



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS APLICADAS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Laiany Yasmin Souza da Silva

Álgebra Linear no Enade: questões comentadas de Espaços
Vetoriais e Transformações Lineares

Rio Tinto – PB

2026

Laiany Yasmin Souza da Silva

Álgebra Linear no Enade: questões comentadas de Espaços
Vetoriais e Transformações Lineares

Trabalho Monográfico apresentado à Coordenação
do Curso de Licenciatura em Matemática como
requisito parcial para obtenção do título de
Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Marcos André José
Valcácio

Rio Tinto – PB

2026

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S586á Silva, Laiany Yasmin Souza da.

Álgebra linear no Enade: questões comentadas de
espaços vetoriais e transformações lineares / Laiany
Yasmin Souza da Silva. - Rio Tinto, 2026.
47 f. : il.

Orientação: Marcos André José Valcácio.
TCC (Graduação) - UFPB/CCAÉ.

1. Álgebra linear. 2. Espaço vetorial. 3. Enade. 4.
Relatório do Enade. I. Valcácio, Marcos André José. II.
Título.

UFPB/CCAÉ

CDU 512.64

Laiany Yasmin Souza da Silva

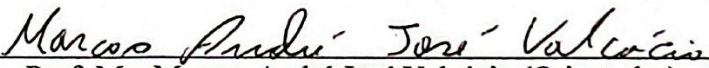
**Álgebra Linear no Enade: questões comentadas de Espaços
Vetoriais e Transformações Lineares**

Trabalho Monográfico apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática
como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Marcos André José Valcácio

Aprovado em: 30/07/2026

BANCA EXAMINADORA


Prof. Me. Marcos André José Valcácio (Orientador)
UFPB / DCX


Prof. Dr. Emmanuel de Sousa Fernandes Falcão
UFPB / DCX


Prof. Me. Givaldo de Lima
UFPB / DCX

A Deus, por me guiar nesta caminhada dos estudos durante estes 5 anos, a Nossa Senhora das Graças, pelas graças derramadas em minha vida durante os meus estudos, a jovem que sonhou com este dia e hoje ele se realiza, aos meus pais, por sempre me incentivar, mesmo sem entender nada do que eu falava quando chegava da aula ou quando estudava para uma avaliação, sempre me propiciando uma vida dedicada aos estudos.

AGRADECIMENTOS

À Deus por me fortalecer durante estes cinco anos, em especial nos últimos dois anos, pois, em diversos momentos, a rotina me fez pensar que eu não conseguiria. No entanto, Deus, em Sua infinita bondade, mostrou-me que, por Sua Graça, eu seria capaz. Agradeço pela sabedoria que me foi concedida e por todos os projetos e monitorias que Ele confiou a mim. A Ele também agradeço pelos amigos que colocou em meu caminho durante o curso e pelos professores que confiaram em mim e me incentivaram ao longo dessa caminhada.

À minha família por todo o incentivo durante estes anos, especialmente aos meus pais, minha mãe, Lucineide Ribeiro da Silva, e meu padrasto, Valdecir José da Silva, por me permitirem dedicar boa parte da graduação exclusivamente aos estudos. Reconheço e agradeço todos os esforços que fizeram para que isso fosse possível. Foram noites em claro estudando, e a compreensão, o apoio e o respeito deles fizeram toda a diferença.

Ao meu noivo, Rennan Bernardino de França, por estar ao meu lado desde o início desta etapa da minha vida. Sou grata por sua paciência e compreensão, pois, em muitos momentos, renunciamos a diversas coisas para que eu pudesse me dedicar aos estudos, e ele sempre compreendeu essa necessidade. Seu incentivo foi essencial para mim. Nos momentos de tristeza, cansaço e insegurança, sempre me fortaleceu para que eu não desanimasse. Sou profundamente grata por caminhar ao meu lado e por tornar esse período mais leve.

Desde o terceiro período, eu já sabia quem gostaria que fosse o meu orientador, pois via nele uma confiança em mim que, muitas vezes, nem eu mesma tinha. O professor Marcos André José Valcácio muito me incentivou nas disciplinas que cursei com ele. Agradeço por aceitar realizar este estudo comigo, pela confiança, pela paciência e pelo cuidado com que conduziu esta orientação, sempre desejando o meu crescimento acadêmico. Tenho grande respeito e admiração pelo profissional que ele é e espero, com a permissão de Deus, um dia tornar-me uma boa professora, assim como ele é um excelente professor.

Aos professores do curso que fizeram parte da minha trajetória no Campus IV, sendo instrumentos de incentivo por meio das disciplinas, monitorias e projetos. Sou muito grata à professora Agnes Liliane Lima Soares de Santana por toda a sabedoria compartilhada durante a disciplina de Introdução à Álgebra Linear e no período em que participei da monitoria dessa disciplina e do Pibid. Ambas as experiências foram fundamentais para a minha formação acadêmica, pois me permitiram compreender a área com a qual mais me identifico. Agradeço

também à professora Jussara Patrícia Andrade Alves Paiva por me incentivar a seguir na área da Matemática escolhida para este TCC e por me encorajar a pensar em um futuro mestrado. Suas palavras sempre permanecerão em minha memória quando eu recordar minha formação acadêmica.

Expresso também minha gratidão aos meus professores de Matemática do Ensino Médio e do cursinho Pré-Enem, Eduardo Patão, Regina Coelly e Bruno Correia, que marcaram minha trajetória escolar e se tornaram exemplos para minha vida profissional. Agradeço aos três, de coração, por despertarem em mim o desejo de seguir esta profissão, bem como por cada ensinamento, dedicação e incentivo ao longo dessa caminhada.

À banca examinadora, em especial ao professor Emmanuel Falcão, qual tive oportunidade de trabalharmos juntos em grandes projetos, e ao professor Givaldo, pelas contribuições oferecidas durante o curso.

Por fim, não poderia deixar de agradecer aos meus grandes amigos de curso, que caminharam ao meu lado durante essa jornada. Foram muitas tardes dedicadas aos estudos, à resolução de listas de exercícios, às partilhas de conhecimento nos dias de avaliação e às boas risadas, que tornaram essa caminhada mais leve. Agradeço por todo o apoio nos momentos de preocupação e insegurança. Esses momentos jamais serão esquecidos. Em especial, agradeço a Josuel Salustino, Pedro Junior e Higor Emmanuel, grandes amigos que me ensinaram a confiar mais em mim mesma. Guardo nossa amizade com muito carinho em meu coração e rogo a Deus para serem excelentes profissionais. Terei muito orgulho de dizer que compartilhei com eles essa importante etapa da minha vida.

Confia teus negócios ao Senhor e teus planos terão bom êxito.

Provérbios 16, 3

Sabe o que é mais legal que magia? Matemática.

Homem-Aranha: Sem Volta para Casa

RESUMO

Este estudo tem por objetivo explorar os conceitos da Álgebra Linear e relacionar o desenvolvimento compreensivo dos conteúdos com a resolução de questões do Enade, questões estas que se dão de maneira contextualizada visando explorar competências acadêmicas nos estudantes da educação superior. Para a realização deste estudo, foram abordadas as principais definições e suas propriedades presentes na Álgebra Linear, como Espaço Vetorial, Subespaço, Transformações Lineares, entre outros apresentados, com base em referências, como Hoffman e Kunze (1970), Anton e Rorres (2012) e os Relatórios do Enade, dentre outros. Para a construção deste estudo, foi realizada uma análise das questões de provas do Enade anteriores, com o objetivo de identificar e selecionar questões que envolvessem a Álgebra Linear, e abordamos as questões do Enade referentes ao curso de Licenciatura em Matemática, resolvendo as questões selecionadas de forma detalhadamente, ligando então em seguida com resultados obtidos nos relatórios do Enade ao longo do curso de Licenciatura em Matemática – Campus IV. Diante disso, o estudo se mostra importante para a construção de bases sólidas, ou seja, o desenvolvimento da compreensão dos conteúdos que compõem cada área de conhecimento, como um facilitador para desenvolver questões, podendo ser estendido a várias áreas da Matemática.

Palavras-chave: Álgebra Linear. Espaço Vetorial. Enade. Relatório do Enade.

ABSTRACT

This study aims to explore the concepts of Linear Algebra and relate the comprehensive development of the contents with the resolution of ENADE questions, which are given in a contextualized way in order to explore academic competencies in higher education students. To carry out this study, the main definitions and their properties present in Linear Algebra were addressed, such as Vector Space, Subspace, Linear Transformations, among others presented, based on references, such as Hoffman and Kunze (1970), Anton and Rorres (2012) and the Enade Reports, among others. For the construction of this study, an analysis of the questions of previous Enade tests was carried out, with the objective of identifying and selecting questions that involved Algebra, and we addressed the Enade questions related to the Mathematics Degree course, solving the selected questions in the area of Linear Algebra in detail, then linking with results obtained in the ENADE reports throughout the Mathematics Degree course – Campus IV. the study is important for the construction of solid foundations, that is, the development of the understanding of the contents that make up each area of knowledge, as a facilitator to develop questions, which can be extended to various areas of Mathematics.

Keywords: Linear Algebra. Vector Space. Enade. Enade report.

MEMORIAL

Nasci no dia 02 de outubro de 2001 em João Pessoa, com algumas complicações respiratória, com sopro no coração, onde fiquei internada por 10 dias. Ao nascer não tive contato com os meus pais, pois minha internação foi imediata e minha cabeça foi raspada devido aos tratamentos.

Sou filha de Lucineide Ribeiro da Silva e de Adriano Souza da Silva e tenho três irmãos. Ainda muito nova, meu pai deixou minha mãe para viver com outra pessoa. Após a separação retornamos para a cidade de Rio Tinto, eu, minha irmã e minha mãe. Minha família sempre foi muito unida, eu e minha irmã mais velha sempre tivemos uma relação muito boa, sempre nos ajudamos e nos respeitamos, conforme os ensinamentos de nossa mãe.

Durante o período dos meus 4 a 12 anos, minha mãe trabalhava fora de casa, além do seu trabalho como costureira. Ela passava o dia todo fora de casa, saía pela manhã e chegava à noite. Minha tia morava na casa ao lado da nossa e passou a ajudar minha mãe a nos criar. Reuniões de escola e consultas médicas era tudo com minha tia, com isso fui crescendo com um pouco da ausência da minha mãe. Mas ela sempre se esforçou para nos dar uma vida digna de ser vivida, sem nunca faltar alimentação, lazer e educação.

Durante minha infância na educação infantil I ao 1º ano do ensino fundamental eu estudava em duas escolas, sendo particular pela manhã e pública à tarde. A partir do 2º ano do ensino fundamental passei a estudar em horário regular em escola pública. Sempre vi meus estudos como uma das formas de orgulhar a minha mãe, busquei sempre boas notas e participação ativa em eventos da escola. Durante o ensino fundamental II mantive minha dedicação aos estudos, mas sempre foi uma grande dificuldade para manter os estudos em primeiro lugar, pois as vezes considerávamos (eu e minha mãe) que os estudos era para deixar para depois dos afazeres domésticos.

Aos meus 13 anos acompanhava minha tia, que é pedagoga, as suas aulas. Ela leccionava em uma turma de “Jardim de infância”, e foi ali que pude confirmar ainda tão nova, a minha paixão pela educação, ajudando minha tia a explicar as tarefas para as crianças.

Foi chegado então o ensino médio, onde tive uma das minhas primeiras crises nos estudos. Na 1ª série me deparei com um professor de matemática que me desestimulou, mas o

apoio de um amigo se fez muito importante durante esse processo, trouxe o meu estímulo de volta.

A 2ª série iniciou na escola onde estudava a implementação do modelo de escola cidadã integral, onde foi estimulado as aulas de estudo orientado, na qual desfrutávamos dessa aula para compartilhar com os colegas da turma o que sabíamos a respeito da avaliação da disciplina do dia. Isso foi despertando mais ainda o meu interesse pela educação.

Assim foi dado o seguimento na minha 3ª série do ensino médio, bom desempenho nas disciplinas e quadro de colaboração estudantil. Com o modelo da escola cidadã integral totalmente implementado veio junto o desenvolvimento de projetos. Este momento foi importante porque criei um projeto onde dedicávamos a resolução de questões do Enem, juntamente com outros colegas, ficando eu então com os componentes curriculares de Matemática, Física e Química. No decorrer do projeto despertei muito interesse pela área da Física, pois meu professor me inscreveu em uma prova para ganhar uma bolsa em uma Faculdade de Física. Feita a prova ganhei uma bolsa de 70% para cursar Física, mas infelizmente não tive a permissão dos meus pais para dar início aos estudos, pois eles não tinham condições de pagar o valor referente aos 30% e não queriam que eu iniciasse um curso sem ainda ter concluído o ensino médio. Essa foi uma decisão foi muito difícil para eu lidar com a situação.

Terminado o ensino médio, solicitei a coordenação da escola para continuar com o projeto de resolução de questões do Enem. A escola liberou a continuação do projeto que se chamava Intellectus. Entretanto veio a pandemia de Covid 19 e o projeto precisou ser interrompido.

Logo em seguida, durante a quarentena ingressei na UFPB, no Curso de Licenciatura em Matemática e, quando meu antigo professor de matemática ficou sabendo, me convidou para ministrar aulas do Enem assim que as aulas retomassem presencialmente.

Com o retorno das aulas presenciais, em 2022, iniciei os aulões para o Enem, trabalhando com explicação de conteúdos e resolução de questões de matemática, duas vezes por semana. Esse compromisso foi até o final de 2024. Com isso, consegui ir observando onde estavam as principais dificuldades dos estudantes e o que os levavam ao erro e, um dos principais pontos eram a interpretação textual.

No meu terceiro período do Curso Superior, o componente curricular de Introdução à Álgebra Linear fez parte da minha matriz curricular, gostei muito da disciplina e do processo de desenvolvimento. Assim como a Física, minha aproximação com o componente me impulsionava, pois me possibilitava a trabalhar e enxergar os movimentos naturais e abstratos em minha volta.

Foi então no período de abril a novembro de 2023 que pude participar da monitoria do componente, para ajudar os estudantes do curso em coisas que por muitas vezes aparentam ser difíceis e na verdade não são. Precisando apenas compreender o que cada assunto aborda e executar com cautela os cálculos e, para ter mais experiência atribuída através da prática.

Durante todo o decorrer do Curso, algumas vezes, pude ouvir os docentes alertarem sobre o Enade e a atual realidade do campus IV, em não conseguir atingir um conceito na média desejada e, sempre ouvi falar que as questões do Enade eram contextualizadas assim como as questões do Enem. Foi então que ajudando os estudantes nas resoluções dos exercícios da monitoria de Introdução à Álgebra Linear nos deparamos com uma questão contextualizada e, os alunos demonstraram insegurança e negação com a questão por se algo fora do comum em alguns componentes curriculares do Curso.

Assim, com a experiência que já tinha adquirido ao mediar os aulões do Enem, despertei o interesse em conhecer as questões do Enade. Além disso, trazer essas questões como uma abordagem para o meu TCC.

Uma vez me questionei o que de fato nos leva a compreender uma questão: apenas a compreensão de seu enunciado ou a compreensão do conteúdo trabalhado unida à compreensão do enunciado.

Lancei a proposta ao meu professor orientador de trabalharmos com a Álgebra Linear e o Enade. Para minha alegria ele aceitou o desafio. Nesse ponto, sempre tive o incentivo dos meus amigos do Curso e de uma professora que durante uma conversa em dia de aula, me fez confirmar em minha vida que eu poderia sim escolher seguir a área da Matemática Pura sem o receio de ser uma área poucas vezes escolhida por mulheres no Campus IV, da UFPB.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	14
1 FUNDAMENTOS DE ÁLGEBRA LINEAR	16
1.1 Espaço Vetorial	16
1.2 Subespaço Vetorial	17
1.3 Combinação Linear.....	18
1.4 Dependência e Independência Linear.....	19
1.5 Base e Dimensão	20
1.6 Transformação Linear.....	23
1.7 Núcleo e Imagem.....	24
1.8 Matriz de uma transformação	25
1.9 Autovalores e Autovetores.....	27
2 QUESTÕES DO ENADE DE ÁLGEBRA LINEAR.....	30
2.1 ENADE 2008.....	30
2.2 ENADE 2011	32
2.3 ENADE 2014.....	33
2.4 ENADE 2021.....	35
3 O ENADE E OS RESULTADOS DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA – CAMPUS IV	37
3.1 A evolução do Enade: do provão ao exame nacional de desempenho dos estudantes	37
3.2 Enade: instrumento de avaliação da qualidade da educação superior brasileira	39
3.3 O desempenho e os resultados do Enade no curso de Licenciatura em Matemática – Campus IV	40
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	44
REFERÊNCIAS	46

INTRODUÇÃO

A Álgebra Linear constitui uma das áreas fundamentais da Matemática, fornecendo conceitos e ferramentas essenciais para o estudo de matrizes, sistemas lineares, espaços vetoriais, transformações lineares, entre outros. Esses conceitos desempenham um papel importante na compreensão de estruturas matemáticas mais abstratas e servem de base para diversos conteúdos desenvolvidos ao longo da formação em Matemática.

À vista disso, estamos interessados em realizar uma investigação dentro da área de pesquisa de Matemática Pura, especificamente na subárea de Álgebra Linear. Nessa perspectiva, buscamos investigar como a compreensão de definições, teoremas e propriedades podem contribuir para a resolução de questões do Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (Enade), componente que integra a avaliação da formação dos estudantes dos cursos de graduação.

A compreensão dos conceitos da Álgebra Linear fortalece a formação teórica do estudante e favorece a interpretação e a resolução de problemas. Dessa forma, busca-se evidenciar a importância do domínio desses conteúdos para a resolução de questões propostas em avaliações da Educação Superior.

O objetivo deste estudo é analisar e explorar os conceitos da Álgebra Linear e relacionar o desenvolvimento compreensivo dos conteúdos com a resolução de questões do Enade, de forma contextualizada e sempre explorando as competências acadêmicas nos estudantes da educação superior.

Para isso, buscamos responder ao seguinte questionamento: *de que maneira a compreensão dos conceitos fundamentados pode contribuir para a resolução das questões do Enade e para o desempenho dos estudantes do curso de Licenciatura em Matemática?*

Com isso, na primeira seção será apresentado o estudo e aprofundamento da Álgebra Linear, sendo eles: Espaço Vetorial, Subespaço, Dependência e Independência Linear, Transformação Linear e Autovalores e Autovetores, trazendo teoremas que foram explorados, especialmente na disciplina de Introdução à Álgebra Linear, no curso de Licenciatura em Matemática, UFPB/Campus IV. Para fundamentar este estudo, foi abordada a fundamentação teórica nos seguintes pesquisadores: Hoffman e Kunze (1970), Anton e Rorres (2012) e Kolman e Hill (2006).

Na segunda seção iremos discorrer acerca das questões do Enade, trazendo cada questão relacionada à Álgebra Linear, acompanhada do detalhamento do uso das definições exploradas

no primeiro capítulo. “A pessoa precisa mobilizar conceitos, princípios e procedimentos matemáticos aprendidos anteriormente para chegar à resposta” (Proença, 2018, p. 18). Visando detalhar cada etapa para a resolução das questões, uma vez que a resolução de problemas contextualizados é uma pauta desde a Educação Básica, trazendo um pouco dessa problemática para a Universidade, pois os estudantes passam por pouco contato com questões contextualizadas, apenas em período de preparação para o Enem. De acordo com Onuchic (1999):

Na abordagem de Resolução de Problemas como uma metodologia de ensino, o aluno tanto aprende matemática resolvendo problemas como aprende matemática para resolver problemas. O ensino de resolução de problemas não é mais um processo isolado. Nessa metodologia, o ensino é fruto de um processo mais amplo, um ensino que se faz por meio da resolução de problemas. (Onuchic, 1999, p. 210).

O Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (Enade), por sua vez, como é uma prova que avalia o desempenho dos estudantes universitários que concluíram o curso de graduação, traz questões de Álgebra Linear. De acordo com o relatório do Enade – Campus IV, o desempenho dos estudantes da UFPB Campus IV foi classificado como 2 em 2017, considerado abaixo da média, assim o terceiro capítulo será contemplado por uma discussão acerca dos resultados da prova do Enade, do curso de Licenciatura em Matemática, buscando compreender o que leva a esses resultados não saírem como o esperado pelo corpo docente.

Segundo Klapsinou e Gray (apud SANTOS, 2018, p. 140), “Álgebra Linear faz parte de um dos primeiros cursos da matemática avançada a nível universitário (...)”, com isso, nela são apresentados conteúdos que serão sempre retomados no decorrer dos componentes curriculares, no curso de Licenciatura em Matemática. Assim, a compreensão de cada objeto de conhecimento apresentado acerca do componente curricular é de suma importância ao longo do curso, pois facilita o desenvolvimento nos demais componentes curriculares e a resolução de questões de características contextualizadas e diretas. Com isso, podendo mudar os resultados acerca do Enade, dos estudantes do curso de licenciatura em matemática, uma vez que se dá uma atenção maior aos aprendizados conceituais.

1 FUNDAMENTOS DE ÁLGEBRA LINEAR

Nesta sessão serão apresentados elementos que regem a Álgebra Linear, que traz um grande significado para o aprimoramento dela ao longo dos anos, tendo como objetivos estudar os conjuntos e seus comportamentos. Seus estudos ao longo dos anos se consolidaram perante a geometria analítica, e com a modernidade tornou-se um estudo de elementos abstratos, gerando então um longo desenvolvimento, que se fez necessário para estudar e alcançar resultados, tendo em um de seus focos a exploração de vetores.

A Álgebra Linear não se limita apenas ao curso de Matemática, como também faz parte da ementa de cursos como Computação, presente no campus IV, Engenharia, Física, e outros cursos da área de exatas, enriquecendo a grade acadêmica.

Segundo Hoffman e Kunze (1970, p. 30), a grosso modo, a álgebra linear é o ramo da matemática que trata das propriedades comuns a sistemas algébricos constituídos por um conjunto mais uma noção razoável de uma “combinação linear” de elementos do conjunto.

A presente seção está baseada nas obras de Hoffman e Kunze (1970), Anton e Rorres (2012) e Kolman e Hill (2006).

1.1 Espaço Vetorial

O Espaço Vetorial consiste em um conjunto formado por vetores geométricos que visam satisfazer axiomas para serem válidos.

Definição 1.1.1: *Sejam V um conjunto não vazio cujos elementos são denominados vetores e K um corpo de escalares, tal que para qualquer $u, v \in V$, tem-se $u + v \in V$ (operação adição de vetores) e, para qualquer $v \in V$ e $\alpha \in K$, tem-se $\alpha \cdot v \in V$ (operação multiplicação por escalar). Dizemos que $(V, +, \cdot)$ é um espaço vetorial se satisfaz as seguintes propriedades:*

- a) *Comutativa: Se $u, v \in V$, então $u + v = v + u$;*
- b) *Associativa: Se $u, v, w \in V$, então $u + (v + w) = (u + v) + w$;*
- c) *Existe um único vetor nulo $\vec{0} \in V$ tal que $u + \vec{0} = u$, para todo $u \in V$;*
- d) *Para todo $u \in V$, existe um único vetor $(-u) \in V$, tal que $u + (-u) = \vec{0}$;*
- e) *Dado o elemento neutro $1 \in K$ e $u \in V$, então $1 \cdot u = u$;*
- f) *Se $\alpha, \beta \in K$ e $u \in V$, então $\alpha \cdot (\beta \cdot u) = (\alpha \cdot \beta) \cdot u$;*

g) Se $\alpha \in K$ e $u, v \in V$, então $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$;

h) Se $\alpha, \beta \in K$ e $u \in V$, então $(\alpha + \beta) \cdot u = u \cdot \alpha + u \cdot \beta$.

Exemplo 1.1.2: Seja $K = \mathbb{R}$ o corpo dos números reais. Considere o conjunto $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) / x_i \in \mathbb{R}\}$. Dados os vetores $u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, e $v = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, definimos a operação aditiva entre u e v por:

$$u + v = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

A operação multiplicação por um escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ definimos por:

$$\alpha \cdot u = \alpha(x_1, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$$

É de fácil verificação que as operações assim definidas satisfazem as oito propriedades da definição 1.1.1. Logo, $\mathbb{R}^n$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Exemplo 1.1.3: Considere P_n o conjunto de polinômios com grau igual a n com coeficientes nos números reais. Ou seja,

$$P_n = \{c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n / c_i \in \mathbb{R}, c_n \neq 0\}$$

Sejam $p(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n$ e $q(x) = d_0 + d_1x + d_2x^2 + \dots + d_nx^n$ polinômios de grau n . Utilizando a adição de polinômio, teremos:

$$\begin{aligned} (p + q)(x) &= c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n + d_0 + d_1x + \dots + d_nx^n \\ &= (c_0 + d_0) + (c_1 + d_1)x + \dots + (c_n + d_n)x^n = p(x) + q(x) \end{aligned}$$

Operando por escalar α , teremos:

$$(\alpha \cdot p)(x) = \alpha c_0 + \alpha c_1x + \alpha c_2x^2 + \dots + \alpha c_nx^n = \alpha \cdot p(x)$$

onde $\alpha c_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, \dots, n$, sendo ainda polinômio com grau igual a n . As operações assim definidas satisfazem as oito propriedades da definição 1.1.1. Logo, caracterizaram P_n como um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

1.2 Subespaço Vetorial

O Subespaço Vetorial é uma variação do espaço vetorial, utilizada para identificar se, em um conjunto do espaço vetorial, existe um subconjunto que é também um espaço vetorial por definição.

Definição 1.2.1: Seja V um espaço vetorial sobre o corpo K . Um subconjunto $W \subseteq V$ não vazio é chamado de subespaço se $(W, +, \cdot)$ satisfaz os requisitos de um espaço vetorial sobre K .

As propriedades da operação soma de vetores (comutatividade e associatividade) e as referentes ao produto por escalar são intrínsecas do espaço vetorial V , logo satisfazem em W . Dessa forma, podemos simplificar a definição de subespaço vetorial pelo seguinte resultado:

Teorema 1.2.2: Um subconjunto não vazio $W \subseteq V$ é um subespaço vetorial de V , se e somente se, para todo $u, v \in W$ e $\alpha \in K$, temos que $\alpha \cdot u + v \in W$.

Prova: Se W é um subespaço vetorial de V , então todas as propriedades das operações de V são válidas em W . Logo, para todo $u, v \in W$ e $\alpha \in K$, temos que $\alpha \cdot u + v \in W$. Reciprocamente, dado $u \in W$ e tomando $\alpha = 0$ temos por hipótese que $0 \cdot u = \vec{0} \in W$. Além disso, tomando $\alpha = -1$ temos que $(-1) \cdot u = -u \in W$. As outras propriedades são válidas em W pois são propriedades de V . Portanto, W é um subespaço vetorial de V . ■

Observação 1.2.3: Sem perda de simbologia, adotaremos a simbologia para o vetor nulo $\vec{0}$ como sendo 0 . A mesma simbologia será usada para o escalar $\alpha = 0$.

Exemplo 1.2.4: Considere $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - 3y + 3z = 0\}$ um subconjunto do $\mathbb{R}^3$.

i) Seja $u = (x_1, y_1, z_1) \in W$ e $v = (x_2, y_2, z_2) \in W$. Então

$$(x_1 + x_2) - 3(y_1 + y_2) + 3(z_1 + z_2) = (x_1 - 3y_1 + 3z_1) + (x_2 - 3y_2 + 3z_2) = 0$$

Logo $u + v \in W$;

ii) Se $\alpha \in \mathbb{R}$, então $(\alpha x_1) - 3(\alpha y_1) + 3(\alpha z_1) = \alpha(x_1 - 3y_1 + 3z_1) = \alpha \cdot 0 = 0$. Assim $\alpha u \in W$.

Desta forma, o conjunto W é um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^3$.

1.3 Combinação Linear

A Combinação Linear consiste na formação de novos vetores a partir da adição de vetores e da multiplicação por escalar.

Definição 1.3.1: Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K , dizemos que o vetor $v \in V$ é combinação linear de $v_1, v_2, \dots, v_n$ se existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$ tal que.

$$v = v_1 \alpha_1 + v_2 \alpha_2 + \dots + v_n \alpha_n$$

Exemplo 1.3.2: Sejam os vetores v_1 e v_2 em $\mathbb{R}^3$, da forma $v_1 = (3, -1, 0)$ e $v_2 = (1, 2, 1)$. Queremos verificar se o vetor $v = (-2, 3, 1)$ é combinação linear de v_1 e v_2 . Assim, sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tais que:

$$\begin{aligned}\alpha \cdot (3, -1, 0) + \beta \cdot (1, 2, 1) &= (-2, 3, 1) \\ \Rightarrow (3\alpha, -\alpha, 0) + (\beta, 2\beta, \beta) &= (-2, 3, 1) \\ \Rightarrow (3\alpha + \beta, -\alpha + 2\beta, \beta) &= (-2, 3, 1)\end{aligned}$$

Dessa forma, temos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 3\alpha + \beta = -2 \\ -\alpha + 2\beta = 3 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

Substituindo o valor de β na segunda equação, temos:

$$-\alpha + 2(1) = 3 \Rightarrow -\alpha + 2 = 3 \quad \therefore \alpha = -1$$

Sabendo então os respectivos valores de α e β , então que o vetor v é combinação linear de v_1 e v_2 , pois $v = -1v_1 + 1v_2$. ■

Observação 1.3.3: Consideramos $W = \{v \in V; v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n, \alpha_i \in K\}$ ou $W = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ o subespaço vetorial de V gerado pelos vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$.

1.4 Dependência e Independência Linear

Definição 1.4.1: Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo K e $\{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subset V$. Dizemos que $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ é Linearmente Independente (LI), se, e somente se, a única solução da equação

$$u_1 \alpha_1 + u_2 \alpha_2 + \dots + u_n \alpha_n = 0$$

for necessariamente $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. Se existir algum $\alpha_i \neq 0$, então $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ é dito um conjunto de vetores Linearmente Dependente (LD).

Proposição 1.4.2: Se dois vetores são linearmente dependentes, um deles é múltiplo escalar do outro.

Prova: Sendo os vetores v_1 e v_2 linearmente dependente, segundo a definição 1.4.1, existem escalares $\alpha, \beta \in K$ não ambos nulos, de forma que:

$$\alpha v_1 + \beta v_2 = 0,$$

Assim temos duas possibilidades: $\alpha \neq 0$ ou $\alpha = 0$.

1) Se $\alpha \neq 0$, então verificaremos quem é v_1 :

$$\alpha v_1 + \beta v_2 = 0 \Rightarrow \alpha v_1 = -\beta v_2 \Rightarrow v_1 = -\frac{\beta v_2}{\alpha} = \left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) v_2$$

Logo, v_1 é múltiplo escalar de v_2

2) Se $\alpha = 0$, então devemos ter $\beta \neq 0$. Assim:

$$\alpha v_1 + \beta v_2 = 0 \Rightarrow \beta v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = 0$$

Dessa forma, o vetor v_2 é nulo, sendo então múltiplo de qualquer vetor. Portanto, vetores linearmente dependentes um deles será múltiplo escalar do outro.

■

Esta proposição pode ser generalizada para o seguinte resultado: “Um conjunto de vetores $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ é LD se, e somente se, um deles é combinação linear dos demais”.

Exemplo 1.4.3: Os vetores $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (0, 1, 1)$ e $v_3 = (1, 0, 1)$ em $\mathbb{R}^3$ são linearmente independentes. Considere a combinação linear

$$\begin{aligned} \alpha(1, 1, 1) + \beta(0, 1, 1) + \delta(1, 0, 1) &= (0, 0, 0) \\ \Rightarrow (\alpha, \alpha, \alpha) + (0, \beta, \beta) + (\delta, 0, \delta) &= (0, 0, 0) \\ \Rightarrow (\alpha + \delta, \alpha + \beta, \beta + \delta) &= (0, 0, 0) \end{aligned}$$

Temos o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} \alpha + \delta = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + \beta + \delta = 0 \end{cases}$$

Assim, na equação 1 teremos $\alpha = -\delta$. Substituído α na equação 2 teremos, $-\delta + \beta = 0 \Rightarrow \beta = \delta$. Substituindo agora na equação 3 teremos,

$$-\delta + \delta + \delta = 0 \Rightarrow \delta = 0$$

Assim, $\alpha = \beta = \delta = 0$. Portanto, v_1, v_2, v_3 são linearmente independentes.

1.5 Base e Dimensão

Uma base concentra toda a estrutura de um espaço vetorial no menor conjunto de vetores linearmente independentes, permitindo escrever qualquer vetor deste espaço de forma única em coordenadas. Isso torna a análise do espaço vetorial mais simples: dimensão, independência e o comportamento de transformações lineares passam a ser descritos por cálculos diretos em coordenadas, reduzindo problemas abstratos a operações lineares claras.

Definição 1.5.1: *Seja V um espaço vetorial. O conjunto de vetores $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é base de V , se, somente se, for um conjunto linearmente independente e que gera o espaço V , isto é, todo vetor de V é combinação linear de $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$.*

Exemplo 1.5.2: Sabemos que os vetores $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (0, 1, 1)$ e $v_3 = (1, 0, 1)$ em $\mathbb{R}^3$ são linearmente independentes. Mostraremos que qualquer vetor do $\mathbb{R}^3$ é uma combinação linear destes vetores. Para isto, dado $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ considere

$$(a, b, c) = x(1, 1, 1) + y(0, 1, 1) + z(1, 0, 1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + z = a \\ x + y = b \\ x + y + z = c \end{cases}$$

Da 1ª equação temos $x = a - z$. E substituindo na 3ª equação, obtemos $y = c - a$. Substituindo o valor de y na 2ª equação, teremos $x = a + b - c$. Dessa forma, voltando para a 1ª equação, temos que $z = c - b$. Logo, $\mathfrak{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ é LI e gera o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, portanto é uma base.

Definição 1.5.3: *A dimensão de um espaço vetorial V é o número de vetores que existe na sua base.*

A seguir enunciaremos e demonstraremos alguns resultados correlacionados que são fundamentais para os conceitos apresentados anteriormente.

Teorema 1.5.4: *Sejam $u_1, u_2, \dots, u_n$ vetores não nulos que geram um espaço vetorial V . Então dentre estes vetores podemos extrair uma base para V .*

Prova: Se $u_1, u_2, \dots, u_n$ for LI, nada a fazer. Se for LD, então extraímos os vetores de que são combinação linear dos demais. Dessa forma, o que sobra é um conjunto LI que ainda gera o espaço V . Logo, extraímos uma base do conjunto $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$. ■

Teorema 1.5.5: *Se $V = [u_1, u_2, \dots, u_n]$, então qualquer conjunto com mais de n vetores é LD.*

Prova: Pelo teorema 1.5.4, então podemos extrair uma base de V , digamos $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ com $m \leq n$. Seja $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ um conjunto com mais de n vetores ($r > n$). Assim, existem escalares a_{ij} tais que

$$\begin{cases} v_1 = a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \dots + a_{1m}u_m \\ \vdots \\ v_r = a_{r1}u_1 + a_{r2}u_2 + \dots + a_{rm}u_m \end{cases}$$

Seja a combinação linear $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_r v_r = 0$. Substituindo as combinações lineares de cada v_i , obtemos

$$(a_{11}\alpha_1 + \cdots + a_{r1}\alpha_r)u_1 + \cdots + (a_{1m}\alpha_1 + \cdots + a_{rm}\alpha_r)u_m = 0$$

Como $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ é LI, então temos o seguinte sistema homogêneo com m equações e r variáveis, a saber

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + \cdots + a_{r1}\alpha_r = 0 \\ \vdots \\ a_{1m}\alpha_1 + \cdots + a_{rm}\alpha_r = 0 \end{cases}$$

Sabendo que $m \leq n < r$, então o sistema admite solução não nula. Portanto, $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ é LD.

■

Corolário 1.5.6: Se V é um espaço vetorial de dimensão finita, então duas quaisquer bases de V tem o mesmo número de elementos.

Prova: Sejam $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ e $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ bases de V . Temos dois casos a considerar:

i) Se $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ é base, então pelo teorema 1.5.5 temos $n \leq m$;

ii) Se $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ é base, então $m \leq n$

$$\therefore m = n$$

■

Observação 1.5.7: Se $\mathfrak{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ é uma base ordenada de V , então cada vetor $v \in V$ é escrito de maneira única por $v = u_1\alpha_1 + u_2\alpha_2 + \cdots + u_n\alpha_n$. Os escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ são ditos “coordenadas de v em relação a base $\mathfrak{B}$ ”. Denotamos como

$$[v]_{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

Exemplo 1.5.8: Temos que $\mathfrak{B} = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$ é uma base do $\mathbb{R}^3$. Logo

$$[(1, 2, 3)]_{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ pois } (1, 2, 3) = 0 \cdot (1, 1, 1) + 2 \cdot (0, 1, 1) + 1 \cdot (1, 0, 1)$$

Proposição 1.5.9: Se $[v]_{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$ e $[w]_{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$, então $[v + \lambda w]_{\mathfrak{B}} = [v]_{\mathfrak{B}} + \lambda[w]_{\mathfrak{B}} \quad \forall \lambda \in K$.

Prova: Temos que $v = u_1\alpha_1 + u_2\alpha_2 + \cdots + u_n\alpha_n$ e $\lambda w = u_1\lambda\beta_1 + u_2\lambda\beta_2 + \cdots + u_n\lambda\beta_n$. Então $v + \lambda w = u_1(\alpha_1 + \lambda\beta_1) + u_2(\alpha_2 + \lambda\beta_2) + \cdots + u_n(\alpha_n + \lambda\beta_n)$. Portanto,

$$[v + \lambda w]_{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \lambda \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_n + \lambda \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = [v]_{\mathfrak{B}} + \lambda [w]_{\mathfrak{B}}$$

■

Sejam $\mathfrak{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ e $\mathcal{A} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ bases de um espaço vetorial V . Dado $v \in V$, surge o seguinte questionamento: Qual a relação entre as coordenadas $[v]_{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$ e

$$[v]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} ? \text{ Sabemos que}$$

$$\begin{aligned} [v]_{\mathfrak{B}} &= [v_1 \beta_1 + v_2 \beta_2 + \dots + v_n \beta_n]_{\mathfrak{B}} = [v_1 \beta_1]_{\mathfrak{B}} + [v_2 \beta_2]_{\mathfrak{B}} + \dots + [v_n \beta_n]_{\mathfrak{B}} \\ &= \beta_1 [v_1]_{\mathfrak{B}} + \beta_2 [v_2]_{\mathfrak{B}} + \dots + \beta_n [v_n]_{\mathfrak{B}} \end{aligned}$$

Considere o vetor mudança de base v_j em relação a base $\mathfrak{B}$ representado por $[v_j]_{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$.

Assim,

$$[v]_{\mathfrak{B}} = \beta_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} + \beta_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix} + \dots + \beta_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

$$\therefore [v]_{\mathfrak{B}} = [I]_{\mathfrak{B}}^{\mathcal{A}} \cdot [v]_{\mathcal{A}}$$

onde $[I]_{\mathfrak{B}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ é a matriz de mudança da base $\mathcal{A}$ para a base $\mathfrak{B}$.

1.6 Transformação Linear

A transformação linear é um dos conceitos da Álgebra Linear responsável por descrever funções entre espaços vetoriais que preservam as operações de adição de vetores e multiplicação por escalar, permitindo compreender como vetores podem ser transformados sem alterar a estrutura linear do espaço vetorial.

Definição 1.6.1: Sejam V e W espaços vetoriais sobre um corpo K . A função $T : V \rightarrow W$ é dita uma transformação linear se, $\forall u, v \in V$ e $\alpha \in K$, temos que:

$$i) \quad T(u + v) = T(u) + T(v)$$

$$ii) T(\alpha \cdot u) = \alpha \cdot T(u)$$

Observação 1.6.2: Se T é transformação linear de V em W , então $T(0) = T(0 + 0) = T(0) + T(0)$. Portanto, $T(0) = 0$. Dessa forma, se $T(0) \neq 0$ então T não é uma transformação linear. Além disso, se T é uma transformação linear, então:

$$T(-v) = T((-1)v) = -T(v)$$

Exemplo 1.6.3: Seja $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (2x + y, x)$. Temos que:

$$\begin{aligned} T((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) &= T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (2(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2), x_1 + x_2) \\ &= (2x_1 + y_1, x_1) + (2x_2 + y_2, x_2) = T(x_1, y_1) + T(x_2, y_2). \end{aligned}$$

Além disso, $T(\alpha \cdot (x_1, y_1)) = (2(\alpha x_1) + \alpha y_1, \alpha x_1) = \alpha(2x_1 + y_1, x_1) = \alpha \cdot T(x_1, y_1)$.

Portanto T é uma transformação linear.

Teorema 1.6.4: *Sejam V espaço vetorial de dimensão finita e $\mathfrak{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ uma base ordenada. Seja W um espaço vetorial com $w_1, w_2, \dots, w_n \in W$ vetores arbitrários. Então existe uma única transformação linear $T: V \rightarrow W$ tal que $T(u_1) = w_1, T(u_2) = w_2, \dots, T(u_n) = w_n$.*

Prova: Ver em Hoffman e Kunze, p. 69. ■

1.7 Núcleo e Imagem

O estudo do núcleo e da imagem de uma transformação linear na Álgebra Linear se dá pela análise do comportamento dessa função. O núcleo permite identificar quais vetores são enviados ao vetor nulo. Já a imagem representa o conjunto de todos os vetores que podem ser obtidos como resultado da aplicação da transformação, indicando os elementos do contradomínio. Esses conceitos são fundamentais para o estudo das propriedades das transformações lineares.

Definição 1.7.1: *Seja $T: V \rightarrow W$ uma transformação linear. Definimos o Núcleo de T por:*

$$\ker(T) = \{v \in V / T(v) = 0\}$$

Definimos a Imagem de T por: $\text{Im}(T) = \{T(v) / v \in V\}$.

Observação 1.7.2: *Seja $T: V \rightarrow W$ uma transformação linear, sendo V de dimensão finita. O Posto de T é a dimensão da imagem de T . A Nulidade de T é a dimensão do núcleo de T .*

Exemplo 1.7.3: Dada a transformação linear $T(x, y) = (x + y, x - y, y)$, qual a imagem, posto, núcleo e nulidade de T ? Sua imagem é definida por,

$$\begin{aligned} \text{Im}(T) &= \{(x + y, x - y, y) \in \mathbb{R}^3 / x, y \in \mathbb{R}\} = \{(x, x, 0) + (y, -y, y)\} \\ \therefore \text{Im}(T) &= \{x(1, 1, 0) + y(1, -1, 1)\} \end{aligned}$$

O núcleo será definido por:

$$\begin{aligned} \ker(T) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / T(x, y) = (0, 0, 0)\} \\ \Rightarrow (x + y, x - y, y) &= (0, 0, 0) \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Sendo $y = 0$, logo $x + y = 0 \Rightarrow x = 0$. Logo $\ker(T) = \{(0, 0)\}$

A nulidade é a dimensão do núcleo, logo nulidade T é zero. Já o posto é definido pela dimensão da imagem. Como

$$\text{Im}(T) = \{x(1, 1, 0) + y(1, -1, 1)\},$$

gerada pelos vetores $(1, 1, 0)$ e $(1, -1, 1)$ e, sabendo que os vetores são linearmente independentes, a imagem é composta por uma base com dois vetores, logo $\text{Posto}(T) = 2$.

Teorema 1.7.4 (Teorema do Núcleo e da Imagem): *Sejam V um espaço vetorial n -dimensional e $T: V \rightarrow W$ uma transformação linear. Então*

$$\dim V = \dim \ker(T) + \dim \text{Im}(T)$$

Prova: Ver em Hoffman e Kunze, p. 71. ■

1.8 Matriz de uma transformação

Sejam $T: V \rightarrow W$ uma transformação linear, $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ e $\mathcal{A} = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ bases dos espaços vetoriais V e W , respectivamente. Então dado $v \in V$ existem escalares α_i tal que $v = u_1\alpha_1 + u_2\alpha_2 + \dots + u_n\alpha_n$. Assim, $T(v) = \alpha_1T(u_1) + \alpha_2T(u_2) + \dots + \alpha_nT(u_n)$ e com $T(u_i) \in W$, existem escalares $a_{ji}, j = 1, \dots, m$ tais que $T(u_i) = v_1a_{1i} + \dots + v_ma_{mi}$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} T(v) &= \alpha_1(v_1a_{11} + \dots + v_ma_{m1}) + \dots + \alpha_n(v_1a_{1n} + \dots + v_ma_{mn}) \\ &= (\alpha_1a_{11} + \dots + \alpha_na_{1n})v_1 + \dots + (\alpha_1a_{m1} + \dots + \alpha_na_{mn})v_m \end{aligned}$$

Por outro lado, existem escalares β_i tal que $T(v) = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_m v_m$. Como a decomposição é única, segue que

$$\begin{cases} \beta_1 = \alpha_1 a_{11} + \cdots + \alpha_n a_{1n} \\ \vdots \\ \beta_m = \alpha_1 a_{m1} + \cdots + \alpha_n a_{mn} \end{cases}$$

Em forma matricial, temos que

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad [T(v)]_{\mathcal{A}} = [T]_{\mathcal{A}}^{\mathfrak{B}} \cdot [v]_{\mathfrak{B}}$$

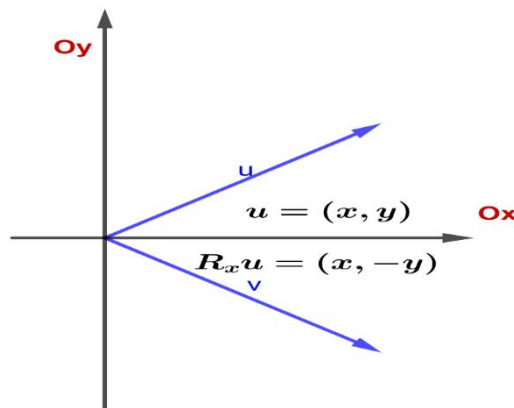
onde $[T]_{\mathcal{A}}^{\mathfrak{B}}$ é a matriz de T em relação as bases $\mathfrak{B}$ e $\mathcal{A}$.

Exemplo 1.8.1: Consideremos a transformação linear $T(x, y) = (x + y, x - y, y)$ e as bases canônicas do $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. Então temos que $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Se $T: V \rightarrow V$, então dizemos que a transformação linear é um *operador linear* sobre V . Entre os operadores do $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ de significado muito marcante em geometria são os que produzem reflexões, projeções e rotações. Faremos a seguir uma breve ilustração destes operadores no $\mathbb{R}^2$.

Reflexões: Considere o operador $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ cuja imagem de cada vetor é simétrica em relação ao eixo x , representada na figura 1. Ou seja, $T(x, y) = (x, -y)$. Em forma matricial em relação a base canônica, $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

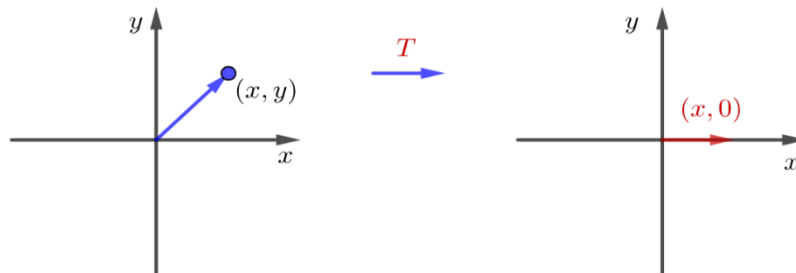
Figura 1 - Reflexão no eixo Ox



Fonte: Elaborado pela autora no software GeoGebra (2026)

Projeções: Considere o operador $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que associa cada vetor na sua projeção ortogonal em relação ao eixo x , representado na Figura 2. Ou seja, $T(x, y) = (x, 0)$. Em forma matricial em relação a base canônica, $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

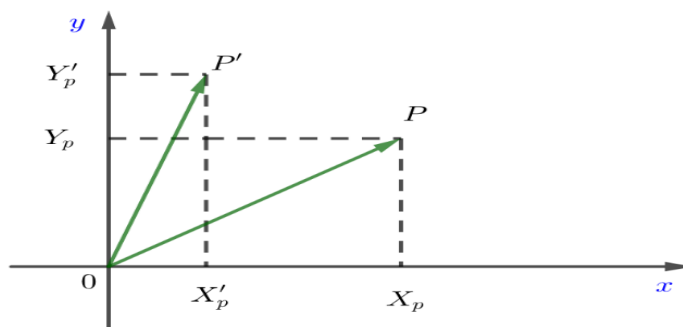
Figura 2 - Projeção ortogonal em relação ao eixo x



Fonte: Elaborado pela autora no software GeoGebra (2026)

Rotações: Considere o operador $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que, por um ângulo fixo θ , rotaciona um vetor, apresentada na Figura 3. Em outras palavras, temos $T(x, y) = (x \cdot \cos \theta - y \cdot \sin \theta, x \cdot \sin \theta + y \cdot \cos \theta)$. Em forma matricial em relação a base canônica, $[T] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$

Figura 3 – Rotação de um vetor



Fonte: Elaborado pela autora no software GeoGebra (2026)

1.9 Autovalores e Autovetores

O estudo dos autovalores e autovetores na Álgebra Linear consiste em analisar a direção dos vetores após a aplicação de uma transformação linear, permitindo compreender seu comportamento. Seu estudo está presente em diversas áreas, como Física, Engenharia, sendo fundamentais em problemas envolvendo estabilidade e vibrações.

Definição 1.9.1: Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo K e $T: V \rightarrow V$ um operador linear. Um vetor $v \in V$ não nulo é dito um autovetor de T se existir um escalar $\lambda \in K$ tal que $T(v) = \lambda v$. O escalar λ é dito um autovalor de T .

Observação 1.9.2: Em dimensão finita, λ é autovalor, se, e somente se, $\det([T] - \lambda I) = 0$. Ele pode ser real ou complexo, dependendo do corpo K considerado.

Observação 1.9.3: Se v é um autovetor associado ao autovalor λ , então qualquer múltiplo não nulo de v também é autovetor associado ao mesmo autovalor. Com efeito, se $w = \alpha v$ segue que

$$T(w) = T(\alpha \cdot v) = \alpha \cdot T(v) = \alpha(\lambda \cdot v) = \lambda w$$

Seja $T: V \rightarrow V$ linear cuja sua matriz na base canônica seja $A = [T]$. Se v (vetor coluna) e λ são autovetor e autovalor de A , respectivamente, então temos $A \cdot v = \lambda v$. Além disso, se A é uma matriz $n \times n$, o autovalor de A é um escalar λ tal que a matriz $(A - \lambda I)$ é não inversível, pois $\det(A - \lambda I) = 0$.

Exemplo 1.9.4: Seja A a matriz definida por $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, e seja T o operador linear sobre $\mathbb{R}^2$ representado por A em relação à base ordenada canônica. Determinaremos uma base do $\mathbb{R}^2$ formada por autovetores de T .

Para iniciar essa resolução será encontrado o seu autovalor, dessa forma:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 - \lambda & 5 \\ 2 & 1 - \lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 4 - \lambda & 5 \\ 2 & 1 - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda - 6 = 0$$

Logo, $\lambda' = -1$ e $\lambda'' = 6$. Portanto, os autovalores são (-1) e 6 .

Para definir o autovetor tomaremos $(A - \lambda I)v = 0$. Para $\lambda_1 = -1$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 4 - \lambda & 5 \\ 2 & 1 - \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 - (-1) & 5 \\ 2 & 1 - (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema, teremos:

$$\begin{cases} 5x + 5y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$$

Logo, $\text{Ker}(T - (-1)I) = \{(x, y); x = -y\} = \{(-y, y) / y \in \mathbb{R}\} = [(-1, 1)]$.

Para $\lambda_2 = 6$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 4 - \lambda & 5 \\ 2 & 1 - \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 - (6) & 5 \\ 2 & 1 - (6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema, teremos:

$$\begin{cases} -2x + 5y = 0 \\ 2x - 5y = 0 \end{cases}$$

Logo, $\text{Ker}(T - (6)I) = \{(x, y); x = \frac{5}{2}y\} = \{(\frac{5}{2}y, y) / y \in \mathbb{R}\} = \left[\left(\frac{2}{5}, 1\right)\right]$. Como os dois autovetores são linearmente independentes, então $\{(-1, 1), \left(\frac{2}{5}, 1\right)\}$ formam uma base do $\mathbb{R}^2$.

Teorema 1.9.5: *Autovetores associados a autovalores distintos são LI.*

Prova: Sem perda de generalidade, iremos fazer a prova para apenas dois autovetores visto que o procedimento para um número maior é análogo. Assim, sejam λ_1 e λ_2 autovalores associados aos autovetores v_1 e v_2 , com $v_1 \neq v_2$. Considere $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0$. Operando em ambos os lados desta combinação linear por λ_1 e λ_2 , temos que

$$\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_1 v_2 = 0 \quad \text{e} \quad \alpha_1 \lambda_2 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2 = 0$$

Aplicando T a combinação linear inicial, obtemos

$$T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = T(0) \Rightarrow \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2 = 0$$

Subtraindo esta última equação das duas anteriores, teremos

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_1)v_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1)v_2 = 0 \quad \text{e} \quad \alpha_1(\lambda_2 - \lambda_1)v_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_2)v_2 = 0$$

Como $v_1 \neq 0$ e $v_2 \neq 0$, concluímos que $\alpha_1 = 0$ e $\alpha_2 = 0$. Portanto, $\{v_1, v_2\}$ é LI. ■

Corolário 1.9.6: *Se $\dim V = n$ e $T: V \rightarrow V$ possui n autovetores distintos, então V possui uma base $\mathfrak{B}$ de autovetores de T .*

Para finalizar esta sessão, se V admite uma base $\mathfrak{B}$ de autovetores de T , então $[T]_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}$ é uma matriz diagonal. O operador T é dito um “operador diagonalizável”.

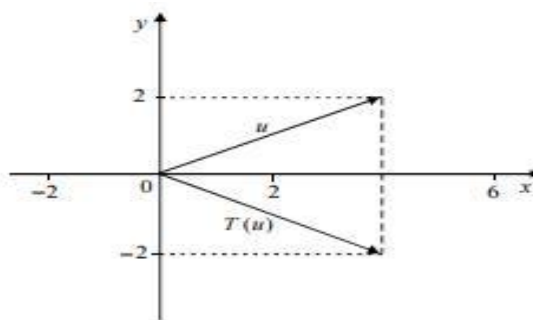
2 QUESTÕES DO ENADE DE ÁLGEBRA LINEAR

Na seção 1 tratamos das definições acerca da Álgebra Linear, explorando suas características através das fórmulas e de suas demonstrações. Assim, neste capítulo iremos apresentar questões do Enade a respeito de Álgebra Linear, em especial sobre espaços vetoriais, transformações lineares e autovalores e autovetores, e como resolvê-las através do que foi trabalhado na seção anterior.

2.1 ENADE 2008

Uma transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ faz uma reflexão em relação ao eixo horizontal, conforme mostrado na figura a seguir.

Figura 4



Fonte: INEP (2008)

Essa transformação T

A é dada por $T(x, y) = (-x, y)$.

B tem autovetor $(0, -1)$ com autovalor associado igual a 2.

C tem autovetor $(2, 0)$ com autovalor associado igual a 1.

D tem autovalor de multiplicidade 2.

E não é inversível.

Resolução da questão comentada:

Esta se trata de transformação linear, autovetor e autovalor, podendo então explorar à Álgebra Linear. Temos um grande exemplo da importância do entendimento das definições algébricas, pois elenca pontos que estão relacionados e que é necessário o entendimento para poder diferenciá-los. Ela tem como objetivo avaliar o entendimento dos estudantes da graduação acerca da transformação linear no $\mathbb{R}^2$, com foco maior em determinar a sua reflexão, ou seja, uma transformação geométrica, onde o eixo x se mantém e o eixo y é alterado.

Como visto na seção 2, a transformação linear é uma função entre dois espaços vetoriais. Uma reflexão em relação ao eixo horizontal se trata de manter o eixo x e inverter o eixo y , fazendo $(x, y) \rightarrow (x, -y)$, apresentado na figura, sendo $T(u)$ a imagem do vetor u .

Sabendo dessas informações se faz necessário a análise de cada alternativa: no item (A) é possível ver que a reflexão é realizada perante o eixo y , assim invertendo o sinal da coordenada do eixo x e mantendo a coordenada do eixo y , tornando então essa alternativa falsa.

Um vetor v não nulo, em V , é dito autovetor de T se satisfaz a relação $T(v) = \lambda v$. Assim, sabendo que a reflexão perante ao eixo horizontal inverte o sinal da coordenada y , sendo então um autovetor $(0, -1)$, que não se associa a um autovalor 2, podendo então desconsiderar a veracidade da alternativa (B).

Em uma reflexão, os vetores que pertencem ao eixo x não sofrem mudanças, apenas vetores pertencentes ao eixo y . Desta forma, se $(x, 0)$ é um autovetor, com autovalor igual a 1, temos $T(x, 0) = (x, 0)$. Assim, o autovetor $(2, 0)$ está associado ao autovalor 1. Logo, a alternativa (C) é verdadeira.

A alternativa (D) questiona se a transformação linear tem autovalor de multiplicidade 2, e pode-se dizer que não, pois a transformação possui dois autovalores diferentes, sendo 1 e -1, associado respectivamente ao eixo x e ao eixo y .

Por fim a alternativa (E) afirma que a transformação não é inversível. O que caracteriza se uma transformação linear for inversível é quanto a sua bijeção. A transformação linear do $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ dada é injetora pois $T(a, b) \neq T(c, d)$ para $(a, b) \neq (c, d)$. além disso, é sobrejetora pois temos $T(x, -y) = (x, y)$, com $(x, y), (x, -y) \in \mathbb{R}^2$. Portanto a transformação é bijetora, logo é inversível. Negando a afirmação feita na alternativa.

2.2 ENADE 2011

Considere a transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (2x + 6y, 6x + 2y)$. Com relação a esse operador, analise as asserções a seguir.

O núcleo de T é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$ de dimensão 1.

PORQUE

T é um operador normal.

A respeito dessas asserções, assinale a opção correta.

- A. As duas asserções são proposições verdadeiras, e a segunda é uma justificativa correta da primeira.*
- B. As duas asserções são proposições verdadeiras, mas a segunda não é uma justificativa correta da primeira.*
- C. A primeira asserção é uma proposição verdadeira, e a segunda, uma proposição falsa.*
- D. A primeira asserção é uma proposição falsa, e a segunda, uma proposição verdadeira.*
- E. Tanto a primeira quanto a segunda asserções são proposições falsas.*

Resolução da questão comentada:

Esta questão aborda transformação linear, buscando a compreensão de núcleo, dimensão e operador normal, que compõem um operador linear, visando enfatizar a importância de compreender os conceitos. Ela tem por objetivo, através de uma transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, analisar duas afirmações, a saber: O núcleo de T é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$ de dimensão 1 e T é um operador normal. Ao analisar cada alternativa será avaliado a existência de relação entre essas afirmações, por meio dos conceitos teóricos vistos na sessão 2.

Um operador linear $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dito normal quando comportamento da matriz deste operador comuta com sua transposta. Ou seja, se $A = [T]$ então $A \cdot A^t = A^t \cdot A$.

A primeira asserção diz que o núcleo de T é um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^2$ de dimensão 1. Assim: $T(x, y) = (0, 0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x + 6y = 0 \\ 6x + 2y = 0 \end{cases}$$

Resolvendo este sistema linear teremos,

$$x + 3y = 0 \Rightarrow x = -3y$$

Substituindo na segunda equação,

$$6(-3y) + 2y = 0 \Rightarrow -18y + 2y = 0 \Rightarrow -16y = 0 \therefore y = 0 \text{ e } x = 0$$

Logo, $\text{Ker}(T) = \{(0,0)\}$ e sua dimensão é zero, o que é contrário a afirmação que diz que a dimensão é 1.

A segunda asserção diz que T é um operador normal. Em relação a base canônica, temos:

$$A = [T] = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

então é possível notar que esta é uma matriz simétrica, satisfazendo $A \cdot A^T = A^T \cdot A$. Tornando então essa afirmação correta.

Ao analisar as alternativas é possível notar que a alternativa (A) está incorreta pois diz que as duas asserções estão corretas. A alternativa (B) por sua vez diz também que ambas as asserções estão corretas, o que não é verdade. A alternativa (C) diz que a primeira asserção é verdadeira e a segunda é falsa, o que está incorreto. Já a alternativa (D) diz que a primeira proposição é falsa e a segunda verdadeira estando correto. Por fim a alternativa (E) diz que ambas as proposições são falsas, estando incorreto essa afirmação.

2.3 ENADE 2014

Os principais efeitos visuais da computação gráfica vistos em uma tela são resultados de aplicações de transformações lineares. Translação, rotação, redimensionamento e alteração de cores são apenas alguns exemplos.

Considere que uma tela é cortada por dois eixos, x e y , ortogonais entre si, formando um sistema de coordenadas com origem no centro da tela. Suponha que nessa tela plana, existe a imagem de uma elipse com eixo maior de tamanho 4, paralelo ao eixo x , e cujos focos têm coordenadas $(-1, 2)$ e $(1, 2)$. Considere T um operador linear definido em $\mathbb{R}^2$.

De acordo com as informações acima, faça o que se pede nos itens a seguir, apresentando os cálculos utilizados na sua resolução.

A. Mostre que o ponto $(0, 2 + \sqrt{3})$ pertence à elipse.

B. Suponha que, em cada ponto da tela, seja aplicado o operador linear $T(x, y) = (x + y, -2x + 4y)$. Quais serão as coordenadas dos focos da elipse após a aplicação de T ?

C. Calcule os autovalores do operador linear $T(x, y) = (x + y, -2x + 4y)$.

Resolução da questão comentada:

Nesta questão refere-se às aplicações das transformações lineares em um contexto de computação gráfica. No meio gráfico muitos artifícios matemáticos são utilizados, como reta e elipses, que podem ser apresentados por meio de operadores lineares. Buscando relacionar o meio da representação geométrica com a transformação linear em um espaço bidimensional.

Objetivando essa relação entre as duas vertentes, os conceitos geométricos e algébricos, em busca de compreender suas propriedades e aplicações, verificando pertencimento a elipse, os operadores lineares e seus autovalores correspondentes.

A questão apresenta três pontos a serem discutidos, iniciando pela alternativa A que se trata de mostrar que o ponto $P(0, 2 + \sqrt{3})$ pertence à elipse.

Inicialmente, a elipse é uma cônica definida como o conjunto de todos os pontos do plano, cujas somas das distâncias dos focos F_1 e F_2 é igual ao comprimento do seu eixo maior $2a$. Ou seja, se $P(x, y)$ é um ponto qualquer na elipse, temos a seguinte equação:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

Na questão temos $F_1(-1, 2)$, $F_2(1, 2)$ e $2a = 4$. Considerando $P(0, 2 + \sqrt{3})$, temos:

$$\begin{aligned} d(P, F_1) + d(P, F_2) &= \sqrt{(0 - (-1))^2 + ((2 + \sqrt{3}) - 2)^2} + \sqrt{(0 - 1)^2 + ((2 + \sqrt{3}) - 2)^2} \\ &= \sqrt{1 + 3} + \sqrt{1 + 3} = 2 + 2 = 4 = 2a \end{aligned}$$

Confirmando então que o ponto $P(0, 2 + \sqrt{3})$ pertence a elipse.

Na alternativa B tem como objetivo saber quais serão as coordenadas dos focos da elipse após a aplicação de T . Então utilizaremos do operador linear $T(x, y) = (x + y, -2x + 4y)$ e, cujos focos têm coordenadas $(-1, 2)$ e $(1, 2)$. Assim:

$$T(-1, 2) = (-1 + 2, -2(-1) + 4(2))$$

$$\therefore T(-1, 2) = (1, 10)$$

$$T(1, 2) = (1 + 2, -2(1) + 4(2))$$

$$\therefore T(1, 2) = (3, 6)$$

Logo, $(1, 10)$ e $(3, 6)$ são as coordenadas dos focos depois da aplicação do operador T .

A alternativa C por sua vez visa o cálculo dos autovalores do operador linear T . Sabemos que a matriz de T em relação a base canônica será: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$. Para determinar seu autovalor, será calculado da seguinte maneira, $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 4-\lambda \end{pmatrix} &= (1-\lambda)(4-\lambda) + 2 \\ &= \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \end{aligned}$$

A solução desta equação são os valores $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$, identificando então os autovalores desta transformação.

Desta forma, os autovalores podem alterar a elipse de acordo com cada um de seus pontos sejam encontrados, pois seus valores diferentes podem modificar as direções desta transformação linear.

2.4 ENADE 2021

Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear dada pela reflexão em torno do eixo x , seguida da rotação de 90° no sentido anti-horário e da dilatação de fator 2.

Com base nessas informações, é correto afirmar que $T(20, 24)$ é igual a

A $(40, 48)$.

B $(48, 40)$.

C $(40, -48)$.

D $(48, -40)$.

E $(-48, -40)$.

Resolução da questão comentada:

Nesta questão é abordado transformação linear em um plano bidimensional. É uma questão rica em conceitos a serem trabalhados e compreendidos, pois através dela será trabalhado, a reflexão de uma transformação, sua rotação e dilatação, mais uma vez relacionando tendências geométricas com algébricas.

Ela tem como objetivo confirmar a imagem de um ponto, visto que a compreensão de transformações lineares, e sua ligação entre a descrições geométricas e algébricas, verificando aplicação de transformação, reflexão sobre eixo, rotação e dilatação de fator.

Visto que a transformação linear no $\mathbb{R}^2$ preserva a operação por escalares, a reflexão em torno do eixo x por sua vez, preserva a coordenada x e inverte o sinal da coordenada y . Já na rotação de 90° no sentido anti-horário, a dilatação de fator 2 multiplica as coordenadas por 2.

A questão traz que a transformação linear é composta por três afirmativas que devem ser trabalhadas em suas respectivas ordens. A primeira etapa é definir sua reflexão: dado a transformação no ponto $(20, 24)$, como na reflexão a coordenada y se inverte e a x se mantém, então $(20, 24) \rightarrow (20, -24)$. Na Rotação anti-horário terá $(20, -24) \rightarrow (24, 20)$, pois a posição de sua rotação se inverte. Por fim sua dilatação ao multiplicar as coordenadas por 2, ficará,

$$T(24, 20) = (2 \cdot 24, 2 \cdot 20) = (48, 40)$$

Assim, $T(20, 24) = (48, 40)$ determinando a imagem do ponto dado no enunciado.

Ao analisar as propostas da alternativas é possível utilizar o método de eliminação, restando então a alternativa correta que é a (B), qual tem como resultado $(48, 40)$, que é a imagem encontrada durante a execução das etapas da transformação.

Desta forma, é notório que dado uma transformação linear no plano bidimensional, e apresentado um ponto específico, sendo respeitado as etapas respectivamente proposta pelo enunciado da questão, será obtido uma resultado final, podendo comprovar que as afirmações feitas são corretas.

3 O ENADE E OS RESULTADOS DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA – CAMPUS IV

Nesta seção será apresentada a evolução do Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (Enade), desde o Provão até o que temos hoje, seus objetivos e sua devida importância para a instituição, visando compreender o corpo estrutural do exame acerca do curso de Licenciatura em Matemática da UFPB, Campus IV – Rio Tinto. Em continuidade, será tratada a análise de desenvolvimento e resultados do Enade referente à disciplina de Álgebra Linear.

3.1 A evolução do Enade: do provão ao exame nacional de desempenho dos estudantes

Em 1970, o setor educacional acadêmico passou por uma inovação, ao compreender que a educação é pilar no processo de desenvolvimento do ser humano. Assim o com a popularização do ensino superior, o Estado decidiu buscar meios que assegurassem a qualidade do ensino oferecido pelas instituições.

A partir de então, iniciou-se a compreensão da necessidade de um exame que pudesse avaliar o desenvolvimento da educação superior. A legislação decidiu, então, criar o *Provão*, em 1996, sendo aplicado no mesmo ano para cerca de 55 mil graduandos de 616 cursos de Administração, Direito e Engenharia Civil. Só no ano de 1998 ele foi ofertado aos cursos de licenciatura, como Letras e Matemática. Segundo Verhine, Dantas e Soares (2006), o Provão garantiria a qualidade e a responsabilidade social por meio da avaliação, em vez de intervenções e controle direto. Com isso, o objetivo principal era analisar o desempenho do Sistema Nacional de Educação Superior, separadamente, por área de conhecimento e por região, possibilitando que todos os cursos fossem avaliados acerca dos resultados obtidos no Provão, os quais podiam qualificar o desempenho da instituição e de seus docentes.

O Brasil então oficializou o Provão como uma avaliação obrigatória para a graduação de educação superior, fixando-o como um exame a ser realizado todos os anos por estudantes concluintes dos cursos. As provas eram elaboradas e aplicadas por instituições apontadas pelo Inep (Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira), atestando a

capacidade em avaliação da aprendizagem e profissionalismo. A prova abordava os conhecimentos de cada área avaliada, como também trazia questões de cunho social, como estado civil, escolaridade dos pais, renda mensal, e avaliava o desempenho da instituição por meio do serviço oferecido, incluindo o questionamento sobre as expectativas pós-graduação dos discentes.

Os resultados atribuídos pela execução do provão eram encaminhados a cada discente para que pudessem reavaliar o seu desempenho profissional e buscar possíveis melhorias. Em seguida, eram divulgadas as instituições responsáveis, para que o corpo docente pudesse avaliar os resultados obtidos e desenvolver estratégias para a melhoria da qualificação institucional.

Durante a expansão do Provão como instrumento de avaliação, foi alvo de positividade para constatar os parâmetros de desenvolvimento das instituições, até que, em 2003, com o relatório de desempenho, muitas críticas à abordagem qualitativa deste procedimento vieram a ser motivo de pauta, por ranquear as instituições, gerando competição e constrangimento. Após esses acontecimentos, a comissão organizadora propôs que outra rede de instituição ficasse responsável pela elaboração e aplicação do exame, propondo o Sistema Nacional de Avaliação da Educação Superior (Sinaes).

A proposta foi aceita ainda em 2003, e assim o Sinaes passou a ser responsável pelo desenvolvimento do Provão, agora com o objetivo de focar na instituição, analisando estruturas, atividades, compromisso e a responsabilidade da instituição. Pontuando que os resultados seriam públicos, mas respeitando as diversidades sociais de cada Estado.

Com a aprovação da Proposta do Sinaes, foi então entendido que havia duas vertentes: a avaliação do curso e a avaliação da instituição. E assim foi criado então o Enade, visando respeito com os resultados obtidos. Agora não mais os resultados seriam mediante a conhecimentos específicos, mas de cunho geral, buscando compreender a visão do aluno sobre a instituição, mas também aspectos diversos. Assim como o Provão, o Enade foi definido como obrigatório.

3.2 Enade: instrumento de avaliação da qualidade da educação superior brasileira

O Exame Nacional de Desempenho de Estudantes (Enade) se originou em 2004, com o objetivo de avaliar os desenvolvimentos dos estudantes ingressantes e concluintes dos cursos de graduação. Atualmente, o exame é destinado apenas a estudantes concluintes, visando avaliar o desenvolvimento, as competências e habilidades atribuídas ao longo do curso, tendo obrigatoriedade para concluir a formação.

O exame tem o objetivo de avaliar e acompanhar o processo de aprendizagem dos estudantes em relação aos conteúdos programáticos previstos nas diretrizes curriculares dos cursos de graduação, bem como as competências e habilidades necessárias ao aprofundamento da formação geral e profissional. (Inep, 2023, gov.br)

Sendo organizado e aplicado pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep), vinculado ao MEC, estruturado ainda pela Comissão Nacional de Avaliação da Educação Superior (Conaes), de pertencimento ao Sistema Nacional de Avaliação da Educação Superior (Sinaes).

De 2004 até os tempos atuais, o Enade passou por algumas mudanças, uma delas mencionada anteriormente. A mudança dos estudantes postos a fazer o exame, uma vez que eram os ingressantes e concluintes, atualmente se avalia o desenvolvimento apenas dos concluintes, objetivando analisar o desempenho atribuído mediante o processo do curso. Sendo convocados a fazer o exame todos os alunos concluintes inscritos pela IES (Instituição de Ensino Superior), garantindo a contemplação do currículo acadêmico.

O relatório dos resultados atribuídos ao Enade faz com que o olhar do corpo docente e administrativo da instituição vise buscar melhorias para suprir pontos a serem intensificados.

Os pontos a serem avaliados se dão por meio do desenvolvimento cidadã, avaliando a compreensão de causas sociais, como também o desempenho nas competências mais predominantes na construção da prova: leitura, interpretação textual e análise crítica, acompanhados das habilidades em coesão, argumentação e coerência com causas sociais.

O exame é formado por duas vertentes: formação geral e componentes específicos. A formação geral tem peso de 25% e é composta por 10 questões, sendo 8 de múltipla escolha e

2 discursivas. Já os componentes específicos têm peso de 75% e são compostos por 30 questões, sendo 27 de múltipla escolha e 3 discursivas.

O Enade permite avaliar, além do estudante, a funcionalidade da estrutura pedagógica disposta pela instituição. Serve como um parâmetro para as pendências da Instituição passarem por melhorias, alinhado com as Diretrizes Curriculares Nacionais. Esses resultados se dão por meio do conceito atribuído aos cursos da Instituição. O Conceito Enade, que varia de 1 a 5, é uma nota que se dá mediante a estrutura do exame, da formação geral e componentes específicos.

O exame tem dois indicadores de qualidade: o Conceito Preliminar de Curso (CPC) e o Índice Geral de Cursos Avaliados da Instituição (IGC). O CPC é um indicador de qualidade que avalia os cursos de graduação, calculado no ano seguinte à prova, composto pelo desempenho dos estudantes. É o indicador de diferença entre desempenhos observados e esperados, o corpo docente e os recursos didáticos. Já o IGC é a nota que representa o seu Conceito no MEC, calculado anualmente, resultante da média ponderada dos CPCs, somado à avaliação dos programas de pós-graduação.

A disposição desses resultados é de suma importância, assim como a realização do exame. Não apenas para ter o diploma, no caso do discente, mas importante para que norteie a gestão acadêmica em busca de melhorias para a instituição, possíveis investimentos estruturais e adequação na matriz curricular do curso, podendo levar os docentes a uma capacitação maior para as áreas necessitadas de melhoria.

3.3 O desempenho e os resultados do Enade no curso de Licenciatura em Matemática – Campus IV

No curso de Licenciatura em Matemática, o Enade tem por objetivo constatar o aprendizado dos estudantes acerca dos conteúdos oferecidos, em meios algébricos, geométricos e cálculos, visando relacionar as aplicações ao meio educacional. Outro objetivo importante é a confirmação do domínio das didáticas de ensino-aprendizagem, através da prática docente, onde se avalia a capacidade de planejamento de ensino da matemática, por meio de recursos tecnológicos e métodos participativos, avaliando a desenvoltura do profissional graduando, dos saberes matemáticos e a adequação ao âmbito escolar.

Segundo Souza (2020), os resultados obtidos através do Enade servem para direcionar as melhorias a serem realizadas pela gestão das instituições públicas e privadas. Dessa forma, os relatórios são importantes instrumentos para que as instituições reflitam sobre a qualidade da formação acadêmica oferecida. Concentra-se nos resultados da turma de concluintes, uma vez que esses estudantes vivenciaram a formação no curso e, por isso, podem evidenciar, de maneira mais específica, as necessidades de aprimoramento da graduação.

No ano de 2008, não foram avaliados alunos concluintes no Enade, apenas ingressantes. Realizando a análise dos relatórios do Enade de 2011, 2014, 2017 e 2021, os resultados disponibilizados pelo Inep permitem que seja compreendido o processo da diferenciação de resultados ao longo dos anos avaliados.

Os resultados dos Conceitos Enade nos anos de 2011, 2014, 2017 e 2021 apresentam uma mudança considerável. No ano de 2011, o Conceito Enade foi 4, o que indica um bom padrão de nível do curso. Segundo o Inep, o conceito 1 e 2 é insatisfatório, 3 é satisfatório, 4 é muito bom e 5 é de excelência. A partir dos anos de 2014, 2017 e 2021, o Conceito Enade do Curso obteve uma queda bastante agravante para 2.

Quanto ao desempenho no Componente de Formação Geral que avalia a competência mediante a realidade cidadã e ética, no ano de 2011 ficou na média de 59,9 na Instituição de Ensino. Já no ano de 2014, essa média foi de 53,2, no ano de 2017 foi de 41,1 e, em 2021, ainda apresentada por curso, a média foi de 28,7, tendo uma diminuição considerável quando abordadas competências sociais. Convém observar que este componente tem um grande impacto no conceito final do Enade.

Já o desempenho do Componente da Formação Específica que avalia o desenvolvimento nos conteúdos específicos da matriz curricular do Curso foram obtidos os seguintes resultados: em 2011 a média foi de 31,1, em 2014 foi de 24,3, em 2017 foi de 31,5 e em 2021 a média foi de 34,8. Com isso, é possível notar uma certa estabilidade de desenvolvimento no quesito conhecimentos específicos, com uma leve alta no último ano.

Tabela dos índices do Enade do Curso de Licenciatura em Matemática – Campus IV

ANO	CONCEITO ENADE	FORMAÇÃO GERAL (FG)	FORMAÇÃO ESPECÍFICA (FE)	RESULTADO GERAL (RG)	ÍNDICE NACIONAL		
					FG	FE	RG
2011	4	59,9	31,1	38,3	47,4	27,4	32,4
2014	2	53,2	24,3	31,6	51,7	25,6	32,1
2017	2	41,1	31,5	33,9	48,2	35,3	38,5
2021	2	28,7	34,8	33,2	34,0	41,1	39,3

Fonte: Elaborado pela autora segundo dados do Inep

Pela tabela acima, observamos que, no ano de 2011, o resultado geral do curso foi acima da média nacional. Mas, a partir de 2014, o resultado geral obteve um acentuado decaimento em relação à média nacional.

Através destes resultados, é possível compreender as tentativas realizadas pelo Campus de buscar melhoria na preparação para o Enade em alguns anos, em que foram oferecidos aulões para resolução de questões visando a prática para além da grade curricular do curso. Essa foi uma das melhorias que o corpo docente executou, oferecendo a retomada de conteúdos com padrão de abordagem no exame e com a resolução de questões contextualizadas, oferecidas nos anos anteriores. Entretanto, o conceito do curso não foi alterado.

Uma das competências a serem avaliadas no Enade é a interpretação textual, uma vez que as questões específicas se dão de maneira bem contextualizada, com textos referenciais, assim como no Enem. Segundo Marinho, Santos e Barros (2018), as questões contextualizadas buscam explorar o potencial do estudante em conhecimento matemático, que ele tem.

Entretanto, o componente Formação Geral não foi trabalhado com os estudantes nesses aulões oferecidos, tampouco no decorrer de todo o período do Curso. Essa é uma deficiência que os estudantes trazem deste a educação básica, onde o conceito da realidade cidadã e ética não são estimulados para que os mesmos as adquiram.

Desta forma, este estudo procurou apresentar questões do Enade contextualizadas na área de conhecimento de Álgebra Linear na sessão 2, com o objetivo de mostrar todo o processo de resolução de questões, uma vez que os respectivos assuntos são compreendidos, assim como apresentado na sessão 1. De acordo com Nova Escola (2016) apud Douady (1994), saber matemática é ter disponíveis algumas noções e teoremas matemáticos para resolver problemas e interpretar questões novas.

Assim, todo o processo de compreender o assunto trabalhado e, em seguida, realizar a aplicação do mesmo em questões contextualizadas é visto como um facilitador. Uma vez que a compreensão mediante o assunto não se limita, unindo a interpretação textual e o desenvolvimento no conteúdo para a compreensão, e o passo a passo para executar a questão é mais objetiva e prática, apresentado assim na sessão 2. Portanto, possibilita a reflexão de que os resultados obtidos no Enade atualmente podem partir da falta da prática constante durante o período letivo de resoluções de questões contextualizadas, levando muitas vezes os estudante à exaustão quando se deparam com uma questão desta forma. Esta é uma lacuna que vem desde a educação básica, uma vez que a mesma dificuldade também se dá no exame do Ensino Médio, Enem.

O desenvolvimento da Instituição na prova do Enade é necessário, pois é uma carta de apresentação do curso, onde apresenta sua qualidade. Mesmo com um conceito baixo no Enade a partir de 2014, pois foi interpretado por alguns alunos que o exame não tem serventia para eles, então não há necessidade de dedicação maior na prova, principalmente por serem concluintes e com bastantes atividades curriculares. Além disso, eles se consideram bastante desgastados por estar no final do curso.

Logo, este fato impacta o Curso na Instituição de forma negativa, fazendo a Coordenação do Curso se articular para uma revisão nos componentes curriculares e suas ementas e, onde os estudantes têm mais dificuldade, com o objetivo de usar esses resultados para seu crescimento. Atualmente, o Curso de Matemática no campus IV tem passado por uma grande procura, por sua localização, por ser um curso noturno e pelas propostas oferecidas de estágios, monitorias e projetos de pesquisa e extensão.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A Álgebra Linear é enriquecida pelo estudo de casos de comportamento, conjuntos e elementos abstratos, focando em explorar acontecimentos multidimensionais. A compreensão de sua composição permite entender sua estrutura básica e condições abstratas, podendo ser explorada para além do âmbito acadêmico do Curso de Matemática.

Na seção 1 foram apresentados os principais conceitos, definições e propriedades da Álgebra Linear que serviram de base para o desenvolvimento do estudo, destacando a importância da compreensão teórica desses conteúdos, para a construção do conhecimento matemático e para o entendimento de estruturas mais abstratas. Já na seção 2, buscou-se relacionar os conteúdos estudados com a resolução de questões do Enade, evidenciando que a compreensão dos conceitos e definições atua como um facilitador na interpretação e resolução de problemas. Para isso, foi realizada uma análise das questões do Enade do curso de matemática, a estrutura das questões e o que nelas deveria ser trabalhado, destacando que ao compreender o que é solicitado antes da realização dos cálculos, o estudante consegue desenvolver uma resolução mais fundamentada nos conhecimentos atribuídos durante a formação acadêmica.

O Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (Enade) foi apresentado na seção 3, destacando sua finalidade como instrumento de avaliação da qualidade dos cursos de graduação no Brasil. Também foram analisados os resultados obtidos pelo Curso de Licenciatura em Matemática do Campus IV da Universidade Federal da Paraíba, utilizando os índices disponibilizados pelo Inep. Os resultados evidenciaram que o curso obteve conceito 4 na edição de 2011, porém, nas avaliações posteriores, os conceitos alcançados não corresponderam às expectativas da Instituição. Observou-se ainda que, embora a média de Formação Específica tenha apresentado evolução ao longo das edições analisadas, o mesmo não ocorreu com a Formação Geral, aspecto que influencia diretamente o conceito final do curso.

Por fim, conclui-se que a compreensão dos conceitos pode contribuir significativamente para o desempenho dos estudantes em avaliações como o Enade, além de servir como base para a resolução de problemas em outras áreas da Matemática. Os resultados do Enade caracterizam-se como um importante instrumento para que a coordenação do curso e a instituição reflitam sobre aspectos relacionados ao processo de ensino-aprendizagem, buscando estratégias que promovam a melhoria no desempenho do curso. Espera-se, ainda, que este trabalho incentive

novas pesquisas sobre o ensino da Álgebra Linear, como também sobre o ensino em outras áreas do conhecimento matemático, e sua relação com o desempenho acadêmico, contribuindo para o desenvolvimento da Educação Matemática e a melhoria no Curso na Instituição.

REFERÊNCIAS

ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra Linear com aplicações**. Porto Alegre: Bookman, 2012.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). **ENADE** – Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes. Brasília, DF: INEP. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/Enade-das-licenciaturas>. Acesso em: 01 jun. 2026.

_____. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). **Relatório do Curso**: Matemática (Licenciatura): Universidade Federal da Paraíba, Rio Tinto: ENADE 2008. Brasília, DF: INEP, 2009. Disponível em: <https://Enade.inep.gov.br/Enade/#!/relatorioCursos>. Acesso em: 03 jun. 2026.

_____. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). **Relatório do Curso**: Matemática (Licenciatura): Universidade Federal da Paraíba, Rio Tinto: ENADE 2011. Brasília, DF: INEP, 2012. Disponível em: <https://Enade.inep.gov.br/Enade/#!/relatorioCursos>. Acesso em: 03 jun. 2026.

_____. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). **Relatório do Curso**: Matemática (Licenciatura): Universidade Federal da Paraíba, Rio Tinto: ENADE 2014. Brasília, DF: INEP, 2015. Disponível em: <https://Enade.inep.gov.br/Enade/#!/relatorioCursos>. Acesso em: 03 jun. 2026.

_____. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). **Relatório do Curso**: Matemática (Licenciatura): Universidade Federal da Paraíba, Rio Tinto: ENADE 2017. Brasília, DF: INEP, 2018. Disponível em: <https://Enade.inep.gov.br/Enade/#!/relatorioCursos>. Acesso em: 03 jun. 2026.

_____. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). **Relatório do Curso**: Matemática (Licenciatura): Universidade Federal da Paraíba, Rio Tinto: ENADE 2021. Brasília, DF: INEP, 2022. Disponível em: <https://Enade.inep.gov.br/Enade/#!/relatorioCursos>. Acesso em: 03 jun. 2026.

DOUADY, R. **Ingénierie didactique et évolution du rapport au savoir**: une chronique en calcul mental, un projet en algèbre à l'articulation collège-seconde. Repères IREM, n. 15, Topiques Éditions, avr. 1994. Apud, ALMOULOUD, S. A. Contexto e contextualização nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática. Nova Escola, São Paulo, 9 fev. 2016. Disponível em: <https://novaescola.org.br/conteudo/8261/contexto-e-contextualizacao-nos-processos-de-ensino-e-aprendizagem-da-matematica>. Acesso em: 12 mar. 2026.

GEOGEBRA. GeoGebra: **software de matemática dinâmica**. Disponível em: <https://www.geogebra.org>. Acesso em: 20 maio 2026.

HOFFMAN, K.; KUNZE, R. **Álgebra Linear**. São Paulo: USP e Polígono, 1970.

KOLMAN, B.; HILL, D. R. **Introdução à álgebra linear**: com aplicações. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In.: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas**. São Paulo: UNESP, 1999. C. 12, p. 199 – 220.

PROENÇA, M.C. **Resolução de problemas: encaminhamentos para o ensino e a aprendizagem de Matemática**. Maringá: EDUEM, 2018.

SANTOS, E.G. História da Disciplina Álgebra Linear: primeiras aproximações. **Revista Histemat**, ano 4, n. 2, 2018. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/328861285_Historia_da_Disciplina_Algebra_Linear_primeiras_aproximacoes . Acesso em 26 jun. 2026.

SOUZA, M. G. M. C. O Enade enquanto política de avaliação da educação superior. **Revista Encantar: Educação, Cultura e Sociedade**, Bom Jesus da Lapa, v. 2, p. 01 – 11, jan./dez. 2020. Disponível em: <https://uneb.br>. Acesso em 06 jun. 2026

VERHINE, R. E.; DANTAS, L. M. V.; SOARES, J. F. Do Provão ao Enade: uma análise comparativa dos exames nacionais utilizados no Ensino Superior Brasileiro. Rio de Janeiro. **Ensaio: Avaliação Política Pública em Educação**, Rio de Janeiro, v. 14, n. 52, p. 291-310, 2006. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/S0104-40362006000300002>. Acesso em: 06 jun. 2026.