



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu
em Física

Dissertação de Mestrado

**Soluções Topológicas em Teorias de
Campos Escalares**

Gabriel Silvério Santiago

João Pessoa
2025



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu
em Física

Dissertação de Mestrado

**Soluções Topológicas em Teorias de
Campos Escalares**

Dissertação realizada sob a orientação do Prof. Dr. Dionisio Bazeia Filho, apresentada à Coordenação do Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Física da Universidade Federal da Paraíba, em complementação aos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Física na Área de Concentração de Física de Partículas Elementares e Campos.

Gabriel Silvério Santiago

João Pessoa
2025

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S235s Santiago, Gabriel Silvério.
Soluções topológicas em teorias de Campos Escalares
/ Gabriel Silvério Santiago. - João Pessoa, 2025.
75 f.

Orientação: Dionisio Bazeia Filho.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Soluções topológicas. 2. Kinks. 3. Dinâmica
generalizada. 4. BPS. 5. Construção geométrica. 6.
Campos escalares. I. Bazeia Filho, Dionisio. II. Título.

UFPB/BC CDU 530.2



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Física

Ata da Sessão Pública da Defesa de dissertação de **Mestrado** do aluno **Gabriel Silvério Santiago**, candidato ao Título de Mestre em Física na Área de Concentração Física das Partículas Elementares e Campos.

Aos vinte dias do mês de fevereiro do ano de dois mil e vinte e cinco, às 14h00, na sala virtual meet.google.com/qhb-xxhs-uqt, reuniram-se os membros da Banca Examinadora constituída para avaliar a dissertação de Mestrado, na área de Física das Partículas Elementares e Campos, de **Gabriel Silvério Santiago**. A banca foi composta pelos(as) professores(as) doutores(as): Dionisio Bazeia Filho (UFPB), orientador e presidente da banca examinadora, Jorge Gabriel Gomes de Souza Ramos (UFPB) e Matheus Araújo Marques (UFPB). Dando início aos trabalhos, o Prof. Dionisio Bazeia Filho comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a palavra para o candidato para que o mesmo fizesse, oralmente, a exposição da pesquisa de dissertação intitulada “*Soluções Topológicas em Teorias de Campos Escalares*”. Concluída a exposição, o candidato foi arguido pela Banca Examinadora, que emitiu o parecer “**aprovado**”. Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba expedir o respectivo diploma de Mestre em Física na forma da lei. E para constar, Ana Beatriz Cândido Vieira, Assistente em Administração, redigiu a presente ata que vai assinada pelos membros da Banca Examinadora. João Pessoa, Paraíba, **20 de fevereiro de 2025**.

Documento assinado digitalmente
 **DIONISIO BAZEIA FILHO**
Data: 20/02/2025 16:13:18-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Dionisio Bazeia Filho
Orientador - PPGF/UFPB


Prof. Dr. Jorge Gabriel Gomes de Souza Ramos
PPGF/UFPB


Prof. Dr. Matheus Araújo Marques
CBIOTEC/UFPB

Agradecimentos

“Se o conhecimento pode criar
problemas, não é através da ignorância
que podemos solucioná-los.”

Isaac Asimov

Agradeço primeiramente aos meus pais, Roberto e Rocilda, e irmãos, Rafael e Letícia, que sempre me deram o apoio e a esperança para conquistar os meus objetivos e seguir em frente. Agradeço também à minha namorada, Tâmya, que com seu carinho e cuidado me impulsionou em direção aos meus objetivos. Agradeço ao sempre presente e querido amigo João Gabriel, por todo o seu suporte. Agradeço ao amigo e também físico Wagner Coelho, pela parceria e aconselhamentos. Agradeço ao professor Dionísio Bazeia, por sua paciência, orientação e discussões semanais, fundamentais para a realização deste trabalho. Agradeço aos amigos e colegas de pesquisa Matheus Lião, Marcelo Feitosa, Gabriel Bandeira, Igor Andrade e Isai-ane Rocha, pelas discussões sobre a pesquisa, sobre a Física e pelas boas risadas. Agradeço aos demais integrantes do Grupo de Teoria de Campos da UFPB, em especial aos professores Roberto Menezes e Matheus Araújo Marques. Finalmente, agradeço à CAPES (processo nº 88887.899555/2023-00) pelo suporte financeiro essencial para a realização deste trabalho.

Resumo

O objetivo desta dissertação é discutir modelos de campos escalares reais que suportam soluções topológicas do tipo kink, com ênfase em sistemas com constrição geométrica. Para esse fim, partimos da descrição de modelos com um campo escalar real com dinâmica usual em $(1+1)$ dimensões do espaço-tempo plano, onde desenvolvemos suas principais características, estabelecemos o formalismo de Bogomol'nyi e averiguamos os critérios para a obtenção de soluções de mínima energia, as soluções BPS. Aumentamos o escopo da análise e incluímos sistemas com dinâmica generalizada, em especial investigamos a dinâmica tipo Dirac-Born-Infeld. Posteriormente, adicionamos mais um campo escalar real, efetuamos o formalismo de primeira ordem e discutimos dois métodos úteis para a resolução das equações de Bogomol'nyi em sistemas com a função auxiliar acoplada, o método das órbitas tentativas e o método do fator integrante. Em seguida, investigamos sistemas com constrição geométrica e concluímos com a apresentação de alguns resultados originais envolvendo este tipo de acoplamento, onde investigamos sistemas com dois e três campos escalares reais.

Palavras-chave: soluções topológicas, kinks, dinâmica generalizada, BPS, constrição geométrica.

Abstract

The aim of this dissertation is to discuss real scalar field models that support topological kink-like solutions, with an emphasis on systems with geometric constriction. For this reason, we begin by describing models with a real scalar field with standard dynamics in $(1+1)$ dimensions of flat spacetime, where we develop their main features, establish the Bogomol'nyi formalism, and examine the criteria for obtaining minimum energy solutions, the BPS solutions. We then broaden the scope of the analysis to include systems with generalized dynamics, focusing in particular on Dirac-Born-Infeld dynamics. Subsequently, we introduce an additional real scalar field, apply the first-order formalism, and discuss two useful methods for solving the Bogomol'nyi equations in systems with a coupled auxiliary function: the trial orbit method and the integrating factor method. Finally, we investigate systems with geometric constrictions and conclude with the presentation of some original results involving this type of coupling, where we analyze systems with two and three real scalar fields.

Palavras-chave: topological solutions, kinks, generalized dynamics, BPS, geometrical constriction.

Lista de Publicações

Trabalhos publicados durante o período de mestrado:

- D. Bazeia, M. A. Feitosa, R. Menezes, G. S. Santiago, *Annals of Physics* **463**, 169638 (2024).
- D. Bazeia, G. S. Santiago, *Eur. Phys. J. C* **84**, 323 (2024).
- D. Bazeia, G. S. Santiago, *Physica D* **462**, 134156 (2024).

Sumário

1	Introdução	1
2	Modelos de um Campo Escalar Real	4
2.1	Generalidades	4
2.1.1	Equação de Movimento	4
2.1.2	Tensor Energia-Momento	5
2.2	Kinks	7
2.3	Soluções BPS	10
2.3.1	Modelo $\lambda \phi^4$	12
2.3.2	Modelo $\lambda \phi^6$	14
2.3.3	Modelo <i>Vacuumless</i>	17
2.4	Teorema de Derrick-Hobart	20
2.4.1	Evadindo o Teorema de Derrick-Hobart	22
2.5	Dinâmica generalizada	24
2.5.1	Dinâmica Dirac-Born-Infeld	28
3	Modelos de dois Campos Escalares Reais	31
3.1	Método das órbitas tentativas	33
3.2	Método do fator integrante	37
3.3	Construção Geométrica	39
3.3.1	Modelo 4 – 4	41
4	Novos Resultados	47
4.1	Construção geométrica em modelos de dois campos	47
4.1.1	Modelo 4 – 6	47
4.1.2	Modelo BNRT Modificado	50
4.2	Construção geométrica em modelos de três campos	53
4.2.1	Modelo 4-4-4	56
4.2.1.1	$f(\chi, \psi) = 1/\chi^2 \quad g(\psi) = 1/\psi^2$	56
4.2.1.2	$f(\chi, \psi) = 1/(\chi + \psi)^2 \quad g(\psi) = 1/\psi^2$	57
4.2.2	$f(\chi, \psi) = g(\psi)$	59
5	Conclusão e perspectivas	63
	Referências Bibliográficas	65

CAPÍTULO 1

Introdução

Em 1834, às margens de um estreito canal em Edimburgo, um engenheiro escocês fez uma importante observação enquanto acompanhava a cavalo o movimento de uma embarcação. Ele percebeu a formação de uma única onda que, sem se dissipar, manteve sua forma e velocidade por várias milhas. Seu nome é John Scott Russell e a ele é creditada a primeira descrição do fenômeno que, posteriormente, seria denominado sóliton. Além de sua estabilidade, ou seja a preservação de sua forma ao longo do tempo, a onda descrita por Russell era espacialmente localizada, uma característica essencial para configurações do tipo sóliton e onda solitária.

Embora a análise de Russell tenha sido realizada em um sistema não relativístico, os sólitons e as ondas solitárias estão presentes em diversas áreas da Física. Nesta dissertação, demos ênfase à descrição de ondas solitárias em sistemas de campos escalares reais. Para isso, é fundamental estabelecer uma definição clara desses conceitos, principalmente quando levamos em consideração a frequente confusão presente na literatura, onde sólitons e ondas solitárias são utilizados como sinônimos. Adotamos aqui a definição proposta por R. Rajaraman [1].

Segundo Rajaraman, ondas solitárias são definidas como soluções estáticas, espacialmente localizadas e com energia finita. Para campos escalares reais, a localização atribuída a essas soluções refere-se à densidade de energia associada, que deve ser espacialmente localizada em qualquer instante. Para assegurar que a condição de energia finita seja atendida, a densidade de energia deve tender assintoticamente a zero para regiões afastadas da solução. É importante destacar que, mesmo considerando soluções estáticas, em sistemas relativísticos colocá-las em movimento com velocidade constante é uma tarefa simples, sendo necessária apenas a aplicação de um “*boost de Lorentz*” à solução. Por outro lado, sólitons compõem uma classe especial de ondas solitárias na qual existe a propriedade de emergirem de colisões completamente imutados, exceto por uma possível mudança de fase. Perceba que essa condição é extremamente restritiva, onde mesmo a onda descrita por Russell a obedece apenas aproximadamente. Por essa razão, nesta dissertação não exploramos sistemas que suportam soluções solitônicas, focando apenas na descrição de ondas solitárias.

Além disso, ondas solitárias também podem ser separadas em grupos distintos, a depender do seu comportamento assintótico. Caso o comportamento da solução seja topologicamente distinto do vácuo da teoria a classificamos como um defeito topológico, caso contrário a classificamos como um defeito não-topológico. A determinação desse comportamento topológico é feita por uma carga conservada, denominada carga topológica, que não surge devido a uma simetria contínua do sistema, mas sim pelas condições de contorno do problema.

Dentro da classe dos defeitos topológicos, os kinks estão no *hall* das estruturas mais simples. Estas são soluções não triviais estáticas e localizadas de equações diferenciais parciais não-lineares em teorias de campos escalares reais em $(1 + 1)$ dimensões espaço-temporais, cujo potencial é não-negativo e apresenta mínimo global degenerado. Nesse contexto, kinks conectam de forma contínua mínimos adjacentes do potencial. Essas estruturas apresentam estabilidade de natureza topológica e como consequência não podem ser continuamente deformadas em um estado de vácuo. Isso as confere um caráter não dissipativo. Estas soluções podem

também ser imersas em mais dimensões espaciais, dando origem a faixas e paredes de domínio, quando são imersas em sistemas com 2 ou 3 dimensões espaciais, respectivamente.

Apesar da descrição abstrata dessas estruturas, elas estão presentes em abundância na natureza. Quando observamos interfaces em sistemas físicos, como aquelas encontradas nos domínios de magnetização de materiais magnéticos ou na mudança suave de cores das pétalas de uma flor bicolor, podemos descrevê-las utilizando as estruturas localizadas mencionadas até aqui. Essas estruturas representam uma transição contínua entre os estados de mínima energia separados pela interface. Devido a sua generalidade, a aplicação desses conceitos permeia diversas áreas da Física, indo desde implementações na matéria condensada [2, 3], até descrições em modelos cosmológicos [4, 5].

Porém, as estruturas localizadas não são formadas apenas por sistemas que envolvem campos escalares reais. Dependendo dos tipos de campos que adicionamos à teoria e das simetrias que impomos aos mesmos, diferentes tipos de estruturas surgem. Um exemplo disso são os vórtices, que surgem como soluções de teorias em $(2 + 1)$ dimensões espaço-temporais que acoplam um campo escalar complexo a um campo de calibre abeliano por um grupo de simetria $U(1)$, apresentando fluxo magnético quantizado e podendo ser eletricamente carregado [6, 7] ou não [8]. Assim como ocorre com kinks, é possível imergir essas estruturas em um espaço com mais dimensões espaciais, nesse caso 3, o que dá origem às cordas relativísticas [9]. Outra possibilidade é o acoplamento de campos escalares complexos a um campo de calibre não-abeliano sob um grupo de simetria $SU(2)$, em um sistema em $(3 + 1)$ dimensões espaço-temporais. Esta configuração dá origem a monopolos magnéticos [10, 11], que possuem carga magnética quantizada e são eletricamente neutros, ou dyons [12], que possuem carga elétrica e magnética quantizadas.

Nesta dissertação, investigamos modelos com um, dois e três campos escalares reais em $(1+1)$ dimensões do espaço-tempo plano, regidos por dinâmica usual ou generalizada. Para isso, iniciamos no capítulo 2, apresentando o ferramental necessário para a descrição de modelos de kinks em teorias com um campo escalar real. Nele exploramos como realizar o formalismo de Bogomol'nyi, responsável por diminuir a ordem das equações de movimento, estabelecer um vínculo topológico para a energia e assegurar a estabilidade das soluções, ao garantir que estas são mínimos globais de energia. A partir disso, apresentamos três dos principais modelos de kinks conhecidos na literatura, explorando suas principais características. Mostramos ainda a impossibilidade de existência de soluções não triviais estáveis e de energia finita em modelos com mais de duas dimensões espaciais regidos por dinâmica usual, e como evadir este resultado. Estendemos a análise empregada ao apresentar uma descrição geral para modelos de um campo escalar real com dinâmica generalizada, e aplicamos esta em modelos com dinâmica de Dirac-Born-Infeld (DBI).

Generalizamos esses resultados no capítulo 3, ao adicionar mais um campo escalar real à teoria. Vimos que essa adição, além de enriquecer as soluções do modelo, também contribui significativamente para o aumento da complexidade do modelo, uma vez que agora deveremos resolver um sistema de equações diferenciais acopladas. Nesse contexto, apresentaremos dois métodos úteis para desacoplar as equações de Bogomol'nyi e discutimos o seu escopo de validade. Ambos consistem na identificação de uma órbita que satisfaz as equações de movimento do sistema e conecta mínimos globais do potencial. Exploramos ainda a influência de um acoplamento dinâmico específico sobre as soluções, que responde no sistema como uma constrição geométrica.

No capítulo 4, apresentamos alguns dos resultados originais desenvolvidos durante a pesquisa e publicados em 2024 [13, 14]. Neles exploramos a influência da constrição geométrica em modelos com dois e três campos escalares reais, evidenciando novos comportamentos e in-

vestigando a influência que cada parâmetro exerce sobre o modelo. Exploramos, por exemplo, a influência do acoplamento dinâmico em um modelo com função auxiliar acoplada.

Finalizamos a dissertação no capítulo 5, onde apresentamos conclusões e perspectivas para trabalhos futuros.

Modelos de um Campo Escalar Real

2.1 Generalidades

Apresentamos nesta seção o conjunto de conceitos necessários para descrever modelos de campos escalares reais. Primeiramente investigamos como obter as equações de movimento para uma teoria genérica de campos escalares reais e posteriormente exploramos como definir um tensor energia-momento conservado em teorias com invariância translacional.

2.1.1 Equação de Movimento

Consideramos um modelo de n campos escalares reais denotados por ϕ_i , onde o subíndice i enumera os campos, assumindo valores de 1 até n . Esse sistema é definido em $(D+1)$ dimensões do espaço-tempo. Adotamos que este espaço-tempo é plano e, portanto, regido por uma métrica de Minkowski $\eta^{\mu\nu}$. Assumimos ainda a notação de Einstein, onde a contração de índices subentende uma soma. Lembramos que índices gregos variam de 0 até D , enquanto os índices latinos variam de 1 até D . Com isso, ação que descreve esse sistema é

$$\mathcal{S} = \int d^{D+1}x \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i), \quad (2.1)$$

onde $\mathcal{L}$ é a densidade Lagrangiana associada ao modelo e $\partial_\mu \phi_i = \partial \phi_i / \partial x^\mu$ é a derivada parcial do campo ϕ_i . Na análise que estamos desenvolvendo nos interessamos por sistemas que obedecem ao Princípio de Hamilton [15], ou seja, sistemas cujo movimento no espaço de configuração extremiza o funcional de ação. Como consequência, temoas que $\delta \mathcal{S} = 0$, o que implica em

$$\int d^{D+1}x \delta \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i) = 0. \quad (2.2)$$

Dessa forma, a variação $\delta \mathcal{L}$ é tal que

$$\delta \mathcal{L} = \sum_k \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_k} \delta \phi_k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_k)} \delta (\partial_\mu \phi_k) \right), \quad (2.3a)$$

$$= \sum_k \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_k} \delta \phi_k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_k)} \partial_\mu (\delta \phi_k) \right), \quad (2.3b)$$

e utilizamos o fato de que δ e ∂_μ comutam [16]. Realizando uma integração por partes no segundo termo da expressão acima, obtemos como resultado

$$\delta \mathcal{L} = \sum_k \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_k} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_k)} \right) \right) \delta \phi_k + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_k)} \delta \phi_k \right) \right], \quad (2.4)$$

que pode ser substituído na equação (2.2), conduzindo a

$$\sum_k \int d^{D+1}x \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_k} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_\mu (\phi_k)} \right) \right) \delta \phi_k \right] + \sum_k \int d^{D+1}x \left[\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_k)} \delta \phi_k \right) \right] = 0. \quad (2.5)$$

Notamos que, ao aplicarmos o Teorema de Gauss o segundo termo da expressão acima dá origem a um termo de superfície [17], visto que

$$\int_R d^{D+1}x \left[\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_k)} \delta \phi_k \right) \right] = \int_{\partial R} d\sigma_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_k)} \delta \phi_k \right], \quad (2.6)$$

onde $d\sigma_\mu$ é um elemento de superfície orientado. Lembramos que as integrais são realizadas sobre um hipervolume R , portanto se tomarmos como condições de contorno $\{\delta \phi_k\} |_{\partial R} = 0$, o termo de superfície mencionado será nulo [16]. Perceba que essa é uma condição plausível no espaço em que definimos os nossos campos, já que no infinito os campos e suas variações devem ser nulos. Dessa forma, obtemos

$$\sum_k \int d^{D+1}x \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_k} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_\mu (\phi_k)} \right) \right) \delta \phi_k \right] = 0. \quad (2.7)$$

Como as variações $\delta \phi_k$ são mutuamente independentes, cada termo do somatório acima deve ser nulo [15]. Como resultado, obtemos as n equações de Euler-Lagrange na forma

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_k} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_\mu (\phi_k)} \right) = 0. \quad (2.8)$$

2.1.2 Tensor Energia-Momento

A definição do tensor energia-momento está fundamentalmente relacionada a um dos teoremas mais importantes da Física, o teorema de Noether. Em seu trabalho [18], a autora estabelece uma íntima correlação entre simetrias contínuas e leis de conservação. Estas determinam a existência de uma corrente conservada J^μ , denominada corrente de Noether, a partir da relação $\partial_\mu J^\mu = 0$. Associada a esta corrente existe uma carga também conservada, denominada carga de Noether e obtida a partir da relação $Q = \int d^D x J^0$.

Avaliaremos o teorema de Noether a partir de um sistema munido de uma simetria contínua específica, a simetria de translação no espaço-tempo. A partir dessa descrição, obtm os o tensor energia-momento como uma corrente de Noether conservada. Portanto, suponha a transformação infinitesimal

$$x_\nu \rightarrow x_\nu + \delta x_\nu, \quad (2.9)$$

onde δx_ν é uma translação infinitesimal no espaço-tempo. Para que esta seja uma transformação de simetria do sistema, é necessário que a ação seja invariante sob essa transformação. Para garantir que essa condição seja satisfeita, a densidade Lagrangiana não pode apresentar dependência explícita das coordenadas x_ν [19]. Por isso, computamos

$$\partial^\nu \mathcal{L} = \sum_k \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_k)} \partial^\nu \partial_\mu \phi_k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_k} \partial^\nu \phi_k \right). \quad (2.10)$$

Utilizando o fato de que ∂_μ e ∂^ν comutam e as equações de Euler-Lagrange (2.8), somos capazes de reescrever a relação acima como

$$\partial^\nu \mathcal{L} = \sum_k \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_k)} \partial_\mu \partial^\nu \phi_k + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_k)} \right) \partial^\nu \phi_k \right). \quad (2.11)$$

Com isso, aplicando a regra da cadeia podemos simplificar o termo acima como uma divergência total

$$\partial^\nu \mathcal{L} = \partial_\mu \left[\sum_k \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_k)} \partial^\nu \phi_k \right) \right], \quad (2.12)$$

e ao utilizarmos a relação $\partial^\nu \mathcal{L} = \partial_\mu (\eta^{\mu\nu} \mathcal{L})$, obtemos que

$$\partial_\mu \left[\sum_k \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_k)} \partial^\nu \phi_k \right) - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} \right] = 0. \quad (2.13)$$

Definimos, portanto, o tensor energia-momento canônico como [19]

$$\Theta^{\mu\nu} = \sum_k \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_k)} \partial^\nu \phi_k \right) - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (2.14)$$

e este tensor naturalmente obedece a equação de continuidade

$$\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = 0. \quad (2.15)$$

A partir da descrição que realizamos, o tensor energia-momento canônico pode ser visto como uma corrente de Noether conservada com um índice ν extra, que enumera as cargas associadas [16]. A equação de continuidade acima implica na conservação das cargas de Noether, que são definidas como [17]

$$Q^\nu = \int_V d^D x \Theta^{0\nu}, \quad (2.16)$$

onde a integral é realizada sobre um hipervolume V em D dimensões. A conservação dessa quantidade pode ser observada ao integrar a equação de continuidade (2.15), já que

$$\int_V d^D x \partial_0 \Theta^{0\nu} + \int_V d^D x \partial_i \Theta^{i\nu} = 0, \quad (2.17)$$

onde $i = 1, \dots, D$. A partir do já mencionado Teorema de Gauss, é possível constatar que o segundo termo da expressão acima pode ser transformado em um termo de superfície. Tomando como condição de contorno $\{\Theta^{i\nu}\}|_{\partial V} = 0$, esse termo será nulo. Consequentemente, podemos reescrever a expressão acima como

$$\partial_0 \int_V d^D x \Theta^{0\nu} = 0 \rightarrow \frac{d}{dt} Q^\nu = 0. \quad (2.18)$$

Mostrando assim que Q^ν é conservada. Ao avaliar cada componente de Q^ν , percebemos que esta quantidade corresponde ao 4-momento P^ν , logo

$$P^\nu = \int_V d^D x \Theta^{0\nu}. \quad (2.19)$$

Portanto, a invariância da ação com relação a translações espaciais e temporais produz a conservação do momento linear e da energia do sistema, respectivamente.

É importante notar que existe uma ambiguidade na definição do tensor energia-momento feita na equação (2.14), já que se somarmos a $\Theta^{\mu\nu}$ o tensor $\partial_\lambda f^{\lambda\mu\nu}$ que obedece a relação $f^{\lambda\mu\nu} = -f^{\mu\lambda\nu}$

$$T^{\mu\nu} = \Theta^{\mu\nu} + \partial_\lambda f^{\lambda\mu\nu}, \quad (2.20)$$

a nova quantidade $T^{\mu\nu}$ também obedece a uma equação de continuidade $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$, cuja carga de Noether conservada também é o 4-momento P^ν definido pela equação (2.19). Isso fica claro quando calculamos

$$P^{\nu'} = \int_V d^D x T^{0\nu}, \quad (2.21a)$$

$$= P^\nu + \int_V d^D x \partial_\lambda f^{\lambda 0\nu}, \quad (2.21b)$$

onde lembramos que $f^{00\nu} = 0$ e, por consequência, o último termo da expressão acima pode ser transformado em um termo de superfície. Logo, considerando que este termo seja nulo, já que não existem campos no infinito, observamos que $P^{\nu'} = P^\nu$.

Portanto, a ambiguidade existe apenas na definição do tensor energia-momento, e não na energia e no momento associados aos campos. Essa ambiguidade é importante para ajustar propriedades físicas do modelo, como invariância sob transformações de calibre, à definição do tensor energia-momento [19]. Porém, em todas as situações que abordamos nesta dissertação, a definição (2.14) será sempre suficiente para definir um tensor energia-momento alinhado à teoria.

2.2 Kinks

Vamos considerar, em primeira análise, um modelo de um único campo escalar real, denotado por ϕ em $(1+1)$ dimensões e regido por uma dinâmica usual, ou seja, o termo dinâmico é $\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi$. Ao longo de toda a dissertação, adotamos unidades naturais ($\hbar = c = 1$), métrica de Minkowski com assinatura $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+, -)$ e campos adimensionais. A densidade Lagrangiana associada a esse sistema é

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi), \quad (2.22)$$

onde $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ e $V(\phi)$ é uma função real e não-negativa que determina as auto-interações do campo ϕ . Esta função corresponde à densidade de energia potencial do modelo, como será visto adiante. Porém, por conveniência a nomeamos simplesmente como potencial. Para a existência de estruturas topológicas é necessário assumir que $V(\phi)$ possui vácuo degenerado, ou seja, deve haver pelo menos dois mínimos globais denotados por v_1 e v_2 que obedecem a relação [20]

$$V(v_1) = V(v_2) = 0. \quad (2.23)$$

Apesar da aparente restrição, é sempre possível adicionar uma constante a um potencial não-negativo de forma a assegurar que v_1 e v_2 sempre anulem o potencial. A inclusão de uma constante ao potencial não altera a equação de movimento associada ao modelo, já que esta leva em consideração apenas derivadas do potencial, como veremos posteriormente. Como

consequência, sempre que nos referirmos a mínimos globais do potencial estamos considerando necessariamente valores de ϕ que tornam o potencial nulo.

Devido à invariância translacional do modelo é possível construir um tensor energia-momento conservado a partir da relação (2.14). Para o caso que estamos desenvolvendo, obtemos como resultado

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \eta_{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (2.24)$$

onde as componentes T_{00} e T_{11} correspondem respectivamente à densidade de energia e ao estresse, que para o modelo analisado adquirem a forma

$$T_{00} = \rho = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} \phi'^2 + V(\phi), \quad (2.25a)$$

$$T_{11} = \sigma = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} \phi'^2 - V(\phi), \quad (2.25b)$$

nesse caso $\dot{\phi} = \partial\phi/\partial t$ e $\phi' = \partial\phi/\partial x$. Além disso, $\frac{1}{2}(\dot{\phi})^2$, $\frac{1}{2}(\phi')^2$ e $V(\phi)$ são respectivamente as densidades de energia cinética, gradiente e potencial do sistema. A equação de movimento associada a (2.22) é obtida a partir da equação de Euler-Lagrange

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0, \quad (2.26)$$

sendo expressa como

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + V_\phi = 0, \quad (2.27)$$

com $V_\phi = dV/d\phi$. É importante perceber que soluções constantes e iguais aos mínimos globais do potencial ($\phi(x, t) = v_i$; $V(v_i) = 0$) satisfazem trivialmente a equação de movimento acima. Além disso, como estas são soluções estáticas ($\dot{\phi} = 0$) e uniformes ($\phi' = 0$), a densidade de energia associada a elas é nula em todo o espaço. Devido a essas características denominamos essas soluções como vácuos triviais da teoria [21].

Para o caso estático, isto é $\phi(x, t) = \phi(x)$, a equação (2.27) adquire a forma

$$\phi'' = V_\phi. \quad (2.28)$$

Multiplicando a equação acima por ϕ' , obtemos que

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2} (\phi')^2 \right] = \frac{d}{dx} V \rightarrow \frac{1}{2} (\phi')^2 = V + C, \quad (2.29)$$

em que C é uma constante de integração. A energia da solução estática é calculada como

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \rho_s = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left\{ \frac{1}{2} (\phi')^2 + V(\phi) \right\}, \quad (2.30)$$

onde o subíndice s é referente ao caso estático. Em nossa análise, as soluções de interesse devem possuir energia finita, por isso devemos impor condições de contorno que anulem de maneira independente as contribuições gradiente e potencial da energia nos limites assintóticos. Isso implica que [22]

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi'(x) = 0, \quad (2.31a)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi(x) = v_\pm, \quad (2.31b)$$

nesse caso, $v_{\pm}$ são mínimos globais e adjacentes do potencial e a região entre esses mínimos define um setor topológico. Logo, a solução $\phi(x)$ está definida em um setor topológico e conecta mínimos adjacentes do potencial. Portanto, ao considerar a condição de energia finita para a solução, concluímos necessariamente que $C = 0$ na relação (2.29), já que

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \{2V(\phi) + C\} = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx V(\phi) + Cx|_{-\infty}^{+\infty}. \quad (2.32)$$

Assim, se considerarmos $C \neq 0$ a energia da solução será divergente. Dessa forma, a relação (2.29) nos mostra que

$$\phi' = \pm \sqrt{2V}. \quad (2.33)$$

A equação acima indica que as densidades de energia gradiente e potencial são, em cada ponto, iguais [20]. Perceba ainda que, para o caso estático, a condição acima também implica que o estresse é nulo ($\sigma = 0$) e, como veremos quando discutirmos o Teorema de Derrick-Hobart 2.4, essa é uma condição necessária para que a solução seja estável por reescala.

Outra característica compartilhada pelas soluções desse modelo é a presença de uma corrente topológica conservada, definida por

$$j^{\mu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu} \partial_{\nu} \phi, \quad (2.34)$$

em que $\varepsilon^{\mu\nu}$ é o símbolo de Levi-Civita em 2 dimensões espaço-temporais. A conservação dessa corrente pode ser facilmente computada ao realizar

$$\partial_{\mu} j^{\mu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu} \partial_{\mu} \partial_{\nu} \phi = 0, \quad (2.35)$$

essa relação é nula já que temos a contração dos índices de um tensor simétrico ($\partial_{\mu} \partial_{\nu} \phi$) com os de um tensor anti-simétrico ($\varepsilon^{\mu\nu}$). A conservação da corrente topológica não surge como consequência da presença de uma simetria contínua na ação, como é o caso de uma corrente de Noether, ela é, por construção, conservada [23]. Além disso, a corrente topológica não é definida de maneira única e em alguns contextos a definição (2.34) pode não ser adequada por gerar problemas conceituais. Uma alternativa nesses casos é definir a corrente topológica como [24, 25]

$$j^{\mu} = \varepsilon^{\mu\nu} \partial_{\nu} W(\phi), \quad (2.36)$$

em que $W(\phi)$ é uma função contínua do campo ϕ , que surge naturalmente quando realizarmos o formalismo de Bogomol'nyi, descrito na seção 2.3. Essa nova definição é particularmente conveniente para discutir o modelo *vacuumless*, visto que resolve o problema de definição da carga topológica que a equação (2.34) produz. Esse modelo e suas consequências serão analisados na subseção 2.3.3.

Portanto, a partir da corrente (2.34) podemos calcular uma carga topológica conservada

$$Q = \int_{-\infty}^{+\infty} dx j^0 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left\{ \frac{1}{2} \phi' \right\}, \quad (2.37)$$

que resulta em

$$Q = \frac{1}{2} (v_{+} - v_{-}). \quad (2.38)$$

A partir do comportamento assintótico das soluções expresso pela definição acima, podemos classificá-las em 2 grandes grupos [22]

- Se $v_+ = v_-$, então a carga topológica é nula e teremos soluções não-topológicas do tipo *lump*. Como estamos considerando soluções não-triviais na descrição que realizamos, $\phi(x)$ deve ser necessariamente uma função não-monotônica, já que conecta um mínimo do potencial a ele mesmo. Além disso, é possível deformar continuamente essa solução em uma solução de vácuo, característica que confere ao *lump* uma instabilidade de natureza topológica.
- Se $v_+ \neq v_-$, então a carga topológica será não nula e teremos uma solução topológica do tipo *kink*. Essa solução interpola monotonicamente entre mínimos adjacentes do potencial e, devido a suas condições de contorno, não pode ser continuamente deformado em uma solução de vácuo. Esse comportamento confere às soluções do tipo *kink* uma estabilidade de natureza topológica.

Para que o kink seja continuamente deformado em um estado de vácuo, deveríamos alterar um de seus valores assintóticos, ou seja, uma das condições de contorno do problema. Porém, isso implica que uma porção infinita do espaço deveria atravessar uma região de potencial não nulo (entre os mínimos v_+ e v_-) para que houvesse essa modificação. Portanto, é possível afirmar que existe uma barreira infinita de potencial que impede o kink de ser continuamente deformado em um estado de vácuo [21]. Por isso tivemos que supor inicialmente que o potencial possui vácuo degenerado, para que a teoria que estamos desenvolvendo suporte soluções tipo kink, ou seja, soluções topologicamente distintas do vácuo.

Uma das formas mais claras de enxergar a importância da estabilidade topológica presente nessas soluções é considerar que a evolução temporal é um tipo de deformação contínua. Nesse contexto, o kink se configura como uma solução não dissipativa. Em consonância a isso, os invariantes topológicos são características conservadas dinamicamente. Inclusive, essa conservação dinâmica dos invariantes topológicos dá às soluções do tipo kink mais uma justificativa para não evoluírem para soluções de vácuo, uma vez que as soluções tipo kink e as soluções de vácuo possuem cargas topológicas diferentes.

2.3 Soluções BPS

Em 1976 Bogomol'nyi construiu um método alternativo para a busca de soluções topológicas em modelos de teorias de campos [26]. O método consiste em reescrever o funcional de energia de forma a conseguir estabelecer um limite inferior topológico para o mesmo. Esse limite é atingido quando o potencial é escrito de uma maneira particular e as equações de Bogomol'nyi são satisfeitas, resultando em uma energia que é proporcional à carga topológica e que depende, portanto, apenas das condições de contorno do problema e não do comportamento local dos campos. As equações de Bogomol'nyi são equações diferenciais de ordem inferior à ordem das equações de movimento dos campos e surgem naturalmente quando estabelecemos o limite inferior para a energia. Quando lidamos com modelos onde a equação de movimento é uma equação diferencial de segunda ordem, como é o caso dos modelos com dinâmica usual, as equações de Bogomol'nyi são equações diferenciais de primeira ordem. Por conta disso, também nos referimos ao procedimento de Bogomol'nyi como formalismo de primeira ordem.

Para um modelo de um campo escalar real com dinâmica usual em $(1 + 1)$ dimensões, sua energia é obtida ao integrar a densidade de energia definida na equação (2.25) em todo o espaço

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left\{ \frac{1}{2}(\dot{\phi})^2 + \frac{1}{2}\phi'^2 + V(\phi) \right\}. \quad (2.39)$$

Devido a não-negatividade do potencial, é possível escrevê-lo sem perda de generalidade como

$$V(\phi) = \frac{1}{2}W_\phi^2, \quad (2.40)$$

onde $W(\phi)$ é uma função auxiliar e $W_\phi = dW/d\phi$. Devido à influência que essa função exerce em extensões supersimétricas da teoria, $W(\phi)$ também é denominado superpotencial na literatura [27]. Porém, como essas extensões fogem do escopo proposto para esse trabalho, nos referimos a ela apenas como função auxiliar. Para estabelecer o limite inferior, a energia deve ser reescrita como

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left\{ \frac{1}{2}(\dot{\phi})^2 + \frac{1}{2}[\phi' \mp W_\phi]^2 \pm W_\phi \phi' \right\} \geq \pm \int_{-\infty}^{+\infty} dx W_\phi \phi'. \quad (2.41)$$

Nesse caso destacamos que o limite inferior de energia, denotado por E_B e denominado energia de Bogomol'nyi é atingido se, e somente se considerarmos soluções estáticas ($\dot{\phi} = 0$) e assegurarmos que

$$\phi' = \pm W_\phi, \quad (2.42)$$

A relação acima é a famosa equação de Bogomol'nyi e suas soluções são denominadas soluções BPS (Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield) [26, 28]. Podemos derivar a equação acima com relação a x e perceber que as soluções da equação de Bogomol'nyi também são soluções estáticas da equação de Euler-Lagrange (2.28), ou seja, a equação de Bogomol'nyi corresponde à integração da equação de movimento no caso estático, quando tomamos a constante de integração $C = 0$ (para assegurar soluções de energia finita, como destacado na seção anterior). Além disso, ao analisar a componente T^{11} do tensor energia-momento (2.25b) no caso estático

$$T^{11} = \frac{1}{2}\phi'^2 - V, \quad (2.43)$$

percebe-se que a equação de Bogomol'nyi corresponde à condição de estresse nulo da teoria, sendo esta uma característica geral das soluções BPS em modelos de campos escalares reais [29]. Observe que, a energia de Bogomol'nyi é tal que

$$E_B = \pm \int_{-\infty}^{+\infty} dx W_\phi \phi' = \pm \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{dW}{dx}, \quad (2.44)$$

que resulta em

$$E_B = |W(\phi(+\infty)) - W(\phi(-\infty))|. \quad (2.45)$$

Também é válido ressaltar que existe uma íntima relação entre E_B e a carga topológica da solução. Essa correlação é evidente quando utilizamos a definição (2.36) para a corrente topológica, uma vez que

$$Q = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{dW}{dx} = \pm E_B. \quad (2.46)$$

Mesmo tendo feito a descrição apenas para modelos de um campo escalar real com dinâmica usual em $(1+1)$ dimensões, soluções BPS estão presentes em diversos contextos mesmo quando consideramos sistemas muito mais complexos. Ainda no artigo de Bogomol'nyi, este fez a descrição de vórtices, monopolos e dyons seguindo uma metodologia similar a apresentada aqui, onde também foram encontradas equações que saturam um limite inferior topológico da energia. Porém, nesses casos o estabelecimento de um setor BPS na teoria impõe grandes restrições aos campos [29].

Por outro lado, mesmo no contexto dos campos escalares reais, quando consideramos teorias mais exóticas como as k -teorias [30–33] ou ainda modelos de altas ordens derivativas [34, 35], soluções BPS ainda são encontradas. Porém, apesar da sua aparente universalidade em teorias de campos escalares reais é possível construir modelos que não apresentem setor BPS ou ainda que as propriedades BPS são apenas parcialmente estabelecidas. Na referência [29], os autores exploraram essa possibilidade ao construir um sistema cuja densidade Lagrangiana possui um termo com dependência explícita das coordenadas (denominado de impureza), que quebra por consequência a simetria translacional do modelo e pode ou não apresentar soluções BPS, a depender de como esse termo é incluído ao modelo.

2.3.1 Modelo $\lambda\phi^4$

Exploramos nessa subseção uma das teorias mais simples da literatura que admite soluções topológicas, o modelo $\lambda\phi^4$. Esse modelo é descrito pela densidade Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} \lambda^2 (v^2 - \phi^2)^2, \quad (2.47)$$

onde λ e v são parâmetros reais. Como consequência, o potencial desse modelo é escrito como

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \lambda^2 (v^2 - \phi^2)^2. \quad (2.48)$$

É possível constatar que v corresponde à amplitude das soluções não-triviais, mesmo antes de calcular $\phi(x)$. Essa conclusão decorre do fato de que os mínimos globais do potencial estão localizados em $\phi_\pm = \pm v$ e, como já discutido anteriormente, soluções topológicas não-triviais conectam monotonicamente mínimos adjacentes do potencial. Além disso, a teoria admite duas soluções de vácuo trivial ($\phi_\pm = \pm v$) e apresenta apenas um setor topológico $-v \leftrightarrow v$. Outra característica que podemos extrair da equação (2.47) é que esta é invariante sob a transformação $\phi \rightarrow -\phi$, sendo esta uma simetria Z_2 ou simetria de reflexão. O comportamento do potencial está representado na figura 2.1 para diferentes valores de v .

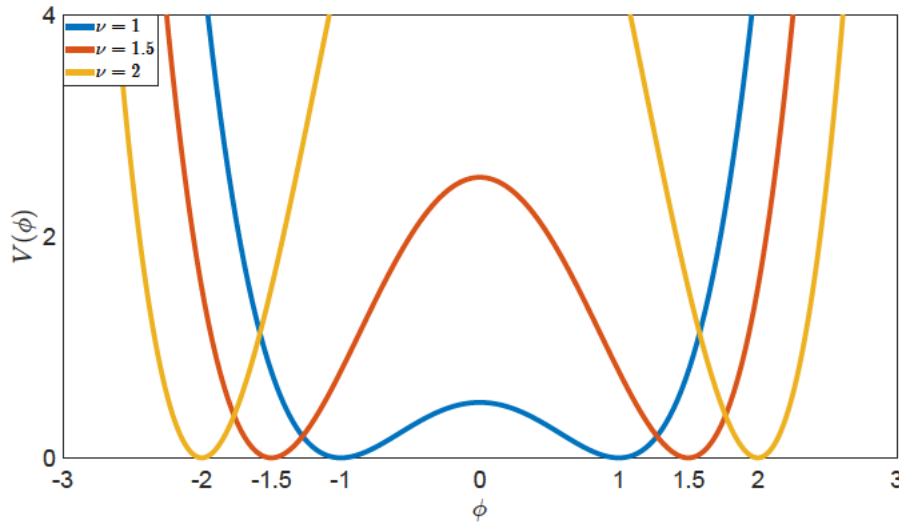


Figura 2.1 Potencial do modelo $\lambda\phi^4$ (2.48) para diferentes valores de v , com $\lambda = 1$.

A equação de movimento associada a (2.47) é

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + 2\lambda^2 \phi (\phi^2 - v^2) = 0, \quad (2.49)$$

para o caso estático esta reduz-se a

$$\phi'' = 2\lambda^2 \phi (\phi^2 - v^2). \quad (2.50)$$

Assim como desenvolvemos anteriormente, para estabelecer o formalismo de Bogomol'nyi, o potencial deve ser reescrito como $V(\phi) = W_\phi^2/2$. Por conta disso

$$W_\phi = \lambda (v^2 - \phi^2) \rightarrow W(\phi) = \lambda \left(v^2 \phi - \frac{\phi^3}{3} \right). \quad (2.51)$$

Nesse caso, a equação de primeira ordem (2.42) adquire a forma

$$\phi' = \pm \lambda (v^2 - \phi^2) \rightarrow \frac{d\phi}{v^2 - \phi^2} = \pm \lambda dx, \quad (2.52)$$

que após integração revela como resultado

$$\frac{\operatorname{arctanh}(\phi/v)}{v} = \pm \lambda (x - x_0), \quad (2.53)$$

onde x_0 é uma constante de integração e representa a posição do kink [20]. A equação acima, após algumas manipulações adquire a forma

$$\phi_\pm(x) = \pm v \tanh(v\lambda(x - x_0)). \quad (2.54)$$

O comportamento da solução $\phi_+(x)$ está apresentado na figura 2.2.

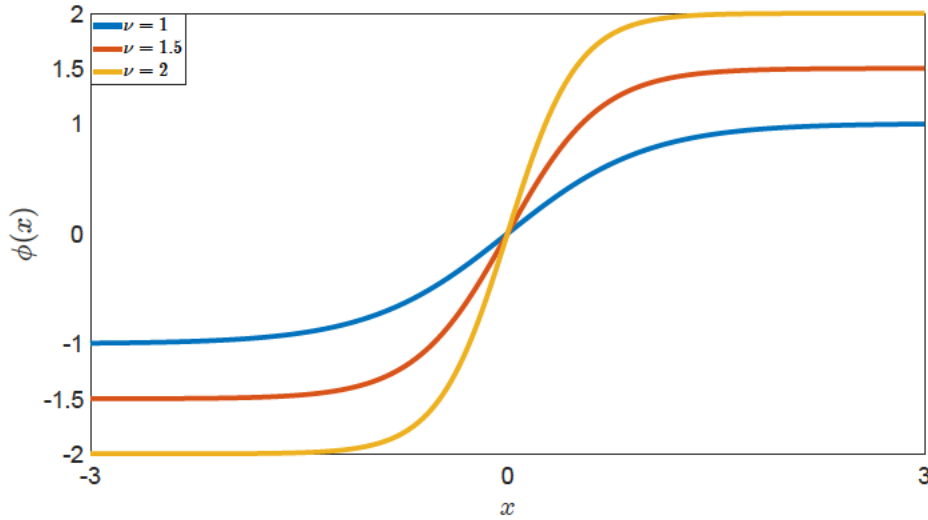


Figura 2.2 Solução do modelo $\lambda\phi^4$ (2.54) para diferentes valores de v , com $x_0 = 0$ e $\lambda = 1$.

Aqui fica mais claro o papel do parâmetro v como a amplitude da solução, enquanto $1/v\lambda$ corresponde à largura da mesma. Os sinais de $+$ e $-$ na equação (2.54) correspondem às soluções tipo kink e anti-kink, respectivamente. Como essas soluções são relacionadas por uma transformação $x \rightarrow -x$, mostramos na figura apenas as soluções do tipo kink. Além disso, dado que o parâmetro x_0 corresponde apenas a uma translação horizontal da solução e considerando a invariância translacional do modelo em estudo, assumimos $x_0 = 0$ sem perda de generalidade [36].

A densidade de energia foi obtida a partir da equação (2.25a), ao considerarmos as soluções estáticas (2.54) e o potencial escrito na forma $V(\phi) = \frac{1}{2}\phi'^2$. Obtendo assim

$$\rho(x) = \phi'^2 = \left[v\sqrt{\lambda} \operatorname{sech}(v\lambda(x-x_0)) \right]^4, \quad (2.55)$$

sendo esta função representada na figura 2.3. A relação acima torna claro o papel do parâmetro x_0 como posição do kink, já que este determina o ponto em que a densidade de energia é máxima. Apesar dessa importância, por percebermos que o parâmetro x_0 realiza apenas uma translação horizontal no pico da densidade de energia, não apresentamos como esta função se comportaria com relação à variação do parâmetro x_0 .

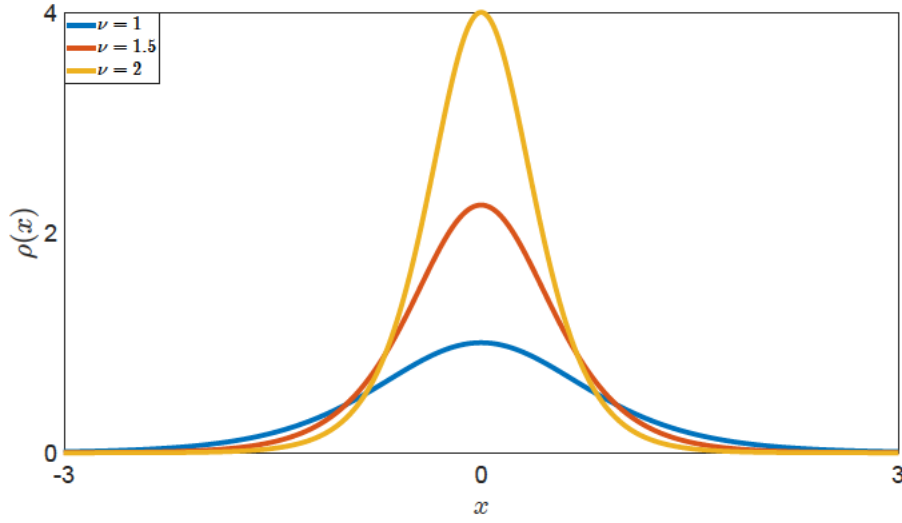


Figura 2.3 Densidade de energia do modelo $\lambda\phi^4$ (2.55) para diferentes valores de ν , com $x_0 = 0$ e $\lambda = 1$.

Como estabelecemos um formalismo de primeira ordem, a energia da solução é calculada de maneira direta a partir da equação (2.45). Nesse caso,

$$E_B = \frac{4}{3}v^3\lambda, \quad (2.56)$$

onde evidenciamos a contribuição dos parâmetros do modelo para a energia da solução. Além disso, reforçamos que para soluções BPS precisamos apenas do comportamento assintótico da solução $\phi(x)$ para calcularmos a energia da mesma. Por isso, poderíamos calcular E_B antes mesmo de identificar qual seria a solução. A carga topológica definida em (2.38) tem como resultado

$$Q = \frac{1}{2}(v - (-v)) = v, \quad (2.57)$$

para as soluções tipo kink. Já para as soluções do tipo anti-kink a carga topológica é $-v$.

2.3.2 Modelo $\lambda\phi^6$

Também é possível construir um modelo que possua mais de um setor topológico. Uma alternativa simples para isso está no modelo $\lambda\phi^6$, descrito pela densidade Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}\lambda^2\phi^2(v^2 - \phi^2)^2, \quad (2.58)$$

onde novamente λ e v são parâmetros reais. O potencial desse modelo é dado por

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \lambda^2 \phi^2 (v^2 - \phi^2)^2 \quad (2.59)$$

cujos mínimos globais são $\phi_0 = 0$ e $\phi_{\pm} = \pm v$, sendo estas também as soluções de vácuo do modelo. Dessa maneira, existem dois setores topológicos equivalentes: $-v \leftrightarrow 0$ e $0 \leftrightarrow v$. Cada um desses setores apresenta duas famílias de soluções de mínima energia, os kinks e anti-kinks BPS. Na figura 2.4 mostramos a dependência do potencial com relação ao parâmetro v .

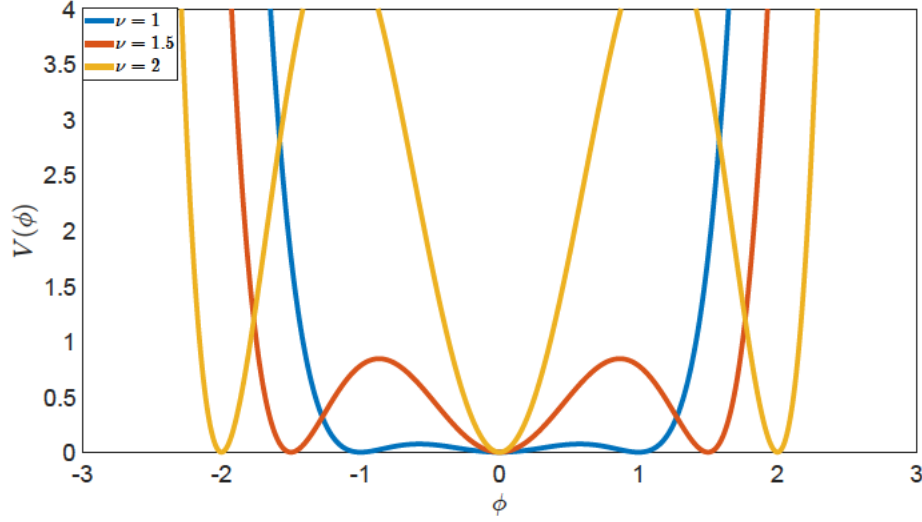


Figura 2.4 Potencial do modelo $\lambda \phi^6$ (2.59) para diferentes valores de v , para $\lambda = 1$.

Estabelecendo o formalismo de primeira ordem discutido anteriormente, a função auxiliar para esse sistema é definida como

$$W_\phi = \lambda \phi (v^2 - \phi^2) \rightarrow W(\phi) = \frac{\lambda v^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{4} \phi^4, \quad (2.60)$$

dessa forma a equação de primeira ordem é tal que

$$\phi' = \pm \lambda \phi (v^2 - \phi^2) \rightarrow \frac{d\phi}{\phi (v^2 - \phi^2)} = \pm \lambda dx. \quad (2.61)$$

Integrando a relação acima obtemos

$$\ln \left(\frac{v^2}{\phi^2} - 1 \right) = \mp 2\lambda v^2 (x - x_0) \rightarrow \phi(x) = \pm v \sqrt{\frac{e^{\pm 2\lambda v^2 (x - x_0)}}{e^{\pm 2\lambda v^2 (x - x_0)} + 1}}, \quad (2.62)$$

onde x_0 é uma constante de integração. Para simplificar a notação, utilizamos a relação

$$\frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1} = \frac{1}{2} [1 + \tanh(x)]. \quad (2.63)$$

Nesse caso, a solução para o modelo analisado é dada por

$$\phi_{\pm}^{\pm}(x) = \pm v \sqrt{\frac{1}{2} [1 \pm \tanh(\lambda v^2 (x - x_0))]}, \quad (2.64)$$

onde os sinais $+$ e $-$ dentro da raiz identificam respectivamente kinks e anti-kinks, enquanto os sinais $+$ e $-$ fora da raiz determinam o setor topológico da solução, $0 \leftrightarrow v$ e $-v \leftrightarrow 0$ respectivamente. Analisando a equação (2.64), percebemos que o parâmetro v corresponde à amplitude da solução, enquanto o fator $1/\lambda v^2$ está relacionado à largura da mesma. Esse comportamento pode ser visualizado na figura 2.5, onde exibimos o comportamento da solução $\phi_+(x)$. Escolher uma composição diferente de sinais alteraria os limites assintóticos da solução e/ou o seu comportamento de crescente para decrescente, sem modificar suas características gerais. Além disso, observamos que as soluções desse modelo apresentam uma assimetria com relação a $x = 0$.

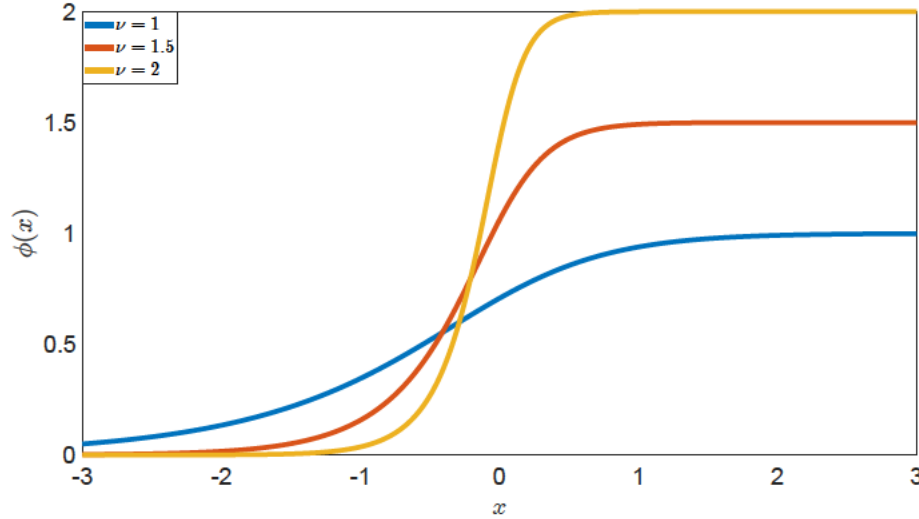


Figura 2.5 Solução do modelo $\lambda\phi^6$ (2.64) para diferentes valores de v , para $x_0 = 0$ e $\lambda = 1$.

Utilizando a equação (2.25a) podemos obter a densidade de energia. Considerando soluções estáticas que satisfazem o formalismo de primeira ordem, a densidade de energia para o modelo analisado é

$$\rho_{\pm}(x) = \frac{\lambda^2 v^6}{8} \frac{\text{sech}^4(\lambda v^2(x - x_0))}{(1 \pm \tanh(\lambda v^2(x - x_0)))}, \quad (2.65)$$

em que os sinais de $+$ ou $-$ estão relacionados aos sinais de dentro da raiz na solução (2.64). O comportamento da função $\rho_+(x)$ está ilustrado na figura 2.6, onde notamos que o caráter assimétrico da solução é herdado pela densidade de energia, sendo esta igualmente assimétrica. Caso utilizássemos $\rho_-(x)$, existiria uma mudança na posição da assimetria, que ocorreria à direita da origem.

O cálculo da energia da solução pode ser executado de duas maneiras diferentes. O primeiro consiste em executar a integração $\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) dx$, que apesar de poder ser realizada analiticamente, apresenta uma expressão complicada. Por outro lado, o segundo método pode ser facilmente aplicado, bastando utilizar a relação (2.45). Dessa forma, obtemos $E_B = \lambda v^4/4$, que evidencia a contribuição de cada parâmetro para a energia. Já para o cálculo da carga topológica, utilizaremos a definição (2.38), que resulta em

$$Q = \pm \frac{1}{2} v, \quad (2.66)$$

onde o sinal escolhido não depende do setor topológico em que a solução está definida. Logo, dependerá apenas da solução ser tipo kink ou anti-kink, isto é, está relacionado unicamente aos sinais dentro da raiz na solução (2.64).

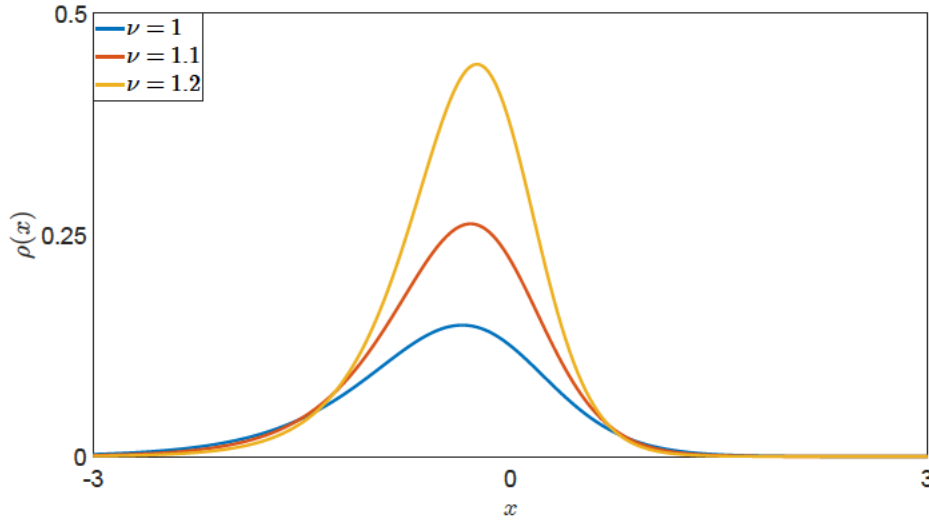


Figura 2.6 Densidade de energia do modelo $\lambda\phi^6$ (2.65) para diferentes valores de ν , com $x_0 = 0$ e $\lambda = 1$.

2.3.3 Modelo *Vacuumless*

É possível construir modelos que suportem soluções não-triviais nos quais o potencial não possui vácuo. Modelos assim surgiram primeiramente no contexto de gravitação e cosmologia [37, 38], sendo posteriormente aplicados em modelos de campos escalares reais [25]. Estamos interessados na descrição do modelo definido pela densidade Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} \frac{\mu^2}{\lambda^2} \text{sech}^2(\lambda \phi), \quad (2.67)$$

onde μ e λ são parâmetros reais e positivos. O potencial desse modelo é definido como

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \frac{\mu^2}{\lambda^2} \text{sech}^2(\lambda \phi). \quad (2.68)$$

Essa função apresenta um máximo em $\phi = 0$ e decresce monotonicamente como uma função de $|\phi|$, atingindo o zero apenas quando $|\phi| \rightarrow \infty$. Por conta disso, é possível afirmar que o potencial não possui vácuo, ou seja, não existe valor finito de ϕ para o qual $V(\phi) = 0$. Como consequência, esse modelo não apresenta soluções do tipo vácuo trivial. Logo, o modelo contém apenas um setor topológico, $-\infty \leftrightarrow \infty$. Portanto, caso existam soluções topológicas não-triviais, estas devem possuir amplitude infinita.

Representamos na figura 2.7 o comportamento do potencial, com relação aos parâmetros μ e λ . Nele destacamos a influência do parâmetro λ , que além de modificar a amplitude da função potencial, também torna a mesma mais localizada a medida que cresce.

A equação de movimento associada à densidade Lagrangiana (2.67) é

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi = \frac{\mu^2}{\lambda} \text{sech}^2(\lambda \phi) \tanh(\lambda \phi), \quad (2.69)$$

para o caso estático, esta torna-se

$$\phi'' = -\frac{\mu^2}{\lambda} \text{sech}^2(\lambda \phi) \tanh^2(\lambda \phi). \quad (2.70)$$

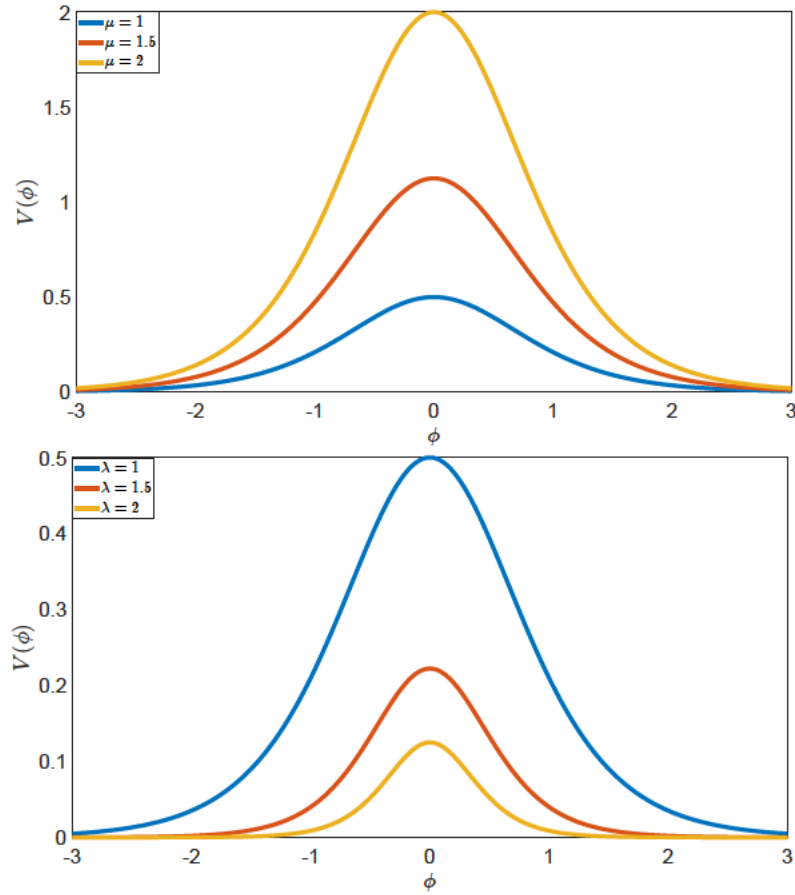


Figura 2.7 Potencial do modelo Vacuumless (2.68), para diversos valores de λ e μ . Em ambos, o parâmetro constante foi mantido igual a 1.

Assim como discutimos na seção 2.3, podemos utilizar o procedimento de Bogomol'nyi para reescrever a densidade de energia e encontrar uma equação de primeira ordem que sature a condição de estresse nulo e atribua um vínculo topológico à energia. Para isso, introduzimos uma função auxiliar de tal forma que

$$V(\phi) = \frac{1}{2}W_\phi^2 = \frac{1}{2}\frac{\mu^2}{\lambda^2}\text{sech}^2(\lambda\phi), \quad (2.71)$$

onde encontramos

$$W_\phi = \frac{\mu}{\lambda}\text{sech}(\lambda\phi), \quad (2.72a)$$

$$W(\phi) = \frac{\mu}{\lambda^2}\arctan(\sinh(\lambda\phi)). \quad (2.72b)$$

Consequentemente, a equação de primeira ordem (2.42) adquire a forma

$$\phi' = \pm \frac{\mu}{\lambda}\text{sech}(\lambda\phi). \quad (2.73)$$

Para resolver a equação acima devemos reescrevê-la como

$$\frac{d\phi}{\text{sech}(\lambda\phi)} = \pm \frac{\mu}{\lambda}dx, \quad (2.74)$$

de onde poderemos integrar e manipular a relação acima, para obter que

$$\phi_{\pm}(x) = \pm \frac{1}{\lambda} \operatorname{arcsinh}(\mu(x - x_0)), \quad (2.75)$$

em que x_0 é uma constante de integração que, como já comentamos, corresponde à posição da solução e devido à invariância translacional pode ser tomada como nula sem perda de generalidade. Na figura 2.8, mostramos como a solução $\phi_+(x)$ varia com relação aos parâmetros μ e λ .

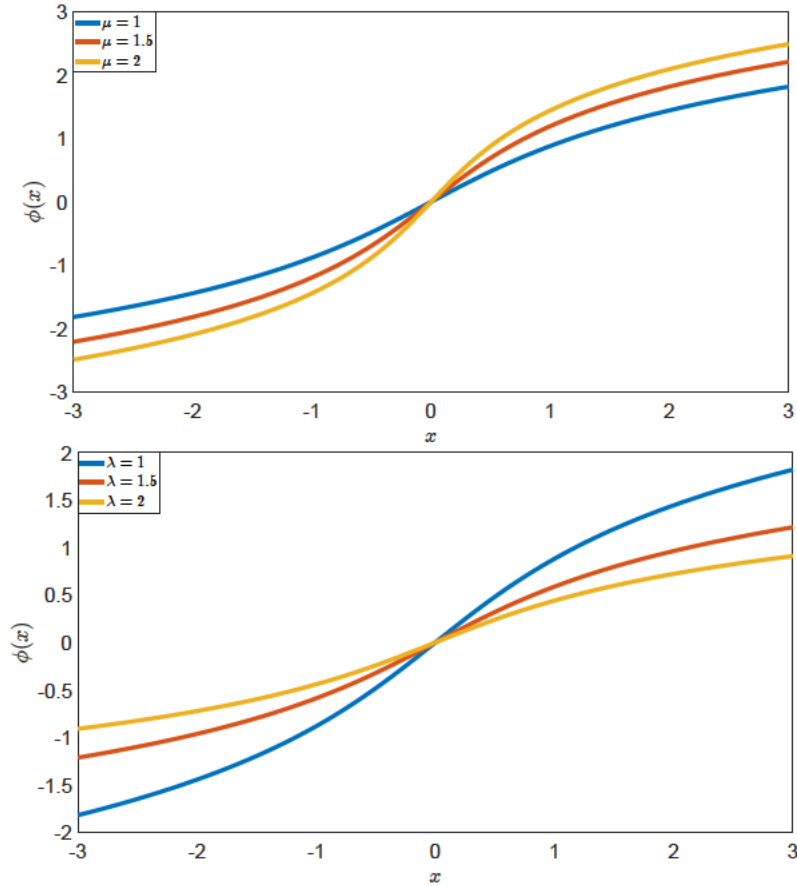


Figura 2.8 Solução do modelo Vacuumless (2.75), para diversos valores de λ e μ . Em ambos o parâmetro constante foi mantido igual a 1 e $x_0 = 0$.

Identificamos a solução com o sinal positivo como kink e a solução com o sinal negativo como anti-kink. Para avaliarmos melhor o caráter posicional da constante de integração x_0 , analisamos a densidade de energia do modelo, obtida a partir da equação (2.41). Dessa forma, temos que

$$\rho(x) = W_{\phi} \phi' = \frac{1}{\lambda^2 ((x - x_0)^2 + 1/\mu)}, \quad (2.76)$$

onde o seu comportamento foi exposto na figura 2.9. A partir dela, observamos claramente que o pico da densidade de energia é transladado horizontalmente para a direita quando aumentamos x_0 , característica que realça a correlação entre este parâmetro e a posição do kink.

A energia das soluções BPS (2.45) é

$$E_B = |W(\phi(+\infty)) - W(\phi(-\infty))| = \frac{\mu}{\lambda^2} \pi. \quad (2.77)$$

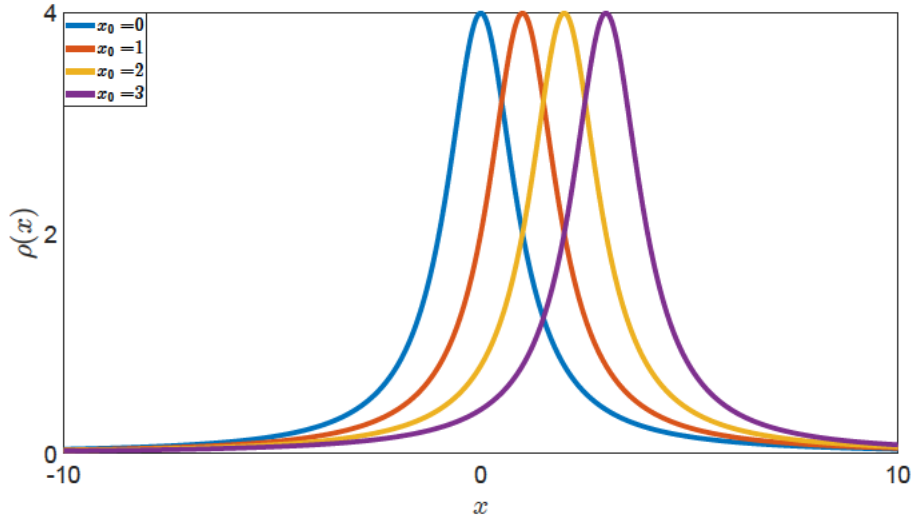


Figura 2.9 Densidade de energia do modelo Vacuumless (2.76) para diferentes valores de x_0 , com $\mu = 1$ e $\lambda = 0.5$.

Perceba que, apesar do comportamento divergente das soluções, sua energia ainda é finita e bem definida. Além disso, reforçamos que devido à implementação do formalismo de primeira ordem e, como consequência, a obtenção de soluções que saturam o vínculo de Bogomol'nyi, estas são necessariamente soluções de mínima energia e, consequentemente, estáveis.

Ao analisar a corrente topológica associada a esse modelo, percebemos que não é conveniente utilizar a definição usual (2.34), já que a carga topológica obtida é

$$Q = \frac{1}{2} [\phi(\infty) - \phi(-\infty)] = \pm \frac{1}{2} (\infty - \infty), \quad (2.78)$$

sendo portanto mal definida. Logo, para evitar problemas na definição da carga topológica e para estabelecermos uma relação de proporcionalidade entre esta e a energia da solução, utilizamos como definição para a corrente topológica a expressão [25]

$$j^\mu = \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\nu W(\phi), \quad (2.79)$$

de onde podemos calcular a carga topológica como

$$Q = \int_{-\infty}^{+\infty} dx j^0 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{dW}{dx}, \quad (2.80)$$

e concluímos que $Q = E_B$.

2.4 Teorema de Derrick-Hobart

O Teorema de Derrick-Hobart é o primeiro percalço encontrado quando tentamos generalizar a teoria de campos escalares para mais dimensões espaciais. Isso ocorre devido à conclusão de que, considerando uma teoria de campos escalares com dinâmica usual, não existem soluções estáticas não-triviais e de energia finita quando consideramos dimensões espaciais maiores que 2. Apesar de ainda existirem soluções para tais modelos, estas são necessariamente instáveis, característica demonstrada de forma independente por Hobart [39] e Derrick [40].

A motivação de Derrick para a realização de seu trabalho seminal foi o artigo [41], em que o autor encontrou soluções estáticas de energia finita para uma determinada equação de onda

não linear em $(1 + 1)$ dimensões. Por acreditar que essa teoria não linear poderia fornecer a devida descrição para partículas elementares estáveis, propôs que uma extensão da teoria para mais dimensões seria esperada. Dessa forma, sugeriu que uma generalização de sua teoria para $(3 + 1)$ dimensões poderia levar a importantes resultados no contexto da Mecânica Quântica.

Apesar de em ambos os trabalhos Derrick e Hobart terem provado seus teoremas para modelos de um campo escalar em 3 dimensões espaciais, generalizar esse resultado para um número arbitrário de campos e dimensões é direto. Fizemos aqui o desenvolvimento proposto por Derrick para a averiguação da não-estabilidade da solução com relação à reescala, em que este utiliza a propriedade do funcional de energia ser estacionário mediante qualquer variação em soluções que minimizam a energia, em particular mediante reescala espacial ($x \rightarrow \lambda x$). Portanto, para uma teoria com dinâmica usual de N campos escalares reais em $(n + 1)$ dimensões, o funcional de energia é, no caso estático [42]

$$E = \int d^n x \left\{ \sum_{a=1}^N (\nabla \phi_a)^2 + V(\phi_1, \dots, \phi_N) \right\} = E_G + E_P, \quad (2.81)$$

onde E_G e E_P são respectivamente as energias gradiente e potencial do modelo, e ∇ é o operador gradiente em $(n + 1)$ dimensões. Aplicando a reescala $\vec{y} = \lambda \vec{x}$, temos que

$$E_\lambda = \int d^n \left[\frac{y}{\lambda} \right] \left\{ \lambda^2 \sum_{a=1}^N \left(\nabla \phi_a^\lambda \right)^2 + V(\phi_1^\lambda, \dots, \phi_N^\lambda) \right\} = \lambda^{2-n} E_G + \lambda^{-n} E_P, \quad (2.82)$$

em que E_λ é a energia da solução após sofrer a reescala, podendo ser uma contração (para $\lambda > 1$) ou uma dilatação (para $\lambda < 1$). Além disso, tomamos $\phi_a^\lambda(\vec{x}) = \phi_a(\lambda \vec{x}) = \phi_a(\vec{y})$. Como estamos interessados apenas em sistemas estáveis, devemos assegurar que $\delta E_\lambda = 0$ e $\delta^2 E_\lambda \geq 0$ na vizinhança de $\lambda = 1$. Nesse caso, a primeira derivada de E_λ é

$$\frac{\partial E_\lambda}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=1} = (2-n)E_G - nE_P = 0, \quad (2.83)$$

ou seja, podemos rearranjar a expressão acima como

$$E_P = \frac{2-n}{n} E_G. \quad (2.84)$$

Por outro lado, ao avaliar a segunda derivada da energia, temos

$$\frac{\partial^2 E_\lambda}{\partial \lambda^2} \Big|_{\lambda=1} = (2-n)(1-n)E_G + n(n+1)E_P \geq 0, \quad (2.85)$$

onde podemos concluir que

$$E_P \geq \frac{(n-2)(1-n)}{n(n+1)} E_G. \quad (2.86)$$

Ressaltamos que para $n > 2$ a relação acima nunca será satisfeita, já que ao analisar a equação (2.84) essa é a região em que $E_P < 0$. Porém, para esses valores de n o lado direito da inequação acima será sempre positivo. Dessa forma, o teorema nos mostra que não existem soluções estáticas e estáveis não-triviais para $n > 2$ em uma teoria com dinâmica usual.

Portanto, só existe possibilidade de encontrarmos soluções estáticas e estáveis em modelos com dinâmica usual quando consideramos $n = 1$ ou $n = 2$. No primeiro caso a equação (2.84) implica necessariamente que $E_G = E_P$, sendo esta também a condição de estresse nulo da teoria.

Já quando analisamos sistemas em duas dimensões espaciais, a equação (2.84) restringe a busca aos casos em que a energia potencial é nula ($E_P = 0$), como é o caso dos modelos $O(3)$ não linear [1], onde para evitar que a solução seja trivializada são impostas restrições aos campos.

Além disso, é importante ressaltar que a impossibilidade de encontrarmos soluções estáveis em mais dimensões espaciais é válida apenas quando consideramos soluções não-triviais, já que por definição soluções de vácuo são homogêneas ($E_G = 0$) e mínimos globais do potencial ($E_P = 0$), valores que satisfazem as relações (2.84) e (2.86) em qualquer dimensão [20]. Por outro lado, o teorema de Derrick-Hobart também não impede a existência de soluções estáticas de energia divergente, como ocorre em fitas e paredes de domínio [21].

2.4.1 Evadindo o Teorema de Derrick-Hobart

Apesar da grande restrição imposta pelo Teorema de Derrick-Hobart, é possível construir uma teoria que escape da sua conclusão, ou seja, uma teoria que suporte soluções estáveis e de energia finita em mais dimensões espaciais. Para isso, é necessário que sejam alteradas as hipóteses do teorema. Uma alternativa nessa direção foi proposta em [43], onde os autores consideraram uma teoria em que o potencial apresenta dependência explícita das coordenadas. Com a intenção de investigar essa possibilidade, consideraremos uma teoria em $(D+1)$ dimensões espaço-temporais, com métrica de Minkowski de assinatura majoritariamente negativa e descrita pela densidade Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - U(x, \phi), \quad (2.87)$$

onde a dependência do potencial generalizado $U(x, \phi)$ com relação a x foi considerada como

$$U(x, \phi) = f(x^2) V(\phi) = \frac{1}{2r^N} W_\phi^2, \quad (2.88)$$

com $x^2 = x_\mu x^\mu$, $r = (x_1^2 + x_2^2 + \dots x_D^2)^{1/2}$ e $W(\phi)$ é uma função suave do campo. Ao considerar $V(\phi) = W_\phi^2/2$, estamos necessariamente analisando configurações em que o potencial $V(\phi)$ é não-negativo. Se utilizarmos $N = 0$, recaímos no caso usual.

A equação de movimento é obtida a partir da equação de Euler-Lagrange (2.8), e apresenta como resultado

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + \frac{1}{r^N} W_\phi W_{\phi\phi} = 0, \quad (2.89)$$

para o caso estático reduz-se a

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^N} W_\phi W_{\phi\phi}. \quad (2.90)$$

Como o modelo analisado não possui simetria translacional, o tensor energia-momento não é conservado. Porém, a densidade de energia para o caso estático ainda é calculada como $\rho_s = -\mathcal{L}_S$. Dessa forma, obtemos

$$\rho_s = \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2r^N} W_\phi^2, \quad (2.91)$$

e portanto a energia das soluções é

$$E^D = \int d^D r \left\{ \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2r^N} W_\phi^2 \right\} = E_G^D + E_P^D, \quad (2.92)$$

em que E_G^D e E_P^D são respectivamente as contribuições gradiente e potencial para a energia. Assim como fizemos anteriormente, vamos avaliar a estabilidade da solução mediante uma reescala $\vec{r} \rightarrow \lambda \vec{r}$. Nesse caso a energia após a reescala é dada por

$$E_\lambda^D = \int d^D \left[\frac{r}{\lambda} \right] \left\{ \frac{\lambda^2}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{\lambda^N}{2r^N} W_\phi^2 \right\} = \lambda^{2-D} E_G^D + \lambda^{N-D} E_P^D. \quad (2.93)$$

A novidade da análise para esse modelo é o aparecimento de um novo parâmetro N que pode ser ajustado de forma a contornar a instabilidade da solução.

Como dito anteriormente, para que a solução seja estável frente à reescala, precisamos assegurar que $\delta E_\lambda = 0$ e $\delta^2 E_\lambda \geq 0$ na vizinhança de $\lambda = 1$. Portanto, para a primeira derivada temos que

$$(2-D)E_G^D + (N-D)E_P^D = 0 \rightarrow E_G^D = \left(\frac{N-D}{D-2} \right) E_P^D. \quad (2.94)$$

Já para a segunda derivada, obtemos

$$(2-D)(1-D)E_G^D + (N-D)(N-D-1)E_P^D \geq 0. \quad (2.95)$$

Avaliando a situação em que $D = 1$, quando consideramos $N = 0$ recaímos no caso usual em que $E_G^1 = E_P^1$. Por outro lado, quando consideramos $N = 1$ encontramos que $E_G^1 = 0$, ou seja, nesse caso as soluções estáveis por reescala são necessariamente uniformes. Para $N > 1$, não encontraremos configurações possíveis, já que quando analisamos a equação (2.94) temos necessariamente que $E_G^1 < 0$. Quando averiguamos o caso em que $D = 2$, percebemos que além do já comentado caso do modelo $O(3)$ não linear, existe a possibilidade de encontrarmos soluções não-triviais e estáveis quando consideramos $N = 2$. Nesse caso, as relações (2.94) e (2.95) são satisfeitas sem que seja feita nenhuma restrição sobre as energias.

Os casos em que $D > 2$ são melhor avaliados quando aplicarmos o formalismo de primeira ordem. Para isso, utilizamos o expediente padrão de reescrever o funcional de energia a fim de encontrar um limite inferior topológico para o mesmo. Nesse caso, a energia pode ser reescrita como

$$E^D = \int d^D x \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{d\phi}{dr} \mp \frac{1}{r^{N/2}} W_\phi \right]^2 \pm \frac{d\phi}{dr} \frac{1}{r^{N/2}} W_\phi \right\}, \quad (2.96a)$$

$$E^D \geq E_B^D = \pm \int d^D x \left\{ \frac{d}{dr} \phi(r) \frac{1}{r^{N/2}} W_\phi \right\}, \quad (2.96b)$$

onde simplificar a análise, na referência [43], os autores consideraram soluções com simetria esférica. Ou seja

$$\nabla \phi(r) = \frac{d}{dr} \phi(r) \hat{r}, \quad (2.97a)$$

$$\nabla^2 \phi(r) = \frac{1}{r^{D-1}} \frac{d}{dr} \left(r^{D-1} \frac{d}{dr} \phi(r) \right). \quad (2.97b)$$

Para que a energia sature o limite inferior, é necessário garantir que a equação de primeira ordem abaixo seja satisfeita

$$\frac{d\phi}{dr} = \pm \frac{1}{r^{N/2}} W_\phi. \quad (2.98)$$

Além disso, para que o limite inferior assuma um caráter topológico e, com isso, só dependa do comportamento assintótico da solução, precisamos que $N = 2D - 2$. Dessa forma, a energia de Bogomol'nyi é simplesmente

$$\begin{aligned} E_B^D &= \pm \int d^D x \left\{ W_\phi \frac{d\phi}{dr} r^{-N/2} \right\} = \pm \Omega_D \int_0^{+\infty} dr r^{D-1} \left\{ W_\phi \frac{d\phi}{dr} r^{-N/2} \right\} \\ &= \pm \Omega_D \int_0^{+\infty} dr \frac{dW}{dr}, \end{aligned} \quad (2.99a)$$

onde $\Omega_D = 2\pi^{D/2}/\Gamma(D/2)$ é um fator angular referente a área de uma hipersfera de raio unitário em D dimensões. Logo

$$E_B^D = \pm \Omega_D [W(r \rightarrow \infty) - W(r \rightarrow 0)]. \quad (2.100)$$

Ao analisar a equação (2.94), percebemos que a imposição de $N = 2D - 2$ nos leva à configurações em que $E_G^D = E_P^D$ em qualquer dimensão. Nesse caso, a equação de primeira ordem (2.98) e a equação de movimento (2.90) podem ser reescritas respectivamente como

$$r^{D-1} \frac{d\phi}{dr} = \pm W_\phi, \quad (2.101a)$$

$$r^{D-1} \frac{d}{dr} \left(r^{D-1} \frac{d}{dr} \phi(r) \right) = W_\phi W_{\phi\phi}. \quad (2.101b)$$

As equações acima tornam-se particularmente interessantes quando realizamos a mudança de variável $dx = \pm r^{1-D} dr$, já que obtemos

$$\frac{d\phi}{dx} = W_\phi, \quad (2.102a)$$

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = W_\phi W_{\phi\phi}, \quad (2.102b)$$

ou seja, conseguimos mapear o modelo em qualquer dimensão em uma teoria unidimensional. Para retornarmos à variável original r , basta realizar a mudança $x = \pm r^{2-D}/(2-D)$.

2.5 Dinâmica generalizada

Nessa seção apresentamos a metodologia necessária para analisar casos mais exóticos em teorias de um campo escalar real em $(1+1)$ dimensões. Nessa análise estamos interessados em sistemas cujos campos apresentam dinâmica e/ou auto-interação regidos por termos mais genéricos que os que consideramos até aqui, sendo estes denominados de modelos com dinâmica generalizada. A metodologia aqui apresentada segue o que foi desenvolvido nas referências [30, 31].

Primeiramente, consideramos modelos descritos pela ação

$$\mathcal{S} = \int d^2 x \mathcal{L}(\phi, X), \quad (2.103)$$

em que $X = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi$ é o termo dinâmico do campo ϕ . Apesar da generalidade com que estamos desenvolvendo essa teoria, consideramos sistemas cuja densidade Lagrangiana não possui dependência explícita das coordenadas, para assim preservar a simetria de Lorentz.

Seja a equação de Euler-Lagrange definida na equação (2.8) e dada por

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}, \quad (2.104)$$

para o modelo analisado temos que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X} \partial^\mu \phi, \quad (2.105)$$

que ao ser substituído na equação (2.104) resulta em

$$\partial_\mu (\mathcal{L}_X \partial^\mu \phi) = \mathcal{L}_\phi \rightarrow \partial_\mu \mathcal{L}_X \partial^\mu \phi + \mathcal{L}_X \partial_\mu \partial^\mu \phi = \mathcal{L}_\phi, \quad (2.106)$$

onde $\mathcal{L}_X = \partial \mathcal{L} / \partial X$ e $\mathcal{L}_\phi = \partial \mathcal{L} / \partial \phi$. Para expandir o lado esquerdo da equação acima, primeiramente calcularemos $\partial_\mu \mathcal{L}_X$ separadamente

$$\partial_\mu \mathcal{L}_X = \mathcal{L}_{X\phi} \partial_\mu \phi + \mathcal{L}_{XX} \frac{\partial X}{\partial(\partial_\alpha \phi)} \partial_\mu \partial_\alpha \phi = \mathcal{L}_{X\phi} \partial_\mu \phi + \mathcal{L}_{XX} \partial^\alpha \phi \partial_\mu \partial_\alpha \phi. \quad (2.107)$$

Dessa forma, obtemos a equação de movimento para o campo ϕ como sendo

$$\mathcal{L}_{X\phi} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi + \mathcal{L}_{XX} \partial^\mu \phi \partial^\alpha \phi \partial_\mu \partial_\alpha \phi + \mathcal{L}_X \square \phi = \mathcal{L}_\phi, \quad (2.108)$$

em que $\square = \partial_\mu \partial^\mu$ é o operador d'Alembertiano. É importante reforçar que se estivéssemos em um regime de dinâmica usual, teríamos que $\mathcal{L}_X = 1$ e conseqüentemente que $\mathcal{L}_{X\phi} = \mathcal{L}_{XX} = 0$. Nesse caso, a equação de movimento acima seria reduzida a já conhecida equação (2.27), se $\mathcal{L}_\phi = -V_\phi$.

Devido à invariância translacional do modelo, é possível definir o tensor energia-momento a partir da relação (2.14). Para o modelo analisado, este tensor adquire a forma

$$T^{\mu\nu} = \mathcal{L}_X \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (2.109)$$

sendo este um tensor simétrico por permutação de índices e conservado ($\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$). Suas componentes são tais que

$$T^{00} = \rho = \mathcal{L}_X \dot{\phi}^2 - \mathcal{L}, \quad (2.110a)$$

$$T^{11} = \sigma = \mathcal{L}_X \phi'^2 + \mathcal{L}, \quad (2.110b)$$

$$T^{01} = T^{10} = -\mathcal{L}_X \dot{\phi} \phi'. \quad (2.110c)$$

Devido à generalidade da teoria que estamos desenvolvendo, é fundamental estabelecer alguma restrição sobre a mesma, para com isso preservar o significado físico das soluções. Na análise desenvolvida aqui, faremos uso da condição de energia nula (NEC) que impõe que a desigualdade

$$T_{\mu\nu} n^\mu n^\nu \geq 0, \quad (2.111)$$

deve ser satisfeita para qualquer vetor n^μ do tipo luz, ou seja, para qualquer vetor que obedeça a relação $\eta_{\mu\nu} n^\mu n^\nu = 0$. Essa condição implica que

$$\mathcal{L}_X (\partial_\mu \phi n^\mu) (\partial_\nu \phi n^\nu) - \eta_{\mu\nu} n^\mu n^\nu \mathcal{L} \geq 0. \quad (2.112)$$

Definindo o escalar $\partial_\mu \phi n^\mu = \partial_\nu \phi n^\nu = a$ e utilizando a definição de um vetor tipo luz, a inequação acima pode ser reduzida a

$$\mathcal{L}_X a^2 \geq 0 \rightarrow \mathcal{L}_X \geq 0. \quad (2.113)$$

Sendo este um vínculo físico sobre a dinâmica do sistema. Essa restrição não corresponde necessariamente a já conhecida imposição de $\rho \geq 0$, uma vez que para soluções estáticas a equação (2.110) nos mostra que $\rho_s = -\mathcal{L}_s$.

Considerando soluções estáticas, a equação de movimento (2.108) adquire a forma

$$(2\mathcal{L}_{X_s X_s} X_s + \mathcal{L}_{X_s}) \phi'' = 2\mathcal{L}_{X_s \phi} X_s - \mathcal{L}_\phi. \quad (2.114)$$

Aqui, o subíndice s é utilizado para indicar que a análise é realizada sobre o caso estático e nesse contexto $X_s = -\phi'^2/2$. Podemos multiplicar a equação acima por ϕ' e rearranjar os termos como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{X_s} \phi' \phi'' + \mathcal{L}_\phi \phi' + 2\mathcal{L}_{X_s X_s} X_s \phi' \phi'' - 2\mathcal{L}_{X_s \phi} X_s \phi' &= 0, \\ \frac{d}{dx} (\mathcal{L}_s - 2\mathcal{L}_{X_s} X_s) &= 0, \end{aligned} \quad (2.115)$$

Portanto, podemos integrar essa relação e obter como resultado

$$\mathcal{L}_s - 2\mathcal{L}_{X_s} X_s = C, \quad (2.116)$$

onde C é uma constante de integração. Ao analisarmos a equação (2.110b), perceberemos que $C = \sigma$, ou seja, o estresse dessa teoria é constante. Uma maneira alternativa de concluir que σ é uma constante surge ao analisar a condição de conservação do tensor energia-momento, que é expressa na forma

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad (2.117)$$

para o caso estático, obtemos

$$\partial_1 (T^{10} + T^{11}) = \partial_1 \sigma = 0, \quad (2.118)$$

em que utilizamos o fato de T^{10} ser nulo para soluções estáticas. Logo, a partir da relação acima concluímos que σ é constante.

Como buscamos por soluções estáticas e estáveis, é fundamental que generalizemos o Teorema de Derrick-Hobart desenvolvido na seção 2.4, para dele encontrar uma condição necessária para a estabilidade. No caso estático a energia é tal que [44]

$$E = - \int_{-\infty}^{+\infty} dx \mathcal{L}_s \left(\phi, -\frac{1}{2} \left[\frac{d\phi}{dx} \right]^2 \right), \quad (2.119)$$

aplicando a reescala $y = \lambda x$, encontramos que

$$E_\lambda = - \int_{-\infty}^{+\infty} d \left[\frac{y}{\lambda} \right] \mathcal{L}_s \left(\phi^\lambda, -\frac{1}{2} \left[\frac{d\phi}{dy} \right]^2 \lambda^2 \right) = - \int_{-\infty}^{+\infty} d \left[\frac{y}{\lambda} \right] \mathcal{L}_s \left(\phi^\lambda, X_s(y) \lambda^2 \right). \quad (2.120)$$

Como já discutimos anteriormente, ao supor que uma solução é estável, esta deve ser particularmente estável por reescala. Devido a isso, impomos que $\delta E_\lambda|_{\lambda=1} = 0$, onde

$$\frac{\partial E_\lambda}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=1} = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \left(\lambda^{-2} \mathcal{L}_s - \lambda^{-1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X_s^\lambda} \frac{\partial X_s^\lambda}{\partial \lambda} \right) \Big|_{\lambda=1}, \quad (2.121)$$

em que $X_s^\lambda = X_s(y)\lambda^2$. Para simplificar a notação, definimos

$$\mathcal{L}_{X_s} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X_s^\lambda}. \quad (2.122)$$

Com isso, obtemos

$$\frac{\partial E_\lambda}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=1} = \int_{-\infty}^{+\infty} dy (\lambda^{-2} \mathcal{L}_s - 2\mathcal{L}_{X_s} X_s) \Big|_{\lambda=1}. \quad (2.123)$$

Logo, para que a solução seja estável devemos garantir que

$$\mathcal{L}_s - 2\mathcal{L}_{X_s} X_s = 0. \quad (2.124)$$

Quando comparamos a relação acima com a equação (2.116), percebemos que a constante de integração deve ser zero ($C = 0$) para qualquer solução estável da equação de movimento. Nesse caso, como $C = \sigma$ devemos assegurar a condição de estresse nulo quando buscamos por soluções estáveis. Além disso, vale ressaltar que quando garantimos que $\sigma = 0$ a NEC pode ser reescrita como

$$-\frac{\mathcal{L}_s}{\phi'^2} \geq 0 \rightarrow -\mathcal{L}_s \geq 0 \rightarrow \rho_s \geq 0. \quad (2.125)$$

Portanto, para o caso específico de soluções que satisfazem a condição de estresse nulo, a NEC corresponde à condição de não-negatividade da densidade de energia.

Para soluções estáticas com estresse nulo, a densidade de energia pode ser reescrita como

$$\rho_s = -\mathcal{L}_s = \mathcal{L}_{X_s} \phi'^2, \quad (2.126)$$

com o objetivo de desenvolver um formalismo de primeira ordem, podemos introduzir a função auxiliar $W(\phi)$ de tal forma que

$$\mathcal{L}_{X_s} \phi' = \pm W_\phi. \quad (2.127)$$

Fazemos essa escolha para assegurar que a energia da solução possua um vínculo topológico. Nesse caso, ρ_s adquire a forma

$$\rho_s = \pm W_\phi \phi' = \pm \frac{dW}{dx}, \quad (2.128)$$

dessa maneira a energia do modelo é calculada como

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} dx \rho_s = |W(\phi(x \rightarrow \infty)) - W(\phi(x \rightarrow -\infty))|. \quad (2.129)$$

Logo, conseguimos encontrar uma equação de primeira ordem (2.127), que satura a condição de estresse nulo e cujas soluções possuem energia que depende apenas das condições de contorno do problema. Porém, é importante destacar que apesar de termos estabelecido um formalismo de primeira ordem, não encontramos uma condição de minimização da energia. Portanto, diferente do que ocorre nos casos em que a dinâmica é usual, as soluções encontradas a partir dessa metodologia não são necessariamente estáveis, sendo necessária a investigação de estabilidade em cada caso.

Por outro lado, ao considerarmos soluções estáticas a equação de movimento (2.106) pode ser escrita como

$$-(\mathcal{L}_{X_s} \phi')' = \mathcal{L}_\phi \rightarrow W_{\phi\phi} \phi' = \mp \mathcal{L}_\phi, \quad (2.130)$$

onde, com manipulações simples é possível verificar que as soluções da equação (2.127) também satisfazem a equação de movimento acima.

Como já mencionado anteriormente, a corrente topológica não é definida de maneira única, aqui faremos uso da forma já apresentada [25]

$$j_T^\mu = \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\nu W. \quad (2.131)$$

A partir da definição acima, notamos que existe uma íntima relação entre a carga topológica e a energia das soluções estáticas, uma vez que

$$j_T^0 = \frac{dW}{dx} = \rho_s \rightarrow Q_T = \Delta W = E. \quad (2.132)$$

2.5.1 Dinâmica Dirac-Born-Infeld

A dinâmica do tipo Dirac-Born-Infeld (DBI) compõe uma classe de modelos no grupo das k-teorias, em que uma modificação não-linear específica no termo dinâmico da teoria é proposta. Inicialmente essa abordagem foi proposta para resolver o problema da divergência de energia associada a cargas pontuais na eletrodinâmica clássica. Com esse objetivo, Max Born, em 1933 [45], propôs a seguinte modificação para a densidade Lagrangiana de Maxwell

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \rightarrow \mathcal{L}_{BI} = a^2 \left(\sqrt{1 - \frac{1}{2a^2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}} - 1 \right), \quad (2.133)$$

onde a , um parâmetro real e positivo da dinâmica DBI, representa o limite superior para o campo elétrico. Isso se deve ao fato de que para valores maiores, o argumento da raiz quadrada será negativo. Para estabelecer um paralelo com o caso usual, podemos expandir a expressão acima e explorar o limite em que $1/a^2 \rightarrow 0$. Nesse caso

$$\mathcal{L}_{BI}|_{1/a^2 \rightarrow 0} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \mathcal{O}(1/a^2). \quad (2.134)$$

Portanto, no limite em que $1/a^2 \ll 1$, recuperamos a dinâmica usual de Maxwell. Essa ideia foi inspirada na restrição que surge na velocidade das partículas quando saímos de um regime newtoniano para um regime relativístico [47]. Nesse caso, se considerarmos uma partícula relativística livre de massa m , a sua Lagrangiana é

$$L_R = -mc^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right), \quad (2.135)$$

em que para evitar que a função acima admita resultados complexos, devemos impor que $v \leq c$. Apesar da teoria de Born ser embasada no princípio da finitude, onde quantidades físicas não podem divergir. Ainda não existia uma motivação teórica profunda que justificasse tal modificação [46]. Foi somente em sua colaboração com Leopold Infeld que um melhor fundamento foi proposto, sendo este baseado em argumentos de simetria [47].

No contexto de campos escalares reais, é possível estudar como estruturas localizadas são modificadas devido à influência de uma dinâmica não usual do tipo Dirac-Born-Infeld. Nesse intuito, estudamos o modelo descrito pela densidade Lagrangiana

$$\mathcal{L} = F(X) - V(\phi), \quad (2.136)$$

em que

$$F(X) = -a^2 \left(\sqrt{1 - \frac{2X}{a^2}} - 1 \right). \quad (2.137)$$

Note que a presença da raiz quadrada na expressão acima deve naturalmente limitar os possíveis valores do campo ϕ . Portanto, a é o parâmetro que modula o quão distante estamos de uma dinâmica usual, lembrando que quando $1/a^2 \rightarrow 0$ recuperaremos a situação clássica. Ao analisar as equações (2.110) no contexto estático da dinâmica DBI, os termos não nulos são

$$\begin{aligned}\rho &= -F(X) + V, \\ \sigma &= F_X \phi'^2 + F(X) - V(\phi).\end{aligned}\tag{2.138}$$

Dessa forma, para que a energia seja não-negativa, precisamos garantir que $F(X) < 0$, restrição trivialmente respeitada quando consideramos o parâmetro a positivo. Além disso, assim como discutimos anteriormente, a partir da condição de estresse nulo somos capazes de reescrever a densidade de energia introduzindo uma função auxiliar $W(\phi)$ que assegura um vínculo topológico para a energia que é atingido se, e somente se a equação de primeira ordem (2.127) é satisfeita. Para a dinâmica DBI esta pode ser escrita como

$$W_\phi = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2X_s}{a^2}}} \right) \phi' = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + \phi'^2}} \right) \phi'.\tag{2.139}$$

Utilizando manipulações simples, é possível chegar à equação de primeira ordem a seguir [48]

$$\phi' = \frac{W_\phi}{\sqrt{1 - \frac{W_\phi^2}{a^2}}}.\tag{2.140}$$

Lembramos que a condição de estresse nulo é uma imposição feita pelo teorema de Derrick para que a solução seja estável mediante reescala. Porém, diferente do caso usual em que a energia é minimizada pelo procedimento de Bogomol'nyi, aqui essa extremização não é garantida.

Por outro lado, se combinarmos a condição de estresse nulo com a equação de primeira ordem, somos capazes de escrever uma expressão para o potencial que depende apenas da função auxiliar e do parâmetro da dinâmica. Dessa forma temos que

$$V(\phi) = F_X \phi'^2 + F(X) = -a^2 \left(\sqrt{1 - \frac{W_\phi^2}{a^2}} - 1 \right).\tag{2.141}$$

Vale salientar que no limite em que $1/a^2 \ll 1$ o termo $\sqrt{1 - W_\phi^2/a^2} \approx 1 - W_\phi^2/2a^2$. Devido a isso, constatamos que neste limite recuperaremos as expressões clássicas para o potencial e para a equação de primeira ordem.

É possível escolher a função auxiliar de tal forma que nos permita reproduzir a equação de primeira ordem dos modelos com dinâmica usual, isto é, encontrar as mesmas soluções desses modelos. Além disso, essa escolha também nos permite evadir possíveis restrições nos valores de ϕ impostas pela dinâmica DBI. Com esse intuito, a escolha feita é [48]

$$W_\phi = \frac{g(\phi)}{\sqrt{1 + \frac{1}{a^2} (g(\phi))^2}},\tag{2.142}$$

em que $g(\phi)$ é uma função contínua do campo e pode ser ajustada de maneira conveniente.

Como consequência, a equação de primeira ordem e o potencial tornam-se

$$\phi' = \pm g(\phi), \quad (2.143a)$$

$$V(\phi) = -a^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{g^2}{a^2}}} - 1 \right). \quad (2.143b)$$

Percebemos que qualquer valor de ϕ resulta em um potencial real. Logo, com essa escolha de W_ϕ conseguimos evadir restrições impostas pela dinâmica. Outro apontamento importantíssimo é que a equação de primeira ordem não depende do parâmetro a da dinâmica generalizada, diferente do potencial que apresenta uma dependência explícita com relação a este parâmetro. Com isso, a partir dessa descrição conseguimos emular resultados clássicos da dinâmica usual, como os modelos ϕ^4 , ϕ^6 e *vaccumless*, em uma teoria com dinâmica DBI. Para isso, basta definir $g(\phi)$ de maneira adequada.

Para aplicar essa metodologica, consideramos como exemplo $g(\phi) = 1 - \phi^2$. Nesse caso, a equação de primeira ordem (2.143a) é idêntica à equação (2.52) do modelo $\lambda\phi^4$ quando consideramos $\lambda = \nu = 1$. Por conta disso, a solução é $\phi(x) = \pm \tanh(x)$. Por outro lado, o potencial é afetado pela dinâmica, já que

$$V(\phi) = -a^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(1-\phi^2)^2}{a^2}}} - 1 \right). \quad (2.144)$$

Na figura 2.10 é apresentado o comportamento do potencial $V(\phi)$, para diferentes valores de a . Percebemos que na medida que esse parâmetro cresce nos aproximamos mais da situação usual ilustrada na figura 2.1, como já era previsto.

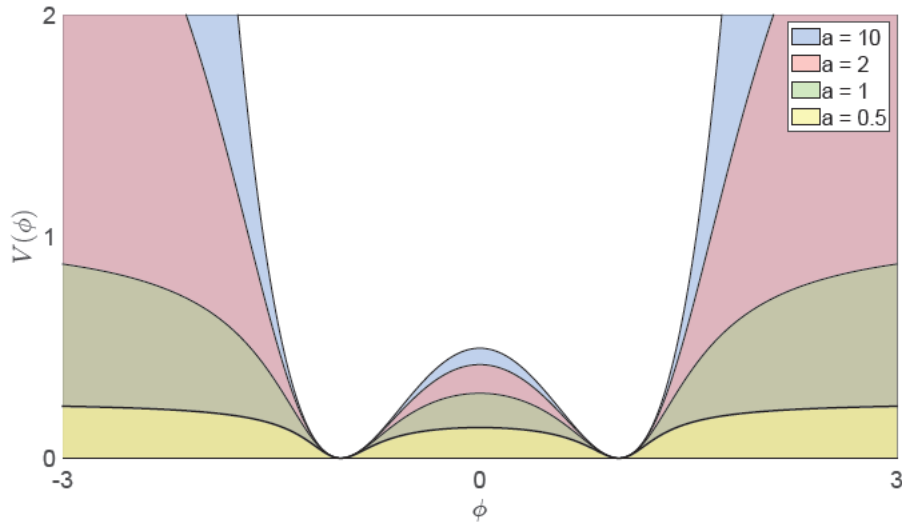


Figura 2.10 Potencial do modelo ϕ^4 DBI (2.144) para diferentes valores de a .

Além deste, outros modelos foram analisados no artigo [48], bem como um procedimento de deformação e a análise de estabilidade linear de cada solução. Porém, não nos aprofundamos nessas discussões no presente trabalho.

Modelos de dois Campos Escalares Reais

Neste capítulo, investigamos modelos com dois campos escalares reais ϕ e χ acoplados. Para isso, consideramos um sistema em $(1+1)$ dimensões do espaço-tempo, com a assinatura da métrica dada por $\text{diag}(+, -)$ e descrito pela densidade Lagrangiana [49]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - V(\phi, \chi), \quad (3.1)$$

em que $V(\phi, \chi)$ é a densidade de energia potencial do modelo. Aqui, utilizamos a mesma nomenclatura do capítulo anterior e, portanto, denominamos essa função simplesmente como potencial. Este é o termo que dita as auto-interações dos campos e como $\phi(x, t)$ e $\chi(x, t)$ são acoplados.

As equações de movimento são calculadas a partir da equação de Euler-Lagrange associada a cada campo, definidas na equação (2.8). Assim, obtemos como resultado

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi = -V_\phi, \quad (3.2a)$$

$$\partial_\mu \partial^\mu \chi = -V_\chi, \quad (3.2b)$$

que para o caso estático são reduzidas a

$$\phi'' = V_\phi, \quad (3.3a)$$

$$\chi'' = V_\chi. \quad (3.3b)$$

Como o único termo de acoplamento entre os campos presente nessa teoria depende do potencial, se este for separado na soma $V(\phi, \chi) = V_1(\phi) + V_2(\chi)$, as equações de movimento serão desacopladas e, como consequência, teremos a descrição de dois modelos de um único campo. Portanto, é essencial para a investigação de novos resultados físicos que o potencial seja acoplado. Assumimos também que $V(\phi, \chi)$ é uma função não-negativa cujos mínimos globais são pares ordenados (ϕ_i, χ_i) no espaço dos campos, que satisfazem a relação $V(\phi_i, \chi_i) = 0$. Fisamos que, assim como mencionamos no capítulo anterior, supor que o menor valor do potencial é zero não faz a teoria perder generalidade. Nessa descrição, dois mínimos globais do potencial (ϕ_i, χ_i) e (ϕ_j, χ_j) definem um setor topológico.

Devido à invariância translacional presente na teoria, é possível definir um tensor energia-momento conservado a partir da equação (2.14). Para o modelo analisado, este é dado por

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi + \partial^\mu \chi \partial^\nu \chi - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (3.4)$$

Nesse caso, as componentes desse tensor são

$$T^{00} = \rho = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} \phi'^2 + \frac{1}{2} \dot{\chi}^2 + \frac{1}{2} \chi'^2 + V(\phi, \chi), \quad (3.5a)$$

$$T^{11} = \sigma = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} \phi'^2 + \frac{1}{2} \dot{\chi}^2 + \frac{1}{2} \chi'^2 - V(\phi, \chi), \quad (3.5b)$$

$$T^{10} = T^{01} = -\dot{\phi} \phi' - \dot{\chi} \chi', \quad (3.5c)$$

onde a igualdade dos termos T^{10} e T^{01} reflete a preservação da simetria de Lorentz da teoria.

Para estabelecer o formalismo de Bogomol'nyi, utilizamos a metodologia padrão: Reescrever o funcional de energia com o objetivo de encontrar um limite inferior topológico para o mesmo, sendo este saturado quando as soluções estáticas satisfazem as equações de Bogomol'nyi e o potencial for escrito de maneira particular. Para esse fim, introduzimos a função auxiliar $W(\phi, \chi)$ de tal forma que

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \rho, \quad (3.6a)$$

$$\rho = \frac{1}{2}(\dot{\phi}^2 + \dot{\chi}^2) + \frac{1}{2}(\phi' \mp W_\phi)^2 + \frac{1}{2}(\chi' \mp W_\chi)^2 + \left(V - \frac{1}{2}W_\phi^2 - \frac{1}{2}W_\chi^2\right) \pm \frac{dW}{dx}. \quad (3.6b)$$

Nesse caso, para minimizarmos a energia precisamos que as soluções sejam estáticas ($\dot{\phi} = \dot{\chi} = 0$) e as relações abaixo garantidas

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2}W_\phi^2 + \frac{1}{2}W_\chi^2, \quad (3.7a)$$

$$\phi' = \pm W_\phi, \quad (3.7b)$$

$$\chi' = \pm W_\chi. \quad (3.7c)$$

Para essa escolha de $V(\phi, \chi)$ é possível constatar que as equações de primeira ordem satisfazem as equações de movimento se, e somente se, $W_{\phi\chi} = W_{\chi\phi}$, condição atendida sempre que a função $W(\phi, \chi)$ possuir segunda derivada bem definida. Além disso, é importante perceber que as relações (3.7) satisfazem a condição de estresse nulo ($\sigma = 0$) para soluções estáticas e, conseqüentemente, a imposição feita pelo teorema de Derrick de que $E_G = E_P$. Também é válido destacar que os sinais nas equações de primeira ordem para ϕ e χ devem ser iguais [36], para que seja possível realizar o formalismo de primeira ordem. Caso contrário, não seria possível construir o termo dW/dx , essencial para estabelecer o caráter topológico da energia de Bogomol'nyi.

Portanto, a energia das soluções BPS será simplesmente

$$E_B = |W(\phi(\infty), \chi(\infty)) - W(\phi(-\infty), \chi(-\infty))|. \quad (3.8)$$

Assim, como encontrado para modelos de um campo escalar real, temos que a energia das soluções BPS depende apenas do comportamento assintótico da função $W(\phi, \chi)$ e não do comportamento local dos campos. Observe que, ao escrever o potencial como mostrado em (3.7a), esta função é necessariamente não-negativa e os seus mínimos globais são calculados ao resolver o sistema de equações $W_\phi = 0$ e $W_\chi = 0$.

Ao compararmos modelos de dois campos escalares reais a modelos com um único campo escalar real, observamos que a complexidade na obtenção de soluções topológicas para as equações de movimento aumenta significativamente. Isso se deve à substituição de uma equação diferencial ordinária de segunda ordem (2.28) por um sistema de duas equações diferenciais ordinárias acopladas de segunda ordem (3.3). Como não existe na literatura uma maneira estruturada e genérica para resolver esse tipo de sistema analiticamente, é evidente que esforços foram direcionados ao desenvolvimento de metodologias capazes de encontrar ao menos algumas soluções para esse problema.

Nesse contexto, no fim dos anos 70, R. Rajaraman apresentou uma abordagem sistemática para obter soluções das equações de movimento em modelos com dois campos escalares reais acoplados [50]. Embora o método desenvolvido por ele possa ser aplicado a qualquer modelo

de dois campos escalares reais em $(1 + 1)$ dimensões, ele será útil apenas em alguns casos e, mesmo quando funcionar, permitirá a obtenção de apenas algumas das soluções das equações de movimento. O método baseia-se na seleção de um setor topológico, a partir do qual se supõe uma órbita $F(\phi, \chi) = 0$, que conecta os mínimos globais do potencial que definem esse setor e satisfaz a equação de movimento. Essa órbita é utilizada para desacoplar as equações de movimento, facilitando assim a resolução do problema. Caso a órbita escolhida falhe em conectar os mínimos globais do potencial ou não satisfaça a equação de movimento dos campos, devemos escolher uma nova órbita e repetir o método. Por essa razão, o método ficou conhecido como *método das órbitas tentativas*.

Posteriormente em [51], os autores apresentaram uma forma de aplicação do método desenvolvido por Rajaraman às equações de primeira ordem, obtendo com isso soluções BPS para o modelo. Nessa seção desenvolvemos a metodologia aplicada às equações de primeira ordem e suas consequências

3.1 Método das órbitas tentativas

Seja uma teoria de dois campos escalares reais, ϕ e χ , definidos em $(1 + 1)$ dimensões espaço-temporais com métrica de Minkowski de assinatura $(+, -)$. Supomos que esse modelo admite formalismo de primeira ordem e, por conta disso, o potencial pode ser escrito como mostrado na equação (3.7a). Para a aplicação do método das órbitas tentativas devemos seguir 3 etapas:

- Primeiramente, é necessária a escolha do setor topológico a ser investigado. Isso é feito definindo os pares (ϕ_i, χ_i) e (ϕ_j, χ_j) de mínimos globais do potencial. Com isso, estamos buscando por soluções que interpolem entre esses valores.
- Posteriormente, é necessário selecionar uma órbita $F(\phi, \chi) = 0$, que conecte os mínimos que definem o setor topológico escolhido. Ou seja, uma órbita que satisfaça $F(\phi_i, \chi_i) = F(\phi_j, \chi_j) = 0$. Na expressão da órbita, adicionamos alguns parâmetros reais que servem para ajustá-la ao setor topológico definido.
- Por fim, é testada a correspondência entre a órbita selecionada $F(\phi, \chi)$ e as equações de primeira ordem (3.7b, 3.7c). Para avaliar essa relação, devemos diferenciar $F(\phi, \chi)$ com respeito a x , obtendo

$$F_\phi \phi' + F_\chi \chi' = 0, \quad (3.9)$$

e então substituir as equações de primeira-ordem na expressão acima, resultando em

$$F_\phi W_\phi + F_\chi W_\chi = 0. \quad (3.10)$$

Então, comparamos o resultado acima com a equação que define a órbita $F(\phi, \chi) = 0$ e vemos se é possível estabelecer uma correlação entre elas, ou seja, se é possível ajustar os parâmetros para que essas relações sejam correspondentes. Caso seja possível, utilizamos $F(\phi, \chi)$ para desacoplar as equações de primeira ordem e resolver o sistema de equações diferenciais. Caso não seja, devemos supor uma nova órbita e repetir as etapas deste método.

Como exemplo, aplicamos a metodologia desenvolvida acima a um modelo conhecido. Consideramos a função auxiliar $W(\phi, \chi)$ como sendo [52, 53]

$$W(\phi, \chi) = \phi - \frac{1}{3}\phi^3 - r\phi\chi^2. \quad (3.11)$$

Devido à referência [53], esse modelo ficou conhecido como modelo BNRT (Bazeia-Nascimento-Ribeiro-Toledo). O parâmetro real r é responsável por modular a intensidade do acoplamento entre os campos e por esse motivo, não consideramos o caso em que $r = 0$. Dessa forma, o potencial (3.7a) é reescrito como

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2} (1 - \phi^2 - r\chi^2)^2 + 2r^2\phi^2\chi^2, \quad (3.12)$$

cujos mínimos são $(\pm 1, 0)$ para $r < 0$, ou $(\pm 1, 0)$ e $(0, \pm 1/\sqrt{r})$ caso $r > 0$, como mostrado na figura 3.1.

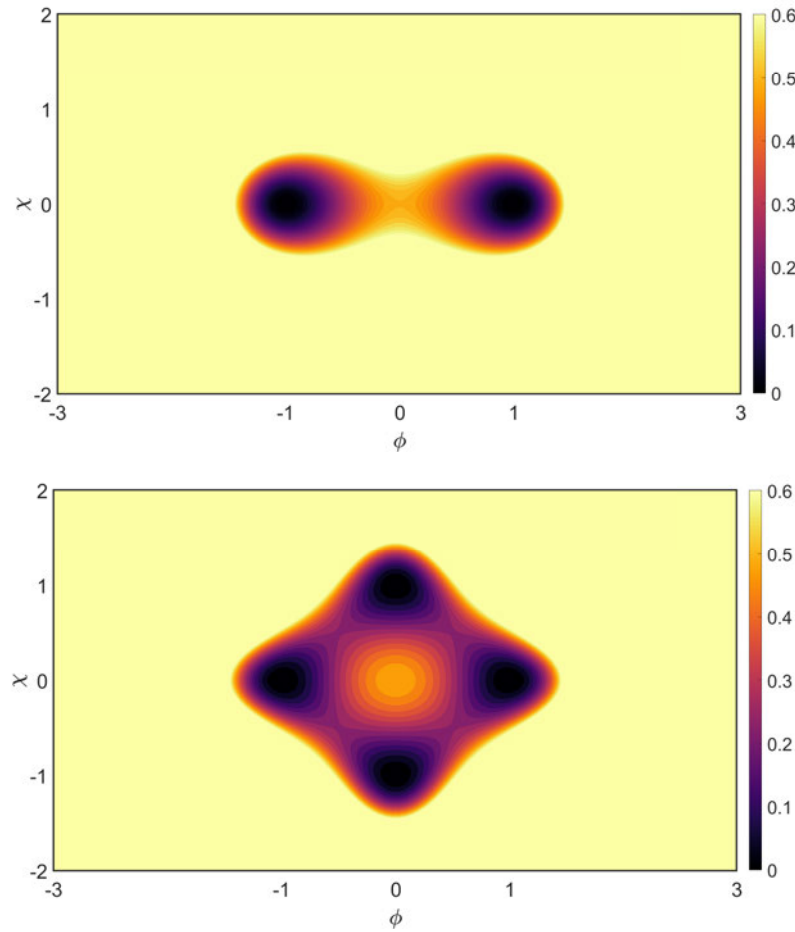


Figura 3.1 Potencial do modelo BNRT (3.12) para $r = -1$ (painel de cima) e $r = 1$ (potencial de baixo).

Daqui em diante, vamos considerar apenas os casos em que $r > 0$. Para essa escolha temos a presença de 6 setores topológicos na teoria, sendo um setor não-BPS de energia nula conectando os mínimos $(0, -1/\sqrt{r})$ e $(0, 1/\sqrt{r})$, um setor BPS de energia $4/3$ conectando $(-1, 0)$ e $(1, 0)$ e 4 setores BPS de energia $2/3$ conectando os demais mínimos. O motivo para o setor topológico $(0, -1/\sqrt{r}) \leftrightarrow (0, 1/\sqrt{r})$ ser não-BPS ficará claro na próxima seção 3.2, onde apresentamos o método do fator integrante.

As equações de primeira ordem (3.7b) e (3.7c) adquirem respectivamente a forma

$$\phi' = \pm (1 - \phi^2 - r\chi^2), \quad (3.13a)$$

$$\chi' = \mp 2r\phi\chi. \quad (3.13b)$$

Para a aplicação do método das órbitas tentativas, devemos primeiramente determinar um setor topológico a ser analisado. Escolhemos aquele definido pelos mínimos $(-1, 0)$ e $(1, 0)$. Em seguida, selecionamos como possível órbita a relação

$$a\phi^2 + b\chi^2 + 1 = 0, \quad (3.14)$$

em que a e b são parâmetros reais. Essa órbita pode representar no espaço de campos uma circunferência, uma elipse, uma hipérbole ou ainda resultar em soluções complexas, a depender da escolha dos parâmetros. Para que essa órbita contenha os mínimos $(\pm 1, 0)$, substituímos esses valores na equação (3.14) e encontramos que a deve ser igual a -1 . Agora, devemos substituir W_ϕ e W_χ na expressão (3.10), obtendo após algumas manipulações algébricas

$$-\phi^2 + r(2b - 1)\chi^2 + 1 = 0. \quad (3.15)$$

Comparando a expressão acima com a relação (3.14), encontramos que $b = r/(2r - 1)$. Portanto, para que exista uma correspondência entre as equações de primeira ordem e a órbita, esta deve obedecer

$$\phi^2 + \frac{r}{1 - 2r}\chi^2 = 1, \quad (3.16)$$

conectando os mínimos $(\pm 1, 0)$ se, e somente se, $0 < r < 1/2$. Caso r seja nulo, a órbita resultará em duas retas verticais, uma em $\phi = 1$ e outra em $\phi = -1$. Por outro lado, caso r assumo um valor diferente dos citados acima, a órbita será hiperbólica com vértices localizados em $(\pm 1, 0)$, e por conta disso não conectará os mínimos do potencial.

A órbita (3.16) nos permite desacoplar as equações de primeira ordem, e então buscar por soluções analíticas para os campos. Substituindo (3.16) na equação de primeira ordem (3.13a), obtemos que

$$\phi' = \pm 2r(1 - \phi^2), \quad (3.17)$$

onde esta equação corresponde à equação de primeira ordem para o modelo $\lambda\phi^4$ (2.52), ao considerarmos $\lambda = 2r$ e $v = 1$. Portanto, sua solução é

$$\phi(x) = \pm \tanh(2r(x - x_0)), \quad (3.18)$$

e lembramos que x_0 é uma constante de integração. Logo, substituindo esse resultado na equação (3.16), obtemos

$$\chi(x) = \pm \sqrt{\frac{1 - 2r}{r}} \operatorname{sech}(2r(x - x_0)). \quad (3.19)$$

As soluções desse modelo foram representadas na figura 3.2, tomando o sinal positivo e avaliando diferentes valores de r . Consideramos em todos os casos $x_0 = 0$, já que este parâmetro realiza apenas uma translação horizontal nas soluções.

Vale a pena destacar que, apesar da solução $\chi(x)$ interpolar entre valores iguais e, por conta disso, apresentar um comportamento tipo lump, o par de soluções $(\phi(x), \chi(x))$ é topológico, já que este conecta mínimos diferentes do potencial. O comportamento não-monotônico de $\chi(x)$ já poderia ser previsto quando os mínimos $(\pm 1, 0)$ foram escolhidos, uma vez que eles estão associados a um mesmo valor de χ . Além disso, é possível perceber que quando $r \rightarrow 1/2$ a solução $\chi(x)$ tende a uma constante e, desse forma, a órbita elíptica é degenerada em uma órbita reta.

Podemos ainda buscar por soluções em outros setores topológicos do sistema, como aqueles definidos pelos mínimos $(\pm 1, 0)$ e $(0, \pm 1/\sqrt{r})$. Nesse caso, uma escolha conveniente para a órbita é $r\chi^2 = 1 \pm \phi$, onde o sinal de ϕ está relacionado ao setor topológico sob análise [51].

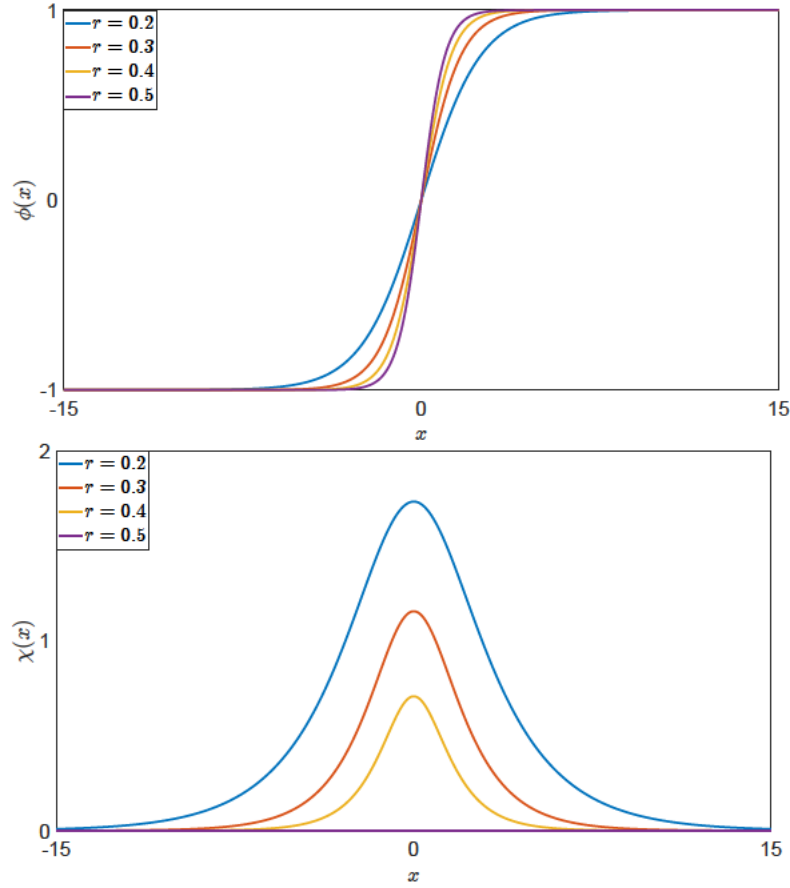


Figura 3.2 Soluções $\phi(x)$ (3.18) e $\chi(x)$ (3.19) do modelo BNRT para diversos valores de r , com $x_0 = 0$.

O sinal positivo está associado aos setores topológicos $(-1, 0) \leftrightarrow (0, \pm 1/\sqrt{r})$, enquanto o sinal negativo é referente aos setores $(1, 0) \leftrightarrow (0, \pm 1/\sqrt{r})$.

Seguimos a metodologia desenvolvida até aqui e substituímos W_ϕ e W_χ na relação (3.10). Após algumas manipulações, percebemos que

$$r\chi^2 = 1 - \phi^2 \pm 4r^2\phi\chi^2. \quad (3.20)$$

Substituindo na equação acima a expressão da órbita, obtemos que

$$\phi(1 \pm \phi - 4r^2\chi^2) = 0, \quad (3.21)$$

onde a correspondência entre a órbita escolhida e as equações de primeira ordem ocorre apenas quando $r = 1/4$. Logo, a equação para a órbita é $\chi^2 = 4(1 \pm \phi)$ e ao ser substituída na equação de primeira ordem (3.13a), temos que

$$\phi' = \mp \phi(1 \pm \phi). \quad (3.22)$$

Encontramos como solução

$$\phi(x) = \frac{1}{\mp 1 + e^{\pm(x-x_0)}}, \quad (3.23)$$

em que o par de sinais associados à exponencial advém do par de sinais fora do parênteses na expressão (3.22). Para representar a solução $\phi(x)$ como aparece na literatura, utilizamos a relação

$$\frac{1}{\mp 1 + e^{\pm(x-x_0)}} = \mp \frac{1}{2} \left(1 \mp \tanh \left(\frac{1}{2}(x-x_0) \right) \right). \quad (3.24)$$

Nessa caso, as soluções para o campo ϕ são [36]

$$\phi_{\mp\mp} = \mp \frac{1}{2} \left(1 \mp \tanh \left(\frac{1}{2} (x - x_0) \right) \right). \quad (3.25)$$

onde os sinais devem ser escolhidos cuidadosamente, baseados no setor topológico analisado e no comportamento de kink ou anti-kink. Substituindo o resultado acima na expressão da órbita, encontramos que a solução $\chi(x)$ deve ser tal que

$$\chi_{\pm\pm} = \pm \sqrt{2 \left(1 \pm \tanh \left(\frac{1}{2} (x - x_0) \right) \right)}. \quad (3.26)$$

Diante do exposto acima, fica evidente que o método das órbitas tentativas é útil para desacoplar as equações de primeira ordem e buscar por soluções em setores topológicos determinados. Porém, esse método fundamenta-se em uma hipótese preliminar para a forma da órbita $F(\phi, \chi)$ e, por conta disso, sua aplicabilidade se torna limitada em sistemas mais complexos cujas órbitas diferem das configurações mais simples, como circunferências, elipses ou arcos de parábola. Nessas condições, o método perde eficácia, tornando necessária a elaboração de uma abordagem mais geral para a obtenção de soluções para esse tipo de sistema. Por isso, na próxima seção, apresentamos o método do fator integrante.

3.2 Método do fator integrante

O método do fator integrante é utilizado, no contexto de modelos de dois campos escalares reais, para obter o conjunto mais geral de soluções para as equações de Bogomol'nyi [54]. A partir da aplicação desse método, somos capazes de construir uma família de órbitas compatível com o modelo analisado, sendo desnecessária a suposição de órbitas, etapa fundamental para o método das órbitas tentativas. Devido a isso, este é um método eficaz quando nos propomos a resolver problemas cujas órbitas não são curvas simples. Apesar das vantagens do método, nem sempre é possível obter o fator integrante analiticamente [22], fato que compromete a utilização do mesmo de forma genérica.

Para a aplicação do método, partiremos das equações de Bogomol'nyi (3.7b) e (3.7c), e as reescreveremos eliminando a dependência em x . Dessa forma

$$W_\chi d\phi - W_\phi d\chi = 0. \quad (3.27)$$

O método do fator integrante consiste em multiplicar a equação acima por uma função arbitrária $I(\phi, \chi)$, denominada fator integrante, a fim de transformá-la em uma diferencial exata [22]. Nesse caso, uma condição necessária e suficiente para que $I(\phi, \chi)$ seja fator integrante da equação acima é que este obedeça a relação [55]

$$\frac{\partial}{\partial \chi} (W_\chi I) = -\frac{\partial}{\partial \phi} (W_\phi I). \quad (3.28)$$

A partir da definição do fator integrante, podemos construir uma órbita geral $Z(\phi, \chi) = 0$, tal que esta resolva a equação (3.27). Para isso, a órbita deve obedecer as relações

$$\frac{\partial Z}{\partial \phi} = W_\chi I, \quad (3.29a)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \chi} = -W_\phi I. \quad (3.29b)$$

Para entender melhor o funcionamento deste método, o aplicamos no já definido modelo BNRT (3.11). Para isso, reescrevemos as equações de primeira ordem obtidas em (3.13), eliminando a dependência de x

$$2r\phi\chi d\phi + (1 - \phi^2 - r\chi^2) d\chi = 0, \quad (3.30)$$

onde para definirmos o fator integrante, utilizamos relação (3.28). Com o objetivo de simplificar os cálculos, supomos que I é uma função que depende apenas de um dos campos. Reiteramos que esta é uma função que pode depender dos dois campos, mas para o modelo BNRT esta é uma simplificação bastante útil. Dessa forma, supomos que $I(\phi, \chi) = I(\chi)$, logo

$$(r+1)I + r\chi I_\chi = 0, \quad (3.31)$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{dI}{I} = -\frac{r+1}{r} \frac{d\chi}{\chi}. \quad (3.32)$$

Integrando a relação acima, obtemos como fator integrante

$$I(\chi) = C_1 \chi^{-(r+1)/r}, \quad (3.33)$$

onde C_1 é uma constante de integração, que consideramos como $C_1 = 1$. Agora, para definirmos a órbita, utilizamos a equação (3.29a)

$$Z_\phi = 2r\phi\chi^{-1/r}, \quad (3.34)$$

em que o subíndice associado à órbita representa uma derivada parcial com relação à variável do subíndice. Integrando a relação acima, obtemos que

$$Z(\phi, \chi) = r\phi^2\chi^{-1/r} + F(\chi), \quad (3.35)$$

onde $F(\chi)$ é uma constante de integração e $Z(\phi, \chi)$ é a expressão geral para a órbita. Perceba que, para determinarmos completamente a órbita precisamos definir a função $F(\chi)$. Para isso, derivamos a expressão acima com relação χ

$$Z_\chi = -\phi^2\chi^{-(r+1)/r} + F_\chi. \quad (3.36)$$

Agora, calculamos Z_χ a partir da equação (3.29b)

$$Z_\chi = -\phi^2\chi^{-(r+1)/r} + \chi^{-(r+1)/r} - r\chi^{(r-1)/r}. \quad (3.37)$$

Dessa forma, ao comparar a expressão acima com a equação (3.36), obtemos que

$$F_\chi = \chi^{-(r+1)/r} - r\chi^{(r-1)/r}. \quad (3.38)$$

Portanto, integrando a relação acima com relação a χ conseguimos a expressão para a função

$$F(\chi) = -r\chi^{-1/r} - \frac{r^2}{2r-1}\chi^{(2r-1)/r} + C, \quad (3.39)$$

onde C é uma constante de integração. Por fim, obtemos que a órbita mais geral para o modelo BNRT (3.35) é dada por

$$Z(\phi, \chi) = r\phi^2\chi^{-1/r} - r\chi^{-1/r} - \frac{r^2}{2r-1}\chi^{(2r-1)/r} + C = 0. \quad (3.40)$$

Rearranjando os termos acima e redefinindo a constante de integração, obtemos como expressão final para a órbita

$$\phi^2 = 1 + \frac{r}{2r-1}\chi^2 + C\chi^{1/r}. \quad (3.41)$$

Perceba que as órbitas que supomos ao desenvolver o método das órbitas tentativas são casos particulares da órbita geral obtida a partir do método do fator integrante. A expressão acima também evidencia o fato do setor $(0, 1/\sqrt{r}) \leftrightarrow (0, -1/\sqrt{r})$ ser não-BPS, já que não existe valor para os parâmetros r e C que forneça uma órbita que conecte esses mínimos. Na figura 3.3 ilustramos algumas órbitas para $r = 1/4$. A partir dela, percebemos que a contante de integração C controla a forma da órbita. Particularmente para $C = 1/16$, temos órbitas nos setores $(\pm 1, 0) \leftrightarrow (0, \pm 1/\sqrt{r})$, assim como havíamos encontrado na subseção anterior. Vale ressaltar que quando $C \rightarrow -\infty$ a órbita é degenerada em uma linha reta, conectando os mínimos $(\pm 1, 0)$.

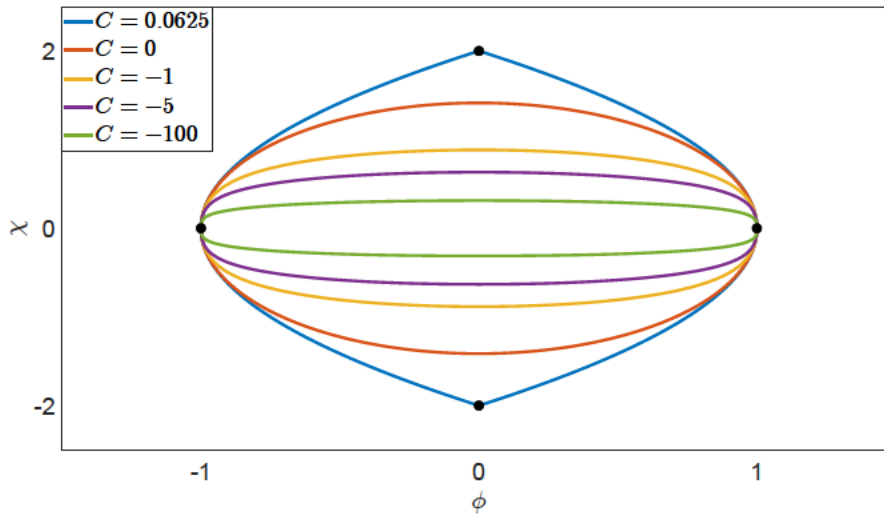


Figura 3.3 Órbitas do modelo BNRT (3.41) para diferentes valores de C , em todas as curvas consideramos $r = 1/4$.

3.3 Constrição Geométrica

O acoplamento realizado a partir da função potencial $V(\phi, \chi)$ não é a única maneira para estabelecer uma interação entre os campos ϕ e χ . Uma alternativa consiste na introdução da função $f(\chi)$ no termo cinemático do campo ϕ , sendo esta responsável por um novo acoplamento entre os campos [13, 14, 56–58]. Nesse contexto, é possível a investigação de modelos em que o potencial é separado na soma $V(\phi, \chi) = V_1(\phi) + V_2(\chi)$, situação que desacopla os campos nos modelos discutidos até aqui. Além disso, devido a alteração que a função $f(\chi)$ realiza na dinâmica do campo ϕ , este poderá sofrer modificações tanto na estrutura interna de suas soluções [56, 57], quanto em seus valores assintóticos [13, 14], a depender de como a função $f(\chi)$ é definida.

A densidade Lagrangiana que descreve essa possibilidade é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}f(\chi)\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \partial_\mu\chi\partial^\mu\chi - V(\phi, \chi), \quad (3.42)$$

onde a função $f(\chi)$ deve ser não negativa, restrição que será justificada posteriormente. Se considerarmos $f(\chi) = 1$, retornamos à situação usual (3.1). A equação de movimento associada

a esse modelo é obtida a partir das equações de Euler-Lagrange, definidas na equação (2.8). Dessa forma, obtemos

$$\partial_\mu (f(\chi) \partial^\mu \phi) + V_\phi = 0, \quad (3.43a)$$

$$\partial_\mu \partial^\mu \chi + V_\chi - \frac{1}{2} f_\chi \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi = 0, \quad (3.43b)$$

que, no caso estático, são reduzidas a

$$\frac{d}{dx} (f(\chi) \phi') = V_\phi, \quad (3.44a)$$

$$\chi'' - \frac{1}{2} f_\chi \phi'^2 = V_\chi. \quad (3.44b)$$

Devido à invariância translacional do modelo, podemos definir um tensor energia-momento conservado, a partir da equação (2.14). Nesse caso, obtemos

$$T^{\mu\nu} = f(\chi) \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi + \partial^\mu \chi \partial^\nu \chi - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (3.45)$$

Considerando o caso estático, as únicas componentes não nulas desse tensor são a densidade de energia e o estresse, definidos respectivamente como

$$T^{00} = \rho = \frac{1}{2} f(\chi) \phi'^2 + \frac{1}{2} \chi'^2 + V(\phi, \chi), \quad (3.46a)$$

$$T^{11} = \sigma = \frac{1}{2} f(\chi) \phi'^2 + \frac{1}{2} \chi'^2 - V(\phi, \chi). \quad (3.46b)$$

A restrição de não negatividade imposta sobre a função $f(\chi)$ deve ser tomada para assegurar que a energia das soluções seja não negativa e, portanto, bem definida. Para implementar o formalismo de primeira ordem seguimos o expediente usual, sendo necessária a adição da função auxiliar $W(\phi, \chi)$ à densidade de energia, de tal forma que

$$\rho = \frac{f(\chi)}{2} \left(\phi' \mp \frac{W_\phi}{f(\chi)} \right)^2 + \frac{1}{2} (\chi' \mp W_\chi)^2 + \left(V - \frac{1}{2} \frac{W_\phi^2}{f(\chi)} - \frac{1}{2} W_\chi^2 \right) \pm \frac{dW}{dx}, \quad (3.47a)$$

$$E \geq E_B = |W(\phi(\infty), \chi(\infty)) - W(\phi(-\infty), \chi(-\infty))|. \quad (3.47b)$$

Para garantirmos que o limite inferior E_B seja atingido, devemos assegurar que

$$\phi' = \pm \frac{W_\phi}{f(\chi)}, \quad (3.48a)$$

$$\chi' = \pm W_\chi, \quad (3.48b)$$

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2} \frac{W_\phi^2}{f(\chi)} + \frac{1}{2} W_\chi^2, \quad (3.48c)$$

onde novamente os sinais das equações de Bogomol'nyi devem concordar, para que seja possível estabelecer um vínculo topológico para a energia. As equações de primeira ordem acima satisfazem as equações de movimento (3.44) sempre que $W_{\phi\chi} = W_{\chi\phi}$. Apesar do aparecimento da função $f(\chi)$ na equação de primeira ordem e na expressão do potencial, a energia da solução dependerá apenas dos valores assintóticos dos campos. Dessa forma, se não houver alteração desses valores, a energia da solução não será alterada. Note que, para configurações que satisfazem as equações de primeira ordem o estresse é nulo ($\sigma = 0$), condição necessária para que as soluções sejam estáveis por reescala [56].

A partir da equação de primeira ordem (3.48a) percebemos que, caso a função $f(\chi(x))$ seja assintoticamente igual a 1, o comportamento assintótico da função $\phi(x)$ será preservado. Nessa situação, não existem modificações importantes nas caudas da solução e, conseqüentemente, a energia das soluções BPS é preservada [57]. Caso contrário, haverá mudanças no comportamento assintótico da solução e, devido a isso, haverá alteração na energia da solução [13, 14].

Este modelo torna-se particularmente interessante quando consideramos o caso em que a função auxiliar pode ser separada na soma $W(\phi, \chi) = W_1(\phi) + W_2(\chi)$. Nesse contexto a equação de primeira ordem para o campo χ torna-se independente do campo ϕ , podendo então ser resolvida como uma equação de primeira ordem para modelos de um único campo, desenvolvidos no capítulo 2. Agora, esta solução, denominada χ_s , altera o comportamento do campo ϕ a partir da função $f(\chi)$. A equação (3.48a) pode ser rearranjada como

$$\frac{d\phi}{W_\phi} = \pm \frac{dx}{f(\chi_s)}, \quad (3.49)$$

cujas solução será $\phi_s = \phi(\varepsilon(x))$, em que

$$\varepsilon(x) = \int \frac{dx}{f(\chi_s)}, \quad (3.50)$$

que responderá como um vínculo geométrico imposto pelo campo χ sobre o campo ϕ e, por conta disso, denominamos $f(\chi)$ como função de constrição geométrica. Portanto, é possível reescrever a equação de primeira ordem (3.48a) em função da nova variável de constrição $\varepsilon(x)$ como

$$\frac{d\phi}{d\varepsilon} = W_\phi, \quad (3.51)$$

sendo essa a equação de primeira ordem correspondente a uma teoria usual de um único campo, porém em um espaço parametrizado pela variável $\varepsilon(x)$. As novas estruturas que emergem nos modelos dessa classe só são evidentes quando retornamos à variável x , sendo uma consequência direta da inserção do kink em um espaço com geometria distinta [36]. Porém, um questionamento que pode surgir a partir disso é: se substituirmos a solução χ_s da equação de primeira ordem na função de constrição, obtendo $f(\chi_s(x))$, seria possível emular os resultados da constrição geométrica a partir da inclusão de uma função $f(x)$ na densidade Lagrangiana, sem a necessidade de inclusão de um segundo campo na teoria? A resposta é não, visto que, incluir um segundo campo escalar real nos permite realizar a constrição geométrica sem quebrar a simetria translacional do modelo, o que seria por construção impossível com a inclusão de $f(x)$ [60].

A escolha feita para a função auxiliar também nos permite escrever a densidade de energia como

$$\rho(\phi, \chi) = \frac{W_\phi^2}{f(\chi)} + W_\chi^2 = \rho_1(\phi, \chi) + \rho_2(\chi). \quad (3.52)$$

Dessa maneira, qualquer novo comportamento que possa surgir na densidade de energia deve vir exclusivamente do termo ρ_1 . Portanto, ao discutirmos modelos específicos, concentraremos a análise da densidade de energia unicamente nesse termo.

3.3.1 Modelo 4 – 4

Para exemplificar o que foi exposto até aqui e entender o papel das funções e parâmetros dessa teoria, desenvolvemos o primeiro modelo discutido na referência [56]. Nele, definimos

$f(\chi) = 1/\chi^2$ e tomamos a função auxiliar como

$$W(\phi, \chi) = \phi - \frac{1}{3}\phi^3 + \alpha\chi - \frac{1}{3}\alpha\chi^3, \quad (3.53)$$

onde α é um parâmetro real. Como esta função auxiliar une os modelos ϕ^4 e χ^4 , denominamos este de modelo 4 – 4. A partir dessa subseção seguimos essa lógica na nomeação de modelos, em que a informação à esquerda diz respeito a parte ϕ do modelo analisado, enquanto aquela à direita representa a parcela χ do mesmo modelo. O potencial (3.48c) pode ser reescrito como

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2}\chi^2(1 - \phi^2)^2 + \frac{1}{2}\alpha^2(1 - \chi^2)^2. \quad (3.54)$$

Os mínimos globais do potencial são definidos pelos pares ordenados $(\phi_{\pm} = \pm 1, \chi_{\pm} = \pm 1)$. Dessa forma, como soluções topológicas de interesse devem interpolar entre esses mínimos, podemos calcular a energia das soluções BPS como $E_B = 4(1 + \alpha)/3$. Perceba que, como $f(\chi(x \rightarrow \pm\infty)) = 1$, a função de constrição não interfere no limite assintótico da solução $\phi(x)$ e, conseqüentemente, não modifica a energia do modelo. Vale ainda lembrar que, como essas soluções são de mínima energia, elas também são necessariamente estáveis.

A equação de primeira ordem para o campo χ (3.48b) toma a forma

$$\chi' = \pm\alpha(1 - \chi^2), \quad (3.55)$$

sendo esta análoga a equação de primeira ordem para o modelo $\lambda\phi^4$, definida em (2.52), considerando $\lambda = \alpha$ e $v = 1$. Portanto, utilizando o sinal positivo a solução é simplesmente $\chi_s = \tanh(\alpha(x - x_0))$, em que a constante de integração x_0 é um parâmetro real que identifica a posição onde $\chi_s = 0$, e $1/|\alpha|$ é proporcional à largura da solução. Substituindo χ_s na equação de primeira ordem para ϕ (3.48a), e tomando o sinal positivo, obtemos

$$\phi' = \tanh^2(\alpha(x - x_0))(1 - \phi^2). \quad (3.56)$$

Assim como mencionado ao expor a metodologia para modelos com constrição geométrica, podemos definir uma nova variável

$$\varepsilon(x) = \int dx \tanh^2(\alpha(x - x_0)) = \varepsilon_0 + x - x_0 - \frac{1}{\alpha} \tanh(\alpha(x - x_0)), \quad (3.57)$$

de tal forma que a solução para a equação diferencial (3.56) é

$$\phi(x) = \tanh(\varepsilon(x)). \quad (3.58)$$

Para evitar confusão com a quantidade de parâmetros, consideramos primeiramente a constante de integração ε_0 nula. Na figura 3.4, retratamos o comportamento da solução $\phi(x)$ com relação aos parâmetros x_0 e α .

Observamos um perfil de duplo kink na solução, similar àquele encontrado experimentalmente em [59]. Percebemos que, a formação do platô ocorre na posição em que o termo $1/f(\chi)$ é nulo, característica realçada quando analisamos a variação dessa posição com relação ao parâmetro x_0 . A formação dessa estrutura interna torna-se evidente quando investigamos a equação (3.56), já que na posição em que $1/f(\chi)$ é nulo, $\phi' = 0$ e na vizinhança desse ponto ϕ' é pequeno. Porém, reforçamos que esse platô não se comporta como um degrau, já que ϕ' é efetivamente nulo em apenas um ponto desta região.

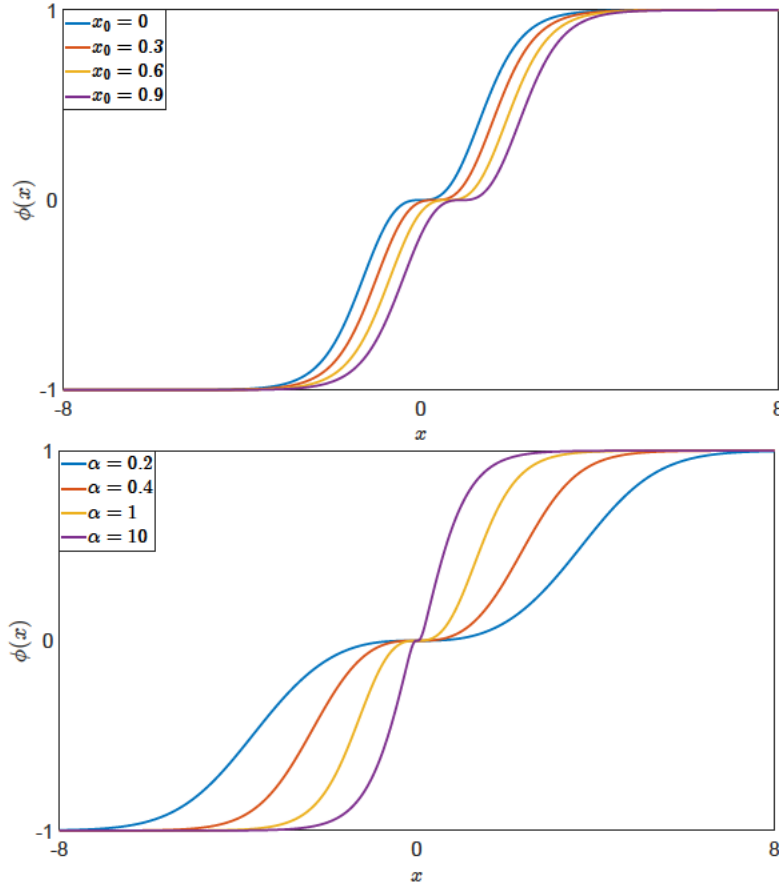


Figura 3.4 Solução $\phi(x)$ (3.58), para diversos valores de x_0 e α . No painel de cima consideramos $\alpha = 1$ e no de baixo $x_0 = 0$.

Outra característica importante emerge quando analisamos a dependência da solução com relação ao parâmetro α , uma vez que à medida que α aumenta, a largura do platô diminui. Esse comportamento ocorre porque um aumento em α reduz a largura de $\chi_s(x)$, o que implica em uma variação mais rápida da solução nessa região.

Como mencionado anteriormente, quando analisamos a densidade de energia, demos destaque apenas ao termo $\rho_1(\phi, \chi)$ definido na equação (3.52). Para o modelo analisado, ρ_1 é escrito como

$$\rho_1(x) = \tanh^2(\alpha(x - x_0)) \operatorname{sech}^4(\varepsilon(x)), \quad (3.59)$$

e seu comportamento está representado na figura 3.5. Com isso, percebemos que a já discutida relação entre os parâmetros α e x_0 , e a solução é realçada. Além disso, nota-se o aparecimento de dois picos na densidade de energia, situação contrastante aos picos únicos apresentados nos modelos discutidos na seção 2.3. Isso ocorre porque nas posições em que existe um platô $\phi' = 0$ e, conseqüentemente, a densidade de energia é nula na mesma posição. Portanto, como $\rho_1(x)$ também é nulo assintoticamente e o seu comportamento é não-trivial, deve existir dois picos na função $\rho_1(x)$, não necessariamente simétricos.

A partir daqui, avaliamos o papel que a constante de integração ε_0 exerce sobre a solução e, conseqüentemente, sobre o termo ρ_1 da densidade de energia. Para isso, representamos $\phi(x)$ e ρ_1 na figura 3.6, onde consideramos $x_0 = 0$ em todos os casos.

Percebemos então que o parâmetro ε_0 atua induzindo uma importante assimetria na solução do campo ϕ , transladando verticalmente o platô para cima (ou para baixo, caso $\varepsilon_0 < 0$) e, em virtude disso, destruindo a simetria com relação à origem que a solução possuía [57]. Como

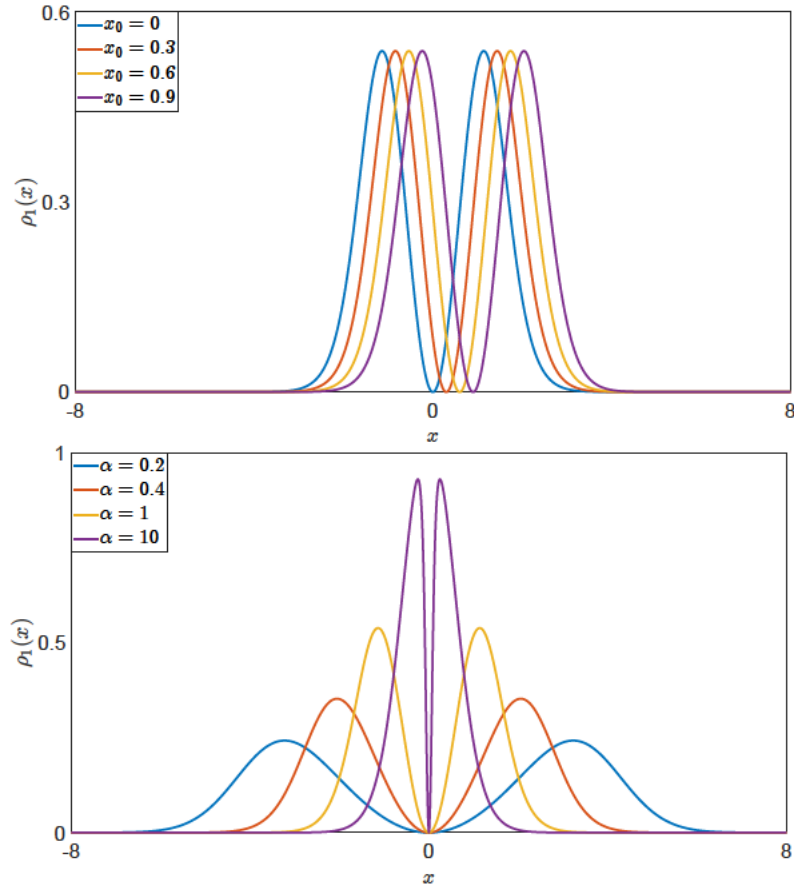


Figura 3.5 Densidade de energia $\rho_1(x)$ (3.59) para diferentes valores de x_0 e α . No painel de cima tomamos $\alpha = 1$ e no de baixo $x_0 = 0$.

consequência, notamos uma modificação na altura dos picos presentes no termo ρ_1 da densidade de energia. Sendo herdado por essa função o mesmo perfil assimétrico com relação à origem presente na solução.

Caso considerássemos ε_0 negativo, o comportamento seria invertido e o pico à direita aumentaria, enquanto aquele à esquerda diminuiria. É importante perceber que a constante de integração ε_0 não influencia $\phi(x)$ e $\rho_1(x)$ de forma similar ao parâmetro x_0 por não contribuir da mesma maneira para o termo x e para o argumento da tangente hiperbólica presentes na expressão (3.57) para $\varepsilon(x)$.

A partir da análise desenvolvida até aqui, percebemos que modificar a largura e posição dos platôs é apenas uma questão de definir as funções $f(\chi)$ e $W(\phi, \chi)$, e os parâmetros α , x_0 e ε_0 de maneira conveniente. Vimos ainda a possibilidade de indução de assimetria na solução, a partir da atuação do parâmetro ε_0 .

Além disso, também é possível construir um modelo que suporte múltiplos platôs, bastando para isso que a função $1/f(\chi_s(x))$ escolhida seja nula em mais de um valor finito de x . Como exemplo, propomos a função de constrição definida por

$$f(\chi) = \frac{1}{(v^2 - \chi^2)^2}, \quad (3.60)$$

onde v é um parâmetro real. Consideramos também a função auxiliar do modelo 4 – 4. Devido a isso, a solução para o campo χ é, como já calculamos, $\chi_s(x) = \tanh(\alpha(x - x_0))$. Então, ao substituir esta solução e a função de constrição geométrica na equação de primeira ordem para

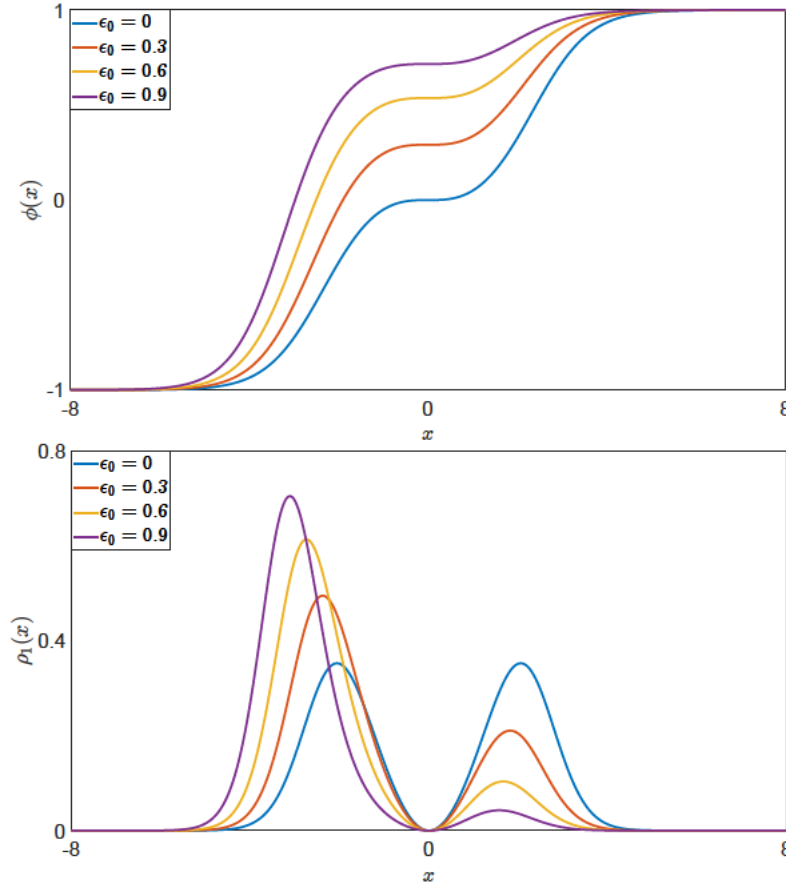


Figura 3.6 Solução $\phi(x)$ (3.58) e densidade de energia $\rho_1(\phi, \chi)$ (3.59) para diferentes valores de ε_0 . Tomamos $x_0 = 0$ e $\alpha = 0.4$.

o campo ϕ (3.48a) e considerar o sinal positivo, obtemos que

$$\phi' = (v^2 - \tanh^2(\alpha(x - x_0)))^2 (1 - \phi^2). \quad (3.61)$$

A solução da equação diferencial acima é

$$\phi(x) = \tanh(\varepsilon(x)), \quad (3.62)$$

em que a nova variável é calculada como

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_0 + (v^2 - 1)^2 (x - x_0) - \frac{1}{3\alpha} [(\tanh(\alpha(x - x_0))) (3 - 6v^2 + \tanh^2(\alpha(x - x_0)))]. \quad (3.63)$$

O termo ρ_1 da densidade de energia é calculado a partir da expressão (3.52). Logo

$$\rho_1(x) = (v^2 - \tanh^2(\alpha(x - x_0)))^2 \operatorname{sech}^4(\varepsilon(x)). \quad (3.64)$$

Como já avaliamos a influência dos parâmetros α , x_0 e ε_0 , apresentamos na figura 3.7 o comportamento da solução $\phi(x)$ e do termo $\rho_1(x)$ apenas com relação à variação do parâmetro v .

Percebemos que o comportamento dessas funções pode ser dividido em 4 situações, caracterizadas pelo valor que o parâmetro v assume. Quando $v = 0$, a função $1/f(\chi_s) = \tanh^4(\alpha(x - x_0))$ é nula apenas quando $x = x_0$. Por conta disso, aparece um único platô na solução $\phi(x)$ e, por

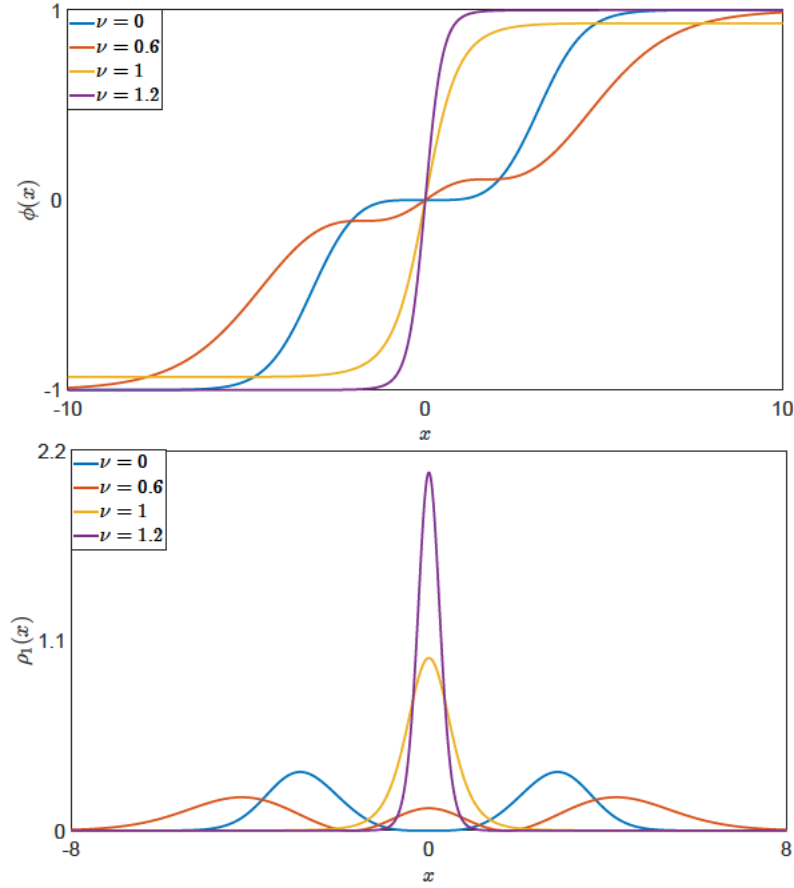


Figura 3.7 Solução $\phi(x)$ (3.62) e $\rho_1(x)$ (3.64) para diferentes valores de ν . Utilizamos $x_0 = 0$, $\alpha = 0.4$ e ε_0 .

consequência, $\rho_1(x)$ apresenta dois picos. Quando $0 < |\nu| < 1$, a função $1/f(\chi_s)$ é nula quando $\chi_s = \pm\nu$ e, devido a isso, a solução do campo ϕ apresenta dois platôs. Logo, a função $\rho_1(x)$ apresenta três picos, sendo a justificativa para o seu aparecimento análoga àquela que demos para o aparecimento de dois picos. Por outro lado, quando $|\nu| > 1$ não existe valor que a solução χ_s possa assumir que torne nula a função $1/f(\chi_s)$, portanto, a solução do campo ϕ não exibe platô. Assim como não existe a formação de platô quando $|\nu| = 1$, já que a função $1/f(\chi_s)$ é nula apenas assintoticamente. Por conta disso, a solução do campo χ modifica de maneira importante apenas as caudas da solução $\phi(x)$. Nos dois casos em que não existe a formação de platô, a função ρ_1 apresenta apenas um pico.

No próximo capítulo exploramos algumas das possibilidades desenvolvidas e analisadas nas referências [13, 14]. Em especial, demos ênfase à constrição geométrica em modelos com função auxiliar acoplada e modelos cuja constrição geométrica modifica os valores assintóticos da solução.

Novos Resultados

4.1 Constrição geométrica em modelos de dois campos

Como consequência direta dos resultados desenvolvidos no artigo [56] e correlatos, resolvemos investigar como a função de constrição geométrica $f(\chi)$ pode influenciar a solução de diferentes modelos, estendendo nossa análise para casos onde a função auxiliar é acoplada. Os resultados dessa investigação foram apresentados no artigo [13] e discutimos aqui alguns dos modelos explorados.

4.1.1 Modelo 4 – 6

Seguindo a nomenclatura que introduzimos no capítulo anterior, a função auxiliar que determina o modelo 4 – 6 é definida como

$$W(\phi, \chi) = \phi - \frac{1}{3}\phi^3 + \frac{1}{2}\alpha\chi^2 - \frac{1}{4}\alpha\chi^4, \quad (4.1)$$

onde o parâmetro α controla a intensidade do campo χ . Dessa maneira, se tomarmos $f(\chi) = 1/\chi^2$, o potencial (3.48c) pode ser reescrito como

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2}\chi^2(1 - \phi^2)^2 + \frac{1}{2}\alpha^2\chi^2(1 - \chi^2)^2. \quad (4.2)$$

Ao analisarmos os mínimos globais do potencial, percebemos que não existem apenas 4 mínimos discretos ($\phi_{\pm} = \pm 1, \chi_{\pm} = \pm 1$), como no modelo 4 – 4 discutido na seção anterior. Existe também uma linha contínua de mínimos em $\chi = 0$ e ϕ arbitrário, que pode ser visualizada claramente na figura 4.1. Em virtude disso, existe a possibilidade de encontrarmos soluções topológicas nesse novo conjunto de mínimos, enriquecendo o modelo analisado.

A equação de primeira ordem (3.48b) para o campo χ , tomando o sinal positivo, é dada por

$$\chi' = \alpha\chi(1 - \chi^2), \quad (4.3)$$

que é exatamente a equação de primeira ordem para o modelo $\lambda\phi^6$ (2.61), se considerarmos $\lambda = \alpha$ e $v = 1$. Portanto, a solução para esse campo é tal que

$$\chi(x) = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \tanh(\alpha(x - x_0)))}, \quad (4.4)$$

em que os sinais da equação acima alteram o setor topológico da solução. Portanto, essa solução interpola entre os valores $0 \leftrightarrow 1$ para o sinal positivo e $0 \leftrightarrow -1$ para o sinal negativo. A equação de primeira ordem para o campo ϕ é, tomando o sinal positivo

$$\phi' = \chi^2(1 - \phi^2). \quad (4.5)$$

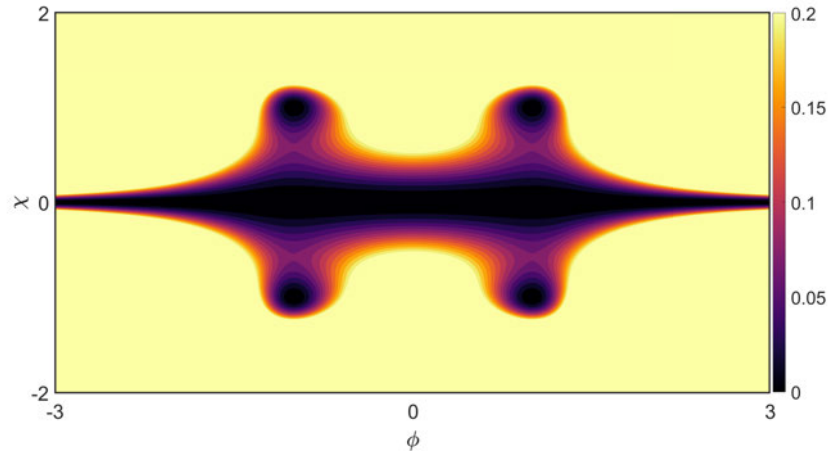


Figura 4.1 Potencial do modelo 4 – 6 (4.2), para $\alpha = 1$.

Como vimos anteriormente, a formação de estruturas internas na solução do campo ϕ ocorre nas posições em que o termo $1/f(\chi)$ for nulo. Porém, quando consideramos a solução (4.4) e a função de constrição escolhida, percebemos que isso só ocorre quando $x \rightarrow -\infty$. Por isso, é esperado que o campo χ modifique significativamente a cauda esquerda da solução $\phi(x)$. No entanto, quando $x \rightarrow \infty$ a função de constrição tende a 1, ou seja, o limite assintótico da cauda direita da solução é preservado. A solução $\phi(x)$ é tal que

$$\phi(x) = \tanh(Z_\alpha(x)), \quad (4.6)$$

onde a nova variável adquire a forma

$$Z_\alpha(x) = \int \frac{1}{2} (1 + \tanh(\alpha(x - x_0))) dx = \varepsilon_0 + \frac{1}{2} \left(x - x_0 + \frac{1}{\alpha} \ln(\cosh(\alpha(x - x_0))) \right), \quad (4.7)$$

em que ε_0 é uma constante de integração. Independente do setor topológico em que $\chi(x)$ está definido, a solução $\phi(x)$ é sempre a mesma, consequência da escolha da função de constrição. As soluções para esse modelo foram expostas na figura 4.2. Não mostramos a influência do parâmetro x_0 , já que este realiza apenas uma translação horizontal na solução.

Como já era previsto, o campo χ exerce uma importante influência na cauda esquerda da solução $\phi(x)$, fazendo com que esta assuma valores intermediários entre 1 e -1 . Isso acontece por conta do termo $Z_\alpha(x)$, que assume o valor constante $\varepsilon_0 - \ln(2)/(2\alpha)$ quando $x \rightarrow -\infty$. Dessa forma, se esse termo constante é negativo, $\phi(x \rightarrow -\infty)$ tenderá a um valor intermediário entre -1 e 0, já se for positivo, a solução tenderá a um valor entre 0 e 1, no mesmo intervalo. Porém, se $\varepsilon_0 = \ln(2)/(2\alpha)$, a solução $\phi(x)$ interpolará entre 0 e 1, comportamento similar às soluções do modelo $\lambda\phi^6$. Portanto, percebemos que os parâmetros α e ε_0 atuam na assimetria da solução e na mudança de seu valor assintótico.

Um importante questionamento que pode surgir a partir desse comportamento é: Afinal, a solução do campo ϕ ainda conecta mínimos globais do potencial? Para o modelo analisado sim, já que quando $\chi(x) \rightarrow 0$ o potencial tende à linha contínua de mínimos. Dessa forma, o campo ϕ pode assumir qualquer valor no limite em que $x \rightarrow -\infty$, que sua solução ainda conectará mínimos globais do potencial.

Poderíamos ainda incluir estrutura interna na solução $\phi(x)$, ou modificar a cauda direita da mesma, bastando para isso escolher a função $f(\chi)$ de forma apropriada. Uma possibilidade está

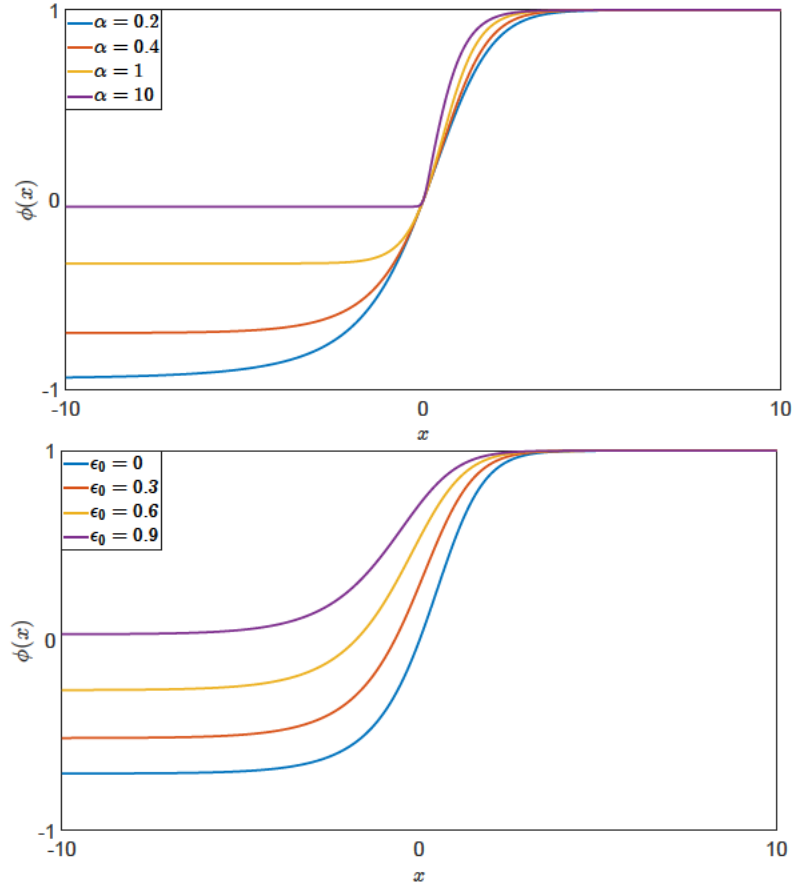


Figura 4.2 Solução $\phi(x)$ (4.6), para diversos valores de x_0 e α . No painel de cima tomamos $\epsilon_0 = x_0 = 0$, e no de baixo $x_0 = 0$ e $\alpha = 0.4$.

na escolha

$$f(\chi) = \frac{1}{\chi^2 (1 - \chi^2)^2}, \quad (4.8)$$

cujos denominadores tornam-se nulos quando $\chi \rightarrow \pm 1$ ou $\chi \rightarrow 0$. Dessa forma, é esperado que a solução $\phi(x)$ tenha ambas as caudas modificadas pela influência do campo χ . O potencial para essa escolha é dado por

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2} \chi^2 (1 - \chi^2)^2 (1 - \phi^2)^2 + \frac{1}{2} \alpha^2 \chi^2 (1 - \chi^2)^2, \quad (4.9)$$

que apresenta, por sua vez, três linhas contínuas de mínimos: em $\chi = 0$ e ϕ arbitrário, e em $\chi = \pm 1$ e ϕ arbitrário. A equação de primeira ordem para ϕ é

$$\phi' = \chi^2 (1 - \chi^2)^2 (1 - \phi). \quad (4.10)$$

Como não modificamos W_χ , a solução χ_s será a mesma do modelo anterior (4.4). Ao substituir χ_s na relação acima, encontramos que a solução para o campo ϕ é

$$\phi(x) = \tanh(\epsilon_\alpha(x)), \quad (4.11)$$

onde a nova variável é escrita como

$$\epsilon_\alpha(x) = \epsilon_0 + \frac{\tanh(\alpha(x - x_0))}{16\alpha} (2 - \tanh(\alpha(x - x_0))). \quad (4.12)$$

Novamente, ε_0 é uma constante de integração. Na figura 4.3 representamos as soluções do campo ϕ para alguns valores de α e ε_0 . Assim como havíamos previsto a partir da escolha da função de constrição, a solução apresenta uma modificação significativa em suas duas caudas. Essa mudança apresenta um caráter assimétrico com relação à origem, que se traduz na função $\varepsilon_\alpha(x)$ tender a valores constantes distintos e não simétricos quando $x \rightarrow \pm\infty$. Esses limites assintóticos são controlados pelos parâmetros α e ε_0 , uma vez que $\varepsilon_\alpha(x \rightarrow \infty) = \varepsilon_0 + 1/16\alpha$ e $\varepsilon_\alpha(x \rightarrow -\infty) = \varepsilon_0 - 3/16\alpha$. Esse comportamento surge devido à solução χ_s ser assimétrica com relação à origem, como mencionamos na subseção 2.3.2.

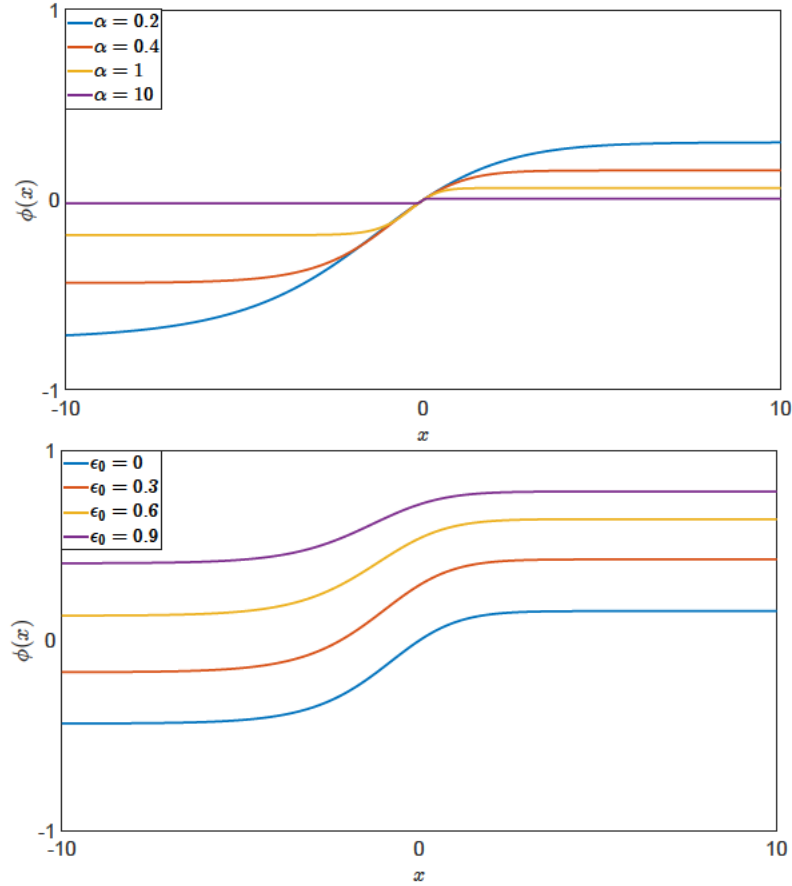


Figura 4.3 Solução $\phi(x)$ (4.11), para diversos valores de x_0 e α . No painel de cima tomamos $\varepsilon_0 = x_0 = 0$, e no de baixo $x_0 = 0$ e $\alpha = 0.4$.

Perceba que ao escolher a constrição (4.8), houve uma intenção de juntar modificações ao modelo. Como vimos no exemplo anterior, o termo $1/\chi^2$ modifica apenas a cauda esquerda da solução, já o termo $1/(1-\chi^2)^2$ modifica apenas a cauda direita da solução e quando consideramos a constrição (4.8), esses efeitos são somados. Portanto, podemos adicionar estruturas internas ou modificar as caudas das soluções com bastante liberdade, bastando para isso unir ao termo de constrição as modificações desejadas. Porém, é evidente que essa composição pode facilmente conduzir a resultados que não podem ser obtidos analiticamente.

4.1.2 Modelo BNRT Modificado

Para investigar a influência que a função $f(\chi)$ exerce sobre um modelo com função auxiliar acoplada, consideramos o já discutido modelo BNRT. Fizemos isso para que o caso usual sirva

como referência para comparação. A função auxiliar para esse modelo é definida como [52, 53]

$$W(\phi, \chi) = \phi - \frac{1}{3}\phi^3 - r\phi\chi^2, \quad (4.13)$$

onde r é um parâmetro real e positivo que media o acoplamento entre os campos. Dessa forma, ao tomar o sinal positivo nas equações de primeira ordem para os campos ϕ e χ , obtemos respectivamente que

$$\phi' = \frac{1}{f(\chi)} (1 - \phi^2 - r\chi^2), \quad (4.14a)$$

$$\chi' = -2r\phi\chi. \quad (4.14b)$$

Perceba que se considerarmos $f(\chi) = 1$, recaímos no modelo BNRT usual. O acoplamento dos campos devido à função auxiliar, não dificulta apenas a resolução das equações diferenciais acima, também torna obscura a influência de $f(\chi)$ sobre a solução dos campos. Isso ocorre porque não somos mais capazes de expressar a constrição geométrica de forma explícita a partir da variável $\varepsilon(x)$, definida na equação (3.50). Apesar disso, ainda conseguimos ter uma certa previsão de como a escolha da função $f(\chi)$ afeta o comportamento das soluções. Como exemplo, investigamos o caso em que $f(\chi) = 1/\chi^2$. Com isso, a equação de primeira ordem para o campo ϕ torna-se

$$\phi' = \chi^2 (1 - \phi^2 - r\chi^2). \quad (4.15)$$

Para essa escolha, o potencial toma a forma

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2}\chi^2 (1 - \phi^2 - r\chi^2)^2 + 2r^2\phi^2\chi^2, \quad (4.16)$$

cujos mínimos discretos são $(\phi_0 = 0, \chi_{\pm} = \pm 1/\sqrt{r})$ e, diferente do caso em que $f(\chi) = 1$, existe também uma linha contínua de mínimos em $\chi = 0$ e ϕ arbitrário. Dessa forma, assim como ressaltamos no caso em que a função auxiliar é desacoplada 4.1.1, podemos encontrar soluções que conectam mínimos que aparecem nesse novo conjunto, enriquecendo os possíveis resultados do modelo.

Para resolver o sistema de equações diferenciais acopladas, utilizamos o já discutido método do fator integrante 3.2. Ele nos auxilia a encontrar uma órbita geral que conecta dois mínimos globais do potencial e desacopla as equações de primeira ordem. Perceba que para cada escolha de $f(\chi)$ temos um fator integrante e uma órbita diferentes, como consequência não conseguimos aplicar este método de forma genérica para o modelo BNRT. O fator integrante encontrado para esse modelo é

$$I(\chi) = \frac{1}{\chi} e^{-\chi^2/2r}, \quad (4.17)$$

e, conseqüentemente, a órbita geral associada adquire a forma

$$\phi^2 = 1 - 2r^2 - r\chi^2 + \frac{c}{r} e^{\chi^2/2r}, \quad (4.18)$$

em que c é uma constante de integração que controla a forma da órbita. Para simplificar a análise, consideramos $c = 0$, obtendo assim

$$\frac{\phi^2}{1 - 2r^2} + \frac{r\chi^2}{1 - 2r^2} = 1, \quad (4.19)$$

que, no espaço de campos, representa uma elipse, caso o parâmetro r esteja contido no intervalo aberto $(0, \sqrt{2}/2)$. Caso contrário a relação acima não estará bem definida para ϕ e χ reais. Dessa forma, a órbita que encontramos conecta os mínimos $(\pm\sqrt{1-2r^2}, 0)$, e estes devem ser os limites assintóticos das soluções desse modelo. Para simplificar a notação, adotamos $R = \sqrt{1-2r^2}$. Vale ressaltar que, como os dois mínimos estão associados a apenas um valor de χ , é possível afirmar que caso uma solução não-trivial $\chi(x)$ exista nesse setor topológico esta é necessariamente não-monotônica. Além disso, como a função de constrição escolhida foi $f(\chi) = 1/\chi^2$ e o limite assintótico da solução deve obedecer $\chi(x \rightarrow \pm\infty) = 0$, sabemos que esta função deve modificar pelo menos as caudas da solução $\phi(x)$.

Substituindo a órbita (4.19) na equação (4.15), temos como resultado

$$\phi' = 2r(R^2 - \phi^2), \quad (4.20)$$

que é a equação de primeira ordem para o modelo $\lambda\phi^4$, considerando $\lambda = 2r$ e $v = R$. Logo, a solução dessa equação é

$$\phi(x) = R \tanh(2rR(x - x_0)). \quad (4.21)$$

Substituindo essa solução na equação da órbita (4.19), obtemos

$$\chi(x) = \frac{R}{\sqrt{r}} \operatorname{sech}(2rR(x - x_0)), \quad (4.22)$$

e ilustramos o comportamento das soluções acima na figura 4.4.

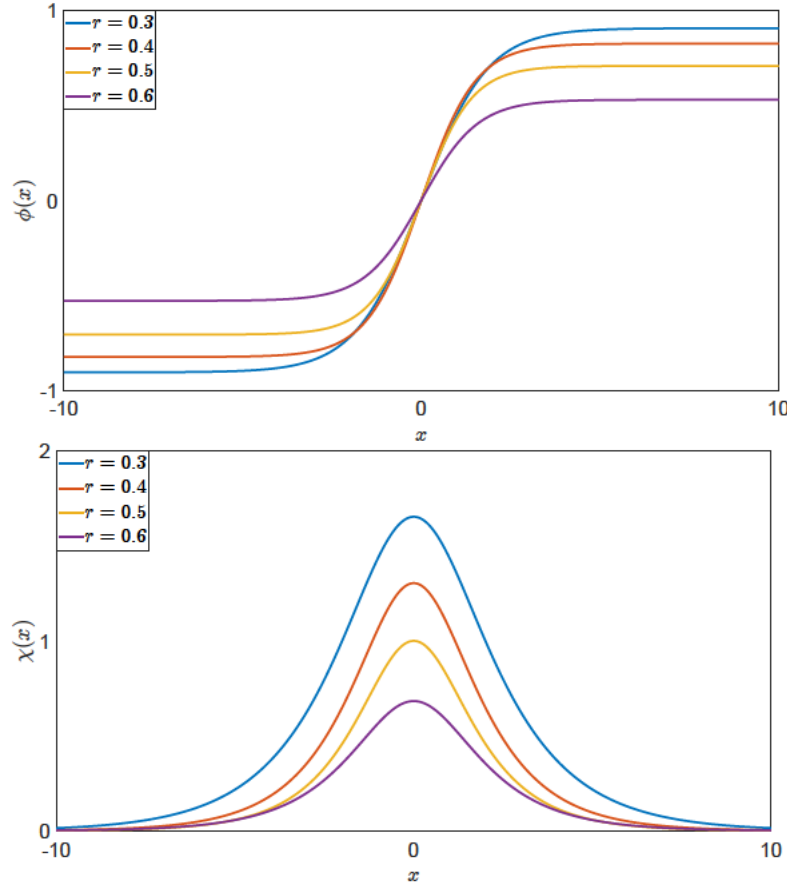


Figura 4.4 Soluções $\phi(x)$ (4.21) e $\chi(x)$ (4.22) do modelo BNRT modificado para diversos valores de r , com $x_0 = 0$.

Como esperado, o campo χ , através da função $f(\chi)$, altera as caudas da solução $\phi(x)$. Esta modificação é controlada pelo parâmetro r . Além disso, observamos que a mudança nas caudas da solução é simétrica com relação à origem, característica particular da escolha feita para a função $f(\chi)$. Poderíamos escolhê-la de tal forma que $1/f(\chi(x))$ fosse nulo em um valor finito de x , o que daria origem a uma estrutura interna.

Devido ao formalismo de primeira ordem, somos capazes de calcular a energia da solução a partir da expressão $E_B = |W(\phi(\infty), \chi(\infty)) - W(\phi(-\infty), \chi(-\infty))|$. Note que este cálculo não poderia ser realizado antes da obtenção das soluções, uma vez que a forma como a função $f(\chi)$ altera o limite assintótico da solução é obscuro. Para o modelo analisado, a energia de Bogomol'nyi é

$$E_B = \frac{4}{3}R(1 + r^2). \quad (4.23)$$

Note que esta diminui com o aumento do parâmetro r . Outra característica interessante desse modelo está no comportamento da densidade de energia, que pode ser definida como

$$\begin{aligned} \rho &= W_\phi \phi' + W_\chi \chi', \\ &= 4r^3 R^2 \operatorname{sech}^2(2rR(x - x_0)) + 4rR^4 \operatorname{sech}^2(2rR(x - x_0)) \tanh^2(2rR(x - x_0)), \end{aligned} \quad (4.24)$$

na expressão acima, denominamos o termo à esquerda como ρ_1 e o termo à direita como ρ_2 . Vale destacar que, como a função auxiliar é acoplada, não será apenas o termo ρ_1 que será afetado pela constrição geométrica e, por conta disso, analisamos tanto ρ quanto os termos que o formam. O comportamento da densidade de energia e de cada um dos seus termos foi exposto na figura 4.5, para alguns valores de r .

Percebemos que $\rho(x)$ possui dois tipos de comportamento, relacionados com o número de máximos globais da função. O primeiro ocorre quando $0 < r < r^*$, em que $r^* \approx 0.57778$. Para esses valores do parâmetro r a função ρ_2 apresenta regiões em que $\rho_2 > \rho_1$, e por conta disso o comportamento de dois picos presente na função ρ_2 se sobressai ao pico único de ρ_1 . Quando aumentamos r a amplitude de ρ_2 diminui enquanto a de ρ_1 aumenta, até que para $r^* \leq r < \sqrt{2}/2$ o comportamento de ρ_1 prevalece. É válido também notar que ρ_2 é nulo em $x = 0$ devido ao comportamento não-monotônico de $\chi(x)$, já que esta posição corresponde ao máximo da função $\chi(x)$ e, por consequência, $\chi' = 0$.

4.2 Constrição geométrica em modelos de três campos

Uma extensão natural para os modelos com constrição geométrica estudados até aqui é considerar um campo escalar adicional ψ e com ele estudar, por exemplo, como constrições geométricas sucessivas modificam a solução de um campo ou como as soluções de um modelo com função auxiliar acoplada são influenciadas pela constrição de um terceiro campo. Nessa seção desenvolvemos alguns dos resultados discutidos nos artigos [14, 57, 60, 61], dando ênfase àqueles desenvolvidos na referência [14].

O modelo analisado é descrito pela densidade Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}f(\chi, \psi)\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{2}g(\psi)\partial_\mu \chi \partial^\mu \chi + \frac{1}{2}\partial_\mu \psi \partial^\mu \psi - V(\phi, \chi, \psi), \quad (4.25)$$

em que $V(\phi, \chi, \psi)$ é o potencial, que ditará como serão as auto-interações e as interações entre os campos. Além disso, f e g são funções reais e não negativas que responderão como constrições geométricas sobre os campos ϕ e χ , respectivamente. Ao considerarmos $f(\chi, \psi) =$

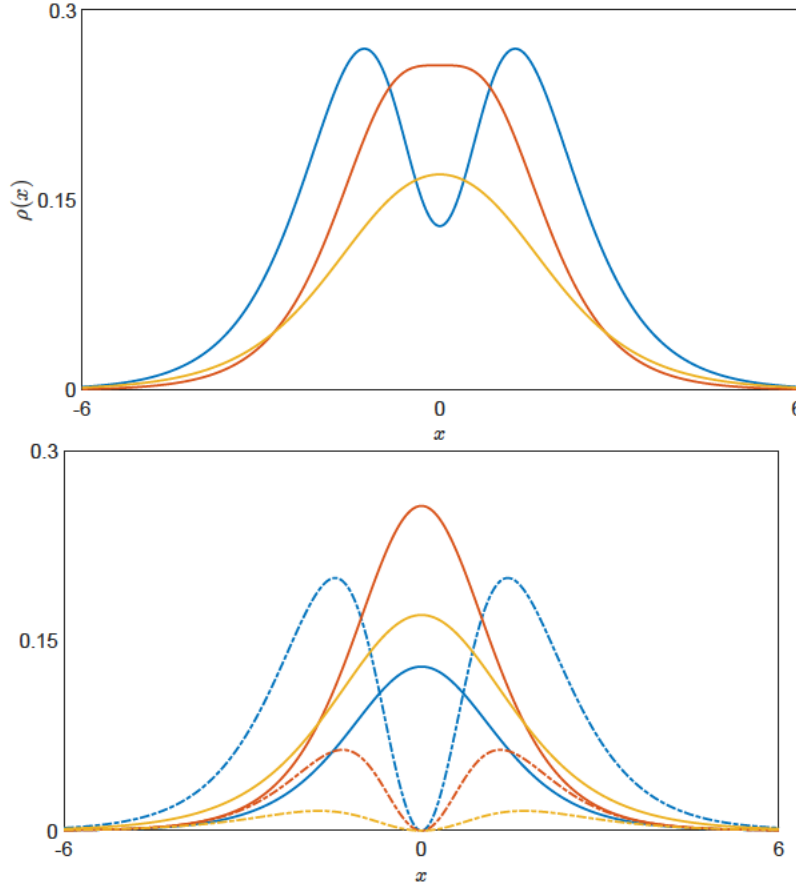


Figura 4.5 Densidade de energia ρ (4.24), e seus termos ρ_1 e ρ_2 para o modelo BNRT modificado, com $x_0 = 0$. Comparamos as situações em que $r = 0.35$, $r \approx 0.57778$ e $r = 0.65$, representadas pelas curvas azul, vermelha e amarela, respectivamente. No painel de baixo, representamos ρ_1 como uma linha contínua e ρ_2 como uma linha traço e ponto.

$g(\psi) = 1$, recaímos no caso usual, sem constrição geométrica. Os mínimos globais do potencial são ternas ordenadas (ϕ_i, χ_i, ψ_i) que obedecem à relação $V(\phi_i, \chi_i, \psi_i) = 0$.

As equações de movimento associadas ao modelo descrito por (4.25) são obtidas a partir das equações de Euler-Lagrange (2.8). Nesse caso, obtemos como resultado

$$\partial_\mu (f(\chi, \psi) \partial^\mu \phi) + V_\phi = 0, \quad (4.26a)$$

$$\partial_\mu (g(\psi) \partial^\mu \chi) + V_\chi = \frac{1}{2} f_\chi \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi, \quad (4.26b)$$

$$\partial_\mu \partial^\mu \psi + V_\psi = \frac{1}{2} f_\psi \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{2} g_\psi \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi, \quad (4.26c)$$

onde os subíndices nas funções V , f e g representam derivadas parciais com relação à variável do subíndice. Devido à invariância translacional do modelo é possível definir um tensor energia-momento conservado a partir da relação (2.14). Que pode ser reescrita como

$$T^{\mu\nu} = f(\chi, \psi) \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi + g(\psi) \partial^\mu \chi \partial^\nu \chi + \partial^\mu \psi \partial^\nu \psi - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (4.27)$$

No caso estático, a densidade de energia e o estresse são dados respectivamente por

$$T^{00} = \rho = \frac{1}{2}f\phi'^2 + \frac{1}{2}g\chi'^2 + \frac{1}{2}\psi'^2 + V, \quad (4.28a)$$

$$T^{11} = \sigma = \frac{1}{2}f\phi'^2 + \frac{1}{2}g\chi'^2 + \frac{1}{2}\psi'^2 - V. \quad (4.28b)$$

Assim como observamos no caso de dois campos escalares reais, a restrição de não negatividade imposta para as funções f e g assegura que a energia do sistema seja bem definida. Análogo ao que fizemos nos casos anteriores, para estabelecer um formalismo de primeira ordem precisamos reescrever a densidade de energia a partir da inclusão de uma função auxiliar $W(\phi, \chi, \psi)$, com o objetivo de estabelecer um vínculo inferior e topológico para a energia. Nesse caso, a densidade de energia pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \rho = \frac{f}{2} \left(\phi' \mp \frac{W_\phi}{f} \right)^2 + \frac{g}{2} \left(\chi' \mp \frac{W_\chi}{g} \right)^2 + \frac{1}{2} (\psi' \mp W_\psi)^2 \\ + \left(V - \frac{1}{2} \frac{W_\phi^2}{f} - \frac{1}{2} \frac{W_\chi^2}{g} - \frac{1}{2} W_\psi^2 \right) \pm \frac{dW}{dx}. \end{aligned} \quad (4.29a)$$

Logo, percebemos que para saturar o limite inferior da densidade de energia, o potencial deve ser definido como

$$V(\phi, \chi, \psi) = \frac{1}{2} \frac{W_\phi^2}{f(\chi, \psi)} + \frac{1}{2} \frac{W_\chi^2}{g(\psi)} + \frac{1}{2} W_\psi^2, \quad (4.30)$$

e devemos assegurar que as equações de primeira ordem abaixo sejam satisfeitas

$$\phi' = \pm \frac{W_\phi}{f(\chi, \psi)}, \quad (4.31a)$$

$$\chi' = \pm \frac{W_\chi}{g(\psi)}, \quad (4.31b)$$

$$\psi' = \pm W_\psi. \quad (4.31c)$$

Dessa forma, as soluções das equações de primeira ordem acima serão soluções de mínima energia e, portanto, necessariamente estáveis. Vale destacar que, assim como ocorre nos problemas com dois campos escalares reais, os sinais das equações de primeira ordem devem concordar para que seja possível escrever o termo dW/dx . A energia dessas soluções é dada por

$$E_B = |W(\phi(\infty), \chi(\infty), \psi(\infty)) - W(\phi(-\infty), \chi(-\infty), \psi(-\infty))|. \quad (4.32)$$

Ao construir o formalismo de primeira ordem, a forma específica que encontramos para o potencial e as equações de Bogomol'nyi satisfazem a condição de estresse nulo ($\sigma = 0$) da teoria, necessária para a estabilidade por reescala, como estabelece o Teorema de Derrick 2.4. Além disso, é possível mostrar que as equações de primeira ordem resolvem as equações de movimento para o caso estático se, e somente se, $W_{\phi\chi} = W_{\chi\phi}$, $W_{\phi\psi} = W_{\psi\phi}$ e $W_{\chi\psi} = W_{\psi\chi}$. Ou seja, essa condição é satisfeita sempre que a função auxiliar tiver segunda derivada bem definida.

A análise desse problema torna-se particularmente interessante quando consideramos que a função auxiliar é separável na soma $W(\phi, \chi, \psi) = W_1(\phi) + W_2(\chi) + W_3(\psi)$. Nessa situação, a equação de primeira ordem para ψ (4.31c) é independente dos demais campos e sua solução é denotada como ψ_s . Essa solução pode ser substituída na equação de primeira ordem para o campo χ (4.31b), que adquire a forma

$$\frac{d\chi}{dx} = \frac{W_\chi}{g(\psi_s(x))}. \quad (4.33)$$

Análogo ao que fizemos no caso de dois campos escalares reais, definimos uma nova variável $\varepsilon(x) = \int dx/g(\psi_s(x))$, para reescrever a equação acima como

$$\frac{d\chi}{d\varepsilon} = W_\chi, \quad (4.34)$$

que corresponde a um problema de um único campo escalar real em um espaço parametrizado pela variável ε . De forma semelhante, denotamos a solução da equação acima como χ_s e então substituímos as soluções χ_s e ψ_s na equação de primeira ordem para ϕ (4.31a), obtendo assim

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{W_\phi}{f(\chi_s(x), \psi_s(x))}. \quad (4.35)$$

Novamente, definimos uma nova variável $\gamma(x) = \int dx/f(\chi_s(x), \psi_s(x))$, que é utilizada para reescrever a equação de primeira ordem acima. Nesse caso, obtemos

$$\frac{d\phi}{d\gamma} = W_\phi, \quad (4.36)$$

mostrando que os campos χ e ψ realizam uma constrição geométrica sobre o campo ϕ , através da função de constrição $f(\chi, \psi)$. Na próxima subseção aplicamos a metodologia desenvolvida até aqui em alguns modelos desenvolvidos na referência [14].

4.2.1 Modelo 4-4-4

$$4.2.1.1 \quad f(\chi, \psi) = 1/\chi^2 \quad g(\psi) = 1/\psi^2$$

Nesta subseção, seguiremos uma classificação similar àquela empregada no capítulo anterior, onde a nomenclatura 4 – 4 – 4 refere-se à união dos modelos ϕ^4 , χ^4 e ψ^4 . Dessa forma, a função auxiliar que descreve este modelo é tal que

$$W(\phi, \chi, \psi) = \phi - \frac{1}{3}\phi^3 + \alpha\chi - \frac{1}{3}\alpha\chi^3 + \beta\psi - \frac{1}{3}\beta\psi^3, \quad (4.37)$$

em que α e β são parâmetros reais que modulam as intensidades dos campos χ e ψ . Nesse caso, não é a função auxiliar que acopla os campos, mas sim as funções de constrição geométrica f e g . Por conta disso, não exploramos os casos em que $f(\chi, \psi) = g(\psi) = 1$, uma vez que esta escolha desacoplaria os campos. Para a escolha $f(\chi, \psi) = 1/\chi^2$ e $g(\psi) = 1/\psi^2$, o potencial toma a forma

$$V(\phi, \chi, \psi) = \frac{1}{2}\chi^2(1 - \phi^2)^2 + \frac{1}{2}\alpha^2\psi^2(1 - \chi^2)^2 + \frac{1}{2}\beta^2(1 - \psi^2)^2, \quad (4.38)$$

cujos mínimos globais do potencial são $(\phi_\pm = \pm 1, \chi_\pm = \pm 1, \psi_\pm = \pm 1)$. A equação de primeira ordem para o campo ψ é dada por

$$\psi' = \beta(1 - \psi^2), \quad (4.39)$$

que pode ser resolvida de forma independente e possui como solução $\psi_s(x) = \tanh(\beta(x - x_0))$. Substituindo essa solução na equação de primeira ordem para o campo χ , obtemos

$$\chi' = \alpha \tanh^2(\beta(x - x_0))(1 - \chi^2). \quad (4.40)$$

Seguindo o procedimento que adotamos ao discutir constrição geométrica em modelos com dois campos escalares e definimos uma nova variável

$$\varepsilon_\beta(x) = \int \tanh^2(\beta(x-x_0)) dx = \varepsilon_0 + (x-x_0) - \frac{1}{\beta} \tanh(\beta(x-x_0)), \quad (4.41)$$

com isso a solução da equação diferencial (4.40) é

$$\chi(x) = \tanh(\alpha \varepsilon_\beta(x)). \quad (4.42)$$

Como consequência, a equação de primeira ordem para o campo ϕ é tal que

$$\phi' = \tanh^2(\alpha \varepsilon_\beta(x)) (1 - \phi^2). \quad (4.43)$$

Portanto, sua solução é dada por

$$\phi(x) = \tanh(\gamma_{\alpha\beta}(x)), \quad (4.44)$$

onde a nova variável $\gamma_{\alpha\beta}(x)$ é definida como

$$\gamma_{\alpha\beta}(x) = \int \tanh^2(\alpha \varepsilon_\beta(x)) dx. \quad (4.45)$$

Não conseguimos encontrar soluções analíticas para a integral acima, e devido a isso a resolvemos a equação diferencial (4.43) numericamente. As soluções $\phi(x)$ e $\chi(x)$ foram então expostas na figura 4.6, onde escolhemos como condição de contorno $\phi(0) = 0$.

Ao analisar a figura, notamos que as soluções $\phi(x)$ e $\chi(x)$ exibem um platô em $x = 0$. No entanto, o platô de $\phi(x)$ é mais largo. Esse efeito resulta da constrição geométrica imposta pelo campo χ , cujo valor se aproxima de zero na vizinhança de $x = 0$, intensificando o platô de $\phi(x)$. Isso sugere um comportamento cumulativo na aplicação de constrições geométricas sucessivas. Assim, caso fosse incluído um novo campo escalar real ao modelo, sujeito a uma restrição semelhante à que ϕ sofre de χ , a solução desse novo campo apresentaria um platô ainda maior.

$$4.2.1.2 \quad f(\chi, \psi) = 1/(\chi + \psi)^2 \quad g(\psi) = 1/\psi^2$$

Outra possibilidade reside na investigação da influência de uma função de constrição $f(\chi, \psi)$ que dependa tanto do campo χ quanto do campo ψ . Dessa forma, aumentamos bastante as possibilidades de modelos sob análise. Como exemplo, consideramos novamente o modelo 4-4-4 e utilizamos a mesma constrição sobre o campo χ . Como consequência, as soluções para os campos ψ e χ já foram calculadas e tem como resultado

$$\psi(x) = \tanh(\beta(x-x_0)), \quad (4.46a)$$

$$\chi(x) = \tanh(\alpha \varepsilon_\beta(x)), \quad (4.46b)$$

onde $\varepsilon_\beta(x)$ foi definido na equação (4.41). Dessa forma, ao considerarmos $f(\chi, \psi) = 1/(\chi + \psi)^2$ a equação de primeira ordem para o campo ϕ torna-se

$$\phi' = [\tanh(\beta(x-x_0)) + \tanh(\alpha \varepsilon_\beta(x))]^2 (1 - \phi^2). \quad (4.47)$$

Dessa forma, a solução da equação diferencial acima é tal que

$$\phi(x) = \tanh(\gamma_{\alpha\beta}(x)), \quad (4.48)$$

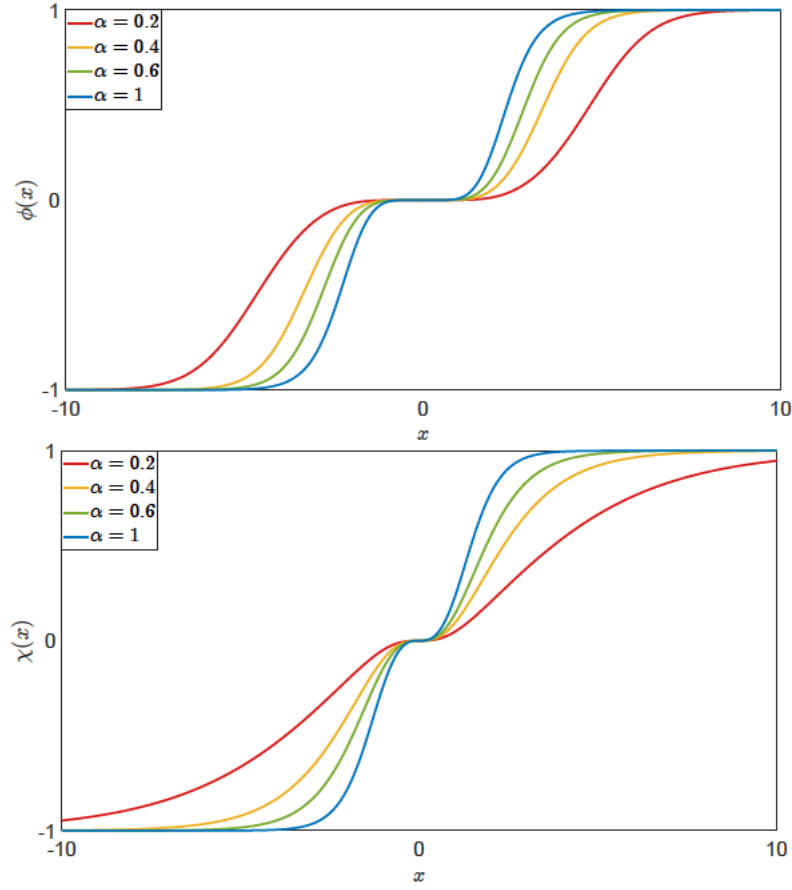


Figura 4.6 Soluções $\phi(x)$ (4.44) e $\chi(x)$ (4.42) do modelo 4 – 4 – 4 para diversos valores de α , com $x_0 = 0$, $\varepsilon_0 = 0$ e $\beta = 1$.

onde a nova variável é definida como

$$\gamma_{\alpha\beta}(x) = \int [\tanh(\beta(x - x_0)) + \tanh(\alpha\varepsilon_\beta(x))]^2 dx. \quad (4.49)$$

Novamente não fomos capazes de encontrar uma solução analítica para essa integral, com isso tivemos que resolver a equação diferencial (4.47) numericamente. Expomos o comportamento da solução $\phi(x)$ e da função $\frac{d}{dx}\gamma_{\alpha\beta}(x)$ na figura 4.7, em função do parâmetro α . Para isso, utilizamos como condição de contorno $\phi(0) = 0$.

Notamos que a função $\frac{d}{dx}\gamma_{\alpha\beta}(x)$ possui comportamento simétrico com relação a $x = 0$, o que contribui para uma solução também simétrica com relação ao mesmo ponto. Além disso, a única mudança importante sofrida pela solução $\phi(x)$ foi a presença de um platô em $x = 0$, já que este é um único valor de x que torna nulo $\frac{d}{dx}\gamma_{\alpha\beta}(x)$. O platô que aparece nessa solução é similar àquele encontrado na solução $\chi(x)$ exposta na figura 4.6. Isso ocorre devido à soma $\chi(x) + \psi(x)$, presente no termo de constrição, não possuir platô em $x = 0$ e, como consequência, não contribuir para o aumento da largura do platô que observamos no exemplo anterior 4.2.1.1.

Investigamos também a influência da constante de integração ε_0 na solução $\phi(x)$, expondo o seu comportamento e o da função $\frac{d}{dx}\gamma_{\alpha\beta}(x)$ na figura 4.8.

Percebemos claramente que este parâmetro induz uma assimetria na função $\frac{d}{dx}\gamma_{\alpha\beta}(x)$. Como consideramos α positivo, a função que mencionamos apresenta um mínimo global cuja posição é modificada pelo parâmetro ε_0 . Além de modificar a posição desse mínimo, a forma da função $\frac{d}{dx}\gamma_{\alpha\beta}(x)$ também é modificada: quando ε_0 é negativo o mínimo global da função é transla-

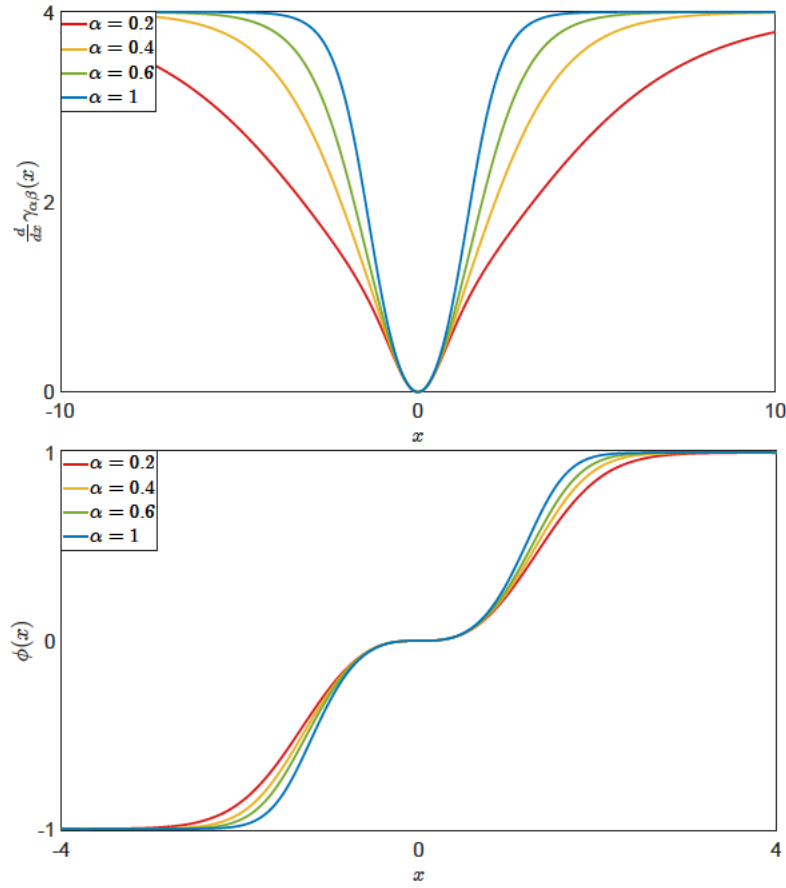


Figura 4.7 Solução $\phi(x)$ (4.48) e $\frac{d}{dx}\gamma_{\alpha\beta}(x)$ do modelo 4-4-4, onde $\gamma_{\alpha\beta}(x)$ foi definido em (4.49). Consideramos $x_0 = 0$, $\varepsilon_0 = 0$ e $\beta = 1$.

dados para a esquerda e esta torna-se assimétrica, quando ε_0 é positivo ocorre o inverso. Essa assimetria é herdada pela solução $\phi(x)$ e a posição do seu platô também é controlada por ε_0 . Além disso, não existem alterações nas caudas da solução, pois a função $\frac{d}{dx}\gamma_{\alpha\beta}(x)$ não é nula assintoticamente.

4.2.2 $f(\chi, \psi) = g(\psi)$

Nesta subseção, abordamos um caso particular do modelo descrito pela densidade Lagrangiana (4.25), pois consideramos $f(\chi, \psi) = f(\psi) = g(\psi)$. Essa ideia foi desenvolvida nas referências [57, 60, 61]. Além disso, investigamos modelos cuja função auxiliar é separada na soma $W(\phi, \chi, \psi) = \Gamma(\phi, \chi) + \Omega(\psi)$, ou seja, modelos cuja função auxiliar não acopla ψ aos demais campos. Como exemplo, tomamos $\Gamma(\phi, \chi)$ como a função auxiliar do modelo BNRT, dessa forma

$$\Gamma(\phi, \chi) = \phi - \frac{1}{3}\phi^3 - r\phi\chi^2, \quad (4.50)$$

onde r , como já sabemos, é um parâmetro real e positivo. Como o campo ψ é desacoplado dos demais, sua equação de primeira ordem pode ser resolvida de maneira independente e sua solução é denotada por $\psi_s(x)$. Logo, as equações de Bogomol'nyi para os demais campos, após

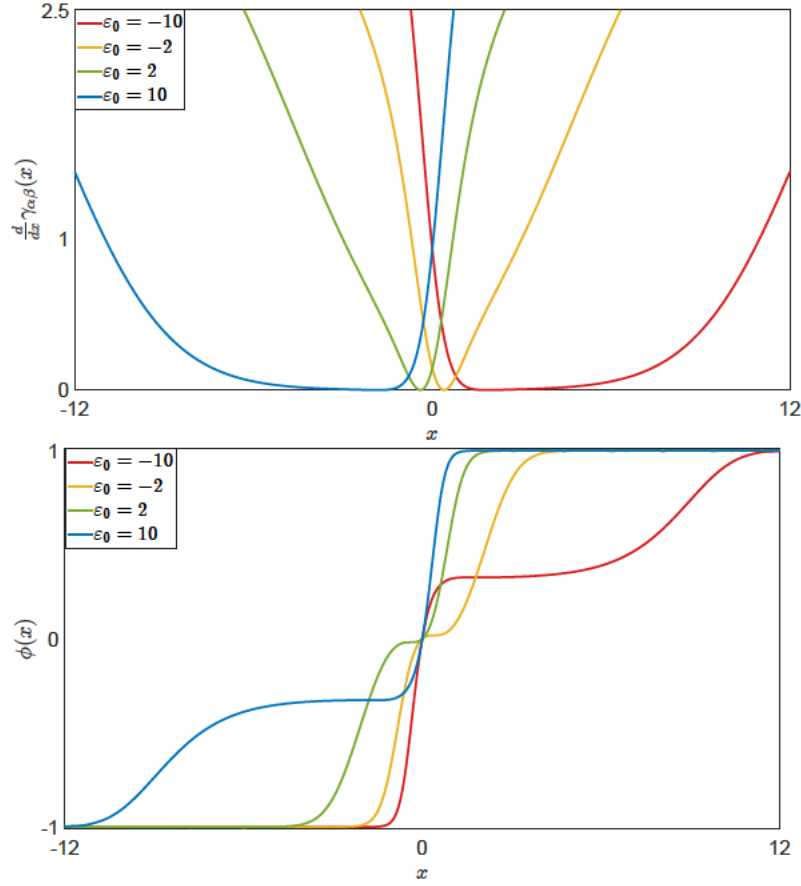


Figura 4.8 Solução $\phi(x)$ (4.48) e $\frac{d}{dx} \gamma_{\alpha\beta}(x)$ do modelo 4-4-4, onde $\gamma_{\alpha\beta}(x)$ foi definido em (4.49). Consideramos $x_0 = 0$, $\alpha = 0.2$ e $\beta = 1$.

a substituição da solução ψ_s , são

$$\phi' = \pm \frac{(1 - \phi^2 - r\chi^2)}{f(\psi_s)}, \quad (4.51a)$$

$$\chi' = \mp \frac{(2r\phi\chi)}{f(\psi_s)}. \quad (4.51b)$$

Dessa forma, ao definirmos a nova variável

$$\varepsilon(x) = \int \frac{dx}{f(\psi_s(x))}, \quad (4.52)$$

podemos reescrever as equações (4.51) como

$$\frac{d\phi}{d\varepsilon} = \pm (1 - \phi^2 - r\chi^2), \quad (4.53a)$$

$$\frac{d\chi}{d\varepsilon} = \mp (2r\phi\chi), \quad (4.53b)$$

que são as equações de primeira ordem para o modelo BNRT usual (3.13), porém parametrizadas pela variável $\varepsilon(x)$. Portanto, considerando como exemplo o setor topológico definido pelos

mínimos $(\pm 1, 0, \psi_{min})$, as soluções para os campos ϕ e χ são

$$\phi(x) = \pm \tanh(2r\varepsilon(x)), \quad (4.54a)$$

$$\chi(x) = \pm \sqrt{\frac{1-2r}{r}} \operatorname{sech}(2r\varepsilon(x)). \quad (4.54b)$$

Lembrando que o parâmetro r deve estar contido no intervalo $0 < r < 1/2$, para que as soluções sejam bem definidas. Observe que podemos adicionar livremente platôs às soluções acima, bastando para isso definir as funções $f(\psi)$ e $\Omega(\psi)$ de maneira adequada. Ressaltamos, porém, que a ocorrência dessas estruturas internas acontece na mesma posição para as soluções $\phi(x)$ e $\chi(x)$, já que elas sofrem a mesma influência do campo ψ . Como exemplo, consideramos

$$\Omega(\psi) = \alpha\psi - \frac{1}{3}\alpha\psi^3, \quad f(\psi) = \frac{1+\lambda}{1+\lambda\psi^2}, \quad (4.55)$$

onde λ é um parâmetro real e não-negativo. Este parâmetro real foi considerado na referência [58] e serve para induzir a formação do platô suavemente. Quando $\lambda = 0$, a função de constrição $f(\psi) = 1$ e o cenário sem constrição geométrica é recuperado. Por outro lado, quando $\lambda \gg 1$ a função de constrição $f(\psi) \approx 1/\psi^2$, contribuindo para a formação de um platô. A solução do campo ψ é

$$\psi(x) = \tanh(\alpha(x - x_0)), \quad (4.56)$$

e conseqüentemente a nova variável é definida como

$$\varepsilon(x) = \int \frac{1 + \lambda \tanh^2(\alpha(x - x_0))}{1 + \lambda} dx = \varepsilon_0 + x - x_0 - \frac{\lambda \tanh(\alpha(x - x_0))}{\alpha(1 + \lambda)}. \quad (4.57)$$

Com isso, podemos avaliar como se comportam as soluções dos campos ϕ e χ em função do parâmetro λ . Expomos esse comportamento na figura 4.9. Não avaliamos a influência dos demais parâmetros por se comportarem de forma similar aos casos que já descrevemos.

A partir da figura 4.9 reforçamos o já mencionado papel do parâmetro λ , já que quando este aumenta observamos a formação de um platô em $x = 0$. É importante ressaltar que a formação deste platô ocorre na mesma posição para as soluções $\phi(x)$ e $\chi(x)$, já que elas sofrem a mesma influência do campo ψ . Esse recurso, que introduz suavemente estruturas internas nas soluções, pode ser empregado também para explorar alterações nas caudas das soluções, bastando, para isso, definir adequadamente o termo de constrição. Nesse contexto, uma possibilidade é considerar como função de constrição

$$f(\chi) = \frac{1 + \lambda}{1 + \lambda(1 - \psi)^2}, \quad (4.58)$$

que quando $\lambda \gg 1$, induz uma modificação na cauda direita da solução.

Por outro lado, é possível realizar a investigação de como as soluções $\phi(x)$ e $\chi(x)$, definidas em outros setores topológicos, são influenciadas pela constrição geométrica imposta pelo campo ψ . Para isso, basta substituírmos as soluções (4.54) por um outro conjunto de soluções compatível com o modelo BNRT. Um exemplo seria considerar as soluções (3.25) e (3.26), realizando a transformação $x \rightarrow \varepsilon(x)$.

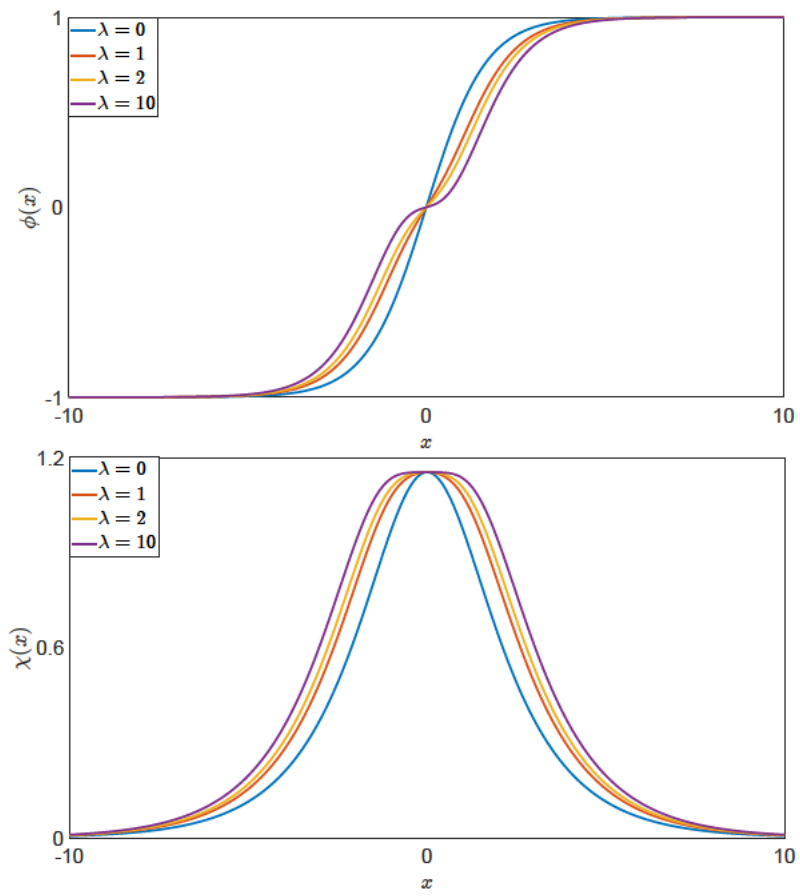


Figura 4.9 Solução $\phi(x)$ (4.54a) e $\chi(x)$ (4.54b) do modelo BNRT-4, para diversos valores de λ . Consideramos $x_0 = 0$, $\alpha = 1$, $r = 0.3$ e $\varepsilon_0 = 0$.

Conclusão e perspectivas

Nesta dissertação exploramos estruturas localizadas do tipo kink, em modelos de um, dois e três campos escalares reais. Nesse estudo, apresentamos as suas principais características e pavimentamos um caminho para explorarmos modelos com a presença de constrição geométrica. Iniciamos no capítulo 2 discutindo o ferramental necessário para a descrição de modelos de campos escalares reais, tais como a obtenção de equações de movimento e a definição de um tensor energia-momento conservado. A partir disso, construímos uma teoria de campos que admite soluções localizadas e de energia finita, que conectam assintoticamente mínimos globais do potencial. Discutimos a classificação dessas soluções em topológicas e não-topológicas, bem como a estabilidade topológica conferida às soluções tipo kink. Em seguida, mostramos o formalismo BPS, capaz de encontrar uma equação de ordem inferior à equação de movimento e cujas soluções são de mínima energia. Aplicamos este formalismo em alguns modelos bem estabelecidos na literatura: $\lambda\phi^4$, $\lambda\phi^6$ e *Vacuumless*. Apresentamos também o Teorema de Derrick-Hobart e discutimos as justificativas que asseguram a sua conclusão. Em seguida, exploramos uma das formas de evadi-la. Continuamos com a metodologia necessária para a descrição de modelos generalizados e aplicamos esta a um modelo cuja dinâmica é regida por um termo de Dirac-Born-Infeld.

No capítulo 3, expandimos a complexidade do modelo analisado ao incluir mais um campo escalar real. Como consequência, o nível de dificuldade das equações que resolvemos também aumentou, mesmo quando fazemos uso do formalismo de primeira ordem. Devido a isso, apresentamos dois métodos importantes para a obtenção de soluções em modelos cuja função auxiliar é acoplada, são eles o método das órbitas tentativas e o método do fator integrante. Em seguida, aplicamos estes métodos ao modelo BNRT. Descrevemos também como se comportam as soluções de um modelo ao incluirmos um acoplamento no termo dinâmico de um dos campos, mostrando que este responde como uma constrição geométrica que um dos campos exerce sobre o outro. Logo após, aplicamos essa descrição ao modelo 4 – 4, investigando a influência que cada parâmetro desempenha sobre a solução e mostrando como manipular a posição, largura e número de estruturas internas que aparecem na mesma.

No capítulo 4, exploramos mais alguns modelos com constrição geométrica. Pontuamos que, a constrição geométrica não possui apenas a capacidade de inclusão de platôs nas solução, esta também pode alterar o comportamento assintótico da mesma que, mesmo com essa modificação, ainda conecta mínimos globais do potencial. Além disso, investigamos a influência que a constrição geométrica impõe sobre um modelo com função auxiliar acoplada, onde para isso, realizamos esta análise sobre o modelo BNRT. Aumentamos ainda mais a complexidade do modelo ao adicionar mais um campo escalar real, o que possibilitou o estudo de constrições geométricas sucessivas e de sistemas onde a função auxiliar acopla apenas dois campos, que sofrem a mesma constrição de um terceiro campo.

Como perspectiva para o trabalho que empenhamos, existem algumas generalizações diretas dos trabalhos originais que desenvolvemos como, por exemplo, o estudo de modelos com quebra explícita da simetria de Lorentz, aos moldes das referências [62–64], e sua correlação com a

construção geométrica ou ainda a investigação de modelos com construção geométrica em sistemas regidos por dinâmica generalizada, como por exemplo, aqueles com dinâmica DBI. Existe também a possibilidade de estudarmos estruturas topológicas mais complexas como vórtices, monopolos e dyons, incluindo a análise de acoplamentos dinâmicos inspirados nos modelos de construção geométrica que estudamos. Alguns estudos efetuados nessa direção são [65–69], onde foi proposta uma função não negativa P que acopla o termo dinâmico do campo de calibre $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ a um campo escalar real [65, 68] ou a um campo escalar complexo [66, 67, 69], dando origem a novas estruturas como, por exemplo, os vórtices com múltiplas camadas. Outra possibilidade reside na análise de modelos em espaços curvos, na linha dos modelos de branas espessas, onde campos escalares reais são utilizados para modelar a métrica do espaço-tempo. Algumas referências nessa direção são [70–72], onde foram considerados modelos em que os campos escalares reais são acoplados por conta da função auxiliar escolhida [70], devido à presença de uma função de construção geométrica [71] ou apenas devido a forma que o potencial deve adquirir para a implementação do formalismo de primeira ordem, ou seja, a função auxiliar é desacoplada e não existem termos de acoplamento como a função de construção [72].

Referências Bibliográficas

- [1] R. Rajaraman, *Solitons and instantons: an introduction to solitons and instantons in quantum field theory*, North-Holland (1984).
- [2] D. K. Campbell, A. R. Bishop, *Solitons in polyacetylene and relativistic-field-theory models*, Phys. Rev. B **24**, 4859(R) (1981).
- [3] Y. S. Kivshar, B. A. Malomed, *Dynamics of solitons in nearly integrable systems*, Rev. Mod. Phys. **61**, 763 (1989).
- [4] L. Amendola, S. Tsujikawa, *Dark Energy* Cambridge University Press (2010).
- [5] A. Friedland, H. Murayama, M. Perelstein, *Domain walls as dark energy*, Phys. Rev. D **67**, 043519 (2003).
- [6] J. Hong, Y. Kim, P. Y. Pac, *Multivortex solutions of the Abelian Chern-Simons-Higgs theory*, Phys. Rev. Lett. **64**, 2230 (1990).
- [7] R. Jackiw, E. J. Weinberg, *Self-Dual Chern-simons Vortices*, Phys. Rev. Lett. **64**, 2234 (1990).
- [8] H. B. Nielsen, P. Olesen, *Vortex-line models for dual strings*, Nucl. Phys. B **61**, 45 (1973).
- [9] A. Vilenkin, E. P. S. Shellard, *Cosmic Strings and Other Topological Defects*, Cambridge University Press (1994).
- [10] G. 't Hooft, *Magnetic monopoles in unified gauge theories*, Nucl. Phys. B **79**, 276 (1974).
- [11] A. M. Polyakov, *Particle spectrum in Quantum Field Theory*, JETP Lett. **20**, 194 (1974).
- [12] B. Julia, A. Zee, *Poles with both magnetic and electric charges in non-Abelian gauge theory*, Phys. Rev. D **11**, 2227 (1975).
- [13] D. Bazeia, M. A. Feitosa, R. Menezes, G. S. Santiago, *Geometrically constrained localized configurations: First-order framework and analytical solutions*, Annals of Physics **463**, 169638 (2024).
- [14] D. Bazeia, G. S. Santiago, *Localized structures in three-field models: Geometrically constrained configurations and the first-order framework*, Physica D **462**, 134156 (2024).
- [15] N. A. Lemos, *Mecânica Analítica*, Editora Livraria da Física (2007).
- [16] H. Năstase, *Classical Field Theory*, Cambridge University Press (2019).
- [17] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press (1985).

- [18] E. Noether, *Invariant variation problems*, Transport theory and statistical physics **1**, 186 (1971).
- [19] M. A. Lião, *Soluções localizadas em Teoria Clássica de Campos*, Tese de Doutorado, Universidade Federal da Paraíba (2024).
- [20] N. Manton, P. Sutcliffe, *Topological Solitons*, Cambridge University Press (2007).
- [21] T. Vachaspati, *Kinks and Domain Walls: An Introduction to Classical and Quantum Solitons*, Cambridge University Press (2007).
- [22] M. A. Marques, *Soluções Localizadas em Diversas Dimensões*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal da Paraíba (2015).
- [23] Y. M. Shnir, *Topological and Non-Topological Solitons in Scalar Field Theories*, Cambridge University Press (2018).
- [24] M. A. Lohe, *Soliton structures in $P(\phi)_2$* , Phys. Rev. D **20**, 3120 (1979).
- [25] D. Bazeia, *Topological solitons in a vacuumless system*, Phys. Rev. D **60**, 067705 (1999).
- [26] E. B. Bogomol'nyi, *The stability of classical solutions*, Sov. J. Nucl. Phys. **24**, 449 (1976).
- [27] D. Balin, A. Love, *Supersymmetric Gauge Field Theory And String Theory*, Taylor & Francis (1994).
- [28] M. K. Prasad, Charles M. Sommerfield, *Exact Classical Solution for the 't Hooft Monopole and the Julia-Zee Dyon*, Phys. Rev. Lett. **35**, 760 (1975).
- [29] C. Adam, A. Wereszczynski, *BPS property and its breaking in 1+1 dimensions*, Phys. Rev. D **98**, 116001 (2018).
- [30] D. Bazeia, L. Losano, R. Menezes, J. C. R. E. Oliveira, *Generalized global defect solutions*, Eur. Phys. J. C **51**, 953 (2007).
- [31] D. Bazeia, L. Losano, R. Menezes, *First-order framework and generalized global defect solutions*, Phys. Lett. B **668**, 246 (2008).
- [32] E. Babichev, *Global topological k-defects*, Phys. Rev. D **74**, 085004 (2006).
- [33] Y. Zhong, Y. X. Liu, *K-field kinks: stability, exact solutions and new features*, JHEP **10**, 041 (2014).
- [34] D. Bazeia, A. S. Lobao, R. Menezes, *Stable static structures in models with higher-order derivatives*, Annals Phys. **360**, 194 (2015).
- [35] Y. Zhong, R.-Z. Guo, C.-E. Fu, Y.-X. Liu, *Kinks in higher derivative scalar field theory*, Phys. Lett. B **782**, 346 (2018).
- [36] M. A. Lião, *Defeitos Topológicos em Teoria Clássica de Campos*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal da Paraíba (2020).
- [37] I. Cho, A. Vilenkin, *Vacuum defects without a vacuum*, Phys. Rev. D **59**, 021701 (1998).

- [38] I. Cho, A. Vilenkin, *Gravitational field of vacuumless defects*, Phys. Rev. D **59** 063510 (1999).
- [39] R. H. Hobart, *On the Instability of a Class of Unitary Field Models*, Proc. Phys. Soc. **82**, 201 (1963).
- [40] G. H. Derrick, *Comments on Nonlinear Wave Equations as Models for Elementary Particles*, J. Math. Phys. **5** 1252, (1964).
- [41] U. Enz, *Discrete Mass, Elementary Length, and a Topological Invariant as a Consequence of a Relativistic Invariant Variational Principle*, Phys. Rev. **131**, 1392 (1963).
- [42] R. Menezes, *Defeitos Globais em Teoria de Campos e Aplicações*, Tese de Doutorado, Universidade Federal da Paraíba (2007).
- [43] D. Bazeia, J. Menezes, R. Menezes, *New Global Defect Structures*, Phys. Rev. Lett. **91**, 241601 (2003).
- [44] I. A. Souza, *Soluções Topológicas e Não-Topológicas em Teoria Classica de Campos*, Tese de Doutorado, Universidade Federal da Paraíba (2022).
- [45] M. Born, *Modified Field Equations with a Finite Radius of the Electron*, Nature **132**, 282 (1933).
- [46] J. Beltrán Jiménez, L. Heisenberg, G. J. Olmo, D. Rubiera-Garcia, *Born–Infeld inspired modifications of gravity*, Physics Reports **727**, 1 (2018).
- [47] M. Born, L. Infeld, *Foundations of the new field theory*, Proc. R. Soc. Lond. A **144** 425 (1934).
- [48] D. Bazeia, E. E. M. Lima, L. Losano, *Kinklike structures in models of the Dirac–Born–Infeld type*, Annals of Physics **388**, 408 (2018).
- [49] D. Bazeia, *Campos Escalares em Ação*, Tese Apresentada em Concurso de Professor Titular, Universidade Federal da Paraíba (2004).
- [50] R. Rajaraman, *Solitons of Coupled Scalar Field Theories in Two Dimensions*, Phys. Rev. Lett. **42**, 200 (1979).
- [51] D. Bazeia, W. Freire, L. Losano, R. F. Ribeiro, *Topological Defects and the Trial Orbit Method*, Mod. Phys. Lett. A **17**, 1945 (2002).
- [52] D. Bazeia, M. J. dos Santos, R. F. Ribeiro, *Solitons in systems of coupled scalar fields*, Phys. Lett. A **208**, 84 (1995).
- [53] D. Bazeia, J. R. Nascimento, R. F. Ribeiro, D. Toledo, *Soliton stability in systems of two real scalar fields*, J. Phys. A **30**, 8157 (1997).
- [54] A. A. Izquierdo, M. A. G. Leon, J. M. Guilarte, *The kink variety in systems of two coupled scalar fields in two space-time dimensions*, Phys. Rev. D **65** 085012 (2002).
- [55] H. L. Guidorizzi, *Um Curso de Cálculo - Vol. 4*, LTC (2013).

- [56] D. Bazeia, M. A. Liao, M. A. Marques, *Geometrically constrained kinklike configurations*, Eur. Phys. J. Plus **135**, 383 (2020).
- [57] A. J. Balseyro Sebastian, D. Bazeia, M. A. Marques, *Mechanism to induce geometric constriction on kinks and domain walls*, EPL **141**, 34003 (2023).
- [58] João G. F. Campos, Fabiano C. Simas, D. Bazeia, *Kink scattering in the presence of geometric constrictions*, Journal of High Energy Physics **10**, 124 (2023).
- [59] P.-O. Jubert, R. Allenspach, A. Bischof, *Magnetic domain walls in constrained geometries*, Phys. Rev. B **69**, 220410(R) (2004).
- [60] D. Bazeia, M. A. Marques, M. Paganelly, *Manipulating the internal structure of Bloch walls*, Eur. Phys. J. Plus **137**, 1117 (2022).
- [61] M. A. Marques, R. Menezes, *Geometrically constrained multifield models with BNRT solutions*, Chaos Solitons and Fractals **181**, 114730 (2024).
- [62] M. N. Barreto, D. Bazeia, R. Menezes, *Defect Structures in Lorentz and CPT Violating Scenarios*, Phys. Rev. D **73**, 065015 (2006).
- [63] D. Bazeia, M. M. Ferreira Jr., A. R. Gomes, R. Menezes, *Lorentz-violating effects on topological defects generated by two real scalar fields*, Physica D **239**, 942 (2010).
- [64] C. Adam, K. Oles, T. Romanczukiewicz, A. Wereszczynski, W. J. Zakrzewski, *Spectral walls in multifield kink dynamics*, J. High Energy Phys. **2021**, 147 (2021).
- [65] D. Bazeia, M. A. Marques, R. Menezes, *Maxwell–Higgs vortices with internal structure*, Phys. Lett. B **780**, 485 (2018).
- [66] D. Bazeia, M. A. Marques, D. Melnikov, *Planar ringlike vortices*, Phys. Lett. B **785**, 454 (2018).
- [67] D. Bazeia, L. Losano, M. A. Marques, R. Menezes, *Analytic vortex solutions in generalized models of the Maxwell–Higgs type*, Phys. Lett. B, **778**, 22 (2018).
- [68] D. Bazeia, M. A. Liao, M. A. Marques, R. Menezes, *Multilayered vortices*, Phys. Rev. Research **1**, 033053 (2019).
- [69] D. Bazeia, M. A. Liao, M. A. Marques, *Multimagnetic monopoles*, Eur. Phys. J. C, **81**, 552 (2021).
- [70] D. Bazeia, A. R. Gomes, *Bloch Brane*, J. High Energy Phys. **05** 012 (2004).
- [71] D. Bazeia, D. A. Ferreira, M. A. Marques, *Symmetric and asymmetric thick brane structures*, Eur. Phys. J. Plus, **135**, 587 (2020).
- [72] D. Bazeia, A. S. Lobão Jr., *Mechanism to control the internal structure of thick brane*, Eur. Phys. J. C, **82** 579 (2022).