

Hugo Rodrigues Vasconcelos

O papel das condições de fronteira na energia de vácuo: uma análise via métodos global e local

João Pessoa - PB

10 de outubro de 2025

Hugo Rodrigues Vasconcelos

O papel das condições de fronteira na energia de vácuo: uma análise via métodos global e local

Trabalho de conclusão de curso apresentado
como componente curricular obrigatório para
obtenção do título de Bacharel em Física pela
Universidade Federal de Paraíba.

Universidade Federal da Paraíba - UFPB

Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Departamento de Física

Orientador: Prof. Dr. Herondy Francisco de Santana Mota

João Pessoa - PB

10 de outubro de 2025

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

V331p Vasconcelos, Hugo Rodrigues.

O papel das condições de fronteira na energia de vácuo : uma análise via métodos global e local / Hugo Rodrigues Vasconcelos. - João Pessoa, 2025.
48 p. : il.

Orientação: Herondy Francisco de Santana Mota.
TCC (Curso de Bacharelado em Física) - UFPB/CCEN.

1. Efeito Casimir. 2. Energia de vácuo. 3. Campo escalar. 4. Regularização Zeta. 5. Tensor energia-momento. 6. Condições de contorno. I. Mota, Herondy Francisco de Santana. II. Título.

UFPB/CCEN

CDU 53(043.2)



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Coordenação dos Cursos de Graduação em Física

Ata da Sessão Pública da Defesa do Trabalho
de Conclusão de Curso de Bacharelado em
Física do discente Hugo Rodrigues
Vasconcelos.

Aos 03 dias do mês de outubro do ano de 2025, às 10h, na sala 201 do Departamento de Física, realizou-se a Sessão Pública da Defesa do Trabalho de Conclusão de Curso de Bacharelado em Física, do discente Hugo Rodrigues Vasconcelos, sendo a Banca Examinadora constituída pelos docentes Prof. Dr. Herondy Francisco Santana Mota (UFPB), orientador e presidente da banca, Prof. Dr. Jansen Brasileiro Formiga (UFPB) e Prof. Dr. Eugenio Ramos Bezerra de Mello (UFPB). Dando início aos trabalhos, o professor orientador e presidente da banca examinadora comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, concedeu a palavra ao discente para que fizesse a explanação de seu Trabalho de Conclusão de Curso, intitulado “*O Papel das Condições de Fronteira na Energia de Vácuo: Uma Análise via Métodos Global e Local*”. Concluída a exposição, o discente foi arguido pelos membros presentes da Banca Examinadora. Após as arguições, a Banca, de comum acordo, declarou que o Trabalho apresentado foi aprovado com nota 10,0. E para constar, encerrada a sessão, lavrou-se esta ata que será assinada pelos presentes. João Pessoa, 03 de outubro de 2025.

Documento assinado digitalmente



HERONDY FRANCISCO DE SANTANA MOTA

Data: 06/10/2025 14:20:16-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Herondy Francisco Santana Mota
UFPB – Orientador

Documento assinado digitalmente



JANSEN BRASILEIRO FORMIGA

Data: 06/10/2025 13:12:08-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Jansen Brasileiro Formiga
UFPB

Documento assinado digitalmente



EUGENIO RAMOS BEZERRA DE MELLO

Data: 06/10/2025 09:23:00-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Eugenio Ramos Bezerra de Mello
UFPB

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a minha família, especialmente aos meus pais, pelo suporte e dedicação, não só nos anos que constituíram a duração do curso, mas em todos aqueles que culminaram neste momento.

Ao meu orientador e professor, Herondy Mota, pela paciência, empenho, dedicação e conhecimento passado ao longo desta jornada.

Ao meu avô, Eriberto, pelos ensinamentos, histórias e por sempre estar à disposição para ajudar.

Aos meus colegas de curso, Isabel, Bárbara, Rafaelly, Fernanda, Kelvin, Erick, Carlos, Apolo, Miguel, Inês e aos demais, pelas colaborações e por compartilharem este importante momento da vida e da carreira acadêmica.

Por último, agradeço à UFPB e ao CNPq, pelo apoio financeiro.

*You cannot escape it, wherever you flee; for wherever you go,
you bear yourself, and always find yourself.*
(Leo Sherley-Price)

Resumo

Neste trabalho investigamos o efeito Casimir para um campo escalar real em $(3 + 1)$ dimensões, considerando diferentes condições de contorno - Dirichlet, Neumann, mistas e quasi-periódicas. Foram analisadas duas metodologias distintas para o cálculo da energia de vácuo: a abordagem global, baseada na soma dos modos do campo, e a abordagem local, fundamentada no valor esperado do tensor energia-momento. Mostramos que, no caso de placas paralelas infinitas, as duas abordagens não são equivalentes, devido à não comutatividade entre a soma nos modos e a integração espacial. Nesse cenário, a energia obtida pelo método local apresenta divergências junto às superfícies, enquanto a abordagem global, após regularização via função zeta e subsequente renormalização, fornece resultados finitos e consistentes com a literatura. Já no caso quasi-periódico, em que não há fronteiras físicas, as duas metodologias coincidem exatamente, evidenciando que a discrepância decorre da quebra de simetria de translação causada pelas condições de contorno.

Utilizamos a função de Wightman e o formalismo do tensor energia-momento para obter expressões unificadas que descrevem ambos os cenários. Para o caso massivo, demonstramos o decaimento exponencial da energia de vácuo no limite de massa grande, inclusive recuperando os resultados conhecidos para o campo não-massivo. A força de vácuo por unidade de área foi calculada para todas as configurações, mostrando-se atrativa ou repulsiva dependendo das condições de contorno e do parâmetro de fase no caso quasi-periódico.

Os resultados destacam a relevância das condições de fronteira na determinação da energia de vácuo e apontam caminhos para extensões futuras, como a análise de outros campos quânticos (eletromagnético e fermiônico), a inclusão de efeitos térmicos, o estudo de geometrias e topologias não triviais e também investigações sobre acoplamento não mínimo com a curvatura. Este trabalho contribui para a compreensão fundamental das propriedades do vácuo quântico em espaços confinados e compactificados, estabelecendo pontes entre formalismos globais e locais no cálculo de efeitos de campo quântico.

Palavras-chave: Efeito Casimir, Energia de Vácuo, Campo Escalar, Regularização Zeta, Tensor Energia-Momento, Condições de Contorno.

Abstract

This work investigates the Casimir effect for a real scalar field in (3+1) dimensions, considering different boundary conditions - Dirichlet, Neumann, mixed, and quasi-periodic. Two distinct methodologies for calculating the vacuum energy are analyzed: the global approach, based on the sum over the field modes, and the local approach, founded on the expectation value of the energy-momentum tensor. We demonstrate that, in the case of infinite parallel plates, the two approaches are not equivalent due to the non-commutativity between the mode summation and spatial integration. In this scenario, the energy obtained by the local method exhibits divergences near the surfaces, while the global approach, after zeta function regularization and subsequent renormalization, yields finite results consistent with the literature. In contrast, for the quasi-periodic case where there are no physical boundaries, the two methodologies coincide exactly, indicating that the discrepancy stems from the translational symmetry breaking caused by the boundary conditions.

Using the Wightman function and the energy-momentum tensor formalism, we derive unified expressions that describe both scenarios. For the massive case, we demonstrate the exponential decay of the vacuum energy in the large-mass limit, also recovering known results for the massless field. The Casimir force per unit area is calculated for all configurations, showing attractive or repulsive behavior depending on the boundary conditions and the phase parameter in the quasi-periodic case.

The results underscore the relevance of boundary conditions in determining the vacuum energy and suggest directions for future extensions, such as the analysis of other quantum fields (electromagnetic and fermionic), the inclusion of thermal effects, the study of non-trivial geometries and topologies, and also investigations into non-minimal coupling with curvature. This work contributes to the fundamental understanding of quantum vacuum properties in confined and compactified spaces, establishing connections between global and local formalisms in quantum field theory calculations.

Keywords: Casimir Effect, Vacuum Energy, Scalar Field, Zeta Regularization, Energy-Momentum Tensor, Boundary Conditions.

Lista de ilustrações

- Figura 1 – Esquema ilustrativo de duas placas paralelas, infinitas e ideais, separadas por uma distância L . O campo escalar é confinado entre as placas, e as condições de contorno são impostas sobre as superfícies em $x = 0$ e $x = L$, levando à discretização dos modos na direção x 20
- Figura 2 – Representação esquemática da compactificação na direção x , correspondendo à topologia $\mathbb{R}^3 \times S^1$. O campo escalar é definido em um espaço onde o ponto x é identificado com $x + L$, de modo que os modos satisfazem a condição quasi-periódica apresentada na Eq. (2.38). 20

Lista de tabelas

Tabela 1	– Força de vácuo por unidade de área para diferentes condições de contorno em $(3 + 1)$ dimensões, encontradas pelo método global.	34
Tabela 2	– Força de vácuo por unidade de área para diferentes condições de contorno em $(3 + 1)$ dimensões, encontradas pelo métodos local.	39

Sumário

1	INTRODUÇÃO	11
2	INTRODUÇÃO À TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS ESCALAR	14
2.0.1	Espaço-Tempo de Minkowski	15
2.1	Teoria do Campo Escalar	16
2.2	Equação de Klein-Gordon	18
2.2.1	Condições de Contorno	19
2.2.1.0.1	Condição de Dirichlet:	21
2.2.1.0.2	Condição de Neumann:	21
2.2.1.0.3	Condições mistas:	21
2.2.1.0.4	Condição quasi-periódica:	21
2.2.2	Calculando a constante C_σ em $(3 + 1)$ dimensões	22
2.3	Quantização do Campo Escalar	23
2.4	Função de Wightman	24
2.5	Tensor Energia-Momento	25
3	CÁLCULO DA ENERGIA DE CASIMIR EM $(3+1)$ DIMENSÕES	30
3.1	Abordagem Global e a Regularização via Função Zeta	30
3.2	Abordagem Local	35
3.2.1	Acoplamento Conforme	39
3.2.2	Condição quasi-periódica	40
4	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	42
	REFERÊNCIAS	44
	APÊNDICES	47
	APÊNDICE A – OBTENÇÃO DA EXPRESSÃO DA ENERGIA PARA O CASO GLOBAL	48

1 Introdução

O efeito Casimir, previsto teoricamente por Hendrik Brugt Gerhard Casimir em 1948, consiste na força de atração que surge entre duas placas metálicas, planas, paralelas, neutras e condutoras, dispostas no vácuo. Esse fenômeno é consequência direta das flutuações quânticas de vácuo do campo eletromagnético [1]. Poucos anos depois, em 1958, Sparnaay realizou o primeiro experimento com o objetivo de observar o fenômeno; entretanto, devido às limitações tecnológicas da época, não foi possível obter precisão suficiente para uma confirmação definitiva [2]. A validação experimental convincente só ocorreu décadas mais tarde, sendo o experimento realizado por Lamoreaux em 1997 considerado a primeira demonstração precisa e quantitativa do efeito [3, 4]. Desde então, diversas medidas independentes corroboraram a existência do efeito, tanto na configuração original com placas paralelas [5] quanto em outras geometrias e materiais, como superfícies curvas [6–9].

Atualmente, o estudo do efeito Casimir vai muito além do caso original de placas metálicas e das flutuações quânticas do vácuo eletromagnético. Pesquisas modernas investigam sua manifestação em diferentes campos quânticos, sob distintas condições de contorno, em geometrias não triviais e em materiais com propriedades específicas, incluindo dielétricos, metamateriais e sistemas com resposta não linear [10–12]. O ponto central para a compreensão do fenômeno é a presença das flutuações quânticas do vácuo, que, ao serem modificadas pelas condições de fronteira impostas pelas superfícies, dão origem a uma força mensurável entre os objetos.

O conceito de vácuo tem sido objeto de reflexão e debate ao longo da história, envolvendo tanto cientistas quanto filósofos, com duas visões principais em oposição. A primeira concepção associa o vácuo ao nada absoluto, considerando espaço e matéria como entidades independentes, de modo que a ausência da segunda no primeiro caracteriza o vácuo. A segunda perspectiva, por sua vez, sustenta que espaço e matéria são inseparáveis, de modo que todo o espaço deveria estar necessariamente preenchido por algum tipo de substância [13].

Com o advento da Teoria Quântica de Campos, a noção de vácuo como vazio absoluto foi novamente questionada, estabelecendo-se que o vácuo é permeado por flutuações quânticas do campo, as quais dão origem à chamada energia de ponto zero [13, 14].

Na relatividade geral, por outro lado, o vácuo é entendido a partir da geometria do espaço-tempo: mesmo na ausência de matéria, o espaço pode ser curvo em razão da presença de energia gravitacional ou de uma constante cosmológica. Assim, o vácuo deixa de ser apenas a ausência de partículas ou campos materiais e passa a ser uma configuração

dinâmica do próprio espaço-tempo [15, 16]. Esse ponto de vista conecta a noção clássica e a quântica de vácuo, mostrando que a estrutura fundamental do universo é inseparável tanto das propriedades geométricas quanto das flutuações quânticas.

Desta forma, o conceito de vácuo revela uma dependência clara da escala física considerada. Na mecânica clássica, correspondente à escala do nosso cotidiano, o vácuo é entendido apenas como a ausência de matéria, sem qualquer estrutura física subjacente. Na relatividade geral, que descreve o regime das grandes escalas, o vácuo adquire caráter geométrico: ele corresponde a uma solução das equações de Einstein sem matéria, podendo, entretanto, apresentar curvatura em razão da presença de energia gravitacional ou de uma constante cosmológica. Já na teoria quântica de campos, que governa as escalas microscópicas, o vácuo é identificado como o estado fundamental de mínima energia, permeado por flutuações quânticas que tornam impossível concebê-lo como um ‘nada absoluto’. Assim, cada regime da física fornece uma concepção distinta de vácuo, adequada ao domínio de validade de suas leis.

O efeito Casimir é um fenômeno de natureza estritamente quântica, pois nesse contexto a força eletromagnética clássica entre as placas é nula. Sua origem está associada às flutuações da energia do estado fundamental (o vácuo quântico) do campo eletromagnético, modificadas pela presença de condições de contorno. Em certos aspectos, pode ser comparado à interação de van der Waals, que também resulta de flutuações do campo eletromagnético. No entanto, existem diferenças fundamentais entre os dois fenômenos. A interação de van der Waals ocorre em escalas atômicas, podendo ser interpretada em parte por modelos clássicos e não depende explicitamente da velocidade da luz, não possuindo caráter relativístico. Já o efeito Casimir manifesta-se em distâncias relativamente maiores, apresenta natureza puramente quântica e está intrinsecamente ligado à formulação relativística da teoria de campos. A conexão entre ambos foi estabelecida de forma unificada por Lifshitz, que demonstrou em 1956 que as forças de van der Waals e de Casimir podem ser descritas como casos particulares de uma mesma teoria geral para forças de flutuação entre meios dielétricos [17].

A energia de vácuo associada ao efeito Casimir constitui o principal objeto de interesse, uma vez que seu cálculo contribui para a validação e compreensão da Teoria Quântica de Campos (TQC). Existem duas abordagens principais para a sua determinação: a global e a local. A primeira consiste em calcular a energia de vácuo do espaço livre de Minkowski e a energia correspondente ao espaço com condições de contorno, tomando em seguida a diferença entre essas duas quantidades. Já a segunda abordagem avalia diretamente a energia de vácuo a partir da integração do valor esperado do operador densidade de energia obtido através do tensor energia-momento [10–12].

Entretanto, o cálculo da energia pela abordagem global conduz a resultados infinitos, tanto no caso do espaço livre quanto no caso com condições de contorno (placas condutoras).

Como apenas diferenças de energia têm significado físico, torna-se necessário adotar um procedimento de regularização que torne tais quantidades finitas. Após a regularização, aplica-se o processo de renormalização, de modo a remover a dependência dos parâmetros artificiais introduzidos. Diversas técnicas de regularização podem ser empregadas nesse contexto, mas neste trabalho será utilizada a regularização pela função zeta, por ser particularmente conveniente e bem estabelecida na literatura [18]. Na abordagem local, trabalha-se apenas com a renormalização, que envolve a retirada dos termos divergentes.

O objetivo deste trabalho é investigar a energia de vácuo associada ao efeito Casimir a partir de duas abordagens distintas para o campo escalar real: a global, baseada na soma dos modos do campo, e a local, obtida através do valor esperado no vácuo da componente temporal do tensor energia-momento métrico. Consideramos duas situações físicas específicas: o caso de duas placas paralelas infinitas, com condições de contorno de Dirichlet, Neumann e mista, e o caso quasi-periódico (compactificação). A análise permite comparar diretamente o resultado global com a integração da densidade local de energia. Verifica-se que, no cenário das placas, a integral da densidade de energia diverge devido às singularidades localizadas junto às superfícies, enquanto o método global fornece um resultado finito após regularização. Já no caso quasi-periódico, em que não há fronteiras reais e a densidade de energia se distribui suavemente, as duas abordagens coincidem exatamente. Essa comparação evidencia o papel fundamental das condições de contorno e da presença (ou ausência) de bordas físicas na relação entre os métodos global e local para a energia de vácuo.

Este trabalho está organizado da seguinte forma. Na Seção II apresentamos os fundamentos da teoria quântica de campos escalar, incluindo a equação de Klein-Gordon, a quantização do campo e a formulação do tensor energia-momento, além da discussão detalhada das diferentes condições de contorno consideradas. Na Seção III realizamos o cálculo da energia de Casimir em $(3 + 1)$ dimensões, explorando tanto a abordagem global, com regularização via função zeta, quanto a abordagem local, fundamentada no valor esperado do tensor energia-momento, e aplicamos os métodos aos casos de condições de Dirichlet, Neumann, mistas e quasi-periódicas. Por fim, na Seção IV, apresentamos as conclusões obtidas e apontamos perspectivas futuras para a continuidade do estudo.

No decorrer desta trabalho, adotaremos o uso de unidades naturais, definindo as constantes fundamentais c e $\hbar$ como iguais a um.

2 Introdução à Teoria Quântica de Campos Escalar

A TQC estabelece, essencialmente, que todas as partículas e ondas existentes no universo são manifestações das excitações de campos quânticos fundamentais [19, 20]. Diferentemente da Teoria Clássica de Campos, na qual os campos podem assumir quaisquer valores contínuos, os campos quânticos apresentam quantização: suas excitações ocorrem em pacotes discretos denominado *quanta*. Em outras palavras, os campos não podem assumir valores arbitrários, mas apenas múltiplos de um valor fundamental. Atualmente, a TQC constitui a estrutura teórica mais bem-sucedida para a descrição da realidade microscópica e representa a ferramenta essencial para o estudo de fenômenos que envolvem partículas elementares. Consequentemente, será também o arcabouço fundamental para a análise do efeito Casimir.

O conceito de campo é introduzido inicialmente em contextos clássicos, como na gravitação e no eletromagnetismo. Em termos gerais, um campo pode ser visto como uma função que associa a cada ponto do espaço uma determinada amplitude, cujo comportamento é descrito por equações diferenciais. Campos podem apresentar oscilações que se propagam de forma semelhante a ondas. No entanto, com o advento da mecânica quântica, a distinção rígida entre ondas e partículas deixou de existir: partículas exibem comportamento ondulatório e ondas podem exibir características corpusculares. Esse dualismo é formalizado no processo de quantização: a chamada primeira quantização descreve o comportamento ondulatório de partículas, enquanto a segunda quantização descreve o comportamento corpuscular de excitações de campo. Assim, as oscilações de um campo podem ser interpretadas também como partículas associadas a esse campo.

Devido ao caráter oscilatório dos campos, o modelo do oscilador harmônico simples (OHS) fornece uma base adequada para compreender a quantização de energia do vácuo. No cálculo do efeito Casimir, um dos métodos consiste em considerar um conjunto de OHS, cada um caracterizado por uma frequência de oscilação dependente de um número inteiro n . A soma das energias de todos esses modos fornece a energia do campo na região do espaço correspondente.

O OHS é um modelo idealizado que explica as vibrações em diversos sistemas físicos. O exemplo clássico é o sistema massa-mola: uma mola presa em uma extremidade a um suporte fixo e, na outra, a um corpo de massa muito maior que a dela. A força restauradora do sistema é a força elástica, proporcional à deformação da mola. Na física clássica, a energia do OHS pode assumir valores contínuos, inclusive zero, determinados pela amplitude da oscilação.

Na física quântica, entretanto, o OHS apresenta espectro de energia discreto, descrito por

$$E = \left(n + \frac{1}{2}\right) h\nu, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

Nesse caso, a energia mínima possível não é nula, mas igual a $\frac{h\nu}{2}$, correspondendo à chamada energia de ponto zero. Cada nível subsequente difere do anterior por múltiplos inteiros de $h\nu$. Esse resultado evidencia que o vácuo quântico não corresponde a um ‘nada absoluto’, mas contém energia associada às flutuações do campo.

2.0.1 Espaço-Tempo de Minkowski

O espaço-tempo de Minkowski é o modelo matemático fundamental (geométrico) da Relatividade Restrita, formulada por Albert Einstein em 1905 [21–23]. Nesse modelo, os efeitos gravitacionais são desconsiderados e, portanto, o espaço-tempo não apresenta curvatura. Por essa razão, ele também é denominado *espaço plano*.

As quatro coordenadas espaço-temporais podem ser representadas por

$$w = (t, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (x^\mu), \quad (2.2)$$

onde o índice grego μ varia de 0 a 3. Além disso, definimos os intervalos entre dois pontos distintos como

$$\Delta t = t - t', \quad \Delta x = x - x', \quad \Delta y = y - y', \quad \Delta z = z - z'. \quad (2.3)$$

Nesse espaço, a distância (infinitesimal) invariante entre dois eventos é dada pelo elemento de linha de Minkowski,

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (2.4)$$

A equação acima mostra que a assinatura utilizada ao longo deste trabalho será $(+, -, -, -)$.

O espaço plano é caracterizado por sua métrica plana, de assinatura -2 , definida como

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

A forma contravariante do mesmo tensor, $g^{\mu\nu}$, possui a mesma representação. O produto da forma contravariante com a covariante resulta na matriz identidade, representada pela delta de Kronecker, δ_μ^ν .

Quanto às derivadas, adotamos a notação covariante

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad (2.6)$$

onde ∂_μ representa apenas uma das componentes. Sua forma contravariante é dada por

$$\partial^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right). \quad (2.7)$$

Utilizando a convenção de Einstein, o operador d'Alembertiano $\square$ pode ser escrito como o produto da derivada covariante e contravariante (contraídos):

$$\square = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (2.8)$$

Note que o operador d'Alembertiano é uma generalização em quatro dimensões do operador laplaciano.

Outro objeto matemático importante é a função delta de Dirac, $\delta(x)$, utilizada para modelar partículas localizadas. Ela diverge na origem e é nula em todo o restante de seu domínio. Possui a propriedade [24]

$$f(x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) \delta(x - x_0), \quad (2.9)$$

Além da propriedade

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x), \quad (2.10)$$

a qual será bastante útil nos cálculos subsequentes.

Por fim, a seguinte identidade, relacionada à soma de exponenciais complexas, será utilizada [24]:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{idn} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(d - 2\pi n). \quad (2.11)$$

Esses conceitos e notações formam a base matemática utilizada ao longo deste trabalho, permitindo a formulação de operadores, tensores e funções generalizadas necessárias para a análise da energia de vácuo e do efeito Casimir.

2.1 Teoria do Campo Escalar

Neste trabalho, restringimo-nos ao estudo de campos escalares reais definidos em todo o espaço-tempo de Minkowski 4-dimensional. Serão abordados tanto o campo escalar massivo quanto o campo escalar não massivo.

O campo escalar não massivo gera partículas sem massa quando ocorre sua excitação. Essas partículas são livres e não interagentes; ou seja, se duas partículas criadas por um

campo escalar não massivo se cruzarem, elas não sofrerão desvio. A relação de dispersão para esse caso é

$$E = |k|, \quad (2.12)$$

que corresponde à relação relativística entre energia e momento para partículas de massa nula.

Já as partículas produzidas pelo campo escalar massivo possuem massa m , mantendo-se, no entanto, não interagentes entre si. A relação de dispersão geral para esse caso é

$$E = \sqrt{k^2 + m^2}, \quad (2.13)$$

reduzindo-se ao caso anterior quando $m = 0$.

Para formalizar a dinâmica desses campos, introduzimos a *Lagrangiana* L , definida como a diferença entre a energia cinética e a energia potencial:

$$L = T - V. \quad (2.14)$$

A Lagrangiana é um objeto central, pois permite derivar as equações de movimento do campo através das equações de Euler-Lagrange. No contexto clássico, isso reproduz a mecânica newtoniana; no contexto quântico, a formulação lagrangiana é essencial para a construção da teoria quântica de campos, onde o campo escalar é promovido a um operador e suas flutuações determinam a criação e aniquilação de partículas [19, 20, 25].

Além disso, a Lagrangiana fornece uma maneira sistemática de determinar as energias e os momentos conjugados, possibilitando a construção do tensor energia-momento, que será utilizado para calcular a densidade de energia de vácuo no efeito Casimir.

A ação é definida como a integral da Lagrangiana no tempo

$$S = \int_0^t L dt. \quad (2.15)$$

Para trajetórias clássicas, ela possui dimensão de energia vezes o tempo e sua variação é nula

$$\frac{\delta S}{\delta x(t)} = 0. \quad (2.16)$$

A última equação é resultado do chamado princípio da ação mínima, ou princípio de Hamilton. A ação é importante porque será necessária para calcular o tensor energia-momento. A densidade de Lagrangiana é definida como

$$L = \int \mathcal{L} d^3x. \quad (2.17)$$

Voltando para o campo escalar não massivo, sua densidade de Lagrangiana pode ser escrita como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi. \quad (2.18)$$

Já para o campo escalar massivo, sua densidade de Lagrangiana é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2, \quad (2.19)$$

em que o segundo termo representa um potencial. O termo potencial na Lagrangiana define a massa e as interações do campo. Mesmo no vácuo, o campo existe como operador, e suas flutuações quânticas determinam as propriedades físicas do sistema. Quando colocada na equação de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right) = 0, \quad (2.20)$$

resulta na equação de movimento conhecida como a equação de Klein-Gordon, que será vista a seguir.

2.2 Equação de Klein-Gordon

Partindo da relação de dispersão relativística

$$E^2 = k^2 + m^2, \quad (2.21)$$

e substituindo a energia e o momento pelos operadores quânticos

$$E \rightarrow i \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{k} \rightarrow -i \nabla, \quad (2.22)$$

chegamos à equação de Klein-Gordon para um campo escalar $\varphi(w)$, ou seja,

$$(\square + m^2) \varphi(w) = 0, \quad (2.23)$$

onde $\square$ é o operador d'Alembertiano já definido anteriormente e $w = (t, x, y, z)$ representa coordenadas de espaço-tempo.

Para encontrar a solução no espaço livre, usamos o método de separação de variáveis, assumindo que a solução possa ser escrita como

$$\varphi(w) = X(x)Y(y)Z(z)T(t). \quad (2.24)$$

Substituindo (2.24) em (2.23) e dividindo pelo produto das funções, obtemos

$$\frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} + m^2 = \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2}. \quad (2.25)$$

Como cada lado depende de variáveis diferentes, cada lado deve ser igual a uma constante $-k^2$. A equação temporal é

$$\frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} + m^2 = -k^2, \quad (2.26)$$

cujas solução geral é

$$T(t) = Ae^{-i\omega t} + Be^{i\omega t}, \quad (2.27)$$

onde

$$\omega = \sqrt{k^2 + m^2} \equiv E. \quad (2.28)$$

A equação espacial torna-se

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -k^2, \quad (2.29)$$

que pode ser separada em três equações individuais:

$$\begin{aligned} \frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} &= -k_x^2, \\ \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} &= -k_y^2, \\ \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} &= -k_z^2, \end{aligned} \quad (2.30)$$

com a condição $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$.

As soluções individuais são funções de onda plana:

$$\begin{aligned} X(x) &= Ce^{ik_x x} + De^{-ik_x x}, \\ Y(y) &= Ee^{ik_y y} + Fe^{-ik_y y}, \\ Z(z) &= Ge^{ik_z z} + He^{-ik_z z}, \end{aligned} \quad (2.31)$$

e, considerando apenas soluções de frequência positiva, ou seja, levando em consideração apenas a parte temporal com expoente negativo (associada a uma energia positiva), a solução completa da onda plana livre é dada por

$$\varphi(w) = C_\sigma e^{-i\omega t} e^{ik_x x} e^{ik_y y} e^{ik_z z}. \quad (2.32)$$

Essa forma de onda plana será a base para a expansão do campo escalar em modos, que posteriormente será utilizada na quantização do campo.

2.2.1 Condições de Contorno

Para exemplificar a aplicação das condições de contorno, consideramos o campo escalar real confinado entre duas placas paralelas, infinitas e ideais, localizadas nas posições

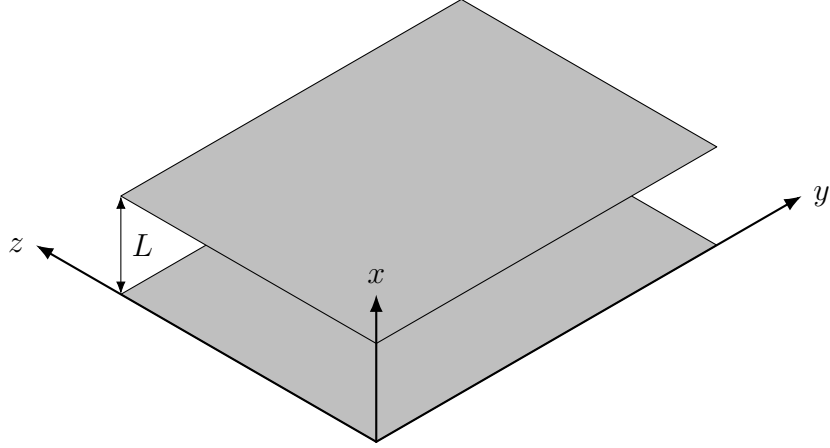


Figura 1 – Esquema ilustrativo de duas placas paralelas, infinitas e ideais, separadas por uma distância L . O campo escalar é confinado entre as placas, e as condições de contorno são impostas sobre as superfícies em $x = 0$ e $x = L$, levando à discretização dos modos na direção x .

$x = 0$ e $x = L$, de modo que a distância entre elas seja L (veja Figura 1). As condições de contorno discutidas a seguir serão impostas sobre essas placas, restringindo os modos permitidos do campo na direção x e levando à discretização do número de onda $k_x \rightarrow k_n$. Essa configuração é padrão na análise do efeito Casimir.

Ao restringirmos o campo escalar a um intervalo finito na direção x , surgem diferentes condições de contorno que determinam os modos possíveis do campo. Neste trabalho, consideramos quatro condições de contorno clássicas: Dirichlet, Neumann, Dirichlet-Neumann e Neumann-Dirichlet. As duas últimas são chamadas de *condições mistas*. Além disso, introduzimos uma quinta condição de contorno relacionada à topologia do espaço: a condição quasi-periódica, que torna a topologia do espaço-tempo como sendo $\mathbb{R}^3 \times S^1$ (veja Figura 2).

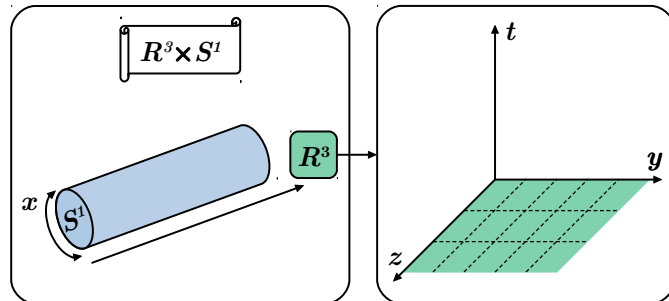


Figura 2 – Representação esquemática da compactificação na direção x , correspondendo à topologia $\mathbb{R}^3 \times S^1$. O campo escalar é definido em um espaço onde o ponto x é identificado com $x + L$, de modo que os modos satisfazem a condição quasi-periódica apresentada na Eq. (2.38).

Aplicamos essas condições apenas na direção x . Como consequência, o valor de k_x deixa de ser contínuo e passa a assumir valores discretos, que chamamos de k_n . A seguir, discutimos cada caso.

2.2.1.0.1 Condição de Dirichlet:

Para Dirichlet, o campo deve anular-se nas extremidades $x = 0$ e $x = L$. Isto é traduzido como

$$X(0) = X(L) = 0. \quad (2.33)$$

Consequentemente, a solução é dada por

$$X(x) = A \sin(k_n x), \quad k_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.34)$$

2.2.1.0.2 Condição de Neumann:

Para Neumann, a derivada do campo deve anular-se sobre as placas, ou seja,

$$X'(a) = X'(b) = 0. \quad (2.35)$$

Neste caso, teremos para a solução a forma

$$X(x) = A \cos(k_n x), \quad k_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.36)$$

2.2.1.0.3 Condições mistas:

Para as condições mistas, podemos ter duas configurações, isto é: Dirichlet-Neumann: $X(a) = 0$, $X'(b) = 0$, e também Neumann-Dirichlet: $X'(a) = 0$, $X(b) = 0$. Nestes casos, as soluções correspondentes são

$$\begin{aligned} X(x) &= A \sin(k_n x), \quad k_n = \frac{(n + \frac{1}{2})\pi}{L}, & \text{(Dirichlet-Neumann)} \\ X(x) &= A \cos(k_n x), \quad k_n = \frac{(n + \frac{1}{2})\pi}{L}, & \text{(Neumann-Dirichlet)} \end{aligned} \quad (2.37)$$

com $n = 0, 1, 2, \dots$

2.2.1.0.4 Condição quasi-periódica:

A condição quasi-periódica está associada à topologia, $\mathbb{R}^3 \times S^1$, do espaço e é definida como

$$X(x + L) = e^{2\pi i \beta} X(x), \quad (2.38)$$

onde $\beta \in [0, 1)$ é um parâmetro que caracteriza a fase adquirida ao percorrer o intervalo L . A solução mantém a forma de onda plana, mas agora os modos são discretizados como

$$k_n = \frac{2\pi}{L}(n + \beta), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (2.39)$$

A discretização dos modos é fundamental para a análise da energia de vácuo e do efeito Casimir, pois determina o espectro de frequências que contribuem para a soma sobre os estados quânticos do campo.

2.2.2 Calculando a constante C_σ em $(3 + 1)$ dimensões

A constante C_σ é determinada pela condição de normalização do campo escalar,

$$i \int d^3x \left[\varphi_\sigma \frac{\partial \varphi_{\sigma'}^*}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial t} \varphi_{\sigma'}^* \right] = \delta_{\sigma, \sigma'}. \quad (2.40)$$

Aqui, $\sigma = (k_n, k_y, k_z)$ representa o conjunto de números quânticos do modo, sendo que, para cada condição de contorno, a discretização do momento na direção x , k_n , foi apresentada na subseção anterior. Além disso, o símbolo $\delta_{\sigma, \sigma'}$ combina o delta de Kronecker para o índice discreto n e o delta de Dirac para os momentos contínuos k_y e k_z , ou seja,

$$\delta_{\sigma, \sigma'} = \delta_{n, n'} \delta(k_y - k'_y) \delta(k_z - k'_z). \quad (2.41)$$

No caso de três dimensões espaciais, a solução do campo escalar associado à condição de Dirichlet pode é escrita como

$$\varphi_\sigma = C_\sigma e^{-i\omega_n t} e^{ik_y y} e^{ik_z z} \sin(k_n x), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.42)$$

Substituindo essas expressões em (2.40), obtemos

$$\begin{aligned} 2\omega_n |C_\sigma|^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{iy(k_y - k'_y)} dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{iz(k_z - k'_z)} dz \int_a^b \sin k_n(x - a) \sin k'_n(x - a) dx \\ = \delta_{n, n'} \delta(k_y - k'_y) \delta(k_z - k'_z). \end{aligned} \quad (2.43)$$

Agora, fazendo uso das relações [24],

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iy(k_y - k'_y)} dy = 2\pi \delta(k_y - k'_y), \quad (2.44)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iz(k_z - k'_z)} dz = 2\pi \delta(k_z - k'_z), \quad (2.45)$$

$$(2.46)$$

e também

$$\int_a^b \sin k_n(x - a) \sin k'_n(x - a) dx = \frac{L}{2} \delta_{n, n'}, \quad (2.47)$$

obtemos a constante de normalização, ou seja,

$$|C_\sigma|^2 = \frac{1}{4\pi^2 \omega_n L}, \quad (\text{Dirichlet}), \quad (2.48)$$

em que ω_n representa as auto-frequências, podendo ser escrita como

$$\omega_n = \sqrt{k_n^2 + k_y^2 + k_z^2 + m^2}. \quad (2.49)$$

Para condições mistas consideradas, a constante de normalização tem a mesma forma da de Dirichlet na Eq. (2.48), porém com o momento discretizado dado pela Eq. (2.37).

Para a condição de contorno de Neumann, o cálculo da constante de normalização C_σ segue raciocínio similar, tendo em vista que a solução em x é $X(x) = \cos(k_n x)$. Assim, é dada por

$$|C_\sigma|^2 = \begin{cases} \frac{1}{8\pi^2 \omega_n L}, & \text{para } n = 0, \\ \frac{1}{4\pi^2 \omega_n L}, & \text{para } n > 0. \end{cases} \quad (2.50)$$

Por outro lado, no caso da condição quasi-periódica, os modos do campo são

$$\varphi_\sigma = C_\sigma e^{-i\omega_n t} e^{ik_y y} e^{ik_z z} e^{ik_n x}, \quad (2.51)$$

com $k_n = \frac{2\pi}{L}(n + \beta)$. Consequentemente, a constante de normalização é obtida como

$$|C_\sigma|^2 = \frac{1}{8\pi^2 \omega_n L}, \quad (2.52)$$

onde usamos [24]

$$\int_0^L e^{ix(k_n - k'_n)} dx = L \delta_{n,n'}. \quad (2.53)$$

Iremos em seguida discutir a quantização do campo escalar real.

2.3 Quantização do Campo Escalar

A quantização do campo escalar consiste em promover o campo clássico $\varphi(w)$ a um operador quântico $\hat{\phi}(w)$ definido em cada ponto do espaço-tempo. Esse operador pode ser expandido em modos normais, cada um associado a um conjunto de números quânticos $\sigma = (k_n, k_y, k_z)$, que foram definidos nas seções anteriores de acordo com a condição de contorno considerada. Ou seja,

$$\hat{\phi}(w) = \sum_{\sigma} \left[a_{\sigma} \varphi_{\sigma}(w) + a_{\sigma}^{\dagger} \varphi_{\sigma}^*(w) \right], \quad (2.54)$$

onde $\varphi_{\sigma}(w)$ são as soluções de campo normalizadas e a_{σ} , $a_{\sigma}^{\dagger}$ são os operadores de aniquilação e criação, respectivamente. O símbolo $\delta_{\sigma,\sigma'}$ usado nas relações de comutação combina delta de Kronecker para o índice discreto n e delta de Dirac para os momentos contínuos k_y e k_z , como já mencionado anteriormente.

Os operadores de criação e aniquilação satisfazem as relações de comutação canônicas,

$$[a_\sigma, a_{\sigma'}] = 0, \quad (2.55)$$

$$[a_\sigma^\dagger, a_{\sigma'}^\dagger] = 0, \quad (2.56)$$

$$[a_\sigma, a_{\sigma'}^\dagger] = \delta_{\sigma, \sigma'}. \quad (2.57)$$

Aplicados ao estado fundamental (vácuo quântico) $|0\rangle$, os operadores de aniquilação satisfazem

$$\begin{aligned} a_\sigma |0\rangle &= 0, \\ \langle 0| a_\sigma^\dagger &= 0, \end{aligned} \quad (2.58)$$

o que garante que o vácuo não contém partículas. A promoção do campo escalar a operador e a introdução dos operadores a_σ e $a_\sigma^\dagger$ permite calcular o valor esperado de observáveis, como o tensor energia-momento, e estudar efeitos quânticos como a energia de vácuo.

2.4 Função de Wightman

Os valores esperados de vácuo podem ser associados a funções de Green do campo escalar [16]. Para um campo escalar, definimos as funções relacionadas ao comutador e ao anticomutador do campo como

$$iG(w, w') = \langle 0| [\hat{\phi}(w), \hat{\phi}(w')] |0\rangle, \quad (2.59)$$

$$G^{(1)}(w, w') = \langle 0| \{ \hat{\phi}(w), \hat{\phi}(w') \} |0\rangle. \quad (2.60)$$

A função $G(w, w')$ é conhecida como função de Pauli-Jordan ou função de Schwinger, enquanto que $G^{(1)}(w, w')$ é conhecida como função de Hadamard. Estas funções podem ser decompostas em partes de frequência positiva e negativa como

$$iG(w, w') = G^+(w, w') - G^-(w, w'), \quad (2.61)$$

$$G^{(1)}(w, w') = G^+(w, w') + G^-(w, w'). \quad (2.62)$$

As funções $G^\pm$ são conhecidas como funções de Wightman. Em particular, a função de Wightman com frequência positiva é definida por

$$W(w, w') = \langle 0| \hat{\phi}(w) \hat{\phi}(w') |0\rangle. \quad (2.63)$$

Substituindo a expansão do campo (2.54) na expressão acima e usando as propriedades do estado de vácuo na Eq. (2.58), encontramos que

$$W(w, w') = \sum_{\sigma} \varphi_{\sigma}(w) \varphi_{\sigma}^*(w'). \quad (2.64)$$

Finalmente, usando a solução normalizada da equação de Klein-Gordon em três dimensões para cada condição considerada neste trabalho, podemos escrever de forma geral

$$W(w, w') = \sum_{\sigma} |C_{\sigma}|^2 e^{-i\omega_{\sigma}\Delta t + ik_y\Delta y + ik_z\Delta z} X(x) X^*(x'), \quad (2.65)$$

onde Δt , Δy , e Δz são definidos na Eq. (2.3). A constante de normalização C_{σ} e a solução de campo $X(x)$ dependerão do tipo de condição já discutidas.

O símbolo $\sum_{\sigma}$ representa o produto de somatórios e integrais. Ou seja, variáveis contínuas correspondem a integrais, enquanto variáveis discretas correspondem a somatórios. Como sabemos, no presente trabalho, colocamos condições de contorno apenas na direção x , de forma que a componente k_x se torna discreta, enquanto k_y e k_z permanecem contínuas, resultando em

$$\sum_{\sigma} \longrightarrow \sum_n \int dk_y \int dk_z, \quad (2.66)$$

em que os limites da soma em n dependerão do tipo de condição a ser considerada, de acordo com as Eqs. (2.34), (2.36), (2.37) e (2.39).

Podemos ainda destacar que a função de Hadarmad, definida nas Eqs. (2.60) e (2.62), no caso de uma campo escalar real (hermitiano), pode ser escrita como

$$G^{(1)}(w, w') = 2\text{Re}[W(w, w')]. \quad (2.67)$$

A igualdade acima será essencial para nossos cálculos nas próximas seções.

2.5 Tensor Energia-Momento

Para a formulação local, precisamos calcular o valor esperado do tensor energia-momento $T_{\alpha\beta}$ [23]. Em particular, T_{00} fornece a densidade de energia no referencial de repouso, enquanto as componentes diagonais espaciais representam as pressões em cada direção. A derivação abaixo para o tensor energia-momento e seu valor esperado de vácuo segue em paralelo com a derivação feita no Apêndice da Ref. [26].

O tensor energia-momento métrico é obtido pela variação da ação em relação à métrica, isto é,

$$T_{\mu\nu}(x) = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}(x)}, \quad (2.68)$$

com a ação do campo escalar real dada por

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g(x)} \left[g^{\mu\nu} \partial_{\mu} \varphi(x) \partial_{\nu} \varphi(x) - (m^2 + \xi R) \varphi^2(x) \right], \quad (2.69)$$

onde R é o escalar de Ricci e ξ é o parâmetro de acoplamento não-mínimo entre o campo e a curvatura.

A contribuição da variação do termo cinético resulta em

$$\begin{aligned}\delta(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi) &= \delta(\sqrt{-g}) g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi + \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi \\ &= \left(-\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \varphi \partial_\beta \varphi + \sqrt{-g} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi \right) \delta g^{\mu\nu},\end{aligned}\quad (2.70)$$

onde utilizamos a identidade padrão [23, 27]

$$\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta}. \quad (2.71)$$

Consequentemente, obtemos

$$\frac{\delta S^{\text{cin}}}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{4} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \varphi) (\partial_\beta \varphi) + \frac{1}{2} \sqrt{-g} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi. \quad (2.72)$$

Portanto, a contribuição do termo cinético para o tensor energia-momento, a partir da equação (2.68), será

$$T_{\mu\nu}^{\text{cin}} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \varphi \partial_\beta \varphi + \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi. \quad (2.73)$$

Para o termo com massa, temos

$$\delta(-\sqrt{-g} m^2 \varphi^2) = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} (m^2 \varphi^2), \quad (2.74)$$

de modo que a contribuição desse termo para o tensor energia-momento será

$$T_{\mu\nu}^{\text{massa}} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} m^2 \varphi^2. \quad (2.75)$$

Por último, calculamos o termo com R na ação. O valor da sua variação é dado por

$$\delta(\sqrt{-g} \xi R \varphi^2) = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \xi R \varphi^2 + \sqrt{-g} \xi \delta R \varphi^2. \quad (2.76)$$

Agora, para o segundo termo, temos que R , escalar de Ricci, é a contração entre a métrica e o tensor de Ricci

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (2.77)$$

Portanto, sua variação resultará em dois termos: a variação da métrica e a variação do tensor de Ricci. O último é dado pelo identidade [23]

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\alpha \delta \Gamma_{\nu\mu}^\alpha - \nabla_\nu \delta \Gamma_{\alpha\mu}^\alpha. \quad (2.78)$$

A variação do símbolo de Christoffel fica

$$\delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \delta g^{\lambda\rho} g_{\rho\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^\alpha + \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_\mu \delta g_{\nu\rho} + \partial_\nu \delta g_{\mu\rho} - \partial_\rho \delta g_{\mu\nu}) \quad (2.79)$$

$$= -\frac{1}{2} \left(g_{\nu\alpha} \nabla_\mu \delta g^{\alpha\lambda} + g_{\mu\alpha} \nabla_\nu \delta g^{\alpha\lambda} - g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \nabla^\lambda \delta g^{\alpha\beta} \right), \quad (2.80)$$

resultando na variação total do escalar de Ricci

$$\delta R = R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \nabla_\mu \nabla_\nu \delta g^{\mu\nu} - g_{\mu\nu} \square \delta g^{\mu\nu}. \quad (2.81)$$

Assim, a variação (2.76) resulta em

$$\begin{aligned} \delta(\sqrt{-g} \xi R \varphi^2) = & -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \xi R \varphi^2 + \sqrt{-g} \xi R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \varphi^2 \\ & + \sqrt{-g} \xi \nabla_\mu \nabla_\nu \delta g^{\mu\nu} \varphi^2 - \sqrt{-g} \xi g_{\mu\nu} \square \delta g^{\mu\nu} \varphi^2. \end{aligned} \quad (2.82)$$

A variação da ação em relação à métrica torna-se

$$\begin{aligned} \frac{\delta S^R}{\delta g^{\mu\nu}} = & \frac{1}{4} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \xi R \varphi^2 - \frac{1}{2} \sqrt{-g} \xi R_{\mu\nu} \varphi^2 \\ & - \frac{1}{2} \sqrt{-g} \xi \nabla_\mu \nabla_\nu \varphi^2 + \frac{1}{2} \sqrt{-g} \xi g_{\mu\nu} \square \varphi^2. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Com isso, a contribuição desse termo para o tensor energia-momento será

$$T_{\mu\nu}^R = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \xi R \varphi^2 - \xi R_{\mu\nu} \varphi^2 - \xi \nabla_\mu \nabla_\nu \varphi^2 + \xi g_{\mu\nu} \square \varphi^2. \quad (2.84)$$

Agora, juntando as equações (2.73), (2.75) e (2.84), temos

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} = & -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left[g^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \varphi) (\partial_\beta \varphi) - (m^2 + \xi R) \varphi^2 \right] + (\partial_\mu \varphi) (\partial_\nu \varphi) \\ & + \xi (g_{\mu\nu} \square - R_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu) \varphi^2. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Considerando a equação de movimento com acoplamento mínimo $-(m^2 + \xi R) \varphi^2(x) = \varphi \square \varphi$, e a identidade

$$\square(\varphi^2) = 2 \varphi \square \varphi + 2 g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \varphi \nabla_\beta \varphi \quad (2.86)$$

chegamos à expressão final

$$T_{\mu\nu} = (\partial_\mu \varphi) (\partial_\nu \varphi) + \left[\left(\xi - \frac{1}{4} \right) g_{\mu\nu} \square - \xi R_{\mu\nu} - \xi \nabla_\mu \nabla_\nu \right] \varphi^2. \quad (2.87)$$

O próximo passo é promover o tensor momento-energia a operador, quantizando-o através também da quantização do campo escalar. Em seguida, utilizando o método do *point-splitting*, podemos escrever a componente covariante do tensor energia-momento como

$$\hat{T}_{\mu\nu}(w) = \lim_{w \rightarrow w'} \hat{T}_{\mu\nu}(w, w'). \quad (2.88)$$

Em seguida, mantendo o *point-splitting*, podemos tomar o valor esperado do tensor acima. Assim, obtemos

$$\langle \hat{T}_{\mu\nu} \rangle = \frac{1}{2} \lim_{w \rightarrow w'} \partial_{\mu'} \partial_{\nu'} G^{(1)}(w, w') + \left[\left(\xi - \frac{1}{4} \right) g_{\mu\nu} \square - \xi \nabla_\mu \nabla_\nu - \xi R_{\mu\nu} \right] \langle \varphi^2 \rangle, \quad (2.89)$$

em que $G^{(1)}(w, w')$ é definido na Eq. (2.67) e

$$\langle \varphi^2 \rangle = \frac{1}{2} \lim_{w' \rightarrow w} G^{(1)}(w, w'), \quad (2.90)$$

é o valor esperado do campo ao quadrado, obtido através do limite de coincidência da função de Hadamard e, consequentemente, da função de Wightman.

Com a expressão na Eq. (2.89) para o valor esperado do tensor energia-momento, poderemos obter sua componente temporal mista que é de extrema importância para o cálculo da densidade de energia de vácuo.

Para finalizar esta subseção, vamos considerar a função de Wightman (2.65) escrita de forma unificada para as condições de Dirichlet, Neumann e mistas como

$$W(w, w') = \frac{1}{16\pi^2 L} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int \frac{dk_y dk_z}{\omega_\sigma} \left(e^{ik_n \Delta x} \mp e^{ik_n \Delta \bar{x}} \right) e^{-i\omega_\sigma \Delta t + ik_y \Delta y + ik_z \Delta z}, \quad (2.91)$$

em que $\Delta \bar{x} = x + x'$. Note que o sinal negativo corresponde às condições de Dirichlet ou Dirichlet-Neumann (dependendo do caso a ser considerado), juntamente com seus respectivos momentos discretizados nas Eqs. (2.36) e (2.37). Analogamente, o sinal positivo corresponde às condições de Neumann e Neumann-Dirichlet, com seus respectivos momentos discretizados. Note também que, de acordo com a igualdade na Eq. (2.67), estaremos interessados apenas na parte real da função de Wightman acima ou na parte real de qualquer operação, como a de integração, que incida sobre a mesma.

Analogamente, a função de Wightmann considerando a condição quasi-periódica pode ser escrita como

$$W(w, w') = \frac{1}{8\pi^2 L} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int \frac{dk_y dk_z}{\omega_\sigma} e^{-i\omega_\sigma \Delta t + ik_n \Delta x + ik_y \Delta y + ik_z \Delta z}, \quad (2.92)$$

com o correspondente momento discretizado dado pela Eq. (2.39).

No próximo capítulo, objetivamos contrastar as duas metodologias predominantes para o cálculo da energia de vácuo que caracteriza o efeito Casimir, conhecidas como *método global* e *método local*. Este estudo será realizado considerando tanto o contexto de configurações com fronteiras físicas quanto condições de contorno quasi-periódicas.

No cenário de fronteiras físicas, como duas placas condutoras paralelas e neutras separadas por uma distância L , argumentaremos que a discrepância entre os resultados dos dois métodos é consequência de um fato fundamental: a *não comutatividade* entre a operação de soma sobre os modos do campo, expressa em (2.91) e (2.92), e a operação de integração no volume. Esta última é necessária para se obter a energia de vácuo total a partir da integral da componente T_0^0 do tensor energia-momento, calculado localmente.

Em outras palavras, a ordem das operações é crucial. Resumidamente, temos que:

- O *método global* realiza primeiro a integração no volume e fornece uma expressão para a energia total em termos da soma das auto-frequências do campo sob seus modos quânticos.
- O *método local* calcula primeiro o valor esperado no vácuo do tensor energia-momento $\langle T^{\mu\nu} \rangle$ somando sobre os modos do campo e depois integra sua componente temporal $\langle T_0^0 \rangle$ sobre o volume.

3 Cálculo da Energia de Casimir em (3+1) Dimensões

3.1 Abordagem Global e a Regularização via Função Zeta

A abordagem global para o cálculo da energia de vácuo consiste em obter uma expressão geral somente em termos da soma dos modos das auto-frequências do campo. Isso é feito a partir das Eqs. (2.89) e (2.91). Assim, integramos primeiramente, no volume, a componente temporal $\langle T_0^0 \rangle$ do tensor energia-momento. Como não estamos considerando curvatura para o espaço-tempo, o tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ será nulo. Além disso, adotamos o acoplamento mínimo, $\xi = 0$, na Eq. (2.89).

Após analisarmos a Eq. (2.90), verificamos que a única dependência da posição x provém do segundo termo entre parênteses na Eq. (2.91), após isolarmos a contribuição $n = 0$ da soma. Em seguida, ao integrarmos em x na região entre as placas, de 0 a L , observamos que esse termo se anula. A contribuição restante, portanto, é constante e também se anula após a atuação do operador d'Alembertiano, $\square$, sobre ela (veja apêndice A).

A contribuição não nula para a energia de vácuo provém, então, inteiramente do primeiro termo no lado direito da Eq. (2.89). Após realizarmos as derivadas temporais em pontos distintos e tomarmos o limite de coincidência $w' \rightarrow w$, podemos integrar no volume entre as placas. Mais uma vez, a contribuição do segundo termo entre parênteses na Eq. (2.91) se anula quando integrada entre as placas. Nesse sentido, apenas o primeiro termo entre parênteses contribui, fornecendo o seguinte resultado:

$$E_0 = \frac{A}{2(2\pi)^2} \sum_{n=0 \text{ ou } 1}^{+\infty} \int dk_y dk_z \omega_\sigma, \quad (3.1)$$

onde A é a área das placas. Observe que a soma sobre n pode começar em 0, para condições mistas ou de Neumann, ou em 1, para a condição de Dirichlet. Seguindo raciocínio semelhante, uma expressão análoga pode ser obtida para o caso de condição quase-periódica, lembrando apenas que a soma sobre n neste caso vai de $-\infty$ a $+\infty$, e que A corresponderá à área no plano (y, z) .

Genericamente, a expressão acima pode ser escrita como

$$E_0 = \frac{1}{2} \sum_{\sigma} \omega_\sigma, \quad (3.2)$$

a qual caracteriza essencialmente o método global para o cálculo da energia de vácuo [10]. Na literatura, é comum utilizar essa expressão sempre que as auto-frequências ω_σ do campo

possam ser obtidas, sem recorrer à componente temporal do tensor energia-momento e à sua posterior integração sobre o volume. Entretanto, é necessário cautela ao verificar se a quantização do campo em questão - submetido a condições externas, como placas, alterações na topologia do espaço-tempo ou presença de campos externos - realmente conduz à definição (3.2) quando se integra a componente temporal do tensor energia-momento *antes* de realizar a soma sobre os modos do campo.

Para as condições de Dirichlet e Neumann, as auto-frequências seguem o resultado da Eq. (2.49), considerando os respectivos momentos discretizados nas Eqs. (2.34) e (2.36). Dessa forma, a energia de vácuo pode ser expressa como

$$E_0 = \frac{A}{2(2\pi)^2} \sum_{n=0 \text{ ou } 1}^{+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \sqrt{m^2 + \frac{n^2 \pi^2}{L^2} + k_y^2 + k_z^2}, \quad (3.3)$$

onde A é a área das placas e a soma em n começa em 0 para condições mistas ou de Neumann, e em 1 para Dirichlet.

A regularização via função zeta pode agora ser aplicada. Começamos regularizando a energia, escrevendo-a da seguinte forma:

$$E_0^s = \frac{1}{2} \sum_{\sigma} (\omega_{\sigma}^2)^{-s}, \quad (3.4)$$

o que corresponde essencialmente à definição de uma função zeta generalizada [18]. A expressão original da Eq. (3.3) é recuperada ao realizarmos o limite $s \rightarrow -\frac{1}{2}$.

Após utilizarmos a identidade [18]

$$\frac{1}{(\omega^2)^s} = \frac{2}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \tau^{2s-1} e^{-\omega^2 \tau^2} d\tau, \quad (3.5)$$

e também a Eq. (2.49), podemos executar as integrais gaussianas sobre os momentos k_y e k_z . A expressão resultante é dada por

$$E_0^s = \frac{A\pi}{(2\pi)^2 \Gamma(s)} \sum_{n=0 \text{ ou } 1}^{+\infty} \int_0^{\infty} \tau^{2s-3} e^{-\left(m^2 + \frac{n^2 \pi^2}{L^2}\right) \tau^2} d\tau. \quad (3.6)$$

Agora, aplicando novamente a identidade (3.5) e isolando n , obtemos

$$E_0^s = \frac{A\pi}{2(2\pi)^2} \frac{\Gamma(s-1)}{\Gamma(s)} \left(\frac{L^2}{\pi^2}\right)^{s-1} \sum_{n=0 \text{ ou } 1}^{+\infty} \frac{1}{[n^2 + \beta^2]^{s-1}}, \quad (3.7)$$

com $\beta^2 = \frac{m^2 L^2}{\pi^2}$. O somatório sobre n se assemelha à continuação analítica da função zeta de Epstein-Hurwitz, bastante útil [28, 29], que pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 + \beta^2)^{-\bar{s}} &= -\frac{\beta^{-2\bar{s}}}{2} + \frac{\pi^{1/2}}{2} \frac{\Gamma(\bar{s} - \frac{1}{2})}{\Gamma(\bar{s})} \beta^{1-2\bar{s}} \\ &\quad + \frac{2^{1-\bar{s}} (2\pi)^{2\bar{s}-1/2}}{\Gamma(\bar{s})} \sum_{n=1}^{\infty} n^{2\bar{s}-1} f_{\bar{s}-1/2}(2\pi n\beta), \end{aligned} \quad (3.8)$$

onde, para o nosso caso, $\bar{s} = s - 1$. A função $f_\gamma(x)$ é definida por

$$f_\gamma(x) = \frac{K_\gamma(x)}{x^\gamma}, \quad (3.9)$$

com $K_\gamma(x)$ sendo a função de Macdonald [30]. Note que, para a condição de Neumann, é necessário isolar o termo $n = 0$ na Eq. (3.7) para utilizar a expressão (3.8) corretamente.

Os dois primeiros termos da Eq. (3.8) fornecem as seguintes contribuições:

$$E_{0e}^s = \pm \frac{A}{16\pi} \frac{\Gamma(s-1)}{\Gamma(s)} \left(\frac{L^2}{\pi^2}\right)^{s-1} \left(\frac{mL}{\pi}\right)^3 + \frac{A}{16\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(s-3/2)}{\Gamma(s)} \left(\frac{L^2}{\pi^2}\right)^{s-1} \left(\frac{mL}{\pi}\right)^{3-2s}, \quad (3.10)$$

em que, no primeiro termo, o sinal positivo corresponde à condição de Neumann, enquanto o negativo corresponde à condição de Dirichlet. Este termo, avaliado em $s = -\frac{1}{2}$, fornece uma contribuição independente de L , mas proporcional a m^3 . Já o segundo termo, calculado em $s = -\frac{1}{2}$, diverge. Ambos os termos são considerados espúrios, pois fazem a energia de origem quântica aumentar com a massa e, no caso do segundo termo, divergir. O limite de massa elevada corresponde ao regime clássico, no qual a energia de vácuo deve se anular. Dessa forma, a expressão (3.10) deve ser subtraída no processo de renormalização da energia de vácuo obtida a partir da Eq. (3.8) [10].

O processo de renormalização mencionado é formalmente executado através do limite

$$E_0^{\text{ren}} = \lim_{s \rightarrow -\frac{1}{2}} (E_0^s - E_{0e}^s), \quad (3.11)$$

resultando apenas na quantidade finita

$$\frac{E_0^{\text{ren}}}{A} = -\frac{m^2}{8\pi^2 L} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} K_2(2nmL), \quad (3.12)$$

originada no último termo da Eq. (3.8). Esta é a energia de vácuo para o campo escalar massivo sob condições de Dirichlet e Neumann. Ou seja, na abordagem global, ambas as condições fornecem o mesmo resultado.

Note-se ainda que, para grandes argumentos, a função de Macdonald possui a forma assintótica $K_\gamma(x) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}$. Assim, a expressão (3.12) apresenta o comportamento esperado para grandes massas, com a energia de vácuo tendendo a zero.

Em contraste, para pequenos argumentos, podemos utilizar o limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^\gamma K_\gamma(x) = \Gamma(\gamma) 2^{\gamma-1}, \quad (3.13)$$

o que fornece

$$\frac{E_0^{\text{ren}}}{A} = -\frac{1}{16\pi^2 L^3} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-4}. \quad (3.14)$$

O somatório corresponde à função zeta de Riemann, $\zeta_R(4) = \frac{\pi^4}{90}$, resultando em

$$\frac{E_0^{\text{ren}}}{A} = -\frac{\pi^2}{1440L^3}. \quad (3.15)$$

Os resultados para a energia de vácuo massiva (3.12) e não massiva (3.15) estão em pleno acordo com a literatura, inclusive utilizando outros métodos [10, 31].

Voltando agora nossa atenção para condições mistas, ambas possuem a mesma expressão para as auto-frequências na Eq. (2.49), com o momento k_n dado na Eq. (2.37). Assim,

$$E_0 = \frac{A}{2(2\pi)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \sqrt{\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4L^2} + k_y^2 + k_z^2 + m^2}. \quad (3.16)$$

Aplicando a regularização (3.4) e a identidade (3.5), e executando as integrais gaussianas em k_y e k_z , obtemos

$$E_0^s = \frac{A}{4(2\pi)^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \tau^{2s-3} e^{-\left[\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4L^2} + m^2\right] \tau^2} d\tau, \quad (3.17)$$

utilizando

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4L^2} \tau^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4L^2} \tau^2}. \quad (3.18)$$

Aplicando agora as propriedades das Eqs. (2.9), (2.10) e (2.11), obtemos

$$E_0^s = \frac{AL}{8\pi^2 \Gamma(s)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\pi} \int_0^{\infty} d\tau \tau^{2s-3} e^{-m^2 \tau^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa e^{-\kappa^2 \tau^2 + i2nL\kappa}. \quad (3.19)$$

Após executar a integral em κ e, em seguida, a integral em τ , obtemos

$$E_0^s = E_{0e}^s + \frac{AL\pi^{\frac{1}{2}}}{4\pi^2 \Gamma(s)} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi) \left(\frac{m}{nL}\right)^{\frac{3}{2}-s} K_{\frac{3}{2}-s}(2nmL), \quad (3.20)$$

onde utilizamos a propriedade da função de Macdonald $K_\gamma(x) = K_{-\gamma}(x)$. O termo espúrio E_{0e}^s corresponde à contribuição $n = 0$ da soma na Eq. (3.19), dado por

$$E_{0e}^s = \frac{AL\pi^{1/2}}{16\pi^2 \Gamma(s)} m^{3-2s} \Gamma(s - 3/2), \quad (3.21)$$

que diverge em $s = -\frac{1}{2}$ e deve ser subtraído.

Aplicando a condição de renormalização da Eq. (3.11), obtemos a energia de vácuo renormalizada para condições mistas:

$$\frac{E_0^{\text{ren}}}{A} = -\frac{m^2}{8\pi^2 L} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{K_2(2nmL)}{n^2}. \quad (3.22)$$

No caso não massivo, utilizando o limite (3.13), temos

$$\frac{E_0^{\text{ren}}}{A} = \frac{7\pi^2}{11520L^3}, \quad (3.23)$$

em acordo com Ref. [32]. A expressão (3.22) para o caso massivo é uma representação alternativa da obtida na mesma referência, usando outra formulação da função zeta de Epstein-Hurwitz¹. Ambas as representações descrevem o mesmo comportamento físico da energia de vácuo e coincidem para o caso não massivo.

A força por unidade de área, ou pressão, é obtida através da expressão

$$P(L) = -\frac{\partial E}{\partial L}. \quad (3.24)$$

Usando os resultados das equações (3.15), (3.23) e a equação anterior, achamos os valores das pressões associadas às quatro condições de contorno vistas anteriormente, mostrados na tabela a seguir.

Dirichlet	Neumann	Mista (DN)	Mista (ND)
$-\frac{\pi^2}{480L^4}$	$-\frac{\pi^2}{480L^4}$	$\frac{7\pi^2}{3840L^4}$	$\frac{7\pi^2}{3840L^4}$

Tabela 1 – Força de vácuo por unidade de área para diferentes condições de contorno em (3 + 1) dimensões, encontradas pelo método global.

Por último, calcularemos a energia para a condição quasi-periódica. Considerando as auto-frequências definidas em (2.49), com o momento correspondente em (2.39), a partir da definição na Eq. (3.2), temos

$$E_0 = \frac{A}{2(2\pi)^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \sqrt{\frac{4\pi^2(n+\beta)^2}{L^2} + k_y^2 + k_z^2 + m^2}. \quad (3.25)$$

Seguindo os mesmos passos dos casos anteriores, chegamos a

$$E_0^s = \frac{A}{4\pi\Gamma(s)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \tau^{2s-3} e^{-\left[\frac{4\pi^2(n+\beta)^2}{L^2} + m^2\right]\tau^2} d\tau. \quad (3.26)$$

Aplicando novamente as propriedades das Eqs. (2.9), (2.10) e (2.11), obtemos

$$E_0^s = \frac{AL\pi^{1/2}}{8\pi^2\Gamma(s)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi n\beta} \int_0^{\infty} \tau^{2s-4} e^{-\frac{L^2 n^2}{4\tau^2} - m^2 \tau^2} d\tau. \quad (3.27)$$

Separando o termo $n = 0$ da soma e executando a integral, temos

$$E_0^s = E_{0e}^s + \frac{AL\pi^{\frac{1}{2}}}{8\pi^2\Gamma(s)} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2i\pi n\beta} 2^{\frac{3}{2}-s} \left(\frac{m}{nL}\right)^{\frac{3}{2}-s} K_{\frac{3}{2}-s}(nmL), \quad (3.28)$$

onde E_{0e}^s é dado na Eq. (3.21) e deve ser subtraído, pois diverge quando $s = -\frac{1}{2}$.

¹ Veja Eq. (2.82) em Ref. [32].

Usando a condição de renormalização da Eq. (3.11), obtemos a energia de vácuo massiva renormalizada para a condição quasi-periódica:

$$\frac{E_0^{\text{ren}}}{A} = -\frac{m^2}{2\pi^2 L} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(2\pi n\beta) \frac{K_2(nmL)}{n^2}. \quad (3.29)$$

Esta expressão é compatível com os resultados da Ref. [33] e, assim como nos casos anteriores, decai exponencialmente com a massa no limite clássico $m \rightarrow \infty$.

No caso não massivo, aplicando o limite da Eq. (3.13), temos

$$\frac{E_0^{\text{ren}}}{A} = -\frac{1}{\pi^2 L^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi n\beta)}{n^4}. \quad (3.30)$$

Utilizando os polinômios de Bernoulli

$$B_{2k}(\beta) = \frac{(-1)^{k-1} 2(2k)!}{(2\pi)^{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi n\beta)}{n^{2k}}, \quad 0 \leq \beta < 1, \quad (3.31)$$

podemos escrever a Eq. (3.30) como

$$\begin{aligned} \frac{E_0^{\text{ren}}}{A} &= \frac{\pi^2}{3L^3} B_4(\beta) \\ &= \frac{\pi^2}{3L^3} \left(\beta^4 - 2\beta^3 + \beta^2 - \frac{1}{30} \right). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Dessa forma, para o caso periódico ($\beta = 0$), temos

$$\frac{E_0^{\text{ren}}}{A} = -\frac{\pi^2}{90L^3}, \quad (3.33)$$

enquanto que para o caso anti-periódico ($\beta = 1/2$),

$$\frac{E_0^{\text{ren}}}{A} = \frac{7\pi^2}{720L^3}. \quad (3.34)$$

Esses resultados para o caso anti-periódico estão de acordo com as Refs. [33, 34]. Observa-se que o sinal da energia, que determina a força do vácuo, depende do valor do parâmetro β , definindo se a força será atrativa ou repulsiva.

Na próxima subseção, iremos contrastar os resultados obtidos aqui com os obtidos pela abordagem local, na qual a soma sobre os modos do campo nas funções de Wightman (2.91) e (2.92) deve ser realizada antes da integração sobre o volume.

3.2 Abordagem Local

Agora calcularemos as mesmas energias utilizando a abordagem local. Começaremos obtendo uma expressão fechada para a soma sobre os modos nas funções de Wightman (2.91) e (2.92). Para a Eq. (2.91), expressaremos a função de Wightman de forma unificada para

as condições de Dirichlet, Neumann e mistas. Esta forma geral será útil para os cálculos subsequentes.

Dessa forma, utilizando as expressões (2.9), (2.10) e (2.11), a função de Wightman em (2.91) pode ser escrita como

$$W(w, w') = \frac{1}{16\pi^3} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa \frac{e^{-i\omega_\kappa \Delta t + ik_y \Delta y + ik_z \Delta z}}{\omega_\kappa} \times \left[\delta_n^{(i)} e^{i\kappa(\Delta x + 2nL)} + \gamma_n^{(i)} e^{i\kappa(\Delta \bar{x} + 2nL)} \right], \quad (3.35)$$

onde a propriedade de filtragem (2.9) da delta de Dirac foi utilizada em k_n , transformando-o em uma variável contínua [35].

Além disso, introduzimos os parâmetros

$$\delta_n^{(i)} = [\delta_n^{(D)}, \delta_n^{(N)}, \delta_n^{(ND)}, \delta_n^{(DN)}] = [1, 1, (-1)^n, (-1)^n], \quad (3.36)$$

$$\gamma_n^{(i)} = [\gamma_n^{(D)}, \gamma_n^{(N)}, \gamma_n^{(ND)}, \gamma_n^{(DN)}] = [-1, 1, (-1)^{n+1}, (-1)^n], \quad (3.37)$$

correspondentes às condições de Dirichlet (D), Neumann (N), Neumann-Dirichlet (ND) e Dirichlet-Neumann (DN).

Com a equação anterior, é possível simplificar o cálculo das integrais, que é o próximo passo. Para tanto, utilizaremos a seguinte identidade:

$$\frac{e^{-\omega \Delta t}}{\omega} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\omega^2 s^2 - \frac{\Delta T^2}{4s^2}} ds, \quad (3.38)$$

onde, no nosso caso, $\omega = \omega_\kappa$ e $\Delta T = i\Delta t$ (rotação de Wick).

Aplicando esta identidade na Eq. (3.35), e executando primeiro as integrais do tipo Gaussiana nos momentos k_y , k_z e κ , seguidas da integral em s , obtemos

$$W(w, w') = \frac{m}{4\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\delta_n^{(i)} \frac{K_1 \left(m \sqrt{(\Delta x + 2nL)^2 + \Delta \rho^2} \right)}{\sqrt{(\Delta x + 2nL)^2 + \Delta \rho^2}} + \gamma_n^{(i)} \frac{K_1 \left(m \sqrt{(\Delta \bar{x} + 2nL)^2 + \Delta \rho^2} \right)}{\sqrt{(\Delta \bar{x} + 2nL)^2 + \Delta \rho^2}} \right], \quad (3.39)$$

em que

$$\Delta \rho^2 = \Delta y^2 + \Delta z^2 - \Delta t^2. \quad (3.40)$$

Para o caso não massivo, aplicando o limite da Eq. (3.13) na expressão anterior, obtemos

$$W(w, w') = \frac{1}{4\pi^2} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\delta_n^{(i)}}{(\Delta x + 2nL)^2 + \Delta \rho^2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_n^{(i)}}{(\Delta \bar{x} + 2nL)^2 + \Delta \rho^2} \right\}. \quad (3.41)$$

Esta expressão para o caso não massivo foi obtida anteriormente em Ref. [36]. Assim, as duas funções de Wightman, dadas pelas Eqs. (3.39) e (3.41), representam uma forma unificada para as condições de contorno de Dirichlet, Neumann e mistas, considerando os coeficientes definidos em (3.37).

Observa-se que a parte $n = 0$ da soma no primeiro termo das expressões (3.39) e (3.41) fornece a contribuição divergente do vácuo de Minkowski, quando tomamos o limite de coincidência $w' \rightarrow w$. Em contraste, a parte $n = 0$ do segundo termo corresponde à contribuição de apenas uma placa.

Com a função de Wightman calculada para todas as condições de contorno, podemos finalmente determinar o valor esperado do tensor energia-momento, dado pela fórmula (2.89). A gravitação não está sendo considerada, de modo que o tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ será nulo. Para comparação com a aborgadem global, adotaremos o acoplamento mínimo, $\xi = 0$.

O primeiro observável de interesse é o valor esperado renormalizado do campo ao quadrado, obtido a partir das Eqs. (3.39) e (2.90), após eliminar a contribuição divergente $n = 0$ no primeiro termo de (3.39). Assim, obtemos

$$\langle \varphi^2 \rangle_{\text{ren}} = \frac{m}{4\pi^2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^{(i)} \frac{K_1(2mnL)}{nL} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n^{(i)} \frac{K_1(2m(x+nL))}{2(x+nL)} \right]. \quad (3.42)$$

O caso não massivo pode ser obtido diretamente a partir de (3.41). Aqui focaremos no caso massivo para o cálculo do tensor energia-momento, a partir do qual o caso não massivo é recuperado tomando-se o limite de massa nula, conforme Eq. (3.13).

Começando pela componente temporal T_0^0 , e usando a Eq. (2.89), a densidade de energia é dada por

$$\langle T_0^0 \rangle = \lim_{w' \rightarrow w} \partial_{0'} \partial_0 W(w, w') - \frac{1}{4} \square \langle \varphi^2 \rangle_{\text{ren}}. \quad (3.43)$$

Substituindo as Eqs. (3.39) e (3.42) na expressão acima, obtemos

$$\langle T_0^0 \rangle = -\frac{m^4}{8\pi^2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^{(i)} \frac{K_2(2mnL)}{(mnL)^2} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n^{(i)} \left[\frac{K_2(2v_{nx})}{v_{nx}^2} + \frac{K_1(2v_{nx})}{v_{nx}} \right] \right\}, \quad (3.44)$$

onde $v_{nx} = m(x+nL)$ e foi utilizada a seguinte relação de recorrência para a função de Macdonald [30]:

$$K_{\nu+1}(z) = K_{\nu-1}(z) + \frac{2\nu}{z} K_{\nu}(z), \quad (3.45)$$

para $\nu = 1$. Note que, no primeiro termo da Eq. (3.43), foi subtraído o termo divergente proveniente de $n = 0$ antes de aplicarmos as derivadas temporais.

Podemos obter diretamente o limite não massivo a partir da expressão (3.44) usando a Eq. (3.13). Isto fornece

$$\langle T_0^0 \rangle = -\frac{1}{16\pi^2 L^4} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_n^{(i)}}{n^4} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n^{(i)} \frac{L^4}{(x+nL)^4} \right\}. \quad (3.46)$$

Observa-se que o primeiro termo das Eqs. (3.44) e (3.46), ao ser integrado no volume entre as placas, fornece exatamente os resultados obtidos na sub-seção anterior para a energia de vácuo do campo escalar nos casos de Dirichlet, Neumann e mistas, de acordo com os coeficientes definidos em (3.37).

O segundo termo nas Eqs. (3.44) e (3.46) apresenta divergências localizadas nas posições das placas, em $x = 0$ e $x = L$, que aparecem, respectivamente, nos termos $n = 0$ e $n = -1$ da soma sobre n . No método global, onde primeiro se integra a componente temporal do tensor de energia-momento, essas divergências locais parecem ter sido ‘camufladas’ pela soma sobre os modos do campo escalar, manifestando-se posteriormente na forma dos termos espúrios em (3.10) e (3.21). Pelo método local, no entanto, tais divergências aparecem explicitamente.

A indagação que surge neste ponto é se seria possível compatibilizar os resultados apresentados nas Eqs. (3.44) e (3.46) com os obtidos na sub-seção anterior para a energia de vácuo. A resposta, em princípio, é afirmativa. Tomemos como exemplo o caso não massivo da Eq. (3.46). Nesta expressão, é possível realizar a soma em n no segundo termo, obtendo resultados em termos de funções trigonométricas para $\gamma_n^{(i)} = \pm 1$ e em termos da função zeta de Hurwitz para $\gamma_n^{(i)} = \pm(-1)^n$.

Ao integrar essas expressões em x de forma indefinida, podemos isolar as divergências que surgem nas posições das placas, expressando o resultado das integrais nos limites $x \rightarrow 0$ e $x \rightarrow L$. Expandindo em torno desses pontos, identificamos divergências do tipo $\frac{1}{x^3}$ e $\frac{1}{(x-L)^3}$. Ao subtrair tais divergências, mostra-se que o restante das expressões se anula nos respectivos limites.

Portanto, concluímos que é possível compatibilizar os resultados da energia de vácuo obtidos pelos métodos global e local, isolando e subtraindo as divergências locais após integrar a componente temporal do tensor de energia-momento, além de subtrair a contribuição divergente de Minkowski para a função de Wightman, procedimento padrão em renormalizações de energia de vácuo.

Podemos ainda calcular as componentes $\langle T_i^i \rangle$ do tensor energia-momento. Devido à invariância de *boost* nas direções temporal e espaciais (y, z), concluímos que

$$\langle T_i^i \rangle = \langle T_0^0 \rangle, \quad i = 2, 3, \quad (3.47)$$

com exceção da componente $\langle T_1^1 \rangle$, que fornece a força por unidade de área entre as placas. Para calcular esta componente, usamos

$$\langle T_1^1 \rangle = - \lim_{w' \rightarrow w} \partial_1' \partial_1 W(w, w') - \frac{1}{4} \square \langle \varphi^2 \rangle_{\text{ren}}. \quad (3.48)$$

Um cálculo cuidadoso utilizando as Eqs. (3.39) e (3.42) mostra que o termo dependente da posição proveniente do primeiro termo na Eq. (3.48) é cancelado pelo segundo termo.

O resultado final é

$$\langle T_1^1 \rangle = \frac{F}{A} = -\frac{m^2}{8\pi^2 L^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_n^{(i)}}{n^2} [3K_2(2nmL) + (2nmL)K_1(2nmL)]. \quad (3.49)$$

O caso não massivo é obtido aplicando o limite da Eq. (3.13), fornecendo

$$\frac{F}{A} = -\frac{3}{16\pi^2 L^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_n^{(i)}}{n^4}. \quad (3.50)$$

Portanto, a expressão acima para a força de vácuo por unidade de área, obtida via tensor energia-momento, está completamente compatível com os resultados obtidos na sub-seção anterior. A Tabela 2 resume os valores da força para cada condição de contorno considerada.

Um aspecto interessante é que as divergências locais presentes na energia de vácuo não aparecem no cálculo das expressões (3.49) e (3.50). Portanto, do ponto de vista da força física entre as placas, podemos afirmar que as abordagens global e local são compatíveis, fornecendo o mesmo resultado para a quantidade de interesse.

Dirichlet	Neumann	Mista (DN)	Mista (ND)
$-\frac{\pi^2}{480L^4}$	$-\frac{\pi^2}{480L^4}$	$\frac{7\pi^2}{3840L^4}$	$\frac{7\pi^2}{3840L^4}$

Tabela 2 – Força de vácuo por unidade de área para diferentes condições de contorno em (3 + 1) dimensões, encontradas pelo métodos local.

3.2.1 Acoplamento Conforme

Um outro fato interessante surge no caso de uma teoria conformalmente acoplada, com $\xi = 1/6$ ² [31]. Neste caso, a componente temporal do tensor energia-momento pode ser escrita como

$$\langle T_0^0 \rangle = \lim_{w' \rightarrow w} \partial_{0'} \partial_0 W(w, w') - \frac{1}{12} \square \langle \varphi^2 \rangle_{\text{ren}}. \quad (3.51)$$

Para o caso massivo, isto fornece

$$\langle T_0^0 \rangle = -\frac{m^4}{8\pi^2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^{(i)} \frac{K_2(2mnL)}{(mnL)^2} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n^{(i)} \frac{K_1(2v_{nx})}{3v_{nx}} \right\}. \quad (3.52)$$

No caso não massivo, usando a Eq. (3.13), o segundo termo se anula, fornecendo exatamente a mesma expressão que, quando integrada no volume, coincide com os resultados obtidos pelo método global. A força de vácuo por unidade de área continua dada pelas Eqs. (3.49) e (3.50).

O termo proporcional a $\xi \nabla_\mu \nabla_\nu$ no tensor energia-momento ajuda a compensar mudanças de fatores provenientes do operador d'Alembertiano, evitando divergências locais. Portanto, em uma teoria invariante conforme, não surgem problemas de divergências locais no tensor energia-momento.

² Embora não estejamos trabalhando em espaço-tempo curvo, o parâmetro de acoplamento constante com a gravidade, ξ , ainda contribui para a expressão do tensor energia-momento (2.89).

3.2.2 Condição quasi-periódica

Iremos agora voltar nossa atenção para o caso quasi-periódico, assumindo $\xi = 0$. Neste caso, usando novamente as expressões (2.9), (2.10) e (2.11), a função de Wightman em (2.92) pode ser expressa como

$$W(w, w') = \frac{1}{8\pi^3} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi n i \beta} \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa \frac{e^{-i\omega_\kappa \Delta t + i\kappa \Delta x + i k_y \Delta y + i k_z \Delta z}}{\omega_\kappa}, \quad (3.53)$$

onde a propriedade de filtragem (2.9) da delta de Dirac foi usada no momento k_n da Eq. (2.39), tornando-o contínuo [35].

Usando a identidade em (3.38), encontramos

$$W(w, w') = \frac{m}{4\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi n i \beta} \frac{K_1 \left(\sqrt{(\Delta x + Ln)^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - \Delta t^2} \right)}{\sqrt{(\Delta x + Ln)^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - \Delta t^2}}, \quad (3.54)$$

compatível com o resultado da Ref. [36].

O valor esperado do campo ao quadrado pode ser obtido usando a Eq. (2.90), isto é,

$$\langle \varphi^2 \rangle_{\text{ren}} = \frac{m}{2\pi^2 L} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(2\pi n \beta) \frac{K_1(Lmn)}{n}. \quad (3.55)$$

Note que este resultado não depende da posição, não contribuindo para a componente temporal (3.43) do tensor energia-momento.

Por outro lado, o primeiro termo em (3.43) gera uma contribuição não nula, após eliminar o termo divergente de Minkowski em (3.54), ou seja,

$$\langle T_0^0 \rangle = -\frac{m^2}{2\pi^2 L^2} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(2\pi n \beta) \frac{K_2(Lmn)}{n^2}. \quad (3.56)$$

Após integração no volume, este resultado coincide com o obtido pelo método global, sem problemas de divergências locais. O caso não massivo é obtido diretamente usando a Eq. (3.13) e também coincide com o resultado global.

As demais componentes do tensor energia-momento seguem da invariância de *boost* nas direções (y, z) , ou seja, $\langle T_i^i \rangle = \langle T_0^0 \rangle$, com exceção de $\langle T_1^1 \rangle$, que fornece a força por unidade de área na direção compactificada. Usando a expressão (3.48), obtemos

$$\begin{aligned} \langle T_1^1 \rangle &= \frac{F}{A} \\ &= \frac{m^2}{2\pi^2 L^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi n \beta)}{n^2} [3K_2(nmL) + (nmL)K_1(nmL)]. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Para o caso não massivo, usando a Eq. (3.13), temos

$$\begin{aligned} \frac{F}{A} &= -\frac{3}{\pi^2 L^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi n \beta)}{n^4} \\ &= \frac{\pi^2}{L^4} \left(\beta^4 - 2\beta^3 + \beta^2 - \frac{1}{30} \right), \end{aligned} \quad (3.58)$$

onde usamos novamente os polinômios de Bernoulli $B_4(\beta)$ [37].

Como observado nos cenários com duas placas paralelas e condições de Dirichlet, Neumann e mistas, a soma sobre os modos do campo e a integração no volume não comutam, devido à quebra da invariância de translação na direção x causada pelas fronteiras. Esta não comutatividade é a origem das diferenças entre as energias totais obtidas pelas abordagens global e local.

No caso quasi-periódico, a simetria de translação contínua é substituída por uma simetria discreta ($x \rightarrow x + 2\pi nL$). Como a densidade de energia $\langle T_0^0 \rangle$ não depende de x , as operações de soma sobre os modos e integração espacial comutam. Consequentemente, os métodos global e local produzem resultados idênticos para a energia de vácuo total. Este contraste evidencia como a presença ou ausência de quebras de simetria por fronteiras afeta a concordância entre diferentes metodologias de cálculo.

4 Conclusões e Perspectivas

Neste trabalho investigamos o efeito Casimir para um campo escalar real em $(3 + 1)$ dimensões, considerando diferentes condições de contorno - Dirichlet, Neumann, mistas e quasi-periódicas - e explorando duas metodologias distintas de cálculo: a abordagem global, baseada na soma dos modos do campo, e a abordagem local, fundamentada no valor esperado do tensor energia-momento. Os resultados obtidos mostraram que, no cenário de placas paralelas, as duas abordagens não coincidem. A presença de fronteiras quebra a simetria de translação contínua, fazendo com que a densidade de energia dependa da posição e, conseqüentemente, a soma nos modos e a integração espacial não comutem. Dessa forma, a energia de vácuo obtida pela via local apresenta divergências junto às superfícies, enquanto a abordagem global, após a regularização zeta, fornece resultados finitos e consistentes com a literatura, após subtração (renormalização) de termos espúrios que não são físicos. No caso quasi-periódico, em contraste, a ausência de fronteiras físicas preserva uma simetria de translação discreta e, nesse contexto, as duas metodologias coincidem exatamente, evidenciando que a origem da discrepância está na quebra de simetria causada por superfícies físicas.

Essas análises reforçam a importância das condições de contorno na física de campos quânticos, mostrando que a energia de vácuo não é uma entidade universal, mas sim dependente da topologia e da geometria do sistema. Além disso, a comparação entre os métodos local e global destaca o papel crucial da ordem das operações matemáticas, em particular a soma sobre modos e a integração espacial, na consistência dos resultados.

Como perspectivas para trabalhos futuros, este estudo pode ser estendido para outros campos quânticos, como o eletromagnético ou o espinorial, de forma a explorar como as diferentes naturezas dos campos influenciam a energia de vácuo em situações semelhantes. Outra possibilidade é a análise de geometrias e topologias mais gerais, incluindo superfícies curvas e compactificações adicionais, que poderiam trazer novos *insights* sobre a relação entre condições de contorno e efeitos de vácuo. Também seria de grande interesse considerar efeitos de temperatura finita, uma vez que sistemas reais não se encontram rigorosamente no zero absoluto, o que permite investigar modificações térmicas na energia de vácuo.

A extensão deste trabalho para incluir acoplamentos não mínimos com a curvatura ($\xi \neq 0$) em espaços-tempo curvos representa outra frente promissora, particularmente no contexto cosmológico onde flutuações quânticas do vácuo podem contribuir para a constante cosmológica.

Em síntese, o estudo do efeito Casimir permanece como uma área fértil de pesquisa, tanto pelo seu valor conceitual na física fundamental quanto por suas possíveis aplicações

tecnológicas [12]. O presente trabalho contribui para esse esforço ao esclarecer o papel das condições de contorno e ao destacar os limites e complementaridades entre abordagens globais e locais.

Referências

- 1 CASIMIR, H. B. On the attraction between two perfectly conducting plates. In: *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet.* [S.l.: s.n.], 1948. v. 51, p. 793. Citado na página 11.
- 2 SPARNAAY, M. J. Measurements of attractive forces between flat plates. *Physica*, v. 24, p. 751–764, 1958. Citado na página 11.
- 3 LAMOREAUX, S. K. Demonstration of the casimir force in the 0.6 to 6 μm range. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 78, p. 5–8, Jan 1997. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.78.5>. Citado na página 11.
- 4 LAMOREAUX, S. Erratum: Demonstration of the casimir force in the 0.6 to 6 μm range [phys. rev. lett. 78, 5 (1997)]. *Physical Review Letters*, APS, v. 81, n. 24, p. 5475, 1998. Citado na página 11.
- 5 BRESSI, G. et al. Measurement of the Casimir force between parallel metallic surfaces. *Phys. Rev. Lett.*, v. 88, p. 041804, 2002. Citado na página 11.
- 6 MOHIDEEN, U.; ROY, A. Precision measurement of the Casimir force from 0.1 to 0.9 micrometers. *Phys. Rev. Lett.*, v. 81, p. 4549–4552, 1998. Citado na página 11.
- 7 WEI, Q. et al. Results from electrostatic calibrations for measuring the casimir force in the cylinder-plane geometry. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 81, p. 052115, May 2010. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.81.052115>. Citado na página 11.
- 8 KIM, W. J. et al. Anomalies in electrostatic calibrations for the measurement of the casimir force in a sphere-plane geometry. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 78, p. 020101, Aug 2008. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.78.020101>. Citado na página 11.
- 9 MOSTEPANENKO, V. M. New experimental results on the casimir effect. *Brazilian Journal of Physics*, SciELO Brasil, v. 30, n. 2, p. 309–315, 2000. Citado na página 11.
- 10 BORDAG, M. et al. *Advances in the Casimir effect*. [S.l.]: OUP Oxford, 2009. v. 145. Citado 5 vezes nas páginas 11, 12, 30, 32 e 33.
- 11 MILTON, K. A. *The Casimir effect: physical manifestations of zero-point energy*. [S.l.]: World Scientific, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 12.
- 12 MOSTEPANENKO, V.; TRUNOV, N.; ZNAJEK, R. *The Casimir Effect and Its Applications*. Clarendon Press, 1997. (Oxford science publications). ISBN 9780198539988. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=61bpkbGLPiQC>. Citado 3 vezes nas páginas 11, 12 e 43.
- 13 COUGO-PINTO, M. V.; FARINA, C.; TORT, A. O efeito Casimir (The Casimir effect). *Rev. Bras. Ens. Fis.*, v. 22, n. 1, p. 122–132, 2000. Citado na página 11.
- 14 FARINA, C. The Casimir effect: Some aspects. *Braz. J. Phys.*, v. 36, p. 1137–1149, 2006. Citado na página 11.

- 15 EINSTEIN, A. The foundation of the general theory of relativity. *Annalen Phys.*, v. 49, n. 7, p. 769–822, 1916. Citado na página 12.
- 16 BIRRELL, N. D.; DAVIES, P. C. W. *Quantum Fields in Curved Space*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1982. (Cambridge Monographs on Mathematical Physics). ISBN 978-0-511-62263-2, 978-0-521-27858-4. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 24.
- 17 LIFSHITZ, E. M. The theory of molecular attractive forces between solids. *Soviet Physics JETP*, v. 2, p. 73–83, 1956. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 29, 94–110 (1955). Citado na página 12.
- 18 ELIZALDE, E. et al. *Zeta regularization techniques with applications*. Singapore: World Scientific Publishing, 1994. ISBN 978-981-02-1441-8, 978-981-4502-98-6. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 31.
- 19 PESKIN, M. E.; SCHROEDER, D. V. *An Introduction to quantum field theory*. Reading, USA: Addison-Wesley, 1995. ISBN 978-0-201-50397-5, 978-0-429-50355-9, 978-0-429-49417-8. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 17.
- 20 GREINER, W.; REINHARDT, J. *Field Quantization*. [S.l.]: Springer, 1996. ISBN 978-3-642-61485-9. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 17.
- 21 EINSTEIN, A. Zur Elektrodynamik bewegter Körper. *Annalen der Physik*, Wiley, v. 322, n. 10, p. 891–921, 1905. Citado na página 15.
- 22 RESNICK, R. *Introduction to Special Relativity*. New York: John Wiley & Sons, 1968. Citado na página 15.
- 23 CARROLL, S. M. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. San Francisco: Addison-Wesley, 2004. Citado 3 vezes nas páginas 15, 25 e 26.
- 24 ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J.; HARRIS, F. E. *Mathematical Methods for Physicists*. 7. ed. Burlington, MA: Elsevier Academic Press, 2011. Citado 3 vezes nas páginas 16, 22 e 23.
- 25 LANCASTER, T.; BLUNDELL, S. J. *Quantum Field Theory for the Gifted Amateur*. New York: Oxford University Press, 2014. Citado na página 17.
- 26 SANTOS, W. Oliveira dos; MELLO, E. R. Bezerra de; MOTA, H. F. Vacuum polarization in high-dimensional AdS space-time in the presence of a cosmic string and a compactified extra dimension. *Eur. Phys. J. Plus*, v. 135, n. 1, p. 27, 2020. Citado na página 25.
- 27 LIGHTMAN, A. P.; PRESS, W. H.; PRICE, R. H. *Problem Book in Relativity and Gravitation*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1975. ISBN 9780691081502. Citado na página 26.
- 28 ELIZALDE, E. *Ten Physical Applications of Spectral Zeta Functions*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1995. v. 35. (Lecture Notes in Physics Monographs, v. 35). ISBN 978-3-642-29404-4, 978-3-642-29405-1. Citado na página 31.
- 29 ELIZALDE, E. Explicit analytical continuation of the inhomogeneous epstein zeta function. *Hiroshima University Preprint*, set. 1994. Preprint. Citado na página 31.

- 30 ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. New York: Dover Publications, 1965. v. 55. 361 p. (National Bureau of Standards Applied Mathematics Series, v. 55). Citado 2 vezes nas páginas 32 e 37.
- 31 TYWONIUK, K.; RAVNDAL, F. Scalar Field Fluctuations between Parallel Plates. 8 2004. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 39.
- 32 CRUZ, M. B.; MELLO, E. R. Bezerra de; MOTA, H. F. S. Casimir energy and topological mass for a massive scalar field with Lorentz violation. *Phys. Rev. D*, v. 102, n. 4, p. 045006, 2020. Citado na página 34.
- 33 FENG, C.-J.; LI, X.-Z.; ZHAI, X.-H. Casimir Effect under Quasi-Periodic Boundary Condition Inspired by Nanotubes. *Mod. Phys. Lett. A*, v. 29, p. 1450004, 2014. Citado na página 35.
- 34 PORFÍRIO, P. J.; MOTA, H. F. S.; GARCIA, G. Q. Ground state energy and topological mass in spacetimes with nontrivial topology. *Int. J. Mod. Phys. D*, v. 30, n. 08, p. 2150056, 2021. Citado na página 35.
- 35 GUEDES, E. M. B.; MOTA, H. Quantum Brownian motion induced by fluctuating boundaries and compactification. *Eur. Phys. J. C*, v. 85, n. 8, p. 882, 2025. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 40.
- 36 FERREIRA, É. J. B.; GUEDES, E. M. B.; MOTA, H. F. S. Quantum Brownian motion induced by an inhomogeneous tridimensional space and a $S^1 \times \mathbb{R}^3$ topological space-time. *JHEP*, v. 04, p. 111, 2023. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 40.
- 37 FENG, C.-J.; LI, X.-Z.; ZHAI, X.-H. Casimir Effect under Quasi-Periodic Boundary Condition Inspired by Nanotubes. *Mod. Phys. Lett. A*, v. 29, p. 1450004, 2014. Citado na página 41.

Apêndices

APÊNDICE A – Obtenção da expressão da energia para o caso global

Após analisarmos (2.90) e utilizarmos (2.67), verificamos que a única dependência da posição x provém do segundo termo entre parênteses na (2.91), após isolarmos a contribuição $n = 0$ da soma. De fato, ao tomarmos o limite $w' \rightarrow w$, temos $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$, $\Delta z \rightarrow 0$, $\Delta t \rightarrow 0$ e $\Delta \bar{x} \rightarrow 2x$, de modo que

$$G^{(1)}(w) = \frac{1}{8\pi^2 L} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int \frac{dk_y dk_z}{\omega_\sigma} \left[1 \mp \cos(2k_n x) \right]. \quad (\text{A.1})$$

A partir dessa expressão, observa-se que apenas o termo $\cos(2k_n x)$ depende explicitamente da posição x . Para $n = 0$, tem-se $k_n = 0$, e portanto $\cos(2k_n x) = 1$. Esse termo foi isolado da soma.

Em seguida, ao integrarmos em x na região entre as placas, de 0 a L , verificamos que o termo dependente de x se anula devido à periodicidade da função seno:

$$\int_0^L \cos(2k_n x) dx = \frac{\sin(2k_n L)}{2k_n} = 0, \quad \text{com } k_n = \frac{n\pi}{L}. \quad (\text{A.2})$$

A contribuição restante, portanto, é constante e também se anula após a atuação do operador d'Alembertiano, $\square$, sobre ela.

Assim, concluímos que, ao utilizar $G^{(1)}$, a única dependência espacial da função - proveniente de $\cos(2k_n x)$ - desaparece ao integrar na região entre as placas. A parte constante remanescente é eliminada pela ação do operador d'Alembertiano, de modo que apenas as flutuações efetivas do campo, contidas no primeiro termo de $G^{(1)}$, contribuem para a energia de vácuo.

Quanto ao primeiro termo do lado direito da equação (2.89), o raciocínio é semelhante. Após realizar as derivadas temporais e tomar o limite de coincidência $w \rightarrow w'$, encontramos

$$G^{(1)}(w) = \frac{1}{8\pi^2 L} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int \frac{dk_y dk_z}{\omega_\sigma} \left[1 \mp \cos(2k_n x) \right] \omega_\sigma^2. \quad (\text{A.3})$$

Novamente, o termo com cosseno da equação anterior fornece uma contribuição nula quando integrado na região entre as placas. Apenas o primeiro termo contribui, chegando finalmente à equação

$$E_0 = \frac{A}{2(2\pi)^2} \sum_{n=0 \text{ ou } 1}^{+\infty} \int dk_y dk_z \omega_\sigma, \quad (\text{A.4})$$

que é a expressão utilizada na abordagem global.