_{\Gamma_\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} F(\xi) d\Gamma &= w(p) \lim_{\Gamma_\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} V_n^{1*}(p, q) d\Gamma - \\ w_{,k}(p) n_k \lim_{\Gamma_\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} M_n^{1*}(p, q) d\Gamma &+ v(p) \lim_{\Gamma_\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} Q_n^{1*}(p, q) d\Gamma - \\ v_{,k}(p) n_k \lim_{\Gamma_\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} T_n^{1*}(p, q) d\Gamma & \end{aligned} \quad (3.160)$$

Para o subdomínio, tem-se que $d\Gamma_\xi = \xi d\phi$ e ainda que o raio vetor $r = \xi$ coincide com a normal do seu contorno, implicando em $r_{,i} n_i = 1, r_{,i} s_i = 0, m_{,i} n_i = r_{,i} m_i$. Sendo β_c o ângulo interno do canto da placa. A equação (3.160) e a equação (3.154) ficam:

$$\begin{aligned} \lim_{\Gamma_\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} F(\xi) d\Gamma &= w(p) \lim_{\Gamma_\xi \rightarrow 0} \int_0^{2\pi-\beta_c} V_n^{1*}(p, q) \xi d\phi - \\ w_{,k}(p) n_k \lim_{\Gamma_\xi \rightarrow 0} \int_0^{2\pi-\beta_c} M_n^{1*}(p, q) \xi d\phi &+ v(p) \lim_{\Gamma_\xi \rightarrow 0} \int_0^{2\pi-\beta_c} Q_n^{1*}(p, q) \xi d\phi - \\ v_{,k}(p) n_k \lim_{\Gamma_\xi \rightarrow 0} \int_0^{2\pi-\beta_c} T_n^{1*}(p, q) \xi d\phi & \end{aligned} \quad (3.161)$$

$$\begin{aligned}
\lim_{\Gamma_{\xi \rightarrow 0}} \int_{\Gamma_{\xi}} E(\xi) d\Gamma &= V_n(q) \lim_{\Gamma_{\xi \rightarrow 0}} \int_0^{2\pi-\beta_c} w^{1*}(p, q) \xi d\phi - \\
M_n(q) \lim_{\Gamma_{\xi \rightarrow 0}} \int_0^{2\pi-\beta_c} w_{,n}^{1*}(p, q) \xi d\phi + Q_n(q) \lim_{\Gamma_{\xi \rightarrow 0}} \int_0^{2\pi-\beta_c} v^{1*}(p, q) \xi d\phi - \\
T_n(q) \lim_{\Gamma_{\xi \rightarrow 0}} \int_0^{2\pi-\beta_c} v_{,n}^{1*}(p, q) \xi d\phi
\end{aligned} \tag{3.162}$$

Onde o produto dos esforços fundamentais com o raio do subdomínio é apresentado no trabalho de Pereira (2020), como:

$$M_n^{1*}(p, q)\xi = -D_1 \left(\xi \frac{\partial^2 w^{1*}(p, q)}{\partial \xi^2} + v_1 \frac{\partial w^{1*}(p, q)}{\partial \xi} \right) \tag{3.163}$$

$$V_n^{1*}(p, q)\xi = -D_1 \left(\xi \frac{d^3 w^{1*}(p, q)}{d\xi^3} + \frac{d^2 w^{1*}(p, q)}{d\xi^2} - \frac{1}{\xi} \frac{dw^{1*}(p, q)}{d\xi} \right) \tag{3.164}$$

$$T_n^{1*}(p, q)\xi = -D_2 \left(\xi \frac{\partial^2 v^{1*}(p, q)}{\partial \xi^2} + v_2 \frac{\partial v^{1*}(p, q)}{\partial \xi} \right) \tag{3.165}$$

$$Q_n^{1*}(p, q)\xi = -D_2 \left(\xi \frac{d^3 v^{1*}(p, q)}{d\xi^3} + \frac{d^2 v^{1*}(p, q)}{d\xi^2} - \frac{1}{\xi} \frac{dv^{1*}(p, q)}{d\xi} \right) \tag{3.166}$$

Para o caso em que ambas as raízes z_1 e z_2 sejam positivas tem-se o produto dos deslocamentos e rotações fundamentais por ξ , ficam escritos como:

$$w^{1*}(p, q)\xi = \frac{\xi}{(z_1 - z_2)D_1 D_2} \left[\frac{(\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2})(s_2 - K_w + D_2 \sqrt{z_1} \sqrt{z_2})}{8\sqrt{z_1} \sqrt{z_2}} \right] i \tag{3.167}$$

$$w_{,n}^{1*}(p, q)\xi = -\frac{\xi^2}{16D_1} i \tag{3.168}$$

$$v^{1*}(p, q)\xi = \frac{\xi K_w}{8(\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2})D_1 D_2 \sqrt{z_1} \sqrt{z_2}} i \tag{3.169}$$

$$v_{,n}^{1*}(p, q)\xi = \frac{K_w}{(z_1 - z_2)D_1 D_2} \left(\frac{\xi}{16} i - \frac{\xi}{16} i \right) = 0 \quad (3.170)$$

No qual $i = \sqrt{-1}$.

Como foi abordado anteriormente, os esforços e deslocamentos fundamentais são compostos por funções de Bessel. Diante desse pressuposto, é importante frisar que essas funções possuem expressões resumidas para pequenos argumentos, como é o caso da análise atual.

A função de Bessel de primeira espécie para pequenos argumentos pode ser escrita como:

$$\lim_{r \rightarrow \xi} J_n(r) \sim \frac{1}{\Gamma(n+1)} \left(\frac{\xi}{2} \right)^n \quad (3.171)$$

Para $n = 0$, a função de Bessel de segunda espécie é dada por:

$$\lim_{r \rightarrow \xi} Y_0(r) \sim \frac{2}{\pi} \left[\ln \left(\frac{\xi}{2} \right) + \gamma \right] \quad (3.172)$$

Para $n > 0$ e $r \rightarrow \xi$ a função de Bessel de segunda espécie é descrita como:

$$\lim_{r \rightarrow \xi} Y_n(r) \sim -\frac{\Gamma(n)}{\pi} \left(\frac{\xi}{2} \right)^{-n} \quad (3.173)$$

Já a função de Bessel modificada de primeira espécie é dada por:

$$\lim_{r \rightarrow \xi} K_0(r) = -\ln \left(\frac{\xi}{2} \right) - \gamma \quad (3.174)$$

$$\lim_{r \rightarrow \xi} K_n(r) = \frac{(n-1)!}{2} \left(\frac{\xi}{2} \right)^{-n} \quad (3.175)$$

Para as raízes z_1 e z_2 positivas, concluí-se que as funções escalares fundamentais, podem ser dadas, por:

$$\phi_1 = \frac{i}{8\beta_1^2} + \frac{1}{8\beta_1^2} \frac{2}{\pi} \left[\ln\left(\frac{\xi\beta_1}{2}\right) + \gamma \right] - \frac{1}{4\pi\beta_1^2} \left(\ln\left(\frac{\xi\beta_1}{2}\right) + \gamma \right) \quad (3.176)$$

$$\phi_2 = \frac{i}{8\beta_2^2} + \frac{1}{8\beta_2^2} \frac{2}{\pi} \left[\ln\left(\frac{\xi\beta_2}{2}\right) + \gamma \right] - \frac{1}{4\pi\beta_2^2} \left(\ln\left(\frac{\xi\beta_2}{2}\right) + \gamma \right) \quad (3.177)$$

Aplicando os limites e integrais na equação (3.161) e (3.162), chega-se que:

$$\lim_{\Gamma_\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} F(\xi) d\Gamma = -\frac{2\pi - \beta_c}{2\pi} w(p) \quad (3.178)$$

$$\lim_{\Gamma_\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} E(\xi) d\Gamma = 0 \quad (3.179)$$

Substituindo (3.178) e (3.179) na equação (3.152), fica:

$$\begin{aligned} & K_1 w(p) + \int_{\Gamma} [V_n^{1*}(p, q) w(q) - M_n^{1*}(p, q) w_{,k}(q) n_k + Q_n^{1*}(p, q) v(q) - \\ & T_n^{1*}(p, q) n_k v_{,k}(q)] d\Gamma + \sum^{ncanto} R_c^{\sup 1*} w_c(q) + \sum^{ncanto} R_c^{\inf 1*} v_c(q) = \\ & \int_{\Gamma} [V_n(q) w^{1*}(p, q) - M_n(q) w_{,k}^{1*}(p, q) n_k + Q_n(q) v^{1*}(p, q) - \\ & T_n(q) v_{,k}^{1*}(p, q) n_k] d\Gamma + \sum^{ncanto} R_c^{\sup} w_c^{1*}(p, q) + \sum^{ncanto} R_c^{\inf} v_c^{1*}(p, q) \end{aligned} \quad (3.180)$$

Sendo o termo livre da equação integral K_1 dado por:

$$K_1 = \begin{cases} 0, & \text{se } p \notin \Omega \cup \Gamma \\ \frac{\beta_c}{2\pi}, & \text{se } p \in \Gamma \\ 1, & \text{se } p \in \Omega \end{cases}$$

Analogamente, a equação integral do deslocamento transversal da placa inferior $v(p)$ para o ponto fonte p no subdomínio, pode ser descrita aplicando o carregamento fundamental na placa inferior, resultando em:

$$\begin{aligned}
& K_1 v(p) + \int_{\Gamma} [V_n^{2*}(p, q) w(q) - M_n^{2*}(p, q) w_{,k}(q) n_k + Q_n^{2*}(p, q) v(q) - \\
& T_n^{2*}(p, q) n_k v_{,k}(q)] d\Gamma + \sum^{ncanto} R_c^{\text{sup}2*} w_c(q) + \sum^{ncanto} R_c^{\text{inf}2*} v_c(q) = \\
& \int_{\Gamma} [V_n(q) w^{2*}(p, q) - M_n(q) w_{,k}^{2*}(p, q) n_k + Q_n(q) v^{2*}(p, q) - \\
& T_n(q) v_{,k}^{2*}(p, q) n_k] d\Gamma + \sum^{ncanto} R_c^{\text{sup}} w_c^{2*}(p, q) + \sum^{ncanto} R_c^{\text{inf}} v_c^{2*}(p, q)
\end{aligned} \tag{3.181}$$

Como foi visto nas equações integrais no domínio é necessário a equação da derivada direcional para que seja possível encontrar as variáveis de deslocamento da placa superior $w(q)$ e $w_{,n}(q)$ e esforços da placa superior $M_n(q)$ e $V_n(q)$ e as variáveis de deslocamento da placa inferior $v(q)$ e $v_{,n}(q)$ e de esforços da placa inferior $T_n(q)$ e $Q_n(q)$.

Considerando o acréscimo de domínio circular e todos os pormenores a equação (3.145) é reescrita como:

$$\begin{aligned}
& w(p)_{,m} + \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} V_{n,m}^{1*}(p, q) w(q) - M_{n,m}^{1*}(p, q) w_{,k}(q) n_k d\Gamma + \\
& \int_{\Gamma_{\xi}} V_{n,m}^{1*}(p, q) w(q) - M_{n,m}^{1*}(p, q) w_{,k}(q) n_k d\Gamma_{\xi} + \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} Q_{n,m}^{1*}(p, q) v(q) - \\
& T_{n,m}^{1*}(p, q) n_k v_{,k}(q) d\Gamma + \int_{\Gamma_{\xi}} Q_{n,m}^{1*}(p, q) v(q) - T_{n,m}^{1*}(p, q) n_k v_{,k}(q) d\Gamma_{\xi} + \\
& \sum^{ncanto} R_{c,m}^{\text{sup}1*} w_c(q) + \sum^{ncanto} R_{c,m}^{\text{inf}1*} v_c(q) = \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} V_n(q) w_{,m}^{1*}(p, q) - \\
& M_n(q) w_{,km}^{1*}(p, q) n_k d\Gamma + \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} Q_n(q) v_{,m}^{1*}(p, q) - \\
& T_n(q) v_{,km}^{1*}(p, q) n_k d\Gamma + \int_{\Gamma_{\xi}} V_n(q) w_{,m}^{1*}(p, q) - M_n(q) w_{,km}^{1*}(p, q) n_k d\Gamma + \\
& \int_{\Gamma_{\xi}} Q_n(q) v_{,m}^{1*}(p, q) - T_n(q) v_{,km}^{1*}(p, q) n_k d\Gamma + \sum^{ncanto} R_c^{\text{sup}} w_{c,m}^{1*}(p, q) + \\
& \sum^{ncanto} R_c^{\text{inf}} v_{c,m}^{1*}(p, q)
\end{aligned} \tag{3.182}$$

Fazendo-se a aproximação do ponto fonte no contorno, ou seja, tendendo $\xi \rightarrow 0$, tem-se que:

$$\begin{aligned}
& w(p)_{,m} + \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} V_{n,m}^{1*}(p, q) w(q) - M_{n,m}^{1*}(p, q) w_{,k}(q) n_k d\Gamma + \\
& \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} Q_{n,m}^{1*}(p, q) v(q) - T_{n,m}^{1*}(p, q) n_k v_{,k}(q) d\Gamma + \\
& \lim_{\Gamma_\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} V_{n,m}^{1*}(p, q) w(q) - M_{n,m}^{1*}(p, q) w_{,k}(q) n_k d\Gamma_\xi + \\
& \lim_{\Gamma_\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} Q_{n,m}^{1*}(p, q) v(q) - T_{n,m}^{1*}(p, q) n_k v_{,k}(q) d\Gamma_\xi + \\
& \sum^{ncanto} R_{c,m}^{\sup 1*} w_c(q) + \sum^{ncanto} R_{c,m}^{\inf 1*} v_c(q) = \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} V_n(q) w_{,m}^{1*}(p, q) - \\
& M_n(q) w_{,km}^{1*}(p, q) n_k d\Gamma + \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} Q_n(q) v_{,m}^{1*}(p, q) - \\
& T_n(q) v_{,km}^{1*}(p, q) n_k d\Gamma + \lim_{\Gamma_\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} V_n(q) w_{,m}^{1*}(p, q) - \\
& M_n(q) w_{,km}^{1*}(p, q) n_k d\Gamma + \lim_{\Gamma_\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} Q_n(q) v_{,m}^{1*}(p, q) - \\
& T_n(q) v_{,km}^{1*}(p, q) n_k d\Gamma + \sum^{ncanto} R_c^{\sup} w_{c,m}^{1*}(p, q) + \\
& \sum^{ncanto} R_c^{\inf} v_{c,m}^{1*}(p, q)
\end{aligned} \tag{3.183}$$

Vale ressaltar que os limites das integrais sobre $\Gamma - \bar{\Gamma}$ são, por definição, os valores principais das integrais sobre Γ . Dessa forma, obtém-se:

$$\begin{aligned}
& w(p)_{,m} + \int_{\Gamma} V_{n,m}^{1*}(p, q) w(q) - M_{n,m}^{1*}(p, q) w_{,k}(q) n_k d\Gamma + \\
& \int_{\Gamma} Q_{n,m}^{1*}(p, q) v(q) - T_{n,m}^{1*}(p, q) n_k v_{,k}(q) d\Gamma + \lim_{\Gamma_\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} V_{n,m}^{1*}(p, q) w(q) - \\
& M_{n,m}^{1*}(p, q) w_{,k}(q) n_k d\Gamma_\xi + \lim_{\Gamma_\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} Q_{n,m}^{1*}(p, q) v(q) - \\
& T_{n,m}^{1*}(p, q) n_k v_{,k}(q) d\Gamma_\xi + \sum^{ncanto} R_{c,m}^{\sup 1*} w_c(q) + \sum^{ncanto} R_{c,m}^{\inf 1*} v_c(q) = \\
& \int_{\Gamma} V_n(q) w_{,m}^{1*}(p, q) - M_n(q) w_{,km}^{1*}(p, q) n_k d\Gamma + \int_{\Gamma} Q_n(q) v_{,m}^{1*}(p, q) -
\end{aligned} \tag{3.184}$$

$$\begin{aligned}
& T_n (q) v_{,km}^{1*}(p, q) n_k d\Gamma + \lim_{\Gamma_\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} V_n(q) w_{,m}^{1*}(p, q) - \\
& M_n (q) w_{,km}^{1*}(p, q) n_k d\Gamma + \lim_{\Gamma_\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} Q_n(q) v_{,m}^{1*}(p, q) - \\
& T_n (q) v_{,km}^{1*}(p, q) n_k d\Gamma + \sum^{ncanto} R_c^{\text{sup}} w_{c,m}^{1*}(p, q) + \\
& \sum^{ncanto} R_c^{\text{inf}} v_{c,m}^{1*}(p, q)
\end{aligned}$$

A parcela do contorno do subdomínio da esquerda da equação (3.184) será tratada individualmente como $Fm(\xi)$ e a parcela da direita como $Em(\xi)$;

$$\begin{aligned}
\lim_{\Gamma_\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} Fm(\xi) d\Gamma_\xi &= \lim_{\Gamma_\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} V_{n,m}^{1*}(p, q) w(q) - M_{n,m}^{1*}(p, q) w_{,k}(q) n_k d\Gamma_\xi + \\
& \lim_{\Gamma_\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} Q_{n,m}^{1*}(p, q) v(q) - T_{n,m}^{1*}(p, q) n_k v_{,k}(q) d\Gamma_\xi
\end{aligned} \tag{3.185}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{\Gamma_\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} Em(\xi) d\Gamma &= \lim_{\Gamma_\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} [V_n(q) w^{1*}(p, q) - M_n (q) w_{,k}^{1*}(p, q) n_k + \\
& Q_n(q) v^{1*}(p, q) - T_n (q) v_{,k}^{1*}(p, q) n_k] d\Gamma_\xi
\end{aligned} \tag{3.186}$$

É conveniente aplicar à placa um deslocamento vertical de corpo rígido com valor de $-w(p)$, como ferramenta para remover a singularidade gerada quando $\xi \rightarrow 0$, fazendo isso a equação (3.185) fica:

$$\begin{aligned}
\lim_{\Gamma_\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} Fm(\xi) d\Gamma_\xi &= \lim_{\Gamma_\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} V_{n,m}^{1*}(p, q) [w(q) - w(p)] - \\
& M_{n,m}^{1*}(p, q) [w_{,k}(q) n_k - w_{,k}(p) n_k] d\Gamma_\xi - \\
& \lim_{\Gamma_\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} M_{n,m}^{1*}(p, q) w_{,k}(p) n_k d\Gamma_\xi + \lim_{\Gamma_\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} Q_{n,m}^{1*}(p, q) [v(q) - v(p)] - \\
& T_{n,m}^{1*}(p, q) [v_{,k}(q) n_k - v_{,k}(p) n_k] d\Gamma_\xi - \lim_{\Gamma_\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} T_{n,m}^{1*}(p, q) v_{,k}(p) n_k d\Gamma_\xi
\end{aligned} \tag{3.187}$$

Aplicando a condição de Hölder (3.157) e (3.159) na equação (3.187), obtém-se:

$$\lim_{\Gamma_\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} Fm(\xi) d\Gamma_\xi = \lim_{\Gamma_\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} V_{n,m}^{1*}(p, q) [w(q) - w(p)] d\Gamma_\xi -$$

$$\lim_{\Gamma_\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} M_{n,m}^{1*}(p, q) w_{,k}(p) n_k d\Gamma_\xi + \lim_{\Gamma_\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} Q_{n,m}^{1*}(p, q) [v(q) - v(p)] d\Gamma_\xi - \quad (3.188)$$

$$\lim_{\Gamma_\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} T_{n,m}^{1*}(p, q) v_{,k}(p) n_k d\Gamma_\xi$$

Considerando a Figura 3.5, onde estão indicados os pontos p e q e seus respectivos deslocamentos. Quando $\xi \rightarrow 0$ as seguintes relações podem ser escritas:

$$w(q) - w(p) = \xi w_{,k}(p) n_k \quad (3.189)$$

$$v(q) - v(p) = \xi v_{,k}(p) n_k \quad (3.190)$$

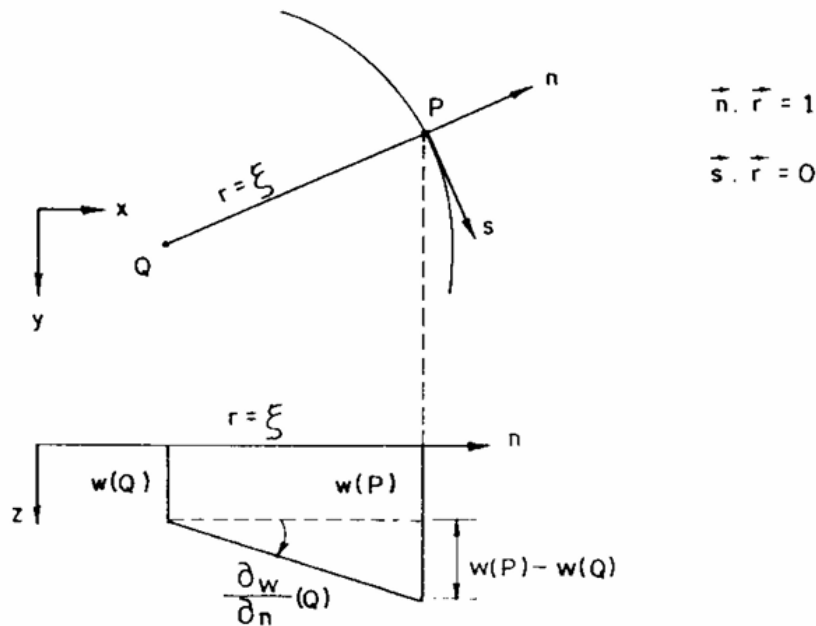


Figura 3.5 - Deslocamentos verticais do ponto do domínio (p) e do ponto do contorno circular (q)
 Fonte: Paiva (1987)

Substituindo as relações (3.189) e (3.190) na equação (3.188), chega-se em:

$$\begin{aligned}
\lim_{\Gamma_\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} Fm(\xi) d\Gamma_\xi &= \lim_{\Gamma_\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} V_{n,m}^{1*}(p, q) \xi w_{,k}(p) n_k d\Gamma_\xi - \\
\lim_{\Gamma_\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} M_{n,m}^{1*}(p, q) w_{,k}(p) n_k d\Gamma_\xi &+ \lim_{\Gamma_\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} Q_{n,m}^{1*}(p, q) \xi v_{,k}(p) n_k d\Gamma_\xi - \\
\lim_{\Gamma_\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} T_{n,m}^{1*}(p, q) v_{,k}(p) n_k d\Gamma_\xi &
\end{aligned} \tag{3.191}$$

Sabendo que $d\Gamma_\xi = \xi d\varnothing$ e isolando $w_{,k}(p)$ e $v_{,k}(p)$ a equação (3.191) fica:

$$\begin{aligned}
\lim_{\Gamma_\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} Fm(\xi) d\Gamma_\xi &= w_{,k}(p) n_k \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_0^{2\pi-\beta_c} [V_{n,m}^{1*}(p, q) \xi^2 - M_{n,m}^{1*}(p, q) \xi] d\varnothing + \\
v_{,k}(p) n_k \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_0^{2\pi-\beta_c} [Q_{n,m}^{1*}(p, q) \xi^2 - T_{n,m}^{1*}(p, q) \xi] d\varnothing &
\end{aligned} \tag{3.192}$$

Sabendo que, de maneira genérica as expressões internas a integral podem ser escritas em função das derivadas do deslocamento vertical, como apresentado por Paiva (1987), Pereira (2020):

$$\begin{aligned}
V_{n,m}^{1*}(p, q) \xi^2 - M_{n,m}^{1*}(p, q) \xi &= D_1 r_i m_i \left(\xi^2 \frac{d^4 w^{1*}(p, q)}{d\xi^4} - \right. \\
\left. -3 \frac{d^2 w^{1*}(p, q)}{d\xi^2} + \frac{3}{\xi} \frac{dw^{1*}(p, q)}{d\xi} \right) &
\end{aligned} \tag{3.193}$$

$$\begin{aligned}
Q_{n,m}^{1*}(p, q) \xi^2 - T_{n,m}^{1*}(p, q) \xi &= D_2 r_i m_i \left(\xi^2 \frac{d^4 v^{1*}(p, q)}{d\xi^4} - \right. \\
\left. -3 \frac{d^2 v^{1*}(p, q)}{d\xi^2} + \frac{3}{\xi} \frac{dv^{1*}(p, q)}{d\xi} \right) &
\end{aligned} \tag{3.194}$$

Sendo as derivadas direcionais de momento e esforço da placa superior dadas por:

$$M_{n,m}^{1*}(p, q) = -D_1 r_i m_i \left(\frac{d^3 w^{1*}(p, q)}{d\xi^3} + \frac{v_1}{\xi} \frac{d^2 w^{1*}(p, q)}{d\xi^2} - \frac{v_1}{\xi} \frac{dw^{1*}(p, q)}{d\xi} \right) \tag{3.195}$$

$$V_{n,m}^{1*}(p, q) = -D_1 r_i m_i \left(\frac{d^4 w^{1*}(p, q)}{d\xi^4} + \frac{1}{\xi} \frac{d^3 w^{1*}(p, q)}{d\xi^3} + \frac{(v_1 - 3) d^2 w^{1*}(p, q)}{\xi^2} + \frac{(3 - v_1) dw^{1*}(p, q)}{\xi^3} \right) \quad (3.196)$$

Já relativo a placa inferior, as derivadas direcionais de momento e esforço são dadas por:

$$T_{n,m}^{1*}(p, q) = -D_2 r_i m_i \left(\frac{d^3 v^{1*}(p, q)}{d\xi^3} + \frac{v_2}{\xi} \frac{d^2 v^{1*}(p, q)}{d\xi^2} - \frac{v_2}{\xi} \frac{dv^{1*}(p, q)}{d\xi} \right) \quad (3.197)$$

$$Q_{n,m}^{1*}(p, q) = -D_2 r_i m_i \left(\frac{d^4 v^{1*}(p, q)}{d\xi^4} + \frac{1}{\xi} \frac{d^3 v^{1*}(p, q)}{d\xi^3} + \frac{(v_2 - 3) d^2 v^{1*}(p, q)}{\xi^2} + \frac{(3 - v_2) dv^{1*}(p, q)}{\xi^3} \right) \quad (3.198)$$

Aplicando os limites nas expressões (3.193) e (3.194) e substituindo na (3.192) chega-se em:

$$\lim_{\Gamma_\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} Fm(\xi) d\Gamma_\xi = \lim_{\xi \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi - \beta_c} w_{,k}(p) n_k r_{,i} m_i d\emptyset \right] \quad (3.199)$$

Considerando a Figura 3.6, γ é o ângulo entre o sistema de coordenadas cartesianas (n_1, s_1) e (m, t) , podendo ser escrito para qualquer ponto do contorno Γ_ξ a relação:

$$r_{,i} m_i = \sin(\emptyset - \gamma) \quad (3.200)$$

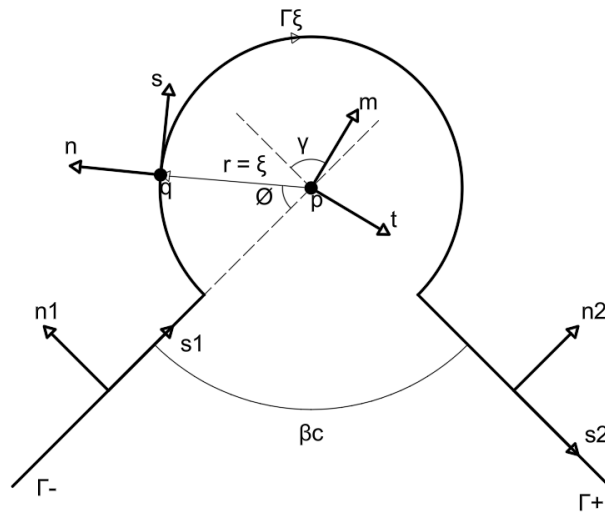


Figura 3.6 - sistemas de coordenadas do ponto p no subdomínio do contorno
 Fonte: Autor

As relações entre as derivadas de $w(p)$ nos sistemas de coordenadas (n, s) e (m, t) são:

$$w_{,k}(p) n_k = w_{,m}(p) m_{,n} + w_{,t}(p) t_{,n} \quad (3.201)$$

$$w_{,k}(p) s_k = w_{,m}(p) m_{,s} + w_{,t}(p) t_{,s} \quad (3.202)$$

O sistema de coordenadas (m, t) pode ser escrito em função do sistema de coordenadas (n, s) , conforme Figura 3.7.

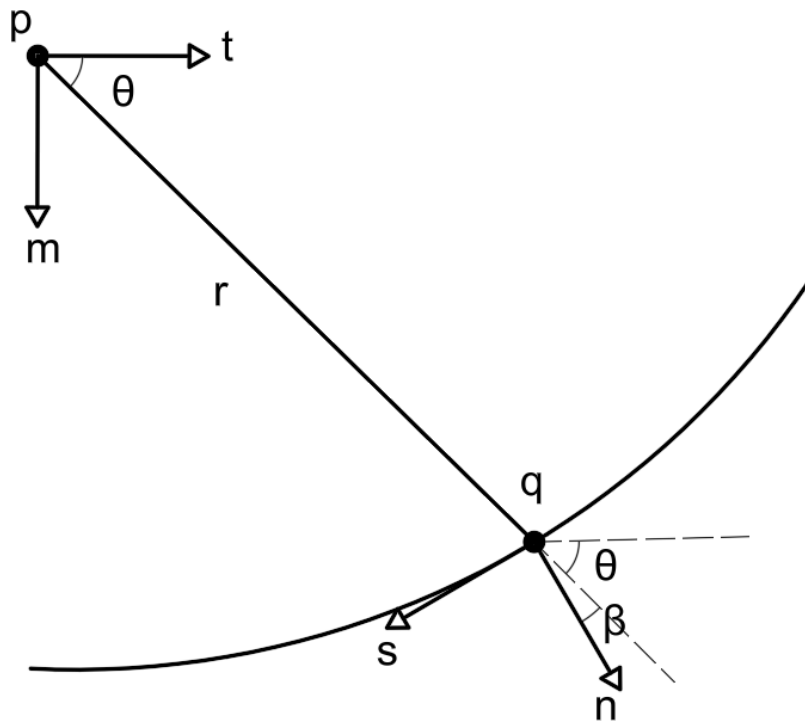


Figura 3.7 - Ponto q no contorno da placa e os respectivos vetores n e s.
 Fonte: Autor

$$m = m_p + n \operatorname{sen}(\theta + \beta) + s \operatorname{cos}(\theta + \beta) \quad (3.203)$$

$$t = t_p + n \operatorname{cos}(\theta + \beta) - s \operatorname{sen}(\theta + \beta) \quad (3.204)$$

$$\text{Fazendo } \theta + \beta = \frac{\pi}{2} - \phi + \gamma$$

$$m = m_p + n \operatorname{sen}(\phi - \gamma) + s \operatorname{cos}(\phi - \gamma) \quad (3.205)$$

$$t = t_p - n \operatorname{cos}(\phi - \gamma) + s \operatorname{sen}(\phi - \gamma) \quad (3.206)$$

Derivando as equações (3.205) e (3.206) em relação a n e s, tem-se:

$$m_{,n} = \operatorname{sen}(\phi - \gamma) \quad (3.207)$$

$$t_n = -\cos(\emptyset - \gamma) \quad (3.208)$$

$$m_s = \cos(\emptyset - \gamma) \quad (3.209)$$

$$t_s = \sin(\emptyset - \gamma) \quad (3.210)$$

Substituindo (3.207), (3.208), (3.209) e (3.210) nas equações (3.201) e (3.202), tem-se:

$$w_{,k}(p) n_k = \sin(\emptyset - \gamma) w_{,m}(p) - \cos(\emptyset - \gamma) w_{,t}(p) \quad (3.211)$$

$$w_{,k}(p) s_k = \cos(\emptyset - \gamma) w_{,m}(p) + \sin(\emptyset - \gamma) w_{,t}(p) \quad (3.212)$$

Dessa forma, sabendo que $r_{,i} m_i = \sin(\emptyset - \gamma)$ e substituindo as equações (3.211) e (3.212) na equação (3.199), fica:

$$\lim_{\Gamma_\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} Fm(\xi) d\Gamma_\xi = \lim_{\xi \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi - \beta_c} \sin(\emptyset - \gamma)^2 w_{,m}(p) - \frac{1}{2} \sin 2(\emptyset - \gamma) w_{,t}(p) d\emptyset \right] \quad (3.213)$$

Integrando e calculando o limite da equação (3.213), obtém-se:

$$\lim_{\Gamma_\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} Em(\xi) d\Gamma_\xi = -\frac{1}{4\pi} \{ [(4\pi - 2\beta_c) + \sin(2\gamma + \beta_c) - \sin(2\gamma)] w_{,m}(p) + [\cos(2\gamma + \beta_c) - \cos(2\gamma)] w_{,t}(p) \} \quad (3.214)$$

De semelhante modo, a parcela da equação (3.184) referente a reação de canto da placa superior $R_{c,m}^{\text{sup } 1^*}$, para efeito de cálculo denominada de $R(\xi)$, conduz a:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} R(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \{ R_{c,m}^{*\Gamma^-}(p, q) [w_c^{\Gamma^-}(q) - w(p)] + R_{c,m}^{*\Gamma^+}(p, q) [w_c^{\Gamma^+}(q) - w(p)] \} \quad (3.215)$$

Fazendo o mesmo processo realizado por (Paiva, 1987) chega-se a conclusão que:

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow 0} R^{sup}(\xi) &= \frac{(1 - \nu_1)}{4\pi} \{ -[sen(2\varphi) - sen(2\varphi + \beta_c)]w_m(p) \\ &+ [\cos(2\varphi) - \cos(2\varphi + \beta_c)]w_t(p) \} \end{aligned} \quad (3.216)$$

De forma análoga para as reações de canto da placa inferior, fica:

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow 0} R^{inf}(\xi) &= \frac{(1 - \nu_2)}{4\pi} \{ -[sen(2\varphi) - sen(2\varphi + \beta_c)]v_m(p) \\ &+ [\cos(2\varphi) - \cos(2\varphi + \beta_c)]v_t(p) \} \end{aligned} \quad (3.217)$$

E as demais parcelas dependentes de ξ em (3.184) conduzem a valores nulos. Assim, após as substituições de (3.215) em (3.184), obtém-se a equação da derivada direcional no contorno.

$$\begin{aligned} &K_2 w(p)_{,m} + K_3 w(p)_{,t} + \int_{\Gamma} \{ V_{n,m}^{1*}(p, q) [w(q) - w(p)] - \\ &M_{n,m}^{1*}(p, q) [w_{,k}(q) n_k - w_{,k}(p) n_k] \} d\Gamma + \int_{\Gamma} \{ Q_{n,m}^{1*}(p, q) [v(q) - v(p)] - \\ &T_{n,m}^{1*}(p, q) [v_{,k}(q) n_k - v_{,k}(p) n_k] \} d\Gamma + \sum^{ncanto} R_{c,m}^{sup\ 1*} [w_c(q) - w(p)] + \\ &\sum^{ncanto} R_{c,m}^{inf\ 1*} [v_c(q) - v(p)] = \int_{\Gamma} [V_n(q) w_{,m}^{1*}(p, q) - \\ &M_n(q) w_{,km}^{1*}(p, q) n_k] d\Gamma + \int_{\Gamma} [Q_n(q) v_{,m}^{1*}(p, q) - \\ &T_n(q) v_{,km}^{1*}(p, q) n_k] d\Gamma + \lim_{\Gamma_{\xi} \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\xi}} [V_n(q) w_{,m}^{1*}(p, q) - \\ &M_n(q) w_{,km}^{1*}(p, q) n_k] d\Gamma + \lim_{\Gamma_{\xi} \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\xi}} [Q_n(q) v_{,m}^{1*}(p, q) - \\ &T_n(q) v_{,km}^{1*}(p, q) n_k] d\Gamma + \sum^{ncanto} R_c^{sup} w_{c,m}^{1*}(p, q) + \\ &\sum^{ncanto} R_c^{inf} v_{c,m}^{1*}(p, q) \end{aligned} \quad (3.218)$$

Onde:

$$(3.219)$$

$$K_2 = \begin{cases} 0, se p \notin \Omega \cup \Gamma \\ \frac{\beta_c}{2\pi} + \frac{\nu_1}{4\pi} [\text{sen}(2\varphi) + \text{sen}(2\varphi + \beta_c)], se p \in \Gamma \\ 1, se p \in \Omega \end{cases}$$

$$K_3 = \begin{cases} 0, se p \notin \Omega \cup \Gamma \\ \frac{\nu_1}{4\pi} [\text{sen}(2\varphi) + \text{sen}(2\varphi + \beta_c)], se p \in \Gamma \\ 1, se p \in \Omega \end{cases} \quad (3.220)$$

Realizando o mesmo procedimento para a placa inferior, fica:

$$K_4 v(p)_{,m} + K_5 v(p)_{,t} + \int_{\Gamma} \{V_{n,m}^{1*}(p, q) [w(q) - w(p)] -$$

$$M_{n,m}^{1*}(p, q) [w_{,k}(q) n_k - w_{,k}(p) n_k]\} d\Gamma + \int_{\Gamma} \{Q_{n,m}^{1*}(p, q) [v(q) - v(p)] -$$

$$T_{n,m}^{1*}(p, q) [v_{,k}(q) n_k - v_{,k}(p) n_k]\} d\Gamma + \sum^{ncanto} R_{c,m}^{\text{sup } 1*} [w_c(q) - w(p)] +$$

$$\sum^{ncanto} R_{c,m}^{\text{inf } 1*} [v_c(q) - v(p)] = \int_{\Gamma} [V_n(q) w_{,m}^{1*}(p, q) -$$

$$M_n(q) w_{,km}^{1*}(p, q) n_k] d\Gamma + \int_{\Gamma} [Q_n(q) v_{,m}^{1*}(p, q) -$$

$$T_n(q) v_{,km}^{1*}(p, q) n_k] d\Gamma + \lim_{\Gamma_{\xi} \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\xi}} [V_n(q) w_{,m}^{1*}(p, q) -$$

$$M_n(q) w_{,km}^{1*}(p, q) n_k] d\Gamma + \lim_{\Gamma_{\xi} \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\xi}} [Q_n(q) v_{,m}^{1*}(p, q) -$$

$$T_n(q) v_{,km}^{1*}(p, q) n_k] d\Gamma + \sum^{ncanto} R_c^{\text{sup}} w_{c,m}^{1*}(p, q) +$$

$$\sum^{ncanto} R_c^{\text{inf}} v_{c,m}^{1*}(p, q)$$
(3.221)

Onde:

$$K_4 = \begin{cases} 0, se p \notin \Omega \cup \Gamma \\ \frac{\beta_c}{2\pi} + \frac{\nu_2}{4\pi} [\text{sen}(2\varphi) + \text{sen}(2\varphi + \beta_c)], se p \in \Gamma \\ 1, se p \in \Omega \end{cases} \quad (3.222)$$

$$K_5 = \begin{cases} 0, & \text{se } p \notin \Omega \cup \Gamma \\ \frac{v_2}{4\pi} [\text{sen}(2\varphi) + \text{sen}(2\varphi + \beta_c)], & \text{se } p \in \Gamma \\ 1, & \text{se } p \in \Omega \end{cases} \quad (3.223)$$

Apesar das equações governantes do regime dinâmico e estático de placas duplas serem diferentes pode-se concluir que na singularidade o regime dinâmico das placas duplas tende ao regime estático. Consequentemente, nota-se que as equações apresentadas em (3.180), (3.181), (3.218)(3.98) e (3.221) são análogas as equações integrais de contorno para os deslocamentos e rotações do problema estático apresentadas por (Pereira, 2020).

Como o problema apresentado está sendo em vibração livre, não há necessidade do tratamento dos termos de cargas e passagem da integral de domínio do carregamento para integral de contorno.

3.3.4 Discretização das placas duplas em elementos de contorno

Convém observar que as equações integrais anteriormente discutidas estão definidas no meio contínuo (condições de contorno, carregamento, comportamento estrutural, etc), cujas soluções exatas em muitos casos são de difícil obtenção devido as limitações matemáticas. Diante disso, uma alternativa possível é procurar estabelecer uma solução aproximada adotando-se um problema discreto.

Já que o contorno definido no meio contínuo exige o monitoramento de infinitos pontos, um dos primeiros passos para obtenção da solução discreta é a definição de um número finito de pontos no contorno. Esse procedimento envolve a subdivisão do contorno da placa em segmentos, conforme ilustrado na Figura 3.8, denominados elementos de contorno, sobre os quais os deslocamentos e os esforços são aproximados por funções de interpolação previamente definidas.

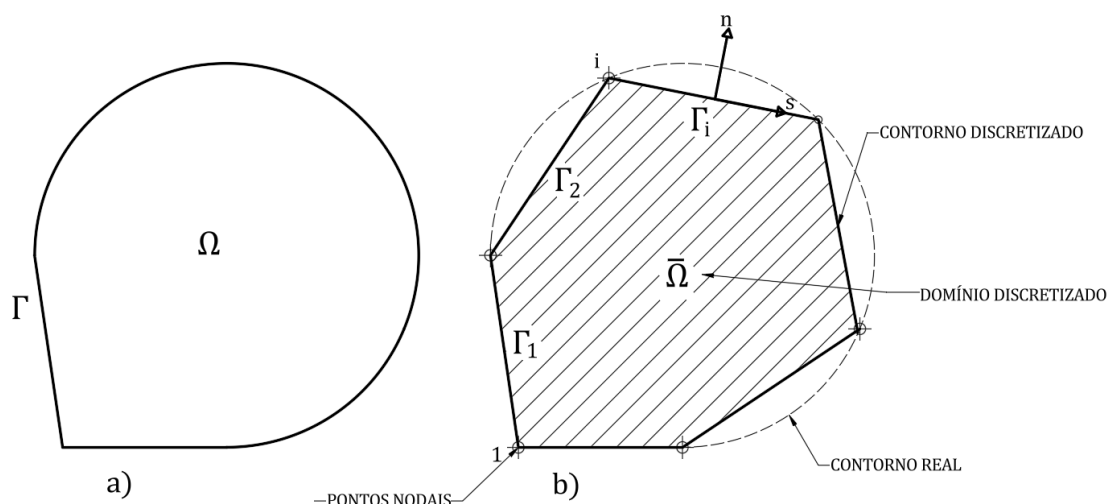


Figura 3.8 – a) Contorno contínuo b) Contorno discretizado
 Fonte: Autor

O sistema de equações lineares é formado pelas equações algébricas resultantes da transformação das equações integrais, nas quais as incógnitas correspondem aos deslocamentos e aos esforços avaliados em pontos nodais previamente definidos ao longo do contorno. Somente após a imposição das condições de contorno e a resolução do sistema de equações associado ao contorno é que os valores das grandezas no domínio podem ser determinados.

3.3.5 Equações integrais discretizadas

Para a solução pelo Método dos Elementos de Contorno (MEC), é necessário que as equações integrais apresentadas nas Equações (3.180) e (3.181) sejam formuladas com o ponto fonte posicionado, respectivamente, sobre o contorno ou fora do domínio, correspondendo às formas singular e regular da solução do MEC. A partir da definição da geometria do problema, procede-se à discretização do contorno em elementos de contorno, bem como à definição dos nós funcionais e à interpolação dos campos de interesse.

A interpolação é realizada por meio de polinômios, a partir dos quais se estabelece o número de pontos nodais de cada elemento, com o objetivo de aproximar os deslocamentos e os esforços ao longo do contorno. Dessa forma, os campos de deslocamentos e esforços podem ser expressos em função da matriz das funções aproximadoras $[\Phi_i]$ da seguinte maneira:

$$w = [\Phi_i]\{w_i\}_{\Gamma_j} \quad (3.224)$$

$$w_n = [\Phi_i] \{w_{ni}\}_{\Gamma_j} \quad (3.225)$$

$$M_n = [\Phi_i] \{M_{ni}\}_{\Gamma_j} \quad (3.226)$$

$$V_n = [\Phi_i] \{V_{ni}\}_{\Gamma_j} \quad (3.227)$$

$$v = [\Phi_i] \{v_i\}_{\Gamma_j} \quad (3.228)$$

$$v_n = [\Phi_i] \{v_{ni}\}_{\Gamma_j} \quad (3.229)$$

$$T_n = [\Phi_i] \{T_{ni}\}_{\Gamma_j} \quad (3.230)$$

$$Q_n = [\Phi_i] \{Q_{ni}\}_{\Gamma_j} \quad (3.231)$$

Substituindo as equações (3.224) à (3.231) nas equações integrais, obtém-se:

$$\begin{aligned} K_1 w(p) + \sum_{j=1}^{nelem} \int_{\Gamma_j} \left[[\varphi_i] \{w_i\}_{\Gamma_j} V_n^{1*} - [\varphi_i] \{w_{ni}\}_{\Gamma_j} M_n^{1*} + [\varphi_i] \{v_i\}_{\Gamma_j} Q_n^{1*} - \right. \\ \left. [\varphi_i] \{v_{ni}\}_{\Gamma_j} T_n^{1*} \right] d\Gamma + \sum_{c=1}^{ncantos} R_c^{sup1*} w_c + \sum_{c=1}^{ncantos} R_c^{inf1*} v_c = \\ \sum_{j=1}^{nelem} \int_{\Gamma_j} \left[[\varphi_i] \{V_{ni}\}_{\Gamma_j} w^{1*} - [\varphi_i] \{M_{ni}\}_{\Gamma_j} w_n^{1*} + [\varphi_i] \{Q_{ni}\}_{\Gamma_j} v^{1*} - \right. \\ \left. [\varphi_i] \{T_{ni}\}_{\Gamma_j} v_n^{1*} \right] d\Gamma + \sum_{c=1}^{ncantos} R_c^{sup} w_c^{1*}(p, q) + \sum_{c=1}^{ncantos} R_c^{inf} v_c^{1*}(p, q) \end{aligned} \quad (3.232)$$

Em que *nelem* representa o número total de elementos de contorno e *ncantos* corresponde ao número de cantos da placa.

Dessa forma, a equação integral discretizada da rotação da placa superior, considerando a colocação do ponto fonte no exterior ou no contorno suave, pode ser expressa por:

$$\begin{aligned}
& K_2 w_{,m}(p) + \sum_{j=1}^{nelem} \int_{\Gamma_j} \left[[\varphi_i] \{w_i\}_{\Gamma_j} V_{n,m}^{1*}(p, q) - [\varphi_i] \{w_{,m_i}\}_{\Gamma_j} M_{n,m}^{1*}(p, q) + \right. \\
& \left. [\varphi_i] \{v_i\}_{\Gamma_j} Q_{n,m}^{1*}(p, q) - [\varphi_i] \{v_{,m_i}\}_{\Gamma_j} T_{n,m}^{1*}(p, q) \right] d\Gamma + \sum_{c=1}^{ncantos} R_{c,m}^{sup1*} w_c + \\
& \sum_{c=1}^{ncantos} R_{c,m}^{inf1*} v_c = \sum_{j=1}^{nelem} \int_{\Gamma_j} \left[[\varphi_i] \{V_{n_i}\}_{\Gamma_j} w_{,m}^{1*}(p, q) - \right. \\
& \left. [\varphi_i] \{M_{n_i}\}_{\Gamma_j} w_{,nm}^{1*}(p, q) + [\varphi_i] \{Q_{n_i}\}_{\Gamma_j} v_{,m}^{1*}(p, q) - [\varphi_i] \{T_{n_i}\}_{\Gamma_j} v_{,nm}^{1*}(p, q) \right] d\Gamma + \\
& \sum_{c=1}^{ncantos} R_c^{sup} w_{c,m}^{1*}(p, q) + \sum_{c=1}^{ncantos} R_c^{inf} v_{c,m}^{1*}(p, q) +
\end{aligned} \tag{3.233}$$

De semelhante modo, a equação integral discretizada dos deslocamentos da placa inferior pode ser reescrita:

$$\begin{aligned}
& K_1 v(p) + \sum_{j=1}^{nelem} \int_{\Gamma_j} \left[[\varphi_i] \{w_i\}_{\Gamma_j} V_n^{2*} - [\varphi_i] \{w_{,m_i}\}_{\Gamma_j} M_n^{2*} + [\varphi_i] \{v_i\}_{\Gamma_j} Q_n^{2*} - \right. \\
& \left. [\varphi_i] \{v_{,m_i}\}_{\Gamma_j} T_n^{2*} \right] d\Gamma + \sum_{c=1}^{ncantos} R_c^{sup2*} w_c + \sum_{c=1}^{ncantos} R_c^{inf2*} v_c = \\
& \sum_{j=1}^{nelem} \int_{\Gamma_j} \left[[\varphi_i] \{V_{n_i}\}_{\Gamma_j} w^{2*} - [\varphi_i] \{M_{n_i}\}_{\Gamma_j} w_{,n}^{2*} + [\varphi_i] \{Q_{n_i}\}_{\Gamma_j} v^{2*} - \right. \\
& \left. [\varphi_i] \{T_{n_i}\}_{\Gamma_j} v_{,n}^{2*} \right] d\Gamma + \sum_{c=1}^{ncantos} R_c^{sup} w_c^{2*}(p, q) + \sum_{c=1}^{ncantos} R_c^{inf} v_c^{2*}(p, q)
\end{aligned} \tag{3.234}$$

Já a equação integral de rotação discretizada da placa inferior é escrita como:

$$\begin{aligned}
& K_4 v_{,m}(p) + \sum_{j=1}^{nelem} \int_{\Gamma_j} \left[[\varphi_i] \{w_i\}_{\Gamma_j} V_{n,m}^{2*}(p, q) - [\varphi_i] \{w_{,n_i}\}_{\Gamma_j} M_{n,m}^{2*}(p, q) + \right. \\
& \left. [\varphi_i] \{v_i\}_{\Gamma_j} Q_{n,m}^{2*}(p, q) - [\varphi_i] \{v_{,n_i}\}_{\Gamma_j} T_{n,m}^{2*}(p, q) \right] d\Gamma + \sum_{c=1}^{ncantos} R_{c,m}^{sup2*} w_c + \\
& \sum_{c=1}^{ncantos} R_{c,m}^{inf2*} v_c = \sum_{j=1}^{nelem} \int_{\Gamma_j} \left[[\varphi_i] \{V_{n_i}\}_{\Gamma_j} w_{,m}^{2*}(p, q) - \right. \\
& \left. [\varphi_i] \{M_{n_i}\}_{\Gamma_j} w_{,nm}^{2*}(p, q) + [\varphi_i] \{Q_{n_i}\}_{\Gamma_j} v_{,m}^{2*}(p, q) - [\varphi_i] \{T_{n_i}\}_{\Gamma_j} v_{,nm}^{2*}(p, q) \right] d\Gamma + \\
& \sum_{c=1}^{ncantos} R_c^{sup} w_{c,m}^{2*}(p, q) + \sum_{c=1}^{ncantos} R_c^{inf} v_{c,m}^{2*}(p, q)
\end{aligned} \tag{3.235}$$

3.3.6 Tipos de elementos de contorno

Na Figura 3.9 é possível observar o elemento contínuo a) e o elemento discretizado em “i” elementos com seus respectivos contornos Γ_i . Nesse trabalho optou-se para o contorno curvo duas alternativas de discretização: elementos retos e elementos circulares. Sendo a segunda alternativa mais eficaz se o contorno do problema for circular, já que a geometria é aproximada de forma exata.

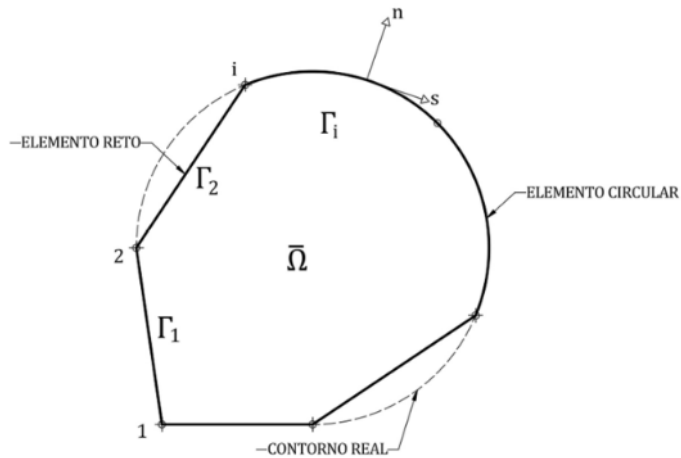


Figura 3.9 - Elementos de contorno
Fonte: Autor

São associados para cada elemento um ou mais pontos denominados “nós” ou “pontos nodais”, sendo os valores associados a eles conhecidos como “valores nodais”. Os

deslocamentos e esforços ao longo de cada elemento discretizado são aproximados mediante funções interpoladoras que, na maioria das vezes, divididas em constante, função linear e função quadrática, o que implica elementos com um, dois ou três pontos nodais, respectivamente.

Para o esse trabalho, serão utilizados elementos isoparamétricos lineares, sendo assim será utilizada a função linear contínua (2.99) e (2.100), logo, os deslocamentos e esforços aproximados são dados por:

$$w = [\varphi_1 \quad \varphi_2] \begin{Bmatrix} w_i \\ w_j \end{Bmatrix}_{\Gamma_k} \quad (3.236)$$

$$w_n = [\varphi_1 \quad \varphi_2] \begin{Bmatrix} w_{ni} \\ w_{nj} \end{Bmatrix}_{\Gamma_k} \quad (3.237)$$

$$M_n = [\varphi_1 \quad \varphi_2] \begin{Bmatrix} M_{ni} \\ M_{nj} \end{Bmatrix}_{\Gamma_k} \quad (3.238)$$

$$V_n = [\varphi_1 \quad \varphi_2] \begin{Bmatrix} V_{ni} \\ V_{nj} \end{Bmatrix}_{\Gamma_k} \quad (3.239)$$

$$v = [\varphi_1 \quad \varphi_2] \begin{Bmatrix} v_i \\ v_j \end{Bmatrix}_{\Gamma_k} \quad (3.240)$$

$$v_n = [\varphi_1 \quad \varphi_2] \begin{Bmatrix} v_{ni} \\ v_{nj} \end{Bmatrix}_{\Gamma_k} \quad (3.241)$$

$$T_n = [\varphi_1 \quad \varphi_2] \begin{Bmatrix} T_{ni} \\ T_{nj} \end{Bmatrix}_{\Gamma_k} \quad (3.242)$$

$$Q_n = [\varphi_1 \quad \varphi_2] \begin{Bmatrix} Q_{ni} \\ Q_{nj} \end{Bmatrix}_{\Gamma_k} \quad (3.243)$$

Sendo i e j os nós associados a cada elemento de contorno Γ_k .

Convém notar que algumas geometrias contêm variação na direção dos elementos, implicando em uma variação repentina das propriedades geométricas entre dois elementos consecutivos e como consequência, uma descontinuidade das variáveis, como ocorre nos cantos. Uma solução para mitigar isso está na consideração de dois nós com a mesma coordenada, ditos “nós duplos”, com o objetivo de impor a formulação de duas equações independentes para o ponto nodal, como condição para representar a descontinuidade.

Para efetuar corretamente as integrações das soluções fundamentais ponderadas pelas funções aproximadoras, é indispensável considerar certas propriedades geométricas do elemento linear. Visando simplificar as expressões das relações matemáticas e a representação gráfica, o sistema de coordenadas (x, y) passa a ser denotado por (x_1, x_2) . Na sequência, apresentam-se as principais relações relevantes para a análise.

a) Coordenadas do ponto campo

$$\begin{cases} x_q = \varphi_1 x_i + \varphi_2 x_j \\ y_q = \varphi_1 y_i + \varphi_2 y_j \end{cases} \quad (3.244)$$

b) Comprimento do raio vetor (distância entre o ponto campo q e o ponto fonte p)

$$r = \sqrt{(x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2} \quad (3.245)$$

c) Cossenos diretores do raio vetor

$$\begin{cases} r_{,1} = \frac{x_q - x_p}{r} \\ r_{,2} = \frac{y_q - y_p}{r} \end{cases} \quad (3.246)$$

d) Cossenos diretores do elemento

$$\begin{cases} s_1 = \frac{x_j - x_i}{r} \\ s_2 = \frac{y_j - y_i}{r} \end{cases} \quad (3.247)$$

e) Cossenos diretores da normal ao elemento

$$\begin{cases} n_1 = \frac{y_j - y_i}{r} \\ n_2 = -\frac{x_j - x_i}{r} \end{cases} \quad (3.248)$$

f) Comprimento do elemento

$$L = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} \quad (3.249)$$

A Figura 3.9 apresenta a representação de um elemento circular de raio R , definido por dois nós funcionais localizados nas coordenadas (x_i, y_i) e (x_j, y_j) . Esses nós delimitam o elemento e caracterizam sua posição e orientação no domínio geométrico analisado. A partir dessa representação, são introduzidas e discutidas, na sequência, algumas propriedades geométricas relevantes.

$$\begin{cases} x_c = x_i + \Delta x \\ y_c = y_i + \Delta y \end{cases} \quad (3.252)$$

d) Coordenadas do ponto campo q

$$\begin{cases} x_q = \cos(\xi\alpha)(x_i - x_c) - \text{sen}(\xi\alpha)(y_i - y_c) + x_c \\ y_q = \cos(\xi\alpha)(y_i - y_c) - \text{sen}(\xi\alpha)(x_i - x_c) + y_c \end{cases} \quad (3.253)$$

Sendo ξ a coordenada adimensional ao longo da curva com origem no nó inicial.

e) Cossenos diretores da normal ao elemento circular:

$$\begin{cases} \eta_x = \frac{x_q - x_c}{R} \\ \eta_y = \frac{y_q - y_c}{R} \end{cases} \quad (3.254)$$

Além disso, $s_x = -\eta_y$ e $s_y = \eta_x$.

3.3.7 Equações algébricas

O sistema algébrico associado à estrutura somente poderá ser completamente definido após a inserção dos pontos-fonte correspondentes a todos os nós de contorno e de canto nas equações integrais discretizadas (3.232), (3.233), (3.234) e (3.235), bem como após o cálculo das integrais necessárias. Uma vez realizados esses procedimentos, o sistema pode ser expresso na forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} H_{RR} & H_{RC} \\ H_{CR} & H_{CC} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_R \\ u_C \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{RR} & G_{RC} \\ G_{CR} & G_{CC} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_R \\ p_C \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_R \\ f_C \end{Bmatrix} \quad (3.255)$$

Para este trabalho, tratando-se de vibração livre onde não há carga externa aplicada a equação (3.255) pode ser reduzida a:

$$\begin{bmatrix} H_{RR} & H_{RC} \\ H_{CR} & H_{CC} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_R \\ u_C \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{RR} & G_{RC} \\ G_{CR} & G_{CC} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_R \\ p_C \end{Bmatrix} \quad (3.256)$$

Em que H representa a matriz de influência dos deslocamentos e G a matriz de influência dos esforços. Vale salientar que as submatrizes dos deslocamentos $H_{\Gamma\Gamma}$, $H_{\Gamma C}$, $H_{C\Gamma}$, H_{CC} e dos esforços $G_{\Gamma\Gamma}$, $G_{\Gamma C}$, $G_{C\Gamma}$, G_{CC} são geradas de acordo com a localização do ponto fonte (p) e do ponto campo (q), podendo ser contorno-contorno $\Gamma\Gamma$, contorno-canto ΓC , canto-contorno $C\Gamma$ ou canto-canto CC , como ilustrado na Figura 3.10.

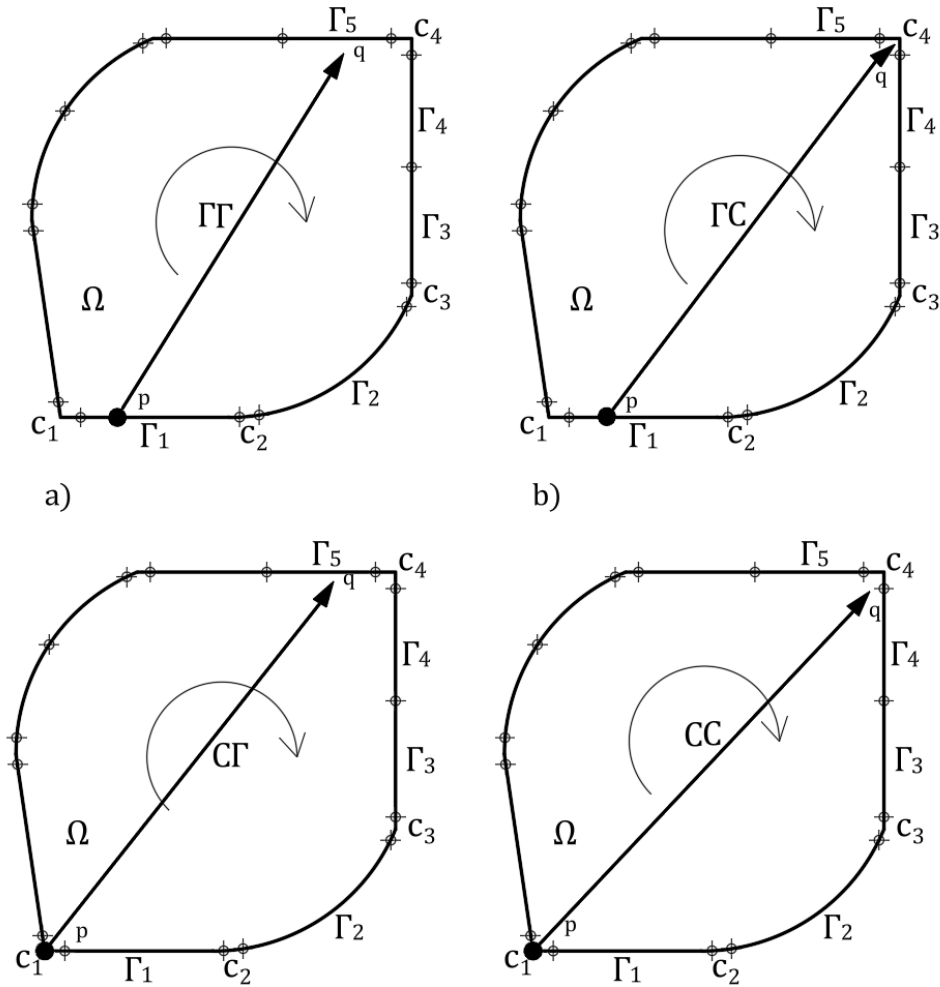


Figura 3.10 - Representação das partições das matrizes de influência
Fonte: Autor

A equação (3.256) pode ser escrita de forma compacta como:

$$[H]\{U\} = [G]\{P\} \quad (3.257)$$

Abaixo seguem as matrizes dos deslocamentos e esforços.

$$U(q) = \begin{bmatrix} w(q) & -w_n(q) & v(q) & -v_n(q) \\ \frac{d}{dn}w(q) & -\frac{d}{dn}w_n(q) & \frac{d}{dn}v(q) & -\frac{d}{dn}v_n(q) \end{bmatrix} \quad (3.258)$$

$$P(q) = \begin{bmatrix} V_n(q) & -M_n(q) & Q_n(q) & -T_n(q) \\ \frac{d}{dn}V_n(q) & -\frac{d}{dn}M_n(q) & \frac{d}{dn}Q_n(q) & -\frac{d}{dn}T_n(q) \end{bmatrix} \quad (3.259)$$

$$U^*(p, q) = \begin{bmatrix} w_n^{*1}(p, q) & -w_n^{*1}(p, q) & v_n^{*1}(p, q) & -v_n^{*1}(p, q) \\ \frac{d}{dn}w_n^{*1}(p, q) & -\frac{d}{dn}w_n^{*1}(p, q) & \frac{d}{dn}v_n^{*1}(p, q) & -\frac{d}{dn}v_n^{*1}(p, q) \\ w_n^{*2}(p, q) & -w_n^{*2}(p, q) & v_n^{*2}(p, q) & -v_n^{*2}(p, q) \\ \frac{d}{dn}w_n^{*2}(p, q) & -\frac{d}{dn}w_n^{*2}(p, q) & \frac{d}{dn}v_n^{*2}(p, q) & -\frac{d}{dn}v_n^{*2}(p, q) \end{bmatrix} \quad (3.260)$$

$$P^*(p, q) = \begin{bmatrix} V_n^{*1}(p, q) & -M_n^{*1}(p, q) & Q_n^{*1}(p, q) & -T_n^{*1}(p, q) \\ \frac{d}{dn}V_n^{*1}(p, q) & -\frac{d}{dn}M_n^{*1}(p, q) & \frac{d}{dn}Q_n^{*1}(p, q) & -\frac{d}{dn}T_n^{*1}(p, q) \\ V_n^{*2}(p, q) & -M_n^{*2}(p, q) & Q_n^{*2}(p, q) & -T_n^{*2}(p, q) \\ \frac{d}{dn}V_n^{*2}(p, q) & -\frac{d}{dn}M_n^{*2}(p, q) & \frac{d}{dn}Q_n^{*2}(p, q) & -\frac{d}{dn}T_n^{*2}(p, q) \end{bmatrix} \quad (3.261)$$

3.3.8 Aplicação das condições de contorno e resolução do sistema

Para encontrar as incógnitas, torna-se necessário resolver o sistema matricial (3.257), para isso deve-se aplicar as condições de contorno, conforme Quadro 3.1.

Quadro 3.1 – Condições de contorno

Tipo de vinculação	Placa	Prescrições	Incógnitas
Engastada (C)	Placa superior	$w = w_n = 0$	V_n, M_n
	Placa inferior	$v = v_n = 0$	Q_n, T_n
Simplesmente apoiada (S)	Placa superior	$w = M_n = 0$	w_n, V_n
	Placa inferior	$v = T_n = 0$	v_n, Q_n
Livre (F)	Placa superior	$V_n = M_n = 0$	w, w_n
	Placa inferior	$Q_n = T_n = 0$	v, v_n

Após a aplicação das condições de contorno citadas no Quadro 3.1, torna-se necessário realizar a separação de variáveis.

Em teoria as frequências naturais são aquelas que anulam o determinante da matriz $[A]$ presente na equação (2.115), por ser a solução não-trivial. Porém, como as frequências não conseguem ser retiradas das funções de Bessel e de Kelvin presentes na matriz, deve-se utilizar um método iterativo para determinar as frequências naturais. Neste trabalho foram retiradas as frequências naturais (ω_n) fazendo uma varredura de frequência, sendo elas retiradas após uma mudança no sinal da tangente da função gerada pelo determinante da matriz $[A]$, conforme a Figura 3.11, salientando-se que a incrementação das frequências é dada por $\Delta\omega$.

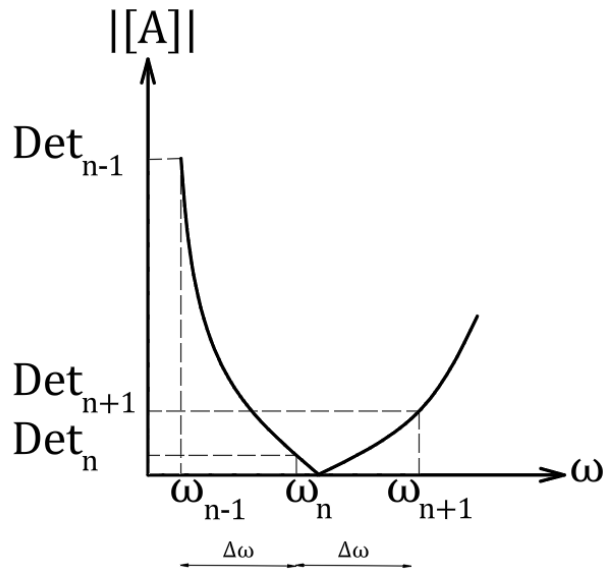


Figura 3.11 - Gráfico norma do determinante da matriz $[A]$ pela frequência
Fonte: Autor

4. VALIDAÇÃO NUMÉRICA

Neste capítulo são apresentados um conjunto de exemplos visando mostrar o desempenho da técnica do MEC desenvolvida frente a outras respostas analíticas e/ou numéricas. Os parâmetros gerais da análise são mostrados na seção 4.1, os exemplos para placas simples isoladas nas seções 4.2 e 4.3, os exemplos de placas simples apoiadas em base elástica de Winkler são apresentados nas seções 4.4 e 4.5 e os exemplos de placas duplas interconectadas por camada elástica de Winkler são apresentados nas seções 4.6 e 4.7.

4.1 Parâmetros da análise

Visando estruturar o código para obtenção dos futuros resultados, foi gerado o código para a resolução de placas simples e placas duplas em regime dinâmico permanente.

Foram calculadas as frequências naturais parametrizadas (ϖ) para placas simples isoladas e sobre base elástica de Winkler nas geometrias circular e retangular e também foram calculadas as frequências naturais parametrizadas para as placas duplas circulares e retangulares. Tendo como variação da frequência para todos os casos $\Delta\varpi = 0.001$.

A expressão da frequência parametrizada foi a mesma utilizada por Leissa (1969) que é apresentada como $\varpi = a^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}} \omega$.

Sendo a o raio para as placas circulares e a largura para as placas retangulares.

Visando melhorar a apresentação dos resultados foi estabelecido para os exemplos deste trabalho a massa específica uma relação entra a rigidez e a espessura $\rho = D/h$, dessa forma a frequência natural parametrizada tem o mesmo valor da frequência natural normal. Ademais, para calcular a frequência parametrizada foi utilizado um coeficiente de mola parametrizado (K) em função do coeficiente de Winkler (K_w) dado por $K = a^4 K_w / D$.

Para as condições de contorno foi tomada a representação (SSSS) para placas retangulares simplesmente apoiadas nas quatro bordas, (CCCC) para placas retangulares engastadas nas quatro bordas e (CSCS) para placas retangulares engastadas em duas bordas opostas e simplesmente apoiadas nas outras duas. Relativo às placas circulares foi tomado (S) para as placas com a borda simplesmente apoiada e (C) para as placas com a borda engastada, já que o contorno dos exemplos analisados é assumido com a mesma condição de contorno.

Para validação dos resultados as placas, tanto simples quanto duplas, foram discretizadas em 8 elementos (MEC 8) e 16 elementos (MEC 16) para placas circulares e 16 elementos (MEC 16) e 32 elementos (MEC 32) para placas retangulares, vide Figura 4.1.

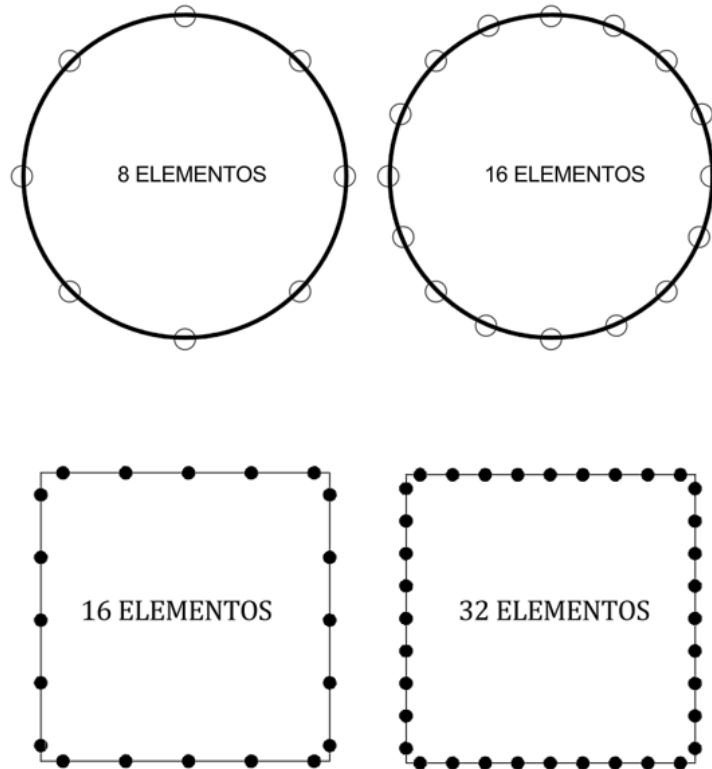


Figura 4.1 - Discretização dos elementos utilizados

4.2 Placa simples retangular isolada

Considere uma placa retangular isolada simplesmente apoiada nas suas quatro bordas, conforme Figura 4.2. As dimensões da placa são dadas por: 1,00 metro de largura (a), 1,00 metro de comprimento (b) e 0,05 metros de espessura (h). No que tange o material da placa, o módulo de elasticidade é dado por $E = 1000 \text{ N/m}^2$ e o coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$.

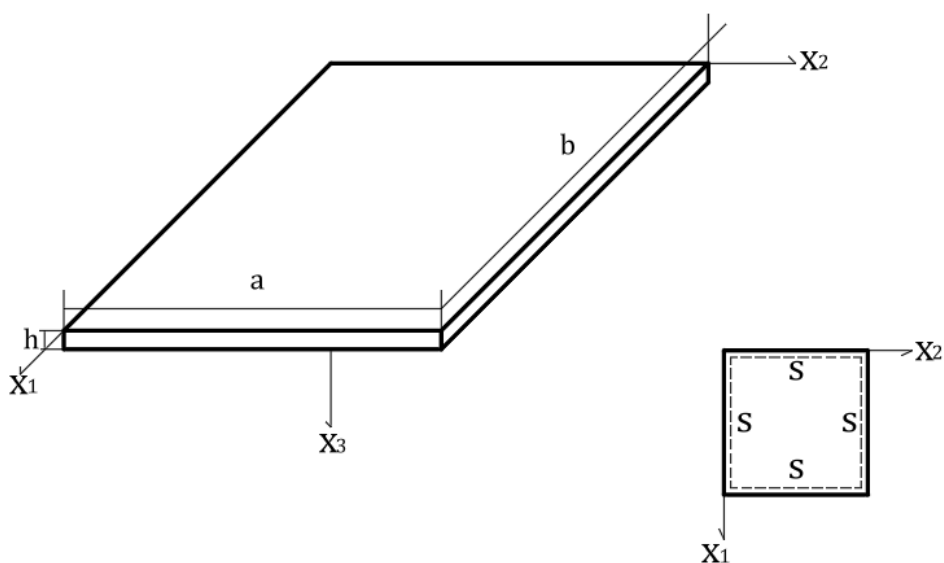


Figura 4.2 - Representação da placa retangular simples isolada (SSSS)

Fonte: Autor

Foram calculadas as frequências naturais parametrizadas para esse caso, utilizando discretização de 16 e 32 elementos retos de contorno. Os resultados, numérico via MEC e analítico através da solução apresentada por Leissa (1969), cuja equação está apresentada em (A.5) no Apêndice A, encontram-se na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 - Frequências parametrizadas ω para placa retangular simples isolada (SSSS)

MEC 16	MEC 32	Leissa (1969)
20,062	19,796	19,739
1,636%	0,289%	
50,157	49,476	49,348
1,639%	0,259%	
81,783	79,348	78,957
3,579%	0,495%	
101,338	98,771	98,696
2,677%	0,076%	
133,088	128,984	128,305
3,728%	0,529%	

Observa-se da Tabela 4.1 que com 32 elementos o MEC já alcança valores significativamente próximos da solução analítica, tendo uma média de 0,330% de erro relativo e os erros sendo inferiores a 0,6% para as cinco primeiras frequências naturais parametrizadas apresentadas.

Utilizando os mesmos dados da placa simplesmente apoiada, foram calculadas as frequências naturais parametrizadas para a placa engastada em todas as bordas, conforme Figura 4.3. Os resultados seguem na

Tabela 4.2.

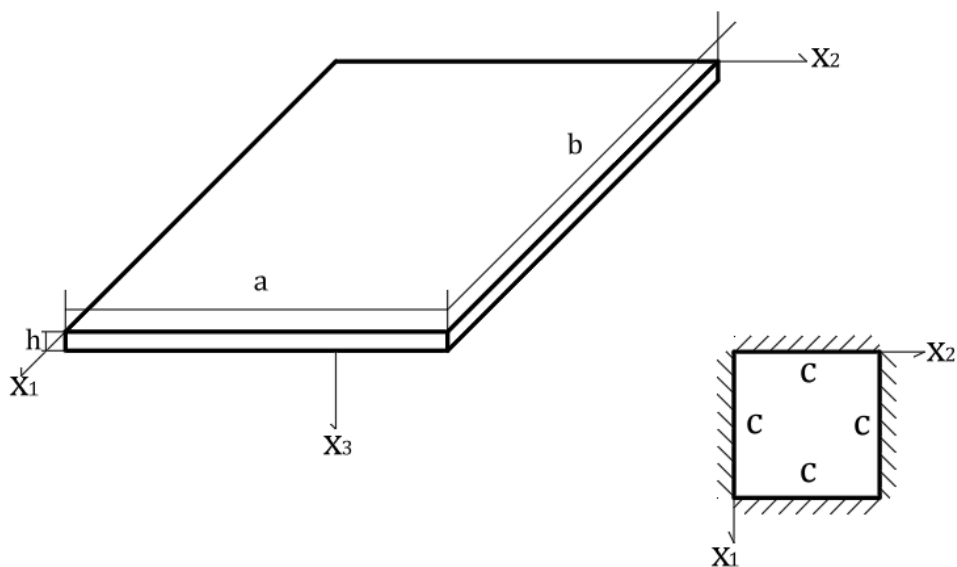


Figura 4.3 - Representação da placa retangular simples isolada (CCCC)

Fonte: Autor

Tabela 4.2-Frequências parametrizadas ω para placa simples isolada (CCCC)

MEC 16	MEC 32	Leissa (1969)
35,935	35,982	35,988
0,147%	0,017%	
73,135	73,383	73,411
0,376%	0,038%	
106,899	108,172	108,264
1,261%	0,085%	
131,204	131,554	131,630
0,324%	0,058%	
132,175	132,175	132,250
0,057%	0,057%	

Para a placa engastada em todas as bordas, tanto 16 quanto 32 elementos apresentaram valores demasiadamente próximos da solução analítica apresentada por Leissa (1969), tendo uma média de 0,051% de erro relativo e os erros sendo inferiores a 0,1% para as cinco primeiras frequências naturais parametrizadas apresentadas.

Considere, agora, uma placa retangular simples e isolada, engastada em duas direções opostas e simplesmente apoiada nas outras duas (CSCS), vide Figura 4.4

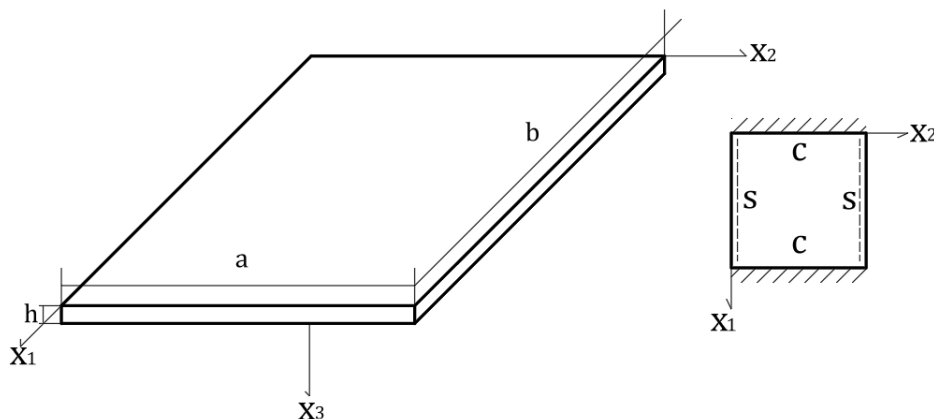


Figura 4.4 - Representação da placa retangular simples isolada (CSCS)
Fonte: Autor

Sendo a sua espessura de 0,05 metros e as mesmas propriedades de material dos casos supracitados, os valores da primeira frequência natural parametrizada para diferentes valores de razão de aspecto $1 \leq b/a \leq 3$ encontram-se na Tabela 4.3, contendo uma comparação com os resultados apresentados por Leissa (1969).

Tabela 4.3 - Relação entre a razão de aspecto e as Frequências naturais parametrizadas ω

b/a	MEC 32	Leissa (1969)	Erro relativo
1,0	28,934	28,946	0,041 %
1,5	17,353	17,369	0,092 %
2,0	13,663	13,688	0,183 %
2,5	12,112	12,129	0,140 %
3,0	11,335	11,359	0,211 %

Dos resultados nota-se a redução no valor da frequência natural parametrizada com o aumento da razão de aspecto, é notório esse comportamento tendo em vista o aumento do

contorno simplesmente apoiado em relação ao contorno engastado, observando que as frequências para a placa simplesmente apoiada Tabela 4.1 são menores que as frequências para placa engastada.

4.3 Placa simples circular isolada

Considere uma placa circular isolada simplesmente apoiada em todo o seu contorno, conforme Figura 4.5. A placa tem raio de 1 metro e 0,05 metros de espessura (h). No que tange o material da placa, o módulo de elasticidade é dado por $E = 1000 \text{ N/m}^2$ e o coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$.

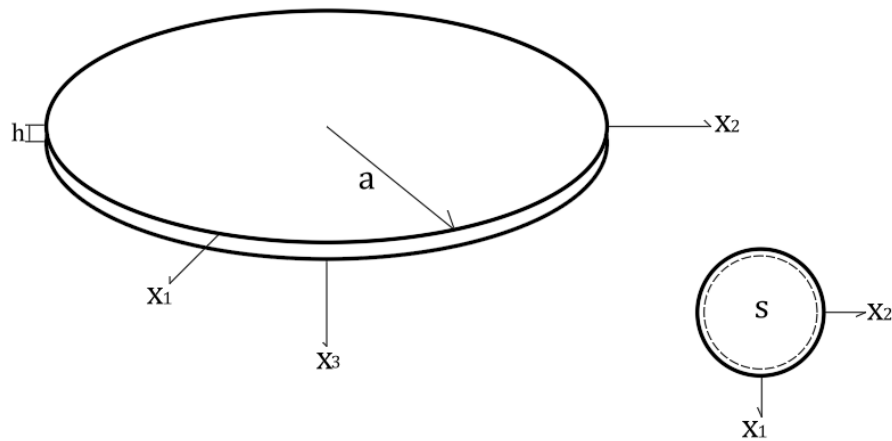


Figura 4.5 - Representação da placa circular simples isolada (S)
Fonte: Autor

Foram calculadas as frequências naturais parametrizadas para a placa circular simples utilizando discretização de 8 e 16 elementos circulares de contorno. Os resultados comparando os valores das frequências naturais parametrizadas via MEC com as frequências com os resultados apresentados por Leissa (1969), estão presentes na Tabela 4.4.

Tabela 4.4 – Frequências naturais parametrizadas ω para placa circular simples (S)

MEC 8	MEC 16	Analítica
4,937	4,937	4,937
0,000%	0,000%	
13,920	13,898	13,898

0,158%	0,000%	
25,442	25,624	25,614
0,672%	0,039%	
29,724	29,724	29,724
0,000%	0,000%	
48,344	48,483	48,483
0,287%	0,000%	

Nota-se a partir das informações apresentadas na Tabela 4.4 que com 8 elementos os resultados já são bastante satisfatórios, gerando erros relativos inferiores a 0,7% com média de 0,223%. Já os resultados para a discretização do contorno em 16 elementos foram iguais aos da solução analítica até três casas decimais após a vírgula para a maioria das frequências naturais, sendo apenas uma não exata com erro relativo de 0,039%, gerando uma média aritmética do erro relativo de cerca de 0,008%.

Considerando agora que a placa esteja engastada em todo o seu contorno, conforme ilustrado na Figura 4.6.

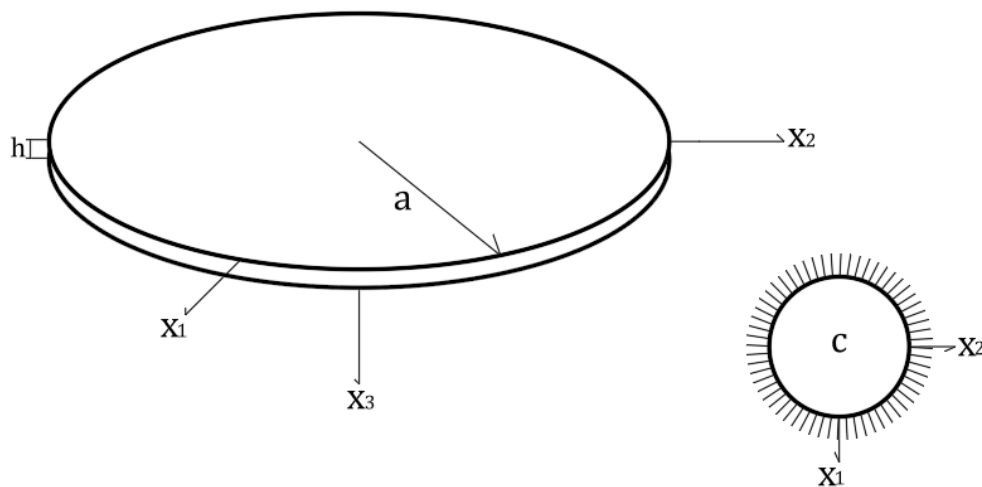


Figura 4.6 - Representação da placa circular simples isolada (C)
Fonte: Autor

As frequências parametrizadas para a placa circular simples engastada encontram-se na Tabela 4.5 sendo apresentada a comparação com os resultados fornecidos por Leissa (1969).

Tabela 4.5 - Frequências naturais parametrizadas ω para placa circular simples (C)

MEC 8	MEC 16	Analítica
10,214 0,000%	10,214 0,000%	10,214
21,234 0,127%	21,261 0,000%	21,261
34,316 1,620%	34,881 0,000%	34,881
39,766 0,000%	39,766 0,000%	39,766
60,637 0,307%	60,824 0,000%	60,824

Observa-se da tabela superior que as frequências calculadas numericamente via MEC pra 8 elementos alcançaram valores próximos dos valores calculados analiticamente. Já na discretização de 16 elementos, o valor ficou exatamente o mesmo do analítico para a consideração de três casas decimais após a vírgula. Convém notar que as frequências naturais parametrizadas aumentaram se comparadas ao caso em que a placa está simplesmente apoiada em todo o contorno, isso pode ser observado na Tabela 4.6.

Tabela 4.6 - Comparação entre as Frequências naturais parametrizadas ω nas placas (S) com as placas (C)

8 Elementos		16 Elementos	
(S)	(C)	(S)	(C)
4,937	10,214	4,937	10,214
13,920	21,234	13,898	21,261
25,442	34,316	25,624	34,881
29,724	39,766	29,724	39,766
48,344	60,637	48,483	60,824

4.4 Placa simples retangular sobre base elástica de Winkler

Considere uma placa retangular apoiada sobre base elástica de Winkler simplesmente apoiada nas suas quatro bordas, conforme Figura 4.7. As dimensões da placa são dadas por:

1,00 metro de largura (a), 1,00 metro de comprimento (b) e 0,05 metros de espessura (h). Relativo ao material da placa, o módulo de elasticidade é dado por $E = 1000 \text{ N/m}^2$ e o coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$. O coeficiente de Winkler adimensional da base elástica é de 100.

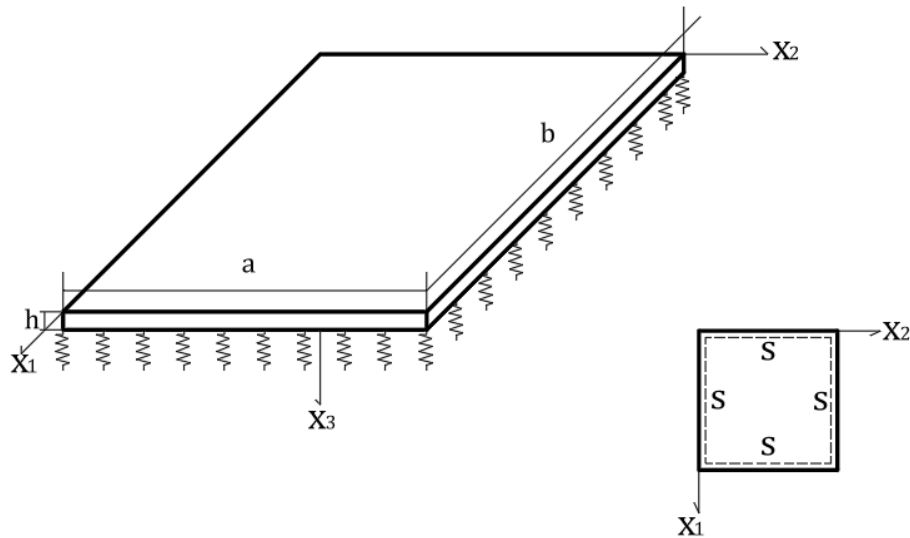


Figura 4.7 - Representação da placa retangular simples sobre base elástica de Winkler (SSSS)
Fonte: Autor

Foram calculadas as frequências naturais parametrizadas para esse caso, utilizando discretização de 16 e 32 elementos retos de contorno. Concomitantemente, foram gerados os valores analíticos para referência através do Método de Navier, vide equação (A.4) do Apêndice A. Os resultados comparando os valores das frequências via MEC com as frequências via solução analítica de Navier estão presentes na Tabela 4.7.

Tabela 4.7 – Frequências naturais parametrizadas ω para placa retangular simples sobre base elástica de Winkler (SSSS)

MEC 16	MEC 32	Analítica
22,416 1,302%	22,179 0,230%	22,128
51,144 1,575%	50,476 0,248%	50,351
82,392 3,523%	79,975 0,486%	79,588
98,943 0,260%	99,275 0,075%	99,201
133,463 3,706%	129,371 0,526%	128,694

Para esse exemplo nota-se que, na discretização de 16 elementos, houveram erros maiores que os casos das placas isoladas chegando até erros de mais de 3%. Uma das justificativas para isso pode ser o aumento da frequência com a adição da base elástica de Winkler que acaba aumentando a rigidez do sistema. Não obstante, para o contorno discretizado em 32 elementos, nota-se resultados satisfatórios já que o erro relativo está inferior a 1%.

Visando observar a relação entre a frequência natural e a base elástica, foram calculadas as frequências naturais parametrizadas para variação dos coeficientes de Winkler em $K = 0$ (Placa isolada), $K = 100$, $K = 450$ e $K = 1000$, para a placa retangular simplesmente apoiada nas quatro bordas. Os resultados estão presentes na Tabela 4.8.

Tabela 4.8 – Frequência natural parametrizada ω para diferentes valores de K em placas simples

K	0	100	450	1000
ω	20,062	22,416	29,198	37,450

Nota-se que a variação da frequência parametrizada é pouca para a ordem de grandeza da variação do coeficiente de Winkler. Porém, é perceptível que há o aumento da frequência natural como consequência do aumento da rigidez do sistema. O gráfico apresentado na Figura 4.8 destaca o comportamento de aumento da frequência natural.

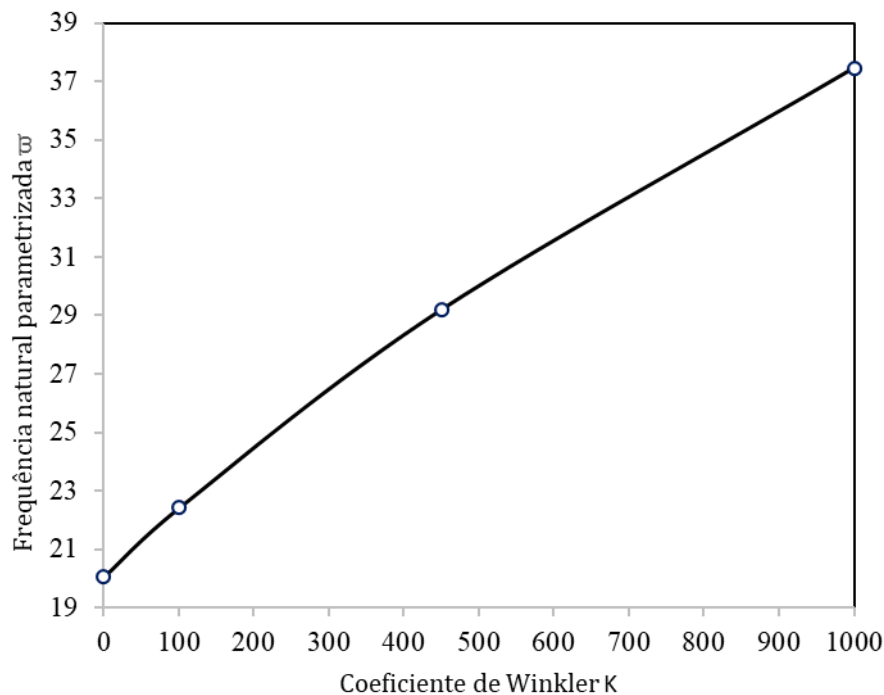


Figura 4.8 – Gráfico utilizando aproximação linear do comportamento da frequência natural parametrizada ω da placa simples com o aumento dos valores de K

Fonte: Autor

4.5 Placa simples circular sobre base elástica de Winkler

Considere uma placa circular apoiada sobre base elástica de Winkler simplesmente apoiada em todo o seu contorno, conforme Figura 4.9. A placa tem raio de 1 metro e 0,05 metros de espessura (h). Relativo ao material da placa, o módulo de elasticidade é dado por $E = 1000 \text{ N/m}^2$ e o coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$. O coeficiente de Winkler da base elástica K é de 100.

As frequências naturais parametrizadas obtidas por meio do MEC com discretização de 8 e 16 elementos em arco, são comparadas com aquelas apresentadas no trabalho de Dutta *et al* (2023), no qual foi utilizada uma discretização significativamente mais refinada, com 1350 elementos em arco. A comparação é realizada tomando como referência a solução analítica, com o objetivo de avaliar a convergência dos resultados obtidos pelo MEC. Os valores comparativos estão apresentados na Tabela 4.9.

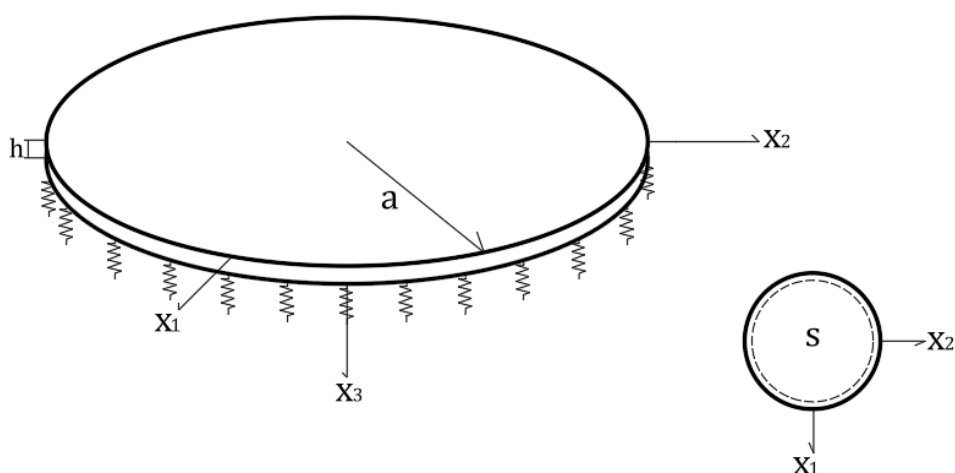


Figura 4.9 - Representação da placa circular simples sobre base elástica de Winkler (S)
 Fonte: Autor

Tabela 4.9 - Frequências naturais parametrizadas $\bar{\omega}$ para placa circular simples sobre base elástica de Winkler (S)

MEF 1350 (15 x 90)	MEC 8	MEC 16	Analítica
-	9,928 0,040%	9,925 0,081%	9,932
11,106 0,448%	11,152 0,036%	11,151 0,045%	11,156
17,054 0,415%	17,148 0,134%	17,123 0,012%	17,125
31,014 1,100%	31,358 0,003%	31,357 0,006%	31,359
49,325 0,364%	49,347 0,319%	49,501 0,008%	49,505

A análise dos resultados apresentados na Tabela 4.9 indica que o MEC apresentou ótima convergência com a solução analítica. Mesmo utilizando uma discretização simples, com 8 elementos, os valores das frequências naturais já se mostraram bastante próximos da solução analítica, apresentando erros relativos inferiores a 0,5%, com erro relativo médio de 0,107%. Relativo a discretização em 16 elementos, observa-se uma melhora ainda mais significativa na precisão dos resultados. Neste caso, as frequências naturais obtidas pelo MEC praticamente coincidem com os valores analíticos, apresentando diferenças apenas a partir da segunda casa decimal. O erro relativo médio reduz-se para cerca de 0,030%, evidenciando a rápida convergência do método. Além disso, ao comparar os resultados obtidos neste trabalho com

aqueles apresentados por Dutta *et al* (2023), observa-se que o MEC alcança precisão superior, mesmo utilizando um número significativamente menor de elementos. Enquanto no estudo de Dutta *et al* (2023) foi empregada uma malha com 1350 elementos no MEF, no MEC com 8 e 16 elementos já apresentaram valores mais próximos da solução analítica. Convém notar que além da discretização pelo MEC ser significativamente menor que a utilizando MEF, os graus de liberdade também são menores, sendo 4 graus de liberdade por elemento no MEC, enquanto no MEF são 12 graus de liberdade. Sendo esses parâmetros uma evidência da redução de memória computacional utilizando o MEC, se comparado ao uso do MEF.

De semelhante modo, foi realizado o estudo de convergência para a placa circular engastada. A comparação entre o MEC com 8 e 16 elementos em arco com os resultados obtidos por Dutta *et al* (2023) utilizando 1350 elementos em arco, encontra-se na Tabela 4.10.

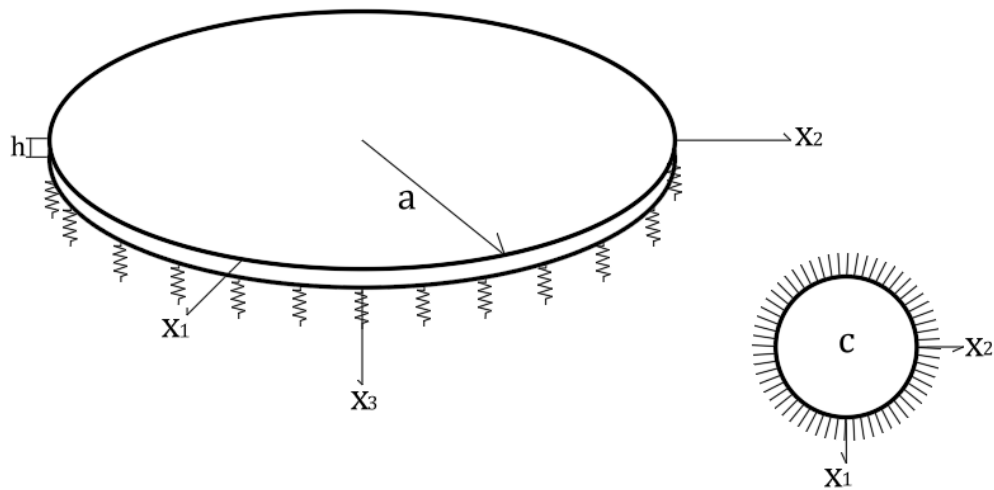


Figura 4.10 - Representação da placa circular simples sobre base elástica de Winkler (C)
Fonte: Autor

Tabela 4.10 - Frequências naturais parametrizadas ω para placa circular simples sobre base elástica de Winkler (C)

MEF 1350 (15 x 90)	MEC 8	MEC 16	Analítica
14,234 0,385%	14,295 0,042%	14,296 0,049%	14,289
23,433 0,247%	23,465 0,111%	23,496 0,021%	23,491
36,231 0,135%	35,932 0,959%	36,284 0,011%	36,280
40,522 1,192%	41,008 0,007%	41,009 0,005%	41,011
61,386 0,419%	61,228 0,675%	61,645 0,002%	61,644

Nota-se a partir das informações apresentadas na Tabela 4.10 que até com a discretização em 8 elementos o MEC já apresenta resultados bastante satisfatórios, gerando erros relativos inferiores a 1% com média de 0,359%. Já os resultados para o MEC com a discretização do contorno em 16 elementos foram iguais aos da solução analítica até duas casas decimais após a vírgula para a maioria das frequências naturais, gerando uma média aritmética do erro relativo de cerca de 0,018%. Ademais, os resultados obtidos por MEC tiveram convergência melhor e mais rápida que os resultados obtidos via MEF no trabalho de Dutta *et al* (2023) que com uma discretização no domínio de 1350 elementos obtiveram um erro relativo médio de 0,476%.

4.6 Sistema de placas duplas retangulares

Considere o sistema formado por duas placas retangulares interconectadas por camada elástica de Winkler. A placa superior tem como espessura $h_1 = 0,05 \text{ m}$ e a placa inferior $h_2 = 0,05 \text{ m}$, ambas as placas possuem largura (a) e comprimento (b) de 1,00 metro, conforme Figura 4.11.

Ambas as placas tem módulo de elasticidade de 1000 N/m^2 , coeficiente de Poisson de 0,3 e massa específica parametrizada como $\rho_1 = D_1/h_1$ para a placa superior e $\rho_2 = D_2/h_2$ para a placa inferior, para a camada interconectante foi utilizado $K = 1000$.

Para os resultados foram consideradas discretizações em 16 e 32 elementos retos. Ademais, no Apêndice A consta uma solução analítica que foi desenvolvida no trabalho, tendo como base o método de Navier, para obtenção das frequências naturais exatas (A.7) e (A.8) das placas duplas retangulares ambas com todos os bordos simplesmente apoiados (SSSS). A comparação entre os resultados obtidos via MEC e os valores obtidos via solução analítica encontram-se na Tabela 4.11.

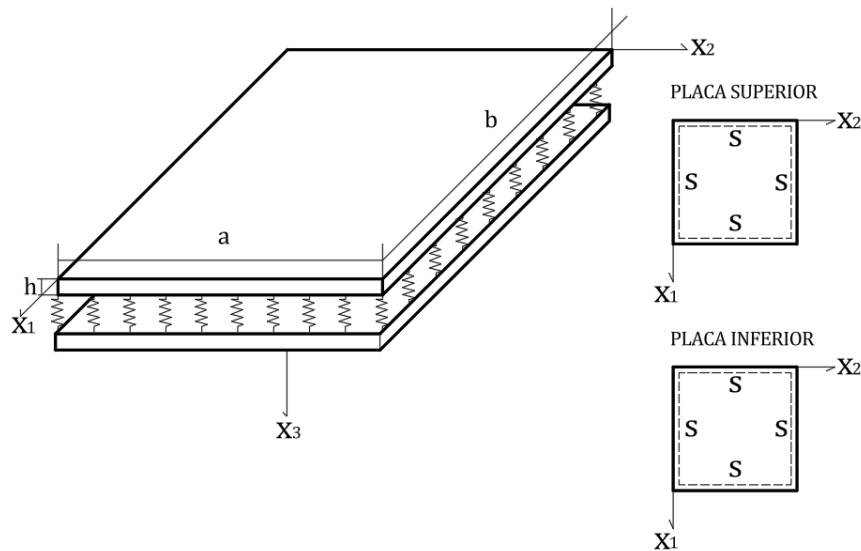


Figura 4.11 - Representação do sistema de placas duplas retangulares ambas (SSSS)
Fonte: Autor

Tabela 4.11 - Frequências naturais parametrizadas ω do sistema de placas duplas retangulares ambas (SSSS)

MEC 16	MEC 32	Analítica
1,981	1,947	1,942
2,008%	0,257%	
3,602	3,585	3,586
0,446%	0,028%	
4,904	4,874	4,855
1,009%	0,391%	
5,804	5,704	5,715
1,557%	0,192%	
9,969	10,168	10,168
1,957%	0,325%	

Observa-se que os valores numéricos obtidos pelo MEC apresentam boa concordância com os resultados analíticos para todas as frequências avaliadas. Para a discretização com 16

elementos, os erros relativos variam entre aproximadamente 0,446% e 2,008%, indicando que o método já fornece resultados satisfatórios mesmo com um nível moderado de discretização. Relativo a discretização em 32 elementos os resultados foram excelentes, gerando um erro relativo médio de cerca de 0,018%.

4.7 Sistema de placas duplas circulares

Considere o sistema formado por duas placas circulares interconectadas por camada elástica de Winkler. A placa superior tem como espessura $h_1 = 0,05m$ e a placa inferior $h_2 = 0,05m$, ambas as placas possuem raio de 1 metro, sendo o raio da placa superior identificado por a_1 e o da placa inferior identificado como a_2 .

Ambas as placas tem módulo de elasticidade de 1000 N/m^2 , coeficiente de Poisson de $0,3$ e massa específica parametrizada como $\rho_1 = D_1/h_1$ para a placa superior e $\rho_2 = D_2/h_2$ para a placa inferior, para a camada interconectante foi utilizado $K = 1000$.

Na literatura Kunukkasseril e Swamidas (1973) apresentaram soluções analíticas para placas duplas circulares, no caso em que a placa superior está simplesmente apoiada e a inferior livre. Tomando como referência os cálculos realizados por eles, neste trabalho foram realizadas as soluções analíticas para placas duplas circulares nas condições de contorno das placas simplesmente apoiadas e engastadas, conforme descrito no Apêndice B.

Na situação das placas, superior e inferior, simplesmente apoiada em todo o seu contorno, vide Figura 4.12 os resultados encontram-se na Tabela 4.12.

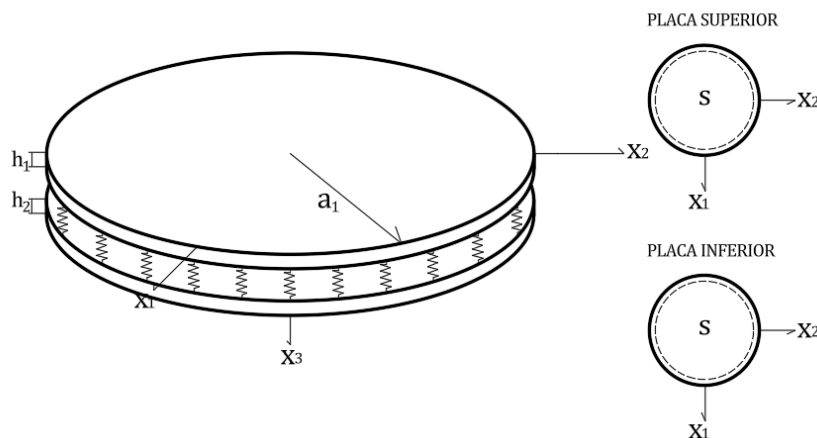


Figura 4.12 - Representação do sistema de placas duplas circulares ambas (S)
Fonte: Autor

Tabela 4.12 - Frequência natural parametrizada ϖ do sistema de placas duplas circulares ambas (S)

MEC 8	MEC 16	Analítica
4,936	4,939	4,935
0,020%	0,081%	
14,979	14,980	14,982
0,020%	0,013%	
25,661	25,456	25,613
0,187%	0,613%	
32,915	32,917	32,923
0,024%	0,018%	
48,491	48,348	48,465
0,054%	0,241%	

A partir das informações apresentadas na Tabela 4.12 percebe-se que até com 8 elementos os resultados já são bastante satisfatórios, gerando erros relativos inferiores a 1% com média de 0,193%. Já os resultados para a discretização do contorno em 16 elementos os erros ficaram inferiores a 0,2%, gerando uma média aritmética do erro relativo de cerca de 0,061%.

Na situação das placas, superior e inferior, ambas engastadas em todo o seu contorno (C), vide Figura 4.13 os resultados encontram-se na Tabela 4.13

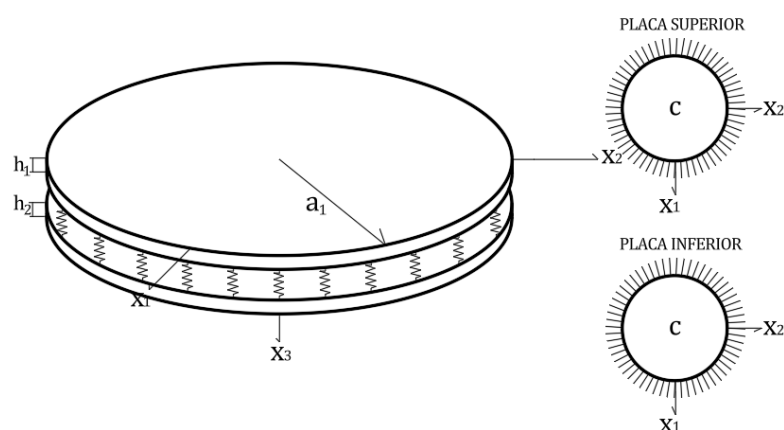


Figura 4.13 - Representação do sistema de placas duplas circulares ambas (C)

Fonte: Autor

Tabela 4.13 - Frequência natural parametrizada ω do sistema de placas duplas circulares ambas (C)

MEC 8	MEC 16	Analítica
10,216	10,216	10,223
0,068%	0,068%	
17,446	17,446	17,446
0,000%	0,000%	
21,222	21,258	21,260
0,179%	0,009%	
25,509	25,532	25,552
0,168%	0,078%	
35,070	34,857	34,875
0,559%	0,052%	

A partir das informações apresentadas na Tabela 4.13 percebe-se que até com 8 elementos os resultados já são bastante satisfatórios, gerando erros relativos inferiores a 0,6% com média de 0,195%. Já os resultados para a discretização do contorno em 16 elementos foram iguais aos da solução analítica até duas casas decimais após a vírgula para a maioria das frequências naturais, gerando uma média aritmética do erro relativo de cerca de 0,042%.

Supondo agora que as placas estejam com condições diferentes de contorno, a superior engastada e a inferior simplesmente apoiada, conforme a Figura 4.14

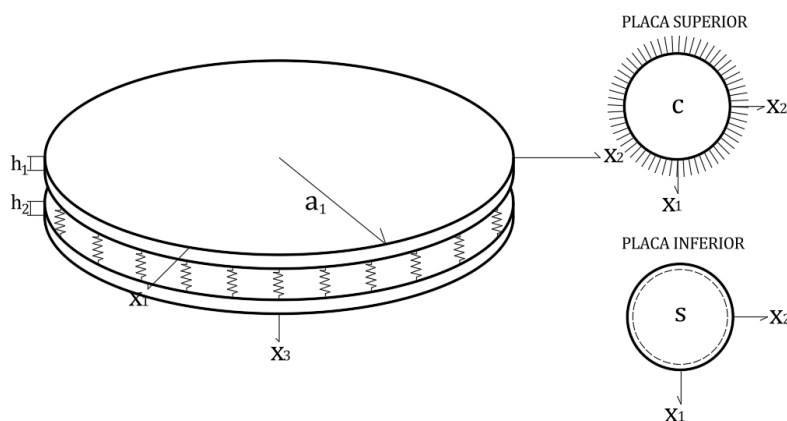


Figura 4.14 - Representação do sistema de placas duplas circulares sendo a superior (C) e a inferior (S)

Fonte: Autor

Os valores das frequências naturais para a discretização de 8 e 16 elementos deste caso encontram-se na tabela Tabela 4.14.

Tabela 4.14 - Frequência natural parametrizada ω do sistema de placas duplas circulares sendo a superior (C) e a inferior (S)

MEC 8	MEC 16	Analítica
16,168 0,099%	16,154 0,012%	16,152
24,140 0,120%	24,160 0,037%	24,169
27,030 0,618%	27,239 0,151%	27,198
31,171 0,010%	31,168 0,000%	31,168
35,900 1,695%	36,487 0,088%	36,519

Para este caso, com distintas condições de contorno para as placas superior e inferior, observa-se a partir da Tabela 4.14 que os resultados, tanto para a discretização de 8 elementos, quanto para a discretização de 16 elementos, apresentam erros relativamente baixos. De fato, na discretização de 8 elementos teve uma média aritmética de 0,508% enquanto na discretização de 16 elementos foi de 0,058%, ou seja, uma melhora significativa nos resultados para uma pouca variação na discretização.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Uma formulação do Método dos Elementos de Contorno (MEC) para a análise de vibração livre de um sistema de placas duplas conectadas por uma camada elástica do tipo Winkler foi apresentada neste trabalho. Entre as principais contribuições do estudo, destaca-se a adaptação do MEC para a análise dinâmica desse sistema estrutural elasticamente conectado, incluindo a proposição da solução fundamental apropriada ao problema e o estabelecimento das equações integrais correspondentes.

Foram realizados exemplos numéricos com o objetivo de avaliar o desempenho da formulação proposta, considerando diferentes discretizações em problemas envolvendo placas retangulares e placas circulares. Testes de convergência foram realizados para verificar a estabilidade e a precisão das soluções obtidas. Os resultados indicaram boa concordância entre as respostas obtidas pelo MEC e as soluções analíticas apresentadas em Apêndice. Além disso, a análise dos resultados mostrou que as propriedades das placas, associadas à magnitude da constante de mola da fundação de Winkler, exercem influência significativa no comportamento vibratório do sistema.

Sugestões para trabalhos futuros

- Ampliação deste trabalho para obtenção dos modos de vibração.
- Utilização de bases elásticas mais refinadas, como as de Pasternak e Kerr.
- Utilização de teorias de placas espessas.
- Desenvolvimento de formulação para sistema de múltiplas placas.

BIBLIOGRAFIA

- ABRAMOWITZ, Milton; STEGUN, Irene A. **Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables**. In: Appl. 1972.
- AGUIAR, M. A. M. De. Tópicos de Mecânica Classica. [s. l.], 2010. .
- AL-FURJAN, M. S. H.; HABIBI, M.; JUNG, D. won; CHEN, G.; SAFARPOUR, M.; SAFARPOUR, H. Chaotic responses and nonlinear dynamics of the graphene nanoplatelets reinforced doubly-curved panel. **European Journal of Mechanics, A/Solids**, [s. l.], vol. 85, no. July 2020, p. 104091, 2021. DOI 10.1016/j.euromechsol.2020.104091. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2020.104091>.
- ALIABADI, M. H. **The Boundary Element Method**. 2nd ed. [S. l.: s. n.], 1996. <https://doi.org/10.1061/9780784401705.ch08>.
- BALAŠ, J.; SLÁDEK, V.; SLÁDEK, J. The Boundary Integral Equation Method for Plates Resting on a Two-Parameter Foundation. **ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik**, [s. l.], vol. 64, no. 3, p. 137–146, 1984a. <https://doi.org/10.1002/zamm.19840640302>.
- BALAŠ, J.; SLÁDEK, V.; SLÁDEK, J. The Boundary Integral Equation Method for Plates Resting on a Two-Parameter Foundation. **ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik**, [s. l.], vol. 64, no. 3, p. 137–146, 1984b. <https://doi.org/10.1002/zamm.19840640302>.
- BESKOS, D. E. **Dynamic Analysis of Plates and Shallow Shells by the D/BEM**. [S. l.]: Elsevier B.V., 1990. vol. 24, . DOI 10.1016/B978-0-444-88366-7.50012-9. Available at: <http://dx.doi.org/10.1016/B978-0-444-88366-7.50012-9>.
- BLEOTU, R. M.; PREDA, C. Study and analysis of sandwich panels for use in the construction of cabin roofs used on construction equipment. **Journal of Physics: Conference Series**, [s. l.], vol. 2540, no. 1, 2023. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2540/1/012031>.
- CALDERON, E. . **Uma formulacao alteranativa para o estudo de placas sobre fundacao elastica pelo MEC**. São Carlos: [s. n.], 1991.
- CHATE, A.; MAKINEN, K. Plane finite element for static and free vibration analysis of sandwich plates. [s. l.], vol. 23, no. 4, p. 413–422, 1994. .
- CHEN, Y.; LI, X.; DU, X. Thermal Performance of Double-Skin Roof with Inclined Upper Plate for Grain Depot: Modeling and Experimental Investigation. **Buildings**, [s. l.], vol. 13, no. 10, 2023. <https://doi.org/10.3390/buildings13102672>.
- CHUEIRI, L. H. M. **Formulação do Método dos Elementos de Contorno para análise elastoplástica de placas**. 1994. 229 f. Universidade de São Paulo, 1994.
- CIVILIZAÇÃO ENGENHEIRA. **Conheça quais são os tipos de laje (e, talvez, até mesmo o que seja laje)** (imagem). *Civilização Engenharia*, 27 dez. 2016. Disponível em: <https://civilizacaoengenhaira.wordpress.com/2016/12/27/conheca-quais-sao-os-tipos-de-laje-e-talvez-ate-mesmo-o-que-seja-laje/>. Acesso em: 04 mar. 2026.
- COSTA, J. A. Plate vibrations using B.E.M. **Applied Mathematical Modelling**, [s. l.], vol. 12, no. 1, p. 78–85, 1987. [https://doi.org/10.1016/0307-904X\(88\)90026-1](https://doi.org/10.1016/0307-904X(88)90026-1).
- COSTA, J. A.; BREBBIA, C. A. The boundary element method applied to plates on elastic foundations. **Engineering Analysis**, [s. l.], vol. 2, no. 4, p. 174–183, 1985. [https://doi.org/10.1016/0264-682X\(85\)90029-2](https://doi.org/10.1016/0264-682X(85)90029-2).
- DAMANPACK, A. R.; BODAGHI, M.; GHASSEMI, H.; SAYEHBANI, M. Boundary element method applied to the bending analysis of thin functionally graded plates. **Latin American Journal of Solids and Structures**, [s. l.], vol. 10, no. 3, p. 549–570, 2013. <https://doi.org/10.1590/S1679-78252013000300006>.
- DE ROSA, M. A; LIPPIELLO, M. Free vibrations of simply supported double plate on two models of elastic soils. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, v. 33, n. 3, p. 331–353, 2009. DOI: <https://doi.org/10.1002/nag.717>
- DUTTA, Ashis Kumar; BANDYOPADHYAY, Debasish; MANDAL, Jagat Jyoti. Higher-order finite element vibration analysis of circular raft on Winkler foundation. **International Journal of**

Geotechnical Earthquake Engineering, v. 14, n. 1, p. 1–15, 2023. DOI: <https://doi.org/10.4018/IJGEE.324112>.

EASY COMPOSITES EUROPE. Foam Cored Carbon Fibre Panel (imagem). **Easy Composites Europe**, s.d. Disponível em: <https://www.easycomposites.eu/foam-cored-carbon-fibre-panel/>. Acesso em: 04 mar. 2026.

GUMINIAK, M.; JANKOWIAK, T. The Analysis of Internally Supported Thin Plates By The Boundary Element Method . Part 3 – Initial Stability Analysis. **Institute of Structural Engineering, Piotrowo**, [s. l.], no. 10, p. 61–138, 2007. .

HAN, S.; OUNI, M. H. El; GHAZOUANI, N.; YAYLACI, M. Aerodynamic and control response of sandwich smart plates in aircraft wings subjected to lightning-induced hybrid electric shock: Advanced modeling and mitigation techniques. **Aerospace Science and Technology**, [s. l.], vol. 170, no. August 2025, p. 111506, 2025. DOI 10.1016/j.ast.2025.111506. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.ast.2025.111506>.

HEIDARI, E.; ARIAIEI, A. A new approach for free vibration analysis of a system of elastically interconnected similar rectangular plates. **Earthquake Engineering and Engineering Vibration**, [s. l.], vol. 21, no. 4, p. 947–967, 2022. <https://doi.org/10.1007/s11803-022-2129-9>.

HÖRMANDER, L. Linear partial differential operators. [S.l.] Springer, 1963.

JEONG, Kyeong-Hoon; KANG, Heung-Seok. Free Vibration of multiple rectangular plates coupled with a liquid. **International Journal of Mechanical Sciences**, vol. 74, p. 161-172, 2013. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2013.05.011>

KARAM, Vânia José. Aplicação do Método dos Elementos de Contorno à teoria de Reissner para flexão de placas. [s. l.], 1986. Acessado em: <http://hdl.handle.net/11422/17164>.

KATSIKADELIS, J. .; SAPOUNTZAKIS, E. . A BEM solution to dynamic analysis of plates with variable thickness. [s. l.], 1991. .

KATSIKADELIS, J. T.; KALLIVOKAS, L. F. Plates on biparametric elastic foundation by BDIE method. **Journal of Engineering Mechanics**, [s. l.], vol. 114, no. 5, p. 847–875, 1988. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2739-7_186.

KIM, Kwanghun; KWAK, Songhun; JANG, Paeksan; SOK, Myongkuk; JON, Sunjong; RI, Kumchol. Free vibration analysis of elastically connected composite laminated double-plate system with arbitrary boundary conditions by using meshfree method. **AIP Advances**, v. 11, n. 3, 2021. DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0040270>

KIRCHHOFF, Gustaf. Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe. **Journal für die Reine und Angewandte Mathematik (Crelles Journal)**, v. 1850, n. 40, p. 51-88, 1850.

KUNUKKASSERIL, V. X.; SWAMIDAS, A. S. J. Normal modes of elastically connected circular plates. **Journal of Sound and Vibration**, v. 30, n. 1, p. 99–108, 1973. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(73\)80053-7](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(73)80053-7)

LAQUINI, R. Uma Comparação Entre O Método Dos Elementos De Contorno E O Método Dos Elementos Finitos Em Problemas De Campo Escalar Bidimensionais Ortotrópicos. Vitória: [s. n.], 2016.

LEISSA, A. w. **Vibration of plates**. Ohio: [s. n.], 1969.

LUONG, V. H.; DO, N. T. The Moving Element Method for the Dynamic Responses of Floating Double-Plate Structures on the Shallow Water. **International Journal of Structural Stability and Dynamics**, [s. l.], vol. 24, no. 16, p. 1–27, 2024. <https://doi.org/10.1142/S0219455424501852>.

MA, Yongbin; ZHANG, Sen; FAN, Junling; WANG, Yupeng; DENG, Zichen. Analytical solution of forced vibration of rectangular plates with part through surface crack based on wave propagation method. **Computers & Structures**, v. 299, p. 107402, 2024. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2024.107402>

MCELMAN, J. A. Flutter of two parallel flat plates connected by an elastic medium. **AIAA Journal**, [s. l.], vol. 2, no. 2, p. 377–379, 1964. <https://doi.org/10.2514/3.2336>.

MEDINA, D. F.; MAETHNER, S. R. Numerical simulation of hypervelocity impact experiments at velocities in excess of 10 km/s involving single and double plates. **Space Debris Detection and Mitigation**, [s. l.], vol. 1951, p. 118–129, 1993. <https://doi.org/10.1117/12.156541>.

MINDLIN. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates.

1951.

MIRIAN, A.; ARIAEI, A. Free and forced vibrations of an elastically interconnected annular plates system. **Archive of Applied Mechanics**, v. 93, p. 3025–3043, 2023. DOI:

<https://doi.org/10.1007/s00419-023-02413-4>

ND MAIS. **Enormes galerias serão instaladas em rua de Joinville antes de pavimentação; veja**

onde. ND Mais, Joinville, 13 out. 2023. Disponível em: <https://ndmais.com.br/transito/enormes-galerias-serao-instaladas-em-rua-de-joinville-antes-de-pavimentacao-veja-onde/>. Acesso em: 04 mar. 2026.

ONISZCZUK, Z. Transverse vibrations of the elastically connected rectangular double membrane compound system. **Journal of Sound and Vibration**, v. 221, n. 2, p. 235-250, 1999.

ONISZCZUK, Z. Free transverse vibrations of an elastically connected rectangular simply supported double-plate complex system. **Journal of sound and vibration**, v. 236, n. 4, p. 595-608, 2000.

ONISZCZUK, Z. Forced transverse vibrations of an elastically connected complex rectangular simply supported double-plate system. **Journal of sound and vibration**, v. 270, n. 4-5, p. 997-1011, 2004.

PAIVA, J. B. de. Formulação do Método dos Elementos de Contorno para flexão de placas e suas aplicações em engenharia de estruturas. [s. l.], p. 195, 1987.

PASTERNAK, N. L. New method for calculation of foundation on the elastic basement. Gosstroizdat, Moscow (in Russian), 1954.

PEREIRA, A. C. A. Análise de placas duplas delgadas elasticamente conectadas: uma abordagem pelo método dos elementos de contorno. [S. l.: s. n.], 2020.

<https://doi.org/https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/123456789/18629>.

PEREIRA, A. C. A. Formulação Do Método Dos Elementos De Contorno Para a Flexão De Placas Duplas Conectadas Por Camada Elástica De Pasternak. [s. l.], 2023. .

PEREIRA, A. C. A.; MACIEL, W. G. M.; MENDONCA, A. V. Static boundary element solution of double plates. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, [s. l.], vol. 143, no. August, p. 639–662, 2022. DOI 10.1016/j.enganabound.2022.07.010. Available at:

<https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2022.07.010>.

PEREIRA, A. C. A.; OLIVEIRA, D. B.; MENDONCA, A. V. Analytical solutions for double-plate systems with pasternak-type foundation in between. **Mechanics Research Communications**, [s. l.], vol. 131, no. June, p. 104164, 2023. DOI 10.1016/j.mechrescom.2023.104164. Available at:

<https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2023.104164>.

POURESMAEELI, S.; FAZELZADEH, S. A.; GHAVANLOO, E. Exact solution for nonlocal vibration of double-orthotropic nanoplates embedded in elastic medium. **Composites Part B: Engineering**, [s. l.], vol. 43, no. 8, p. 3384–3390, 2012.

<https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2012.01.046>.

PROVIDAKIS, C. P.; BESKOS, D. E. Free and forced vibrations of plates by boundary elements. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, [s. l.], vol. 74, no. 3, p. 231–250, 1989. [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(89\)90050-9](https://doi.org/10.1016/0045-7825(89)90050-9).

QIN, Q. H. Nonlinear analysis of reissner plates on an elastic foundation by the BEM. **International Journal of Solids and Structures**, [s. l.], vol. 30, no. 22, p. 3101–3111, 1993. DOI 10.1016/0020-7683(93)90141-S. Available at: [http://dx.doi.org/10.1016/0020-7683\(93\)90141-S](http://dx.doi.org/10.1016/0020-7683(93)90141-S).

REISSNER, Eric. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. 1945.

REDDY, J. N. A simple higher-order theory for laminated composite plates. **Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME**, [s. l.], vol. 51, no. 4, p. 745–752, 1984.

<https://doi.org/10.1115/1.3167719>.

SOUZA, M. M. Formulação Do Método Dos Elementos De Contorno Para placas delgadas em base elastica de kerr. João Pessoa: [s. n.], 2019.

<https://doi.org/https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/123456789/19310>.

SWAMIDAS, A. S. J.; KUNUKKASSERIL, V. X. Free vibration of elastically connected circular plate systems. **Journal of Sound and Vibration**, v. 30, n. 1, p. 99-108, 1973.

STERN, M. A general boundary integral formulation for the numerical solution of plate bending problems. **Journal of Composite Materials**, [s. l.], vol. 22, no. 8, p. 694–716, 1979.

<https://doi.org/10.1177/002199838802200801>.

STOJANOVIC, Vladimir; KOZIC, Predrag; RISTIC, Marko. Vibrations and stability analysis of multiple rectangular plates coupled with elastic layers based on different plate theories. **International Journal of Mechanical Sciences**. vol. 92, p. 233-244, 2015. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2014.10.027>

TAKAHASHI, D. Sound radiation from periodically connected double-plate structures. **Journal of Sound and Vibration**, [s. l.], vol. 90, no. 4, p. 541–557, 1983. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(83\)90810-6](https://doi.org/10.1016/0022-460X(83)90810-6).

TOPOLOGROUP. Carbon Fiber Foam Sandwich Panels (imagem). TOPOLOGROUP, s.d.. Disponível em: <https://topologroup.com/carbon-fiber-foam-sandwich-panels/>. Acesso em: 04 mar. 2026.

VENTSEL, E. S. A boundary element method applied to sandwich plates of arbitrary plan form. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 27, n. 6, p. 597–601, 2003. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0955-7997\(03\)00013-4](https://doi.org/10.1016/S0955-7997(03)00013-4).

VIVOLI, J. P. F. Eigenfrequencies of thin plates and layer potentials. **Centre de Recherches Physiques**, [s. l.], vol. 55, no. 3, p. 562–567, 1973. .

WANG; REDDY; LEE. **Shear Deformable Beams and plate**. [S. l.: s. n.], 2000. vol. 11, . Available at: <http://dx.doi.org/10.1016/j.regsciurbeco.2008.06.005>.

WEN, P. H.; ALIABADI, M. H.; YOUNG, A. A boundary element method for dynamic plate bending problems. **International Journal of Solids and Structures**, [s. l.], vol. 37, no. 37, p. 5177–5188, 2000. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(99\)00187-0](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(99)00187-0).

WHYTE, A. C. Kelvin functions and their derivatives. Disponível em: <https://acwhyte.droppages.com/kelgenpaper.htm>. Acesso em: 31 mar. 2026.

XING, Y.; LI, G.; YUAN, Y. A review of the analytical solution methods for the eigenvalue problems of rectangular plates. **International Journal of Mechanical Sciences**, [s. l.], vol. 221, no. July 2021, p. 107171, 2022. DOI 10.1016/j.ijmecsci.2022.107171. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2022.107171>.

YI-YUAN YU. Generalized Hamilton's Principle and Variational Equation of Motion in Nonlinear Elasticity Theory, with Application to Plate Theory. **the journal of acoustical society of america**, [s. l.], vol. 36, no. 1964, 1964. <https://doi.org/https://doi.org/10.1121/1.1918921>.

YOUTUBE. **Tov On The Road**. High-speed train at 350 kilometers per hour, how to lay 500 meters of steel rails (vídeo). YouTube, **Tov On The Road**, 2 anos atrás. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=WqFxpTyutCQ>. Acesso em: 04 mar. 2026.

ZHANG, D.; LI, Y.; CUI, C. A retrofitted case study of orthotropic steel bridge decks strengthened with sandwich plate system. **Advanced Materials Research**, [s. l.], vol. 255–260, p. 866–870, 2011. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMR.255-260.866>.

ZHOU, Y. R.; YAN, X. B.; WANG, M. X.; LIU, Y. C.; WEN, P. H. Dynamic fundamental solution of dipole for Kirchhoff plate on Winkler-Pasternak foundation. **Computers and Structures**, [s. l.], 2024. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2024.107498>.

APÊNDICE A

Solução analítica para placas duplas retangulares simplesmente apoiadas

A.1 Introdução

Nesta seção será apresentado o desenvolvimento da solução analítica pelo método de Navier para o sistema de placas duplas em regime dinâmico. Sendo primeiramente apresentada a solução para o problema de placas simples apoiadas em base elástica de Winkler.

A.2 Placas simples

A equação de movimento para regime permanente das placas simples apoiadas sobre base elástica, com o sistema sem amortecimento, é dada por:

$$DW\nabla^4 + WK_w + \rho h \frac{d^2W}{dt^2} = 0 \quad (\text{A.1})$$

O deslocamento pode ser encontrado pelo pelo Método de Navier, aplicando dupla série trigonométrica. No domínio da frequência esse deslocamento é dado por:

$$W = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} \text{sen}(X_m x) \text{sen}(Y_n y) e^{i\omega_{mn} t} \quad (\text{A.2})$$

Sendo $X_m = m \frac{\pi}{a}$, $Y_n = n \frac{\pi}{b}$ e M, N o número de iterações atribuídos para alcançar a convergência desejada.

Substituindo a equação (A.2) em (A.1), tem-se:

$$\left[D(X_m^2 + Y_n^2)^2 + K_w - \rho h \omega^2 \right] A_{mn} \text{sen}(X_m x) \text{sen}(Y_n y) e^{i\omega_{mn} t} = 0 \quad (\text{A.3})$$

Isolando a frequência ω , tem-se como frequência natural:

$$\omega = \sqrt{(1/\rho h) \left[D(X_m^2 + Y_n^2)^2 + K_w \right]} \quad (\text{A.4})$$

Quando $K_w = 0$ chega-se na equação da frequência natural para placas retangulares isoladas (sem base elástica):

$$\omega = \sqrt{(1/\rho h) [D(X_m^2 + Y_m^2)^2]} \quad (\text{A.5})$$

A.3 Sistema de placas duplas

A equação de movimento do sistema de placas duplas em regime dinâmico no domínio do tempo, pode ser escrita matricialmente como:

$$\begin{bmatrix} D_1 \nabla^4 + K_w + \rho_1 h_1 \frac{d^2}{dt^2} & -K_w \\ -K_w & D_2 \nabla^4 + K_w + \rho_2 h_2 \frac{d^2}{dt^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

Para o caso de ambas placas simplesmente apoiadas, as soluções e em série de duplos senos podem ser escritas como:

$$w = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N W_{mn} \text{sen}(X_m x) \text{sen}(Y_n y) e^{i\omega_{mn} t} \quad (\text{A.7})$$

$$v = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N V_{mn} \text{sen}(X_m x) \text{sen}(Y_n y) e^{i\omega_{mn} t} \quad (\text{A.8})$$

Sendo $X_m = m \frac{\pi}{a}$, $Y_n = n \frac{\pi}{b}$ e M, N o número de iterações atribuídos para alcançar a convergência desejada.

Quando as soluções harmônicas (A.7) e (A.8) forem substituídas na equação de movimento (A.6), fica:

$$\begin{bmatrix} D_1(X_m^2 + Y_n^2)^2 + K_w - S_1 \omega^2 & -K_w \\ -K_w & D_2(X_m^2 + Y_n^2)^2 + K_w - S_2 \omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_{mn} \\ V_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

Sendo $S_1 = \rho_1 h_1$ e $S_2 = \rho_2 h_2$.

As frequências naturais são calculadas a partir das raízes da função gerada pelo determinante da equação harmônica (A.9). Assim, a função é dada por:

$$\begin{vmatrix} D_1(X_m^2 + Y_m^2)^2 + K_w - S_1\omega^2 & -K_w \\ -K_w & D_2(X_m^2 + Y_m^2)^2 + K_w - S_2\omega^2 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

Em equação escalar:

$$S_1S_2\omega_{mn}^4 - \omega_{mn}^2 \left[(X_m^2 + Y_m^2)^2 (D_1S_2 + D_2S_1) + K_w(S_2 + S_1) \right] + (X_m^2 + Y_m^2)^2 \left[D_1D_2(X_m^2 + Y_m^2)^2 + K_w(D_1 + D_2) \right] = 0 \quad (\text{A.11})$$

Dessa forma, os quadrados das raízes da equação bi-quadrada em função da frequência (A.11) são dados por:

$$\omega_{mn_1}^2 = [1/(2S_1S_2)] \left\{ \left[(X_m^2 + Y_m^2)^2 (D_1S_2 + D_2S_1) + K_w(S_2 + S_1) \right] + \sqrt{\Delta} \right\} \quad (\text{A.12})$$

$$\omega_{mn_2}^2 = [1/(2S_1S_2)] \left\{ \left[(X_m^2 + Y_m^2)^2 (D_1S_2 + D_2S_1) + K_w(S_2 + S_1) \right] - \sqrt{\Delta} \right\} \quad (\text{A.13})$$

Sendo Δ dado por:

$$\Delta = \left[(X_m^2 + Y_m^2)^2 (D_1S_2 + D_2S_1) + K_w(S_2 + S_1) \right]^2 - 4S_1S_2(X_m^2 + Y_m^2)^2 K_w(D_1 + D_2) \quad (\text{A.14})$$

APÊNDICE B

Solução analítica para placas duplas circulares

B.1 Introdução

Nesta seção será apresentada as soluções analíticas para o problema de placas duplas circulares em regime dinâmico. Vale ressaltar que Kunukkasseril e Swamidas (1973) apresentaram a solução para o sistema de placa duplas na condição de contorno (CF), uma placa engastada (C) e a outra livre (F). Neste trabalho, será apresentada a solução para o sistema de placas duplas circulares nas condições de contorno de ambas as placas engastadas (CC), ambas as placas simplesmente apoiadas (SS) e uma placa engastada associada a outra simplesmente apoiada (CS).

Conforme apresentado por Kunukkasseril e Swamidas (1973), a equação de movimento das placas duplas para vibração simples pode ser escrita de forma parametrizada como:

$$\nabla^4 \bar{w} - \zeta^2 \bar{w} + q \bar{w} = q \bar{w} \quad (\text{B.1})$$

$$\nabla^4 \bar{v} - m_1 \zeta^2 \bar{v} + q l \bar{v} = q l \bar{v} \quad (\text{B.2})$$

Sendo $\bar{w} = w/a$ e $\bar{v} = v/a$, outras relações que serão utilizadas no trabalho são:

$$\rho_2 = r/a \quad (\text{B.3})$$

$$q = K_w a^4 / D_1 \quad (\text{B.4})$$

$$l = D_1 / D_2 \quad (\text{B.5})$$

$$m_1 = S_2 / S_1 \quad (\text{B.6})$$

$$\zeta^2 = S_1 q / K_w \quad (\text{B.7})$$

$$P_1 = \frac{(\lambda_1^2 - \zeta^2 + q)}{q} \quad (\text{B.8})$$

$$P_2 = \frac{(\lambda_2^2 - \zeta^2 + q)}{q} \quad (\text{B.9})$$

$$R_1 = m^2 - (1 - \nu_2)m - \lambda_1 \quad (\text{B.10})$$

$$R_2 = (1 - \nu_2)\sqrt{\lambda_1} \quad (\text{B.11})$$

$$R_3 = m^2 - (1 - \nu_2)m + \lambda_1 \quad (\text{B.12})$$

$$R_4 = m^2 - (1 - \nu_2)m - \lambda_2 \quad (\text{B.13})$$

$$R_5 = (1 - \nu_2)\sqrt{\lambda_2} \quad (\text{B.14})$$

$$R_6 = m^2 - (1 - \nu_2)m + \lambda_2 \quad (\text{B.15})$$

$$R0_1 = m^2 - (1 - \nu_1)m - \lambda_1 \quad (\text{B.16})$$

$$R0_2 = (1 - \nu_1)\sqrt{\lambda_1} \quad (\text{B.17})$$

$$R0_3 = m^2 - (1 - \nu_1)m + \lambda_1 \quad (\text{B.18})$$

$$R0_4 = m^2 - (1 - \nu_1)m - \lambda_2 \quad (\text{B.19})$$

$$R0_5 = (1 - \nu_1)\sqrt{\lambda_2} \quad (\text{B.20})$$

$$R0_6 = m^2 - (1 - \nu_1)m + \lambda_2 \quad (\text{B.21})$$

O sistema composto pelas equações

$$\lambda_1^2 = \sqrt{\frac{A_1}{2} + \sqrt{\left[\left(\frac{A_1}{2}\right)^2 - A_2\right]}} \quad (\text{B.22})$$

$$\lambda_2^2 = \sqrt{\frac{A_1}{2} - \sqrt{\left[\left(\frac{A_1}{2}\right)^2 - A_2\right]}} \quad (\text{B.23})$$

Onde

$$A_1 = \zeta^2 + m_1 l \zeta^2 - q - ql \quad (\text{B.24})$$

$$A_2 = m_1 l \zeta^4 - ql \zeta^2 (1 + m_1) \quad (\text{B.25})$$

λ_1^2 sempre será positiva, mas λ_2^2 pode ser positiva, negativa ou nula

Para λ_2^4 positiva a solução é dada por:

$$\bar{w} = [C_1 J_m(\lambda_1 \rho) + C_2 Y_m(\lambda_1 \rho) + C_3 I_m(\lambda_1 \rho) + C_4 K_m(\lambda_1 \rho) + C_5 J_m(\lambda_2 \rho) + C_6 Y_m(\lambda_2 \rho) + C_7 I_m(\lambda_2 \rho) + C_8 K_m(\lambda_2 \rho)] \cos(m\theta) \quad (\text{B.26})$$

$$\bar{v} = \left\{ \frac{1}{q} (\lambda_1^2 - \Omega^2 + q) [C_1 J_m(\lambda_1 \rho) + C_2 Y_m(\lambda_1 \rho) + C_3 I_m(\lambda_1 \rho) + C_4 K_m(\lambda_1 \rho)] + \frac{1}{q} (\lambda_2^2 - \Omega^2 + q) [C_5 J_m(\lambda_2 \rho) + C_6 Y_m(\lambda_2 \rho) + C_7 I_m(\lambda_2 \rho) + C_8 K_m(\lambda_2 \rho)] \right\} \cos(m\theta) \quad (\text{B.27})$$

Quando a raiz λ_2^4 é nula, a solução é dada por:

$$\bar{w} = [C_1 J_m(\lambda_1 \rho) + C_2 Y_m(\lambda_1 \rho) + C_3 I_m(\lambda_1 \rho) + C_4 K_m(\lambda_1 \rho) + C_5 \rho^{2+m} + C_6 \rho^{2-m} + C_7 \rho^m + C_8 \rho^{-m}] \cos(m\theta) \quad (\text{B.28})$$

$$\bar{v} = \left\{ \frac{1}{q}(\lambda_1^2 - \zeta^2 + q)[C_1 J_m(\lambda_1 \rho) + C_2 Y_m(\lambda_1 \rho) + C_3 I_m(\lambda_1 \rho) + C_4 K_m(\lambda_1 \rho)] + \frac{1}{q}(\lambda_2^2 - \zeta^2 + q)[C_5 \rho^{2+m} + C_6 \rho^{2-m} + C_7 \rho^m + C_8 \rho^{-m}] \right\} \cos(m\theta) \quad (\text{B.29})$$

Para λ_2^4 negativa a solução é dada por:

$$\bar{w} = [C_1 J_m(\lambda_1 \rho) + C_2 Y_m(\lambda_1 \rho) + C_3 I_m(\lambda_1 \rho) + C_4 K_m(\lambda_1 \rho) + C_5 \text{ber}_m(\lambda_2 \rho) + C_6 \text{bei}_m(\lambda_2 \rho) + C_7 \text{ker}_m(\lambda_2 \rho) + C_8 \text{Kei}_m(\lambda_2 \rho)] \cos(m\theta) \quad (\text{B.30})$$

$$\bar{v} = \left\{ \frac{1}{q}(\lambda_1^2 - \zeta^2 + q)[C_1 J_m(\lambda_1 \rho) + C_2 Y_m(\lambda_1 \rho) + C_3 I_m(\lambda_1 \rho) + C_4 K_m(\lambda_1 \rho)] + \frac{1}{q}(\lambda_2^2 - \zeta^2 + q)[C_5 \text{ber}_m(\lambda_2 \rho) + C_6 \text{bei}_m(\lambda_2 \rho) + C_7 \text{ker}_m(\lambda_2 \rho) + C_8 \text{Kei}_m(\lambda_2 \rho)] \right\} \cos(m\theta) \quad (\text{B.31})$$

As constantes C_2 , C_4 , C_7 e C_8 são nulas.

Para a obtenção das frequências naturais, torna-se necessário encontrar as frequências que atendam as condições de contorno.

Aplicando as condições de contorno para uma placa engastada e a outra simplesmente apoiada (CS) e para ambas placas engastadas (CC) e ambas placas simplesmente apoiadas, obtém-se as seguintes matrizes:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{B.32})$$

B.2 Placas circulares duplas ambas simplesmente apoiadas (SS)

Tratando-se do sistema com ambas as placas simplesmente apoiada tem-se as seguintes componentes da matriz:

- Para condição de contorno do deslocamento da placa superior nulo:

- Caso $\sqrt{\lambda_2} > 0$

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= Jn(m, \sqrt{\lambda_1}) \\
 a_{12} &= In(m, \sqrt{\lambda_1}) \\
 a_{13} &= Jn(m, \sqrt{\lambda_2}) \\
 a_{14} &= In(m, \sqrt{\lambda_2})
 \end{aligned} \tag{B.33}$$

- Caso $\sqrt{\lambda_2} < 0$

$$\begin{aligned}
 a_{13} &= Ber(m, \sqrt{\lambda_2}) \\
 a_{14} &= Bei(m, \sqrt{\lambda_2})
 \end{aligned} \tag{B.34}$$

- Para condição de contorno do momento da placa superior nulo:

- Caso $\sqrt{\lambda_2} > 0$

$$\begin{aligned}
 a_{21} &= R0_1 Jn(m, \sqrt{\lambda_1}) + R0_2 Jn(m + 1, \sqrt{\lambda_1}) \\
 a_{22} &= R0_3 In(m, \sqrt{\lambda_1}) - R0_2 In(m + 1, \sqrt{\lambda_1}) \\
 a_{23} &= R0_4 Jn(m, \sqrt{\lambda_2}) + R0_5 Jn(m + 1, \sqrt{\lambda_2}) \\
 a_{24} &= R0_6 In(m, \sqrt{\lambda_2}) - R0_5 In(m + 1, \sqrt{\lambda_2})
 \end{aligned} \tag{B.35}$$

- Caso $\sqrt{\lambda_2} < 0$

$$\begin{aligned}
 a_{23} &= \lambda_2(\lambda_2 F_3 + \nu_1 F_1) \\
 a_{24} &= \lambda_2(\lambda_2 F_4 + \nu_1 F_2)
 \end{aligned} \tag{B.36}$$

Sendo F_1, F_2, F_3 e F_4 dados por:

$$\begin{aligned}
 F_1 &= (\sqrt{2}/2)[Ber(m1 + 1, \sqrt{\lambda_2}) - Ber(m1 - 1, \sqrt{\lambda_2})fat1 + Bei(m1 + \\
 &1, \sqrt{\lambda_2}) - Bei(m1 - 1, \sqrt{\lambda_2})fat1]
 \end{aligned} \tag{B.37}$$

$$F_2 = (\sqrt{2}/2)[-Ber(m1 + 1, \sqrt{\lambda_2}) + Ber(m1 - 1, \sqrt{\lambda_2})fat1 + Bei(m1 + 1, \sqrt{\lambda_2}) - Bei(m1 - 1, \sqrt{\lambda_2})fat1] \quad (B.38)$$

$$F_3 = (\lambda_2/4)[Bei(m2 - 2, \sqrt{\lambda_2})fat2 + 2Bei(m, \sqrt{\lambda_2}) + Bei(m + 2, \sqrt{\lambda_2})] \quad (B.39)$$

$$F_4 = -(\lambda_2/4)[Ber(m2 - 2, \sqrt{\lambda_2})fat2 + 2Ber(m, \sqrt{\lambda_2}) + Ber(m + 2, \sqrt{\lambda_2})] \quad (B.40)$$

Sendo que para $m=0$ implica $m1 = -1$, $fat1 = 2$, $m2 = 4$ e $fat2 = 1$ e para $m = 1$ implica $m1 = m$, $fat1 = 1$, $m2 = 3$ e $fat2 = -1$. Já para todo $m > 1$ pertencente ao conjunto dos números naturais os coeficientes recebem os seguintes valores: $m1 = m$, $fat1 = 1$, $m2 = m$ e $fat2 = 1$.

- Para condição de contorno do deslocamento da placa inferior nulo:

- Caso $\sqrt{\lambda_2} > 0$

$$\begin{aligned} a_{31} &= P_1 Jn(m, \sqrt{\lambda_1}) \\ a_{32} &= P_1 In(m, \sqrt{\lambda_1}) \\ a_{33} &= P_2 Jn(m, \sqrt{\lambda_2}) \\ a_{34} &= P_2 In(m, \sqrt{\lambda_2}) \end{aligned} \quad (B.41)$$

- Caso $\sqrt{\lambda_2} < 0$

$$\begin{aligned} a_{33} &= P_2 Ber(m, \sqrt{\lambda_2}) \\ a_{34} &= P_2 Bei(m, \sqrt{\lambda_2}) \end{aligned} \quad (B.42)$$

- Para condição de contorno do momento da placa inferior nulo:

- Caso $\sqrt{\lambda_2} > 0$

$$\begin{aligned}
a_{41} &= P_1 [R_1 Jn(m, \sqrt{\lambda_1}) + R_2 Jn(m+1, \sqrt{\lambda_1})] \\
a_{42} &= P_1 [R_3 In(m, \sqrt{\lambda_1}) - R_2 In(m+1, \sqrt{\lambda_1})] \\
a_{43} &= P_2 [R_4 Jn(m, \sqrt{\lambda_2}) + R_5 Jn(m+1, \sqrt{\lambda_2})] \\
a_{44} &= P_2 [R_6 In(m, \sqrt{\lambda_2}) - R_5 In(m+1, \sqrt{\lambda_2})]
\end{aligned} \tag{B.43}$$

- Caso $\sqrt{\lambda_2} < 0$

$$\begin{aligned}
a_{43} &= P_2 \lambda_2 (\lambda_2 F_3 + \nu_1 F_1) \\
a_{44} &= P_2 \lambda_2 (\lambda_2 F_4 + \nu_1 F_2)
\end{aligned} \tag{B.44}$$

B.3 Placas circulares duplas ambas engastadas (CC)

Tratando-se do sistema com ambas as placas engastadas tem-se as seguintes componentes da matriz:

- Para condição de contorno do deslocamento da placa superior nulo:

- Caso $\sqrt{\lambda_2} > 0$

$$\begin{aligned}
a_{11} &= Jn(m, \sqrt{\lambda_1}) \\
a_{12} &= In(m, \sqrt{\lambda_1}) \\
a_{13} &= Jn(m, \sqrt{\lambda_2}) \\
a_{14} &= In(m, \sqrt{\lambda_2})
\end{aligned} \tag{B.45}$$

- Caso $\sqrt{\lambda_2} < 0$

$$\begin{aligned}
a_{13} &= Ber(m, \sqrt{\lambda_2}) \\
a_{14} &= Bei(m, \sqrt{\lambda_2})
\end{aligned} \tag{B.46}$$

- Para condição de contorno da rotação da placa superior nulo:

- Caso $\sqrt{\lambda_2} > 0$

$$\begin{aligned}
 a_{21} &= m Jn(m, \sqrt{\lambda_1}) + \sqrt{\lambda_1} Jn(m+1, \sqrt{\lambda_1}) \\
 a_{22} &= m In(m, \sqrt{\lambda_1}) + \sqrt{\lambda_1} In(m+1, \sqrt{\lambda_1}) \\
 a_{23} &= m Jn(m, \sqrt{\lambda_2}) + \sqrt{\lambda_1} Jn(m+1, \sqrt{\lambda_2}) \\
 a_{24} &= m In(m, \sqrt{\lambda_2}) + \sqrt{\lambda_1} In(m+1, \sqrt{\lambda_2})
 \end{aligned} \tag{B.47}$$

- Caso $\sqrt{\lambda_2} < 0$

$$\begin{aligned}
 a_{23} &= \frac{\sqrt{\lambda_2}}{2\sqrt{2}} [Ber(m+1, \sqrt{\lambda_2}) + Bei(m+1, \sqrt{\lambda_2}) - \sqrt{\lambda_2} Ber(m-1, \sqrt{\lambda_2}) - \\
 &\sqrt{\lambda_2} Bei(m-1, \sqrt{\lambda_2})] \\
 a_{24} &= \frac{\sqrt{\lambda_2}}{2\sqrt{2}} [-Ber(m+1, \sqrt{\lambda_2}) + Bei(m+1, \sqrt{\lambda_2}) + \sqrt{\lambda_2} Ber(m-1, \sqrt{\lambda_2}) - \\
 &\sqrt{\lambda_2} Bei(m-1, \sqrt{\lambda_2})]
 \end{aligned} \tag{B.48}$$

- Para condição de contorno do deslocamento da placa inferior nulo:

- Caso $\sqrt{\lambda_2} > 0$

$$\begin{aligned}
 a_{31} &= P_1 Jn(m, \sqrt{\lambda_1}) \\
 a_{32} &= P_1 In(m, \sqrt{\lambda_1}) \\
 a_{33} &= P_2 Jn(m, \sqrt{\lambda_2}) \\
 a_{34} &= P_2 In(m, \sqrt{\lambda_2})
 \end{aligned} \tag{B.49}$$

- Caso $\sqrt{\lambda_2} < 0$

$$\begin{aligned}
 a_{33} &= P_2 Ber(m, \sqrt{\lambda_2}) \\
 a_{34} &= P_2 Bei(m, \sqrt{\lambda_2})
 \end{aligned} \tag{B.50}$$

- Para condição de contorno de rotação da placa inferior nula:

- Caso $\sqrt{\lambda_2} > 0$

$$\begin{aligned}
 a_{41} &= P_1 [m J_n(m, \sqrt{\lambda_1}) + \sqrt{\lambda_1} J_n(m+1, \sqrt{\lambda_1})] \\
 a_{42} &= P_1 [m I_n(m, \sqrt{\lambda_1}) + \sqrt{\lambda_1} I_n(m+1, \sqrt{\lambda_1})] \\
 a_{43} &= P_2 [m J_n(m, \sqrt{\lambda_2}) + \sqrt{\lambda_1} J_n(m+1, \sqrt{\lambda_2})] \\
 a_{44} &= P_2 [m I_n(m, \sqrt{\lambda_2}) + \sqrt{\lambda_1} I_n(m+1, \sqrt{\lambda_2})]
 \end{aligned} \tag{B.51}$$

- Caso $\sqrt{\lambda_2} < 0$

$$\begin{aligned}
 a_{43} &= P_2 \frac{\sqrt{\lambda_2}}{2\sqrt{2}} [Ber(m+1, \sqrt{\lambda_2}) + Bei(m+1, \sqrt{\lambda_2}) - \sqrt{\lambda_2} Ber(m-1, \sqrt{\lambda_2}) \\
 &\quad - \sqrt{\lambda_2} Bei(m-1, \sqrt{\lambda_2})] \\
 a_{44} &= P_2 \frac{\sqrt{\lambda_2}}{2\sqrt{2}} [-Ber(m+1, \sqrt{\lambda_2}) + Bei(m+1, \sqrt{\lambda_2}) + \sqrt{\lambda_2} Ber(m \\
 &\quad - 1, \sqrt{\lambda_2}) - \sqrt{\lambda_2} Bei(m-1, \sqrt{\lambda_2})]
 \end{aligned} \tag{B.52}$$

B.3 Placas circulares duplas uma engastada e a outra simplesmente apoiada (CS)

Tratando-se do sistema com uma placa engastada e a outra simplesmente apoiada tem-se as seguintes componentes da matriz:

- Para condição de contorno do deslocamento da placa superior nulo:

- Caso $\sqrt{\lambda_2} > 0$

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= J_n(m, \sqrt{\lambda_1}) \\
 a_{12} &= I_n(m, \sqrt{\lambda_1})
 \end{aligned} \tag{B.53}$$

$$a_{13} = Jn(m, \sqrt{\lambda_2})$$

$$a_{14} = In(m, \sqrt{\lambda_2})$$

- Caso $\sqrt{\lambda_2} < 0$

$$a_{13} = Ber(m, \sqrt{\lambda_2})$$

$$a_{14} = Bei(m, \sqrt{\lambda_2})$$

(B.54)

- Para condição de contorno da rotação da placa superior nulo:

- Caso $\sqrt{\lambda_2} > 0$

$$a_{21} = m Jn(m, \sqrt{\lambda_1}) + \sqrt{\lambda_1} Jn(m + 1, \sqrt{\lambda_1})$$

$$a_{22} = m In(m, \sqrt{\lambda_1}) + \sqrt{\lambda_1} In(m + 1, \sqrt{\lambda_1})$$

$$a_{23} = m Jn(m, \sqrt{\lambda_2}) + \sqrt{\lambda_1} Jn(m + 1, \sqrt{\lambda_2})$$

$$a_{24} = m In(m, \sqrt{\lambda_2}) + \sqrt{\lambda_1} In(m + 1, \sqrt{\lambda_2})$$

(B.55)

- Caso $\sqrt{\lambda_2} < 0$

$$a_{23} = \frac{\sqrt{\lambda_2}}{2\sqrt{2}} [Ber(m + 1, \sqrt{\lambda_2}) + Bei(m + 1, \sqrt{\lambda_2}) - \sqrt{\lambda_2} Ber(m - 1, \sqrt{\lambda_2}) - \sqrt{\lambda_2} Bei(m - 1, \sqrt{\lambda_2})]$$

$$a_{24} = \frac{\sqrt{\lambda_2}}{2\sqrt{2}} [-Ber(m + 1, \sqrt{\lambda_2}) + Bei(m + 1, \sqrt{\lambda_2}) + \sqrt{\lambda_2} Ber(m - 1, \sqrt{\lambda_2}) - \sqrt{\lambda_2} Bei(m - 1, \sqrt{\lambda_2})]$$

(B.56)

- Para condição de contorno do deslocamento da placa inferior nulo:

- Caso $\sqrt{\lambda_2} > 0$

$$\begin{aligned}
a_{31} &= P_1 Jn(m, \sqrt{\lambda_1}) \\
a_{32} &= P_1 In(m, \sqrt{\lambda_1}) \\
a_{33} &= P_2 Jn(m, \sqrt{\lambda_2}) \\
a_{34} &= P_2 In(m, \sqrt{\lambda_2})
\end{aligned} \tag{B.57}$$

- Caso $\sqrt{\lambda_2} < 0$

$$\begin{aligned}
a_{33} &= P_2 Ber(m, \sqrt{\lambda_2}) \\
a_{34} &= P_2 Bei(m, \sqrt{\lambda_2})
\end{aligned} \tag{B.58}$$

- Para condição de contorno de momento da placa inferior nulo:

- Caso $\sqrt{\lambda_2} > 0$

$$\begin{aligned}
a_{41} &= P_1 [R_1 Jn(m, \sqrt{\lambda_1}) + R_2 Jn(m + 1, \sqrt{\lambda_1})] \\
a_{42} &= P_1 [R_3 In(m, \sqrt{\lambda_1}) - R_2 In(m + 1, \sqrt{\lambda_1})] \\
a_{43} &= P_2 [R_4 Jn(m, \sqrt{\lambda_2}) + R_5 Jn(m + 1, \sqrt{\lambda_2})] \\
a_{44} &= P_2 [R_6 In(m, \sqrt{\lambda_2}) - R_5 In(m + 1, \sqrt{\lambda_2})]
\end{aligned} \tag{B.59}$$

- Caso $\sqrt{\lambda_2} < 0$

$$\begin{aligned}
a_{43} &= P_2 \lambda_2 (\lambda_2 F_3 + \nu_1 F_1) \\
a_{44} &= P_2 \lambda_2 (\lambda_2 F_4 + \nu_1 F_2)
\end{aligned} \tag{B.60}$$