



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS APLICADAS E EDUCAÇÃO
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Higor Emmanuel de Lima Rodrigues

Construções Geométricas e a trissecção de um ângulo

Rio Tinto – PB
2025

Higor Emmanuel de Lima Rodrigues

Construções Geométricas e a trisseccção de um ângulo

Trabalho Monográfico apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Marcos André José Valcácio

Rio Tinto – PB
2025

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

R696c Rodrigues, Higor Emmanuel de Lima.
Construções geométricas e a trissecção de um ângulo
/ Higor Emmanuel de Lima Rodrigues. - Rio Tinto, 2025.
50 f. : il.

Orientação: Marcos André Jose Valcácio.
TCC (Graduação) - UFPB/CCAE.

1. Geometria euclidiana plana. 2. Construções
geométricas. 3. Trissecção de um ângulo. I. Valcácio,
Marcos André Jose. II. Título.

UFPB/CCAE

CDU 514.12

Higor Emmanuel de Lima Rodrigues

Construção Geométricas e a trisseção de um ângulo

Trabalho Monográfico apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Marcos André José Valcácio

Aprovado em: 29 de setembro de 2025

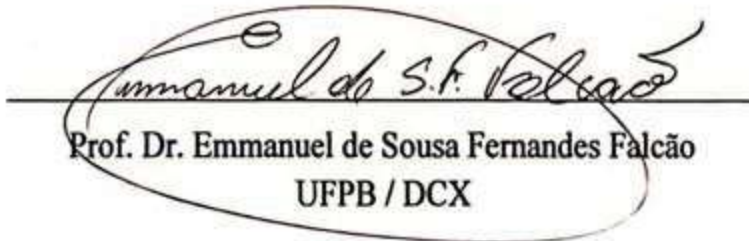
BANCA EXAMINADORA



Prof. Me. Marcos André José Valcácio (Orientador)
UFPB / DCX



Prof. Dr. José Elias dos Santos Filho
UFPB/DCX



Prof. Dr. Emmanuel de Sousa Fernandes Falcão
UFPB / DCX

Ao meu pai, a minha mãe e ao meu irmão.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente ao bom Deus, por me conceder força nas horas de cansaço e a sua mãe Maria Santíssima por me acolher como um de seus filhos. Ao meu pai Manoel, por prover tudo que me foi necessário para chegar até aqui. A minha mãe Maria José, por sempre cuidar tão bem de mim e ser minha companheira dentro de casa nos últimos anos. Ao meu irmão Hamilton, por ser verdadeiramente um amigo a qual recorro sempre que passo por momentos de aflição. Ao meu grande amor Maria Clara, que com sua delicadeza e carinho sempre me conforta e me acolhe. Aos meus amigos Micael, Crispim, Eliab, David e Felipe que sempre se fazem presentes na minha vida para partilhar tanto as alegrias como as dificuldades. A todos os amigos que fiz ao longo do curso, em especial a João porque sempre me incentivava a dar o meu melhor e a Justino por ter me socorrido no momento em que mais precisei. Ao professor Elias por todo o ensinamento e parceria que me proporcionou ao longo do curso. Ao meu orientador Marcos André por toda a paciência que teve comigo ao longo do desenvolvimento desse trabalho.

Agradeço, por fim, a todos que contribuíram para a minha formação.

*“Recebe, Senhor, minha liberdade inteira.
Recebe minha memória, minha inteligência
e toda a minha vontade. Tudo que tenho ou possuo,
de vós me veio; tudo vos devolvo e entrego sem reserva
para que a vossa vontade tudo governe. Dai-me Senhor o vosso amor
e vossa graça e nada mais vos peço, pois já serei bastante rico.”*
(Santo Inácio de Loyola)

RESUMO

As construções geométricas, no decorrer das épocas, foram muito importantes para a solidificação de determinados conceitos da geometria euclidiana. Pouco se tem comentado sobre como fazer construções geométricas na educação. Diante desse cenário, as construções geométricas utilizando apenas régua não graduada e compasso constitui um problema, mais do que um desafio irresolúvel. Como referencial teórico para esta pesquisa utilizamos Boyer e Merzbach (2012), Barbosa (2013), Papa Neto (2017) dentre outros. Este estudo tem como objetivo realizar algumas construções geométricas com régua não graduada e compasso, como retas paralelas, bissetriz de um ângulo e a trissecção do ângulo de 90° . Existem elementos que não podem ser construídos com régua e compasso, destacando-se: a duplicação do cubo, a quadratura do círculo e a trissecção de um ângulo. E, para este último é apresentado um falso método. Os resultados evidenciaram que o problema da construção geométrica da trissecção de um ângulo representa uma evolução da geometria euclidiana, considerando os desafios do rigor lógico e da validação de métodos no avanço científico.

Palavras-chave: Geometria Euclidiana Plana; tonstruções Geométricas; trissecção de um ângulo.

ABSTRACT

Geometric constructions, throughout history, have played a crucial role in consolidating fundamental concepts of Euclidean geometry. However, little attention has been given to their application in education. In this context, geometric constructions using only an ungraduated ruler and compass present not only a challenge but also an unsolvable problem in certain cases. As the theoretical framework for this research, we draw on Boyer and Merzbach (1974), Barbosa (2013), Papa Neto (2017), among others. This study aims to explore some geometric constructions with an ungraduated ruler and compass, such as parallel lines, angle bisectors, and the trisection of a right angle. It is important to highlight that certain elements cannot be constructed using ruler and compass, most notably the duplication of the cube, the squaring of the circle, and the trisection of an angle. For the latter, a false method is presented. The results show that the problem of angle trisection in geometric constructions represents an important development within Euclidean geometry, reflecting the challenges of logical rigor and the validation of methods in scientific progress.

Keywords: Plane Euclidean Geometry; geometric constructions; trisection of an angle.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Ângulo Opostos pelo Vértice	16
Figura 2 – Circunferência	17
Figura 3 – Tipos de polígonos	18
Figura 4 – Ângulo Externo	18
Figura 5 – Paralelogramo	19
Figura 6 – Congruência	21
Figura 7 – Congruência LAL	21
Figura 8 – Triângulo Isósceles	22
Figura 9 – Congruência ALA	23
Figura 10 – Congruência LLL	24
Figura 11 – Ângulo Externo	25
Figura 12 – Ângulos Alternos Internos	25
Figura 13 – Ângulos Correspondentes	27
Figura 14 – Soma dos ângulos internos de um triângulo	28
Figura 15 – Ângulo Externo	29
Figura 16 – Intersecção entre dois arcos	30
Figura 17 – Intersecção entre dois arcos	31
Figura 18 – Criando um segmento perpendicular a AB	32
Figura 19 – Arco com centro em C e abertura CD	33
Figura 20 – Circunferência com centro em D e raio $\widehat{DC}$	33
Figura 21 – Circunferência de centro D e raio $\widehat{CE}$	34
Figura 22 – Ponto C pertencente a AB	34
Figura 23 – Intersecção de arcos	34
Figura 24 – Construindo um triângulo equilátero	35
Figura 25 – Construindo $\widehat{BAC}$	35
Figura 26 – Circunferência de centro A e raio $\overline{AD}$	36
Figura 27 – Bissetriz de um ângulo	36
Figura 28 – Dividir um ângulo de 90°	37
Figura 29 – Segmento AB e reta r com origem em A	39
Figura 30 – Dividir um segmento em três partes iguais	40
Figura 31 – Marcando com o compasso	40
Figura 32 – Falso método de trisseção	41

Figura 33 – Duas semirretas com origem em A	41
Figura 34 – Dividir um segmento em três partes iguais	42
Figura 35 – Dividindo o ângulo $\widehat{BAC}$ em três partes	42
Figura 36 – Ângulos internos presentes no falso método	43

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	DEFINIÇÕES GEOMÉTRICAS	13
2.1	Retas	13
2.2	Ângulos	15
2.3	Circunferência	17
2.4	Polígonos	17
2.5	Congruência de triângulos	19
2.6	Retas Paralelas	25
3	CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS	30
3.1	Retas Perpendiculares:	30
3.2	Retas Paralelas:	32
3.3	Triângulo Equilátero:	34
3.4	Bissetriz de um ângulo qualquer:	35
3.5	Trissecção de um ângulo de 90° :	37
4	TRISSECÇÃO DE UM ÂNGULO	38
4.1	O falso método da trissecção:	39
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	46
6	REFERÊNCIAS	48

1 INTRODUÇÃO

A palavra "Geometria" tem origem no termo grego *geometrein* (onde *geo* significa "terra" e *trein* significa "medir"), Roque (2012) diz que Geometria pode ser entendida como "agrimensura", refletindo a relação entre matemática, medida, equilíbrio, divisão e terras. Dessa forma, a Geometria é um dos ramos mais antigos da Matemática, com estudos que remontam à Antiguidade. Boyer e Merzbach (2012, p.26), em *História da Matemática*, alertam que as "afirmações sobre a origem da Matemática, seja na Aritmética ou na Geometria, são muito arriscadas, pois os primórdios são mais antigos do que a arte de escrever". Por isso, qualquer declaração sobre a origem da Geometria é controversa e deve ser tratada com cautela.

Um dos desafios mais conhecidos dentro da Geometria é a trissecção de um ângulo, isto é, a divisão de um ângulo em três partes iguais utilizando apenas os instrumentos disponíveis na Grécia Antiga: a régua sem marcação e o compasso. Embora à primeira vista pareça uma tarefa simples, foi provado que essa construção não pode ser realizada com esses instrumentos.

Este estudo tem como intuito analisar as possibilidades e limitações do estudo sobre a impossibilidade da trissecção de um ângulo qualquer. Estudar problemas impossíveis, como a trissecção de um ângulo, pode ajudar a desenvolver o pensamento crítico dos estudantes e introduzir conceitos mais avançados, como a relação entre construções geométricas e equações algébricas. Além desse problema, existem outros desafios clássicos da Matemática que também não podem ser resolvidos apenas com régua sem marcação e compasso, como a duplicação do cubo e a quadratura do círculo (Boyer; Merzbach, 2012). O motivo dessas impossibilidades está ligado às equações matemáticas envolvidas. Esse fato foi provado matematicamente ao longo da história, mas ainda é pouco explorado no ensino de Matemática.

Além das limitações matemáticas, a Geometria Euclidiana possui regras e princípios fundamentais que determinam quais construções podem ser feitas. Podemos entender que conceitos como ponto, reta, segmento de reta, bissetriz, retas paralelas e perpendiculares, junto com alguns axiomas matemáticos, são essenciais para entender por que algumas construções são possíveis e outras não (Papa Neto, 2017). Compreender essas regras é um passo importante para perceber as razões pelas quais a trissecção do ângulo não pode ser realizada apenas com régua sem marcação e compasso. Responder a essa questão ajudará a compreender melhor as bases matemáticas desse problema.

Por outro lado, existem métodos alternativos que permitem trissecar um ângulo se forem

usados instrumentos diferentes. Segundo Barbosa (2013), se utilizarmos uma régua marcada, essa construção se torna possível. Isso acontece porque as marcas na régua ajudam a dividir o ângulo de uma forma que não seria possível com a régua sem marcação. Esse método não segue as regras da Geometria Euclidiana tradicional, mas mostra como pequenas mudanças nos instrumentos podem levar a novas soluções para problemas matemáticos existentes. Esse problema pode ser uma boa introdução para tópicos como extensões de corpos e equações polinomiais, que normalmente são estudados em níveis mais avançados. Além disso, ao estudar essas limitações, os alunos conseguem perceber que a Matemática não é apenas sobre resolver problemas, mas também sobre entender o que pode ou não ser feito e por quê.

Ao longo do desenvolvimento deste trabalho, serão abordadas noções fundamentais da Geometria Plana. No segundo capítulo, são apresentadas as noções primitivas e definições que estruturam o pensamento geométrico, como ponto e reta, permitindo o desenvolvimento de axiomas e teoremas envolvendo retas, ângulos, circunferência, polígono e congruência de triângulos, que são necessários para as construções que se seguirão.

Em seguida, no terceiro capítulo, tomando como base as definições apresentadas no primeiro, são desenvolvidas construções geométricas usando apenas régua não graduada e compasso, mostrando como esses dois instrumentos permitem, formando apenas segmentos e arcos, construir diversos outros elementos matemáticos, partindo de definições iniciais como retas perpendiculares e retas paralelas e indo até construções mais complexas como a trissecção de um ângulo de 90° , explorando a possibilidade de trissecar ângulos específicos.

No quarto capítulo do trabalho, é discutido um método incorreto que sugere a trissecção de qualquer ângulo, destacando sua aparente lógica inicial, que toma como primícia dividir um segmento oposto ao ângulo em três partes iguais e, posteriormente, demonstrar sua inconsistência, o que reforça a importância do rigor e da validação matemática.

Por fim, nas considerações finais vemos que entre os três problemas clássicos da geometria, a trissecção é a que mais aparece falsas provas que mostram o contrário e isso proporciona oportunidade para debater o assunto e comprovar a importância do rigor matemático.

2 DEFINIÇÕES GEOMÉTRICAS

Neste capítulo iremos desenvolver algumas noções de Geometria Plana, principalmente aqueles relacionados a impossibilidade da trissecção de um ângulo qualquer que serão utilizadas no decorrer do trabalho. Este capítulo inicia-se com a introdução das noções geométricas que são entendidas por meio de definições, e noções primitivas que são aceitas sem uma definição (Nogueira, 2023), dessa forma, podemos entender “ponto” e “reta” como conceitos básicos adotados como primitivos no sistema axiomático, sobre os quais se constroem todas as demais definições e propriedades geométricas. Toma-se o plano como um conjunto formado por pontos como elementos primários, dentro do qual as retas são reconhecidas como subconjuntos com propriedades de incidência específicas.

O ponto não tem dimensão e é a representação geométrica mais simples, normalmente são utilizadas letras maiúsculas ($A, B, C, \dots$) para simboliza-los. A reta é uma linha formada por infinitos pontos que são consecutivos e seguem uma mesma direção, podem ser representadas por letras minúsculas ($a, b, c, \dots$).

2.1 RETAS

Conhecimento básico da Matemática que pode ser apreciado em múltiplas obras da Geometria, a exemplo das obras de Pinho, Batista e Carvalho (2010), Papa Neto, Holando e Pimentel (2012)

A reta pode ser compreendida como um conjunto de infinitos pontos dispostos de maneira alinhada, de modo que esses pontos se estendem indefinidamente sem apresentar um começo, nem um fim, uma de suas características é que a reta só possui uma dimensão, o comprimento, por ser uma sequencia de pontos, não apresenta largura nem espessura e pode ser determinada por qualquer dois pontos distintos que estão contidos nela.

A partir da reta, conseguimos chegar em outros conceitos, como a semirreta e o segmento de reta. A semirreta pode ser compreendida como um conjunto de infinitos pontos alinhados, porém diferente da reta, a semirreta possui um ponto de origem fixo e se estende infinitamente em apenas uma direção, dessa forma, pode ser entendida como uma porção da reta. O segmento de reta, por sua vez, é a parte da reta que apresenta um ponto de origem e um ponto (distinto do anterior) que o finaliza, a medida desse segmento pode ser encontrada calculando a distância entre esses dois pontos.

2.1.1: Axioma 1: *Dados dois pontos distintos, existe uma única reta que passa por eles.*

Isso assegura que qualquer par de pontos no plano determina uma reta de forma única, estrutura essencial para definir segmentos e alinhamentos.

2.1.2: Axioma 2: *Em qualquer reta estão no mínimo dois pontos distintos.*

Isso impede que existam retas sem pontos ou retas formadas apenas por um único ponto, garantindo que toda reta contenha pelo menos dois pontos distintos e consequentemente infinitos pontos.

2.1.3: Axioma 3: *Existem pelo menos três pontos distintos não colineares.*

Garante que o plano não seja colinear e permite a formação de figuras planas.

Observação: Os três primeiros axiomas são conhecidos como postulados de incidência, assegurando que pontos e retas interajam de forma significativa. Com esses três axiomas de incidência, podemos compreender quatro conceitos importantes para o decorrer do trabalho.

i) Retas paralelas: São duas retas que nunca se tocam.

ii) Retas Concorrentes: São retas que se tocam em um único ponto.

iii) Retas Perpendiculares: São Duas retas que ao se tocarem formam um ângulo de 90° .

iv) Mediatriz de um segmento: A mediatriz de um segmento de reta é a reta perpendicular a esse segmento que passa exatamente pelo seu ponto médio.

Tem-se que, AB é a mediatriz do segmento CD , quando AB é perpendicular a CD e corta o segmento CD no seu ponto médio E e por sua vez, E será o ponto médio de CD , quando $CE = ED = \frac{CD}{2}$.

2.1.4 Axioma 4: *(Axioma da Distância) Dados dois pontos quaisquer corresponde unicamente um número real não negativo, de modo que esse número será zero se os dois pontos forem coincidentes.*

Obtido esse número por meio do axioma é possível garantir que o conceito de distância fique bem definido e que se diferencie pontos distintos de pontos coincidentes.

2.1.5 Axioma 5: *(Axioma da Régua) É possível estabelecer uma relação biunívoca entre números reais e pontos de uma reta. De modo que:*

i) *Cada ponto da reta corresponde a exatamente um número real.*

ii) *Cada número real corresponde a exatamente um ponto da reta.*

iii) *A distância entre dois pontos é o valor da diferença entre os módulos dos de seus*

respectivos números correspondentes.

Note que este Axioma nos dá a ideia de “continuidade” da reta. É chamado de postulado da régua, porque nos permite, através de uma “régua infinita” colocada sobre uma reta, medir a distância entre dois pontos quaisquer da reta.

2.1.6 Axioma 6: (Axioma da Colocação da Régua) Dado dois pontos P e Q numa reta, é possível escolher um sistema de coordenadas. De modo que:

- i) A coordenada de P seja 0.
- ii) A coordenada de Q seja um número real positivo.

Dessa forma é possível estabelecer uma referência para medição e definir a distância entre os pontos. Assim, se a distância entre os pontos A e B e entre os pontos C e D forem iguais, dizemos que os segmentos AB e CD são congruentes.

2.2 ÂNGULOS

Premissas aceitas e comuns na área de Geometria. Exemplos de referências que as abordam: Papa Neto, Holanda e Pimentel (2022) e Pinho, Batista e Carvalho (2010)

Um ângulo é uma região entre duas semirretas que possuem a mesma origem, chamada de vértice, e representa a relação entre. O ângulo é usado para medir a abertura entre essas duas semirretas. Dependendo da sua medida o ângulo pode ser classificado como agudo (abertura menor que 90°), reto (abertura igual a 90°), obtuso (abertura maior que 90° e menor que 180°), raso (abertura igual a 180°), ou côncavos (abertura maior que 180°).

2.2.1 Axioma 7: (Axioma da Medida de Ângulos) A cada ângulo $\widehat{BAC}$ corresponde um único número real entre 0 e 360° .

Sendo essa medida usada para quantificar a abertura do ângulo. Essa correspondência garante que ângulos congruentes tenham a mesma medida e que só sejam iguais a zero se suas semirretas coincidirem.

- i) A medida do ângulo formado pelos segmentos AB e BC é representado por: $\widehat{ABC}$.
- ii) Se $\widehat{ABC} = \alpha = \widehat{DEF}$, chamamos esses ângulos de congruentes.

2.2.2 Axioma 8: (Axioma da Construção do ângulo) Seja $\overrightarrow{AB}$ uma semi-reta contida na reta origem de um semiplano α . Para cada número α entre 0 e 180 existe exatamente uma semi-reta $\overrightarrow{AP}$ com P em H , tal que $\widehat{PAB} = \alpha$.

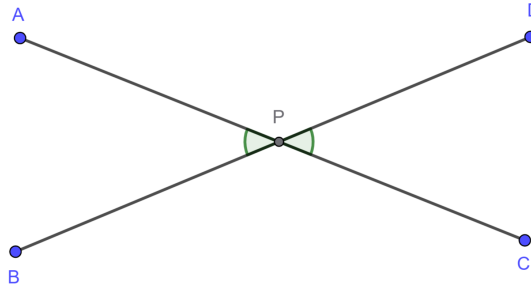
2.2.3 Axioma 9: (Axioma da Adição de Ângulos) Se De um ponto interior do ângulo

$\widehat{B\hat{A}C}$, então $\widehat{B\hat{A}C} = \widehat{B\hat{A}D} + \widehat{D\hat{A}C}$.

Esse axioma formaliza o princípio de que um ângulo pode ser dividido em partes e pode ser medido pela soma dessas partes. Com isso, temos que a semirreta que passa pelos pontos A , D é a bissetriz do ângulo $\widehat{B\hat{A}C}$, quando $\widehat{D\hat{A}C} = \widehat{B\hat{A}D} = \frac{\widehat{B\hat{A}C}}{2}$. Desse axioma ainda é possível compreender que se dois ângulo forem um par linear, ou seja, compartilham um lado e seus outros lados estão sobre uma mesma reta, então são suplementares, estabelecendo assim a base para definir ângulo raso.

2.2.5 Definição: Ângulos opostos pelo vértice são pares de ângulos que se formam quando duas retas se cruzam, de modo que tem apenas o vértice em comum e não compartilham nenhum lado.

Figura 1 – Ângulo Opostos pelo Vértice



Fonte: Elaborada pelo autor

2.2.5 Teorema: *Dois ângulos opostos pelo vértice são congruentes.*

Demonstração: Tome os segmentos AC e BD concorrentes de modo que se cruzem no ponto P , assim pelo Axioma 9, tem-se que:

$$\widehat{A\hat{P}B} + \widehat{B\hat{P}C} = 180$$

$$\widehat{D\hat{P}C} + \widehat{C\hat{P}B} = 180$$

$$\widehat{A\hat{P}B} + \widehat{B\hat{P}C} = \widehat{D\hat{P}C} + \widehat{C\hat{P}B}$$

Como

$$\widehat{B\hat{P}C} = \widehat{C\hat{P}B}$$

Então, temos que

$$\widehat{A\hat{P}B} = \widehat{D\hat{P}C}$$

.



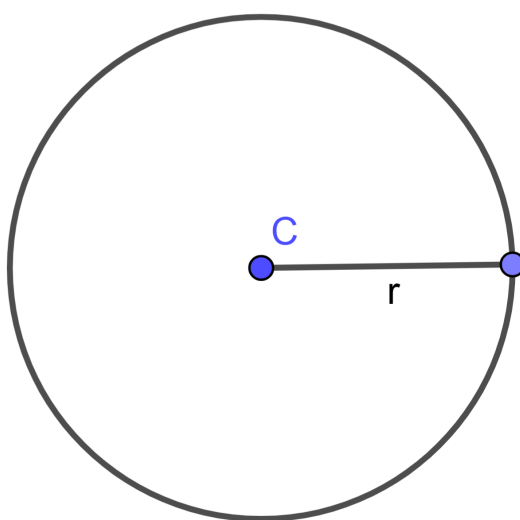
2.3 CIRCUNFERÊNCIA

Assim como feitos nos tópicos anteriores, maiores detalhes sobre as informações matemáticas, que se tem como de consenso trivial, podem ser apreciadas em Papa Neto, Holanda e Pimentel (2022) e Pinho, Batista e Carvalho (2010).

i) Chamamos de circunferência o conjunto de todos os pontos que estão a uma mesma distância de um ponto fixo C , denominado centro.

ii) Tem-se r (denominado raio) como sendo a distância entre o ponto C e qualquer um desses pontos pertencentes ao conjunto determinado.

Figura 2 – Circunferência



Fonte: Elaborada pelo autor

2.4 POLÍGONOS

Do mesmo modo que em tópicos anteriores, se abordará conceitos básicos de Geometria. Maiores detalhes sobre as informações que se tem como de consenso trivial, podem ser apreciadas em Papa Neto, Holanda e Pimentel (2022) e Pinho, Batista e Carvalho (2010).

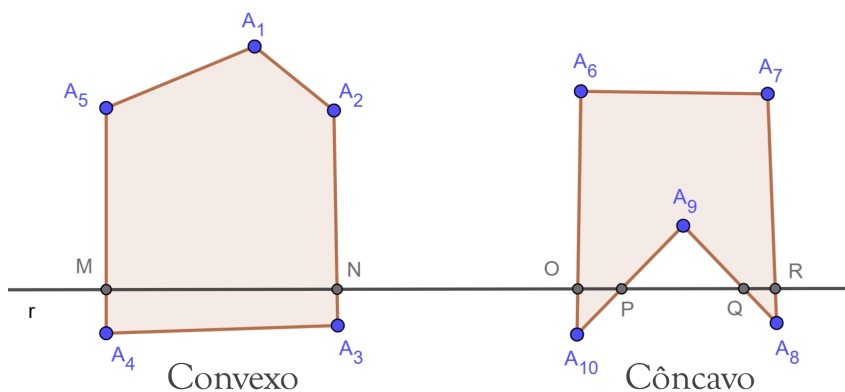
É chamado de polígono uma figura geométrica limitada formada por n lados e podemos entender essa definição como uma sequência de n segmentos fechada, de modo que se tem:

$$\overbrace{A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n, A_nA_1}^{n-\text{vezes}}.$$

Os polígonos podem ser classificados primeiramente de duas maneiras. É classificado convexo, quando ao traçar uma reta r arbitrária de maneira que essa reta passe em qualquer parte do

polígono, ela deve tocar apenas em dois de seus lados. Caso a reta r toque em mais de dois lados do polígono, esse é denominado côncavo. (Ver figura 3)

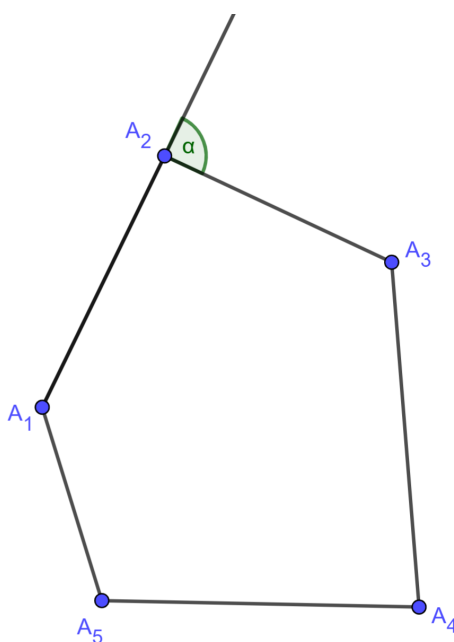
Figura 3 – Tipos de polígonos



Fonte: Elaborada pelo autor

Dessa forma, é possível compreender como sendo os lados do polígono, $\overbrace{A_1, A_2, \dots, A_{m-1}, A_n}^{n\text{vezes}}$ como os seus vértices, de modo que cada vértice possui um ângulo interno ao polígono, que podemos entender por $\widehat{A_1 A_2 A_3}$, e um ângulo externo, que é definido como o ângulo formado entre uma semirreta que passa por um de seus lados e o seu lado vizinho.

Figura 4 – Ângulo Externo

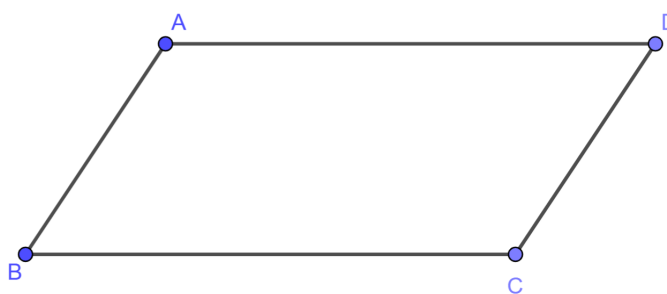


Fonte: Elaborada pelo autor

Quanto a denominação dos polígonos é feita a partir da quantidade de lados. Para

esse trabalho só será necessário entendermos os polígonos denominados triângulos (aqueles que possuem três lados) e quadriláteros (aqueles que possuem quatro lados), a respeito do triângulo será desenvolvido alguns tópicos mais adiante, no momento, será suficiente definirmos o quadrilátero. Quadriláteros são polígonos que apresentam quatro lados (AB , BC , CD , DA e consequentemente, quatro ângulos ($\widehat{DAB}$, $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCD}$ e $\widehat{CDA}$), neles definimos lados opostos como sendo os lados que não dividem um mesmo vértice (como por exemplo: AB e CD) e chamamos de consecutivos aqueles lados que dividem um vértice (AB e BC) temos ainda que a diagonal é tida como um segmento que liga dois vértices não consecutivos (temos aqui BD e AC)

Figura 5 – Paralelogramo



Fonte: Elaborada pelo autor

Dentro da família dos quadriláteros temos o paralelogramo (representado na figura 5), esse, por sua vez, possui os pares de lados opostos paralelos. Para esse polígono temos algumas propriedades.

- i) Ângulos opostos são congruentes.
- ii) Lados opostos são congruentes.
- iii) As diagonais encontram-se no seu ponto médio.

Essas três propriedades são demonstradas em Papa Neto (2017, p.104).

2.5 CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

No estudo da geometria plana, os triângulos ocupam um lugar central tanto pela simplicidade de sua forma quanto pela riqueza de suas propriedades. Segundo Bicuto et al. em sua tradução sobre a obra Os Elementos diz que "figuras retilíneas são as contidas por retas, por um lado, triláteras, as por três...". Essa definição clássica destaca que o triângulo é a figura retilínea mais simples que inaugura a família dos polígonos e é formada pela união de três segmentos de reta que se encontram em pares nos vértices. A partir dessa estrutura básica, é

possível desenvolver uma ampla gama de conceitos matemáticos, nessa parte do texto, será abordado a congruência de triângulos.

2.5.1 Definição: Tem-se que:

- i) Dois segmentos são congruentes se possuem a mesma medida em comprimento.
- ii) Dois ângulos são congruentes se possuem a mesma em grau.

De maneira geral, é possível afirmar que duas figuras planas são congruentes se elas tiverem pares de lados correspondentes iguais e também pares de ângulos correspondentes iguais e se esses ângulos e lados estiverem dispostos na mesma ordem, ainda podemos entender que duas figuras são congruentes quando têm exatamente o mesmo tamanho e a mesma forma. Isso significa que, se colocarmos uma sobre a outra, elas vão se coincidir, dessa forma, se duas figuras F_1 e F_2 forem congruentes (Denotadas por $F_1 \equiv F_2$, também pode ser afirmado que elas satisfazem as propriedades: reflexiva (toda figura é congruente a ela mesma), simétrica (Se $A \equiv B \implies B \equiv A$) e transitiva (Se $A \equiv B$ e $B \equiv C \implies C \equiv A$).

Podemos chamar de triângulo um polígono de três lados. Um triângulo $\triangle ABC$, tem por elementos os três vértices, que são os pontos A , B e C ; os três lados, que são os segmentos AB , BC e CA ; e os três ângulos internos, que são $\widehat{ABC}$, $\widehat{BAC}$ e $\widehat{CAB}$. Quanto a medida de seus lados um triângulo pode ser chamado:

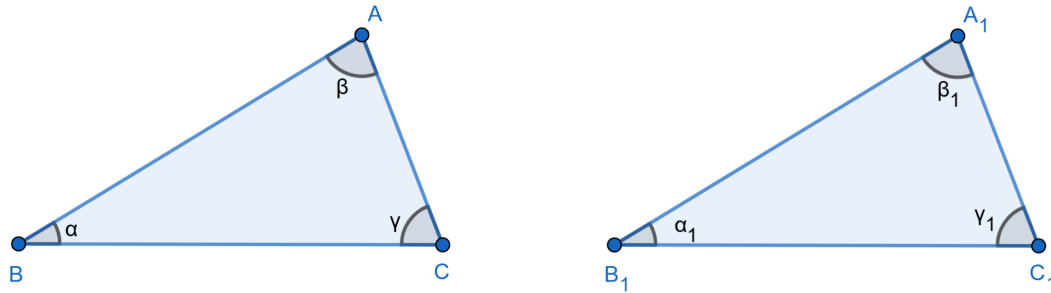
- i) Triângulo equilátero, quando possui os três lados dois a dois congruentes.
- ii) Triângulo isósceles, quando possui dois de seus lados congruentes entre si.
- iii) Triângulo escaleno, quando em quaisquer dois de seus lados têm medidas diferentes.

Referente a medida de seus ângulos um triângulo pode ser chamado:

- i) Triângulo retângulo, quando possui um ângulo reto.
- ii) Triângulo acutângulo, quando possui os três ângulos agudos.
- iii) Triângulo obtusângulo, quando possui um ângulo obtuso.
- iv) Triângulo equiângulo, quando possui os três ângulos dois a dois congruentes.

Com isso, seguindo a ideia da congruência entre polígonos, dois triângulos são congruentes quando for possível definir uma correspondência biunívoca entre lados correspondentes e também seus ângulos correspondentes. Em linguagem matemática temos que se $AB \equiv A_1B_1$, $BC \equiv B_1C_1$, $CA \equiv C_1A_1$, $\widehat{BAC} \equiv \widehat{B_1A_1C_1}$, $\widehat{ABC} \equiv \widehat{A_1B_1C_1}$ e $\widehat{ACB} \equiv \widehat{A_1C_1B_1} \implies \triangle ABC \equiv \triangle A_1B_1C_1$

Figura 6 – Congruência

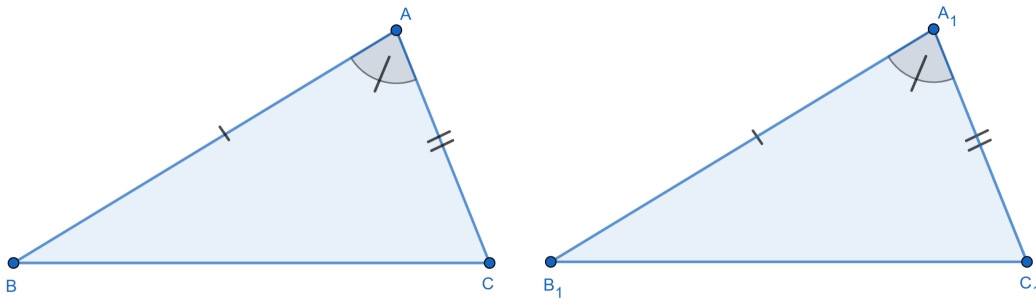


Fonte: Elaborada pelo autor

2.5.2 Axioma 11: (*Caso de Congruência de Triângulo Lado Ângulo Lado (LAL)*) Dados os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A_1B_1C_1$, se $AB \equiv A_1B_1$, $\widehat{BAC} \equiv \widehat{B_1A_1C_1}$ e $AC \equiv A_1C_1 \implies \triangle ABC \equiv \triangle A_1B_1C_1$.

O caso de congruência LAL diz que, tomando dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A_1B_1C_1$, se os lados AB e A_1B_1 , AC e A_1C_1 e os ângulos $\widehat{BAC}$ e $\widehat{B_1A_1C_1}$ forem correspondentes e tiverem a mesma medida, temos que os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A_1B_1C_1$ são congruentes.

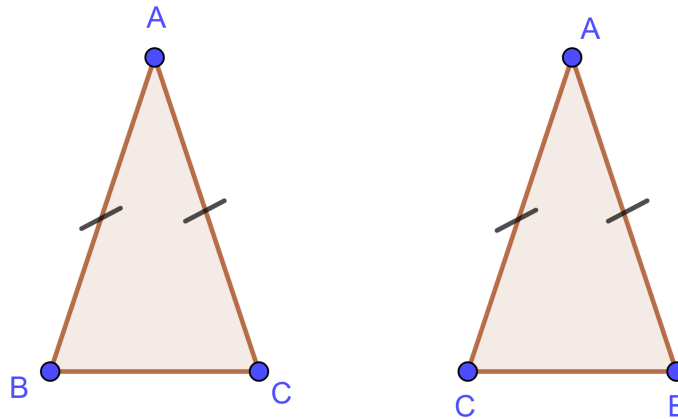
Figura 7 – Congruência LAL



Fonte: Elaborada pelo autor

2.5.3 Teorema: (*Teorema do triângulo Isósceles*) Um triângulo $\triangle ABC$ ser classificado como isósceles garante que os ângulos da sua base tem a mesma medida.

Figura 8 – Triângulo Isósceles



Fonte: Elaborada pelo autor

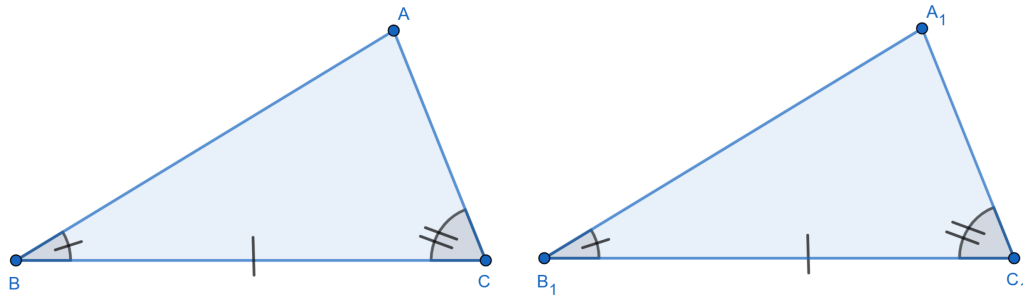
Demonstração: Considere o triângulo $\triangle ABC$ tomando como base o lado $\overline{BC}$, queremos mostrar que os ângulos $\widehat{ABC} \equiv \widehat{BCA}$. Para isso poder acontecer, compare o triângulo $\triangle ABC$ com ele mesmo, mas de modo refletido, onde $A \leftrightarrow A$, $B \leftrightarrow C$ e $C \leftrightarrow B$, por hipótese temos que $AB \equiv AC$ e $AC \equiv AB$ e $\widehat{BAC} \equiv \widehat{CAB}$, pelo axioma 11, podemos garantir que $\triangle ABC \equiv \triangle ACB$.

■

O teorema a seguir garante que, tomando os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A_1B_1C_1$, se os ângulos $\widehat{ABC}$ e $\widehat{A_1B_1C_1}$, $\widehat{ACB}$ e $\widehat{A_1C_1B_1}$ e os lados BC e B_1C_1 forem correspondentes e tiverem a mesma medida, temos que os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A_1B_1C_1$ são congruentes.

2.5.4 Teorema: (*Caso de Congruência Ângulo Lado Ângulo (ALA)*) Tomados dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A_1B_1C_1$, se $\widehat{ABC} \equiv \widehat{A_1B_1C_1}$, $BC \equiv B_1C_1$ e $\widehat{ACB} \equiv \widehat{A_1C_1B_1}$, então $\triangle ABC \equiv \triangle A_1B_1C_1$.

Figura 9 – Congruência ALA



Fonte: Elaborada pelo autor

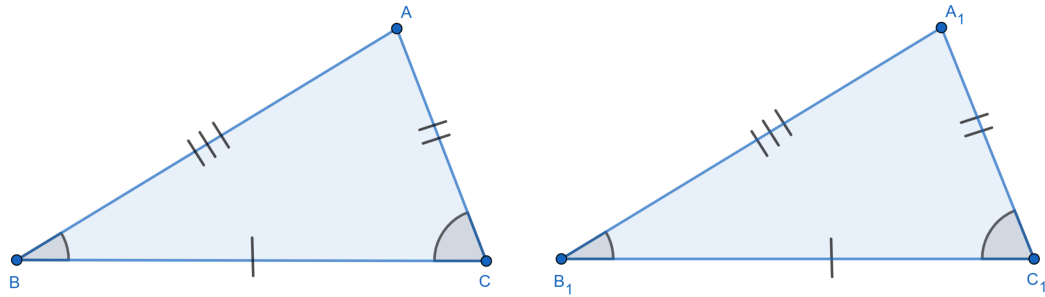
Demonstração: Sejam $\triangle ABC$ e $\triangle A_1B_1C_1$ dois triângulos tais que $BC = B_1C_1$, $\widehat{ABC} = \widehat{A_1B_1C_1}$ e $\widehat{ACB} = \widehat{A_1C_1B_1}$. Considere D um ponto arbitrário da semirreta $\overrightarrow{AB}$ tal que $BD = B_1A_1$, tome o triângulo $\triangle A_1B_1C_1$ como parâmetro e o compare com o novo triângulo denominado $\triangle DBC$, sabendo por hipótese que $BC = B_1C_1$, $\widehat{ABC} = \widehat{A_1B_1C_1}$ e que agora temos a construção do segmento $BD = B_1C_1$, temos pelo postulado anterior (caso de congruência L.A.L.) que $\triangle DBC \equiv \triangle A_1B_1C_1$, como $BD = B_1A_1$, então $BD = BA$. Dessa forma temos que $\triangle ABC \equiv \triangle A_1B_1C_1$.

■

Abaixo temos um teorema assegurando que tomando os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A_1B_1C_1$, se os lados AB e A_1B_1 , AC e A_1C_1 e os lados BC e B_1C_1 forem correspondentes e tiverem a mesma medida, os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A_1B_1C_1$ são congruentes.

2.5.4 Teorema: (Caso de Congruência Lado Lado Lado (LLL)) Tomados dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ se $AB \equiv A_1B_1$, $BC \equiv B_1C_1$ e $CA \equiv C_1A_1$, então $\triangle ABC \equiv \triangle A_1B_1C_1$.

Figura 10 – Congruência LLL



Fonte: Elaborada pelo autor

Demonstração: Considere que os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A_1B_1C_1$ de modo que $AB \equiv A_1B_1$, $AC \equiv A_1C_1$ e que $BC \equiv B_1C_1$ tome um ponto A_2 pertencente ao semiplano oposto ao semiplano que contem o ponto A , de modo que o ângulo formado por $C\widehat{B}A_2$ seja congruente ao ângulo formado por $C_1\widehat{B}_1A_1$ e que $BA_2 \equiv B_1A_1$, agora trace a o segmento de reta A_2C e o segmento A_2C . Sabemos por hipótese que $AB \equiv A_1B_1$ e ao longo do desenvolvimento construímos $BA_2 \equiv B_1A_1$ e $C\widehat{B}A_2 \equiv C_1\widehat{B}_1A_1$, então $\triangle BA_2C \equiv \triangle B_1A_1C_1$, pelo caso LAL. Agora vamos mostrar que $\triangle CBA_2 \equiv \triangle CBA$, para isso trace o segmento AA_2 e obtenha $BA_2 \equiv B_1A_1 \equiv BA$ e $A_2B \equiv A_1B_1 \equiv AB$, então os triângulos $\triangle ABA_2$ e $\triangle AA_2C$ pelo Teorema do Triângulo Isósceles, temos que $B\widehat{A}_2A = B\widehat{A}A_2$ e que $A\widehat{A}_2C = A_2\widehat{A}C$ e assim temos que:

$$B\widehat{A}_2C = B\widehat{A}_2A + C\widehat{A}_2A = B\widehat{A}A_2 + C\widehat{A}A_2 = B\widehat{A}C.$$

Pelo primeiro caso de congruência LAL, temos que $\triangle BA_2C \equiv \triangle BAC$, como já sabíamos que $\triangle BA_2C \equiv \triangle B_1A_1C_1$, podemos garantir que $\triangle BAC \equiv \triangle B_1A_1C_1$.

■

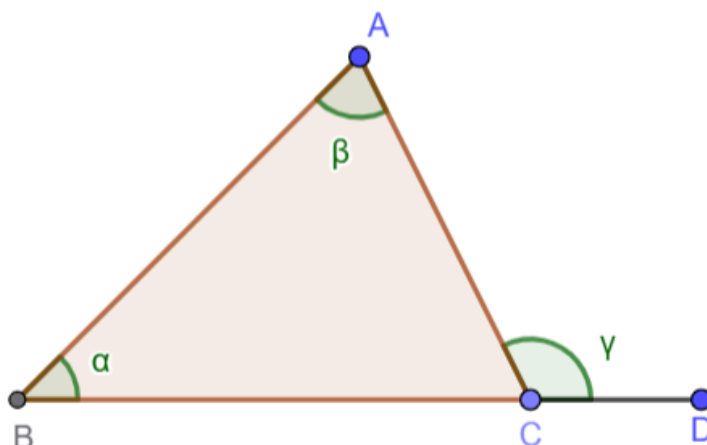
2.5.5 Teorema: (Teorema do ângulo externo) *Todo ângulo externo de um triângulo é maior do que cada ângulo interno não adjacente a ele.*

$$A\widehat{C}D > B\widehat{A}C$$

$$A\widehat{C}D > A\widehat{B}C$$

Demonstração: Ver em Papa Neto (2017, p. 74).

Figura 11 – Ângulo Externo



Fonte: Elaborada pelo autor

2.6 RETAS PARALELAS

Nesse tópico tentaremos entender algumas consequências do axioma 12 (quinto Postulado de Euclides), denominado "O Postulado das Paralelas", que diz:

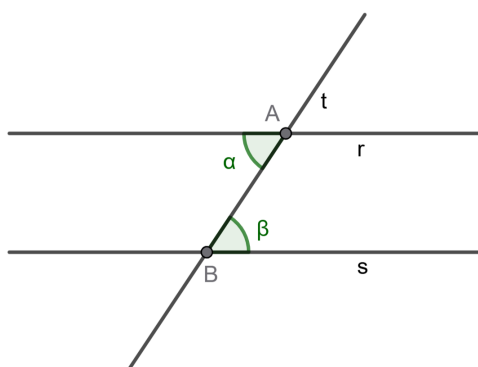
E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontram-se no lado no qual estão os menores do que dois retos. (BICUDO et al., 2009, p. 98.)

Esse axioma pode ser entendido como: Por uma reta r e um ponto P fora dela, existe uma única reta passando por P e que seja paralela a r .

2.6.1 Definições:

i) Ângulos Alternos Internos: São os ângulos internos (dentro das paralelas) e que ficam em lados opostos da transversal.

Figura 12 – Ângulos Alternos Internos



Fonte: Elaborada pelo autor

ii) Ângulos Alternos Externos: São os ângulos externos (fora das paralelas) e que ficam em lados opostos da transversal.

iii) Ângulos Correspondentes: São os ângulos que ocupam a mesma posição relativa em relação às duas retas paralelas e à transversal (um interno e outro externo, no mesmo lado da transversal).

iv) Ângulos Colaterais Internos: São os ângulos internos, situados do mesmo lado da transversal.

v) Ângulos Colaterais Externos: São os ângulos externos, situados do mesmo lado da transversal.

vi) Ângulos Colaterais Adjacentes: São os ângulos que têm um lado em comum, estão lado a lado na mesma reta, e por isso são suplementares, somando 180°

vii) Uma reta t é chamada transversal a r e s se t cortar r e s em dois pontos distintos.

2.6.2 Teorema: *Se duas retas r e s são cortadas por uma terceira reta t , formando α e β ângulos alternos internos e congruentes entre si, então as retas r e s são paralelas.*

Demonstração: Seja t uma reta transversal que intersecta r em A e s em B , de modo que r seja paralela a s , caso r e s não sejam paralelas, temos que existe um ponto C que determina o triângulo $\triangle ABC$, de modo que α é externo a esse triângulo e β é um ângulo interno não adjacente a ele. Pelo Teorema do Ângulo Externo, tem-se que $\alpha > \beta$, o que contradiz a hipótese de que $\alpha \equiv \beta$. Dessa forma temos que r é paralela a s .

■

2.6.3 Teorema: *Se duas retas r e s tal que r é paralela a s , são cortadas por uma terceira reta t , temos que os ângulos alternos internos são iguais.*

Demonstração: Seja a reta t uma reta transversal que intersecta r em A e s em B , sabendo que r é paralela a s suponha que os ângulos alternos internos α e β não sejam congruentes, isso implica em um absurdo pois contradiz o teorema 2.6.2, assim, tomadas duas retas r e s paralelas, tem-se que os ângulos alternos internos formados por uma reta t transversal são congruentes.

■

2.6.4 Teorema: *Se duas retas r e s são cortadas por uma terceira reta t , formando α e γ correspondentes e congruentes, então r é paralela a s .*

Demonstração: Seja t uma reta transversal que intersecta r em A e s em B , de modo que r é paralela a s , temos assim, α correspondente a γ considere que r não seja paralela a s , desse modo temos que existe um ponto C que determina o triângulo $\triangle ABC$, onde α é externo ao triângulo e γ é um ângulo interno não adjacente a ele. Pelo Teorema do Ângulo Externo, tem-se que $\alpha > \gamma$, o que contradiz a hipótese de que $\alpha \equiv \gamma$. Dessa forma, temos que r é paralela a s .

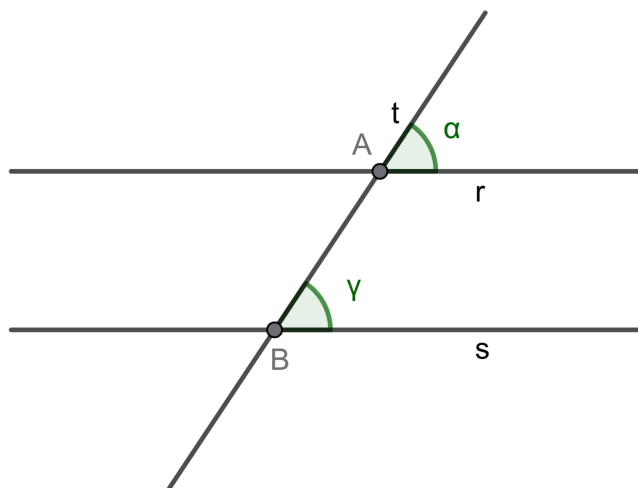
■

2.6.5 Teorema: *Se duas retas r e s tal que r é paralela a s , são cortadas por uma terceira reta t , temos que os ângulos correspondentes são iguais.*

Demonstração: Sejam as retas t uma reta transversal que intersecta r em A e s em B , sabendo que r é paralela a s suponha que os ângulos correspondentes α e γ não sejam congruentes, isso implica em um absurdo pois contradiz o teorema 2.4.4, assim, tomadas duas retas r e s paralelas, tem-se que os ângulos correspondentes formados por uma reta t transversal são congruentes.

■

Figura 13 – Ângulos Correspondentes



Fonte: Elaborada pelo autor

2.6.6 Teorema: *(Soma dos ângulos internos de um triângulo) Todo triângulo $\triangle ABC$ tem-se que: $\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{BCA} = 180^\circ$.*

Demonstração: Considere um triângulo $\triangle ABC$ de modo que os ângulos internos são $\widehat{BAC}$, $\widehat{ABC}$ e $\widehat{BCA}$, trace uma reta r paralela ao lado BC passando pelo ponto A , ao prolongar

os lados BA e CA , eles vão cortar a reta r formando assim três novos ângulos (α, β, θ) . Pelo teorema 2.6.3:

$$\alpha = \widehat{BAC}, \text{ pois são opostos pelo vértice;}$$

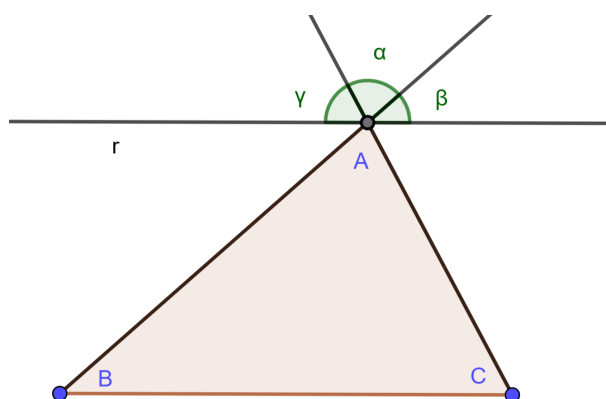
$$\beta = \widehat{ABC}, \text{ pois são alternos internos;}$$

$$\gamma = \widehat{BCA}, \text{ pois também são alternos internos:}$$

Analisando a reta r , tem-se três ângulos que ficam lado a lado na parte de cima dessa reta, que foram um ângulo raso (uma linha reta), assim, juntos somam 180° . Portanto: $\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{BCA} = 180^\circ$



Figura 14 – Soma dos ângulos internos de um triângulo

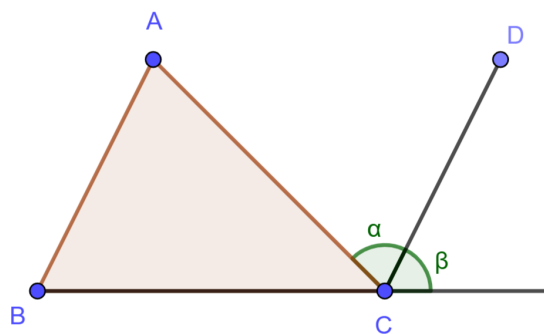


Fonte: Elaborada pelo autor

2.6.7 Proposição: *Em um triângulo qualquer, a medida de um ângulo externo é igual a soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.*

Demonstração: Seja CD , um segmento paralelo a AB de modo que AB é um dos lados do triângulo $\triangle ABC$, temos que α e $\widehat{BAC}$ são alternos internos, assim, por 2.6.3, é possível garantir que $\alpha = \widehat{BAC}$. Analogamente, temos que $\beta = \widehat{ABC}$. Assim temos que: $\widehat{BCA} = \alpha + \beta = \widehat{BAC} + \widehat{ABC}$.

Figura 15 – Ângulo Externo



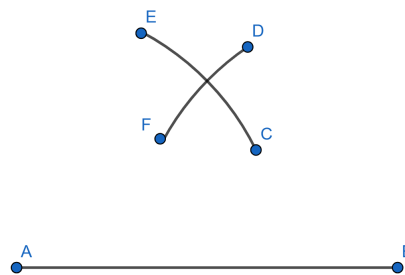
Fonte: Elaborada pelo autor

3 CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

Nesse capítulo será apresentada a construção de algumas figuras geométricas usando apenas régua não graduada e compasso, para a elaboração das figuras serão utilizadas as seguintes funções do *software* Geogebra: funções Reta, Segmento e Semirreta para representar a funcionalidade da régua não graduada e as funções Arco Circular, Círculo (Centro e Raio) para representar o compassos.

3.1 RETAS PERPENDICULARES:

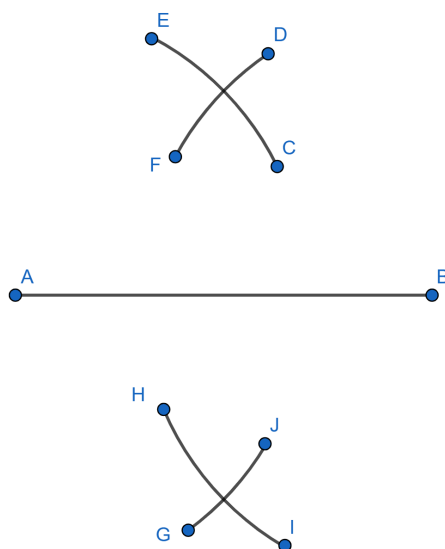
Figura 16 – Intersecção entre dois arcos



Fonte: Elaborada pelo autor

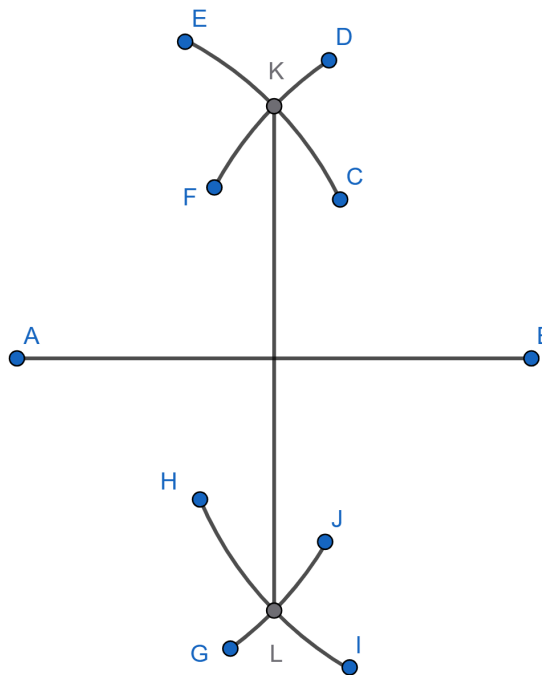
Traça-se um segmento de reta AB . Em seguida, com o compasso posicionado no ponto A , ajusta-se a abertura para uma medida r estritamente superior à metade de $\overline{AB}$. Utilizando essa mesma abertura r , traça-se um arco com centro em A e, depois, outro arco com centro em B , de modo que ambos os arcos se intersectem em um ponto K (figura 17).

Figura 17 – Intersecção entre dois arcos



Fonte: Elaborada pelo autor

Em seguida, mantendo-se inalterada a mesma abertura $r = \overline{AC} = \overline{BF}$ do compasso, traçam-se dois arcos adicionais abaixo do segmento AB : um com centro em A e raio r (denominado $\angle AJG$), e outro com centro em B e raio r (denominado $\angle BIH$). Esses arcos intersectam-se em um ponto único, situado abaixo de AB .

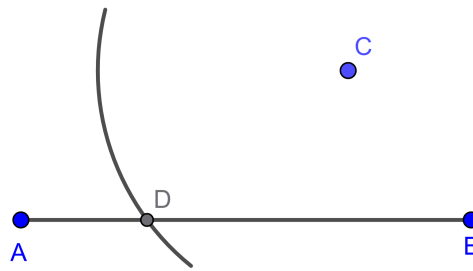
Figura 18 – Criando um segmento perpendicular a AB 

Fonte: Elaborada pelo autor

Tomando-se o ponto de intersecção dos arcos centrados em A (denotado por $\angle ACE$) e em B (denotado por $\angle BFD$), obtém-se o ponto K . De forma análoga, considerando a intersecção dos arcos inferiores com centro em A ($\angle AJG$) e em B ($\angle BIH$), define-se o ponto L . Ao unir os pontos K e L por meio de um segmento, que se revela perpendicular ao segmento AB . Isto ocorre porque tanto K quanto L são equidistantes dos pontos A e B , caracterizando-os como pertencentes à mediatriz do segmento AB e sabe-se que a mediatriz (quarto tópico de 2.1.3.) é a reta perpendicular ao segmento que passa por seu ponto médio.

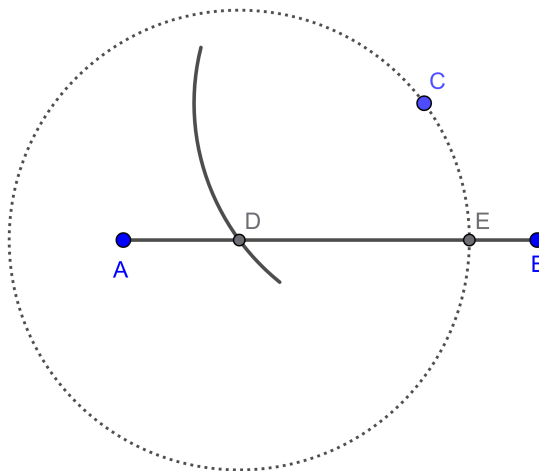
3.2 RETAS PARALELAS:

Com a régua trace o segmento AB qualquer crie um ponto C fora da reta r que contém o segmento AB , e com o compasso centrado no ponto C trace um arco de modo que toque o segmento AB criando o ponto D .

Figura 19 – Arco com centro em C e abertura CD 

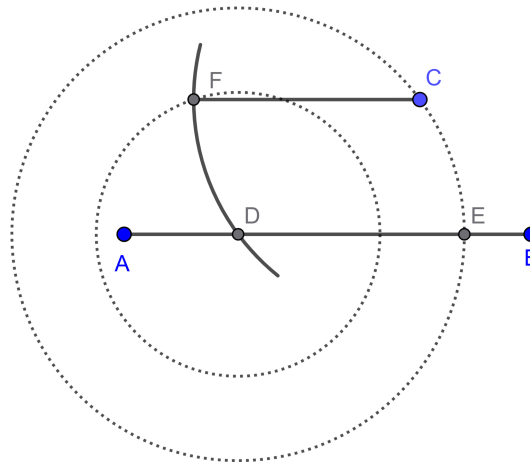
Fonte: Elaborada pelo autor

Com o compasso centrado no ponto D crie um novo arco com raio medindo CD de modo que toque o segmento AB determinando assim o ponto E . Note que $\overline{CD} \equiv \overline{DE}$

Figura 20 – Circunferência com centro em D e raio $\widehat{DC}$ 

Fonte: Elaborada pelo autor

Utilizando o compasso com a mesma abertura do segmento EC , porém agora com o centro do compasso no ponto D crie um novo arco de modo que intersecte com o arco que determinou o ponto D criando assim o ponto F . Note que $\overline{CD} \equiv \overline{CF}$

Figura 21 – Circunferência de centro D e raio $\widehat{CE}$ 

Fonte: Elaborada pelo autor

Dessa forma como o $\overline{EC} \equiv \overline{DF}$ e $\overline{DE} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{FC}$ construímos um paralelogramo e portanto as retas passando por AB e EF são paralelas.

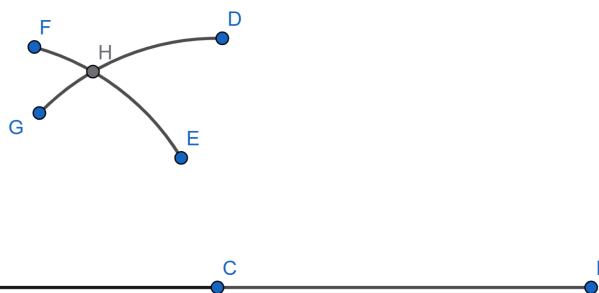
3.3 TRIÂNGULO EQUILÁTERO:

Figura 22 – Ponto C pertencente a AB 

Fonte: Elaborada pelo autor

Considerando um segmento AB qualquer, tome um ponto C pertencente a esse segmento.

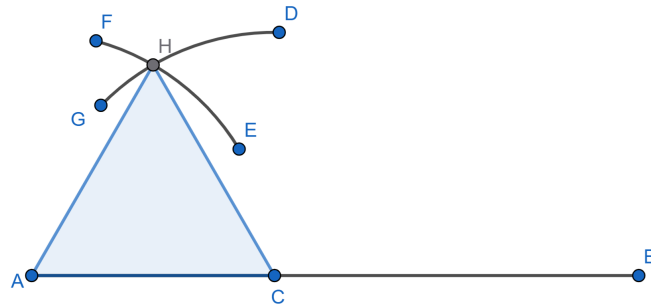
Figura 23 – Intersecção de arcos



Fonte: Elaborada pelo autor

Utilizando o compasso, traça-se um arco de centro em A e raio AC (arco $\angle AEF$), bem como outro arco idêntico tendo C como centro (arco $\angle CDG$). Desta forma, a interseção entre esses dois arcos gera o ponto H .

Figura 24 – Construindo um triângulo equilátero

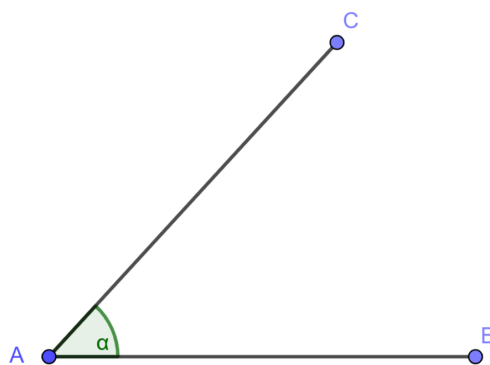


Fonte: Elaborada pelo autor

Para finalizar a construção do triângulo equilátero, basta utilizar a régua para ligar os pontos A , C e H . Como os arcos com centro em A e raio AC , e com centro em C e mesmo raio, temos que $\overline{AH} \equiv \overline{AC} \equiv \overline{CH}$. Logo, conclui-se que o triângulo $\triangle ACH$ possui três lados congruentes e, conseqüentemente, é equilátero.

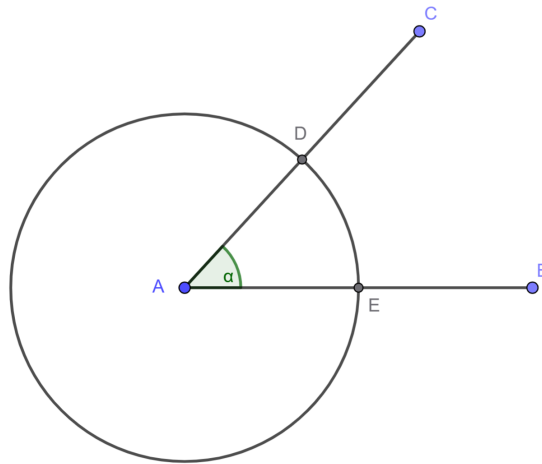
3.4 BISSETRIZ DE UM ÂNGULO QUALQUER:

Figura 25 – Construindo $\widehat{BAC}$



Fonte: Elaborada pelo autor

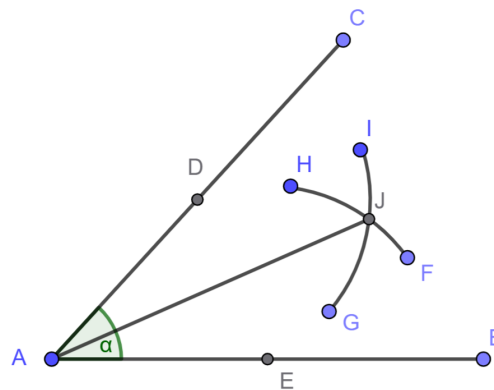
Para produzir a bissetriz de um ângulo, primeiro, com o compasso, é feito a abertura de um ângulo α qualquer.

Figura 26 – Circunferência de centro A e raio $\overline{AD}$ 

Fonte: Elaborada pelo autor

Colocando o centro do compasso em A é feita uma abertura arbitrária para produzir uma circunferência e assim determinar os pontos D e E pertencentes aos lados AC e AB , respectivamente.

Figura 27 – Bissetriz de um ângulo

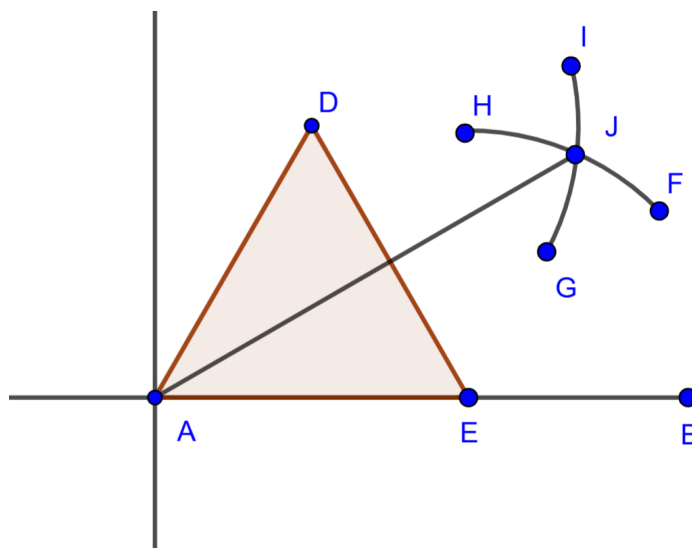


Fonte: Elaborada pelo autor

Com o compasso centrado em D é feito um arco de raio r denominado $\angle DGI$ e utilizando essa mesma abertura, o compasso é centrado em E e é produzido um novo arco ($\angle EFG$), de modo que a interseção entre esses dois novos arcos determina o ponto J . Assim, a reta que passa pelos pontos A e J é a bissetriz do ângulo $\widehat{BAC}$, tendo em vista que os segmentos EJ e DJ são congruentes, os segmentos AE e AD também são congruentes e que os triângulos $\triangle ADJ$ e $\triangle AEJ$ tem em comum o lado AJ . Logo, pelo caso de congruência LLL, temos que $\triangle ADJ$ e $\triangle AEJ$ são congruentes e consequentemente os ângulos $\widehat{JAC}$ e $\widehat{JAB}$ são iguais.

3.5 TRISSECÇÃO DE UM ÂNGULO DE 90° :

Figura 28 – Dividir um ângulo de 90°



Fonte: Elaborada pelo autor

Para dividir um ângulo de 90° em três partes iguais, primeiro é necessário traçar um segmento AB e nesse segmento gerar um ângulo de 90° por meio da criação de uma reta perpendicular (já mostrado em 3.1) ao lado AB , tomando o ponto A como sendo a intercessão entre esses dois segmentos, é produzido um triângulo equilátero (já mostrado em 3.3) com vértice em D e a base sobre o segmento AB . Dessa forma, já temos o ângulo de 90° dividido em dois ângulos, o de 60° pertencente ao triângulo $\triangle AED$, note que como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° e cada ângulo de $\triangle AED$ são iguais então $\widehat{DAE} = 60^\circ$, a próxima etapa é construir a bissetriz (visto em 3.4) do ângulo $\widehat{DAE}$, obtendo assim dois ângulos de 30° internos ao ângulo $\widehat{DAE}$. Logo, dividimos o ângulo de 90° em três ângulos de 30° .

A trissecção de um ângulo de 45° é possível com régua e compasso porque também se trata de um caso particular em que usando os instrumentos clássicos é possível fazer a divisão do ângulo em três partes iguais. Tomando como origem retas perpendiculares (3.1), constrói-se a bissetriz (3.4) para obter 45° . Em seguida, utilizando a construção de um triângulo equilátero (3.3) tomando como origem o ponto de encontro entre as retas perpendiculares, forma-se um ângulo de 60° , cuja bissetriz gera um ângulo de 30° . Temos entre o ângulo de 45° (bissetriz de 90°) e o ângulo de 30° (bissetriz de 60°), agora basta construir a bissetriz do ângulo de 30° para assim ter três ângulos de 15° finalizando a trissecção do ângulo de 45° .

4 TRISSECÇÃO DE UM ÂNGULO

Existem três grandes problemas dentro da Geometria Clássica, são eles a duplicação do cubo, a quadratura do círculo e a trissecção de um ângulo.

Duplicação do cubo: Existe uma narrativa atribuída à Grécia Antiga, onde uma epidemia atingiu Atenas, ocasionando a morte de aproximadamente um quarto de sua população. Em busca de uma solução para essa doença, os atenienses consultaram o oráculo de Apolo, que afirmou ser necessário duplicar o altar dedicado ao deus, o qual possuía formato cúbico. Interpretando a situação, os atenienses dobraram a medida das arestas do altar resultando em um volume oito vezes maior que o original, em vez de duplicá-lo. Dessa narrativa originou o chamado problema de deliano, que consiste em construir um cubo cujo volume seja exatamente o dobro de um cubo já conhecido (Roque, 2012). A solução desse desafio matemático requer a construção de um segmento proporcional à raiz cúbica de 2, tarefa impossível com as ferramentas da geometria euclidiana clássica, pois $\sqrt[3]{2}$ é um número irracional (ver em Gonçalves 1979 p.114).

Quadratura do círculo: "Assim como a duplicação do cubo, o problema da quadratura do círculo provavelmente também era conhecido por volta do século V a.c.". Esse Consiste em construir um quadrado com a mesma área de um círculo dado. A construção deve ser realizada utilizando apenas régua não graduada e compasso, tendo em vista que tais instrumentos só pode ser usado um número finito de vezes, o que implica a impossibilidade de recorrer a processos que envolvam limites ou procedimentos de convergência (Roque, 2012).

Trissecção de um ângulo: Consiste em dividir um ângulo arbitrário em três partes iguais. Ferreira (2010) afirma que esse problema difere dos outros dois grandes problemas da Geometria Clássica, pois não tem uma história única que levaria a estudar essa situação. A mais aceita é que trissecção de um ângulo é um problema que deriva da bissecção de um ângulo. A diferença aumenta quando é impossível quadrar um círculo duplicar um cubo usando régua não graduada e compasso. Entretanto é possível trissecar alguns ângulos usando apenas com esses instrumentos, como por exemplo o ângulo de 90° , como foi mostrado anteriormente na 3.5.

2.4.6.1 Teorema: *É impossível, com o uso de régua (não graduada) e compasso, trissecar o ângulo de 60° .*

Demonstração: Gonçalves(1979, p. 115).

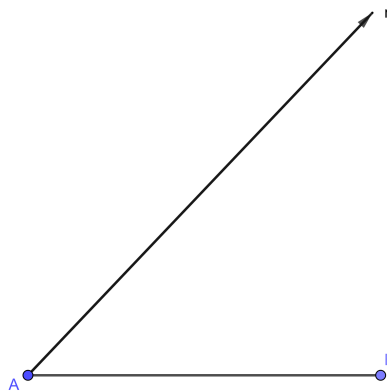
4.1 O FALSO MÉTODO DA TRISSECÇÃO:

Esse método consiste em tomar o segmento AB , oposto ao ângulo $\widehat{AEB}$, e dividir AB em três partes iguais, construindo assim os segmentos AF , FG e GB , dessa forma intuitiva, é comum pensar que EF e EG são dois segmentos que dividem o ângulo $\widehat{AEB}$ em ângulos que possuem a mesma medida, de modo que: $\widehat{AEF} \equiv \widehat{FEG} \equiv \widehat{GEB}$ (conforme mostra na figura 29). Para acompanhar o raciocínio desse método é importante entender a sua construção. Desse modo, os próximos tópicos serão destinados a isso.

4.2.1: Dividir um segmento em três partes iguais

Com a régua trace um segmento AB e a semirreta r tendo como origem o ponto A .

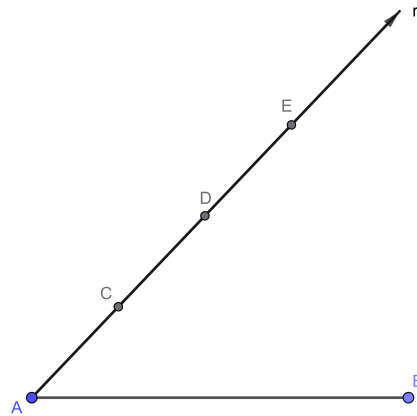
Figura 29 – Segmento AB e reta r com origem em A



Fonte: Elaborada pelo autor

Com o centro em A e abertura x qualquer no compasso, trace um pequeno arco de modo que toque com a semirreta r determinando assim o ponto C (ver figura 31). Com o centro do compasso em C e a mesma abertura x encontre um novo ponto de intercessão com a semirreta r gerando o ponto D . Por fim, com o centro do compasso em D e abertura x encontre um terceiro ponto de intercessão com a semirreta r obtendo o ponto E .

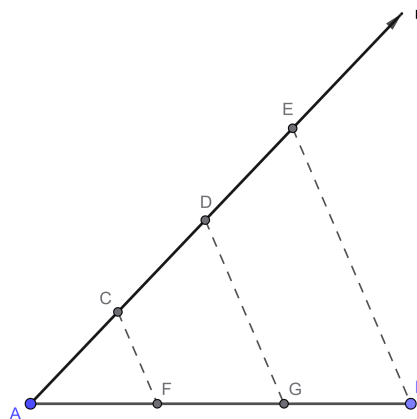
Figura 30 – Dividir um segmento em três partes iguais



Fonte: Elaborada pelo autor

Utilizando a régua una os pontos E e B produzindo o segmento EB (ver figura 29) e trace dois segmentos paralelos a EB de modo que passem pelos pontos C e D , que intersectando o segmento AB geram os pontos F e G e os segmentos CF e DG .

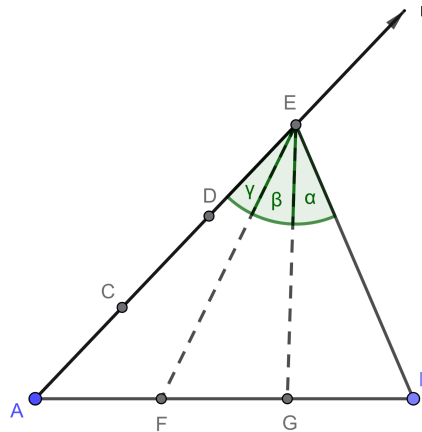
Figura 31 – Marcando com o compasso



Fonte: Elaborada pelo autor

Com isso é possível dividir o segmento AB em três segmentos congruentes: AF , FG e GB . Dessa forma, dividindo o segmento AB que está localizado na frente do ângulo $\widehat{BEA}$ e traçando os segmentos EB , EG e EF é possível pensar intuitivamente que $\widehat{BEG} \equiv \widehat{GEF} \equiv \widehat{FEA}$ (conforme mostra a figura 32).

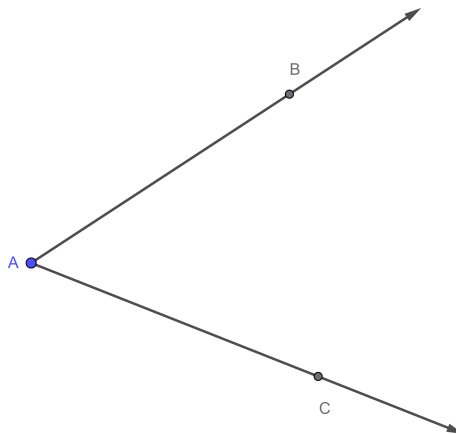
Figura 32 – Falso método de trissecção



Fonte: Elaborada pelo autor

4.2.2: Demonstrando que este método é falso

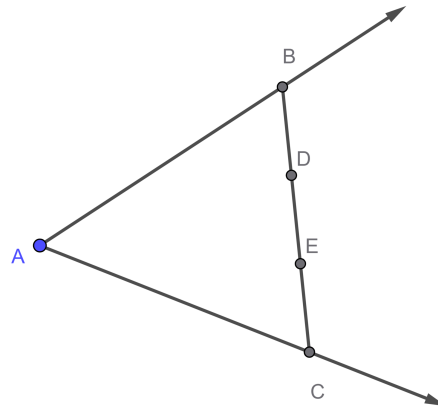
Para poder compreender melhor a justificativa do porquê esse método intuitivo é falso vamos analisar a seguinte construção: Com a régua trace duas semirretas com origem em A e com o compasso centrado também em A construa dois arcos de raio r arbitrário de modo que ao tocar nas duas semirretas já criadas gere os pontos B e C , de modo que $\overline{AB} = \overline{AC} = r$ e que o ângulo $\widehat{BAC}$ seja maior do que zero (figura 33).

Figura 33 – Duas semirretas com origem em A 

Fonte: Elaborada pelo autor

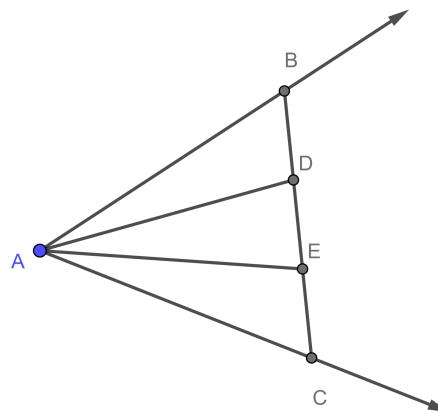
No segmento BC , divida em três partes iguais, conforme foi apresentado anteriormente e encontre os pontos D e E .

Figura 34 – Dividir um segmento em três partes iguais



Fonte: Elaborada pelo autor

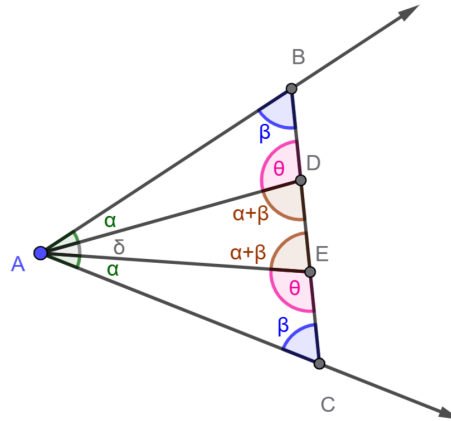
Essa construção nos permite traçar os segmentos AD e AE , que intuitivamente leva a pensar que o ângulo $\widehat{BAC}$ foi dividido em três partes iguais, ou seja, $\widehat{BAD} \equiv \widehat{DAE} \equiv \widehat{EAC}$.

Figura 35 – Dividindo o ângulo $\widehat{BAC}$ em três partes

Fonte: Elaborada pelo autor

Agora, será demonstrado que essa afirmação não é verdadeira. Tomando a construção feita, sabemos que $\triangle ABC$ é isósceles de base BC . Dito isso, temos que $\widehat{ABD} = \widehat{ACE} = \beta$ e, dessa forma, tem-se que $\overline{AB} = \overline{AC}$, $\widehat{ABD} \equiv \widehat{ACE}$ e $\overline{BD} = \overline{CE}$ podendo implicar, pela congruência LAL, que os triângulos $\triangle ABD$ e $\triangle ACE$ são congruentes. Logo, $\widehat{BAD} = \widehat{EAC} = \alpha$ e $\widehat{ADB} = \widehat{AEC} = \theta$.

Figura 36 – Ângulos internos presentes no falso método



Fonte: Elaborada pelo autor

Sabendo que:

$$\triangle ABD \equiv \triangle ACE \implies \begin{cases} \widehat{ABD} + \alpha + \beta = 180^\circ \\ \widehat{AEC} + \alpha + \beta = 180^\circ \end{cases}$$

Temos que:

$$\widehat{AEC} = \widehat{ADB} = \theta$$

Pela Proposição 2.2.7, é possível afirmar que:

$$\widehat{ADE} = \widehat{AED} = \alpha + \beta$$

Analisando o $\triangle AED$, temos por construção que ele é isóscele de base, logo podemos garantir:

(i)

$$180^\circ = \delta + (\alpha + \beta) + (\alpha + \beta) \implies$$

$$180^\circ = \delta + 2\alpha + 2\beta \implies$$

$$\delta = 180^\circ - 2\alpha - 2\beta$$

Já nos triângulos $\triangle ABD$ e $\triangle ACE$, temos: (ii)

$$180^\circ = \alpha + \beta + \theta \implies \alpha = 180^\circ - \beta - \theta$$

Para que esse método seja verdadeiro, devemos ter $\alpha = \delta$. Portanto, igualando as equações (i) e (ii) tem-se:

$$\begin{aligned}\alpha &= \delta \implies \\ 180^\circ - \beta - \theta &= 180^\circ - 2\alpha - 2\beta \implies \\ -\beta - \theta &= -2\alpha - 2\beta \implies \\ \frac{\beta - \theta}{2} &= -\alpha \implies \\ \alpha &= \frac{\theta - \beta}{2}\end{aligned}$$

Agora, tomando essa informação, substituindo o valor de α na equação (ii) e colocando θ em função de β , tem-se:

$$\begin{aligned}180 - \beta - \theta &= \frac{\theta - \beta}{2} \\ 360 - 2\beta - 2\theta &= \theta - \beta \\ 360 &= 3\theta + \beta \\ \theta &= \frac{360^\circ - \beta}{3}\end{aligned}$$

Substituindo o valor encontrado para α e para θ (o processo será feito um passo de cada vez, primeiro substituindo α e depois θ , para facilitar o entendimento do leitor) na outra equação, substituindo o valor de α na equação (i), temos:

$$\begin{aligned}\delta &= 180^\circ - 2\alpha - 2\beta \\ \delta &= 180^\circ - 2\left(\frac{\theta - \beta}{2}\right) - 2\beta \\ \delta &= 180^\circ - \left(\frac{2\delta + 2\beta}{2}\right) - 2\beta \\ \delta &= 180^\circ - \theta + \beta - 2\beta \\ \delta &= 180^\circ - \left(\frac{360^\circ - \beta}{3}\right) + \beta - 2\beta \\ \delta &= 180^\circ - 120^\circ + \frac{\beta}{3} - \beta \\ \delta &= 60^\circ + \frac{\beta}{3} - \frac{3\beta}{3} \\ \delta &= 60^\circ - \frac{2\beta}{3}\end{aligned}$$

Substituindo por fim o valor de θ em α na equação (ii), chegamos em:

$$\begin{aligned}\alpha &= 180^\circ - \beta - \left(\frac{360^\circ - \beta}{3}\right) \\ \alpha &= 180^\circ - \frac{360^\circ}{3} - \beta + \frac{\beta}{3} \\ \alpha &= 60^\circ - \frac{2\beta}{3}\end{aligned}$$

Temos que $\overline{CE} = \overline{DE}$ e sendo $\alpha = \delta$ então AE é uma bissetriz e mediana, logo o $\triangle ACD$ é isósceles de base CD . Dessa forma, os triângulos da base são iguais, ou seja

$$\beta = \alpha + \beta \implies \alpha = 0^\circ$$

Pois isso implica que a $\widehat{BAC} = 3\alpha = 0^\circ$. O que contradiz o fato que $\widehat{BAC} > 0^\circ$.

Isso posto, é possível observar que a investigação de um falso método de trissecção de um ângulo nos leva a aprimorar o raciocínio lógico matemático, tendo em vista o desenvolvimento necessário para provar que o método apontado realmente é uma falsidade. Esse estudo nos mostra que a busca por essas soluções alternativas nos ajuda a reforçar o rigor matemático a respeito das impossibilidades.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ferreira (2010) afirma que "O problema da trissecção de um ângulo arbitrário é um dos que apresentaram maior número de falsas provas" logo em seguida ele continua "Evidentemente afirmar que uma prova é incorreta e encontrar o erro são duas tarefas diferentes: esta última é quase sempre muito difícil.". Esses comentários de Ferreira se completam e mostram como o problema da trissecção de um ângulo é intrigante. Mesmo depois de ter sido provado que não é possível resolvê-lo apenas com régua e compasso, muitos estudiosos ainda tentaram apresentar soluções que acabaram se mostrando incorretas. Analisar essas tentativas é importante, pois ajuda a perceber o valor do rigor matemático e mostra que, mesmo os erros, tiveram um papel importante no desenvolvimento do pensamento matemático ao longo da história.

Ao longo desse trabalho foi apresentado uma sequência de informações que podem servir de fundamentação para entender melhor a construção com régua e compasso chegando até na trissecção de alguns ângulos, de modo que no primeiro momento foi apresentado definições matemáticas envolvendo retas, ângulos, polígonos e congruência de triângulos, no próximo capítulo foi exposto algumas maneiras de se construir elementos geométricos usando régua e compasso se baseando nas definições já apresentadas, num terceiro momento é falado com mais clareza sobre a impossibilidade de trissecar um ângulo e como podem surgir falsos métodos de se "provar" que a trissecção pode ocorrer usando régua não graduada e compasso.

A BNCC, em Brasil (2018), recomenda que o ensino de Matemática deve incentivar a investigação e o raciocínio lógico. Assim, esse TCC entende que a discussão sobre construções com régua não graduada e compasso permite abordar e refletir sobre as construções que não podem ser feitas, possibilitando a percepção de que a Matemática constitui uma área dinâmica que pode ser explorada e questionada. Portanto, este trabalho buscou evidenciar que a trissecção de um ângulo é muito mais do que um problema clássico sem solução: é uma oportunidade de compreender como a Matemática evolui a partir de questionamentos, erros e reformulações. Ao analisar as inúmeras tentativas de solucioná-lo, percebe-se a importância do rigor matemático e do desenvolvimento de métodos mais consistentes de validação, que contribuíram de forma significativa para o avanço da própria ciência.

Conclui-se assim, que o estudo sobre construções geométricas com régua e compasso, incluindo a impossibilidade da trissecção de um ângulo, representa uma parte importante da construção do pensamento matemático, indo além de uma curiosidade histórica. Esse problema tem potencial de revelar as complexidades envolvidas nas investigações geométricas e mostra

que, mesmo diante das limitações impostas pelos instrumentos utilizados, a busca por soluções incorretas ou alternativas foi determinante para fortalecer o pensamento reflexivo e a precisão lógica que caracterizam a Matemática. Dessa forma, este trabalho reforça que a impossibilidade da trissecção de um ângulo, provada formalmente, ampliou as possibilidades de compreensão da Matemática como um campo que se constrói ao longo do tempo, marcado por desafios, erros e conquistas que sustentam seu caráter rigoroso.

6 REFERÊNCIAS

- BARBOSA, Everaldo Fernandes. **Uma análise sobre a impossibilidade da trissecção do ângulo**. Canoas: ULBRA, 2013.
- BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria euclidiana plana**. Rio de Janeiro: SBM, 2006.
- BICUDO, Irineu. **Os Elementos**: Euclides. São Paulo: Editora UNESP, 2009.
- BOYER, Carl Benjamin; MERZBACH, Uta Caecilia. **História da Matemática**. Tradução Helena Castro. São Paulo: Bulcher, 2012. Disponível em:
<https://storage.blucher.com.br/book/pdf_preview/9788521206415-amostra.pdf>. Acesso em: 30/09/2025.
- BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Brasília: Mec, 2018.
- DOMINGUES, José Sérgio. Falso método intuitivo para trissecção de um ângulo agudo. **Revista do Professor de Matemática**. Rio de Janeiro: SBM-VSP, n.100, p. 59-62, 2019.
- FERREIRA, Eduardo Sebastiani. Nicomede e os três problemas clássicos gregos. **Revista Brasileira de História da Matemática**. Revista Brasileira de História da Matemática, v.10, n.20, p.193-211, 2010.
- GONÇALVES, Adilson. **Introdução à álgebra**. Rio de Janeiro: IMPA, 1979.
- NOGUEIRA, Geovane Tavares. **Geometria Plana**: Pontos notáveis de um triângulo e a demonstração da reta de Euler. Campina Grande, 2022 Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em ensino de Matemática) - IFPB, Campina Grande, 2022.
- PAPA NETO, Angelo. **Geometria plana e construções geométricas**. Fortaleza: UAB/IFCE, 2017.
- PINHO, José Luiz Rosas; BATISTA, Eliezer; CARVALHO, Neri Terezinha Both. **Geometria I**. 2.ed. Florianópolis: UFSC, 2010. Disponível em:
<http://mtm.ufsc.br/~ebatista/Eliezer_Batista_arquivos/MTM_Geometria_I_WEB.pdf>. Acesso em: 27/09/2025.
- PIMENTEL, Fernando; PAPA NETO, Angelo; HOLANDA, Bruno. **Material estruturado matemática**: fundamentos de geometria. Fortaleza: SEDUC-CE, 2022. (Caderno 7). Disponível em: <https://www.ced.seduc.ce.gov.br/wp-content/uploads/sites/82/2022/03/caderno07_deAluno.pdf>.

Acesso em: 26/09/2025.

ROQUE, Tatiana. **História da matemática**: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

WAGNER, Eduardo. **Construções geométricas**. Rio de Janeiro: SBM, 2007.