



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS APLICADAS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Jefferson Carlos Soares da Costa

A construção da integral de Riemann e o Teorema Fundamental do Cálculo

Rio Tinto – PB

2026

Jefferson Carlos Soares da Costa

A construção da integral de Riemann e o Teorema Fundamental do Cálculo

Trabalho Monográfico apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador(a): Prof. Dr. Carlos Alberto Gomes de Almeida.

Rio Tinto – PB

2026

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

C837c Costa, Jefferson Carlos Soares da.

A construção da integral de Riemann e o Teorema Fundamental do Cálculo / Jefferson Carlos Soares da Costa. - Rio Tinto, 2026.

48 f. : il.

Orientação: Carlos Alberto Gomes de Almeida.
TCC (Graduação) - UFPB/CCAE.

1. Integral de Riemann. 2. Integral de Darboux. 3. Teorema Fundamental do Cálculo. 4. Análise Real. I. Almeida, Carlos Alberto Gomes de. II. Título.

UFPB/CCAE

CDU 51

Jefferson Carlos Soares da Costa

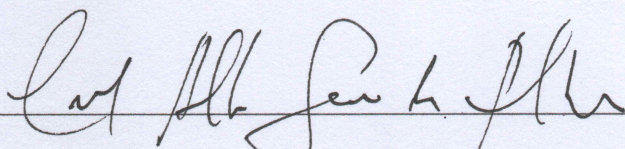
A construção da integral de Riemann e o Teorema Fundamental do Cálculo

Trabalho Monográfico apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

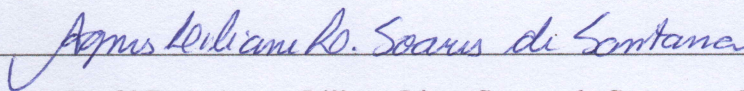
Orientador(a): Prof. Dr. Carlos Alberto Gomes de Almeida

Aprovado em 7 de agosto de 2026

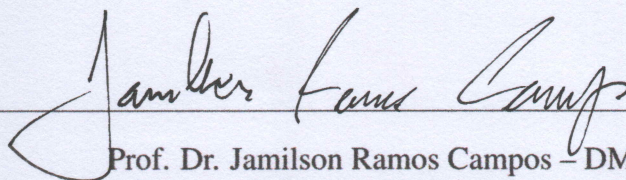
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Carlos Alberto Gomes de Almeida (Orientador) – DCX/UFPB



Prof.ª Dra. Agnes Liliane Lima Soares de Santana – DCX/UFPB



Prof. Dr. Jamilson Ramos Campos – DM/UFPB

Ao meu avô Miguel Amaro da Costa (*in
memoriam*).

AGRADECIMENTOS

O presente fez-se no passado. Aos 15 anos de idade, adquiri o hábito da leitura após descobrir meu fascínio pelo Cosmos. Passei, então, a dividir com os livros o tempo que antes reservava para assistir a episódios de Bob Esponja. Comecei com “A história da ciência para quem tem pressa” e, sem pressa, cheguei ao clássico “Cosmos”, de Carl Sagan. Minha paixão crescia exponencialmente à medida que eu adquiria conhecimento. Logo, esse interesse se estendeu à Física e, conseqüentemente, à Matemática. Antes mesmo que eu percebesse, já estava ensinando aos meus amigos tudo o que aprendia com os livros. A partir daquele momento, ficou mais do que claro o caminho que eu gostaria de seguir: o da docência.

É um privilégio descobrir, ainda tão jovem, qual caminho se deseja trilhar na vida. Assim, munido da obstinação que nunca me faltou, segui meu sonho e ingressei no curso de Licenciatura em Matemática da UFPB. Desde então, minha vida nunca mais foi a mesma. Com o passar dos períodos, fui me apaixonando cada vez mais pelos conhecimentos que as disciplinas me proporcionavam. Graças aos professores da instituição, também desenvolvi um imenso respeito pela profissão que escolhi.

A graduação é um momento ímpar na vida de qualquer pessoa. Por isso, desde o primeiro ano do curso, sempre tive medo de me formar sem sentir orgulho de minha trajetória acadêmica. Hoje, olhando para tudo em retrospecto, sinto-me pronto para o próximo capítulo. Tenho orgulho de cada decisão tomada, de tudo o que fiz e também do que escolhi não fazer. Se consegui percorrer essa jornada, foi porque contei com o apoio de muitas pessoas ao longo desses anos, às quais gostaria de agradecer.

Agradeço à minha família, pois, graças aos cuidados de minha mãe, Maria Salete Soares da Costa, a quem amo muito, pude me dedicar exclusivamente aos estudos. Agradeço também aos meus irmãos, Jane Karla Soares da Costa e Jandey Soares da Costa, que sempre estiveram dispostos a me oferecer todo o apoio necessário para que eu pudesse cumprir minhas responsabilidades na universidade. Gostaria ainda de agradecer à minha segunda família, representada por Janete Alexandre, José Claudino, Marcela Alexandre e Lara Yasmin. Não é qualquer pessoa que tem o privilégio de possuir duas famílias, e a eles também dedico minha imensa gratidão por tudo.

Por onde eu passar, levarei comigo o nome da UFPB e dos professores que fazem parte dessa universidade. Agradeço ao meu professor e orientador, Carlos Alberto, por ter tornado possível a realização deste Trabalho de Conclusão de Curso e por ter me auxiliado ao longo de

todo o semestre. Mais do que isso, agradeço pelas conversas que tivemos. Estendo meus agradecimentos aos demais membros da banca, à professora Agnes Liliane e ao professor Jamilson, pois cada um deles desempenhou um papel fundamental em meu desenvolvimento profissional.

O projeto de que mais me orgulho de ter participado durante a licenciatura foi o de monitoria. Foram quatro semestres como monitor de Introdução à Álgebra Linear e um semestre de Cálculo Vetorial e Geometria Analítica, todos sob a orientação da professora Agnes. Além disso, também fui seu bolsista no Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PI-BID). É fácil perceber a importância que Agnes teve em minha trajetória acadêmica, e sempre me lembrarei de nossa parceria com muito afeto.

Agradeço ao professor Jamilson, pois mesmo tendo sido seu aluno em apenas duas disciplinas, foi tempo suficiente para mudar a maneira como me relaciono com os estudos. Através de suas aulas fui inspirado a desejar uma pós-graduação, sempre serei grato por isso. Devo mencionar ainda o quanto foi enriquecedor ter sido instruído por grandes formadoras de professores da região: as docentes de Estágio Supervisionado Cristiane, Jussara, Graciana e Marcella. E, claro, não poderia deixar de mencionar a pessoa mais estilosa que este Campus já viu, a professora Claudilene. Já estou com saudades de encontrá-la pelos corredores.

Por fim, agradeço aos meus amigos, que tornaram mais fácil enfrentar os desafios da vida universitária: Mariany, Muriellison, Felipe, Hevillin, Sthelyo, Maciel, Márcio, Vitória, Victor, Ricardo, Layane e Carlos Henrique. Agradeço também às minhas amigas do ensino médio, Rafaela e Ana, sendo esta última a responsável pela elaboração do abstract desta monografia.

De maneira especial, encerro agradecendo ao meu amigo Maycon, que, apesar de morar na mesma cidade que eu, só tive a oportunidade de conhecer na UFPB. Foram anos de companheirismo e de uma amizade que ultrapassou os muros do Campus IV.

*Tornamos nosso mundo significativo através da
coragem de nossas perguntas e da profundidade
de nossas respostas.*

Carl Sagan

RESUMO

Esta monografia tem como objetivo realizar um estudo bibliográfico acerca da construção da integral de Riemann e do Teorema Fundamental do Cálculo, no âmbito da Análise Real. Para se estabelecer os conceitos, apresentamos inicialmente um panorama histórico do problema da determinação de áreas, desde os métodos geométricos da Antiguidade até as formulações de Riemann e Darboux, e reunimos breves biografias de matemáticos que contribuíram com a evolução da teoria. Em seguida, sistematizamos fundamentos sobre o corpo dos números reais, noções topológicas da reta, limites, continuidade e derivabilidade, necessários à compreensão da integração. Apresentamos a integral inicialmente pela abordagem de Darboux, por meio de partições, somas inferiores e superiores, integrais inferior e superior e do critério de integrabilidade; posteriormente, apresentamos as somas de Riemann, as partições pontilhadas e a norma de uma partição, para então definir a integral de Riemann. Por fim, enunciamos e demonstramos o Teorema Fundamental do Cálculo, além de explicitar uma aplicação.

Palavras-chave: Integral de Riemann. Integral de Darboux. Teorema Fundamental do Cálculo. Análise Real.

ABSTRACT

The following monograph aims to conduct a bibliographical study on the construction of the Riemann integral and the Fundamental Theorem of Calculus within the framework of Real Analysis. To establish the concepts, it first presents a historical overview of the problem of determining areas, from the geometric methods of Antiquity to the formulations developed by Riemann and Darboux, and includes brief biographical accounts of mathematicians who contributed to the development of the theory. Subsequently, it systematizes the fundamental concepts of the field of real numbers, the topological properties of the real line, limits, continuity, and differentiability, which are essential for understanding integration. The study initially presents the integral through Darboux's approach by introducing partitions, lower and upper sums, lower and upper integrals, and the criterion for integrability. Then, it presents Riemann sums, tagged partitions, and the norm of a partition, culminating in the formal definition of the Riemann integral. Finally, it states and proves the Fundamental Theorem of Calculus, in addition to presenting an application.

Keywords: Riemann Integral. Darboux Integral. Fundamental Theorem of Calculus. Real Analysis.

Sumário

Introdução	10
1 Apontamentos históricos	12
1.1 O problema da área e o caminho para o formalismo matemático	12
1.2 Alguns personagens envolvidos no tema	14
1.2.1 Arquimedes	15
1.2.2 Leibniz	15
1.2.3 Cauchy	16
1.2.4 Riemann	17
1.2.5 Darboux	18
2 Fundamentos	20
2.1 Corpo dos reais	20
2.2 Noções topológicas básicas em $\mathbb{R}$	22
2.3 Limite e continuidade	24
2.4 Derivada	27
3 A integral de Riemann e o Teorema Fundamental do Cálculo	29
3.1 Integral definida de Darboux	29
3.2 Somas de Riemann	38
3.3 Teorema Fundamental do Cálculo	40
3.4 Aplicação	43
4 Considerações finais	46
Referências	48

Introdução

Na graduação em Matemática, os cursos de Cálculo Diferencial e Integral apresentam os conceitos de derivada e integral como pilares para o estudo das funções. A integral definida pode ser introduzida a partir de uma interpretação geométrica, sendo a medida da área sob o gráfico de uma função em determinado intervalo. A derivada, por sua vez, pode ser entendida como o limite da inclinação de retas secantes que, quando existe, corresponde à inclinação de uma reta tangente a um ponto. À primeira vista, parecem ser conceitos que não se relacionam, mas, além de haver relação entre eles, disso surge um dos principais resultados da Matemática: o Teorema Fundamental do Cálculo. Esse resultado, como destacado por Lima [1], mostra a circunstância da interdependência entre derivação e integração. A formalização rigorosa desses conceitos, abordada no curso de Introdução à Análise, mais especificamente através do estudo da derivada e da construção da integral de Riemann, proporciona ao conteúdo um maior aprofundamento, preenchendo lacunas de aprendizado dos estudantes e fortalecendo a base necessária para avançar dentro da Matemática.

O principal objetivo deste trabalho é realizar uma pesquisa bibliográfica acerca da construção da integral de Riemann e do Teorema Fundamental do Cálculo. A pesquisa está situada na área da Matemática Pura, especificamente na subárea da Análise. Tal tema está voltado para o ensino superior e o objeto de conhecimento faz parte do componente curricular Introdução à Análise, do curso de Licenciatura em Matemática. A realização deste trabalho faz-se necessária pela relevância que a teoria da integral ocupa na formação de um estudante do curso de Matemática e futuro pesquisador. Durante a graduação, grande parte dos licenciandos tem contato com a integração apenas nos cursos de Cálculo, visto que muitos professores não conseguem alcançar o conteúdo na disciplina de Análise, devido ao grande volume de conteúdos e ao curto intervalo de tempo do semestre letivo. Por exemplo, este tema, visto sob o nível de formalização exigido na Análise Real, é frequentemente cobrado em processos seletivos de pós-graduação.

O trabalho está dividido em quatro capítulos. No primeiro, trazemos uma contextualiza-

ção histórica do desenvolvimento da integral, que remonta ao tempo de Arquimedes, há mais de dois mil anos, e se estende até as definições de Riemann e Darboux. Além disso, apresentamos breves biografias de alguns matemáticos que desempenharam papéis fundamentais nas teorias aqui estudadas.

O segundo capítulo, apresentamos os fundamentos que carregam a base necessária para o entendimento da Integral de Riemann e do Teorema Fundamental do Cálculo, ou seja, abordaremos propriedades fundamentais sobre o conjunto dos números reais, a topologia na reta e os conceitos de limites, continuidade e derivabilidade.

O terceiro capítulo, é dedicado ao tema deste trabalho, onde construiremos a integral de Riemann, e mostraremos sua conexão com o Teorema Fundamental do Cálculo. Concluiremos o capítulo com uma aplicação do teorema.

O trabalho encerra-se no quarto capítulo, onde refletimos sobre o tema e apresentamos as considerações finais da pesquisa.

Capítulo 1

Apontamentos históricos

Enquanto a derivada é um conceito moderno, que surgiu no século XVII, o desenvolvimento da integral começa ainda na Antiguidade com o proeminente matemático Arquimedes. Neste capítulo inicial, nos propomos a fazer um breve levantamento histórico acerca do seu desenvolvimento da integral até a formalização adquirida na Análise Real.

1.1 O problema da área e o caminho para o formalismo matemático

A noção de integral nasce, historicamente, como uma resposta ao problema: como medir com exatidão áreas delimitadas por curvas, quando o uso de polígonos parece insuficiente? Para o astrônomo e escritor Sagan [2], somos capazes de tornar nosso mundo significativo através da coragem de nossas perguntas e da profundidade de nossas respostas. E tal resposta para o problema da área exigiu um nível de formulação tão profunda que foram necessários mais de dois milênios para que fosse desenvolvida. Ao longo desse período, a Matemática foi conduzida desde técnicas geométricas de aproximação até definições analíticas rigorosas baseadas em limites. O caminho que vai de Arquimedes de Siracusa (c. 287–212 a.C.) a Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866) é parte da história de como a Matemática encontrou o rigor conhecido hoje.

Na Grécia Antiga, a ideia de integral surge de forma ainda embrionária no problema da quadratura do círculo. Como conta Roque [3], Arquimedes dedicou parte de seu tempo ao estudo do número π e de áreas de figuras curvilíneas através de um refinamento do método de Eudoxo, do século V a.C. O método consistia em inscrever polígonos regulares no interior

de uma figura curvada, como um círculo, e ir dobrando o número de lados até que a forma do polígono se assemelhasse ao máximo com o círculo. A grande ideia de Arquimedes foi comprimir a figura com polígonos inscritos e circunscritos, cujas áreas tendem para a figura inicial por aproximação inferior e superior, ou seja, com margens de erro por excesso e por falta.

Essa técnica por muito tempo foi conhecida como “Método da Exaustão”. Entretanto, para Roque [3], a nomenclatura não é mais adequada, visto que o método se baseia no fato de que o infinito não pode ser exaurido, pois Arquimedes apenas se aproximava sem nunca alcançá-lo. A matemática grega ainda não estava pronta para lidar com a noção do “infinitamente pequeno”, conhecida posteriormente como infinitésimos. Foi só durante o século XVII, quando surgem os nomes de Isaac Newton (1642–1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) como os criadores do cálculo infinitesimal, que as ideias de Eudoxo e Arquimedes foram levadas ao limite.

É nesse contexto que surge o conceito de integral como a área sob uma curva. Ao invés de polígonos regulares, Newton e Leibniz usavam uma série de retângulos cujas áreas individuais eram possíveis de se encontrar. Pelo aumento do número de retângulos, a medida de suas bases vai tendendo a zero, o somatório de suas áreas passa a corresponder à área sob a curva. Foi com base nessa ideia que Leibniz introduziu o símbolo de soma $\int$ que é usado atualmente. Entretanto, como aponta Launay [4], muitos pontos na teoria dos infinitesimais ainda precisavam de um rigor que tanto Newton quanto Leibniz eram incapazes de atribuir.

A partir do século XIX, o matemático Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) viu a necessidade de estabelecer definições mais cuidadosas acerca da integração. De acordo com Ville-neuve [5], Cauchy formulou a integral definida considerando-se uma função contínua f definida em um intervalo $[a, b]$, com $a < b$, e uma partição $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ de $[a, b]$. A partir dessa partição, define-se a chamada soma de Cauchy por

$$S_C(f, a, b, n) = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}).$$

E dela, obtém-se a integral no sentido de Cauchy:

$$I_C(f, a, b) = \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_C(f, a, b, n).$$

Dessa forma, a integral é entendida como o limite das somas de Cauchy associadas a

uma função contínua. Para calcular cada uma dessas somas, Cauchy não escolhe arbitrariamente um ponto de cada subintervalo da partição. Em vez disso, utiliza pontos da extremidade esquerda. Além disso, Cauchy emprega partições obtidas por progressões aritméticas ou geométricas.

Posteriormente, Riemann exibiu uma função descontínua em uma infinidade de pontos em um intervalo, mas cuja integral existe e define uma função contínua que, para a infinidade de pontos em questão, não tem derivada. A função de Riemann, segundo Boyer [6], evidenciou que a integral exigia uma definição ainda mais precisa do que a de Cauchy. Este, tratou de generalizar as somas de Cauchy, permitindo que a função fosse avaliada em qualquer ponto de cada subintervalo da partição, e não apenas nas extremidades desses subintervalos. Entretanto, como destaca Villeneuve [5], sua maior contribuição não foi a utilização dessa definição em si, mas a formulação de um novo critério de integrabilidade baseado no comportamento da função em cada subintervalo da partição. Essa mudança de perspectiva permitiu investigar a integrabilidade de funções muito mais gerais do que àquelas consideradas por Cauchy.

Alguns anos mais tarde, Darboux demonstrou que o critério proposto por Riemann é equivalente ao critério obtido por meio das somas superiores e inferiores. Com isso, introduziu uma nova construção da integral, baseada no ínfimo das somas superiores e no supremo das somas inferiores, simplificando enormemente a verificação da integrabilidade de funções limitadas. Essa abordagem, atualmente conhecida como construção de Darboux da integral de Riemann ou integral de Darboux-Riemann, é amplamente ensinada em livros de Matemática [5].

1.2 Alguns personagens envolvidos no tema

No decorrer da história, muitos matemáticos ajudaram no desenvolvimento dos conceitos e das teorias que conhecemos hoje. Alguns desses personagens históricos terão suas biografias apresentadas a seguir. Para tal exposição, utilizamos imagens e textos presentes em [3, 5, 6, 7, 8] e [9].

1.2.1 Arquimedes

O polímata grego Arquimedes, nascido em c. 287 a.C. em Siracusa, na Sicília, ganhou destaque como engenheiro e matemático. Ele desenvolveu o que hoje é conhecido como Princípio de Arquimedes, uma lei da hidrostática que garante que o peso da água que um corpo desloca, quando imerso em um fluido, é igual ao peso que ele perde como efeito do empuxo.

Arquimedes é o matemático prático mais conhecido da Grécia Antiga, responsável pela criação de armas militares e sistemas de bombeamento. Além disso, chegou perto de determinar o valor de π e dedicou-se à quadratura da parábola, calculando sua área inspirado no método de Eudoxo [7]. Ele foi morto por um soldado romano no cerco de Siracusa, em 212 a.C. Isso ocorreu apesar das ordens do general romano Marcelo para que sua vida fosse poupada.

1.2.2 Leibniz

Gottfried Wilhelm Leibniz, nascido em Leipzig, na Alemanha, em 1646, cresceu em uma família acadêmica. Seu pai era professor de filosofia moral e sua mãe era filha de um professor de direito. Aos 12 anos, tornou-se fluente em latim e, aos 16, recebeu seu primeiro diploma de graduação, tornando-se bacharel em Filosofia pela Universidade de Leipzig. A seguir, uma imagem de Leibniz como consta em Eves [8].

Figura 1 – Gottfried Leibniz



Fonte: Eves, 2011.

Aos 20 anos de idade, estava preparado para o grau de doutor em Direito, este lhe foi recusado devido à sua pouca idade. Por causa disso, deixou Leipzig e obteve seu doutorado na Universidade de Altdorf. Entrou no serviço diplomático como um influente representante do governo.

Como conta Boyer [6], foi por volta de 1676 que Leibniz chegou às mesmas conclusões que Newton sobre o cálculo, o que deu início à sua célebre disputa sobre a criação do cálculo diferencial. Nunca se casou e sua morte, em 1716, teve pouca repercussão. Seus êxitos foram ofuscados pela fama de Newton e só receberam reconhecimento vários anos após sua morte.

1.2.3 Cauchy

Augustin-Louis Cauchy foi um matemático francês nascido em Paris em 21 de agosto de 1789. Estudou na École Polytechnique, após ser aprovado em segundo lugar no exame de admissão de 1805. Dois anos depois, quando se formou, entrou para a escola de engenharia civil, a École des Ponts et Chaussées. Em 1810, Cauchy saiu de Paris e foi para Cherbourg, uma cidade portuária no norte da França, onde trabalhou como engenheiro por dois anos [5]. Segue uma pintura de Cauchy, tal como apresentada em [8].

Figura 2 – Augustin-Louis Cauchy



Fonte: Eves, 2011.

Em 1815, Cauchy retornou à École Polytechnique como professor assistente, após se

destacar na tratados. No ano seguinte, assumiu a cadeira de professor titular e reformou radicalmente seu ensino, dando origem ao movimento de conscientização de que só poderiam ser usadas propriedades que tivessem sido previamente definidas [3].

Ao longo de sua vida, também foi pioneiro no estudo da Análise Complexa e da teoria dos grupos de permutação. Pesquisou sobre convergência e divergência de séries infinitas, equações diferenciais, determinantes e física matemática. Para o Cálculo, fez importantes contribuições com suas definições de funções contínuas, derivada e integral definida. Em decorrência de uma crise severa de febre e problemas respiratórios, faleceu em 23 de maio de 1857 aos 67 anos, na localidade de Sceaux, nos arredores de Paris.

1.2.4 Riemann

Georg Friedrich Bernhard Riemann nasceu em 17 de setembro de 1826, em Breselenz, atual Alemanha, e faleceu em 20 de julho de 1866, em Selasca, na Itália. Filho de um pastor luterano, recebeu uma educação inicial modesta, mas marcada pelo incentivo aos estudos. Em 1846, ingressou na Universidade de Göttingen com a intenção inicial de estudar Teologia, entretanto seu interesse pela Matemática levou-o a transferir-se para a faculdade de Filosofia, onde teve contato com Carl Friedrich Gauss [6]. A seguir, apresentamos uma imagem de Riemann como consta em Eves [8].

Figura 3 – Georg Friedrich Bernhard Riemann



Fonte: Eves, 2011.

Riemann tornou-se uma das figuras mais importantes da Matemática do século XIX. Sua tese de doutorado, defendida em 1851 sob orientação de Gauss, tratou da teoria das funções de variáveis complexas e introduziu ideias que deram origem às chamadas superfícies de Riemann. Em sua dissertação de habilitação, estudou a representação de funções por séries trigonométricas e apresentou condições relacionadas à integrabilidade, contribuindo para a formulação da integral que hoje leva seu nome. Além disso, seus trabalhos sobre geometria exerceram profunda influência no desenvolvimento posterior da física teórica, em particular na teoria da relatividade. Apesar disso, sempre permaneceu um homem de modos tímidos [6].

1.2.5 Darboux

Jean Gaston Darboux nasceu em Nîmes, na França, em 13 de agosto de 1842 e faleceu em Paris, em 23 de fevereiro de 1917. Formou-se na École Normale Supérieure, instituição que escolheu por desejar seguir a carreira de professor. Ainda jovem, demonstrou talento para a pesquisa matemática, publicando trabalhos sobre superfícies ortogonais e defendendo, em 1866, sua tese de doutorado sobre esse tema. A seguir, uma imagem de Darboux, apresentada em [9].

Figura 4 – Gaston Darboux



Fonte: MacTutor, 2020.

Darboux realizou importantes contribuições à geometria diferencial e à análise matemática. Seu nome ficou especialmente associado à chamada integral de Darboux, introduzida em

seus estudos sobre equações diferenciais e relacionada, posteriormente, a uma nova forma de compreender a integral de Riemann por meio das somas superiores e inferiores [9].

Capítulo 2

Fundamentos

Em nosso estudo sobre a integral de Riemann e o Teorema Fundamental do Cálculo, empregaremos conceitos essenciais sobre números reais, topologia na reta, limites, continuidade e derivada de funções. Tais conceitos serão tratados de maneira informal e sem demonstrações, com o objetivo claro de servir apenas como referência ao terceiro capítulo deste trabalho. Para um estudo mais aprofundado, recomendamos as referências [1, 10] e [11], as quais foram usadas como base para a escrita deste capítulo.

2.1 Corpo dos reais

Dado um conjunto não vazio K , munido de duas operações binárias, chamadas adição e multiplicação, dizemos que K é um corpo quando tais operações satisfazem as propriedades de associatividade, comutatividade, distributividade, existência do elemento neutro da adição e da multiplicação, inverso multiplicativo e simétrico aditivo. Sabe-se que, além de corpo, o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é ordenado, o que significa que é possível estabelecer uma relação de ordem, ou seja, podemos comparar seus elementos através das propriedades de transitividade, tricotomia, monotonicidade da adição e da multiplicação.

Em um corpo ordenado temos a noção de intervalo. Seja $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$. Definimos o intervalo fechado por $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$. Tal intervalo representa o conjunto de todos os elementos de $\mathbb{R}$ que estão entre a e b , inclusive os extremos a e b . Definimos o intervalo aberto por $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$ representa o mesmo conjunto anterior, mas excluindo a e b .

A partir da relação de ordem, podemos introduzir a noção de módulo de um número real. Seja $\mathbb{R}$ um corpo ordenado e $x \in \mathbb{R}$. Chama-se módulo ou valor absoluto de x o maior

dos valores x e $-x$, e indicamos $|x| = \max\{-x, x\}$. Considerando a reta real, podemos dizer, geometricamente, que o módulo de x representa a distância de x até a origem da reta. Outra maneira de definirmos o módulo de um elemento x pertencente a $\mathbb{R}$ é

$$|x| = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$$

Vejamos agora algumas propriedades importantes acerca do módulo de um número real.

Para todo $a, b, x, y, z \in \mathbb{R}$, com $a > 0$ e $b > 0$, então valem:

- (i) $-a \leq x \leq a \iff |x| \leq a$;
- (ii) $|x - a| \leq b \iff a - b \leq x \leq a + b$;
- (iii) $|x + y| \leq |x| + |y|$;
- (iv) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$;
- (v) $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$;
- (vi) $|x - y| \geq |x| - |y|$.

Seja $X \subset \mathbb{R}$. Dizemos que X é limitado inferiormente se existe um $a \in \mathbb{R}$ tal que $x \geq a$, $\forall x \in X$, ou seja, temos que $X \subset [a, \infty)$. Analogamente, $X \subset \mathbb{R}$ diz-se limitado superiormente quando existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq b$, $\forall x \in X$, ou seja, temos que $X \subset (-\infty, b]$. Os números a e b são chamados, respectivamente, cota inferior e cota superior de X . Quando $X \subset \mathbb{R}$ é limitado inferiormente e superiormente, será chamado de limitado, isto é, existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $X \subset [a, b]$, o que é equivalente a dizer que existe $k > 0$ tal que $|x| \leq k$, $\forall x \in X$.

Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto limitado inferiormente. Dizemos que $m \in \mathbb{R}$ é *ínfimo* para o conjunto X quando ele for a maior das cotas inferiores. De X , denota-se $m = \inf X$. Mais precisamente, $m \in \mathbb{R}$ é ínfimo para X se satisfizer:

1. $\forall x \in X$, temos $x \geq m$; isto é, m é uma cota inferior para X .
2. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_0 \in X$ tal que $m \leq x_0 < m + \varepsilon$.

Analogamente, seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto limitado superiormente. Dizemos que $M \in \mathbb{R}$ é *supremo* para o conjunto X quando ele for a menor das cotas superiores. De X , denota-se $M = \sup X$. Mais precisamente, $M \in \mathbb{R}$ é supremo para X se satisfizer:

1. $\forall x \in X$, temos $x \leq M$; isto é, M é uma cota superior para X .
2. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_0 \in X$ tal que $M - \varepsilon < x_0 \leq M$.

2.2 Noções topológicas básicas em $\mathbb{R}$

Convém introduzir outras noções da estrutura da reta real que serão importantes para o estudo de limites, continuidade e derivada de funções reais, bem como para a construção da integral de Riemann. Em particular, ideias como proximidade entre pontos, intervalos, vizinhanças e conjuntos fechados surgem quando desejamos formalizar o comportamento de uma função em torno de determinado ponto.

Dado um conjunto $X \subset \mathbb{R}$, um ponto chama-se ponto interior de X quando existe um intervalo aberto (a, b) tal que $x \in (a, b) \subset X$. Isto é, todos os pontos suficientemente próximos de x ainda pertencem ao conjunto X . Para que $x \in \mathbb{R}$ seja um ponto interior do conjunto X é necessário e suficiente que exista $\varepsilon > 0$ tal que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset X$. Com efeito, se $x \in (a, b) \subset X$, seja ε o menor dos números positivos $x - a$ e $b - x$. Então $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset (a, b)$, logo $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset X$. Em outras palavras, um ponto x é interior ao conjunto X se for possível construir um intervalo aberto centrado em x tal que este fique inteiramente contido em X . Podemos chamar esse intervalo em questão de vizinhança de x . Quando cada ponto do conjunto possuir uma vizinhança inteiramente contida nele, dizemos que o conjunto é aberto.

Equivalentemente, x é um ponto interior do conjunto X se, e somente se, existe $\varepsilon > 0$ tal que $|y - x| < \varepsilon \Rightarrow y \in X$. De fato, $|y - x| < \varepsilon$ significa que y pertence ao intervalo aberto $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. Dado $X \subset \mathbb{R}$, o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}$ que são interiores a X será representado por $\text{int}(X)$ e chamado o interior do conjunto X . Temos de imediato que $\text{int}(X) \subset X$ e se $X \subset Y$, então $\text{int}(X) \subset \text{int}(Y)$.

Exemplo 2.2.1 Se $X = (a, b)$, $X = (-\infty, b)$ ou $X = (a, +\infty)$, então $\text{int}(X) = X$. No primeiro caso, para todo $x \in X$ temos $x \in (a, b) \subset X$. No segundo caso, dado arbitrariamente $x \in X$, escolhemos $a < x$ e temos $x \in (a, b) \subset X$. O terceiro caso é análogo ao segundo.

Convém lembrarmos que uma sequência de números reais é uma lista infinita $(x_n) = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ em que $x_n \in \mathbb{R}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como uma sequência pode ser vista como uma função definida em $\mathbb{N}$, interessa-nos estudar o comportamento de seus termos quando $n \rightarrow +\infty$.

Dizemos que uma sequência (x_n) converge para $L \in \mathbb{R}$, e escrevemos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = L,$$

se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_0$, $|x_n - L| < \varepsilon$. Em outras palavras, a partir de certo índice n_0 , todos os termos da sequência encontram-se no intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, podendo ficar arbitrariamente próximos de L .

Diremos que um ponto a é aderente a um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ quando a for limite de uma sequência de pontos $x_n \in X$. Todo ponto $a \in X$ é aderente a X : basta tomar a sequência de pontos $x_n = a$. E chamaremos fecho do conjunto X ao conjunto $\overline{X}$ formado pelos pontos aderentes a X . É fácil ver que, $X \subset Y \Rightarrow \overline{X} \subset \overline{Y}$. Tem-se também $X \subset \overline{X}$ para todo X . No caso de ser $X = \overline{X}$, diremos que o conjunto X é fechado. Assim, um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é fechado se, e somente se, todo ponto aderente a X pertence a X . Em outras palavras, para que X seja fechado é necessário e suficiente que cumpra a seguinte condição: se $x_n \in X$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim x_n = a$, então $a \in X$. Quando $X \subset \mathbb{R}$ é não-vazio, limitado e fechado, tem-se $\sup X \in X$ e $\inf X \in X$. Se, além de fechado, o conjunto for também limitado, o chamaremos de compacto.

Seja $X \subset \mathbb{R}$. Um número $a \in \mathbb{R}$ chama-se ponto de acumulação do conjunto X quando todo intervalo aberto $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, de centro a , contém algum ponto $x \in X$ diferente de a . O conjunto dos pontos de acumulação de X será representado pela notação X' , chamado de derivado de X). A condição $a \in X'$ (a é ponto de acumulação de X) exprime-se simbolicamente do modo seguinte: $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in X$ tal que $0 < |x - a| < \varepsilon$.

Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$. Dizemos que a é um ponto de acumulação à direita de X , e escrevemos $a \in X'_+$ se, e somente se, $\forall \delta > 0, X \cap (a, a + \delta) \neq \emptyset$. Analogamente, dizemos que a é um ponto de acumulação à esquerda de X , e escrevemos $a \in X'_-$ se, e somente se, $\forall \delta > 0, X \cap (a - \delta, a) \neq \emptyset$. Note que $a \in X'$ se, e somente se, $a \in X'_+$ ou $a \in X'_-$.

Um ponto $a \in X$ que não é ponto de acumulação de X chama-se um ponto isolado de X . Para que $a \in X$ seja um ponto isolado é necessário e suficiente que exista $\varepsilon > 0$ tal que $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap X = \{a\}$, por exemplo, todo ponto $a \in \mathbb{Z}$ é um ponto isolado de $\mathbb{Z}$.

A seguir, enunciaremos alguns resultados importantes acerca dos conceitos topológicos expostos acima. Suas demonstrações podem ser facilmente conferidas nos livros de referência do capítulo.

Teorema 2.2.2 Um ponto $a \in \mathbb{R}$ é aderente a um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ tem-se $X \cap (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \neq \emptyset$. Ou seja, a é aderente a X se, e somente se, toda vizinhança de a contém algum ponto de X .

Teorema 2.2.3 Um conjunto $F \subset \mathbb{R}$ é fechado se, e somente se, seu complementar $\mathbb{R} - F$ é aberto.

Teorema 2.2.4 O fecho de todo conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é um conjunto fechado, isto é, $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$.

Teorema 2.2.5 Dados $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$, as seguintes afirmações são equivalentes:

1. $a \in X'$ (a é ponto de acumulação de X);
2. $a = \lim x_n$, onde (x_n) é uma sequência de elementos de X , dois a dois distintos;
3. Todo intervalo aberto contendo a possui uma infinidade de elementos de X .

Teorema 2.2.6 Para todo $X \subset \mathbb{R}$, tem-se $\overline{X} = X \cup X'$. Ou seja, o fecho de um conjunto X é obtido acrescentando-se a X os seus pontos de acumulação.

2.3 Limite e continuidade de funções

Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função com valores reais, definida num subconjunto $X \subset \mathbb{R}$, e seja $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de X , isto é, $a \in X'$. Diremos que o número real L é o limite de $f(x)$ quando x tende para a , e escreveremos $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ quando $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0; x \in X, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Ao considerarmos o limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, não exigimos que a pertença ao domínio da função f . Nos casos mais interessantes de limite, tem-se $a \notin X$. Mesmo que se tenha $a \in X$, a afirmação $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ nada diz a respeito do valor $f(a)$. Ela descreve apenas o comportamento dos valores $f(x)$ para x próximo de a , com $x \neq a$. Explicitamente, é possível ter-se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$. Por exemplo, considere $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ onde $f(x) = 1$ para todo $x \neq 0$ e $f(0) = 0$. Neste caso é imediato que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

Sejam $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ funções e $a \in X'$ tais que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$. Então, valem as seguintes propriedades aritméticas:

- (a) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = L \pm M$ (o limite da soma é a soma dos limites e o limite da diferença é a diferença dos limites);
- (b) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = LM$ (o limite do produto é o produto dos limites);
- (c) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$, desde que $M \neq 0$.

As definições de limite abrangem também os casos chamados limites à direita e à esquerda. Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $a \in X'_+$. Dizemos que $L \in \mathbb{R}$ é o limite de $f(x)$ quando x tende para a pela direita, e escrevemos $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ quando para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in X \cap (a, a + \delta)$, então $|f(x) - L| < \varepsilon$. Note que a expressão $x \in X \cap (a, a + \delta)$ pode ser escrita como $x \in X$ e $a < x < a + \delta$.

Analogamente, sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $a \in X'_-$. Dizemos que $L \in \mathbb{R}$ é o limite à esquerda de $f(x)$ quando x tende para a pela esquerda, e escrevemos $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$, se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in X$, se $a - \delta < x < a$, então $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Exemplo 2.3.1 A função $y = \sqrt{x}$ tem domínio $x \geq 0$. Podemos considerar seu limite com $x \rightarrow 0$ segundo a definição dada, porém isso resultará numa aproximação de $x = 0$ somente por valores positivos. Daí escrevermos, para enfatizar esse fato, $x \rightarrow 0^+$. Igualmente, o limite de $\sqrt{-x}$ com $x \rightarrow 0$ será um limite com $x \rightarrow 0^-$.

De um modo geral, sendo f uma função cujo domínio D só contenha pontos à direita de um ponto $x = a$, que seja ponto de acumulação de D , então o limite de $f(x)$ com $x \rightarrow a$, se existir, será um limite à direita. Ao contrário, se D só contiver pontos à esquerda de $x = a$, o limite de $f(x)$ com $x \rightarrow a$, se existir, será um limite à esquerda.

Teorema 2.3.2 Sejam $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $a \in X'_+ \cap X'_-$ (isto é, a é ponto de acumulação à esquerda e à direita do conjunto X). Então, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ se, e somente se, $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$. Ou seja, o limite de f existe em a se, e somente se, os limites laterais em a existirem e forem iguais.

Uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se contínua no ponto $a \in X$ quando é possível tornar $f(x)$ arbitrariamente próximo de $f(a)$ desde que se tome x suficientemente próximo de a . Em termos precisos, diremos que $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua no ponto $a \in X$ quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, pudermos achar $\delta > 0$ tal que $x \in X$ e $|x - a| < \delta$ impliquem $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Ao contrário da definição de limite, só faz sentido indagar se f é contínua no ponto a quando $a \in X$. Se a é um ponto isolado de X , então toda função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua no ponto a . Dado qualquer $\varepsilon > 0$, basta tomar $\delta > 0$ tal que $(a - \delta, a + \delta) \cap X = \{a\}$. Então $|x - a| < \delta$ com $x \in X$ implica $x = a$ e, portanto, $|f(x) - f(a)| = 0 < \varepsilon$. Em particular, se todos os pontos de X são isolados, então qualquer função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua.

Seja agora $a \in X$ um ponto de acumulação de X . Então $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua no ponto a se, e somente se, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Isto reduz essencialmente a noção de função contínua à de limite.

Sejam $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas, então valem as seguintes afirmações:

- (a) $f \pm g$ é contínua;
- (b) $f \cdot g$ é contínua;
- (c) f/g é contínua, se $g(x) \neq 0, \forall x \in X$.

Dada $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, um ponto de descontinuidade (ou, simplesmente, uma descontinuidade) da função f é um ponto $a \in X$ tal que f não é contínua no ponto a .

Dizer, portanto, que $a \in X$ é um ponto de descontinuidade de $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ equivale a afirmar a existência de um número $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $\delta > 0$, pode-se encontrar um $x_\delta \in X$ com $|x_\delta - a| < \delta$, mas $|f(x_\delta) - f(a)| \geq \varepsilon$.

Exemplo 2.3.3 Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 0$, se $x \in \mathbb{Q}$, e $f(x) = 1$, se $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Então todo número $a \in \mathbb{R}$ é um ponto de descontinuidade de f , pois o limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ não existe.

A continuidade de uma função garante que ela não apresente saltos em seu comportamento. Essa ideia é formalizada pelo Teorema do Valor Intermediário, que assegura que uma função contínua assume todos os valores entre suas imagens nos extremos de um intervalo.

Teorema 2.3.4 (Teorema do Valor Intermediário) Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Se $f(a) < d < f(b)$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.

Corolário 2.3.5 Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ contínua num intervalo I , que pode ser fechado ou não, limitado ou ilimitado. Se $a < b$ pertencem a I e $f(a) < d < f(b)$, então existe $c \in I$ tal que $f(c) = d$.

Corolário 2.3.6 Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ contínua num intervalo I . Então $f(I)$ é um intervalo.

Teorema 2.3.7 (Teorema de Weierstrass ou do Valor Extremo) Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua no intervalo fechado $[a, b]$. Então f é limitada e assume seu valor máximo e seu valor mínimo em $[a, b]$.

Dizemos que uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uniformemente contínua se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todos $x, y \in I$, se $|x - y| < \delta$, então $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Sendo $\delta > 0$ um valor que depende do $\varepsilon > 0$ e não dos pontos x, y .

Dizemos que uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é de Lipschitz se existe $M > 0$ tal que, para todos $x, y \in I$, temos $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$. A constante $M > 0$ é chamada de constante de Lipschitz. Dessas definições, seguem dois resultados importantes: Toda função Lipschitz é uniformemente contínua e toda função contínua em um intervalo fechado e limitado é uniformemente contínua.

2.4 Derivada

Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X \cap X'$. Dizemos que a função f é derivável no ponto a quando existe o limite

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Quando esse limite existe, seu valor é denominado derivada de f no ponto a . A razão

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

representa a taxa média de variação de f entre os pontos a e x . Geometricamente, ela corresponde ao coeficiente angular da reta secante ao gráfico da função que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(x, f(x))$.

À medida que x se aproxima de a , as retas secantes tendem a uma reta limite, denominada reta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$. O coeficiente angular dessa reta tangente é precisamente o valor da derivada $f'(a)$.

Fazendo a mudança de variável $h = x - a$, ou equivalentemente $x = a + h$, a definição da derivada pode ser reescrita na forma

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Essa formulação é frequentemente mais usada em demonstrações e aplicações. Além da derivada usual, podem ser consideradas as derivadas laterais. Se $a \in X \cap X'_+$, isto é, se a é um ponto de acumulação à direita pertencente ao domínio da função, define-se, desde que esse limite exista, a derivada à direita de f em a por

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

De modo análogo, se $a \in X \cap X'_-$, define-se a derivada à esquerda de f em a por

$$f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Quando a é ponto de acumulação de X , a derivada $f'(a)$ existe se, e somente se, as derivadas laterais existem e possuem o mesmo valor. Em particular, sempre que uma função é derivável em um ponto, ela necessariamente é contínua nesse ponto, como estabelece o resultado a seguir.

Teorema 2.4.1 Se existe a derivada $f'(a)$, então f é contínua no ponto a .

Agora vejamos algumas propriedades. Sejam $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ deriváveis no ponto $a \in X \cap X'$. Então $f \pm g$, $f \cdot g$ e f/g , caso $g(a) \neq 0$, são deriváveis nesse mesmo ponto. Além disso, tem-se:

- (a) $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$;
- (b) $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$;
- (c) $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g(a)^2}$.

Vamos enunciar dois importantes teoremas sobre derivabilidade com diversas aplicações dentro do Cálculo Diferencial.

Teorema 2.4.2 (Teorema de Rolle) Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e derivável no intervalo aberto (a, b) . Se $f(a) = f(b)$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Teorema 2.4.3 (Teorema de Lagrange ou Teorema do Valor Médio) Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) . Então, existe um ponto $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

O Teorema de Rolle pode ser entendido como um caso particular do Teorema de Lagrange. De fato, quando $f(a) = f(b)$, a reta secante que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ possui inclinação igual a zero. Nesse caso, o Teorema de Lagrange garante a existência de um ponto $c \in (a, b)$ no qual a reta tangente ao gráfico de f possui a mesma inclinação da secante, isto é, $f'(c) = 0$. Geometricamente, o Teorema de Lagrange diz que, sob hipóteses adequadas de continuidade e derivabilidade, existe pelo menos um ponto do intervalo em que a inclinação da tangente é igual à inclinação média da função no intervalo $[a, b]$.

Capítulo 3

A integral de Riemann e o Teorema Fundamental do Cálculo

Neste capítulo será apresentada a construção da integral de Riemann, desenvolvendo os principais conceitos e resultados que fundamentam essa construção. Em seguida, será enunciado e demonstrado o Teorema Fundamental do Cálculo, evidenciando a relação entre integração e derivação. Por fim, será apresentada uma aplicação desse teorema. A exposição deste capítulo baseia-se nas referências [1, 10, 11] e [12].

3.1 Integral definida de Darboux

Nos cursos de Análise Real é frequente que a teoria da integração seja inicialmente desenvolvida por meio da abordagem de Darboux. Essa construção possui a vantagem de tornar mais claro o critério de integrabilidade, pois permite comparar aproximações de maneira simplificada. Além disso, para funções limitadas em intervalos fechados, a integral de Darboux é equivalente à integral de Riemann, razão pela qual muitos textos utilizam essa abordagem como caminho inicial para a construção rigorosa da teoria da integração.

Sendo $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada, o primeiro passo para construir a integral consiste em dividir o intervalo $[a, b]$ em subintervalos.

Definição 3.1.1 Chamamos de partição do intervalo $[a, b]$ qualquer conjunto finito de pontos $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$. A partição P divide o intervalo $[a, b]$ nos subintervalos $[t_0, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{n-1}, t_n]$.

Vamos definir o conceito de refinamento de uma partição.

Definição 3.1.2 Dizemos que Q é um refinamento de P quando todos os pontos da partição P pertencem à partição Q , isto é, quando $P \subset Q$.

Sejam $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitada e P uma partição de $[a, b]$. Definimos o ínfimo e o supremo de f em cada subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$ da partição, respectivamente, por

$$m_i = \inf_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f(x) \quad \text{e} \quad M_i = \sup_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f(x).$$

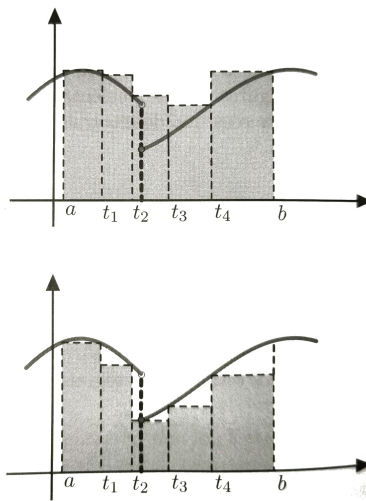
Os números m_i e M_i representam, respectivamente, a menor e a maior altura associadas ao gráfico de f naquele subintervalo. A partir desses valores, construímos duas somas que desempenham papel fundamental na teoria da integral.

Definição 3.1.3 Sejam $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitada e $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ uma partição de $[a, b]$. Definimos as somas superior e inferior de f , em relação à partição P , respectivamente, por

$$S(f; P) := \sum_{i=1}^n M_i(t_i - t_{i-1}) \quad \text{e} \quad s(f; P) := \sum_{i=1}^n m_i(t_i - t_{i-1}).$$

A Figura 5 traz uma ilustração das somas de Darboux. A primeira representa a soma superior e a segunda, a soma inferior.

Figura 5 – Representação geométrica.



Fonte: Zahn, 2022.

Geometricamente, quando f é não negativa, a soma superior corresponde à área total de retângulos construídos acima do gráfico da função, enquanto a soma inferior corresponde à área

de retângulos construídos abaixo do gráfico. Dessa forma, tem-se sempre $s(f; P) \leq S(f; P)$. À medida que refinamos a partição, espera-se que essas aproximações se tornem cada vez mais próximas umas das outras e da verdadeira área abaixo do gráfico da função.

Definição 3.1.4 Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitada. Considere $\Lambda = \{P; P \text{ é uma partição de } [a, b]\}$. Definimos a integral superior e a integral inferior de f em $[a, b]$, respectivamente, por

$$\int_a^{\bar{b}} f = \inf_{P \in \Lambda} S(f; P) \quad \text{e} \quad \int_{\underline{a}}^b f = \sup_{P \in \Lambda} s(f; P).$$

Note que quando a função é maior ou igual a zero, essas integrais representam, respectivamente, a melhor aproximação por excesso e por falta da área delimitada pelo gráfico de f com o eixo horizontal dentro do intervalo definido.

Definição 3.1.5 Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitada. Dizemos que f é integrável se as integrais superior e inferior forem iguais, ou seja, se

$$\int_a^b f = \int_a^b f.$$

Chamamos o seu valor numérico de integral definida de f no intervalo $[a, b]$. Nesse caso, escrevemos

$$\int_a^b f \quad \text{ou} \quad \int_a^b f(x) dx.$$

Exemplo 3.1.6 Considere a função de Dirichlet $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Mostraremos que f não é integrável em $[0, 1]$. Para isso, considere $P = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1\}$ uma partição qualquer de $[0, 1]$. Como os números irracionais são densos em $\mathbb{R}$, todo subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$ contém algum número irracional. Assim, para cada $i = 1, \dots, n$, temos

$$m_i = \inf_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f(x) = 0.$$

Portanto, qualquer que seja a partição P de $[0, 1]$, obtemos

$$s(f; P) = \sum_{i=1}^n m_i(t_i - t_{i-1}) = 0.$$

Da mesma forma, pela densidade dos números racionais em $\mathbb{R}$, todo subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$ contém algum número racional. Logo, para cada $i = 1, \dots, n$,

$$M_i = \sup_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f(x) = 1,$$

desse modo,

$$S(f; P) = \sum_{i=1}^n M_i(t_i - t_{i-1}) = (t_1 - t_0) + (t_2 - t_1) + \dots + (t_n - t_{n-1}) = t_n - t_0 = 1 - 0 = 1.$$

Como isso vale para toda partição P de $[0, 1]$, segue que

$$\int_0^1 f = \sup_{P \in \Lambda} s(f; P) = 0$$

e

$$\int_0^1 f = \inf_{P \in \Lambda} S(f; P) = 1.$$

donde,

$$\int_0^1 f = 0 \quad \text{e} \quad \int_0^1 f = 1.$$

Assim, f não é integrável em $[0, 1]$.

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada. Definimos a oscilação de f em $[a, b]$, denotada por $\omega(f; [a, b])$, como a diferença entre o supremo e o ínfimo dos valores da função nesse intervalo. Em outras palavras,

$$\omega(f; [a, b]) = \sup_{x \in [a, b]} f(x) - \inf_{x \in [a, b]} f(x).$$

A oscilação mede a variação máxima dos valores da função em um intervalo. Quanto menor for a oscilação, mais uniforme é o comportamento da função nesse conjunto. Com isso podemos enunciar um importante critério de integrabilidade.

Teorema 3.1.7 (Critério de Darboux) Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada. São equivalentes as seguintes afirmações:

- (a) f é integrável em $[a, b]$;
- (b) Para todo $\varepsilon > 0$, existe uma partição P de $[a, b]$ tal que $S(f; P) - s(f; P) < \varepsilon$;
- (c) Para todo $\varepsilon > 0$, existe uma partição $P = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ de $[a, b]$ tal que

$$\sum_{i=1}^n \omega(f; [t_{i-1}, t_i]) (t_i - t_{i-1}) < \varepsilon.$$

Demonstração. Para mostrar que todas as afirmações são equivalentes, basta mostrar que $(a) \Leftrightarrow (b)$ e $(b) \Leftrightarrow (c)$. Vamos começar provando que $(a) \Leftrightarrow (b)$.

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitada. Suponhamos que f seja integrável. Logo, dado $\varepsilon > 0$, existem P_1, P_2 , partições de $[a, b]$, tais que

$$S(f; P_1) - s(f; P_2) < \varepsilon.$$

Considere $P = P_1 \cup P_2$, que é um refinamento de ambas as partições P_1 e P_2 . Assim, temos

$$S(f; P) \leq S(f; P_1) \quad \text{e} \quad s(f; P_2) \leq s(f; P).$$

Portanto, obtemos

$$S(f; P) - s(f; P) \leq S(f; P_1) - s(f; P_2) < \varepsilon.$$

Reciprocamente, suponhamos que, para todo $\varepsilon > 0$, exista uma partição P de $[a, b]$ tal que

$$S(f; P) - s(f; P) < \varepsilon.$$

Vamos mostrar que f é integrável. De fato, basta tomar $P_1 = P_2 = P$, donde segue o resultado. Resta mostrar $(b) \Leftrightarrow (c)$. Porém, basta observar que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \omega(f; [t_{i-1}, t_i]) (t_i - t_{i-1}) &= \sum_{i=1}^n \left(\sup_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f(x) - \inf_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f(x) \right) (t_i - t_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^n \sup_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f(x) (t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^n \inf_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f(x) (t_i - t_{i-1}) \\
&= S(f; P) - s(f; P) < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Portanto, segue que $(b) \Leftrightarrow (c)$. ■

O Critério de Darboux fornece uma caracterização prática da integrabilidade. A condição (b) afirma que podemos escolher partições para as quais a diferença entre as somas superior e inferior seja tão pequena quanto desejarmos. Já a condição (c) expressa a mesma ideia em termos da oscilação da função em cada subintervalo da partição. Assim, uma função é integrável quando sua variação total, medida adequadamente por essas oscilações, pode ser controlada por partições suficientemente refinadas.

Além do Critério de Darboux, existem classes importantes de funções cuja integrabilidade é garantida. Em particular, toda função monótona $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável. E as funções contínuas $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ são integráveis. Além disso, toda função F de Lipschitz também é integrável.

O lema abaixo sobre ínfimo e supremo será útil para a demonstração das propriedades seguintes.

Lema 3.1.8 Sejam $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitadas em $[a, b]$. Então, valem as desigualdades

$$\sup(f + g) \leq \sup f + \sup g \quad \text{e} \quad \inf(f + g) \geq \inf f + \inf g.$$

Demonstração. Sejam f e g duas funções limitadas em $[a, b]$. Vamos mostrar que

$$\sup(f + g) \leq \sup f + \sup g.$$

Basta observar que, para todo $x \in [a, b]$, temos

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \leq f(x) + \sup g \leq \sup f + \sup g.$$

Como esta desigualdade é verdadeira para todo $x \in [a, b]$, valerá, em particular, para o supremo de $f + g$, ou seja,

$$\sup(f + g) \leq \sup f + \sup g.$$

Da mesma forma, mostramos a desigualdade para o ínfimo. Para todo $x \in [a, b]$, vale

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \geq f(x) + \inf g \geq \inf f + \inf g.$$

Logo, em particular, para o ínfimo temos

$$\inf(f + g) \geq \inf f + \inf g.$$

■

Sejam $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funções integráveis, e seja c uma constante real. Valem as seguintes propriedades:

(a) $f + g$ e cf são integráveis, com

$$\int_a^b (f + g) dx = \int_a^b f dx + \int_a^b g dx \quad \text{e} \quad \int_a^b cf dx = c \int_a^b f dx.$$

(b) Se $f \geq 0$, então $\int_a^b f dx \geq 0$. Em particular, se $f \geq g$, então $\int_a^b f dx \geq \int_a^b g dx$.

(c) $\left| \int_a^b f dx \right| \leq \int_a^b |f| dx$. Além disso, se f é limitada por $M > 0$, então

$$\left| \int_a^b f dx \right| \leq M(b - a).$$

(d) $\int_a^b f dx = - \int_b^a f dx$.

(e) $\int_a^b f dx = \int_a^c f dx + \int_c^b f dx$.

(f) $f \cdot g$ é integrável.

Dentre as propriedades apresentadas, demonstraremos os itens (a) e (b), que estabelecem, respectivamente, a linearidade da integral e a preservação de desigualdades.

Demonstração. (a) Seja $P = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ uma partição qualquer de $[a, b]$.

Aplicando o lema anterior em cada subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$, temos

$$\begin{aligned}
S(f + g; P) &= \sum_{i=1}^n \sup(f + g)(t_i - t_{i-1}) \\
&\leq \sum_{i=1}^n (\sup f + \sup g)(t_i - t_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^n \sup f(t_i - t_{i-1}) + \sum_{i=1}^n \sup g(t_i - t_{i-1}) \\
&= S(f; P) + S(g; P).
\end{aligned}$$

Logo,

$$S(f + g; P) \leq S(f; P) + S(g; P).$$

Também temos

$$\begin{aligned}
s(f + g; P) &= \sum_{i=1}^n \inf(f + g)(t_i - t_{i-1}) \\
&\geq \sum_{i=1}^n (\inf f + \inf g)(t_i - t_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^n \inf f(t_i - t_{i-1}) + \sum_{i=1}^n \inf g(t_i - t_{i-1}) \\
&= s(f; P) + s(g; P).
\end{aligned}$$

Logo,

$$s(f + g; P) \geq s(f; P) + s(g; P).$$

Da definição de integral superior temos $\int_a^{\bar{b}} (f + g) = \inf_{P \in \Lambda} S(f + g; P)$, onde Λ denota o conjunto de todas as partições de $[a, b]$. Juntando esta igualdade com a desigualdade anterior, obtemos

$$\int_a^{\bar{b}} (f + g) \leq S(f + g; P) \leq S(f; P) + S(g; P).$$

Como a desigualdade acima é válida para quaisquer partições P_1 e P_2 de $[a, b]$, temos

$$\int_a^{\bar{b}} (f + g) \leq S(f; P_1) + S(g; P_2).$$

Tomando os respectivos ínfimos, segue que

$$\int_a^{\bar{b}} (f + g) \leq \int_a^{\bar{b}} f + \int_a^{\bar{b}} g.$$

Do mesmo modo, usando a definição de integral inferior, obtemos

$$\int_{\underline{a}}^b (f + g) \geq \int_{\underline{a}}^b f + \int_{\underline{a}}^b g.$$

Como f e g são integráveis por hipótese, segue que suas integrais superior e inferior são iguais e, pelas duas últimas desigualdades, concluímos que $f + g$ também é integrável e

$$\int_a^b (f + g) dx = \int_a^b f dx + \int_a^b g dx,$$

o que prova a primeira parte de (a), que mostra a linearidade da integral definida.

Vejamos a prova da segunda parte, ou seja, mostrar que $\int_a^b cf dx = c \int_a^b f dx$. Se $c = 0$, não temos nada a mostrar. Considere o caso $c > 0$. Como f é integrável em $[a, b]$, dado $\varepsilon > 0$, existe uma partição P de $[a, b]$ tal que

$$S(f; P) - s(f; P) < \frac{\varepsilon}{c}.$$

Note que, como $S(cf; P) = cS(f; P)$ e $s(cf; P) = cs(f; P)$, segue que

$$S(cf; P) - s(cf; P) = c(S(f; P) - s(f; P)) < c \frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon,$$

ou seja, cf é integrável, com

$$\int_a^b cf dx = c \int_a^b f dx.$$

Já o caso $c < 0$ é feito analogamente, considerando-se $-c > 0$.

■

(b) Como $f \geq 0$ em $[a, b]$, então, para qualquer partição $P = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ de $[a, b]$, tem-se que

$$M_i = \sup_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f(x) \geq 0 \quad \text{e} \quad m_i = \inf_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f(x) \geq 0.$$

Portanto,

$$S(f; P) = \sum_{i=1}^n M_i(t_i - t_{i-1}) \geq 0 \quad \text{e} \quad s(f; P) = \sum_{i=1}^n m_i(t_i - t_{i-1}) \geq 0.$$

Logo,

$$\int_a^{\bar{b}} f \geq 0 \quad \text{e} \quad \int_{\underline{a}}^b f \geq 0,$$

e, como por hipótese f é integrável, segue que

$$\int_a^b f \, dx = \int_a^{\bar{b}} f = \int_{\underline{a}}^b f \geq 0.$$

Em particular, se $f(x) \geq g(x)$ em $[a, b]$, definindo $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ por $h(x) = f(x) - g(x)$, tem-se que $h(x) \geq 0$, para todo $x \in [a, b]$, e então $\int_a^b h(x) \, dx \geq 0$. Por outro lado, pelo item (a), concluímos que

$$0 \leq \int_a^b h(x) \, dx = \int_a^b (f(x) - g(x)) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx - \int_a^b g(x) \, dx,$$

ou seja,

$$\int_a^b f(x) \, dx \geq \int_a^b g(x) \, dx.$$

■

3.2 Somas de Riemann

Após a construção da integral por meio das somas inferiores e superiores, passamos agora à abordagem de Riemann. Na formulação de Darboux, em cada subintervalo de uma partição são considerados o ínfimo e o supremo da função, obtendo-se aproximações por baixo e por cima. Na formulação de Riemann, por outro lado, escolhe-se um ponto qualquer em cada subintervalo e utilizamos o valor da função nesse ponto para determinar a altura de cada retângulo. Assim, a integral passa a ser estudada como limite de somas construídas diretamente a partir desses pontos arbitrários. Apesar das diferenças, as duas abordagens são equivalentes.

Definição 3.2.1 Dada uma partição $P = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ de $[a, b]$, em cada subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$ escolhemos arbitrariamente um ponto ξ_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Estes pontos ξ_i definem uma partição pontilhada P^* de $[a, b]$.

Desse modo, a partir de uma partição pontilhada P^* , podemos formar uma soma cujos termos são produtos entre o valor da função no ponto escolhido e o comprimento do subintervalo correspondente. Essa soma é chamada soma de Riemann.

Definição 3.2.2 Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e seja P^* uma partição pontilhada de $[a, b]$. A soma de Riemann de f relativa à partição pontilhada P^* é dada por

$$S(f; P^*) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}).$$

Para tornar precisa a ideia de que os subintervalos da partição devem se tornar cada vez menores, introduzimos a noção de norma de uma partição.

Definição 3.2.3 Seja $P = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ uma partição do intervalo $[a, b]$. Definimos a norma da partição P , denotada por $\|P\|$, como o maior comprimento dos subintervalos determinados por P , isto é, $\|P\| = \max\{t_i - t_{i-1} : i = 1, 2, \dots, n\}$.

Portanto, a norma de uma partição mede o comprimento do maior subintervalo determinado por ela. Dizer que $\|P\|$ tende a zero significa dizer que o maior desses subintervalos tende a zero e, conseqüentemente, todos os subintervalos da partição tornam-se arbitrariamente pequenos. Com essas definições, podemos apresentar a integral de Riemann propriamente dita.

Definição 3.2.4 Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada. Dizemos que f é integrável à Riemann em $[a, b]$ quando existe um número real I tal que as somas de Riemann tendem para I quando a norma da partição tende a zero, independentemente da escolha dos pontos ξ_i em cada subintervalo. Nesse caso, o número I é chamado integral de Riemann de f em $[a, b]$ e é denotado por

$$I = \int_a^b f(t) dt = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}).$$

A condição de que esse limite seja independente da escolha dos pontos ξ_i é fundamental. Ela garante que, quando a partição se torna suficientemente fina, todas as somas de Riemann se aproximam de um mesmo valor, para qualquer que seja a escolha feita em cada subintervalo. Esse valor comum é, então, a integral de Riemann da função no intervalo considerado.

3.3 Teorema Fundamental do Cálculo

A derivada permite descrever como uma grandeza varia em cada ponto, enquanto a integral definida, construída por meio de partições e somas de Riemann, mede a área sob uma curva. Vamos estudar agora a intrínseca relação que existe entre esses dois conceitos.

Definição 3.3.1 Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável. Definimos a função $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Da própria definição, quando $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$, observa-se que $F(x)$ representa a área compreendida entre o gráfico de f , o eixo das abscissas e o intervalo $[a, x]$. Por esse motivo, a função F é conhecida como função área.

O Teorema Fundamental do Cálculo mostra que a função obtida pela integração possui uma propriedade interessante: sempre que a função integrada é contínua, a função área é derivável e sua derivada coincide exatamente com a função original. Esse resultado estabelece a profunda conexão entre derivação e integração, revelando que esses dois processos são, em certo sentido, operações inversas.

Teorema 3.3.2 (Teorema Fundamental do Cálculo - parte 1) Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em um ponto x_0 , então F é derivável em x_0 e $F'(x_0) = f(x_0)$. Ou seja,

$$F'(x_0) = \frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t) dt \right) \Big|_{x=x_0} = f(x_0).$$

Demonstração. Dado $h \in \mathbb{R}$ tal que $x_0 + h \in [a, b]$. Vamos mostrar que, quando $h \rightarrow 0$, temos

$$\left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| \rightarrow 0.$$

Como f é contínua em x_0 , segue que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|t - x_0| < \delta$ implica em $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$, ou seja, $-\varepsilon < f(t) - f(x_0) < \varepsilon$. Assim, como $f(x_0)$ é constante em relação à variável t , temos

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0) dt = f(x_0) [(x_0 + h) - x_0] = hf(x_0).$$

Portanto, para $h \neq 0$,

$$f(x_0) = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0) dt,$$

temos

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| &= \left| \frac{1}{h} \left[\int_a^{x_0+h} f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt \right] - f(x_0) \right| = \\ &= \left| \frac{1}{h} \left[\int_{x_0}^a f + \int_a^{x_0+h} f \right] - f(x_0) \right| = \\ &= \left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt - \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0) dt \right| = \\ &= \left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} [f(t) - f(x_0)] dt \right| < \left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon dt \right| = \\ &= \left| \frac{1}{h} \varepsilon \cdot h \right| = \varepsilon. \end{aligned}$$

■

Esse resultado nos mostra que a função área associada a uma função contínua é derivável e tem como derivada a própria função integrada. Agora, partimos de uma função derivável f , cuja derivada f' é integrável, e mostramos que a integral de f' em $[a, b]$ representa exatamente a variação total de f nesse intervalo. Em outras palavras, integrar a derivada de uma função permite recuperar a diferença entre os valores da função nos extremos do intervalo.

Teorema 3.3.3 (Teorema Fundamental do Cálculo - parte 2) Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivável com f' integrável. Então

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a).$$

Demonstração. Seja P uma partição qualquer de $[a, b]$ que divide este intervalo em n subintervalos da forma $[t_{i-1}, t_i]$, isto é, $P = \{a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b\}$. Assim,

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^n [f(t_i) - f(t_{i-1})].$$

Como f é derivável em (t_{i-1}, t_i) , pelo Teorema do Valor Médio, segue que existe $c_i \in (t_{i-1}, t_i)$

tal que $f(t_i) - f(t_{i-1}) = f'(c_i)(t_i - t_{i-1})$, para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Portanto,

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^n f'(c_i)(t_i - t_{i-1}).$$

Defina, para cada subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$, os números

$$m'_i = \inf_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f'(x) \quad \text{e} \quad M'_i = \sup_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f'(x),$$

observe que, para cada i ,

$$m'_i \leq f'(c_i) \leq M'_i.$$

Logo,

$$m'_i(t_i - t_{i-1}) \leq f'(c_i)(t_i - t_{i-1}) \leq M'_i(t_i - t_{i-1}),$$

e somando estas desigualdades para cada i , obtemos

$$\sum_{i=1}^n m'_i(t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n f'(c_i)(t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n M'_i(t_i - t_{i-1}),$$

ou seja,

$$s(f'; P) \leq f(b) - f(a) \leq S(f'; P).$$

Como essa desigualdade vale para toda partição P de $[a, b]$, tomando o supremo das somas inferiores e o ínfimo das somas superiores, obtemos

$$\sup_{P \in \Lambda} s(f'; P) \leq f(b) - f(a) \leq \inf_{P \in \Lambda} S(f'; P),$$

onde Λ denota o conjunto de todas as partições de $[a, b]$. Assim, pelas definições de integral inferior e integral superior,

$$\int_{\underline{a}}^b f'(x) dx \leq f(b) - f(a) \leq \int_a^{\bar{b}} f'(x) dx.$$

Como, por hipótese, f' é integrável, as integrais inferior e superior coincidem. Logo,

$$\int_a^b f'(x) dx \leq f(b) - f(a) \leq \int_a^b f'(x) dx.$$

Portanto,

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) dx.$$

■

3.4 Aplicação

Podemos aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo em muitos casos nos quais são analisados fenômenos determinados por grandezas que variam ao longo do tempo. Uma das situações em que essa relação pode ser observada encontra-se na Física, mais especificamente no estudo do movimento retilíneo, no qual a velocidade representa a taxa de variação da posição em relação ao tempo. O estudo a seguir foi baseado na referência [12].

Na Cinemática, a velocidade de uma partícula é definida como a taxa de variação da posição em relação ao tempo. Assim, se $s(t)$ representa a posição de uma partícula no instante t , então sua velocidade instantânea é dada por $v(t) = s'(t)$.

Nesse contexto, o Teorema Fundamental do Cálculo permite recuperar a variação da posição a partir da integral da velocidade. De fato, suponha que s seja derivável em um intervalo (t_0, t_1) e que $v = s'$ seja integrável nesse intervalo. Então, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\int_{t_0}^{t_1} v(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} s'(t) dt = s(t_1) - s(t_0).$$

A quantidade $s(t_1) - s(t_0)$ representa o deslocamento da partícula entre os instantes t_0 e t_1 . Portanto, a integral definida da função velocidade fornece o deslocamento líquido da partícula no intervalo considerado.

Essa interpretação está de acordo com o chamado Teorema da Variação Total, segundo o qual a integral de uma taxa de variação fornece a variação líquida da grandeza correspondente. Quando a taxa de variação considerada é a velocidade, a integral da velocidade ao longo de um intervalo de tempo fornece a variação da posição, isto é, o deslocamento.

É importante observar que deslocamento e distância total percorrida não são necessariamente a mesma grandeza. O deslocamento leva em conta o sentido do movimento, podendo ser positivo, negativo ou nulo. A distância total percorrida, por sua vez, mede o comprimento total do percurso realizado, independentemente do sentido do movimento. Por isso, para calcular o

deslocamento, integra-se a velocidade $v(t)$; para calcular a distância total percorrida, integra-se o módulo da velocidade, isto é, $|v(t)|$.

Como exemplo, considere uma partícula movendo-se em linha reta com velocidade dada por $v(t) = 3t - 5$ em metros por segundo, no intervalo de tempo $[0, 3]$. O deslocamento líquido da partícula nesse intervalo é dado por

$$\int_0^3 v(t) dt = \int_0^3 (3t - 5) dt.$$

Aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\int_0^3 (3t - 5) dt = \left[\frac{3t^2}{2} - 5t \right]_0^3,$$

e ainda

$$\left[\frac{3t^2}{2} - 5t \right]_0^3 = \left(\frac{3 \cdot 3^2}{2} - 5 \cdot 3 \right) - \left(\frac{3 \cdot 0^2}{2} - 5 \cdot 0 \right).$$

Assim,

$$\int_0^3 (3t - 5) dt = \frac{27}{2} - 15 = \frac{27}{2} - \frac{30}{2} = -\frac{3}{2}.$$

Portanto, o deslocamento líquido da partícula no intervalo $[0, 3]$ é igual a $-\frac{3}{2}$ metro. O sinal negativo indica que, ao final do intervalo, a partícula encontra-se 1,5 metro no sentido contrário em relação ao referencial tomado no sistema.

Por outro lado, se desejamos calcular a distância total percorrida, devemos considerar o módulo da velocidade. A velocidade $v(t) = 3t - 5$ muda de sinal quando $3t - 5 = 0$, isto é, quando $t = \frac{5}{3}$.

Desse modo, no intervalo $\left[0, \frac{5}{3}\right]$, a velocidade é negativa, enquanto no intervalo $\left[\frac{5}{3}, 3\right]$, a velocidade é positiva. Assim, a distância total percorrida é dada por

$$\int_0^3 |v(t)| dt = \int_0^{5/3} -(3t - 5) dt + \int_{5/3}^3 (3t - 5) dt.$$

Portanto,

$$\int_0^3 |v(t)| dt = \int_0^{5/3} (5 - 3t) dt + \int_{5/3}^3 (3t - 5) dt.$$

Calculando a primeira integral, obtemos

$$\int_0^{5/3} (5 - 3t) dt = \left[5t - \frac{3t^2}{2} \right]_0^{5/3} = \frac{25}{3} - \frac{25}{6} = \frac{25}{6}.$$

Calculando a segunda integral, temos

$$\int_{5/3}^3 (3t - 5) dt = \left[\frac{3t^2}{2} - 5t \right]_{5/3}^3.$$

Como

$$\left(\frac{3 \cdot 3^2}{2} - 5 \cdot 3 \right) - \left(\frac{3 \cdot (5/3)^2}{2} - 5 \cdot \frac{5}{3} \right) = -\frac{3}{2} - \left(-\frac{25}{6} \right) = \frac{8}{3},$$

segue que

$$\int_0^3 |v(t)| dt = \frac{25}{6} + \frac{8}{3} = \frac{25}{6} + \frac{16}{6} = \frac{41}{6}.$$

Logo, a distância total percorrida pela partícula é aproximadamente 6,83 metros. Esse exemplo mostra a importância do Teorema Fundamental do Cálculo em problemas de movimento. A partir da função velocidade a integral definida permite obter a variação total da posição. Além disso, a distinção entre deslocamento e distância total evidencia o papel do sinal da velocidade: a integral de $v(t)$ fornece o deslocamento líquido, enquanto a integral de $|v(t)|$ fornece a distância total percorrida.

Capítulo 4

Considerações finais

Ao final deste breve estudo bibliográfico, nota-se quão fervorosa foi a vontade humana de desbravar o mundo da Matemática. Arquimedes e seus contemporâneos, grandes matemáticos práticos, dedicaram-se incansavelmente ao plantio das sementes de boa parte da evolução científica e tecnológica que se seguiu.

Ao contrário do que muitos intuem, a matemática que temos hoje não nasceu pronta. Ela foi desenvolvida pelo ser humano. E, como um ser humano, desenvolveu-se com o passar do tempo. Seu berçário configurou-se a partir de nossa necessidade de lidar com os problemas cotidianos da maneira mais prática possível. No início, a matemática limitava-se ao que era tangível e concreto. Contudo, como ocorre com todo pequeno ser humano em desenvolvimento, o berçário um dia se tornou pequeno demais. O mundo concreto já não era grande o suficiente para abarcar o cosmos de possibilidades escondido na simples capacidade de contar, medir e organizar.

Como foi exposto, um único conteúdo matemático, a teoria da integração, encontra-se tanto entrelaçado a inúmeros outros conceitos quanto enraizado na passagem dos séculos e milênios. O berçário aqui definido abriu espaço para longos passos, sustentados pelo trabalho de inúmeras mentes entusiastas que não pouparam esforços para tornar possível esse desenvolvimento.

Em sua juventude, esses passos abriram caminho para o rigor que conhecemos hoje por meio da abstração. Quando a formalidade entrou em sala e um dos pilares da matemática, a noção de limite, foi devidamente estabelecido, abriram-se os caminhos para a construção da integral de Riemann. O problema inicialmente geométrico de determinar áreas passou, então, a ser compreendido por meio de uma formulação capaz de ultrapassar a interpretação puramente visual que lhe deu origem.

Embora o Teorema Fundamental do Cálculo tenha sido desenvolvido no século XVII, a formalização do século XIX, que conferiu o rigor analítico que faltava. E mesmo que a teoria revele certas limitações, ela se mantém excepcionalmente robusta para uma enorme classe das funções. O próximo passo teórico é a integral de Lebesgue, que generaliza o conceito de integração por meio da teoria da medida. Ainda que essa formulação mais avançada tenha ficado de fora do escopo do presente texto, ela representa um marco na evolução da matemática moderna e deve ser explorada em trabalhos futuros.

Por fim, esta pesquisa mostrou que a matemática é um empreendimento coletivo, construído por pessoas que, ao longo da história, buscaram com grande dedicação entender o mundo, tanto em sua dimensão física quanto abstrata.

Referências

- [1] LIMA, Elon Lages. **Curso de análise real Vol. 1**. 15. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2016. 307 p.
- [2] SAGAN, Carl. **COSMOS**. 1. ed. São Paulo: Companhia das Letras, 2017. 487 p.
- [3] ROQUE, Tatiana. **História da matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. 1. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2012. 511 p.
- [4] LAUNAY, Mickael. **A Fascinante História da Matemática**: da pré-história aos dias de hoje. 5. ed. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 2023. 263 p.
- [5] VILLENEUVE, Jean-Philippe. **Intégrer autrement avec l'intégrale de Lebesgue**. Bulletin AMQ, v. 49, n. 3, p. 80-88, 2009. Actes du 52e congrès. Disponível em: https://www.amq.math.ca/wp-content/uploads/bulletin/vol49/no3/atelier_villeneuve.pdf. Acesso em: 24 jun. 2026.
- [6] BOYER, Carl. Benjamin. **História da Matemática**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012. 504 p.
- [7] BROWN, Richard (ed.); ELWES, Richard; FATHAUER, Robert; HAIGH, John; PERRY, David; POMMERSHEIM, Jamie. **Matemática**: 50 conceitos e teorias fundamentais explicados de forma clara e rápida. 1. ed. São Paulo: Publifolha, 2016. 160 p.
- [8] EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. 5. ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011. Disponível em: https://www.matematicapremio.com.br/wp-content/uploads/2015/12/introducao_a_historia_da_matematica.pdf. Acesso em: 5 jun. 2026.
- [9] O'CONNOR, John Joseph; ROBERTSON, Edmund Frederick. **Jean Gaston Darboux**. MacTutor History of Mathematics, St Andrews, jul. 2020. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Darboux/>. Acesso em: 26 jun. 2026.
- [10] ZAHN, Maurício. **Análise Real**. 1. Ed. São Paulo: Blucher, 2022. 456 p.
- [11] ÁVILA, Geraldo. **Análise matemática para licenciatura**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2006. 248 p.
- [12] STRANG, Gilbert; HERMAN, Edwin. **Calculus Volume 1**. Houston: OpenStax, 2016. Disponível em: <https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/5-4-integration-formulas-and-the-net-change-theorem>. Acesso em: 15 jul. 2026.