

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS APLICADAS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Thallyta Vitória Felix Pereira

A visualização da natureza através da Geometria Fractal:
Explorando a Beleza Infinita na Educação Matemática

Rio Tinto – PB
2024

Thallyta Vitória Felix Pereira

A visualização da natureza através da Geometria Fractal:
Explorando a Beleza Infinita na Educação Matemática

Trabalho Monográfico apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador(a): Prof. Dr. Carlos Alberto Gomes de Almeida.

Rio Tinto – PB
2024

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

P436v Pereira, Thallyta Vitória Felix.

A visualização da natureza através da geometria fractal : explorando a beleza infinita na educação matemática / Thallyta Vitória Felix Pereira. - Rio Tinto, 2024.
47 f. : il.

Orientação: Carlos Alberto Gomes de Almeida.
TCC (Graduação) - UFPB/CCAÉ.

1. Geometria fractal. 2. Natureza. 3. Caos. 4.
Proposta didática. I. Almeida, Carlos Alberto Gomes de.
II. Título.

UFPB/CCAÉ

CDU 373.5:51

Thallyta Vitória Felix Pereira

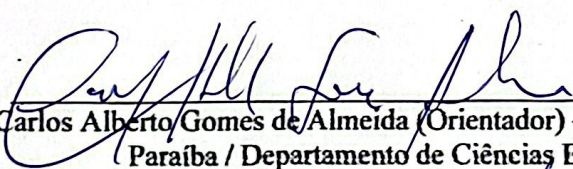
**A visualização da natureza através da Geometria Fractal:
Explorando a Beleza Infinita na Educação Matemática**

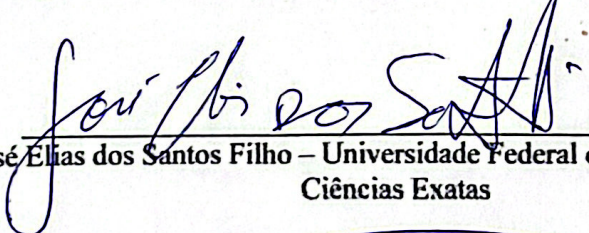
Trabalho Monográfico apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática
como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

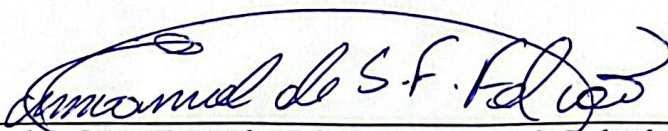
Orientador(a): Prof. Dr. Carlos Alberto Gomes de Almeida.

Aprovado em: 29 / 04 / 2025

BANCA EXAMINADORA


Prof. Dr. Carlos Alberto Gomes de Almeida (Orientador) – Universidade Federal da
Paraíba / Departamento de Ciências Exatas


Prof. Dr. José Elias dos Santos Filho – Universidade Federal da Paraíba / Departamento de
Ciências Exatas


Prof. Dr. Emmanuel de Sousa Fernandes Falcão – Universidade Federal da Paraíba /
Departamento de Ciências Exatas

Aos meus pais,
por todo amor, apoio e incentivo
incondicional ao longo da minha
trajetória.
Esta conquista também é de vocês.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a **Deus**, por ter me concedido forças ao longo desta longa jornada. Sua presença me sustentou nos momentos de dificuldade e me impediu de desistir, mesmo diante dos maiores desafios. Tudo o que conquistei até aqui é, antes de tudo, graças a Ele.

Aos **meus pais**, vai o meu mais sincero agradecimento. Vocês foram minha rocha, minha base e minha inspiração para seguir em frente e vencer. Obrigada por nunca desacreditarem de mim e por apoiarem, com amor e confiança, cada uma das minhas decisões.

Ao meu **marido**, meu companheiro de tantos anos, que esteve ao meu lado em cada etapa desta caminhada. Crescemos e aprendemos juntos, e, em todos os momentos, você me mostrou que eu era capaz, mesmo quando eu mesma duvidava. Obrigada por me fortalecer nas horas difíceis, por acreditar em mim e por nunca me deixar desistir. Esta conquista também é nossa.

Ao meu professor e **orientador**, Carlos, minha profunda gratidão por toda paciência, dedicação e incentivo ao longo da minha trajetória acadêmica. O senhor foi mais que um orientador, foi um amigo, um excelente professor, um verdadeiro incentivador e uma inspiração constante. Muito obrigada por todo o apoio, pela escuta atenta e pelas orientações que tanto contribuíram para a realização deste trabalho.

A todos os meus **professores** da Universidade Federal da Paraíba, minha mais sincera gratidão. Cada um de vocês teve um papel fundamental na minha formação, não apenas acadêmica, mas também pessoal. Mestres e doutores da Matemática, verdadeiros exemplos de vida, profissionais íntegros, humanos e generosos, que vão muito além da sala de aula. Levo comigo tudo o que aprendi e guardo cada um de vocês com carinho e admiração em meu coração.

Aos meus **colegas** que estiveram comigo durante nossa formação, contribuindo com estudos, dividindo desafios, apoiando em avaliações, pesquisas e trabalhos, meu sincero agradecimento. E, em especial, àquele que hoje não está mais entre nós, amigo querido, esteja em paz. Obrigada por ter feito parte da minha história.

“Na medida em que as leis da matemática se referem à realidade, elas não são certas, e, na medida em que são certas, elas não se referem à realidade”.

Albert Einstein

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo fornecer aos docentes, do Ensino Médio, métodos alternativos que possibilitem um ensino dinâmico em sala de aula, fundamentado na Geometria Fractal com ênfase na visualização dos recursos da natureza. Para tanto, a pesquisa está classificada como de natureza qualitativa, objetivo exploratório e uso de procedimentos bibliográficos, revisando 27 obras de 26 autores, datadas de 1982 a 2025. Entre eles: Freire Rabay (2013); Mandelbrot (1982); Barbosa (2005); entre outros, com o intuito de demonstrar que o ensino da Geometria Fractal é relevante para despertar nos alunos a curiosidade e o interesse pela Ciência e pelo mundo em que vivem. É apresentada uma proposta didática, como produto da pesquisa. Por meio desta investigação, verificou-se que é possível uma abordagem eficiente para o ensino da Geometria Fractal por meio de uma revisão da literatura especializada, explorando as contribuições dos grandes teóricos, bem como em observar a natureza para identificar e sistematizar padrões geométricos aparentemente em caos. Ademais, o estudo sugere que futuras pesquisas ampliem o escopo para incluir alunos do Ensino Fundamental e aprofundem a revisão bibliográfica em disciplinas como História da Matemática, além de promover cursos de capacitação para professores que carecem de repertório para trabalhar com essa abordagem.

Palavras-chave: Geometria Fractal; Natureza; Caos; Proposta Didática.

ABSTRACT

This study aims to provide high school teachers with alternative methods that enable dynamic classroom instruction, based on Fractal Geometry with an emphasis on the visualization of nature's resources. To this end, the research is classified as qualitative, exploratory in nature, and employs bibliographic procedures, reviewing 27 works by 26 authors, dated from 1982 to 2025. Among these are Freire Rabay (2013), Mandelbrot (1982), and Barbosa (2005), among others, with the purpose of demonstrating that the teaching of Fractal Geometry is relevant to arousing students' curiosity and interest in Science and the world in which they live. A didactic proposal is presented as a product of the research. Through this investigation, it was found that an efficient approach to teaching Fractal Geometry can be achieved through a review of the specialized literature—exploring the contributions of major theorists—and by observing nature to identify and systematize seemingly chaotic geometric patterns. Moreover, the study suggests that future research expand the scope to include elementary school students and deepen the bibliographic review in disciplines such as the History of Mathematics, in addition to promoting teacher training courses for educators who lack the repertoire to work with this approach.

Keywords: Fractal Geometry; Nature; Chaos; Didactic Proposal.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Fractal na natureza	19
Figura 2 - Padrão de autossemelhança.....	19
Figura 3 – Couve-Flor Romanesca	20
Figura 4 - Padrão fractal da Couve-Flor Romanesca	21
Figura 5 - Dr. Benoit Mandelbrot, o “pai dos fractais”	22
Figura 6 - Conjunto de Julia	23
Figura 7 - Prof. Wacław Franciszek Sierpinski	25
Figura 8 - Triângulo de Sierpinski	26
Figura 9 - Passo 1: Triângulo de Sierpinski	26
Figura 10 - Passo 2: Criando o Triângulo de Sierpinski	27
Figura 11 - Passo 3: Criando o Triângulo de Sierpinski	27
Figura 12 - Passo 4: Criando o Triângulo de Sierpinski	28
Figura 13 - Giuseppe Peano	29
Figura 14 - David Hilbert	30
Figura 15 - Georg Cantor	30
Figura 16 - Gaston Julia	31
Figura 17 - Niels Koch	32
Figura 18 – M. C. Escher	33
Figura 19 - O Limite do Círculo I, 1958	33
Figura 20 - Desenvolvimento II, 1939	34
Figura 21 - Circle Limit III, 1959	34
Figura 22 - Duplo Planetóide, 1949	34
Figura 23 – O efeito borboleta	36
Figura 24 – Resposta do aluno 1	38
Figura 25 – Resposta do aluno 2	38
Figura 26 – Resposta do aluno 3	38
Figura 27 – Dimensão Euclidiana e dimensão Fractal	41
Figura 28 – Construção de um Cartão Fractal	42

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	12
1.1 DELIMITAÇÃO DO TEMA E PROBLEMA DE PESQUISA	12
1.2 JUSTIFICATIVA	14
1.3 OBJETIVOS	15
1.3.1 Objetivo Geral	15
1.3.2 Objetivos Específicos	15
2. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	16
2.1 APRESENTAÇÃO DO CONTEXTO DA PESQUISA	16
2.2 CLASSIFICAÇÃO DA PESQUISA	16
2.3 ETAPAS E INSTRUMENTOS DA PESQUISA	17
3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA, ANÁLISES E DISCUSSÕES	19
3.1 PADRÕES NA NATUREZA	19
3.1.1 Os fractais na natureza	19
3.1.2 Benoit B. Mandelbrot	22
3.2 INTRODUÇÃO À GEOMETRIA FRACTAL	24
3.2.1 História da Geometria Fractal	24
3.2.2 Importantes nomes da Geometria Fractal	25
3.2.2.1 Waclaw Franciszek Sierpinski	25
3.2.2.2 Giuseppe Peano	29
3.2.2.3 David Hilbert	30
3.2.2.4 George Ferdinand Ludwig Philipp Cantor	30
3.2.2.5 Gaston Maurice Julia	31
3.2.2.6 Niels Fabian Helge von Koch	32
3.2.2.7 Mauritus Cornellis Escher	33
3.3 TEORIA DO CAOS	35
3.4 PROPOSTA DIDÁTICA	37
3.4.1 Explorando Fractais	39
3.4.2 Cartão Fractal	40
4 CONCLUSÃO	43
REFERÊNCIAS	45

1 INTRODUÇÃO

1.1 DELIMITAÇÃO DO TEMA E PROBLEMA DE PESQUISA

Este trabalho trata-se uma pesquisa bibliográfica sobre a Geometria Fractal, para que os docentes consigam ter uma base das formas possíveis de se aplicar a Geometria Fractal em sala de aula. Dentro desse contexto, minha pesquisa insere-se na área de Educação Matemática, com ênfase na subárea de Geometria Fractal. O tema está voltado para aulas no Ensino Médio e o objeto de conhecimento matemático referente a este tema/assunto são Fractais que estão localizados na unidade temática Geometria da Base Nacional Comum Curricular - BNCC (Brasil¹, 2018) e que também, costumeiramente, é estudado no componente curricular Geometria Euclidiana de Cursos de Licenciaturas em Matemática, a exemplo do Curso da Universidade Federal da Paraíba², Campus IV.

Segundo o Dicionário Aurélio, um fractal é definido como uma forma geométrica complexa e fragmentada, capaz de ser subdividida indefinidamente em elementos que se assemelham a cópias reduzidas do todo. Essa característica permite a visualização da natureza sob uma nova perspectiva, revelando padrões e estruturas que transcendem os conceitos tradicionais. A presente investigação pretende ampliar os estudos resumidos disponíveis sobre o tema e, sob o título “A visualização da natureza através da Geometria Fractal: Explorando a Beleza Infinita na Educação Matemática”, busca quebrar a barreira entre a Matemática e o mundo natural. Essa abordagem aproxima os alunos da Matemática, e de outras Ciências, enriquecendo a prática pedagógica ao proporcionar uma compreensão intuitiva dos fenômenos naturais por meio de conceitos geométricos práticos.

Sendo assim, com essa pesquisa pretende-se sintetizar um saber científico sobre a Geometria Fractal, que possibilite aos professores do Ensino Básico, ampliar seu repertório de diferentes métodos de como aproximar os alunos da Matemática por meio da investigação dos Fractais nos fenômenos naturais.

Diante disso, utilizei de Dissertações de Mestrado para me auxiliarem na pesquisa, foram elas: Ferreira Filho (2015), Freire Rabay (2013), Carvalho (2005), Oliveira Corrêa (2014) e o tão importante livro do criador da Geometria Fractal, Mandelbrot (1982). A partir das leituras, pode-se perceber as diferentes maneiras de como explorar a Geometria Fractal na

¹ Disponível em Brasil (2018, p. 533) e em Brasil (2018, p. 545).

² Cujo Projeto Político Pedagógico – PPP está disponível em <https://www.ccae.ufpb.br/licmat/contents/documentos/ppp-mat-ln-oficial-definitivo.doc>. Acesso: 12/04/2025.

natureza e aplicar no ensino, para que ocorra a aproximação dos alunos com o mundo ao seu redor. Dessa forma, gostaria de entender, compreender e explorar quais padrões na natureza são possíveis de se trazer para o ensino em Matemática.

Em primeiro plano, conforme ensina Santos e Almeida (2022) a Matemática ainda é um assunto complexo e distante para os nossos alunos, e isso acaba afetando a capacidade criativa e crítica deles, que acabam por ficarem limitados por não conseguirem trazer algumas assimilações dela para a realidade em que vivem, pois, os discentes estão acostumados com uma Matemática rígida, na qual estudam, na Geometria, conceitos como por exemplo: ponto, reta, triângulo, quadrado, hexaedro. Ou seja, conceitos estanques. Entretanto, será mesmo que a Matemática se limita a apenas isso? A Geometria não existe fora desses padrões?

Como foi dito por Benoit Mandelbrot (1982, p. 6), “[...] as nuvens não são esferas, as montanhas não são cones, as linhas costeiras não são círculos e a casca de uma árvore não é suave, nem os relâmpagos se propagam em linha reta”. Dessa forma, enfrentamos essa barreira nas salas de aula, pois, antes de ensinarmos a Matemática os alunos costumam demonstrar muita dificuldade de aprendê-la por simplesmente não gostarem, e se sentirem “presos” a conteúdos tão limitados, conforme já citado por Santos e Almeida (2022).

Logo, trazer um assunto tão amplo, complexo, que possibilita a criatividade, curiosidade e investigação dos alunos no Ensino Médio, mostraria a eles o quanto a Matemática é dinâmica e não acabada ou fixa. A Geometria Fractal é algo que fascina por sua beleza e “desordem”, afinal será que é possível haver ordem no Caos? Os fenômenos e padrões naturais do nosso mundo nos mostram que sim.

À vista disso, procuro responder ao seguinte questionamento: “De que maneira a introdução da Geometria Fractal no ensino de Matemática pode enriquecer a aprendizagem dos alunos, proporcionando-lhes uma compreensão mais profunda e contextualizada dos padrões naturais? Matemática”

1.2 JUSTIFICATIVA

Em primeiro plano, como aluna e futura docente, sempre gostei das formas, figuras, e universo, e em um determinado momento me questionei se não haveria nada que explicasse os padrões existentes e visíveis na natureza, e a partir disso eu conheci os Fractais. De forma que surgiu a necessidade de pesquisar mais sobre o assunto, e ao longo dos semestres na minha graduação, ao analisar esses padrões, fui totalmente envolvida pela Geometria Fractal. Ao pesquisar mais sobre o tema pude constatar a real e desafiadora tarefa de conectar a Matemática aos padrões naturais do nosso mundo por parte de nós, seres humanos.

Desse modo, essa pesquisa bibliográfica pretende explorar novos horizontes de como apresentar a Matemática para os discentes. Visa-se aproximar os alunos da Ciência, de forma que desperte curiosidade suficiente para que eles sintam vontade de aprender mais sobre a Matemática e o próprio mundo em que vivem. Estimulando percepções empíricas fora do tradicional, para enxergar a beleza do natural e para que os façam pensar em uma geometria viva, que pode estar passando despercebida por seus olhos. Sendo assim, seria possível mostrar que há mais do que os conceitos básicos apresentados aos alunos na escola, como foi dito por George Cantor (*apud* Wrighter, 2019) “[...] a essência da Matemática é a liberdade”, pois a complexidade inerente à Matemática muitas vezes distancia os alunos, impedindo a plena compreensão e apreciação dessa disciplina fundamental.

Assim, essa pesquisa bibliográfica também espera que, aos poucos, consigamos tornar a Geometria um assunto intrigante e contagiante para os alunos, pois após todo avanço tecnológico, muitos alunos³ têm perdido o interesse na investigação do mundo exterior e estão “presos” a toda facilidade que o mundo moderno nos permite, essa barreira tem surgido para além da Matemática.

Com isso, se justifica o convite de alunos do Ensino Médio, para participarem da pesquisa, já que eles possuem conhecimentos prévios matemáticos para compreender o assunto. Essa assertiva ajuda a apresentar mais sobre a história, a estrutura, as características e as propriedades dos Fractais ao público participante para poder extrair os dados que responderão à questão problematizadora da pesquisa.

Uma vez que se fale de fractais, justifica-se que essa pesquisa tenha como base o livro do criador da Geometria Fractal Benoit B. Mandelbrot que foi um matemático de origem polonesa, com nacionalidade francesa e americana. O livro é: **The fractal geometry of nature**.

³ Conforme instrui os estudos de Santos e Almeida (2022).

Em seu livro, Benoit B. Mandelbrot apresentou conceitos totalmente inovadores relacionados à repetição de padrões em diferentes escalas, revelando uma abordagem Matemática para entender formas naturais aparentemente caóticas em nosso mundo. Dessa forma, o livro teve um impacto significativo nas ciências e influenciou diversas áreas, como por exemplo a Matemática, Física, Biologia e a Arte, o que nos mostra o quão importante é esse tema para mais pesquisas, pois fractais é um assunto ainda incompreendido e que passa despercebido por nós, docentes, apesar de sua importância.

Diante disso, após o livro de Benoit B. Mandelbrot, surge uma explicação para os padrões e formas presentes no nosso mundo, tratando a Matemática como um modelo para o nosso universo. De modo que alguns dos questionamentos e curiosidades que havia sobre o assunto foram enfim respondidas, e isso permitiu investigações ainda mais profundas em diversas áreas, como foi dito anteriormente, o que nos leva a novas descobertas, pois a Matemática é livre e viva, não exata e não fixa, existe uma sequência e ordem dentro da desorganização, mesmo que aos nossos olhos pareça tudo um caos.

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 Objetivo Geral

Fornecer aos docentes do Ensino Médio, métodos que os possibilitem um ensino criativo e dinâmico em sala de aula, a partir da Geometria Fractal, com uma visualização focada aos recursos naturais.

1.3.2 Objetivos Específicos

- Mostrar por meio da história dos Fractais a ligação que a Matemática possui com a natureza e seus padrões;
- Apresentar a teoria do Caos nos fenômenos naturais, de maneira autoexplicativa;
- Explorar como os fractais podem ser incorporados ao ensino;
- Trazer uma Proposta Didática para alunos do Ensino Médio sobre fractais.

2. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

2.1 Apresentação do contexto da pesquisa

A pesquisa que propomos neste Projeto tem como objetivo geral “Fornecer aos docentes do Ensino Básico, métodos que os possibilitem um ensino criativo e dinâmico em sala de aula, a partir da Geometria Fractal, com uma visualização focada ao natural”. Para tanto, realizaremos uma pesquisa na ECI José Soares de Carvalho, Guarabira – PB, com 20 alunos do Ensino Médio, escolhidos aleatoriamente.

2.2 Classificação da pesquisa

Uma pesquisa pode ser classificada segundo a natureza da abordagem do objeto a ser pesquisado, quanto aos objetivos e quanto aos procedimentos técnicos de investigação. No caso da presente pesquisa ela é qualitativa, exploratória e bibliográfica, segundo Gil (2002). Pois, utilizamos os dados levantados durante as entrevistas com os alunos e realizamos uma revisão detalhada da literatura e dos artigos científicos que temos como fundamento para a pesquisa sobre Geometria Fractal. Suas propriedades Matemáticas, aplicações na natureza e o potencial educacional.

Logo, a pesquisa foi fundamentada na metodologia da pesquisa qualitativa, ou seja,

A pesquisa qualitativa é frequentemente compreendida como a modalidade de pesquisa que se fundamenta em amplas descrições e não em dados numéricos [...] refere-se a qualquer tipo de pesquisa que produza resultados não alcançados por meio de procedimentos estatístico ou de outros meios de quantificação. [...] É o que ocorre quando se busca, por exemplo, conhecer a essência de um fenômeno, descrever a experiência vivida de um grupo de pessoas, compreender processos integrativos ou estudar casos em profundidade (Gil, 2025, p. 8)

De fato, na nossa pesquisa, foi utilizada a metodologia da pesquisa qualitativa para que, por meio da interrogação aos participantes, pudéssemos obter informações subjetivas para avaliarmos o conhecimento prévio dos alunos sobre Geometria Fractal, suas compreensões e percepções do mundo por meio da visualização Matemática. Para isso, realizamos a análise qualitativa dos dados coletados, utilizando técnicas sem e com recursos estatísticos adequados, para interpretar, identificar padrões e tendências dos resultados obtidos.

Para Gil (2002, p. 144), uma pesquisa é dita exploratória quando “[...] a fase exploratória da pesquisa-ação objetiva determinar o campo de investigação, as expectativas dos interessados, bem como o tipo de auxílio que estes poderão oferecer ao longo do processo de pesquisa”. De fato, na nossa pesquisa fizemos uma análise exploratória com o intuito de

determinar como a Geometria Fractal pode ser integrada de forma eficaz no ensino de Matemática, explorando suas aplicações em sala de aula e o impacto no aprendizado dos alunos. Esta fase inicial nos fez compreender a visão e as expectativas dos alunos ao longo do processo de pesquisa.

Para Gil (2002, p. 44), uma pesquisa é dita bibliográfica quando “[...] é desenvolvida com base em material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos. Embora em quase todos os estudos seja exigido algum tipo de trabalho dessa natureza, há pesquisas desenvolvidas exclusivamente a partir de fontes bibliográficas”. De fato, na nossa pesquisa, de acordo com os objetivos apresentados, temos um componente bibliográfico significativo. Conforme mencionado por Gil (2002), a pesquisa bibliográfica baseia-se em material já existente, como livros e artigos científicos, e é essencial para embasar teoricamente o estudo.

Para tanto, foi revisado 26 obras, de 25 autores, datados entre 1982 e 2025. Essa base teórica forneceu o alicerce necessário para a construção dos demais aspectos da pesquisa, incluindo a definição de objetivos específicos, o desenvolvimento de estratégias metodológicas e a interpretação dos resultados obtidos. Assim, a pesquisa bibliográfica foi um componente essencial para o sucesso do nosso estudo, pois nos forneceu uma sólida fundamentação teórica e contextual para a investigação sobre a visualização da natureza através da Geometria Fractal.

2.3 Etapas e instrumentos da pesquisa

A realização da pesquisa se deu conforme as seguintes etapas e instrumentos para coleta de dados:

Etapas 1 – Mostrar por meio da história dos Fractais a ligação que a Matemática possui com a natureza e seus padrões. Para isso, utilizamos como instrumento um levantamento bibliográfico, a fim de explorar a história dos fractais e sua ligação com a natureza e seus padrões. Por meio dessa pesquisa, investigamos a origem e o desenvolvimento dos fractais como uma área da Ciência Matemática.

Etapas 2 – Apresentar a teoria do Caos nos fenômenos naturais, de maneira autoexplicativa. Para isso, utilizamos como instrumento um levantamento bibliográfico, de forma a abordar os conceitos fundamentais da teoria do Caos e sua aplicação nos fenômenos naturais. Por meio de uma pesquisa bibliográfica abrangente, exploramos diversas fontes, incluindo livros e artigos científicos.

Etapas 3 – Explorar como os fractais podem ser incorporados ao ensino. Para isso, utilizamos como instrumento um levantamento bibliográfico que aborde diferentes estratégias

para a incorporação dos fractais ao ensino de Matemática e a análise dos dados obtidos por meio das perguntas objetivas e estruturadas de forma clara para os 20 alunos de Ensino Médio, da ECI José Soares de Carvalho, Guarabira - PB. Por meio dessa pesquisa e análise, exploramos como os conceitos e princípios da Geometria Fractal podem ser introduzidos de maneira eficaz e significativa, promovendo uma compreensão mais profunda e uma maior apreciação da Matemática e do mundo ao seu redor.

Etapas 4 – Trazer uma Proposta Didática para alunos do Ensino Médio sobre fractais. Para isso, utilizamos como instrumento um levantamento bibliográfico que abordou propostas didáticas existentes para o ensino de fractais no nível do Ensino Médio. Por meio dessa pesquisa, exploramos diferentes abordagens, recursos e atividades que possam ser adaptados e implementados em sala de aula para promover a compreensão dos alunos sobre a Geometria Fractal de forma acessível e cativante.

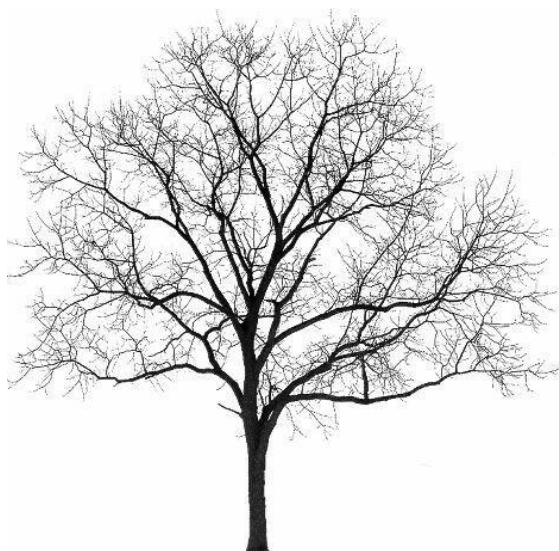
3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA, ANÁLISES E DISCUSSÕES

3.1 PADRÕES NA NATUREZA

3.1.1 Os fractais na natureza

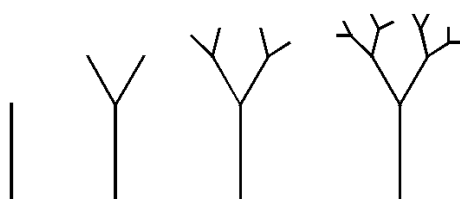
Os fractais, com sua complexidade infinita repetida em diferentes escalas, revelam uma ordem que passa despercebida aos nossos olhos, dos galhos das árvores às folhas, os fractais se manifestam de maneiras fascinantes. De acordo com o grupo de pesquisa Fractalize (2021), cada ramificação de uma árvore, por exemplo, segue um padrão fractal, onde os galhos se dividem em subgalhos, que por sua vez se subdividem em galhos menores, em um ciclo interminável de repetição geométrica, como mostram as figuras 1 e 2.

Figura 1 – Fractal na natureza.



Fonte: <<https://br.pinterest.com/pin/378654281164197754/>> (1675) Pinterest. Acesso em: 24 mar. 2024.

Figura 2 - Padrão de autossemelhança.



Fonte: O Turista Matemático (mathtourist.blogspot.com). Acesso em: 24 mar. 2024.

As imagens nos revelam que o nosso mundo segue um padrão de criação, ao observar as ramificações das árvores, percebe-se que o formato inicial dela é mantido inalterado, se não houver fatores externos. É importante citar que, na natureza os fractais não possuem uma autossimilaridade exata.

Na constituição de nosso mundo, da natureza em geral, por mares e oceanos, separando continentes e ilhas, com suas costas, suas montanhas e rios, rochas, plantas e animais, e acima as nuvens etc., temos componentes com suas formas nas quais dominam a irregularidade e o caos; tentar simplificá-las, empregando formas usuais da clássica geometria euclidiana, como triângulos, círculos, esferas, cones, etc., seria absurdamente inadequado. A geometria dos fractais pode fornecer aproximações para essas formas. (Barbosa, 2005, p.10-11).

A seguir, na figura 3, apresenta-se a imagem da Couve-Flor Romanesca, um exemplo notável de padrão fractal na natureza. Sua estrutura revela uma repetição de formas auto semelhantes, organizadas em uma sequência geométrica que desafia nossa percepção habitual.

Figura 3 – Couve-Flor Romanesca.



Fonte: Biogil (biogilmendes.blogspot.com). Acesso em: 26 mar. 2024.

É possível observar o padrão repetitivo presente na estrutura, um fenômeno espontâneo em sistemas naturais que resulta em uma estética de grande beleza e elegância. Cada florete menor reproduz a forma do todo, obedecendo à lógica da autossimilaridade, característica fundamental dos fractais. A Figura 4 apresenta uma ilustração gerada por inteligência artificial que representa o padrão fractal observado na Couve-Flor Romanesca.

Figura 4 - Padrão fractal da Couve-Flor Romanesca.



Fonte: Criada digitalmente com base em padrões fractais da Couve-Flor Romanesca.

Diante disso, é possível perceber que tudo ao nosso redor carrega a presença da Matemática e de seus padrões, mesmo fora da exatidão, nada é por acaso ou formado do absoluto nada. A Geometria Fractal, ao revelar estruturas complexas e auto semelhantes presentes na natureza, como nas ramificações das árvores, nas plantas, nuvens, raios, montanhas ou na organização da Couve-Flor Romanesca, nos mostra que há uma lógica subjacente à aparente desordem. Esses padrões naturais, embora irregulares e imprevisíveis em certos aspectos, seguem princípios matemáticos que podem ser estudados, compreendidos e até mesmo aplicados no processo de ensino e aprendizagem. Assim, ao reconhecer a Matemática como parte intrínseca do mundo natural, ampliamos não apenas nosso entendimento sobre os fenômenos ao nosso redor, mas também a forma como ela pode ser abordada de maneira mais significativa no ambiente escolar.

3.1.2 Benoit B. Mandelbrot

Figura 5 - Dr. Benoit Mandelbrot, o “pai dos fractais”.



Fonte: Medium (*apud* Wrighter, 2019). Acesso em: 1 ago. 2024

Benoit Mandelbrot (Figura 5) foi um matemático francês de origem judaico-polonesa e o grande nome da Geometria Fractal. Em seu livro “The Fractal Geometry of Nature” ele ilustra como os fractais podem ser encontrados em padrões naturais, como nuvens, contornos das montanhas, árvores, flores, entre outros. Mandelbrot argumenta que a geometria fractal é uma ferramenta útil para descrever a complexidade encontrada na natureza. Ele argumenta que os métodos tradicionais de geometria euclidiana, que são baseados em formas simples e regulares, não são adequados para descrever a complexidade encontrada na natureza.

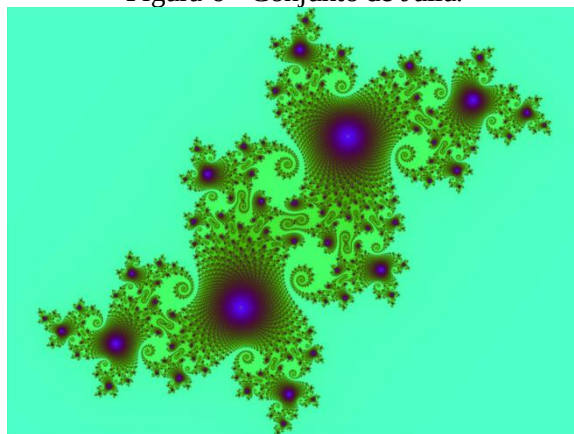
Era preciso ter uma imaginação excepcional para considerar a possibilidade de uma geometria diferente daquela de Euclides, pois o espírito humano por dois milênios estivera limitado, pelo preconceito da tradição, à firme crença de que o sistema de Euclides era certamente a única maneira de descrever em termos geométricos o espaço físico, e que qualquer sistema geométrico contrário não poderia ser consistente. (Eves, 1997, p. 22).

Em vez disso, Mandelbrot propõe a geometria fractal como uma ferramenta mais eficaz para capturar a irregularidade e a variedade infinita de formas e estruturas que observamos ao nosso redor (Ferreira Filho, 2015).

Mandelbrot foi um homem extraordinário que impulsionou a apreciação da beleza Matemática na arte, nas Ciências e em similaridades presentes na natureza ao nosso redor, principalmente aos jovens, provando que o irregular mesmo que complexo, não deixa de existir por nossa dificuldade em compreendê-lo. De acordo com o artigo The Wandering Scientist Turned Father of Fractals publicado no site Medium (*apud* Wrighter, 2019), Mandelbrot enfrentou a Segunda Guerra Mundial com sua família em 1945 na França, e após sobreviver à França ocupada pelos nazistas Mandelbrot frequentou a École Polytechnique, onde foi ensinado por Paul Lévy e Gaston Julia, dois homens que influenciariam muito seu trabalho inovador. Em

seguida, foi para os Estados Unidos concluir um mestrado em aeronáutica no Caltech, e retornou à França para obter seu doutorado em Matemática pela Sorbonne em 1952. Mesmo após sua formação e demonstração de seu talento, tentou de forma frustrada lecionar em uma universidade francesa, pois foi informado que estava seguindo um caminho errado com suas pesquisas. Com isso, partiu para os Estados Unidos em 1958 para ingressar na International Business Machines (IBM), que estava à procura de gênios incompreendidos e “rebeldes” para ajudar a desenvolver sua nova tecnologia, o computador. Tendo acesso a toda tecnologia avançada da época, ele utilizou de gráficos para confirmar uma equação descoberta por Gaston Julia, seu ex professor, onde conseguiu gerar imagens geométricas fractais, conhecida atualmente como o conjunto de Julia, como mostra a figura 6 a seguir.

Figura 6 - Conjunto de Julia.



Fonte: Wikimedia Commons (2023). Acesso em: 01 ago. 2024

“Os conjuntos de Julia, assim chamados pelo matemático Gaston Julia, são uma família de conjuntos fractais que são obtidos ao se estudar o comportamento dos números complexos ao serem iterados por uma função, uma família muito importante de conjuntos de Julia é obtida a partir de funções quadráticas simples, como por exemplo: $f_c(z) = z^2 + c$, onde c é um número complexo” (Aprendemos Matemáticas, 2024).

Essa função seria impossível de se visualizar sem o auxílio da tecnologia, por isso, ele precisou de um computador, onde gerou essas equações milhões de vezes, com as imagens formadas, foi possível um grande avanço matemático.

Em 1980, após um trabalho minucioso, ele conseguiu criar sua própria equação que combinava todos os conjuntos de Julia em uma nova imagem. Quando ele iterou sua equação, obteve seu próprio conjunto de números. Isso se tornou um “roteiro” para todos os conjuntos de Julia, e o conjunto de Mandelbrot nasceu (Medium *apud* Wrighter 2019).

Aprendemos Matemáticas (2024) nos informa que Mandelbrot utilizou o processo de Julia e o modificou tornando variável o ponto c e fixando o ponto $Z_0 = 0$. Surgindo assim, o conjunto de Mandelbrot, um conjunto de números complexos c que surgiu através do método iterativo.

Segundo Medium *apud* Wrighter (2019) com esse feito Mandelbrot trouxe pela primeira vez a demonstração visual de formas complexas, não exploradas, pela Matemática e demais Ciências. Como por exemplo, nuvens, padrões climáticos, cadeias de montanhas, rios, fenômenos que eram considerados caóticos e irregulares, começaram a ser vistos com alguma ordem, Mandelbrot continuou seu trabalho e pesquisa por 35 anos na International Business Machines (IBM) em Yorktown Heights, Nova York. Mandelbrot não se conformava em como a Geometria Euclidiana analisava o mundo natural, descrito com formas suaves, triângulos, círculos e padrões regulares. Ele não discordava da exatidão da Geometria Euclidiana em situações regulares, apenas sentia que havia algo melhor para descrever a natureza. Contudo, suas ideias não foram bem aceitas entre os estudiosos da época, que permaneceram céticos quanto aos conceitos de Benoit, que chegou a ser ridicularizado entre eles, porém, ele conseguiu o apoio de grandes teóricos como John von Neumann e J. Robert Oppenheimer, mesmo assim, somente com o passar das décadas que suas teorias foram aceitas.

O conceito central por trás da geometria fractal é a ideia de autossimilaridade, onde os padrões se repetem em diferentes escalas, isso significa que um objeto fractal exibe a mesma estrutura básica, não importa o quão grande ou pequeno seja. Essa propriedade é fundamental para entender a complexidade dos fenômenos naturais, onde a mesma forma pode ser encontrada em diferentes níveis de detalhe. Com isso, ao destacar a presença generalizada de fractais na natureza, Mandelbrot não apenas ofereceu uma nova lente para entender os padrões ao nosso redor, mas também abriu novas possibilidades para aplicações em uma ampla gama de campos, desde a física e a biologia até a economia e a arte. De forma que seu trabalho continua a inspirar cientistas, artistas e pensadores em todo o mundo, mostrando que a geometria fractal não é apenas uma ferramenta útil, mas também uma fonte infinita de beleza e fascínio.

3.2 INTRODUÇÃO À GEOMETRIA FRACTAL

3.2.1 História da Geometria Fractal

Segundo Carvalho, Coelho e Lenzi (2008), o termo “fractal” foi cunhado por Mandelbrot em 1975, derivado da palavra latina “fractus”, que significa quebrado ou irregular, sua pesquisa foi influenciada por várias disciplinas, incluindo Matemática, Física e Arte. No entanto, as ideias que levaram ao desenvolvimento da Geometria Fractal já estavam presentes em várias áreas. Por exemplo, o matemático Karl Weierstrass, que segundo Batanete, Castro e Lago (2004 - 2005), no século XIX, apresentou uma função contínua, mas não diferenciável, que serviu como um precursor para os fractais. Surgindo em pleno movimento cubista, emergiu como um modelo de preferência nas Artes, foram rotuladas como “patológicas” ou até mesmo uma “galeria de monstros”. Além disso, artistas como o matemático italiano Leonardo da Vinci e o pintor renascentista Albrecht Dürer exploraram padrões e formas que lembram os fractais em suas obras.

3.2.2 Importantes nomes da Geometria Fractal

3.2.2.1 Wacław Franciszek Sierpinski

Figura 7 - Prof. Wacław Franciszek Sierpinski



Fonte: The Pontifical Academy of Sciences (2012). Acesso em: 1 ago. 2024

Segundo Freire Rabay (2013), Wacław Sierpinski (1882 - 1969), disponível na Figura 7, contribuiu em várias áreas da Matemática, incluindo Teoria dos Números e Topologia de Conjuntos. Apesar das dificuldades impostas pela ocupação da Polônia pelo Império Russo, que dificultava o acesso de poloneses ao ensino superior, Sierpinski iniciou seus estudos na Universidade de Varsóvia em 1898, mesmo sendo considerada uma universidade russa na época. Durante seus anos como estudante, desenvolveu trabalhos que são reconhecidos até hoje. Mais tarde, tornou-se professor nas Universidades de Lviv e Varsóvia, sendo o criador do Triângulo e do Tapete de Sierpinski.

De acordo com Mendonça Cavalcante (2016), o Triângulo de Sierpinski, também conhecido como Cesta de Sierpinski, segue um processo de formação. Para criá-lo, começamos com um triângulo equilátero de lado unitário. Ao unir os três pontos médios dos lados desse triângulo, formamos um novo triângulo central. Assim, removemos a área desse novo triângulo em relação à área anterior e realizamos a primeira iteração. Esse processo é repetido para os triângulos restantes, removendo o triângulo formado pelos pontos médios de seus lados, como mostra a figura 8 a seguir:

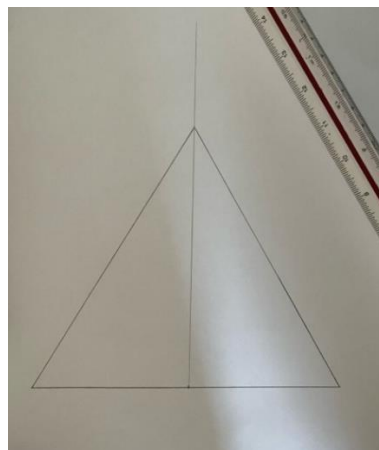
Figura 8 - Triângulo de Sierpinski



Fonte: Vecteezy (2024). Acesso em: 28 mar. 2024

O triângulo de Sierpinski ilustra um algoritmo recursivo de três vias. O procedimento para desenhar um triângulo de Sierpinski à mão é simples. Comece com um único triângulo grande.

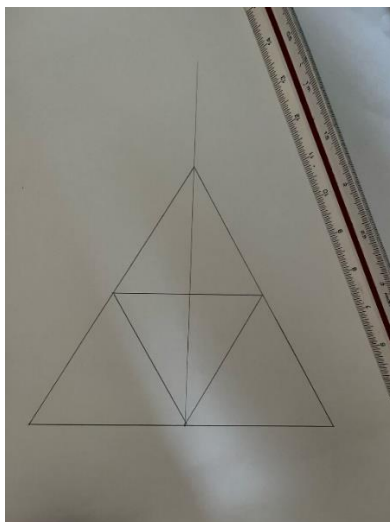
Figura 9 - Passo 1: Triângulo de Sierpinski



Fonte: Elaborada pelo autor (2025)

Divida este triângulo em quatro novos triângulos ligando o ponto médio de cada lado.

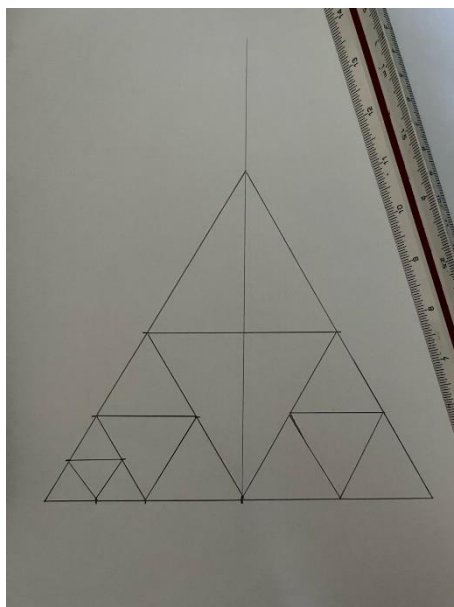
Figura 10 - Passo 2: Criando o Triângulo de Sierpinski



Fonte: Elaborada pelo autor (2025)

Ignorando o triângulo do meio que acabou de criar, aplique o mesmo procedimento a cada um dos três triângulos nos cantos.

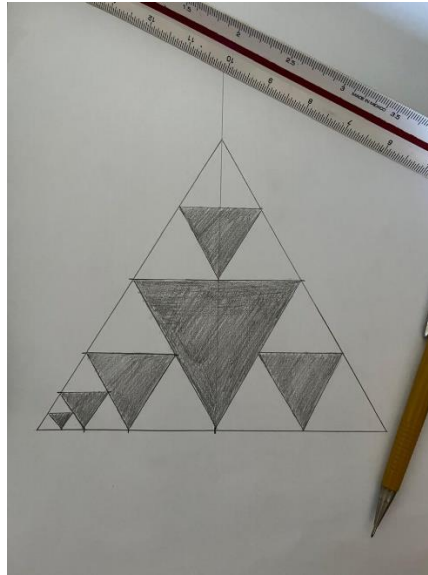
Figura 11 - Passo 3: Criando o Triângulo de Sierpinski



Fonte: Elaborada pelo autor (2025)

Cada vez que você criar um novo conjunto de triângulos, recursivamente aplique este procedimento para os três triângulos menores nos cantos.

Figura 12 - Passo 4: Criando o Triângulo de Sierpinski



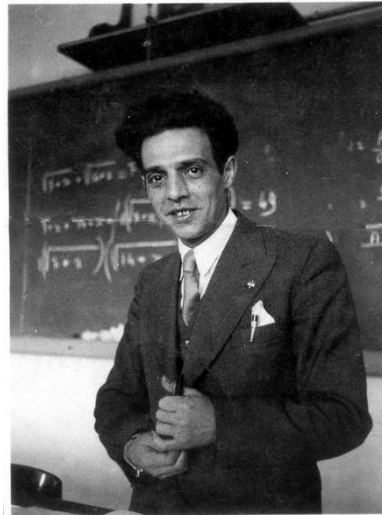
Fonte: Elaborada pelo autor (2025)

Assim, podemos repetir esse procedimento, até que não seja mais possível manualmente as suas divisões. Diante disso, este fractal apresenta propriedades notáveis que merecem destaque:

- A área da figura tende a zero à medida que o número de iterações aumenta, uma vez que, a cada passo do processo, é retirada uma fração da área anterior, especificamente, em cada iteração permanece apenas $\frac{3}{4}$ da área da figura da etapa anterior.
- O fractal possui infinitude de pontos, já que, mesmo com a redução progressiva da área, a cada iteração resta uma quantidade infinita de pontos.
- Apresenta a propriedade da autossemelhança, ou seja, cada uma de suas partes reproduz, em escala reduzida, a forma do todo.

3.2.2.2 Giuseppe Peano

Figura 13 - Giuseppe Peano



Fonte: <<https://br.pinterest.com/pin/681521356086149480/>> (1675) Pinterest. Acesso em: 1 ago. 2024.

Segundo Freire Rabay (2013), Giuseppe Peano (1858 - 1932), disponível na Figura 13, ficou conhecido pelos axiomas de Peano, que trata dos números naturais, e deu várias contribuições nas áreas de Teoria dos Conjuntos, Álgebra Linear, Cálculo Vetorial e em aplicações geométricas de Cálculo Infinitesimal. Contribuiu consideravelmente para a linguagem Matemática na Teoria dos Conjuntos e Lógica Matemática, pela precisão e rigor lógico utilizados em seus trabalhos. Considerado por alguns como o pai da Lógica. Nasceu em uma fazenda a 5 quilômetros (km) de Cuneo. Em parte da sua infância percorria esses 5 km a pé para frequentar a escola em Cuneo. Para continuar seus estudos, mudou-se para Turim, graduando-se doutor em Matemática na Universidade de Turim em 1880 e neste mesmo ano começou a lecionar nessa universidade. Foi professor também da Academia Militar de Turin. Em 1890, publica a Curva de Peano, proposta para cobrir totalmente uma superfície plana quadrangular.

3.2.2.3 David Hilbert

Figura 14 - David Hilbert



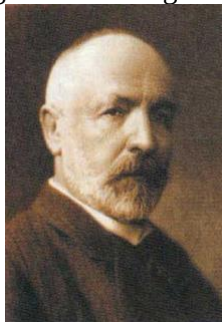
Fonte: < <https://www.infoescola.com/biografias/david-hilbert/> >. Acesso em: 1 ago. 2024

Segundo Freire Rabay (2013), David Hilbert (1862 - 1943), na Figura 14, contribuiu em várias áreas da Matemática, consolidou a Teoria dos Invariantes, abordagem axiomática da geometria euclidiana, teoria dos números algébricos, criação dos espaços de Hilbert que trata de equações integrais e formas quadráticas. Considerado um dos mais notáveis matemáticos cujos tópicos de suas pesquisas são fundamentais em diversos ramos da Matemática atual. Hilbert brilhantemente obteve seu doutorado em 1884. Foi professor da Universidade de Gottingen até aposentar-se em 1930. Em 1891, publica a Curva de Hilbert.

3.2.2.4 George Ferdinand Ludwig Philipp Cantor

Conforme Lira (2018), os fractais têm sido altamente úteis para a tecnologia. Isso foi evidenciado quando Benoit Mandelbrot empregou um conjunto conhecido como poeira de Cantor para resolver questões relacionadas a ruídos nas linhas telefônicas.

Figura 15 - Georg Cantor



Fonte: < <https://www.nndb.com/people/333/000087072/> >. Acesso em: 1 ago. 2024

Segundo De Paula e De Sousa (2017), George Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (Figura 15), nascido em São Petersburgo, Rússia, em 1845 e falecido em Halle, Alemanha, em 1918, é reconhecido como o pioneiro da moderna teoria dos conjuntos. A partir de seus estudos, ele introduziu o conceito de números transfinitos, que abrange as classes numéricas dos cardinais

e ordinais, estabelecendo uma distinção crucial entre esses dois conceitos. Isso trouxe à tona novos desafios ao lidar com conjuntos infinitos. Filho de George Waldemar Cantor, um comerciante dinamarquês, e Maria Anna Böhm, uma musicista russa, Cantor mudou-se para a Alemanha aos 11 anos para prosseguir com seus estudos. Ele frequentou o Instituto Federal de Tecnologia de Zurique e obteve seu doutorado na Universidade de Berlim em 1867, tornando-se mais tarde professor na Universidade de Halle.

Ao longo de sua vida, Cantor enfrentou várias crises de depressão, frequentemente relacionadas ao seu intenso envolvimento com estudos matemáticos. Hoje, é amplamente aceito que sua condição possa ser diagnosticada como Transtorno Bipolar. Ele faleceu em um hospital psiquiátrico em Halle em 1918. Embora tenha enfrentado considerável resistência por parte da comunidade Matemática de sua época, as contribuições de Cantor para a Matemática são inegáveis. Ele demonstrou que conjuntos infinitos não possuem todos a mesma potência, distinguindo entre conjuntos enumeráveis e contínuos. Por exemplo, ele provou que o conjunto dos números racionais é enumerável, enquanto o conjunto dos números reais é contínuo, utilizando o famoso método diagonal. Em 1883, Cantor também introduziu um dos “monstros” matemáticos mais fascinantes: o Conjunto de Cantor, que demonstrou não ser enumerável, desafiando assim conceitos estabelecidos na época (Freire Rabay, 2013).

3.2.2.5 Gaston Maurice Julia

Figura 16 - Gaston Julia



Fonte: < <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Julia/>>. Acesso em: 1 ago. 2024

De acordo com O'Connor e Robertson (2008) os pais de Gaston Julia (Figura 16), Delorès Delavent e Joseph Julia, eram de uma família que havia migrado dos Pireneus espanhóis para a Argélia após a colonização francesa. Desde jovem, Gaston mostrou interesse por Matemática e música, a mãe de Gaston o proporcionou uma boa educação, apesar das dificuldades financeiras da família. Aos sete anos, Gaston estudou com os Frères des Écoles

Chrétien, onde suas habilidades excepcionais foram logo notadas. Em 1911, Julia ingressou na École Normale Supérieure, tendo acabado de terminar os exames para seu primeiro diploma em Matemática quando a Primeira Guerra Mundial começou. Em julho de 1914, com a declaração de guerra da Alemanha à França, Julia recebeu a convocação e foi treinado no 57º Regimento de Infantaria, posteriormente promovido a cabo e subtenente. Durante um ataque intenso em janeiro de 1915, conhecido como o “ataque da fazenda Creute”, Julia foi gravemente ferido e, após várias operações, acabou perdendo o nariz, tendo que usar uma tira de couro no rosto pelo resto de sua vida.

3.2.2.6 Niels Fabian Helge von Koch

Figura 17 - Niels Koch

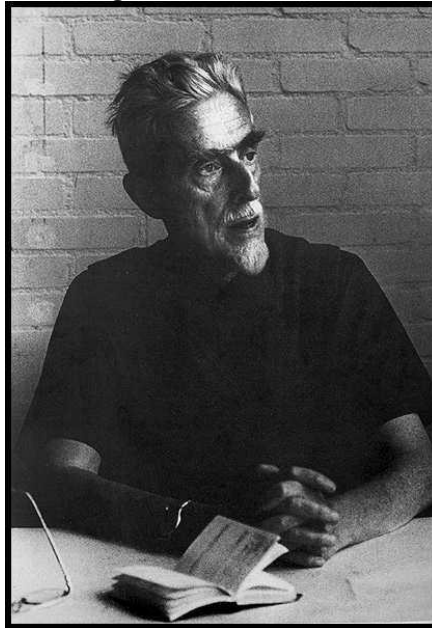


Fonte: < <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Koch/>>. Acesso em: 1 ago. 2024

Seu trabalho foi desenvolvido principalmente nas áreas de teoria dos números e Equações diferenciais, obteve a graduação em Matemática na Universidade de Estocolmo, onde posteriormente recebeu o título de Doutor, chegando a ocupar uma cadeira de professor nesta Universidade. Koch (Figura 17) criou um dos “monstros matemáticos” mais conhecidos, a famosa curva de Koch, que aplicada aos lados de um triângulo equilátero gera a Ilha de Koch ou popularmente conhecido como floco de neve, recebendo esse nome, devido à semelhança que tem com os flocos de neve encontrados na natureza (Ferreira Filho, 2015).

3.2.2.7 Mauritus Cornelis Escher

Figura 18 – M. C. Escher



Fonte: <<https://au.pinterest.com/pin/344455071482178966/>> (1675) Pinterest. Acesso em: 24 mar. 2025.

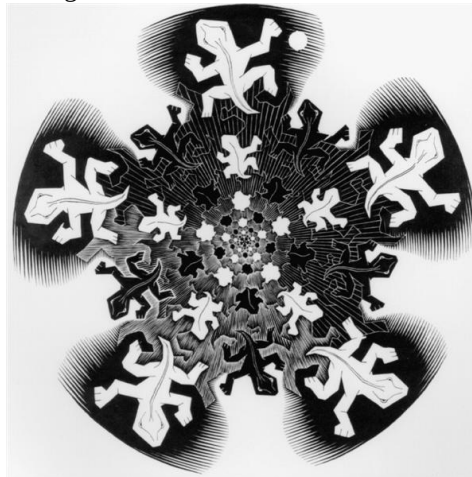
O artista gráfico holandês M. C. Escher (Figura 18) destacou-se por suas obras que exploram conceitos matemáticos, especialmente aqueles relacionados à Geometria Fractal. Por meio de suas xilogravuras, Escher representou padrões que evocam a ideia de repetição e simetria, revelando a beleza presente em sua imaginação infinita e nas estruturas Matemáticas. As Figuras 19, 20, 21 e 22, a seguir, ilustram exemplos dessa abordagem artística.

Figura 19 - O Limite do Círculo I, 1958



Fonte: < <https://www.wikiart.org/pt> >. Acesso em: 24 mar. 2025

Figura 20 - Desenvolvimento II, 1939



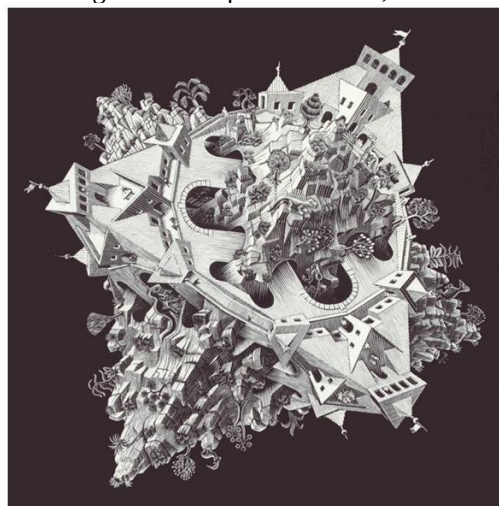
Fonte: < <https://www.wikiart.org/pt> >. Acesso em: 24 mar. 2025

Figura 21 - Circle Limit III, 1959



Fonte: < <https://www.wikiart.org/pt> >. Acesso em: 24 mar. 2025

Figura 22 - Duplo Planetóide, 1949



Fonte: < <https://www.wikiart.org/pt> >. Acesso em: 24 mar. 2025

De acordo com Farias Mailson (2019), Escher criou estruturas impossíveis, em sintonia com a arte contemporânea, desenvolveu um novo campo de inspiração na inevitável contradição entre a bidimensionalidade do papel ou da tela e a realidade tridimensional.

3.3 TEORIA DO CAOS

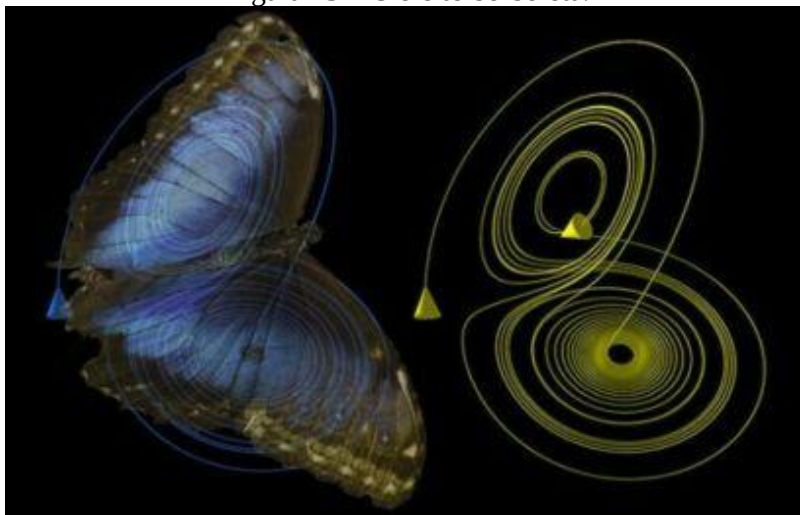
A teoria do caos é um ramo fascinante da Matemática e da ciência que estuda sistemas dinâmicos altamente sensíveis às condições iniciais. Sua história remonta ao final do século XIX, mas foi somente na segunda metade do século XX que essa teoria começou a ganhar destaque e reconhecimento. Um marco importante na história da teoria do caos foi o trabalho do meteorologista Edward Lorenz (1917 – 2008) na década de 1960, o meteorologista e matemático estadunidense Edward Lorenz, percebeu que ao ajustar ou ignorar algumas casas decimais em seus cálculos, havia mudanças significativas em seus resultados (Sousa; Klafke; Bassini, 2020).

Lorenz estava estudando modelos meteorológicos simples quando descobriu que pequenas variações nos dados de entrada poderiam levar a resultados completamente diferentes. Ele introduziu no seu computador alguns dados, como vento, temperatura, direção, observou os resultados e recalculou utilizando os mesmos dados, para surpresa de Lorenz os resultados eram completamente diferentes, ao procurar mais informações, percebeu que o seu computador havia arredondado algumas casas decimais em seus valores, o que causou total diferença em seus resultados.

Ele ilustrou esse conceito com a famosa frase, popularizada graças a indústria cinematográfica⁴, “[...] o bater de asas de uma borboleta no Brasil pode desencadear um tornado no Texas” (Figura 23), enfatizando a sensibilidade do sistema a pequenas mudanças.

⁴ A exemplo dos filmes “efeito borboleta”, suas continuações, o documentário *Chaos: Making a New Science*, entre outros.

Figura 23 – O efeito borboleta.



Fonte: < <https://www3.unicentro.br/petfisica/2020/06/25/o-efeito-borboleta/>>. Acesso em: 1 jan. 2025

Essa descoberta revolucionou nossa compreensão dos sistemas complexos e imprevisíveis, desafiando a visão determinista clássica de que o futuro de um sistema pode ser previsto com precisão a partir de suas condições iniciais. Em vez disso, a teoria do caos reconhece que muitos sistemas naturais exibem comportamentos aparentemente aleatórios e imprevisíveis, mesmo que sejam governados por leis Matemáticas precisas. “A teoria do caos é revolucionária porque ela afirma que, mesmo para a física newtoniana, pode haver casos em que, a princípio, o determinismo é certo, mas, na prática, o sistema parece comportar-se de forma tão imprevisível quanto jogar dados”, segundo afirmou Paul Halpern, professor de Física da Universidade de Ciências da Filadélfia, nos Estados Unidos Na BBC News Mundo.

Embora a teoria do caos apresente sistemas que os matemáticos afirmam ser dinâmicos, ou seja, sistemas que se alteram a partir de fatores externos como o tempo ou condições em que estão presentes, se movendo de forma aleatória, desordenada ou imprevisível para nós, é possível ver ordem no caos, uma lógica presente em seus padrões, esse sistema segue pontos que chamados de “atratores”, que conhecemos como fractais. Um dos conceitos fundamentais na teoria do caos é o fractal, uma forma geométrica que exibe autossemelhança em diferentes escalas. Para Halpern, na vida diária, a teoria do caos serve para conhecermos os limites do nosso conhecimento (Roth, 2011).

Um fractal é algo que é 'autossimilar', segundo Halpern *apud* Roth (2011). É um objeto matemático no qual, qualquer seção, quando observada de perto, tem aparência similar à do objeto completo. Em suma, a teoria do caos é uma área de estudo profundamente intrigante que

continua a desafiar e inspirar cientistas, matemáticos e filósofos em sua busca por compreender os mistérios do universo.

3.4 PROPOSTA DIDÁTICA

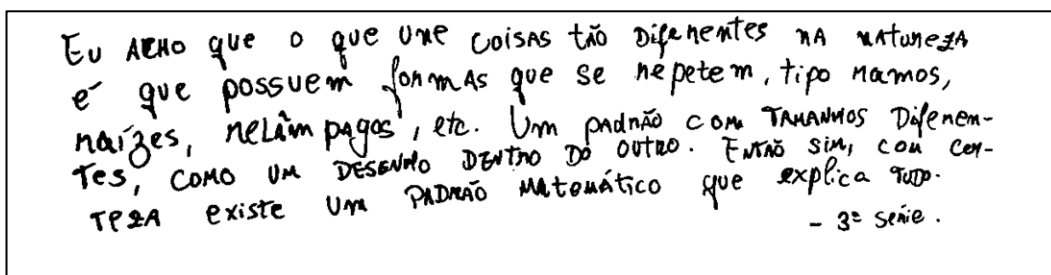
De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), a habilidade EM13MAT105 propõe que os alunos utilizem noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e suas composições) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diversas produções humanas, como fractais, construções civis, obras de arte, entre outras (Brasil, 2018).

Esta habilidade está inserida na unidade temática de Geometria. Com base nisso, foram elaboradas as seguintes perguntas para os alunos do Ensino Médio da Escola Cidadã Integral José Soares de Carvalho, como base de dados para investigação:

Vocês acreditam que a natureza segue algum padrão matemático ou é fruto do acaso? Por quê? Quando observamos a forma das folhas de uma árvore, conseguimos perceber algum padrão repetido? Que tipo de ordem vocês veem ali? Se as nuvens têm formas tão irregulares, será que existe alguma estrutura Matemática oculta nelas? Quando olhamos para uma montanha de longe, ela parece caótica. Vocês acreditam que existe alguma ordem Matemática por trás dessas formas? Até que ponto vocês conseguem enxergar a Matemática no crescimento de uma planta ou no formato de suas folhas? Vocês já pararam para pensar por que as ramificações dos rios e árvores parecem seguir um padrão tão parecido? Será que a Matemática explica isso? A espiral de uma concha ou de um girassol segue um padrão perfeito. Vocês já pensaram de onde vem essa ordem e como ela está relacionada à Matemática? O que vocês acham que une fenômenos tão diferentes como a forma dos corais no fundo do mar e os relâmpagos no céu? Será que existe um padrão matemático comum? Como vocês descreveriam o formato dos flocos de neve? Vocês acham que existe uma estrutura Matemática por trás dessa beleza natural? Vocês acham que o caos que vemos em alguns fenômenos da natureza, como os galhos de uma árvore ou as ondas do mar, na verdade, segue algum tipo de ordem Matemática?

Entre as respostas obtidas pelos alunos da Escola Cidadã Integral José Soares de Carvalho, destaco três em particular, que contribuíram significativamente para a análise proposta. Para fins de organização e anonimato, denominarei esses estudantes como Aluno 1, Aluno 2 e Aluno 3. A seguir, apresento a conclusão elaborada pelos alunos em resposta às questões formuladas durante a pesquisa nas Figuras 24, 25 e 26.

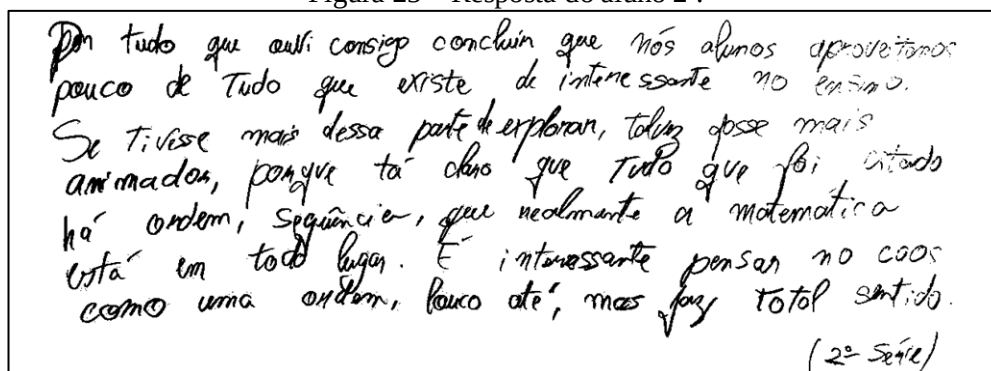
Figura 24 – Resposta do aluno 1⁵.



Eu acho que o que une coisas tão diferentes na natureza é que possuem formas que se repetem, tipo ramos, raízes, relâmpagos, etc. Um padrão com tamanhos diferentes, como um desenho dentro do outro. Então sim, com certeza existe um padrão matemático que explica tudo.
- 3ª série.

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

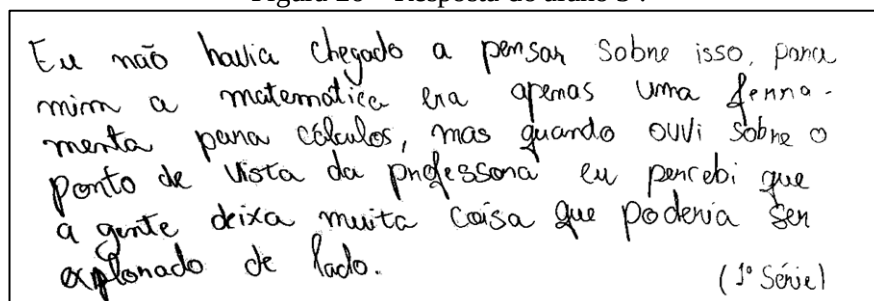
Figura 25 – Resposta do aluno 2⁶.



Por tudo que ouvi consigo concluir que nós alunos aproveitamos pouco de tudo que existe de interessante no ensino.
Se tivesse mais dessa parte de explorar, talvez fosse mais animado, porque tá claro que tudo que foi citado há ordem, sequência, que realmente a matemática está em todo lugar. É interessante pensar no caos como uma ordem, pouco até, mas faz total sentido.
(2ª série)

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Figura 26 – Resposta do aluno 3⁷.



Eu não havia chegado a pensar sobre isso, para mim a matemática era apenas uma ferramenta para cálculos, mas quando ouvi sobre o ponto de vista da professora eu percebi que a gente deixa muita coisa que poderia ser explorado de lado.
(1ª série)

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

⁵ Diz a imagem: “Eu acho que o que une coisas tão diferentes na natureza é que possuem formas que se repetem, tipo ramos, raízes, relâmpagos, etc. Um padrão com tamanhos diferentes, como um desenho dentro de outro. Então, sim. Com certeza existe um padrão matemático que explica tudo” (3ª série).

⁶ Expressa a imagem: “[...] Por tudo que ouvi consigo concluir que nós, alunos, aproveitamos pouco de tudo que existe de interessante no ensino. Se tivesse mais dessa parte de explorar, talvez fosse mais animado, porque tá

A partir das respostas dos alunos, percebe-se a necessidade de aprofundar o trabalho docente com fenômenos naturais e suas relações com a Matemática, já que muitos não conseguem associar os conceitos matemáticos ao contexto ao seu redor. Essa dificuldade indica uma lacuna no ensino, onde a abstração Matemática ainda não foi plenamente conectada às experiências cotidianas dos estudantes.

Diante desse cenário, é essencial desenvolver atividades que favoreçam a percepção dos alunos sobre como a Matemática está presente em elementos naturais, a Geometria Fractal, por exemplo, oferece uma oportunidade rica para abordar esses aspectos e facilitar a visualização dos conceitos matemáticos de forma prática e aplicada. Trabalhar com atividades que relacionem transformações geométricas e fenômenos da natureza pode despertar nos alunos uma compreensão mais intuitiva e concreta da Matemática, promovendo um aprendizado mais significativo e engajado. Dessa forma, podemos tornar o ensino de Geometria mais conectado à realidade dos estudantes, possibilitando que vejam a Matemática como uma ferramenta para compreender o mundo à sua volta, e não apenas como uma disciplina abstrata, rígida e desvinculada do cotidiano. A seguir temos duas propostas de atividade sobre a Geometria Fractal, em concordância com a BNCC.

3.4.1 Explorando Fractais

Exploração dos Padrões na Natureza: Divida a turma em grupos e distribua imagens impressas de elementos naturais, como folhas de samambaia, flocos de neve e ramificações de árvores. Cada grupo deve observar as formas apresentadas e identificar padrões repetitivos que se manifestam em diferentes escalas. Incentive os alunos a destacarem visualmente as partes onde esses padrões se repetem, anotando suas observações e discutindo entre si a natureza desses padrões. A intenção é que os alunos percebam que, embora as formas possam parecer complexas à primeira vista, existe uma ordem subjacente e uma repetição de estruturas que pode ser descrita matematicamente.

claro que tudo que foi citado há ordem, sequência, que realmente a Matemática está em todo lugar. É interessante pensar no caos como uma ordem, louco até, mas faz total sentido” (2ª série).

⁷ A figura narra que “[...] Eu não havia chegado a pensar sobre isso. Para mim, a Matemática era apenas uma ferramenta para cálculos, mas quando ouvi sobre o ponto de vista da professora eu percebi que a gente deixa muita coisa que poderia ser explorada de lado”. (1ª Série)

Construção de um Fractal: Utilizando papel quadriculado, desafie os grupos a criarem fractais simples, como por exemplo, Triângulo de Sierpinski ou o Floco de Koch. Com uso de sua criatividade, cada grupo deve começar desenhando uma forma geométrica básica (um triângulo ou um segmento de reta) e, em seguida, repetirem o padrão de maneira sistemática em escalas menores, conforme as instruções específicas do fractal escolhido. À medida que os alunos realizam essa construção, devem perceber como o padrão fractal se torna progressivamente mais complexo conforme mais subdivisões são feitas, refletindo a ideia de autossemelhança. Essa etapa permite aos alunos visualizarem na prática o conceito de repetição em diferentes níveis de escala.

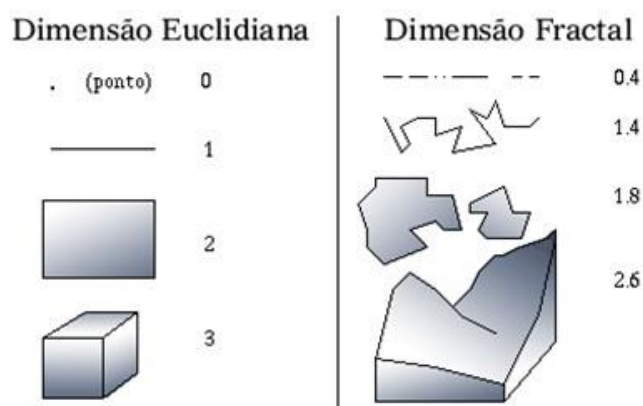
Aplicação de Transformações Geométricas: Após a construção dos fractais, instrua os alunos a aplicarem transformações geométricas isométricas (translação, rotação, reflexão ou composições dessas) nas suas criações. Utilizando tesoura e papel, os grupos podem cortar suas figuras fractais e reposicioná-las de acordo com as transformações indicadas, permitindo que visualizem como essas operações mantêm o padrão fractal inalterado, preservando suas propriedades. Estimule os alunos a refletirem sobre como essas transformações podem ser observadas na natureza e como padrões semelhantes surgem em diferentes formas naturais.

Discussão e Reflexão: Reúna os grupos para uma discussão em plenária. Peça que compartilhem suas construções fractais e as comparações que fizeram entre esses padrões e os elementos observados na natureza. Proponha perguntas reflexivas como: “Em que outros lugares do cotidiano vocês conseguem identificar padrões semelhantes?”, “Como a repetição de formas e estruturas se manifesta em nosso mundo natural?” e “De que forma a Matemática nos ajuda a compreender essa repetição de padrões em diferentes escalas?”. Esse momento deve promover uma troca de ideias que amplia a visão dos alunos sobre a presença da geometria fractal no cotidiano e na natureza.

3.4.2 Cartão Fractal

Considerando a diferente dimensão em que a Geometria Fractal se manifesta, distinta da dimensão tradicional da Geometria Euclidiana, é possível explorar com os alunos algumas características próprias dessa outra forma de dimensão. Essa abordagem permite ampliar a compreensão sobre formas irregulares e complexas, incentivando a reflexão sobre padrões que não se enquadram nas estruturas geométricas clássicas. Observe a figura 27 a seguir:

Figura 27 – Dimensão Euclidiana e dimensão Fractal.



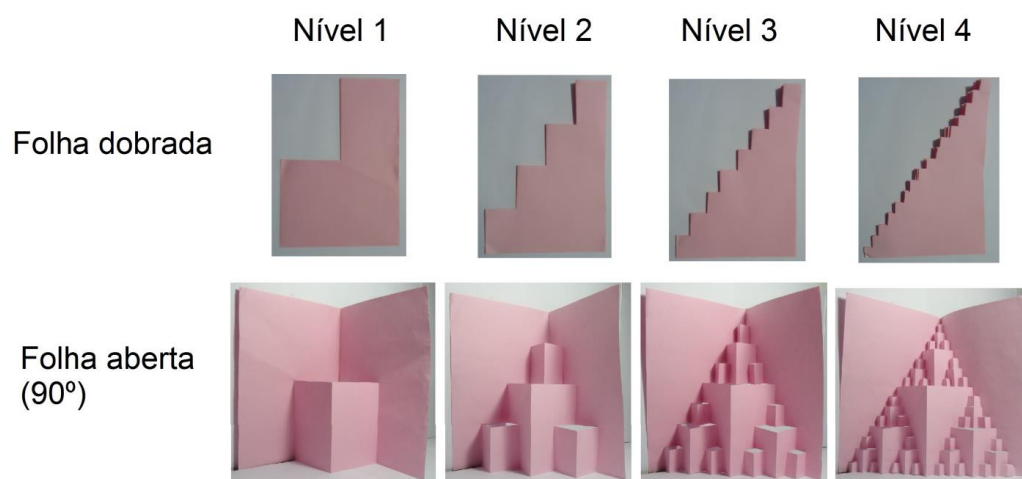
Fonte: <<https://fafidebora.blogspot.com/2011/11/geometria-fractal-cartao-fractal.html>> Débora (2011).

Diante disso iremos observar como incorporar essa dimensão na sala de aula, a partir da representação de uma Progressão Geométrica (PG) – Sequência numérica. Materiais necessários: duas folhas de papel colorido, cola, tesoura e régua. (Freire Rabay, 2013).

1. Dobre ao meio as duas folhas de papel colorido, no sentido horizontal. Reserve uma das folhas para os próximos passos.
2. Pegue a outra folha e dobre-a novamente ao meio, agora ao longo de sua altura (sentido vertical), formando uma base simétrica.
3. Com a folha ainda dobrada, realize dois cortes verticais, simétricos entre si, iniciando a partir da borda inferior em direção ao centro da folha. Os cortes devem ser proporcionais e equidistantes da dobra central.
4. Dobre para dentro a parte superior central entre os cortes realizados, formando um “degrau” ou dobra interna.
5. Desdobre cuidadosamente a folha e observe a figura formada. Analise os elementos visuais resultantes e discuta com os alunos os padrões gerados.

Para continuar a construção e obter as próximas iterações, repita o mesmo processo na região da dobra interna, porém em escala reduzida. A repetição do procedimento em escalas cada vez menores permite identificar um padrão de crescimento compatível com uma progressão geométrica, além de evidenciar características da geometria fractal, como mostra a Figura 28 abaixo.

Figura 28 – Construção de um Cartão Fractal.



Fonte: Freire Rabay (2013).

4 CONCLUSÃO

A utilização da geometria fractal no ensino de Matemática e em outras áreas do conhecimento científico possibilita a superação de barreiras impostas pela lógica tradicional, muitas vezes limitada aos princípios da geometria euclidiana e sua rigidez conceitual. A proposta desta pesquisa foi justamente evidenciar que há uma dimensão matemática ainda pouco explorada, oculta não por sua inexistência, mas pela dificuldade humana em limitá-la, normatizá-la ou explicá-la por meio das estruturas convencionais.

Ignorar as irregularidades presentes na natureza, formas não lineares, padrões aparentemente caóticos e repetições complexas é negligenciar uma parte essencial da realidade em que vivemos. Reconhecer que tais padrões visuais não são meros acasos, mas sim expressões de uma lógica própria e sofisticada, nos permite ampliar o olhar sobre o mundo natural e, conseqüentemente, sobre o ensino da Matemática. Ao abordar conceitos como os fractais, abrimos um leque interdisciplinar que abrange áreas como Biologia, Física, Artes e a própria Matemática. Trata-se de um campo de estudo fascinante para nós, professores, e instigante para os alunos, sobretudo em um contexto educacional fortemente marcado pela presença da tecnologia. Desvincular temporariamente os estudantes das telas e conectá-los à natureza por meio da investigação científica é uma forma potente de despertar o senso crítico, a curiosidade e a percepção de que há ordem mesmo no aparente caos, bastando, para isso, pesquisa, análise e sensibilidade.

Dessa forma, respondendo a problemática do estudo, sobre qual maneira a introdução da Geometria Fractal no ensino de Matemática pode enriquecer a aprendizagem dos alunos. Foi conclusivo que uma das possíveis formas é revisando a literatura, passeando pelos grandes nomes teóricos e suas contribuições sobre o tema, bem como, observar a natureza e sistematizar as observações correlacionando-as com geometria e repetições de padrões menores dentro de um padrão mais amplo.

A preocupação desse estudo esteve voltada para identificar caminhos viáveis para implementar a geometria fractal a partir de conceitos básicos, acessíveis ao estudante da educação. Apesar da complexidade teórica do tema, encontramos materiais de qualidade que, com organização e aprofundamento, oferecem suporte para práticas pedagógicas significativas.

Constata-se que foi atingido, com êxito, o objetivo geral desse estudo, quando esse era fornecer aos docentes do Ensino Médio, métodos que os possibilitassem um ensino de Geometria Fractal com foco aos recursos da natureza. Esse incentivo, consubstanciado a aporte teórico, puderam ser apreciados no capítulo 3. Entretanto, como o estudo focou em Escola e em estudantes do Ensino Médio, sugere-se, como possibilidades de futuras pesquisas, estender o perímetro delineado para estudantes do Ensino Fundamental, que também podem ter maturidade para visualizar a natureza e encontrar padrões geométricos não convencionais, bem como, ampliar a revisão bibliográfica para disciplinas de História da Matemática, costumeiramente ofertadas em cursos de Licenciatura Matemática. Também pode ser produtor fazer cursos de capacitação para formação de professores que não possuem repertório para trabalhar Geometria da forma como o presente TCC debate. Para isso, a metodologia do estudo foi divulgada para possíveis adaptações, e aprimoramentos, a outras realidades, pensando em ampliar a sistematização de achados nessa área.

Assim, espera-se que este trabalho tenha contribuído para apresentar parte do processo de aproximação entre o mundo natural e as dimensões não euclidianas da Matemática, possibilitando novas experiências de ensino e aprendizagem, mais conectadas com a realidade e com o potencial criativo dos alunos.

REFERÊNCIAS

APRENDEMOS MATEMÁTICAS. **Conjuntos de Julia y Mandelbrot**. 2024.

Disponível em:

<<https://www3.gobiernodecanarias.org/medusa/ecoblog/mrodperv/fractales/conjuntos-de-julia-y-mandelbrot/>>. Acesso em: 1 abr. 2025.

BARBOSA, Ruy Madesen. **Descobrimos a Geometria Fractal para a sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

BATANETE, A.; CASTRO, A.; LAGO, H. **Natureza: caos ou ordem. Fundamentos e ensino da Álgebra**. Coimbra: 2004.

Disponível em: < <https://www.mat.uc.pt/~mcag/FEA2005/natureza.pdf> >. Acesso em: 03 abr. 2025.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC/SEF, 2018.

CARVALHO, H. C. **Geometria fractal: perspectivas e possibilidades para o ensino de Matemática**. 2005. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática - NPADC, Universidade Federal do Pará, Belém, 2005.

CARVALHO, O. S.; COELHO, P. M. Z.; LENZI, H. L. (orgs.) Glossário. *In*: Schistosoma mansoni e esquistossomose: uma visão multidisciplinar [online]. ISBN 978-85-7541-370-8. Available from SciELO Books. Rio de Janeiro: Editora FIOCRUZ, 2008,. Disponível em: < <https://books.scielo.org/id/37vw/pdf/carvalho-9788575413708-39.pdf> >. Acesso em: 03 mar. 2025.

DEBORA, Fafi. Geometria fractal – cartão fractal. Blog fafi débora, 14 nov. 2011.

Disponível em: < <https://fafidebora.blogspot.com/2011/11/geometria-fractal-cartao-fractal.html> >. Acesso em: 9 mar. 2025.

DE PAULA, Clayton Eugenio Santos; DE SOUZA, Tatiana Miguel Rodrigues. Uma abordagem da geometria fractal para o ensino médio. **CQD-Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, 2017.

Disponível em: < <https://sistemas.fc.unesp.br/ojs/index.php/revistacqd/article/view/130> >. Acesso em: 13 abr. 2025.

EVES, Howard. **Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula: Geometria**, Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1997.

FARIAS MAILSON, Alves. **Fractais: uma abordagem introdutória**. 2019. 79 f. Dissertação (mestrado profissional em Matemática) – Centro de ciências exatas e da natureza - Programa de Pós-Graduação em Matemática - PROFMAT, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2019.

FERREIRA FILHO, J. R. **Geometria fractal: da natureza para a sala de aula**. 2015. 80 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Matemática -

PROFMAT, Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2015.

FRACTALIZE. **Modelagem Fractal nas Ciências e Engenharias**. 2021.

Disponível em: < <https://www2.ufjf.br/fractalize/2021/05/03/voce-sabia-que-as-arvores-sao-fractais/> >. Acesso em: 27 mar. 2025.

FREIRE RABAY, Y. S. **Estudo e aplicações da Geometria Fractal**. 2013. 103 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Matemática - PROFMAT, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2013.

GIL, Antônio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

GIL, Antonio Carlos. **Pesquisa qualitativa básica**. Rio De Janeiro: Editora Vozes, 2025.

Disponível em: < <https://encurtador.com.br/aJx5a> >. Acesso em: 13 abr. 2025.

LIRA, A. J. de. **O uso de fractais no ensino de progressões geométricas: uma proposta de intervenção no 2º ano do Ensino Médio**. 2018. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática - Licenciatura) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro Acadêmico do Agreste, 2018.

MANDELBROT, B. B. **The Fractal Geometry of Nature**. San Francisco: W. H. Freeman and Co., 1982.

MENDONÇA CAVALCANTE, Fernando Antônio. **Aplicações da Geometria Fractal: Uma proposta didática para o Ensino Médio**. 2016. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Matemática - PROFMAT, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2016.

OLIVEIRA CORRÊA, A. **Geometria Fractal no Ensino Médio**. 2014. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Matemática - PROFMAT, Universidade Federal do Amapá, Macapá, 2014.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Biografia de Gaston Julia**. *Math's History*, St Andrews University. 2008.

Disponível em: < <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Julia/> > . Acesso em: 1 abr. 2025.

O TURISTA MATEMÁTICO. 2023.

Disponível em: < <https://mathtourist.blogspot.com/> >. Acesso em: 14 abr. 2025.

ROTH, Rogério. **O Efeito demonstração na constituição de redes de convivência e aprendizagem sob a ótica do caos do criativo**. Dissertação de Mestrado, 130f. Universidade Técnica de Lisboa. Portugal, 2011.

Disponível em:

< [https://repositorio.ulisboa.pt/bitstream/10400.5/5920/3/ROTH%20R%20\(2\)_Outubro%202013.pdf](https://repositorio.ulisboa.pt/bitstream/10400.5/5920/3/ROTH%20R%20(2)_Outubro%202013.pdf) >.

Acesso em: 13 abr. 2025.

SANTOS, Silvano Messias dos; ALMEIDA, Inês Maria Marques Zanforlin Pires de. Medo de Matemática e Trauma na Relação com o Aprender: uma leitura psicanalítica. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 36, n. 74, 2022.

Disponível em: < <https://www.scielo.br/j/bolema/a/7vQhs3s9MYBFVpJ7xLWTPyR/?lang=pt> >.
Acesso em: 13 abr. 2025.

SOUSA, D.; KLAFKE, J.; BASSINI, A. (2020) **Teoria do caos**.

Disponível em: < <https://www.parquecientec.usp.br/passeio-virtual/matematica/teoria-do-caos> >.
Acesso em: 03 mar. 2025.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CENTRO-OESTE (UNICENTRO). **Fractais na natureza: galhos de uma árvore**. *Pet física – unicentro*, 2020.

Disponível em: < https://www3.unicentro.br/petfisica/wp-content/uploads/sites/54/2020/06/screenshot_1-e1593054329657.jpg >. Acesso em: 1 jan. 2025.

WIKIART. *Maurits cornelis escher*.

Disponível em: < <https://www.wikiart.org/pt/maurits-cornelis-escher> > . Acesso em: 9 mar. 2025.

WRIGHTER. **The Wandering Scientist Turned Father of Fractals**. Medium. 2019.

Disponível em: < <https://medium.com/swlh/the-wandering-scientist-turned-father-of-fractals-4dc867d4dd> > . Acesso em: 1 abr. 2025.