

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS APLICADAS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JOANDESON SANTOS DA SILVA

**Resolução da equação do segundo grau utilizando círculo e
triângulo**

Rio Tinto – PB
2025

Joandeson Santos da Silva

Resolução da equação do segundo grau utilizando círculo e triângulo

Trabalho Monográfico apresentado à
Coordenação do Curso de Licenciatura em
Matemática como requisito parcial para
obtenção do título de Licenciado
em Matemática.

Orientador: Prof. José Laudelino de
Menezes Neto.

Rio Tinto – PB
2025

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S586r Silva, Joandeson Santos.

Resolução da equação do segundo grau utilizando
círculo e triângulo / Joandeson Santos Silva. - Rio
Tinto, 2025.

45 f.

Orientação: José Laudelino de Menezes Neto.
TCC (Graduação) - UFPB/CCAE.

1. Equação do segundo grau. 2. Geometria. 3.
Álgebra. 4. GeoGebra. I. Menezes Neto, José Laudelino
de. II. Título.

UFPB/CCAE

CDU 512

Joandeson Santos da Silva

Resolução da equação do segundo grau utilizando círculo e triângulo.

Trabalho Monográfico apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. José Laudelino de Menezes Neto

Aprovado em: 23/09/2025

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
 JOSE LAUDELINO DE MENEZES NETO
Data: 01/10/2025 09:35:19-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. José Laudelino de Menezes Neto (Orientador) – UFPB/Departamento de Ciências Exatas

Documento assinado digitalmente
 AGNES LILIANE LIMA SOARES
Data: 02/10/2025 11:14:49-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Profa. Dra. Agnes Liliane Lima Soares de Santana – UFPB/Departamento de Ciências Exatas

Documento assinado digitalmente
 CARLOS ALBERTO GOMES DE ALMEIDA
Data: 02/10/2025 12:00:43-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Carlos Alberto Gomes de Almeida – UFPB/Departamento de Ciências Exatas

AGRADECIMENTOS

À **Deus**, por ter me dado força para seguir sempre em frente e todas as vitórias na minha vida;

Aos **meus pais**, que sempre estão ao meu lado me apoiando ao longo da minha vida acadêmica e pelos sacrifícios que me possibilitaram o final dessa caminhada rumo a graduação;

Ao **meu orientador**, Prof. José Laudelino de Menezes Neto, pelo estímulo e colaboração nessa trajetória;

Aos **colegas**, Abedalia dos Santos Ferreira, Adriano Padilha Fernandes, Felipe Euriquo dos Santos, Felipe de Souza Bento, João Vital da Silva Candido, Marcone Soares da Silva Júnior, pelas trocas de experiências, pelo convívio, pelas alegrias e incertezas, pela as ajudas e colaborações no decorrer da vida acadêmica nos momentos difíceis e na superação das dificuldades, pelas suas amizades que valorizo e por todos esses momentos vividos juntos e partilhados.

RESUMO

Esta pesquisa está voltada para a área da matemática pura, em específico a área da Álgebra. O objeto de estudo foram os métodos de resolução de uma equação do segundo grau e trouxe os objetivos de investigar e demonstrar como são feitas resoluções deste tipo de equação, em específico utilizando a geometria, fazendo o uso de retas paralelas, triângulo retângulo e circunferência. Também foi feita a fundamentação teórica da equação do segundo grau e da geometria, trazendo uma relação entre estes temas. A resolução da equação do segundo grau por métodos geométricos foi feita por meio do software GeoGebra. Este trabalho foi realizado fazendo uma pesquisa explicativa e bibliográfica.

Palavras-chave: Equação do segundo grau. Geometria. Álgebra. GeoGebra

ABSTRACT

This research focuses on pure mathematics, specifically algebra. The object of study was the methods for solving quadratic equations, and the objectives were to investigate and demonstrate how these types of equations are solved, specifically using geometry, such as parallel lines, right triangles, and circles. The theoretical foundations of quadratic equations and geometry were also presented, establishing a relationship between these topics. The quadratic equation was solved using geometric methods using GeoGebra software. This work was conducted through explanatory and bibliographical research.

Keywords: Second-degree equation. Geometry. Algebra. GeoGebra

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	9
1.1 Delimitação do tema e problema de pesquisa	9
1.2 Justificativa.....	10
1.3 Objetivos	11
1.3.1 Objetivo Geral	11
1.3.2 Objetivos Específicos	12
1.4. Classificação da pesquisa	12
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	13
2.1 Um pouco da história sobre as equações polinomiais de segundo grau.....	13
2.2 Uma pesquisa sobre o estudo de equações polinomiais e seus métodos de resolução	15
2.3 Resolução da equação do segundo grau pela fórmula de Bhaskara	16
2.4 Explicando o que é o GeoGebra.....	22
2.5 Resolução da equação $x^2 - sx + p^2 = 0$ com GeoGebra	25
2.6 Explicando detalhes de como usar o GeoGebra na resolução de $x^2 - sx + p^2 = 0$	34
3 CONCLUSÃO	44
REFERÊNCIAS	45

1 INTRODUÇÃO

1.1 Delimitação do tema e problema de pesquisa

Esta investigação está dentro da área da Matemática Pura e suas subáreas Álgebra e Geometria, cujo tema dessa pesquisa diz respeito às formas de resoluções de equações polinomiais de segundo grau com foco sobre “método de resolução da equação do segundo grau utilizando círculo e triângulo”, seu objeto de conhecimento matemático referente a este tema é resoluções de equação polinomial de segundo grau do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, que estão localizadas na unidade temática Álgebra da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e que são estudados no componente curricular Cálculo I e Matemática para o ensino básico II do Curso de Licenciatura em Matemática da UFPB – Campus IV.

O interesse desse tema surgiu pelo fato das equações polinomiais ser um tema que é visto nos 3 anos do Ensino Médio, tais como funções quadráticas visto no 1º ano, a decomposição em relação em fatores e relação entre dois coeficientes e raízes, e claro o teorema fundamental da álgebra que é visto no 2º ano. A análise de gráficos de função e seu comportamento, e o uso de funções polinomiais em física, economia e também em outros contextos que é visto no 3º ano do ensino médio. Além disso, o interesse no tema se deve também a alguns trabalhos acadêmicos, principalmente em Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC), tais como o “Resolução de problemas envolvendo equações polinomiais de segundo grau: possibilidades e dificuldades” de Souza (2023), “MÉTODOS DE RESOLUÇÃO PARA AS EQUAÇÕES QUADRÁTICAS” de Pinheiro (2024) e “Uma aplicação da resolução de problemas no ensino das equações do 2º grau” de Coutinho (2016).

Para os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) é de grande importância que as equações de segundo grau sejam apresentadas por meio de situações-problema para que os alunos tenham uma melhor compreensão desse assunto. Segundo os PCN (Brasil, 1998, p. 84 *apud* Neto, 2011, p. 20), “é fundamental a formulação e a resolução de problemas por meio de equações e o conhecimento da ‘sintaxe’ de uma equação”.

Os PCN mostram o seguinte conceito e procedimento para a equação do 2º grau:

Resolução de situações-problema que podem ser desenvolvidas por uma equação de segundo grau cujas raízes sejam obtidas pela fatoração, discutindo o significado dessas raízes em confronto com a situação proposta (Brasil, 1998, p.88 *apud* Neto, 2011, p. 21).

Os PCN (Brasil, 1998, p. 116 *apud* Neto, 2011, p. 21) alegam igualmente que é mais favorável apresentar situações que comandem os alunos à construção de conceitos algébricos por meio da análise de regularidades em tabelas e gráficos, estabelecendo relações, em vez de abordar o estudo da Álgebra apenas destacando as manipulações mecânicas de expressões e equações.

Segundo Neto (2011), as equações de segundo grau geralmente são vistas como mais um procedimento a ser seguido, pois quase sempre são trabalhados fora de um contexto o que acaba por confundir um aluno e não deixando ele fazer a conexão de questão com a forma de resolvê-la.

À vista disso, será feita uma exibição de uma forma de resolução de equações do segundo grau utilizando conceitos geométricos, e discutir as limitações do método.

1.2 Justificativa

A escolha do tema se deu pela grande diversificação e história do assunto e para trazer uma nova forma de resolver uma equação do segundo grau, de modo que traga um novo ponto de reflexão sobre como resolver essas equações, pois como visto em alguns trabalhos acadêmicos como o citado anteriormente “Uma análise da história das equações do 2º grau nos livros didáticos” de Neto (2011) muitas vezes esse assunto é abordado de forma robótica enfatizando a memorização, sem dar espaço para outras formas de resolver uma equação do segundo grau.

A dificuldade do ensino e aprendizagem de equações quadráticas é observada em estudantes do Ensino Médio, e até em estudantes de universidades, muito disso se deve em razão da predominância de abordagens que privilegiam métodos específicos de resolução, frequentemente apresentados de forma mecânica, com ênfase na memorização, em detrimento de estratégias que possibilitem uma compreensão mais ampla e significativa do conteúdo. Considerando-se que as equações quadráticas constituem um dos principais tópicos da Álgebra, a problemática assume relevância no contexto educacional. Essas constatações emergiram durante a realização dos estágios supervisionados e foram corroboradas pelo diálogo com professores da área. Fiorentini e Miorim (1992, p. 40 *apud* Costa, 2015, p. 10) enfatizam que

[...] a maioria dos professores trabalha a álgebra de maneira mecânica e automatizada, dissociada de qualquer significação lógica, enfatizando simplesmente a memorização e a manipulação de regras, macetes, símbolos e expressões, tal como ocorria há várias décadas mostram que o seu ensino não tem recebido devida atenção.

Como o assunto de equações de segundo grau é um conteúdo antigo do ensino de Matemática, ele acaba sendo apresentado nos livros e ensinado pelos professores de forma tradicionalista e repetitiva. Esses métodos de resoluções de equações quadráticas são tão recorrentes que acaba restringido os alunos a uma única forma de resolução o que por sua vez bloqueia a oportunidade de resoluções alternativas. Dessa forma, Lima (1988 *apud* Moraes, 2023, p. 11) afirma que:

por mais antigo, tradicional e reprisado que seja o assunto que estamos ensinando. Convém sempre procurar novos ângulos para focalizá-lo, outras maneiras de abordá-lo, não somente buscando tornar mais atraentes nossas aulas, mas até mesmo para nos dar um pouco mais de entusiasmo, quebrando a monotonia de repetir todos os anos a mesma história.

Portanto, essa é uma das razões da escolha desse tema de exibir uma resolução via geometria, com círculos e triângulos retângulos para contribuir não só com método alternativo que podem propor outra perspectiva, assim como divulgar esse método saindo dessa restrição repetitiva.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo Geral

Investigar e demonstrar como a resolução da equação do segundo grau pode ser realizada utilizando conceitos geométricos, especificamente com o uso de retas paralelas e perpendiculares, triângulo retângulo e circunferência.

1.3.2 Objetivos Específicos

1. Apresentar os fundamentos teóricos da equação do segundo grau e de Geometria, especificamente de círculos e triângulos retângulos, destacando suas principais propriedades e aplicações.
2. Explorar a relação entre a forma de uma equação do segundo grau e a resolução via geometria do triângulo retângulo, utilizando a altura do triângulo e uma propriedade como elementos de construção.
3. Construir e resolver problemas que envolvam equações do segundo grau por meio de representações geométricas, promovendo uma abordagem visual e alternativa ao método algébrico tradicional.

1.4. Classificação da pesquisa

Uma pesquisa pode ser classificada segundo a natureza da abordagem do objeto a ser pesquisado, quanto aos objetivos e quanto aos procedimentos técnicos de investigação. No caso da pesquisa que foi apresentada, segundo Deslauriers (1991 *apud* Pinheiro; Santos, 2017), foi classificada como sendo uma qualitativa, e segundo Gil (2002) e classificada como explicativa e bibliográfica.

Deslauries (1991, p. 58 *apud* Pinheiro; Santos, 2017, p. 75) define pesquisa qualitativa como:

os pesquisadores que utilizam os métodos qualitativos buscam explicar o porquê das coisas, exprimindo o que convém ser feito, mas não quantificam os valores e as trocas simbólicas nem se submetem à prova de fatos, pois os dados analisados são não-métricos (suscitados e de interação) e se valem de diferentes abordagens.

De fato, nessa pesquisa foi feito uma análise descritiva de livros, artigos científicos e trabalhos acadêmicos, buscando explicar os métodos de resolução de equações polinomiais de segundo grau, a partir dos teoremas e corolários dos livros utilizados no Ensino Superior.

Para Gil (2002, p.42), uma pesquisa é dita explicativa quando “aprofunda o conhecimento da realidade, porque explica a razão, o porquê das coisas. Por isso mesmo, é o tipo mais complexo e delicado, já que o risco de cometer erros aumenta consideravelmente.” De fato, esta pesquisa será abordada, de acordo com os objetivos

apresentados, a explicação desses métodos de resolução de equações de segundo grau assim como sua análise segundo os teoremas e corolários para fundamentá-los cientificamente, e para isso foi necessário fazer uma pesquisa aprofundada e fundamentada sobre o assunto por meio de material bibliográfico.

Segundo Gil (2002, p. 44), “a pesquisa bibliográfica é desenvolvida com base em material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos”.

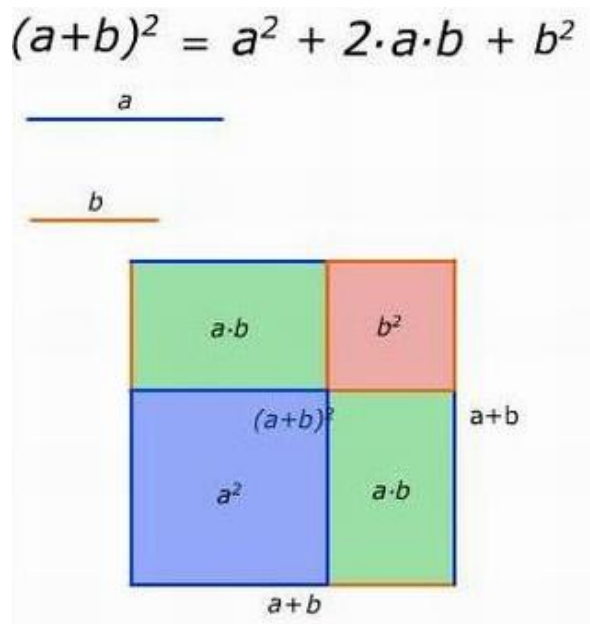
Sabendo que os materiais dessa pesquisa são basicamente livros e artigos, foi determinado que o instrumento da pesquisa é bibliográfico, pois “os livros constituem as fontes bibliográficas por excelência” (Gil, 2002, p. 44).

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Um pouco da história sobre as equações polinomiais de segundo grau

Primeiramente o que irá ser abordado é a história das equações polinomiais, a qual começa atualmente a aparecer nos livros escolares a partir dos anos finais do ensino fundamental. Pelos artigos de Pastor (1985), Pedroso (2010) e Castro (2024), dá para rastrear as equações polinomiais pela história até 1750 a.C. Há vestígios da utilização dessas equações desde a antiga babilônia, por exemplo, onde as pessoas do império já efetuavam e resolviam equações polinomiais de segundo grau completas, por meio de “métodos de fatoração” cujas fórmulas já estavam bem desenvolvidas e os termos que eles usavam nas equações eram semelhantes aos usados recentemente.

Avançando um pouco mais na história, os gregos desenvolveram dentro da área de Álgebra uma visão geométrica que servia para mostrar que $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Seria a representação da área de um quadrado de lados $(a + b)$, simplificando eles transformavam as informações em quadrados menores e depois juntavam esses quadrados em um quadrado maior (ver Figura 1). Euclides utilizou este conceito na obra “Os Elementos” que apresentou bases sólidas para o pensamento geométrico da época e métodos eficazes de resolver uma equação quadrática, utilizando essa mesma abordagem geométrica para resolver equações de segundo grau.

Figura 1: Representação geométrica de $(a + b)^2$ 

Fonte: Portal do Professor (2011). Disponível em: [Portal del Profesor - Estabelecendo relações entre a geometria e os produtos notáveis \(mec.gov.br\)](https://portal.mec.gov.br/portal-del-profesor-estabelecendo-relacoes-entre-a-geometria-e-os-produtos-notaveis). Acesso em: 26 mar. 2024.

Após isso a matemática hindu e árabe produziu grandes personalidades por volta da idade média até o renascimento produzindo ideias e conceitos que até hoje são usados, entre elas Aryabhata (século VI d.C.) e Brahmagupta (século VII d.C.). Ainda no século IX um matemático árabe chamado Al-Khwarizmi utilizou de um método de “completar quadrados”, para solucionar alguns problemas de equações polinomiais de segundo grau. Após ele, Sridhara (século XI d.C.) e Bhaskara (1114-1185), foram responsáveis por organizar os métodos retóricos de resolver uma equação do segundo grau conhecidos da época aplicando princípios e regras bases, o que posteriormente resultaria na fórmula para achar as raízes de uma equação de segundo grau, a qual é dada por $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Curiosamente no Brasil, essa fórmula é comumente chamada de "Fórmula de Bhaskara", que é o método mais utilizado e conhecido em livros para se resolver uma equação polinomial de segundo grau, no entanto o matemático nunca criou essa fórmula, os conceitos dela já existiam antes do matemático Bhaskara, na época dele esse conceito era conhecido como método da ganita que foi transmitida por meio de textos como o “Sutra”

e “shlokas” esse método inicialmente foi estabelecido por Brahmagupta, e Aryabhata, Bhaskara apenas aperfeiçoou esse método posteriormente.

Um dos textos mais famosos escrito por ele e o “lilavati” que utilizava a prática da ganita esse texto tinha diversos tópicos matemáticos desde exercício simples até problemas mais complexos envolvendo equações, progressão aritmética e sequências.

2.2 Uma pesquisa sobre o estudo de equações polinomiais e seus métodos de resolução

Iezzi (2013) define que uma equação polinomial ou equação algébrica, seja de segunda, terceira ordem, ou qualquer ordem, ocorre quando é dada uma sentença aberta definida pela igualdade de duas funções polinomiais $p(x)$ e $q(x)$, ou seja, é uma sentença da forma $p(x) = q(x)$. Chamamos de ordem de uma equação polinomial ou equação algébrica, o maior grau de x da função polinomial $p(x)$ ou $q(x)$.

Consideremos por exemplo $p(x)$ dizendo que ela é igual a $x^2 + x - 2$ e $q(x)$ é igual a $3x^2 - 2$, logo a sentença aberta ficaria $p(x) = q(x) \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 3x^2 - 2$, que é uma equação polinomial. Lembrando que uma sentença aberta pode ser verdadeira ou falsa dependendo do valor que atribuímos a x . Por exemplo, para x igual a 0, então $(0)^2 + 0 - 2 = 3 \cdot (0)^2 - 2$ seria verdadeiro pois $p(0) = q(0)$, e para x igual a 1, então $(1)^2 + 1 - 2 = 3 \cdot (1)^2 - 2$ seria falso pois $p(1) \neq q(1)$.

Vale ressaltar que a raiz de uma equação polinomial sempre é o número que irá substituir o x de forma que transforma a sentença aberta $p(x) = q(x)$ em verdadeira, e, portanto, é chamado de conjunto solução ou conjunto verdade da equação o conjunto dos números que são as raízes complexas da sentença aberta, isto é, o conjunto solução é dado pelos valores $x \in \mathbb{C}$ tais que $f(x) = g(x)$. Segundo Iezzi (2013, p. 102), “resolvê-la significa desenvolver um raciocínio lógico e concluir quais são as raízes, sem ter de ‘adivinhar’ nenhuma e sem ‘esquecer’ nenhuma”.

Essa definição é válida para todas as equações polinomiais, incluindo as equações de segundo grau da forma $ax^2 + bx + c = 0$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, mas nem sempre foi assim. De fato, como descrito na seção 2.1, foram necessários vários estudos de muitos matemáticos ao longo dos séculos para chegar ao que temos hoje. Por exemplo, a obra de Euclides “Os Elementos” contribui indiretamente ao apresentar conceitos e métodos que

são fundamentais para o entendimento e a resolução de equações quadráticas como para os métodos de fatoração e de completar quadrados. O Livro II de "Os Elementos" trata das propriedades das figuras geométricas, incluindo os quadrados, retângulos e paralelogramos. Esses conceitos geométricos são fundamentais para entender a relação entre os coeficientes de uma equação de segundo grau e as propriedades da parábola.

Além disso, "Os Elementos" discute a teoria das proporções e relações entre grandezas, conceitos que são essenciais para a resolução de equações quadráticas. Segundo Pedroso (2010), na proposição 28 do Livro VI de "Os Elementos" de Euclides, é demonstrado um método para dividir um segmento de reta de tal forma que o retângulo formado por suas partes seja igual a um quadrado dado, sem exceder a área do quadrado formado pela metade do segmento de reta original. Em termos modernos, essa abordagem seria reinterpretada como um problema de encontrar as raízes de uma equação quadrática da forma $x^2 - sx + p^2 = 0$, onde s e p são segmentos de reta conhecidos, com $s > 2p$.

Essa proposição é relevante para o método de resolução por fatoração porque demonstra uma aplicação geométrica dos conceitos envolvidos na resolução de equações quadráticas. A ideia por trás dessa proposição é encontrar dois segmentos de reta que, quando multiplicados, produzam p^2 e, quando somados, produzam s . Isso é análogo ao processo de fatoração de uma equação quadrática, onde buscamos expressá-la como o produto de dois binômios, $x^2 - sx + p^2 = (x - x_1)(x - x_2) = 0$ – veja Propriedades 1 e 2 mais a frente. Portanto, embora não trate diretamente da resolução de equações de segundo grau por fatoração, a proposição 28 do livro VI fornece um contexto geométrico que ilustra conceitos essenciais que podem ser aplicados na resolução dessas equações. A obtenção deste contexto geométrico se dá a partir da utilização de régua e compasso na construção dos segmentos de reta procurados.

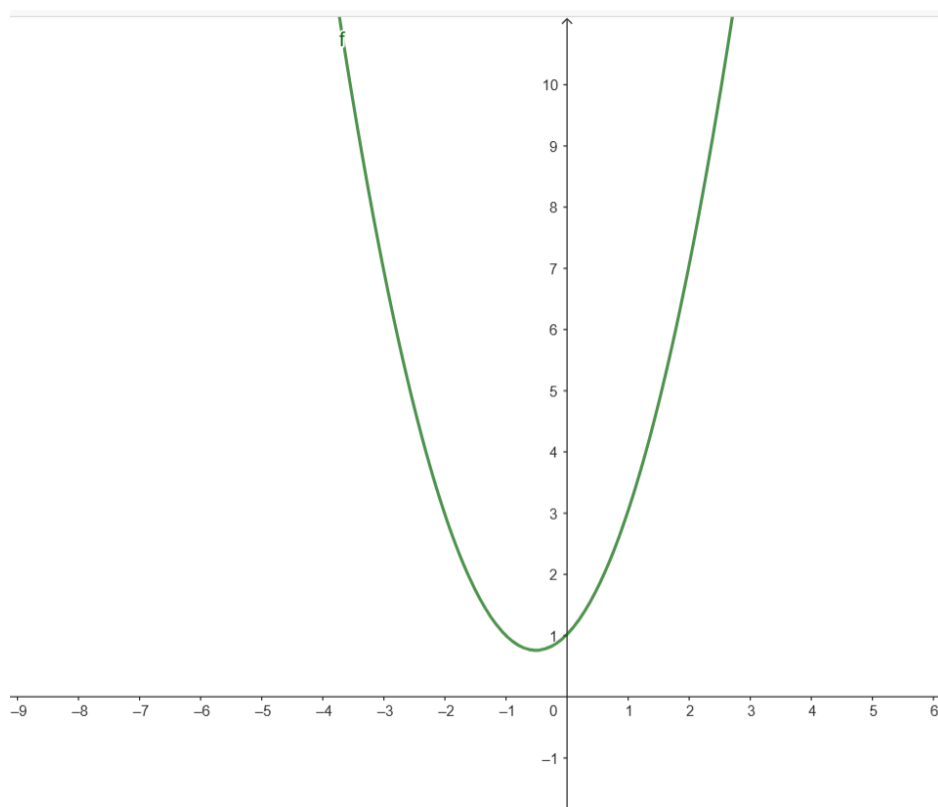
2.3 Resolução da equação do segundo grau pela fórmula de Bhaskara

A resolução de equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$, mais conhecida no Brasil como fórmula de Bháskara, é um método matemático que foi desenvolvido na Índia para resolver problemas concretos do cotidiano como medições de terra, divisões ou no próprio comércio. Esse método consiste em encontrar as raízes de uma equação do segundo 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$ com $a, b, c \in R$ e $a \neq 0$, essa formula é aplicada da seguinte forma $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$. Essa formula gera duas raízes reais

distintas $x_1 \neq x_2$ quando $\Delta > 0$, se $\Delta < 0$, então a equação não tem raízes reais, e se $\Delta = 0$ haverá duas raízes reais iguais $x_1 = x_2$.

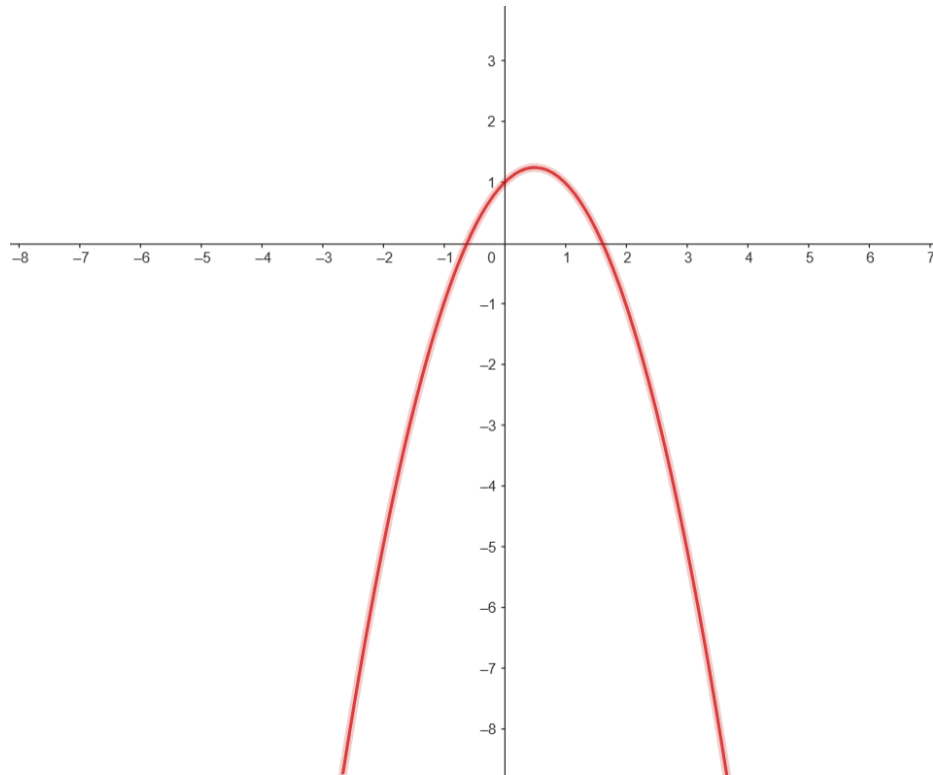
A equação do segundo grau também é vista como uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, seu gráfico no plano cartesiano é uma parábola com a sua concavidade estando dependente do valor de $a \neq 0$, se $a > 0$ a concavidade da parábola é voltada para cima (veja Figura 2), se $a < 0$ a concavidade da parábola é voltada para baixo (veja Figura 3), as raízes representam os pontos onde a parábola toca o eixo x , esta situação pode ser verificada no livro Fundamentos de Matemática Elementar, volume 1, de IEZZE (2013), na página 139.

Figura 2: Mostrando o que acontece com no gráfico da parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$, quando $a > 0$



Fonte: autoria própria.

Figura 3: Mostrando o que acontece com no gráfico da parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$, quando $a < 0$



Fonte: autoria própria.

Propriedade 1: Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$, então vale a igualdade $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ onde $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ são as raízes de $ax^2 + bx + c = 0$ com delta e definido como sendo, $\Delta = b^2 - 4ac$.

Demonstração: Basta substituir os valores de x_1 e x_2 e fazer as contas de multiplicação, soma etc., usando o valor de $\Delta = b^2 - 4ac$.

seja $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ com $\Delta = b^2 - 4ac$ então, se

$$\begin{aligned}
 & a((x - x_1)(x - x_2)) \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow a(x^2 - x \cdot x_2 - x_1 \cdot x + x_1 \cdot x_2) \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow a(x^2 - (x_2 + x_1)x + x_1 \cdot x_2) \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow ax^2 - a((x_2 + x_1)x) + a(x_1 \cdot x_2) \Leftrightarrow
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow ax^2 - a \left(\left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right) x \right) + a \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow ax^2 - a \left(\left(\frac{-b + \sqrt{\Delta} + (-b - \sqrt{\Delta})}{2a} \right) x \right) + a \left(\left(\frac{(-b - \sqrt{\Delta}) \cdot (-b + \sqrt{\Delta})}{4a^2} \right) \right) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow ax^2 - a \left(\left(\frac{-2b}{2a} \right) x \right) + a \left(\frac{(-b)^2 - \Delta}{4a^2} \right) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow ax^2 - a \left(\left(-\frac{b}{a} \right) x \right) + a \left(\frac{b^2 - \Delta}{4a^2} \right)
\end{aligned}$$

Substitua Δ por $b^2 - 4ac$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow ax^2 - a \left(-\frac{b}{a} x \right) + a \left(\frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} \right) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow ax^2 + a \left(\left(-\frac{b}{a} \right) x \right) + a \left(\frac{4ac}{4a^2} \right) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow ax^2 + a \left(\left(-\frac{b}{a} \right) x \right) + a \left(\frac{c}{a} \right) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow ax^2 + bx + c.
\end{aligned}$$

Portanto, $ax^2 + bx + c = a((x - x_1)(x - x_2))$ com $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$. ■

Propriedade 2: Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$. Se x_1 e x_2 são as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, então $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e $x_1x_2 = \frac{c}{a}$. Em particular, se x_1 e x_2 são as raízes da equação $x^2 - sx + p^2 = 0$ com $s, p \in \mathbb{R}_+$, então $x_1 + x_2 = s$ e $x_1x_2 = p^2$.

Demonstração: De fato, da Propriedade 1, sabemos que se x_1 e x_2 são as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, então $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2$. Igualando os termos com mesma potência de x , $b = -a(x_1 + x_2)$ e $c = ax_1x_2$, implicando

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

No caso particular da equação $x^2 - sx + p^2 = 0$, tem-se o resultado $x_1 + x_2 = s$ e $x_1x_2 = p^2$. ■

A equação do segundo grau $x^2 - sx + p^2 = 0$, onde $s, p \in \mathbb{R}_+$ com $s > 2p$, é uma equação resolvida com régua e compasso pelos gregos, então, pelo fato de não ter segmento com comprimento negativo, não existe um comprimento medindo, por exemplo, -2cm, ou -13cm, isto significa que suas raízes devem ter apenas valores positivos, não podem ser negativos. Por isso, provamos as Proposições 1 e 2 abaixo.

Proposição 1: Sejam $s, p \in \mathbb{R}_+$ com $s > 2p$, então o valor de Δ da equação $x^2 - sx + p^2 = 0$ é sempre maior que zero.

Demonstração: Seja $ax^2 + bx + c = 0$, sabemos que $\Delta = b^2 - 4ac$, e para o caso particular de $x^2 - sx + p^2 = 0$ temos $a = 1, b = -s, c = p^2$ e $s > 2p$, prove que nestas condições, $\Delta > 0$.

Seja $ax^2 + bx + c = 0$, com $\Delta = b^2 - 4ac$ e para $x^2 - sx + p^2 = 0$ com $a = 1, b = -s, c = p^2$, logo

$$\begin{aligned}\Delta &= (-s)^2 - 4 \cdot 1 \cdot p^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow s^2 - 4p^2 &= s^2 - (2p)^2 = (s - 2p)(s + 2p) > 0, \\ \text{pois } s > 2p &\Leftrightarrow s - 2p > 0 \text{ e } s, p \in \mathbb{R}_+.\end{aligned}$$

Logo $\Delta > 0$ ■

Proposição 2: Sejam $s, p \in \mathbb{R}_+$ com $s > 2p$, então as raízes da equação $x^2 - sx + p^2 = 0$ são diferentes e maiores ou iguais a zero.

Demonstração: Seja $x^2 - sx + p^2 = 0$ tendo $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ como raízes, então $a = 1, b = -s, c = p^2$ e, pela Proposição 1, $\Delta = s^2 - 4p^2 > 0$, implicando que as raízes x_1 e x_2 são distintas.

Para verificar se $x_2 > 0$, temos que ver se $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} > 0$.

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-s) + \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{s + \sqrt{\Delta}}{2}$$

Por hipótese $s \in \mathbb{R}_+$ e $s > 2p$, assim $s > 0$, e pela Proposição 1, $\Delta > 0$, logo

$$s + \sqrt{\Delta} > 0 \text{ então } x_2 = \frac{s+\sqrt{\Delta}}{2} > 0.$$

Como $ax^2 + bx + c^2 = a(x - x_1)(x - x_2) = 0$ com $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ logo

$$x^2 - sx + p^2 = (x - x_1)(x - x_2) \text{ e}$$

$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 = \frac{p^2}{1} = p^2 \geq 0 \Rightarrow$ o produto das raízes são positivas, com $x_2 > 0$, portanto.

$x_1 \geq 0$ sendo assim $x_1 \neq x_2$ com $x_1 \geq 0$ e $x_2 > 0$. ■

A Proposição 2 pode ser verificada intuitivamente observando o gráfico da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - sx + p^2$, com $s, p \in \mathbb{R}_+$ e $s > 2p$, basta usar a Proposição 1, que garante $\Delta > 0$, e utilizar os fatos: da concavidade de $f(x)$, o local onde $f(x)$ toca o eixo y e os valores do x do vértice, $x_v = \frac{-b}{2a}$, e y do vértice, $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$. De fato, vamos verificar passo a passo.

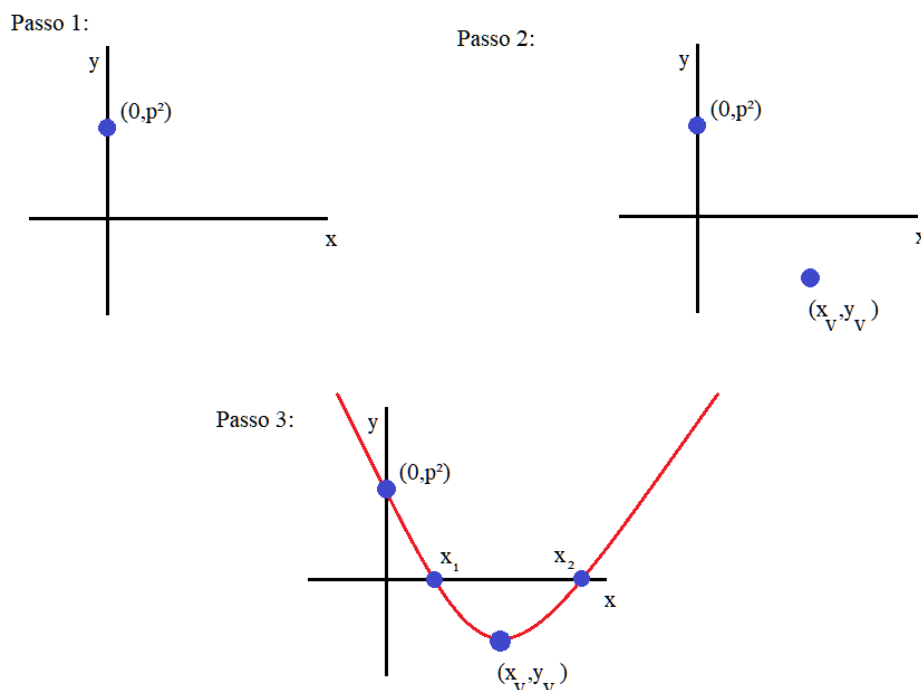
Passo 1 (veja Figura 4): sendo $f(x) = x^2 - sx + p^2$, neste caso temos $a = 1, b = -s$ e $c = p^2$, como $f(0) = p^2$, então $f(x)$ passa no eixo y no valor $p^2 > 0$, ou seja, passa no ponto $(0, p^2)$ do plano cartesiano.

Passo 2 (veja Figura 4): temos $x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{s}{2} > 0$, e pela Proposição 1, $\Delta > 0$, logo $y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{\Delta}{4} < 0$, assim $f(x)$ passa no ponto $(x_v, y_v) = \left(\frac{s}{2}, -\frac{\Delta}{4}\right)$.

Passo 3 (veja a figura 4): como $a = 1 > 0$, então a concavidade de $f(x) = x^2 - sx + p^2$ é voltada para cima.

Portanto, ao traçar o gráfico de $f(x)$ seguindo os passos 1, 2 e 3 acima, o gráfico deve tocar duas vezes o eixo x na região em que $x > 0$, concluindo que $f(x) = x^2 - sx + p^2$ possui duas raízes, x_1 e x_2 , reais, distintas e positivas.

Figura 4: mostrando passo a passo do motivo de $f(x) = x^2 - sx + p^2$ ter duas raízes reais x_1, x_2 positivas



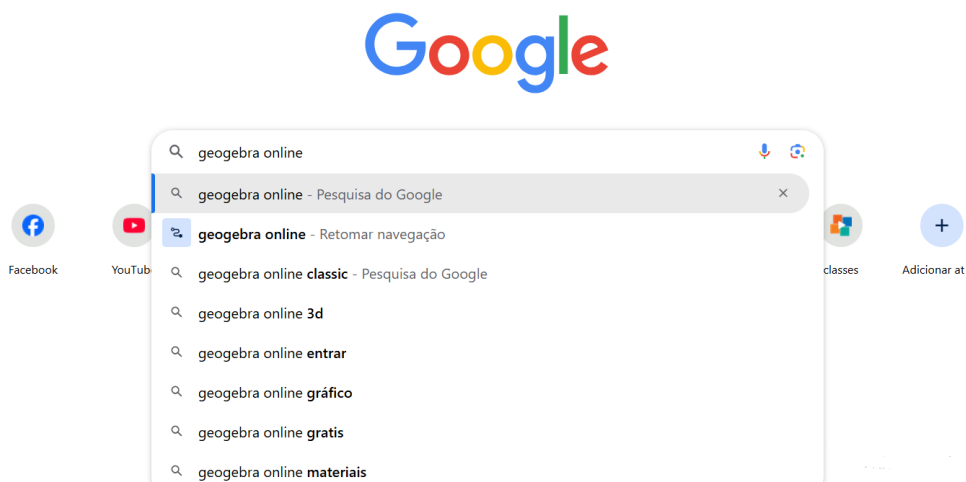
Fonte: Autoria própria.

2.4 Explicando o que é o GeoGebra

O GeoGebra é um software interativo de matemática voltado para ensino e aprendizagem, que integra geometria, álgebra, estatística assim como cálculo e gráficos em um único ambiente, ele permite visualizar e manipular conceitos matemáticos de forma dinâmica. É possível, por exemplo, fazer representações gráficas de uma equação de segundo grau, e também possibilita fazer formas geométricas tais como polígonos, triângulos, retângulos entre outros.

Para acessar o GeoGebra online é necessário seguir o seguinte passos a passo. Primeiro passo, vá no seu navegador de internet e busque pelo termo “GeoGebra online” no site <https://google.com> e aperte em pesquisar, seja no Google Chrome, Firefox, etc. Para demonstrar, será utilizado o navegador Google Chrome (veja a figura 5).

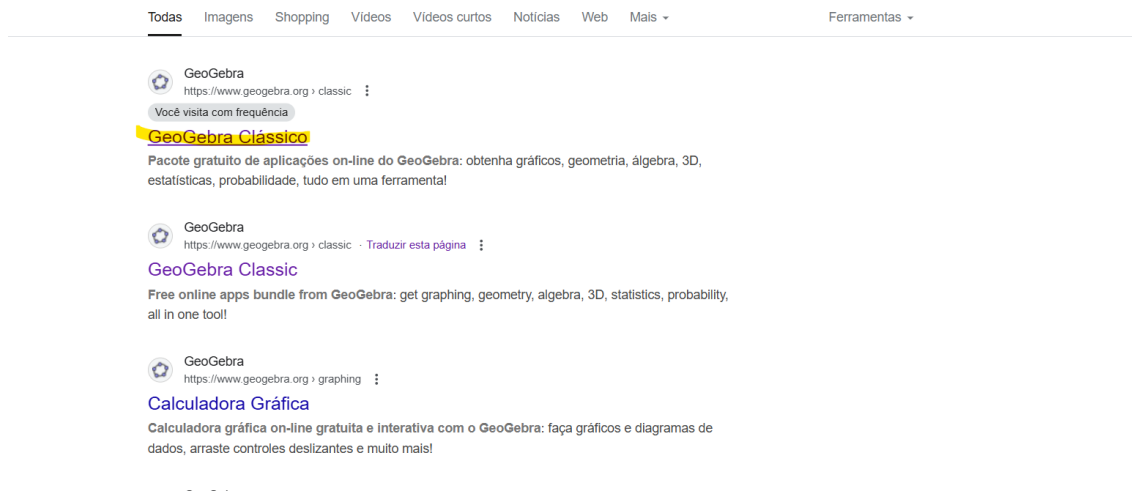
Figura 5: Mostrando o primeiro passo de como buscar o GeoGebra online no site <https://google.com>.



Fonte: Autoria própria

O segundo passo (Figura 6) é o de clicar no primeiro resultado da busca que tenha o nome GeoGebra Clássico que tem o seguinte link https://www.GeoGebra.org/classic?lang=pt_PT. Este link irá abrir a plataforma do GeoGebra.

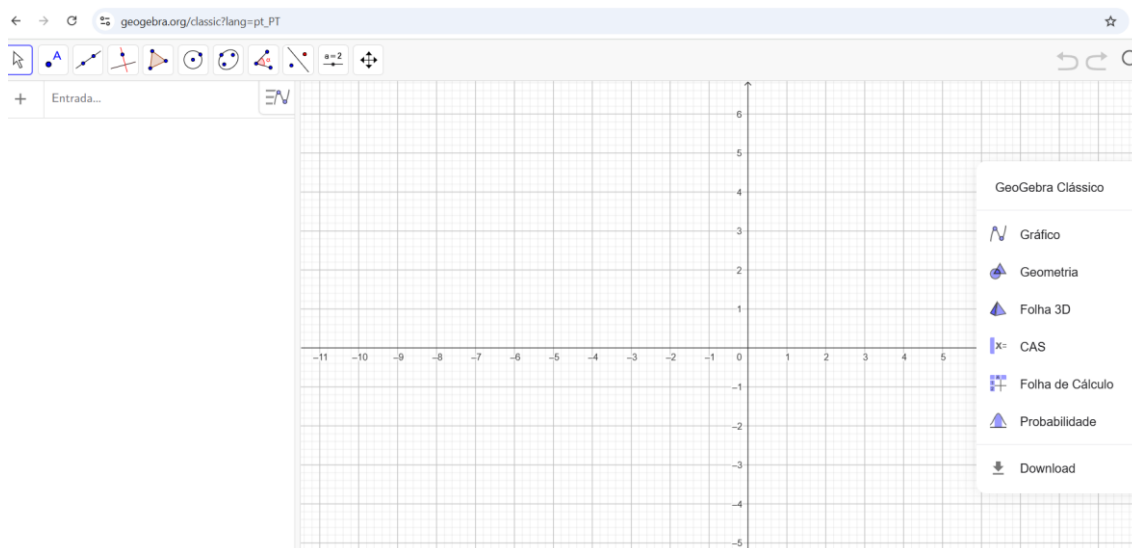
Figura 6: Segundo passo de como acessar o GeoGebra, clicar no link do GeoGebra Clássico.



Fonte: Autoria própria

Terceiro passo (veja a figura 7), após isso você se encontrara no software do GeoGebra podendo utilizá-lo da maneira que quiser.

Figura 7: Mostrando o software do GeoGebra.



Fonte: Autoria própria

2.5 Resolução da equação $x^2 - sx + p^2 = 0$ com GeoGebra

Seguindo o Exemplo 4.12 do livro (Muniz Neto, 2022), explicamos, por meio de exemplos propostos, como resolver a equação $x^2 - sx + p^2 = 0$ com o GeoGebra. Também é possível resolver usando régua e compasso. Antes, apresentamos duas propriedades da Geometria essenciais na resolução.

Propriedade 3 (Teorema do ângulo inscrito): Se AB e AC são cordas de um círculo de centro O , então a medida do ângulo inscrito $\widehat{BAC}$ é igual à metade da medida do ângulo central $\widehat{BOC}$ correspondente.

Demonstração: Veja Proposição 3.19 de (Muniz Neto, 2022). ■

Propriedade 4: Seja AGB um triângulo retângulo com $\widehat{AGB} = 90^\circ$. Se GH é altura com $H \in AB$, então $\overline{GH}^2 = \overline{AH} \cdot \overline{HB}$.

Demonstração: Veja Proposição 4.9 item (d) de (Muniz Neto, 2022). ■

Exemplo 1: $x^2 - 5x + 4 = 0$.

Resolução do Exemplo 1: resolvendo a equação $x^2 - 5x + 4 = 0$ utilizando o método de Geometria, seguindo o que está descrito no Exemplo 4.12 da referência (Muniz Neto, 2022). Neste caso, temos $s = 5$ e $p = 2$, ou seja $s = 5 > 4 = 2p$, satisfazendo as condições necessárias.

Utilizando o GeoGebra, ao invés de régua e compasso, primeiramente traçamos um segmento f de pontos $\overline{AB}$ de tamanho $s = 5$, em seguida fazemos uma circunferência c de diâmetro $\overline{AB}$ tal que o centro C está no ponto médio de $\overline{AB}$, e o raio da circunferência é $r = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{s}{2} = \frac{5}{2} = 2,5$. Após ter feito a circunferência, fazemos uma reta g paralela a f e a uma distância $p = 2$ de f , note que a circunferência está tocando a reta g em dois pontos G e G' , pois $p = 2 < 2,5 = \frac{s}{2}$. Logo, o triângulo AGB é retângulo onde o ângulo de $\widehat{AGB} = 90^\circ$ – garantido pela Propriedade 3. Sendo H o pé da perpendicular baixada de G no segmento $f = AB$, então GH é altura do triângulo AGB , com $\overline{AH} + \overline{HB} = s$ e, pela Propriedade 4, $\overline{AH} \cdot \overline{HB} = \overline{GH}^2 = p^2$. Portanto, pela Propriedade 2, $\overline{AH} = 1$ e $\overline{HB} = 4$ são as raízes da equação $x^2 - 5x + 4 = 0$.

Resolvendo a equação pela formula de Bhaskara, temos

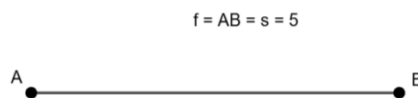
$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 + \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2} = \frac{5 + \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 + 3}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 - \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2} = \frac{5 - \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 - 3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Abaixo, descrevemos o passo a passo pelo GeoGebra para resolver $x^2 - 5x + 4 = 0$ por meio do procedimento geométrico descrito acima.

Passo 1 (veja Figura 8): Traçamos o segmento $f = AB$ de comprimento $s = 5$.

Figura 8: Passo exibindo segmento $f=AB$, feita no GeoGebra, para resolver uma equação do tipo $f(x) = x^2 - sx + p^2$.

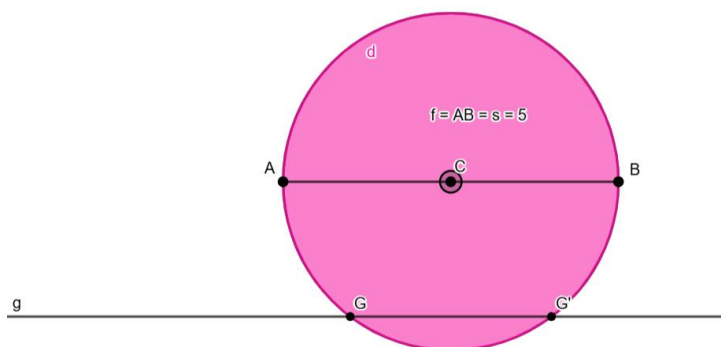


Fonte: Autoria própria.

Passo 2 (veja Figura 9): Traçamos a circunferência de centro C , localizado no ponto médio do segmento $f = AB$, e raio $r = \frac{s}{2} = 2,5$. Também traçamos a reta g paralela ao segmento f e à uma distância $p = 2$ de f . Encontramos os pontos de interseção G e G' entre a reta g e a circunferência.

Figura 9: passo 2 exibindo a circunferência de centro C , localizado no ponto médio do segmento $f = AB$, e raio $r = \frac{s}{2} = 2,5$ no GeoGebra, para resolver uma equação do tipo

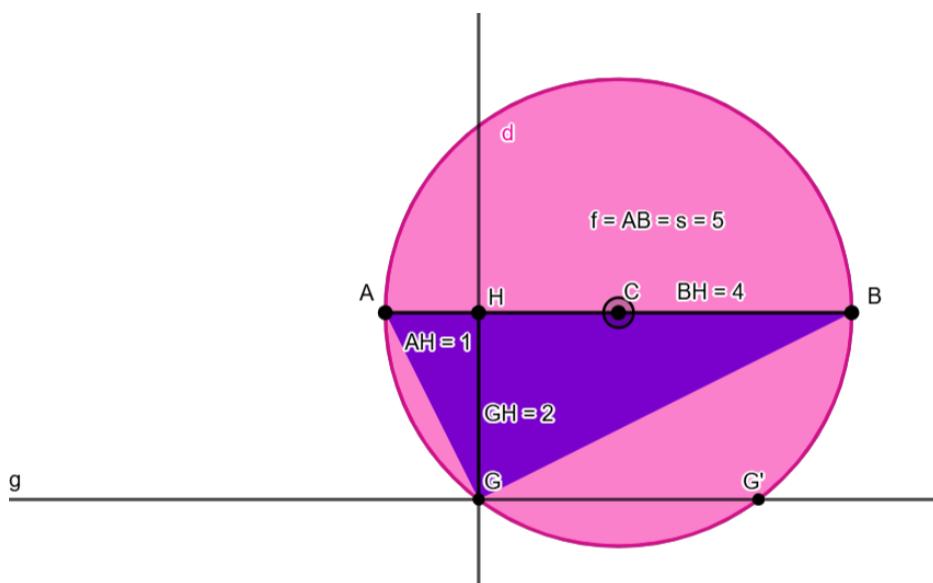
$$f(x) = x^2 - sx + p^2.$$



Fonte: autoria própria.

Passo 3(veja a figura 10): Definimos o triângulo retângulo AGB , com ângulo $\widehat{AGB} = 90^\circ$. Traçamos a reta perpendicular à reta g que passa no ponto G e intercepta a reta f no ponto H . O segmento GH é altura do triângulo AGB . Os valores $\overline{AH} = 1$ e $\overline{BH} = 4$ são raízes da equação $x^2 - 5x + 4 = 0$.

Figura 10: passo 3 exibindo o triângulo retângulo AGB , com a reta perpendicular à reta g que passa no ponto G e intercepta a reta f no ponto H com os valores dos segmentos e das raízes no GeoGebra, para resolver uma equação do tipo $f(x) = x^2 - sx + p^2$.



Fonte: autoria própria.

Exemplo 2: $x^2 - 16x + 49 = 0$.

Resolução do Exemplo 2: Resolvendo a equação $x^2 - 16x + 49 = 0$ faremos da mesma forma que abordado no Exemplo 1 logo temos $s = 16$ e $p = 7$, assim $s = 16 > 14 = 2p$ o que satisfaz as condições necessárias.

Tracemos um segmento f de pontos A e B de tamanho $s = 16$, logo em seguida façamos uma circunferência c de diâmetro 16 e que tenha seu centro C no ponto médio de segmento $\overline{AB}$, logo $C = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{s}{2} = \frac{16}{2} = 8$, agora façamos uma reta g paralela a o segmento f com a distancia de $p = 7$ do segmento f . Logo perceberemos que o círculo intercepta a reta g em dois pontos G e G' , pois $p = 7 < 8 = \frac{s}{2}$. Então o triangulo AGB e retângulo de ângulo $\widehat{AGB} = 90^\circ$, garantido pela propriedade 3. Com H sendo o pé da perpendicular baixada de G para o segmento $f = \overline{AB}$, logo a altura do triangulo AGB será dada pelo segmento $\overline{GH} = 7$, com $\overline{AH} + \overline{HB} = s$, e pela propriedade 4, $\overline{AH} * \overline{HB} = p^2$. Então, $\overline{AH} \approx 4,13$ e $\overline{BH} \approx 11,87$ serao as raízes aproximadas da equação $x^2 - 16x + 49 = 0$, pois pela Propriedade 2, que se x_1 e x_2 são as raízes de $x^2 - sx + p^2 = 0$, então $x_1 + x_2 = s$ e $x_1x_2 = p^2$.

Veja a resolução da equação $x^2 - 16x + 49 = 0$ pela formula de Bhaskara:

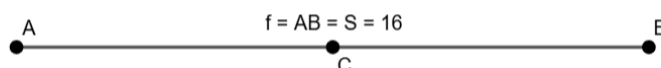
$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{16 + \sqrt{16^2 - 4 * 1 * 49}}{2} = \frac{16 + \sqrt{256 - 196}}{2} = \frac{16 + \sqrt{60}}{2} \approx 11,87$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{16 - \sqrt{16^2 - 4 * 1 * 49}}{2} = \frac{16 - \sqrt{256 - 196}}{2} = \frac{16 - \sqrt{60}}{2} \approx 4,13$$

Veja o passo a passo no GeoGebra.

Passo 1: Traçamos o segmento $f = AB$ de comprimento $s = 16$ com um ponto médio c .

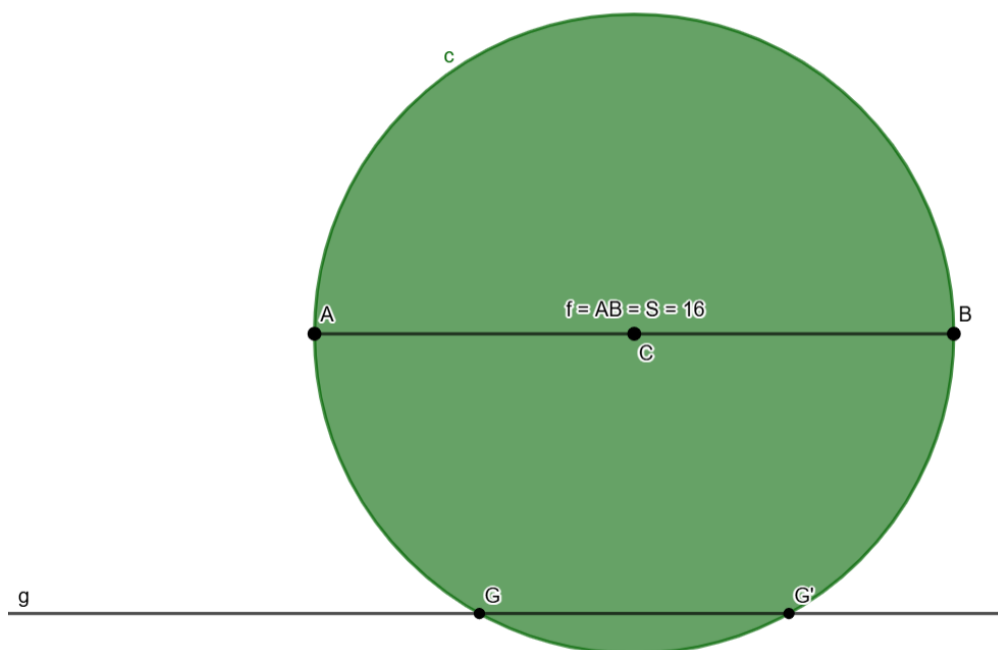
Figura 11: Passo 1 exibindo segmento $f=AB$, feita no GeoGebra, para resolver uma equação do tipo $f(x) = x^2 - sx + p^2$.



Fonte: autoria própria.

Passo 2: Traçamos a circunferência cujo centro é C , localizado no ponto médio do segmento $f = AB$, e raio $r = \frac{s}{2} = 8$. Também traçamos a reta g paralela ao segmento f e à uma distância $p = 7$ de f . Encontramos os pontos de interseção G e G' entre a reta g e a circunferência.

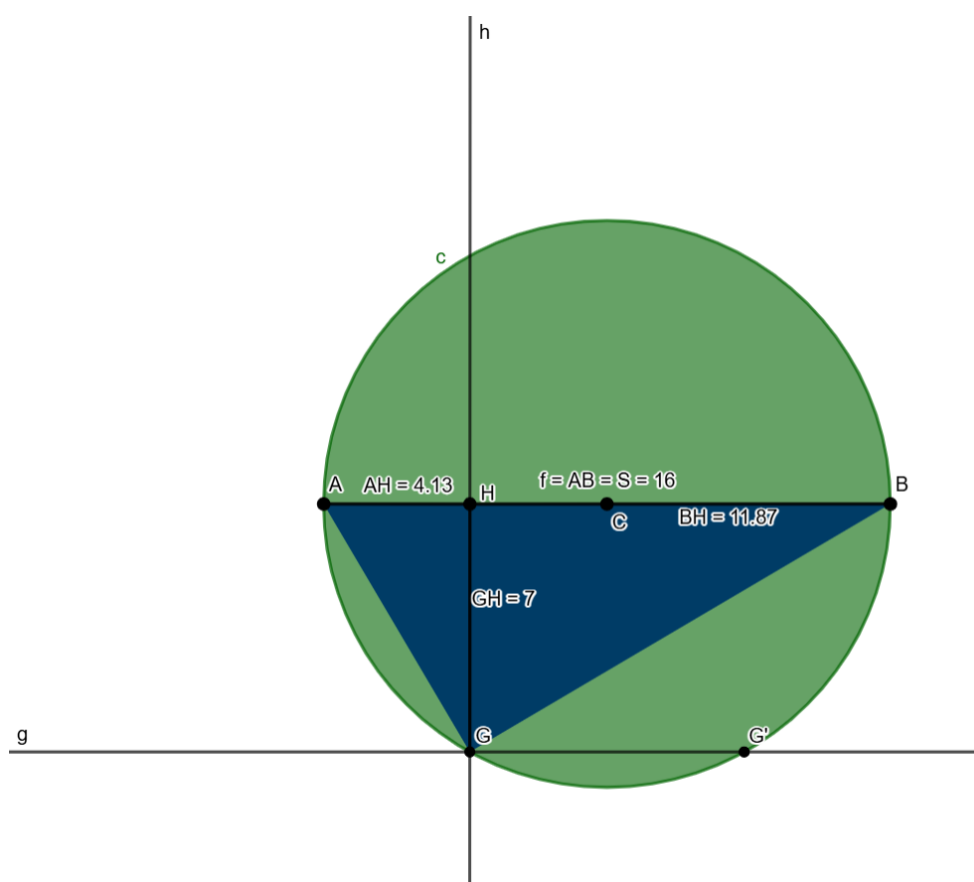
Figura 12: passo 2 exibindo a circunferência de centro C , localizado no ponto médio do segmento $f = AB$, e raio $r = \frac{s}{2} = 8$ no GeoGebra, para resolver uma equação do tipo $f(x) = x^2 - sx + p^2$.



Fonte: autoria própria.

Passo 3: Definimos o triângulo retângulo AGB , com ângulo $\widehat{AGB} = 90^\circ$. Traçamos uma reta h que seja perpendicular à reta g que passa no ponto G e intercepta a reta f no ponto H . O segmento GH é altura do triângulo AGB . Os valores do segmento $\overline{AH} = 4,13$ e $\overline{BH} = 11,87$ são raízes da equação $x^2 - 16x + 49 = 0$.

Figura 13: passo 3 exibindo o triângulo retângulo AGB , com a reta perpendicular à reta g que passa no ponto G e intercepta a reta f no ponto H com os valores dos segmentos e das raízes no GeoGebra.



Fonte: autoria própria.

Exemplo 3: $x^2 - 17x + 64 = 0$.

Resolução do Exemplo 3: Resolvendo equação $x^2 - 17x + 64 = 0$ utilizando o método de Geometria, seguindo o que está descrito no Exemplo 4.12 da referência (Muniz Neto, 2022). Neste caso, temos $s = 17$ e $p = 8$, ou seja $s = 17 > 16 = 2p$, satisfazendo as condições necessárias.

No GeoGebra, traçamos um segmento de reta f , com pontos A e B nas suas extremidades (veja Figura 1), de modo que $\overline{AB} = s = 17$. Em seguida, construímos um círculo c (de cor vermelha na Figura 1) tal que seu centro C está no ponto médio do segmento AB , e o raio do círculo c seja igual a $\frac{\overline{AB}}{2} = \frac{s}{2} = \frac{17}{2}$. Feito isso, traçamos uma reta g , paralela à reta f e à distância $p = 8$ de f . A reta g intercepta o círculo c em dois pontos G e G' , pois $p = 8 < 8,5 = \frac{s}{2}$. O triângulo AGB é retângulo com ângulo $\widehat{AGB} = 90^\circ$ – garantido pela Propriedade 3. Sendo H o pé da perpendicular baixada de G no segmento $f = AB$, então GH é altura do triângulo AGB , com $\overline{AH} + \overline{HB} = s$ e, pela Propriedade 4, $\overline{AH} \cdot \overline{HB} = \overline{GH}^2 = p^2$. Logo, $\overline{AH} \approx 5,62$ e $\overline{HB} \approx 11,37$ são as raízes aproximadas da equação $x^2 - 17x + 64 = 0$, pois sabemos, da Propriedade 2, que se x_1 e x_2 são as raízes de $x^2 - sx + p^2 = 0$, então $x_1 + x_2 = s$ e $x_1x_2 = p^2$.

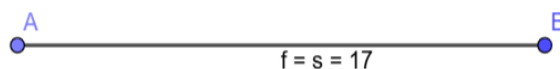
Resolvendo a equação $x^2 - 17x + 64 = 0$ pela fórmula de Bháskara, temos

$$x_1 = \frac{17 - \sqrt{33}}{2} \approx 5,62, \quad x_2 = \frac{17 + \sqrt{33}}{2} \approx 11,37.$$

Veja o passo a passo da resolução pelo GeoGebra.

Passo 1: Traçamos o segmento $f = AB$ de comprimento $s = 17$

Figura 14: Passo 1 exibindo segmento $f=AB$, feita no GeoGebra, para resolver uma equação do tipo $f(x) = x^2 - sx + p^2$.



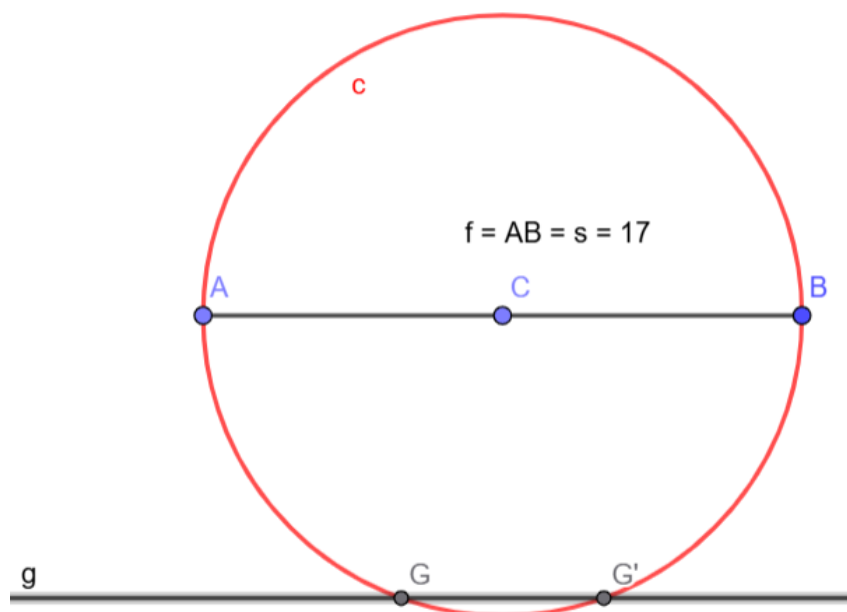
Fonte: autoria própria.

Passo 2: Traçamos a circunferência cujo centro é C , localizado no ponto médio do segmento $f = AB$, e raio $r = \frac{s}{2} = \frac{17}{2} = 8,5$. Também traçamos a reta g paralela ao

segmento f e à uma distância $p = 8$ de f . Encontramos os pontos de interseção G e G' entre a reta g e a circunferência.

Figura 15: passo 2 exibindo a circunferência de centro C , localizado no ponto médio do segmento $f = AB$, e raio $r = \frac{s}{2} = 8,5$ no GeoGebra, para resolver uma equação do tipo

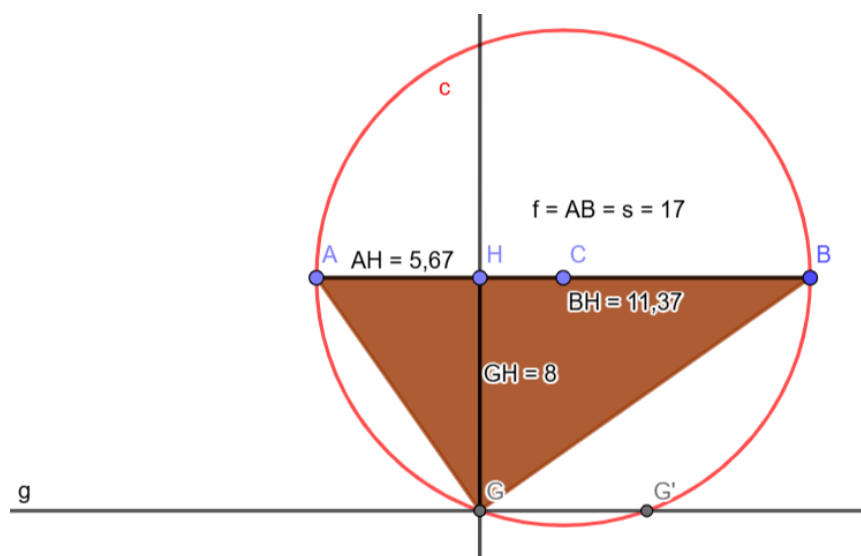
$$f(x) = x^2 - sx + p^2.$$



Fonte: autoria própria.

Passo 3: traçamos um triângulo retângulo AGB , com ângulo $\widehat{AGB} = 90^\circ$. Traçamos uma reta h que seja perpendicular à reta g que passa no ponto G e intercepta a reta f no ponto H . O segmento GH é altura do triângulo AGB . Os valores do segmento $\overline{AH} = 5,67$ e $\overline{BH} = 11,37$ são raízes da equação $x^2 - 17x + 64 = 0$.

Figura 16: passo 3 exibindo o triângulo retângulo AGB , com a reta perpendicular à reta g que passa no ponto G e intercepta a reta f no ponto H com os valores dos segmentos e das raízes no GeoGebra, para resolver uma equação do tipo $f(x) = x^2 - sx + p^2$.



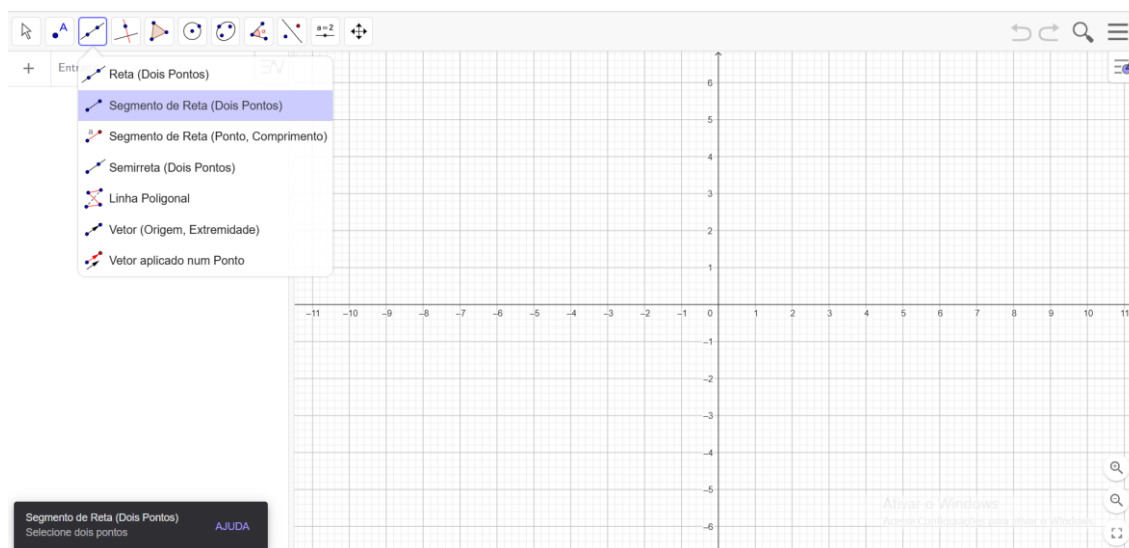
Fonte: autoria própria.

2.6 Explicando detalhes de como usar o GeoGebra na resolução de $x^2 - sx + p^2 = 0$

Para utilizar o GeoGebra para resolver e ilustrar a resolução de uma equação do tipo $x^2 - sx + p^2 = 0$, e necessário executar uma series de comando específicos no GeoGebra, utilizaremos o Exemplo 1 $x^2 - 5x + 4 = 0$ ($s = 5, p = 2$) para demonstrar como é feito a resolução de tal equação e como podemos ilustrar ela de forma simples.

Passo 1 (veja Figura 17): primeiramente abra o aplicativo e observar o plano cartesiano após isso com o cursor do mouse leve até a barra ferramenta do lado superior esquerdo da tela e clique em reta isso irá fazer aparecer uma nova barra de ferramenta onde irá clicar no ícone *Segmento (Dois pontos)*, veja a imagem a seguir.

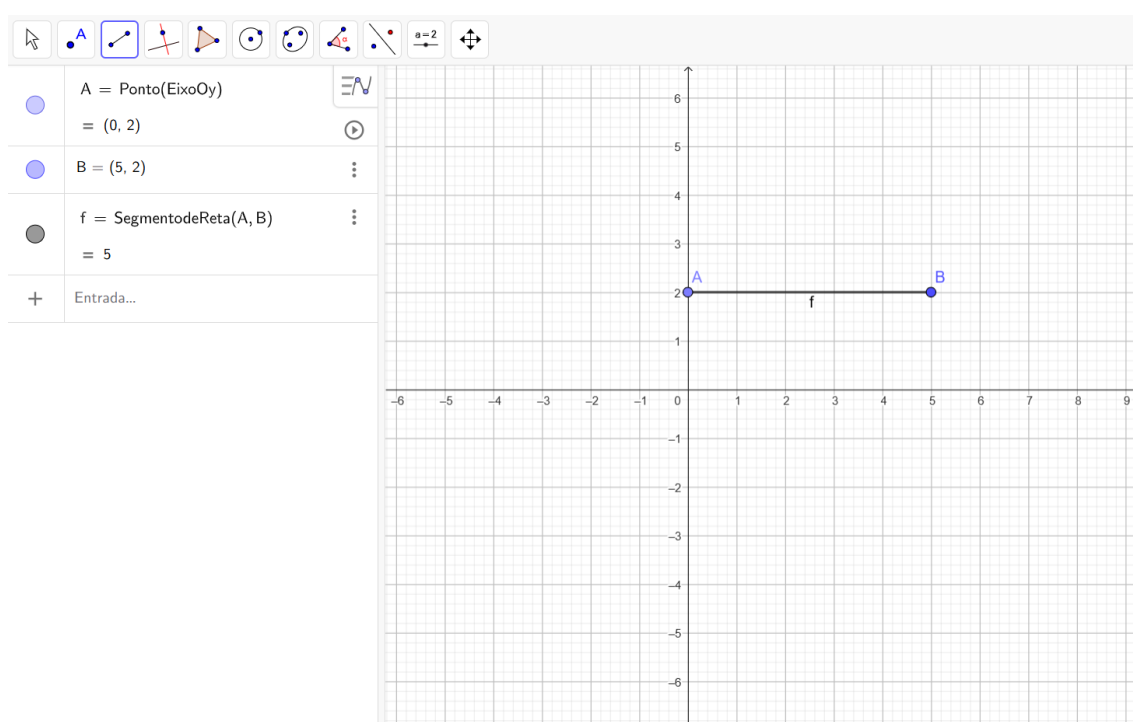
Figura 17: passo 1 do passo a passo de como utilizar o GeoGebra, criando um segmento AB



Fonte: autoria própria.

Passo 2 (veja Figura 18): Com a ferramenta tracemos um seguimento AB de tamanho $s = 5$ utilizando o eixo Y do plano cartesiano, que está na vertical, colocamos o ponto A nesse eixo com esse ponto tendo uma distancia $p = 2$ do eixo do X do plano cartesiano, que está na horizontal, após colocar o ponto A arrastamos o segmento com o mouse até a distância $s = 5$ tendo como referência para saber a distância o eixo do X , veja a figura abaixo.

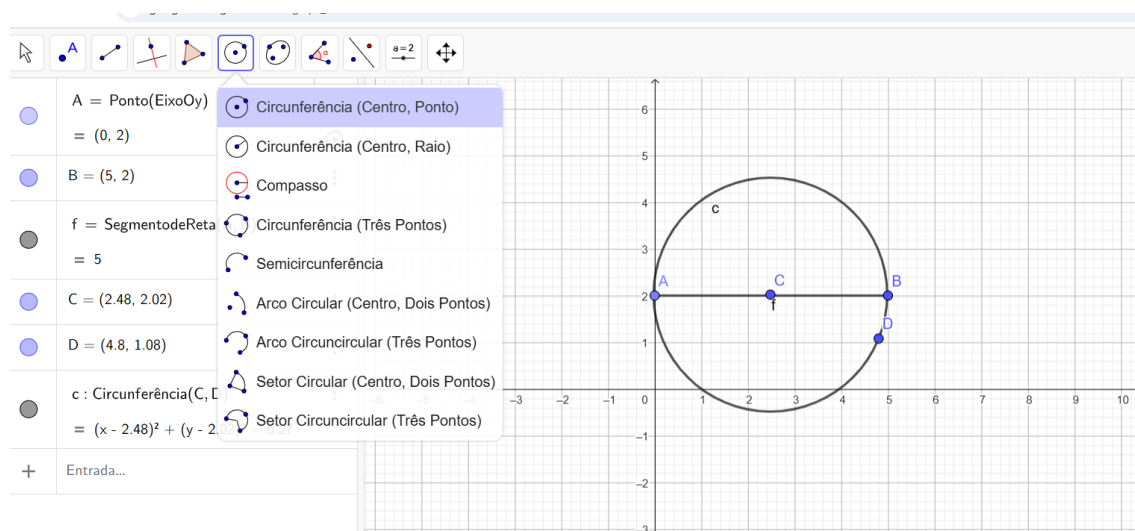
Figura 18: passo 2 do passo a passo de como utilizar o GeoGebra, terminando de criar um segmento de reta.



Fonte: autoria própria.

Passo 3 (veja Figura 19): nessa parte utilizaremos a ferramenta circunferência da barra de ferramenta circunferência do lado superior esquerdo da tela que ao clicar irá abrir uma nova barra de ferramentas a qual utilizaremos a ferramenta *Circunferência (Centro, Ponto)* para traçar um círculo que irá passa pelos pontos AB (nem sempre o círculo sairá perfeito caso isso aconteça você deve ir a ter a barra de ferramenta do lado superior esquerdo da tela e clicar na ferramenta mover isso lhe possibilitará mover os 2 pontos do círculo que foi feito que são responsáveis pelo cento e o diâmetro do círculo mova até que fique adequado para o tamanho do segmento AB), esse círculo ira interceptar o eixo do X em dois pontos, veja a imagem a seguir.

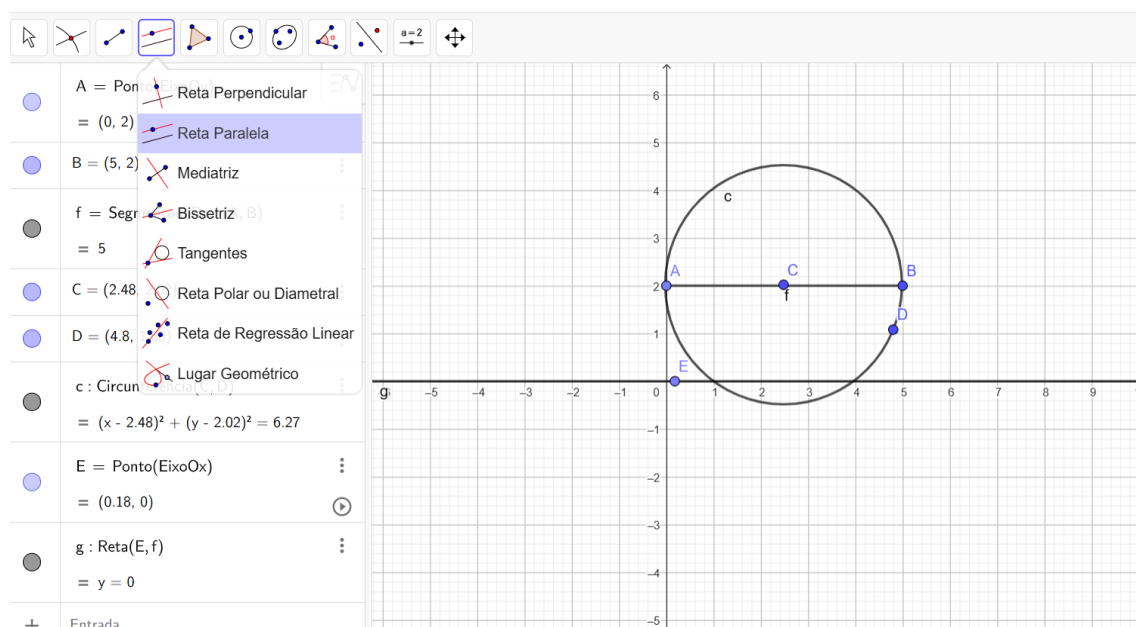
Figura 19: passo 3 do passo a passo de como utilizar o GeoGebra, criando uma circunferência de centro C .



Fonte: autoria própria.

Passo 4 (veja Figura 20): esse passo consiste em traçar uma reta paralela ao segmento AB cuja a distância seja a mesma de $p = 2$, no entanto não é necessário pois o eixo do X faz esse papel (caso queira ilustrar, então você irá até a barra de ferramentas clicar em reta perpendicular e clicar em reta paralela, feito isso você irá levar o mouse até o segmento AB e irá clicar nele isso fará aparecer uma reta paralela a esse segmento a qual você irá colocar a uma distância de $p = 2$ do segmento AB que será justamente a linha do eixo X , veja a Figura 20 a seguir.

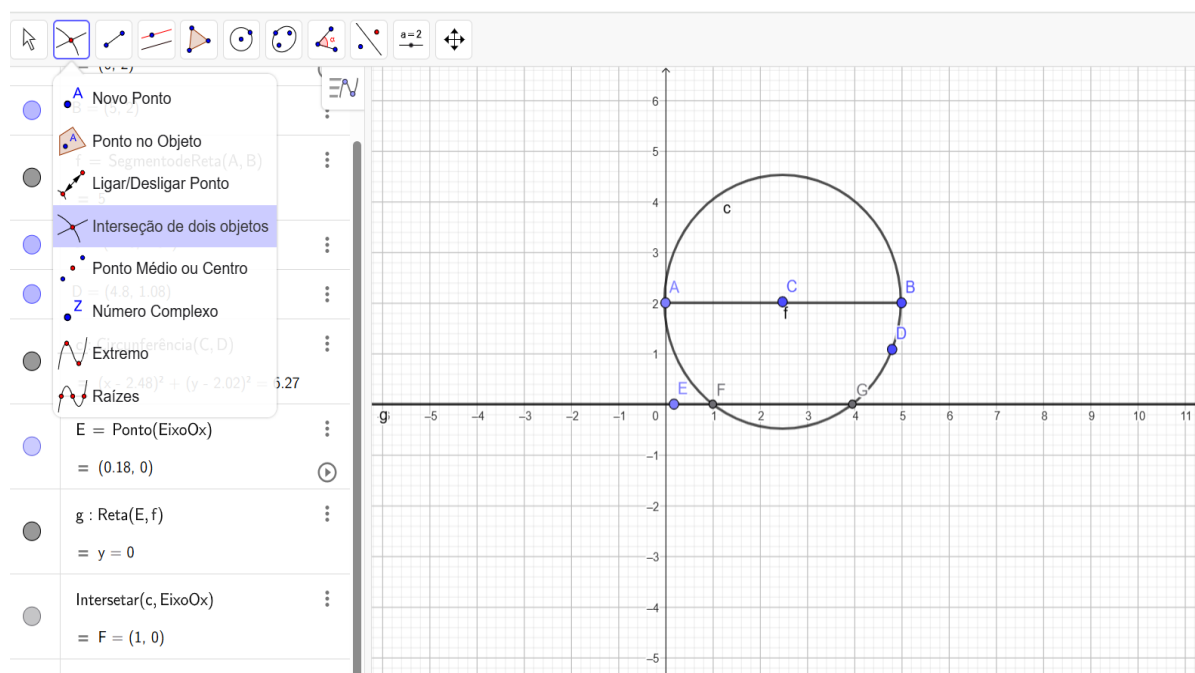
Figura 20: passo 4 do passo a passo de como utilizar o GeoGebra criando uma reta paralela ao segmento AB



Fonte: autoria própria.

Passo 5 (veja Figura 21): agora você terá que fazer os dois pontos F e G no GeoGebra para fazer esses pontos e necessário que você vá até a barra de ferramenta do lado superior esquerdo da tela e clique em intercessão de dois objetos logo em seguida arraste o cursor para a reta paralela ao segmento AB (seja ela o eixo ou uma reta feita, não importa o resultado é o mesmo) clique na reta e depois clique na circunferência isso irá marca os 2 pontos que serão o F e G automaticamente, veja a imagem a seguir.

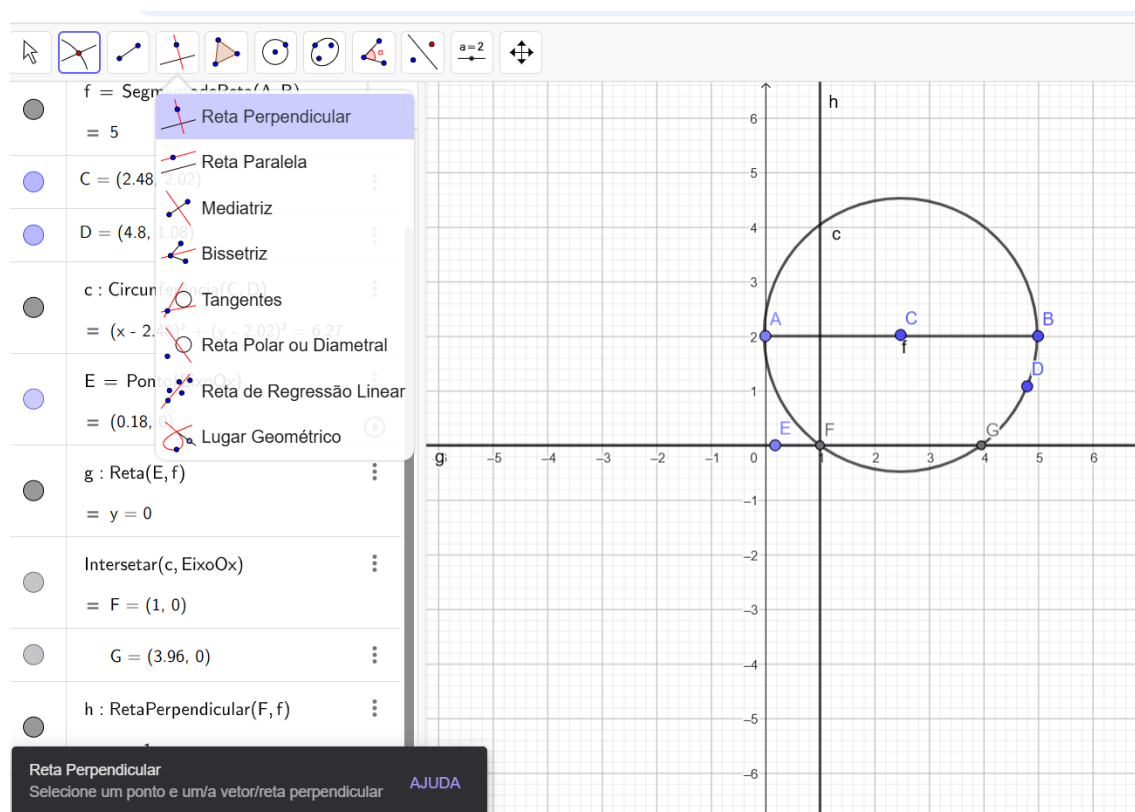
Figura 21: passo 5 do passo a passo de como utilizar o GeoGebra encontrando os dois pontos que fazer intercessão entre a reta E e a circunferência c



Fonte: autoria própria.

Passo 6 (veja Figura 22): faça uma reta h perpendicular à reta g de modo que essa reta h passe pelo ponto F , para isso vá na barra de ferramenta do lado superior esquerdo da tela e clique na opção de “reta perpendicular”. Feito isso, arraste o cursor até o segmento AB e clique nele, isso faz aparecer uma reta perpendicular ao segmento. Vá até a barra de ferramentas clique em mover depois irá clicar na reta h e irá arrasta ela para que fique sobre o ponto F , veja a Figura 22.

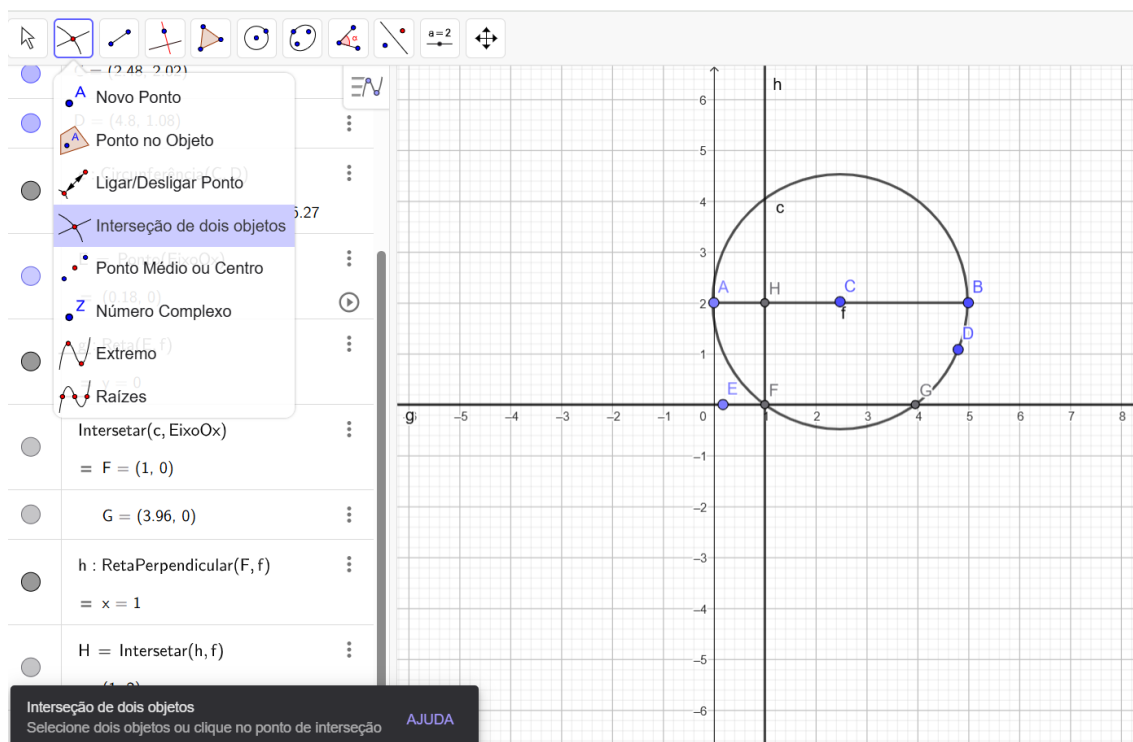
Figura 22: passo 6 do passo a passo de como utilizar o GeoGebra fazendo uma reta h perpendicular a reta E e que passa pelo ponto F .



Fonte: autoria própria.

Passo 7 (veja Figura 23): marque um ponto H na intercessão da reta h e do segmento AB , para isso utilizaremos a ferramenta intercessão de dois objetos apresentada no passo 5 clique na reta h e no segmento AB isso dará um novo ponto H , o segmento $FH = 2$, veja a imagem a seguir.

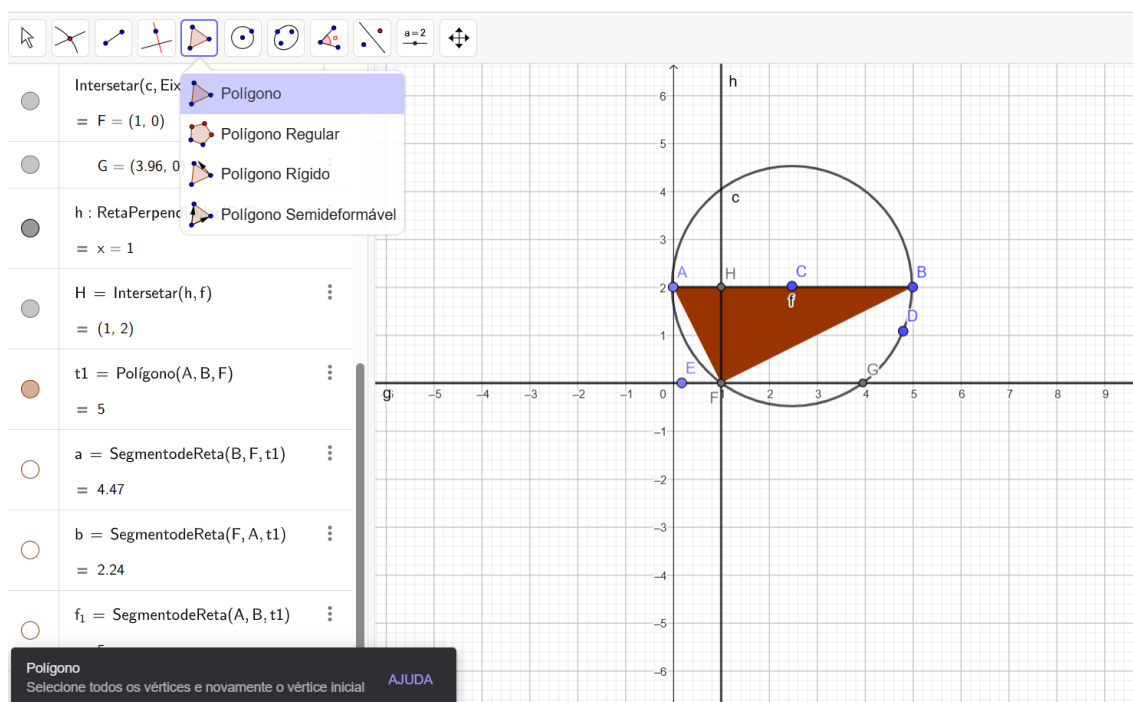
Figura 23: passo 7 do passo a passo de como utilizar o GeoGebra, onde foi marca um ponto H na intercessão da reta h e do segmento AB , onde gerou um novo ponto H , o segmento $FH = 2$.



Fonte: autoria própria.

Passo 8 (veja Figura 24): agora iremos traçar um triângulo AFB para isso vá até a barra de ferramenta do lado superior esquerdo da tela e clique em polígonos feito isso agora vá até o plano cartesiano e clique nos pontos A , B e F , isso fara um triângulo retângulo $\widehat{AFB}$ de ângulo $F = 90^\circ$, veja a figura 24.

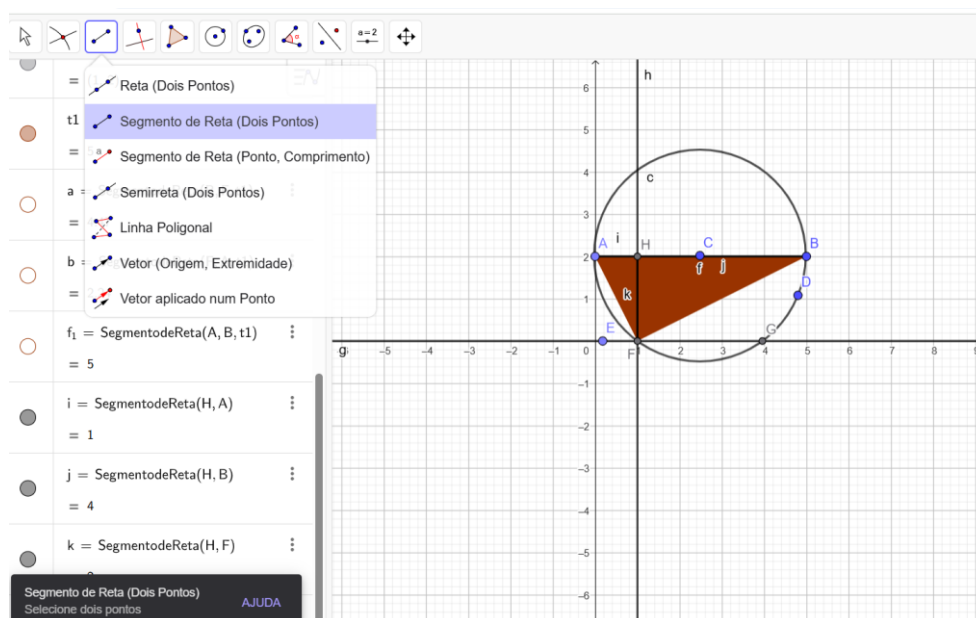
Figura 24: passo 8 do passo a passo de como utilizar o GeoGebra, traçando um triângulo retângulo $\widehat{AFB}$ de ângulo $F = 90^\circ$.



Fonte: autoria própria.

Passo 9 (veja Figura 25): agora veja que o triângulo está dividido em vários segmentos, agora e só acha os valores para os seguintes segmentos AH e HB para isso você irá utilizar a ferramenta apresentada no passo 1 segmentos de reta dois pontos e após clicar nele você irá clicar nos pontos dos segmentos de cada vez isso fara os segmentos aparecerem na imagem e seus valores aparecerem na barra de valores do geogebra que está localizada do lado esquerdo lo go abaixo da barra de ferramentas lá você verá os valores de cada segmento, veja as imagem a seguir.

Figura 25: passo 8 do passo a passo de como utilizar o GeoGebra, criando dois segmentos AH , BH que serão as raízes da equação



Fonte: autoria própria.

Barra de valores: veja que os valores do segmento AH e BH estão nela, esses valores serão as raízes da equação. (Veja Figura 26)

Figura 26: Valores dos segmentos $i = HA = 1$ e $j = HB = 4$ correspondentes as raízes da equação

	$i = \text{SegmentodeReta}(H, A)$ $= 1$	$\vdots$
	$j = \text{SegmentodeReta}(H, B)$ $= 4$	$\vdots$
	$k = \text{SegmentodeReta}(H, F)$ $= 2$	$\vdots$

Fonte: autoria própria.

3 CONCLUSÃO

Neste Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), foi abordado as equações de segundo grau com observações sobre sua história desde os babilônicos até os tempos atuais, tendo como base livros, artigos e trabalhos acadêmicos. O foco deste TCC foi a resolução de um tipo de equações polinomiais de segundo grau pela utilização de formas geométricas, especificamente os círculos e triângulos.

Foi demonstrando como esse método é utilizado em algumas equações do segundo grau e ensinado o passo a passo da resolução de forma textual e com figuras com o auxílio do GeoGebra

O objetivo principal foi trazer uma nova abordagem sobre como resolver uma equação do segundo grau utilizando a geometria. Esta abordagem espera trazer novas perspectivas para alunos e professores tanto do ensino médio, quanto do ensino superior, para que eles possam enriquecer seus métodos de ensino e aprendizado, exibindo que não existe apenas uma forma de resolver determinados tipos de equações do segundo grau, possibilitando assim diversificar suas abordagens pessoais e lembrando que é sempre bom inovar e experimentar novos métodos de ensino.

REFERÊNCIAS

- CASTRO, J.M, **Utilizando a linguagem de programação Scratch para fortalecer competências relacionadas à função quadrática no ensino médio**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Departamento de Matemática, Recife, BR-PE, 2024.
Disponível em: <https://profmatsbm.org.br/dissertacoes/?aluno=Jadson+Moura+de+Castro&titulo=&polo=UFRPE>
Acesso em: 20 Ago. 2025.
- COSTA, A.C.C.S, **UM ESTUDO SOBRE O ENSINO DE EQUAÇÕES ALGÉBRICAS NO ENSINO MÉDIO**. 2023. 69 f. TCC (Graduação) - Curso de Matemática, Universidade Federal do Norte do Tocantins, Araguaína, 2015. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11612/5046>. Acesso em : 13. Ago. 2025.
- COUTINHO, R.P, **Uma aplicação da resolução de problemas no ensino das equações do 2º grau**. 2016. 97 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016. Disponível em: <https://www.bdt.d.uerj.br:8443/handle/1/4823>. Acesso em: 13. Ago. 2025.
- EUCLIDES. **Os Elementos**. Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009. 595 p.
- GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas. 2002. 42 p.
- IEZZI, G. **Fundamentos de matemática elementar, 6: complexos, polinômios, equações** 8. ed. São Paulo: Atual. 2013. 250 p.
- IEZZI, G, **Fundamentos de matemática elementar, 1: conjuntos, funções**. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013. 410 p.
- MORAES, A, **AS DIFERENTES FORMAS DE RESOLVER EQUAÇÕES POLINOMIAIS DO 2º GRAU**. TCC (Pós-graduação de Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT) - Universidade Federal do Pará, Bragança-PA, 2023. Disponível em: <https://profmatsbm.org.br/dissertacoes/?aluno=ALVARO+GALVAO+MORAES&titulo=&polo=UFPA>
. Acesso em: 20. Ago. 2025
- NETO, A.C.M, **GEOMETRIA**, 2ª edição, Rio de Janeiro, SBM – Sociedade Brasileira de Matemática, 2022. ISBN 978-85-8337-185-4.
- NETO, J, **Uma análise da história das equações do 2º grau nos livros didáticos**. 2011. 44f. TCC (Licenciatura em Matemática a Distância) – Universidade Federal da Paraíba, Itabaiana, 2011. Disponível em: <https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/123456789/11>. Acesso em: 13. Ago. 2025

PASTOR, A. Equações do 2º grau: completando quadrados. **Revista do professor de matemática**, São Paulo, v. 1, n. 6, p. 36-38, 1985.

PEDROSO, H. Uma breve história da equação do 2º grau. **REVISTA ELETRÔNICA DE MATEMÁTICA**, v. 10, p. 1- 13, 2010. Disponível em:

<https://www.ibilce.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/labmat/uma-breve-historia-da-equacao-do-2-grau.pdf> Acesso em: 13. Ago. 2025

PINHEIRO, J. M.; SANTOS, S. A. **Educação Matemática: pesquisa, tendências e propostas**. 1. ed. Porto Alegre: Canto- Cultura e Arte. 2017. 75 p.

PINHEIRO, J.B.S, **Métodos de resolução para as equações quadráticas**. 2024. 67 f.

Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Rede - Matemática em Rede Nacional/CCET) - Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2024. Disponível em:

<https://tedebc.ufma.br/jspui/handle/tede/5662>. Acesso em: 13. Ago. 2025

SOUZA, D.S, **Resolução de problemas envolvendo equações polinomiais de segundo grau: possibilidades e dificuldades**. 2023. 54 f. Monografia (Graduação)

Universidade Federal da Paraíba - Rio Tinto, 2023. Disponível em:

<https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/123456789/27669>. Acesso em: 13. Ago. 2025